



INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE  
CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA  
(ILACVN)

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
FÍSICA APLICADA (PPGFISA)

DIFUSÃO ANÔMALA NO JOGO DA VIDA

JULIANA DE SOUZA PEREIRA

Foz do Iguaçu  
2023



INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE  
CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA  
(ILACVN)

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
FÍSICA APLICADA (PPGFISA)

## DIFUSÃO ANÔMALA NO JOGO DA VIDA

JULIANA DE SOUZA PEREIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Calheiros Lapas

Foz do Iguaçu  
2023

JULIANA DE SOUZA PEREIRA

DIFUSÃO ANÔMALA NO JOGO DA VIDA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Física.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Luciano Calheiros Lapas  
UNILA

---

Prof. Dr. Eduardo do Carmo  
UNILA

---

Prof. Dr. Ismael Victor de Lucena Costa  
UnB

Foz do Iguaçu, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Catálogo elaborado pelo Setor de Tratamento da Informação  
Catálogo de Publicação na Fonte. UNILA - BIBLIOTECA LATINO-AMERICANA - PTI

P436

Pereira, Juliana de Souza.

Difusão anômala no jogo da vida / Juliana de Souza Pereira. - Foz do Iguaçu, 2023. 183 f. il., color.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada. Foz do Iguaçu – PR, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Calheiros Lapas.

1. Autômatos celulares. 2. Jogo da Vida. 3. Fenômenos de difusão. 4. Difusão normal e anômala.  
5. Simulação computacional. 6. Teorema de Khinchin. I. Lapas, Prof. Dr. Luciano Calheiros. II. Título.

CDU 004.89

“Temos, porém, este tesouro em vasos de barro, para que a excelência do poder seja de DEUS, e não de nós.” (2 Coríntios 4:7).

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente eu agradeço a DEUS. "Porque NELE vivemos, e nos movemos, e existimos (...)" (Atos 17:28). Porque sem DEUS nada podemos fazer (conforme João 15:5). Mas "Posso todas as coisas NAQUELE que me fortalece" (Filipenses 4:13).

Estudar Física tem sido um presente, uma dádiva de DEUS, porque através dela eu aprendo mais a respeito do CRIADOR de todas as coisas. E tal como um engenheiro que deixa marcas em sua invenção, sendo O CRIADOR, DEUS deixou Sua Impressão Digital na criação.

"<sup>1</sup> No princípio era o Verbo, e o Verbo estava com Deus, e o Verbo era Deus. <sup>2</sup> Ele estava no princípio com Deus. <sup>3</sup> TODAS AS COISAS FORAM FEITAS POR ELE, E SEM ELE NADA DO QUE FOI FEITO SE FEZ. (...) <sup>14</sup> E o Verbo se fez carne, e habitou entre nós, e vimos a sua glória, como a glória do unigênito do Pai, cheio de graça e de verdade. (João 1:1-3, 14).

Todas as coisas foram feitas por DEUS e sem DEUS nada viria a existência. Diante de tudo o que foi perfeitamente e infinitesimalmente criado e calibrado, não consigo conceber a noção de não reconhecer a magnificência dO CRIADOR e conhecer mais a ELE ao se debruçar sobre estudos a respeito de Sua magnífica e tão complexa Criação. O Grande primeiro Projetor, o responsável por programar medidas, definir leis, regras, ajudar os elementos, agrupamentos, graus, níveis, propriedades para compor um sistema tão complexo que é o mundo e o próprio universo.

Que toda Honra e Glória sejam dadas somente a DEUS. O DEUS da Trindade: DEUS PAI, DEUS FILHO JESUS e DEUS ESPÍRITO SANTO DE DEUS.

Sou grata pelo privilégio de conhecer e pertencer a DEUS. Sou grata por poder aprender mais de DEUS em minha carreira como estudante de Física. Sou grata em como DEUS tem sido tão bom comigo em todo esse processo, me capacitando, me ensinando, sendo meu Supremo Professor, me ensinando a Seu respeito enquanto me ensina a respeito de Sua própria Criação.

"Porque as suas coisas invisíveis, desde a criação do mundo, tanto o seu eterno poder, como a sua divindade, se entendem, e claramente se vêem pelas coisas que estão criadas, para que eles fiquem inescusáveis;" (Romanos 1:20).

<sup>1</sup> Os céus manifestam a glória de DEUS e o firmamento anuncia a obra das suas mãos.

<sup>2</sup> {um} dia faz declaração a {outro} dia, e {uma} noite mostra sabedoria a {outra} noite.

<sup>3</sup> Sem linguagem, sem fala, ouvem-se as suas vozes

<sup>4</sup> em toda a extensão da terra, e as suas palavras, até ao fim do mundo. Neles pôs {uma} tenda para o sol,

<sup>5</sup> que é qual noivo que sai do seu tálamo {e} se alegra como um herói a correr o seu caminho.

<sup>6</sup> A sua saída {é} desde uma extremidade dos céus, e o seu curso, até à outra extremidade deles; e nada se furta ao seu calor.

<sup>7</sup> A lei do SENHOR {é} perfeita e refrigera a alma; o testemunho do SENHOR {é} fiel e dá sabedoria aos símplices.

<sup>8</sup> Os preceitos do SENHOR {são} retos e alegam o coração; o mandamento do SENHOR {é} puro e alumia os olhos.

<sup>9</sup> O temor do SENHOR é limpo e permanece eternamente; os juízos do SENHOR {são} verdadeiros e justos juntamente.

<sup>10</sup> Mais desejáveis {são} do que o ouro, sim, do que muito ouro fino; e mais doces do que o mel e o {ou as gotas} licor dos favos.

<sup>11</sup> Também por eles é admoestado o teu servo; {e} em os guardar {há} grande recompensa.”

(Salmos 19:1-11).

“Mas graças a DEUS que nos dá a vitória por nosso SENHOR JESUS CRISTO.” (1 Coríntios 15:57).

“Louvai ao SENHOR, porque é bom; pois a sua benignidade dura perpetuamente.” (1 Crônicas 16:34).

“Eu louvarei ao SENHOR segundo a sua justiça, e cantarei louvores ao nome do SENHOR altíssimo.” (Salmos 7:17).

“Grandes coisas fez o SENHOR por nós, pelas quais estamos alegres.”  
(Salmos 126:3).

Também gostaria muito de agradecer a minha querida mãe, uma mulher abençoada por DEUS, que tem lutado ao meu lado, no enfrentamento de todos os obstáculos e dificuldades. Tem orado por mim, tem intercedido a DEUS por mim em todos os anos de minha vida. Tem me ensinado o caminho que devo seguir, os santos caminhos do SENHOR. Tem tido paciência comigo, carinho, esforço, dedicação, amor. Tem chorado comigo e se alegrado comigo em todo tempo. Tem me incentivado a ir além, a estudar, a me esforçar, a dar o meu melhor para a glória de DEUS. Quem me ensinou a ler. Quem sempre me ajudou desde pequena em minhas lições de casa, quando tinha dificuldades para escrever. Quem sempre me ouve e me aconselha. Quem sempre DEUS usa para me acalmar e dizer para eu ter Fé em DEUS que tudo dará certo. Quem DEUS usou para falar comigo coisas a respeito do futuro que eu não sabia que ia passar, mas DEUS já estava me preparando, e me confirmando a vitória em CRISTO JESUS. Uma mulher guerreira, valente, cheia do ESPIRITO SANTO DE DEUS em sua vida e que é meu grande exemplo a ser seguido como mulher, mãe, amiga, serva e filha de DEUS.

Agradeço ao meu pai. Um homem inteligente, esforçado e trabalhador. Sempre que eu perguntava algo para ele, ele sabia responder corretamente. Sempre interessado em estar informado, leitor assíduo, preocupado com a informação. Nesses anos de estudos me ajudou muitíssimo. Me levava para onde eu precisasse para estudar, como no cursinho pré-vestibular, ao longo da minha graduação, nos estágios, eventos, até para o aeroporto em minha primeira viagem de avião, lá estava ele juntamente com minha mãe e irmã, para me apoiar em minha viagem representando a instituição que estudava na época. Sempre feliz, contente, orgulhoso e incentivador, se emocionava com nossas vitórias e conquistas. Quando precisava, estava lá para me ajudar, inclusive na montagem da pista de testes da robótica para a realização do meu TCC. Um grande pai, amigo, protetor que para sempre guardarei com muito amor, carinho e saudades em meu coração.

Agradeço a minha amada irmã, que muito tem me influenciado nos estudos. Seu comprometimento, organização, esforço, dedicação e foco tem sido um grande exemplo pra mim. Esteve comigo ao longo de todos esses anos me ajudando, incentivando, intercedendo e orando a DEUS por mim. Quem se comunica comigo e me entende apenas pelo olhar. Quem me ajudou em meus trabalhos e pesquisas, me orientou em minhas

escritas, me incentivou a ler, a estudar, a ir além. Quem me apoia em minhas missões, que está sempre ao meu lado em todos os momentos. Uma irmã, uma guerreira valente de JESUS, uma serva de DEUS, uma professora, uma soldado de CRISTO, uma amiga para toda vida.

Agradeço aos meus avós, por todo apoio, ajuda, carinho, por todas as orações, preocupações e intercessões. A fé e a confiança em DEUS que eles demonstram e transmitem, o coração tranquilo, a paz e a serenidade de que tudo vai dar certo, e tudo acabará bem segundo CRISTO JESUS, tem sido grandes exemplos para mim.

Agradeço muitíssimo ao meu orientador. Diante de um grande desafio, em um tempo reduzido, e em uma área extremamente complexa e abstrata pra mim, aceitou me orientar. Sua paciência, esforço, dedicação, compreensão de minhas dificuldades, diferentes estratégias de ensino, empatia, solidariedade, preocupação e empenho em me ensinar, repetindo várias vezes as mesmas coisas com serenidade, tranquilidade e suavidade até que eu fosse capaz de compreender foi uma grande benção em minha vida e sou grata a DEUS por preparar além de um excelente professor e profissional, um excelente ser humano, realmente comprometido com o ensino-aprendizagem de seus alunos e orientandos. Muito tenho aprendido com o Professor Dr. Luciano e este processo tem sido de muito proveito e crescimento para mim como aluna, orientanda e como pessoa.

Agradeço muitíssimo aos Professores Eduardo do Carmo e Ismael Victor de Lucena Costa pela paciência e diligencia na apreciação desta dissertação.

Agradeço também as pessoas que neste processo DEUS colocou em meu caminho, as quais me ajudaram, apoiaram, incentivaram e fortaleceram a minha fé em assuntos relacionados a minha vida pessoal: doutor Leonardo, jornalista João Bosco, doutora Arlene Graff, doutor Rafael Freire, doutora Marcela, professora Simone Sponholz, doutor Wilhelm Sponholz, doutor Manuel Antônio Lindo.

Agradeço à CAPES por todo apoio prestado para o desenvolvimento desta pesquisa.

Por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação.

Que DEUS realize e concretize a Sua Vontade em minha vida consoante tudo que tem me ensinado e me levado a aprender em Sua Palavra na Bíblia Sagrada, na Física, demais áreas do conhecimento e na vida de um modo geral.

Que ELE possa me usar como um instrumento, um vaso em Sua Mãos, para que a Sua Obra seja feita na terra. Que tudo em minha vida e em carreira profissional sejam sempre para a Honra e a Glória de DEUS! “Portanto, quer comais quer bebais, ou façais outra qualquer coisa, fazei tudo para glória de DEUS.” (1 Coríntios 10:31).

<sup>7</sup> “O SENHOR {é} bom, uma fortaleza no dia da angústia, e conhece os que confiam NELE.” (Naum 1:7).

"Porque DELE e por ELE, e para ELE, são todas as coisas; glória, pois, a ELE eternamente. Amém."  
(Romanos 11:36).

## RESUMO

Autômatos celulares são ferramentas computacionais versáteis, aplicadas em diversos campos multi e interdisciplinares para modelar fenômenos complexos, entre eles a difusão. Dentro deste contexto, o presente estudo dedica-se à análise da difusão no "Jogo da Vida", um modelo de autômato celular desenvolvido por John Horton Conway. Este modelo opera em uma grade de células que podem estar em um de dois estados: 'vivo' ou 'morto'. Utilizando a linguagem Python, implementamos as regras dinâmicas do Jogo da Vida em várias configurações matriciais, com o intuito de conduzir uma análise estatística sobre a distribuição espacial das células vivas e a dinâmica do seu centro de massa em ciclos sucessivos de interação. Além de avaliar métricas como assimetria e curtose, examinamos variáveis associadas ao movimento do centro de massa, como posição, velocidade e aceleração, assim como métricas derivadas, como o deslocamento quadrático médio e autocorrelações. Ao analisar dezoito configurações iniciais em uma rede expansível, identificamos diferentes regimes difusivos a partir do expoente de difusão ( $\alpha$ ), como subdifusão ( $0 < \alpha < 1$ ), difusão normal ( $\alpha = 1$ ) e superdifusão ( $1 < \alpha \leq 2$ ). Observamos ainda comportamentos mais complexos, que variam desde a contração ou agregação do movimento ( $\alpha < 0$ ) até regimes hiper-balísticos ( $\alpha > 2$ ). Os resultados foram contextualizados usando o formalismo de Langevin Generalizado e comparados aos comportamentos assintóticos da função de relaxação, enriquecendo assim a compreensão do teorema de Khinchin.

Palavras-chave: Autômatos celulares. Jogo da Vida. Fenômenos de difusão. Difusão normal e anômala. Simulação Computacional. Teorema de Khinchin.

## ABSTRACT

Cellular automata are versatile computational tools, used in various multi- and interdisciplinary fields to model complex phenomena, including diffusion. In this context, the present study focuses on the analysis of diffusion in the "Game of Life," a cellular automaton model developed by John Horton Conway. This model operates on a grid of cells that can exist in one of two states: 'alive' or 'dead.' Using the Python programming language, we implemented the dynamic rules of the Game of Life across multiple matrix configurations, aiming to conduct a statistical analysis on the spatial distribution of living cells and the dynamics of their center of mass through successive interaction cycles. In addition to evaluating metrics like skewness and kurtosis, we examined variables related to the movement of the center of mass, such as position, velocity, and acceleration, as well as derived metrics like mean square displacement and autocorrelations. Upon analyzing eighteen initial configurations on an expandable grid, we identified various diffusive regimes based on the diffusion exponent ( $\alpha$ ), such as sub-diffusion ( $0 < \alpha < 1$ ), normal diffusion ( $\alpha = 1$ ), and super-diffusion ( $1 < \alpha \leq 2$ ). We also observed more complex behaviors, ranging from contraction or aggregation of movement ( $\alpha < 0$ ) to hyper-ballistic regimes ( $\alpha > 2$ ). The findings were contextualized within the framework of Generalized Langevin formalism and compared with the asymptotic behaviors of the relaxation function, thereby enriching our understanding of the Khinchin theorem.

Key words: Cellular automata. Game of life. Diffusion phenomena. Normal and Anomalous Diffusion. Computational Simulation. Khinchin Theorem.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES (OPCIONAL)

- Figura 1 – Exemplo das quatro regras de wolfram. A) regra 40, pertencente à classe 1. B) regra 56, classe 2. C) regra 18, classe 3. D) regra 110, classe 4. (imagens reproduzidas da ref. [35], p. 37.) .....21
- Figura 2 – Representação de uma vizinhança aleatória, onde os vizinhos (em azul claro) são compostos por elementos próximos ou distantes da célula focal (em azul escuro) (fonte: adaptado de 17, p. 30).....23
- Figura 3 – Representação da vizinhança em um autômato celular unidimensional. A célula em verde escuro simboliza a célula focal, enquanto as coloridas em verde claro, são as células adjacentes. Apresenta-se uma sequência crescente do parâmetro de raio da vizinhança (fonte: adaptado de 36, p. 23).....23
- Figura 4 – Ilustração da vizinhança de von neumann e moore em uma grade de duas dimensões com raios de alcance distintos. A célula em verde escuro corresponde a célula focal. As células em verde mais claro são as células adjacentes a célula central, de acordo com os dois modelos de bairro representados (fonte: adaptado de 12, ps. 4-5, 14, p. 5 e 17, p. 29). .....24
- Figura 5 – Ilustração de uma rede em formato de toro, como forma de responder à condição de contorno das grades de autômatos celulares. Nesta topologia, as regiões superior, inferior e laterais são interligadas, e se compensam quanto as relações de vizinhança. (fonte: 14, p. 6.).....25
- Figura 6 – Modelos alternativos para atender as condições de contorno das redes de autômatos celulares. São acrescentadas células imaginárias em todos os quatro exemplos para completar a vizinhança nas extremidades da grade. (a) a unidade adicionada recebe o mesmo valor que sua vizinha e célula focal. (b) assume o mesmo estado que a vizinha imediata da célula central localizada dentro da rede. (c) a condição de contorno estabelece uma conexão entre extremidades opostas, completando o bairro. (d) a rede é restringida a um valor limite, e os elementos adicionados possuem estados previamente determinados. (fonte: adaptado de [35], p. 30.) .....26
- Figura 7 – Exemplo da modificação espaço-temporal de um autômato celular do jogo da vida. As configurações iniciais no tempo  $t=0$  foram implementadas de forma arbitrária, sem a intenção de seguir um padrão pré-definido. Após 60 iterações a estrutura se estabilizou, produzindo dois padrões estáveis e um periódico. Os quadrados em amarelo e cinza representam as células vivas e mortas, respectivamente (fonte: [76]).....30
- Figura 8 – Representação das regras do jogo da vida definidas por conway. (a) uma célula morta cercada por exatamente três células vivas se tornará viva na próxima geração. (b) uma célula viva rodeada de quatro ou mais células ativas será desativada na geração seguinte. (c) uma célula viva com menos de dois vizinhos vivos irá morrer no passo de tempo seguinte. (d) uma célula viva com duas ou três células vivas pertencentes ao seu bairro irá permanecer viva na seguinte geração. As células mortas estão representadas pela cor azul claro e as vivas estão em azul escuro (fonte: adaptado de 23). .....34
- Figura 9 – Ilustração das estruturas estacionárias recorrentes no jogo da vida. Quadrados coloridos em verde e branco representam as células vivas e mortas, respectivamente. (i) block; (ii) loaf; (iii) ship; (iv) beehive e (e) boat (fonte: adaptado de 17, p. 34 e 18, p. 10). .....36

Figura 10 – Representação de padrões cíclicos encontrados no jogo da vida. (i) blinker: estrutura que oscila entre três células vivas orientadas na horizontal e três células vivas dispostas na vertical e (ii) toad: formação que assume duas configurações distintas compostas por seis células vivas. Quadrados em azul e branco simbolizam células vivas e mortas, respectivamente (fonte: adaptado de 17, p. 34 e 18, p. 10). .....	36
Figura 11 – Sequência de iterações com o objeto denominado planador. Estas estruturas repetem suas configurações a cada dois passos de tempo, porém, defasadas em relação a orientação original. Após quatro passos de tempo retornam ao sentido e direção inicial, porém, deslocadas de suas posições iniciais. Células em branco e verde representam os elementos mortos e vivos, respectivamente. ....	37
Figura 12 – Representação de uma arma de planadores. Dispositivo que emite um planador a cada trinta iterações do jogo da vida. Instantâneo tirado na iteração de número 30, evidenciando a emissão de um planador, estrutura mais abaixo, formada por cinco células vivas (em amarelo) (fonte: [76]). ....	37
Figura 13 – Representação do objeto r-pentomino pertencente ao grupo de estruturas que aparecem com frequência no jogo da vida. (a) inicialmente é formado por um conjunto de cinco células vivas (em amarelo) rodeadas por células mortas (em cinza). Posteriormente é modificado pelas iterações do jogo, formando inúmeras estruturas, até se (b) estabilizar na geração 1103 (fonte: [76]). ....	38
Figura 14 – Configuração de células vivas que especificam a estrutura arma de planador (fonte: [76]). ....	51
Figura 15 – Número de células ao longo do tempo de simulação da estrutura arma de planador. ....	52
Figura 16 - Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da arma de planador. Os subgráficos ampliam as regiões delimitadas no gráfico principal. ....	53
Figura 17 – Assimetria e curtose relativas as variáveis de posição da arma planadora. ....	54
Figura 18 – Aceleração nos eixos-X e Y ao longo dos ciclos da simulação da arma planadora. ....	55
Figura 19 – Deslocamento quadrático médio do sistema arma planadora. A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	56
Figura 20 – Funções de relaxação relativas à estrutura arma de planador, considerando a) X, b) Y e c) XY. ....	57
Figura 21 – Configuração espacial de células que formam a estrutura atirador de ponta (fonte: [76]). ....	58
Figura 22 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da atirador de ponta. Os subgráficos ampliam as regiões delimitadas no gráfico principal. ....	59
Figura 23 – Número de células geradas pela estrutura atirador de ponta. ....	60
Figura 24 – Assimetria e curtose relativas as variáveis de posição da estrutura atirador de ponta. ....	61
Figura 25 – Aceleração nos eixos-X e Y ao longo dos ciclos da simulação do atirador de ponta. ....	61
Figura 26 – Deslocamento quadrático médio do sistema atirador de ponta. A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	62
Figura 27 – Funções de relaxação relativas à estrutura atirador de ponta, considerando a) x, b) y e c) xy. ....	63

Figura 28 – Arranjo de células que formam a estrutura b-heptomino (fonte: [76])....	64
Figura 29 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da b-heptomino. ....	64
Figura 30 – Número de células ao longo da simulação da estrutura b-heptomino. ...	65
Figura 31 – Assimetria e curtose relativas as variáveis de posição da estrutura b-heptomino. ....	66
Figura 32 – Aceleração nos eixos- x e y ao longo dos ciclos da simulação do b-heptomino. ....	67
Figura 33 – Deslocamento quadrático médio do sistema b-heptomino. A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	68
Figura 34 – Funções de relaxação concernentes a estrutura b-heptomino.....	69
Figura 35 – estrutura que especifica o objeto pertencente ao jogo da vida, denominado bolota (fonte: [76]). ....	70
Figura 36 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura bolota. ....	70
Figura 37 – Número de células ao longo da simulação da estrutura bolota. ....	71
Figura 38 – Assimetria e curtose para as variáveis x e y, com respeito a estrutura bolota. ....	72
Figura 39 – Aceleração nos eixos-x e y ao longo dos ciclos da simulação do bolota. ....	73
Figura 40 – Deslocamento quadrático médio para x relativo ao modelo bolota. ....	74
Figura 41 – Funções de relaxação pertinentes a estrutura bolota.....	75
Figura 42 – Arranjo que caracteriza a estrutura bombardeiro b-52 (fonte: [76]). ....	75
Figura 43 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura bombardeiro b-52.....	76
Figura 44 – Número de células no decurso da simulação do bombardeiro b-52.....	77
Figura 45 – Assimetria e curtose relativas às variáveis x e y da estrutura bombardeiro b-52.....	77
Figura 46 – Aceleração decorrente do processo de simulação do modelo bombardeiro b-52.....	78
Figura 47 – Deslocamento quadrático médio do sistema bombardeiro b-52. A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	79
Figura 48 – Funções de relaxação associadas ao modelo bombardeiro b-52. ....	80
Figura 49 – Arranjo de células que caracteriza a estrutura crescimento infinito (modelo 1) (fonte: [76]).....	81
Figura 50 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura crescimento (modelo 1).....	82
Figura 51 – Número de células do sistema denominado crescimento infinito (modelo 1) (fonte: autor). ....	83
Figura 52 – Assimetria e curtose relativos a X e Y para a estrutura crescimento infinito (modelo 1).....	83
Figura 53 – Aceleração dos elementos que constituem o sistema intitulado crescimento infinito (modelo 1). ....	84
Figura 54 – Deslocamento quadrático médio do sistema crescimento infinito (modelo 1). A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	85
Figura 55 – Funções de relaxação associadas ao sistema crescimento infinito (modelo 1).....	86

Figura 56 – Modelo da estrutura crescimento infinito (modelo 2) (fonte: [76]).....	87
Figura 57 – Número de células ao longo da simulação da estrutura crescimento infinito (modelo 2).....	88
Figura 58 – Assimetria e curtose para as variáveis X e Y do sistema crescimento infinito (modelo 2).....	89
Figura 59 – Aceleração concernente aos componentes do sistema crescimento infinito (modelo 2).....	89
Figura 60 – Deslocamento quadrático médio do sistema crescimento infinito (modelo 2). A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	91
Figura 61 – Funções de relaxação relativas à estrutura crescimento infinito (modelo 2).....	92
Figura 62 – Configuração espacial de células vivas que formam a estrutura denominada crescimento infinito (modelo 3) (fonte: [76]).....	92
Figura 63 – Número de células em função do número de ciclos da estrutura crescimento infinito (modelo 3). ....	94
Figura 64 – Assimetria e curtose relacionados aos elementos em x e y do sistema crescimento infinito (modelo 3) (fonte: autor).....	95
Figura 65 – Aceleração relativa aos componentes do sistema crescimento infinito (modelo 3) (fonte: autor).....	96
Figura 66 – Deslocamento quadrático médio do sistema crescimento infinito (modelo 3b). A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	97
Figura 67 – Funções de relaxação associadas ao sistema crescimento infinito (modelo 3).....	98
Figura 68 – Arranjo celular que forma o padrão duro de matar (fonte: [76]).....	99
Figura 69 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura duro de matar.....	99
Figura 70 – Número de células decorrentes do processo de simulação do modelo duro de matar (fonte: autor).....	100
Figura 71 – Assimetria e curtose relativas as variáveis de posição da estrutura duro de matar.....	101
Figura 72 – Aceleração relativa às componentes x e y do sistema duro de matar. ....	102
Figura 73 – Deslocamento quadrático médio para a variável x relativo à estrutura duro de matar.....	103
Figura 74 – Deslocamento quadrático médio relativo à variável y para o modelo duro de matar.....	103
Figura 75 – Deslocamento quadrático médio no plano xy concernente a estrutura duro de matar.....	104
Figura 76 – Funções de relaxação relacionadas a estrutura duro de matar. ....	105
Figura 77 – Padrão que caracteriza a estrutura e-heptomino (fonte: [76]). ....	105
Figura 78 – Número de células variável consoante o processo de simulação da estrutura e-heptomino. ....	107
Figura 79 – Assimetria e curtose pertinentes às variáveis de posição do modelo e-heptomino. ....	107
Figura 80 – Componentes da aceleração da estrutura e-heptomino.....	108
Figura 81 – deslocamento quadrático médio do sistema e-heptomino. A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	109
Figura 82 – Funções de relaxação pertinentes ao modelo e-heptomino. ....	111

Figura 83 – Explicitação da configuração de células que formam o fusível (fonte: [76]).	111
Figura 84 – Número de células relacionados ao autômato fusível (fonte: autor)...	113
Figura 85 – Assimetria e curtose referentes as distribuições em x e em y para o sistema fusível (fonte: autor).....	114
Figura 86 – Descrição gráfica das mudanças na aceleração dos componentes da estrutura fusível (fonte: autor). ....	115
Figura 87 – Deslocamento quadrático médio do sistema fusível. A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	116
Figura 88 – Funções de relaxação associadas a estrutura fusível. ....	116
Figura 89 – Estrutura que caracteriza o sistema fx119 (fonte: [76]). ....	117
Figura 90 – Número de células variáveis correspondentes ao modelo fx119 (fonte: autor).....	119
Figura 91 – Assimetria e curtose pertinentes às variáveis de posição do modelo fx119. ....	119
Figura 92 – Aceleração das partículas pertencentes ao sistema intitulado fx119 (fonte: autor).....	121
Figura 93 – Deslocamento quadrático médio do sistema fx119. A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	122
Figura 94 – Funções de relaxação pertinentes ao modelo fx119. ....	123
Figura 95 – Configuração estrutural para o modelo hwss (fonte: [76]). ....	123
Figura 96 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura hwss. ....	124
Figura 97 – Número de células referentes a estrutura hwss. ....	125
Figura 98 – Assimetria e curtose associadas às variáveis de posição da estrutura hwss. ....	126
Figura 99 – Componentes da aceleração exibida pela estrutura hwss. ....	127
Figura 100 – Deslocamento quadrático médio do sistema hwss. A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala linear. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala linear. ....	128
Figura 101 – Funções de relaxação pertinentes a estrutura hwss. ....	128
Figura 102 – Configuração de células que formam um planador (fonte: [76]). ....	129
Figura 103 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura planador. ....	129
Figura 104 – Número de células ao longo das gerações do objeto planador. ....	130
Figura 105 – Assimetria e curtose referentes as variáveis de posição da estrutura planador. ....	131
Figura 106 – Aceleração nos eixos x e y referente ao objeto planador. ....	132
Figura 107 – Deslocamento quadrático médio do sistema planador. A) comportamento em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	133
Figura 108 – Funções de relaxação associadas aos elementos pertencentes a estrutura planador. ....	134
Figura 109 – Arranjo de células vivas que formam a estrutura conhecida como pombo (fonte: [76]). ....	134
Figura 110 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura pombo. ....	135
Figura 111 – Números de células pertinentes a simulação da estrutura pombo. ...	136

Figura 112 – Assimetria e curtose relativas as variáveis de posição do sistema denominado pombo. ....	137
Figura 113 – Componentes de aceleração pertinente aos elementos que constituem o padrão intitulado pombo.....	138
Figura 114 – Deslocamento quadrático médio do sistema pombo. A) comportamento geral em escala linear. B) eixo-x em escala linear. C) eixo-y em escala linear. D) resultante em escala linear. ....	139
Figura 115 – Funções de relaxação associadas a estrutura denominada pombo..	140
Figura 116 – Configuração de células que formam a figura denominada quase cavalaria (fonte: [76]).....	140
Figura 117 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura pombo. ....	141
Figura 118 – Número de células referente a simulação da estrutura quase cavalaria. ....	142
Figura 119 – Assimetria e curtose relativas aos elementos da estrutura quase cavalaria.....	143
Figura 120 – Componentes x e y da aceleração das células que constituem o modelo quase cavalaria. ....	144
Figura 121 – Deslocamento quadrático médio para x relativo ao modelo quase cavalaria.....	145
Figura 122 – Deslocamento quadrático médio para y associado ao modelo quase cavalaria.....	146
Figura 123 – Deslocamento quadrático médio do sistema quase cavalaria. A) comportamento em escala linear da resultante XY. B), c) e d) eixo-x em escala logarítmica em diferentes intervalos numéricos. ....	147
Figura 124 – Funções de relaxação pertinentes a estrutura quase cavalaria.....	147
Figura 125 – Estrutura celular que caracteriza o objeto composto denominado retroceder (fonte: [76]).....	148
Figura 126 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura retroceder. ....	149
Figura 127 – Números de células ao longo das gerações da estrutura denominada retroceder.....	150
Figura 128 – Assimetria e curtose associada aos componentes de posição da estrutura retroceder.....	150
Figura 129 – Componentes x e y da aceleração em virtude da dinâmica existente na estrutura retroceder.....	152
Figura 130 – Deslocamento quadrático médio do sistema retroceder. A) comportamento geral em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	153
Figura 131 – Funções de relaxação pertinentes ao modelo retroceder.....	153
Figura 132 – Conjunto de células organizadas para formar a estrutura denominada vaca (fonte: [76]). ....	154
Figura 133 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura vaca.....	155
Figura 134 – Número de células variável para a estrutura denominada vaca.....	156
Figura 135 – Assimetria e curtose relativas aos elementos de posição do modelo denominado vaca (fonte: autor). ....	156
Figura 136 – Componentes x e y da aceleração dos componentes pertencentes ao modelo vaca.....	157

Figura 137 – Deslocamento quadrático médio do sistema vaca. A) comportamento geral em escala linear. B) eixo-x em escala logarítmica. C) eixo-y em escala logarítmica. D) resultante em escala logarítmica. ....	158
Figura 138 – Funções de relaxação do sistema denominado vaca.....	159
Figura 139 – Percentual das modalidades de difusão identificadas nas dezoito estruturas avaliadas (fonte: autor).....	162

## SUMÁRIO

BANCA EXAMINADORA.....	3
AGRADECIMENTOS .....	6
LISTA DE ILUSTRAÇÕES (OPCIONAL).....	14
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>14</b>
2.1 AUTÔMATOS CELULARES .....	14
2.1.1 Conceito .....	14
2.1.2 Contexto Histórico .....	16
2.1.3 Características e Propriedades .....	19
2.1.4 Aplicações e Relevância Científica .....	27
2.2 JOGO DA VIDA.....	28
2.2.1 Contexto Histórico .....	28
2.2.2 Características e Propriedades .....	28
2.2.3 Aplicações e Relevância Científica .....	38
2.3 FENÔMENO DA DIFUSÃO.....	39
2.3.1 Conceito .....	39
2.3.3 O movimento browniano, a Equação de Langevin, a classificação do fenômeno de difusão e o Teorema de Flutuação-Dissipação .....	40
<b>3 DISCUSSÃO E ANÁLISE DE DADOS .....</b>	<b>50</b>
3.1 ARMA DE PLANADOR .....	51
3.1.1 Definição .....	51
3.1.2 Número de Células.....	52
3.1.3 Assimetria e Curtose .....	53
3.1.4 Aceleração .....	54
3.1.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	55
3.1.6 Correlação da Velocidade .....	57
3.2 ATIRADOR DE PONTA.....	57
3.2.2 Número de Células.....	59
3.2.3 Assimetria e Curtose .....	60
3.2.4 Aceleração .....	61
3.2.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	62
3.2.6 Correlação da Velocidade .....	63

3.3 B-HEPTOMINO .....	63
3.3.2 Número de Células.....	65
3.3.3 Assimetria e Curtose .....	65
3.3.4 Aceleração .....	66
3.3.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	67
3.3.6 Correlação da Velocidade .....	69
3.4 BOLOTA.....	69
3.4.2 Número de Células.....	70
3.4.3 Assimetria e Curtose .....	71
3.4.4 Aceleração .....	72
3.4.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	73
3.4.6 Correlação da Velocidade .....	74
3.5 BOMBARDEIRO B-52 .....	75
3.5.2 Número de Células.....	76
3.5.3 Assimetria e Curtose .....	77
3.5.4 Aceleração .....	78
3.5.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	79
3.5.6 Correlação da Velocidade .....	80
3.6 CRESCIMENTO INFINITO (MODELO 1).....	81
3.6.2 Número de Células.....	82
3.6.3 Assimetria e Curtose .....	83
3.6.4 Aceleração .....	84
3.6.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	85
3.6.6 Correlação da Velocidade .....	86
3.7 CRESCIMENTO INFINITO (MODELO 2).....	86
3.7.2 Número de Células.....	87
3.7.3 Assimetria e Curtose .....	88
3.7.4 Aceleração .....	89
3.7.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	90
3.7.6 Correlação da Velocidade .....	91
3.8 CRESCIMENTO INFINITO (MODELO 3).....	92
3.8.2 Número de Células.....	93
3.8.3 Assimetria e Curtose .....	94
3.8.4 Aceleração .....	95
3.8.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	96
3.8.6 Correlação da Velocidade .....	97

3.9 DURO DE MATAR .....	98
3.9.2 Número de Células.....	100
3.9.3 Assimetria e Curtose .....	100
3.9.4 Aceleração .....	101
3.9.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	102
3.9.6 Correlação da Velocidade .....	104
3.10 E-HEPTOMINO .....	105
3.10.2 Número de Células.....	106
3.10.3 Assimetria e Curtose .....	107
3.10.4 Aceleração .....	108
3.10.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	109
3.10.6 Correlação da Velocidade .....	110
3.11 FUSÍVEL .....	111
3.11.2 Número de Células.....	112
3.11.3 Assimetria e Curtose .....	113
3.11.4 Aceleração .....	114
3.11.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	115
3.11.6 Correlação da Velocidade .....	116
3.12 FX119.....	117
3.12.2 Número de Células.....	118
3.12.3 Assimetria e Curtose .....	119
3.12.4 Aceleração .....	120
3.12.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	121
3.12.6 Correlação da Velocidade .....	122
3.13 HWSS.....	123
3.13.2 Número de Células.....	125
3.13.3 Assimetria e Curtose .....	125
3.13.4 Aceleração .....	126
3.13.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	127
3.13.6 Correlação da Velocidade .....	128
3.14 PLANADOR.....	129
3.14.2 Número de Células.....	130
3.14.3 Assimetria e Curtose .....	131
3.14.4 Aceleração .....	131
3.14.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	132
3.14.6 Correlação da Velocidade .....	133

3.15 POMBO.....	134
3.15.2 Número de Células.....	135
3.15.3 Assimetria e Curtose .....	136
3.15.4 Aceleração .....	137
3.15.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	138
3.15.6 Correlação da Velocidade .....	139
3.16 QUASE CAVALARIA.....	140
3.16.2 Número de Células.....	141
3.16.3 Assimetria e Curtose .....	142
3.16.4 Aceleração .....	143
3.16.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	144
3.16.6 Correlação da Velocidade .....	147
3.17 RETROCEDER .....	148
3.17.2 Número de Células.....	149
3.17.3 Assimetria e Curtose .....	150
3.17.4 Aceleração .....	151
3.17.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	152
3.17.6 Correlação da Velocidade .....	153
3.18 VACA.....	154
3.18.2 Número de Células.....	155
3.18.3 Assimetria e Curtose .....	156
3.18.4 Aceleração .....	157
3.18.5 Deslocamento Quadrático Médio .....	158
3.18.6 Correlação da Velocidade .....	159
<b>3 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>160</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>165</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A Física fundamenta-se, dentre outras coisas, em observações, medições e experimentos, tanto quantitativos quanto qualitativos, buscando, em um de seus primeiros estágios, criar modelos que descrevam o que se observa e preocupando-se em não negar os conhecimentos físicos mais fundamentais. Dentro desse escopo, equações são essenciais para criar modelos que traduzem fenômenos do mundo real para uma linguagem matemática. Em diversas áreas científicas e tecnológicas, o desenvolvimento de modelagens tem sido associado ao emprego de tecnologias avançadas. Impulsionadas pela evolução e sistematização do conhecimento, essas tecnologias otimizam pesquisas científicas, permitindo identificar padrões, fazer previsões e promover intervenções que visam melhorar a qualidade de vida na sociedade.

Um exemplo prático e bastante estudado da aplicação desses conceitos é a difusão, processo pelo qual partículas, informações, energia, entre outros, se movem e se espalham em um meio ou espaço. Este fenômeno é observado em situações cotidianas, como no ato de respirar, na aplicação de perfume, na preparação de um chá ou no processo de nutrição celular. Na respiração, o oxigênio do ar é inalado para os pulmões, se difunde nos alvéolos e, à diferença de concentração de oxigênio entre o ar recém-chegado e o sangue, passa para a corrente sanguínea. Simultaneamente, o dióxido de carbono, presente em maior concentração no sangue do que nos alvéolos, difunde-se dos capilares sanguíneos para os alvéolos, sendo posteriormente exalado. Na aplicação de perfume, assim como outros produtos emissores de fragrâncias, mesmo que em um ponto específico, pessoas em outras partes do ambiente podem sentir o aroma devido à difusão das moléculas odoríferas pelo ar. Quando da preparação de um chá, suas partículas se espalham pela água, tornando-a colorida e saborizada. No nível celular, nutrientes, assim como diversos resíduos, se movem dentro e fora das células por difusão através da membrana celular. Todos esses fenômenos são comuns, contudo, dificilmente refletimos sistematicamente sobre os mecanismos e aplicações a eles associados.

Nesse contexto de compreensão de sistemas e fenômenos complexos, os autômatos celulares surgem como ferramentas valiosas. São modelos matemáticos desenvolvidos inicialmente para representar sistemas computacionais abstratos. Constituídos por uma grade (ou tabuleiro) de células que podem assumir um conjunto finito de estados, como 0 ou 1, vivo ou morto, entre outros, estas células atualizam seus estados simultaneamente de acordo com regras específicas. Estas regras consideram o estado

atual da célula e o de suas vizinhas, permitindo simulações que podem oferecer insights sobre processos, como, p.ex., a difusão.

O potencial dos autômatos celulares é evidente em sua capacidade de simular sistemas que se baseiam em elementos simples interagindo localmente. Eles encontram aplicação em uma variedade de campos científicos, sendo usados, por exemplo, para modelar processos físicos como a difusão de gases, para prever a propagação de incêndios e direcionar eficientemente as equipes de combate [46] ou até mesmo para entender fenômenos biológicos, físicos e químicos [47, 48, 49, 50]. Estes modelos oferecem um meio de aprofundar nossa compreensão sobre muitos aspectos da vida e do mundo que nos rodeia.

O Jogo da Vida de Conway é um autômato celular concebido pelo matemático britânico John Horton Conway (1937-2020) [52]. Consiste em uma grade de células, cada uma das quais pode estar em um de dois estados: vivo ou morto. A evolução de cada célula é determinada por regras específicas baseadas no número de vizinhos vivos que ela possui. Apesar de sua simplicidade, esse autômato é capaz de exibir uma variedade surpreendente de comportamentos, desde padrões estáticos e oscilantes até estruturas que se movem pela grade. Devido à sua natureza determinística, dada uma configuração inicial, a evolução subsequente do sistema será sempre baseada na mesma rotina, sem qualquer elemento de aleatoriedade. O Jogo da Vida é um exemplo proeminente de como regras locais simples podem levar a comportamentos globais complexos e emergentes, os quais apresentaremos em detalhes no Capítulo 2.

Neste estudo, utilizaremos conceitos de física estatística empregados em sistemas difusivos para analisar o Jogo da Vida como um movimento browniano. Este movimento é evidenciado na trajetória do centro de massa das células computacionais ao longo do tempo assumindo um espaço ilimitado. No Capítulo 3, aprofundaremos nas análises sobre uma grande variedade de configurações iniciais, destacando diferentes regimes de difusão anômala observados.

Por fim, no Capítulo 4, dedicaremos à exposição dos resultados-chave e às conclusões finais deste trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A presente pesquisa tem como objetivo investigar o fenômeno da difusão através da simulação computacional com autômatos celulares, especificamente utilizando o modelo conhecido como "Jogo da Vida" (JdV), concebido por John Horton Conway [51, 52]. Nesta seção, delinearemos os fundamentos teóricos e experimentais que norteiam este estudo.

Começaremos por introduzir os ACs, uma ferramenta computacional concebida inicialmente pelo matemático John von Neumann [53]. Discutiremos a seguir seu conceito, origens históricas, características intrínsecas, propriedades e algumas de suas aplicações notáveis no campo da ciência da computação e da física.

Em seguida, focaremos no JdV, que, apesar de sua simplicidade, tem demonstrado uma rica variedade de comportamentos dinâmicos. Exploraremos o contexto histórico de sua criação, suas características distintas, propriedades e algumas aplicações práticas e teóricas.

Finalmente, abordaremos o fenômeno da difusão, elucidando seu conceito, características e propriedades. Distinguiremos entre difusão normal e anômala, apresentando uma abordagem baseada no formalismo de Langevin. Destacaremos exemplos de como os ACs, em particular o JdV, têm sido empregados em pesquisas sobre difusão, ressaltando os insights e avanços obtidos através dessa poderosa ferramenta.

### 2.1 AUTÔMATOS CELULARES

#### 2.1.1 Conceito

Autômatos Celulares (ACs) são modelos matemáticos compostos por uma vasta quantidade de elementos chamados células, organizados em redes regulares. Cada célula, em sua posição específica, pode mudar seu estado ao longo do tempo, baseando-se em regras ou diretrizes determinísticas pré-estabelecidas e na condição momentânea de suas células vizinhas. As variáveis desse sistema são discretizadas, tanto no espaço quanto no tempo [1, 3, 7].

Em outras palavras, os ACs podem ser considerados como sistemas dinâmicos discretos cuja evolução é determinada por um conjunto de regras aplicadas a

cada célula. Uma vez definida a condição inicial, o sistema evolui ao longo do tempo conforme essas regras são aplicadas iterativamente [21]. Curiosamente, mesmo a partir de configurações iniciais aparentemente aleatórias, é possível emergir padrões ordenados e estruturados [3], além de comportamentos de grande complexidade e imprevisibilidade [1, 7, 14]. Embora exista uma variedade de estados que as células podem assumir, a maioria dos ACs opera de forma irreversível, tornando impossível retornar às configurações iniciais [1, 7, 12, 14, 15, 17, 21].

A seleção criteriosa das regras e da condição inicial é crucial, pois influencia diretamente os resultados e a relevância das simulações em contextos científicos [14, 21]. Enquanto a configuração inicial estabelece o estado inicial do sistema, as regras de transição guiam sua dinâmica e determinam os padrões emergentes. Conforme literatura [8, 17] os ACs são ferramentas computacionais empregadas em diversas áreas do conhecimento [14]. Eles permitem o estudo de sistemas complexos e são particularmente úteis em ciências naturais, onde sistemas, como, p.ex., formações de cristais de neve e conchas do mar [1], apresentam estruturas intrincadas e são desafiadoras para serem modeladas por métodos tradicionais, como equações diferenciais. Assim, a modelagem via ACs emerge como uma técnica alternativa ou complementar aos métodos convencionais.

No domínio da automação, ACs podem ser vistos como dispositivos programáveis que, uma vez configurados, operam autonomamente sem necessidade de intervenção humana [79]. Eles funcionam como máquinas que possuem sinais de entrada e saída, além de estados internos que refletem dinamicamente a configuração do sistema 15.

Entretanto, a mera definição de regras locais, configuração da grade e estados possíveis das células não oferecem uma compreensão completa da dinâmica global do sistema [79]. São as regras do autômato que estabelecem as relações lógicas entre os sinais de entrada, os estados internos e os sinais de saída. Quando o sistema recebe estímulos, ele processa essas informações e gera respostas de acordo com as diretrizes predefinidas. O comportamento global resultante é, dessa forma, decorrente das interações locais mediadas por esses ordenamentos, que influenciam coletivamente toda a rede [15, 79]. Portanto, ao projetar ou estudar um AC, é essencial escolher diretrizes de transição de estados que se alinhem aos objetivos e características da aplicação em questão 27.

Os ACs possuem características fundamentais bem definidas [19, 23]. Estes incluem: o espaço ou grade onde as células estão dispostas; o conjunto de estados

(ou valores) possíveis que cada célula pode assumir; a definição da vizinhança de cada célula, que determina como ela interage com suas células adjacentes; e as regras de transição, que especificam como o estado de uma célula muda com base em seu estado e o de suas vizinhas em um dado instante. Além disso, a evolução do sistema é determinada por um número finito de iterações ou até que alcance um estado estável. Formalmente, um AC pode ser visualizado como uma matriz ou rede de células dispostas em espaçamentos regulares e discretos. Uma célula, dentro dessa matriz, só é considerada parte de um AC quando sua evolução depende dos estados das células em sua vizinhança [23]. Sua diversidade provém das diferentes combinações de regras de transição, estados possíveis e configurações de vizinhança [80].

### 2.1.2 Contexto Histórico

Entre os anos de 1640 e 1670, os polímatas Gottfried Wilhelm Leibniz, de origem alemã, e Blaise Pascal, francês, fizeram contribuições significativas nas áreas da matemática e da filosofia. Ambos estavam engajados na criação de instrumentos manuais destinados à realização de cálculos matemáticos [28, 81]. Avançando para meados do século XX, Alan Mathison Turing, um matemático, biólogo e cientista da computação britânico, desenvolveu princípios teóricos fundamentais para um dispositivo tecnológico unidimensional. Este dispositivo, regido por leis pré-definidas, foi empregado em tarefas de decodificação e criptografia durante a Segunda Guerra Mundial [81].

Na segunda metade do século XX, especificamente entre 1940 e 1960, os ACs foram introduzidos ao campo científico. Este avanço foi fruto dos esforços colaborativos do matemático húngaro-judeu John von Neumann e do cientista polonês-americano Stanisław Marcin Ulam, ambos especialistas em física e matemática [14, 17, 19, 23, 27, 32]. O estudo pioneiro que marcou a incursão dos ACs na pesquisa científica estava inicialmente vinculado à cinemática, um ramo da Física do movimento. No entanto, o sistema proposto enfrentou diversas limitações que impediram seu sucesso imediato [82].

O primeiro modelo de AC desenvolvido por John von Neumann era um sistema bidimensional projetado para ser universal, ou seja, capaz de simular uma máquina de Turing. Embora o modelo fosse teoricamente poderoso, ele era complexo e exigiria um grande número de componentes para ser implementado integralmente. Posteriormente, Edgar Codd também explorou o conceito de ACs, mas com uma abordagem que permitia

um número reduzido de estados para cada célula. Devido à complexidade do modelo original de von Neumann, estimativas sugerem que seriam necessários mais de duzentos mil componentes para uma simulação completa, tornando-a impraticável com a tecnologia da época [37, 83, 84, 85, 86, 87].

Utilizando estruturas como ACs, John von Neumann estava profundamente interessado em explorar modelos capazes de auto-replicação [17]. Influenciado por seu colaborador Stanislaw Ulam, von Neumann investigou as propriedades e características fundamentais de sistemas naturais, especialmente aqueles com capacidades de auto-reprodução. O matemático se dedicou a identificar conjuntos específicos de elementos e distribuições de componentes que permitiriam a esses modelos matemáticos alcançar auto-suficiência e replicação exata [18]. Além disso, ele buscou estabelecer relações lógicas que pudessem explicar a complexidade observada em formações naturais [88].

Von Neumann optou por desenvolver seus modelos em ambientes matemáticos discretizados tanto no tempo quanto no espaço. Além dos trabalhos em Física Nuclear, ele e Ulam conduziram pesquisas sobre essas ferramentas matemáticas no Laboratório Nacional de Los Alamos, no Novo México [14, 32]. Inicialmente, a terminologia usada era “espaço celular”, mas o termo "autômato celular" ganhou popularidade e é o mais utilizado atualmente. Esses modelos foram geralmente desenvolvidos em redes ilimitadas de uma ou duas dimensões. Devido às suas características intrínsecas, os ACs receberam atenção especial no campo da computação, incluindo aplicações em computadores paralelos [18, 85]. Eles também ganharam destaque nos estudos sobre universalidade e Máquinas de Turing. O interesse subjacente a essas estruturas estava ligado à possibilidade de aplicar o conhecimento científico da época para entender a complexidade e a unicidade da natureza [19].

Nos anos de 1970, os ACs encontraram aplicações em diversas áreas da Física, como Termodinâmica e Física da Matéria Condensada, assim como em Ciência dos Materiais e Magnetismo. Eles também foram eficazes na resolução de equações diferenciais parciais (EDPs) através de métodos de aproximação. Isso se deve ao fato de que esses sistemas dinâmicos, compostos por elementos idênticos em uma rede organizada com espaçamentos homogêneos, fornecem resultados precisos por meio de mecanismos simplificados [14]. Ainda na década de 1970, esses sistemas foram adaptados para criar ACs unidimensionais que permitiam o tratamento dinâmico de dados. Isso foi possível graças aos avanços na tecnologia VLSI (Very Large Scale Integration), que

permitiu a integração de um grande número de transistores em chips de microdimensões [18, 85].

Em meados da década de 1980, com o avanço da ciência e da tecnologia, especialmente com o surgimento da arquitetura SIMD (Single Instruction Multiple Data) [85], houve uma melhoria significativa e facilitação no uso de computadores. Isso levou a um crescimento exponencial nas pesquisas relacionadas ao desenvolvimento, simulação e aplicação de ACs, particularmente nas ciências exatas [14, 18]. O uso desses modelos matemáticos se expandiu de tal forma que profissionais de diversas áreas, como matemáticos, físicos e biólogos, começaram a explorar suas propriedades para avançar em seus respectivos campos.

Um marco significativo nesse contexto foi a contribuição do cientista da computação e físico inglês Stephen Wolfram. Utilizando o software Mathematica, que ele mesmo desenvolveu para a manipulação e exploração de ACs, Wolfram conseguiu reunir uma ampla gama de informações sobre diferentes modelos, estruturas e dinâmicas desses sistemas em grades uniformes [14, 19].

Cada unidade elementar do sistema proposto por Wolfram podia assumir apenas dois estados. O sistema era iniciado com uma única sequência unidimensional de células, e os valores iniciais eram selecionados antes da execução do modelo. A cada passo de tempo, novas sequências surgiam abaixo da sequência inicial, com os estados futuros das células dependendo dos estados atuais e dos estados das células vizinhas. Utilizando princípios lógicos elementares, Wolfram conseguiu gerar uma variedade de padrões complexos e imprevisíveis [14, 89].

Stephen Wolfram dedicou-se tanto a esses sistemas que publicou o livro "A New Kind of Science" [77], onde compilou suas descobertas ao longo de quase duas décadas. No livro, ele argumenta que sua abordagem representa uma mudança de paradigma na ciência, focando mais em métodos computacionais. Isso permitirá avanços em áreas que anteriormente eram inacessíveis aos métodos tradicionais.

Contrariamente à crença popular de que regras simples levam a comportamentos simples e regras complexas a comportamentos complexos, Wolfram demonstrou que regras simples podem resultar em comportamentos altamente complexos. Ele também destacou as limitações dos métodos científicos tradicionais, que frequentemente dividem sistemas em partes menores para estudo, argumentando que abordagens computacionais podem fornecer insights mais abrangentes [77].

Hoje, ACs são usados em diversas áreas de pesquisa para resolver problemas científicos e sociais [19]. Essas ferramentas computacionais têm suas raízes nas contribuições pioneiras de cientistas como von Neumann, Conway e Wolfram [18], sendo o segundo comentado posteriormente neste trabalho.

### 2.1.3 Características e Propriedades

Embora os ACs possam parecer estruturas simples devido à sua construção elementar, eles têm o potencial de realizar computação universal<sup>1</sup> (Turing-completo) [54]. Esse potencial é ativado pela escolha cuidadosa das regras lógicas que governam a transição de estados dos componentes individuais do sistema.

Matematicamente, a relação de estados desses modelos pode ser definida como:

$$e_i^{t+1} = \beta(e_{i-r}^t, e_{i-r+1}^t, \dots, e_{i+r}^t), \quad (1)$$

onde  $e$  é a variável de estado, com sobescritos marcando a que passo de tempo estão associadas. O subscrito  $i$  localiza a célula,  $r$  refere-se ao raio de alcance dos vizinhos e  $\beta$  é a função que detém as regras locais implementadas. Esta expressão exemplifica a forma como é calculado computacionalmente o estado de uma célula em um instante de tempo  $t + 1$  mediante as informações coletadas instante precedente  $t$ .

Stephen Wolfram estabeleceu um sistema de classificação para ACs baseado em diferentes configurações, regras e dinâmicas, em uma rede regular discreta tanto no espaço quanto no tempo. Ele categorizou esses sistemas em quatro classes distintas, independentemente das regras específicas aplicadas. Cada categoria apresenta semelhanças características, permitindo que os autômatos sejam agrupados com base em suas propriedades comuns.

ACs da Classe 1 são geralmente caracterizados por sua tendência a convergir para um padrão uniforme, alcançando um estado estável com o tempo. Independentemente das condições iniciais ou dos valores iniciais atribuídos às células, a informação no sistema tende a se espalhar apenas até um certo limite na rede. Na maioria dos casos, o estado

---

<sup>1</sup> O termo "computação universal" é um utilizado em ciência da computação e teoria da computação, indicando um sistema de computação que pode simular qualquer outro sistema de computação, dado tempo e recursos suficientes. Em outras palavras, um sistema de computação universal pode realizar qualquer cálculo que seja computável. A Máquina de Turing, por exemplo, é um modelo teórico de uma máquina de computação universal.

final é homogêneo, o que significa que qualquer informação relacionada ao estado inicial do sistema é perdida. Vale ressaltar que existem exceções dentro da Classe 1, onde o estado final pode ter características mais complexas. Embora o comportamento desses autômatos muitas vezes possa ser previsto usando métodos numéricos e computacionais, há casos que podem exigir análises mais detalhadas [1, 7, 17, 19, 21, 35, 37].

A Classe 2 é caracterizada por um comportamento estável ou cíclico, frequentemente com períodos de repetição curtos. As estruturas resultantes são tipicamente simples e repetitivas, mesmo em simulações que se estendem por longos períodos de tempo. A informação relacionada ao estado inicial do sistema geralmente se propaga apenas até um limite espacial finito na rede. Pequenas alterações nas condições iniciais tendem a resultar em mudanças proporcionais e delimitadas no comportamento do autômato. Dependendo das regras implementadas, esses autômatos podem produzir um conjunto limitado de estados cíclicos ou padrões estáveis. Assim como na Classe 1, o comportamento completo destes autômatos frequentemente pode ser antecipado com o uso de métodos computacionais [1, 7, 17, 19, 21, 35, 37].

Na Classe 3, observa-se a formação de padrões complexos que não exibem uma estrutura lógica ou geométrica claramente definida. Essa complexidade é mantida mesmo quando o autômato é executado em uma rede de células infinitamente extensa. Métodos de aproximação estatística são frequentemente necessários para analisar as propriedades de equilíbrio desses sistemas. Alterações mínimas nas condições iniciais podem resultar em grandes variações que afetam toda a rede, refletindo a sensibilidade às condições iniciais. Embora alguns modelos possam gerar configurações que parecem mais uniformes ou regulares, a informação inicial pode se espalhar para regiões espacialmente ilimitadas. A previsão do comportamento desses autômatos é computacionalmente desafiadora e, muitas vezes, o estado futuro de certas regiões só pode ser determinado através de simulações completas do sistema ao longo do tempo [1, 7, 17, 19, 21, 35, 37].

Por fim, ACs da Classe 4 são notórios por sua complexidade, exibindo uma variedade de comportamentos que podem incluir padrões tanto regulares quanto irregulares. A informação inicial pode se propagar de forma complexa e imprevisível, afetando a dinâmica do sistema por períodos de tempo indefinidos. Devido a esta complexidade, a simulação completa de muitos desses autômatos requer recursos computacionais substanciais. Embora pareçam simples à primeira vista, alguns são capazes de realizar computação universal quando configurados adequadamente. No contexto de um sistema de computação universal, simular completamente sua dinâmica é

computacionalmente desafiador. Variações mesmo mínimas nas condições iniciais podem levar a grandes mudanças ao longo da simulação, tornando o sistema sensível às condições iniciais [1, 7, 17, 19, 21, 35, 37].

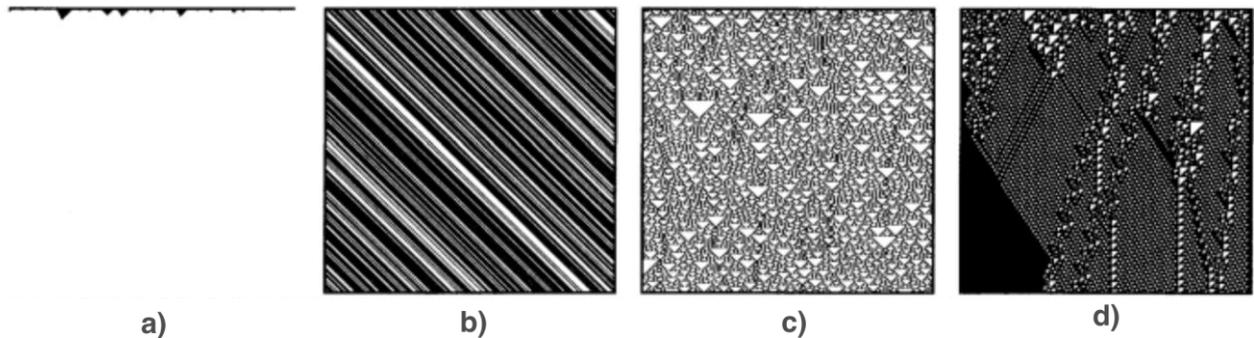


Figura 1 – Exemplo das quatro regras de Wolfram. a) Regra 40, pertencente à classe 1. b) Regra 56, classe 2. c) Regra 18, classe 3. d) Regra 110, classe 4. (Imagens reproduzidas da Ref. 35, p. 37.)

Na Figura 1, reproduzida da Ref. 35, p. 37, observa-se uma ilustração das quatro classes ACs, cada uma representada por uma regra específica de Wolfram, aplicada sobre uma configuração inicial aleatória. As sucessivas linhas horizontais na figura representam etapas consecutivas de iteração do sistema, com a linha superior denotando o estado inicial. Para a Regra 40 (Figura 1a), que faz parte da classe 1, o sistema rapidamente converge para uma configuração estável ou ponto fixo. Em contrapartida, para a Regra 56 (Figura 1b), da classe 2, resulta em um padrão caracterizado por faixas em movimento da esquerda para a direita. A Regra 18 (Figura 1c), pertencente à classe 3, manifesta um padrão que é auto-similar, refletindo complexidade em sua estrutura. Por último, na Figura 1d, a Regra 110 exemplifica a classe 4 de ACs, apresentando um comportamento imprevisível, evidenciado por uma ruptura notável no padrão à esquerda da figura.

Um AC pode ser caracterizado por pelo menos quatro elementos fundamentais [12, 19, 35, 90]:

1. Espaço do AC: O espaço celular  $G$  é representado por uma rede regular espacial, ou grade, que cobre uma porção de um espaço  $d$ -dimensional. Em particular, para o caso bidimensional, em termos matriciais,  $G = L (\text{Linhas}) \times C (\text{Colunas})$ . Formalmente,  $G = \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq C\}$ .
2. Conjunto de estados possíveis: Este é um conjunto finito de valores que as células da grade podem assumir. Matematicamente, podemos definir esse conjunto como  $\Omega(\mathbf{r}, t) = \{\Omega_1(\mathbf{r}, t), \Omega_2(\mathbf{r}, t), \dots, \Omega_m(\mathbf{r}, t)\}$  de estados discretos associadas a cada sítio

$r$  da rede e fornecendo o estado local de cada célula,  $\omega_{i,j}(t)$  no caso bidimensional, nos instantes de tempo  $t = 0, 1, 2, \dots$ .

3. Vizinhança: A exemplo do caso bidimensional, considerando uma célula  $c = (i, j)$ , o conjunto associado às células adjacentes e pertencentes à grade  $G$ ,  $V_{i,j}$ , corresponde ao conjunto de células  $\{(k, l)\}$  para todo  $(k, l) \neq (i, j)$ . Os vetores são selecionados a priori, com base no contexto específico da aplicação.
4. Conjunto de regras de transição: Este conjunto contém as regras que determinam como o estado de uma célula mudará ao longo do tempo, dependendo de seu estado atual e dos estados das células vizinhas. Denotamos este conjunto por  $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\}$ , que especifica a evolução temporal dos estados  $\Omega(\mathbf{r}, t)$ . A regra  $\Psi$  é aplicada de forma síncrona e idêntica a todas as células na grade  $G$ . Assim, para o caso particular bidimensional,

$$\omega_{i,j}(t+1) = \psi(\omega_{i,j}(t), \{\omega_{k,l}(t)\}), (k, l) \in V_{i,j}, \quad (2)$$

onde  $\psi$  é uma função arbitrária que especifica a regra de operação sobre a célula  $(i, j)$  levando em consideração sua vizinhança  $V_{i,j}$  entre os instantes  $t - 1$  e  $t$ . Ainda, podemos definir a vizinhança (Moore com  $r = 1$ ):

$$V_{i,j} = \{(k, l) \mid k \in \{i - 1, i, i + 1\}, l \in \{j - 1, j, j + 1\}, (k, l) \neq (i, j)\}. \quad (3)$$

Na presente forma, a Eq. (2) é equivalente à Eq. (1).

Nesse contexto, as células atuam como unidades básicas do sistema, onde ocorrem as mudanças de estado. Alguns modelos permitem apenas dois estados possíveis para as células (geralmente 0 e 1), enquanto outros, como o primeiro modelo proposto por von Neumann, podem ter mais estados, até 29, por exemplo. Os estados das células podem ser contínuos ou discretos. Em cada passo de tempo discreto, as células recebem novas informações (estados) de suas vizinhas, que podem então alterar seu próprio estado para o próximo passo de tempo [14].

A grade ou rede é outro componente intrínseco ao AC. Ela pode ser delimitada ou ilimitada no espaço e no tempo. Contudo, para fins de simulação e obtenção de dados, somente é possível trabalhar com grades de tamanho finito. A grade de elementos pode ter diferentes configurações, contornos, formatos, regras, elementos tamanhos, dimensões etc. Contudo, redes de uma ou duas dimensões são as mais recorrentes no desenvolvimento de pesquisas [14, 19]. Note, entretanto, que quando maior é o espaço do AC, mais complexa e difícil de ser implementada e processada a vizinhança

à célula. A depender dos valores contidos em cada célula próxima àquela em questão, a condição da unidade central poderá ser modificada ou não.

É possível selecionar uma vizinhança aleatória, que não esteja necessariamente próxima ou que seja composta por elementos próximos e distantes da célula avaliada (Figura 2). Em grades unidimensionais, geralmente são considerados como vizinhos os elementos localizados imediatamente a direita e a esquerda da célula central (Figura 3). Tradicionalmente, podemos considerar os dois modelos de vizinhança mais utilizados em redes de duas dimensões: o idealizado por John von Neumann e o definido pelo professor e inventor Edward Forrest Moore (Figura 4). A vizinhança de von Neumann contempla as células posicionadas ortogonalmente a célula situada no centro do sítio, correspondendo as localizações norte, sul, leste e oeste. A vizinhança de Moore é formado pelas quatro células de von Neumann e mais as células posicionadas nas diagonais, a noroeste, nordeste, sudoeste e sudeste. A escolha adequada da vizinhança para a aplicação de interesse é crucial, pois sua topologia irá influenciar diretamente nos efeitos sentidos pelos componentes do sistema [12, 14, 15, 19, 35, 36].

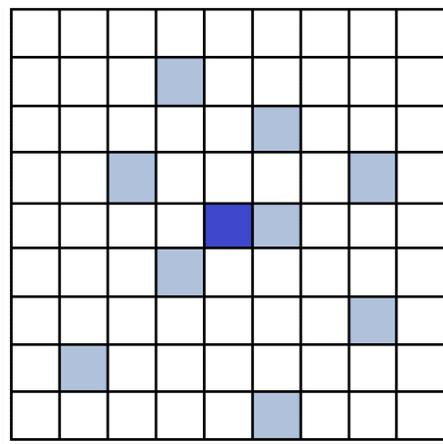


Figura 2 – Representação de uma vizinhança aleatória, onde os vizinhos (em azul claro) são compostos por elementos próximos ou distantes da célula focal (em azul escuro) (Fonte: adaptado de 17, p. 30).

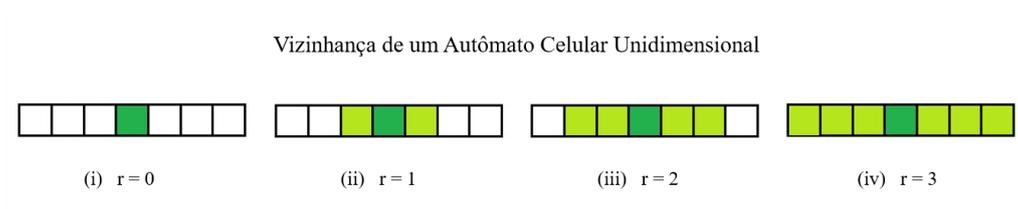


Figura 3 – Representação da vizinhança em um autômato celular unidimensional. A célula em verde escuro simboliza a célula focal, enquanto as coloridas em verde claro, são as células adjacentes. Apresenta-se uma sequência crescente do parâmetro de raio da vizinhança (Fonte: adaptado de 36, p. 23).

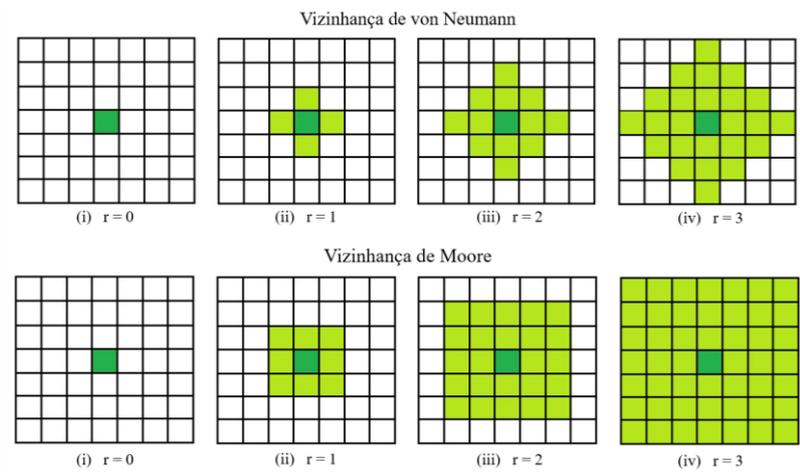


Figura 4 – Ilustração da vizinhança de von Neumann e Moore em uma grade de duas dimensões com raios de alcance distintos. A célula em verde escuro corresponde a célula focal. As células em verde mais claro são as células adjacentes a célula central, de acordo com os dois modelos de bairro representados (Fonte: adaptado de 12, ps. 4-5, 14, p. 5 e 17, p. 29).

O conjunto de regras são parte indispensável para toda e qualquer pesquisa com ACs, independentemente da área de estudos e aplicação. São as regras que irão definir a modificação espacial e temporal, assim como a condição de estado final após a execução do processo completo da simulação. Sem a definição das regras, não se pode efetuar mudanças no modelo, nem obter dados quanto à dinâmica de interação entre os seus componentes. Assim, entende-se que sem regras não seria possível desenvolver estudos com estas ferramentas, pois não haveria nenhuma lógica atuante e influente no comportamento das células, conduzindo-as para uma determinada direção e gerando informações sobre os possíveis fenômenos estudados. São as regras as responsáveis por imprimir em todos os elementos constituintes do sistema o aspecto, estrutura, coleção de símbolos norteadores ao princípio modificador de estado. Não existem restrições quanto ao número de normas regulamentadoras que um autômato possa ter. Os algoritmos devem ser capazes de conceber matematicamente todos os níveis de interações e combinações possíveis de acordo com as características do sistema. As regras implementadas verificam a condição de cada célula focal e seus respectivos vizinhos, e mediante os resultados, executa as devidas modificações [14].

Como supramencionado, pesquisas feitas com ACs não podem ser realizadas em redes infinitas de células, em razão da limitação computacional, bem como, da indefinição de seu estado final, pelas próprias características de um sistema ilimitado. Assim, a fim de trabalhar com estes modelos matemáticos utilizam-se de grades finitas. Contudo, existe uma problemática nesse sentido: a modificação dinâmica e síncrona de

todo o sistema é mediada pelos estados de células centrais e suas respectivas vizinhas. Isto posto, como definir a vizinhança de células que se encontram nos limites da rede? Um elemento focal localizado, por exemplo, na extremidade direita do autômato não possui vizinhos a sua direita, assim como uma célula na extremidade esquerda não possuiria vizinhos a sua esquerda [14, 15].

Esta problemática quanto as condições de contorno é semelhante a encontrada em equações diferenciais e para solucioná-la são feitas algumas adaptações, tais como: definição de normas distintas para as células localizadas nas fronteiras, com sistema de identificação de posição; expansão do limite com elementos imaginários, a fim de tornar completo o número de células de forma coerente com a vizinhança; estabelecimento de topologias de grade convenientes, como as toroidais, que sejam capazes de abranger todos os elementos do sistema, através da interconexão entre elementos da parte superior, inferior e laterais em redes bidimensionais (Figura 5).

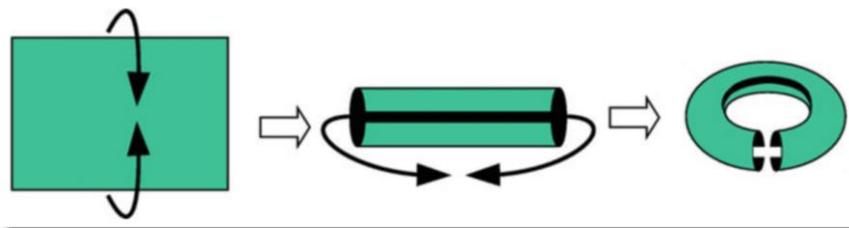


Figura 5 – Ilustração de uma rede em formato de toro, como forma de responder à condição de contorno das grades de autômatos celulares. Nesta topologia, as regiões superior, inferior e laterais são interligadas, e se compensam quanto as relações de vizinhança. (Fonte: 14, p. 6.)

A seleção da estratégia apropriada para tratar das condições de contorno dependerá da aplicação desejada com a pesquisa 14, 35. A Figura 6 mostra outros modelos alternativos para abordar estas condições: Duplicar o valor de uma célula para compor o elemento imaginário (Figura 6a, modelo adiabático); acrescentar componentes que possuam o mesmo estado das células vizinhas imediatas dentro da rede (Figura 6b, modelo reflexivo); em matrizes unidimensionais, ajustar as condições de contorno nos lados esquerdo e direito (Figura 6c, modelo periódico); delimitar a área da rede e incluir nas fronteiras elementos com valores próprios (Figura 6d, modelo fixo), diferentes dos estados das células localizadas dentro da grade, e que podem ou não ser modificadas dinamicamente.

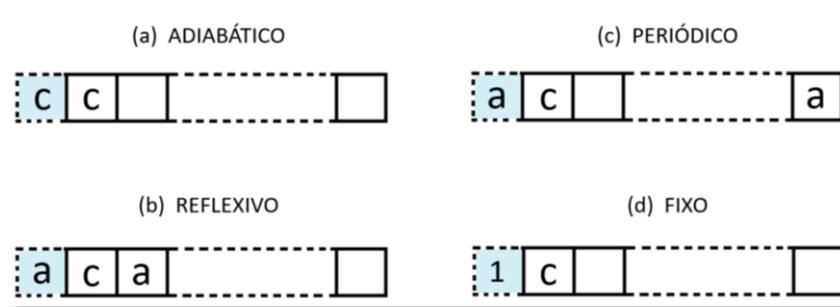


Figura 6 – Modelos alternativos para atender as condições de contorno das redes de autômatos celulares. São acrescentadas células imaginárias em todos os quatro exemplos para completar a vizinhança nas extremidades da grade. (a) A unidade adicionada recebe o mesmo valor que sua vizinha e célula focal. (b) Assume o mesmo estado que a vizinha imediata da célula central localizada dentro da rede. (c) A condição de contorno estabelece uma conexão entre extremidades opostas, completando o bairro. (d) A rede é restringida a um valor limite, e os elementos adicionados possuem estados previamente determinados. (Fonte: adaptado de 35, p. 30.)

Ao elaborar o algoritmo para o AC e definir sua configuração inicial, é possível estabelecer uma condição de parada. Esta pode ser uma configuração final específica ou um critério que permita interromper a execução antes de seu término. Um aspecto fundamental no estudo de ACs é o conceito de iteração. Uma iteração envolve a análise do estado atual de cada célula na rede, a aplicação de regras definidas para atualizar o estado de cada célula e de suas vizinhas, e a atualização simultânea de todos os estados na rede. A configuração inicial serve como ponto de partida para esse processo iterativo [14].

Os ACs unidimensionais são frequentemente referidos como "autômatos celulares elementares" [21, 23]. Apesar de sua simplicidade aparente, esses modelos podem exibir comportamentos complexos. Em um AC unidimensional, cada célula pode ter apenas dois estados possíveis, geralmente representados por 0 e 1. Nestes sistemas, considera-se os estados das células centrais e de suas duas células vizinhas adjacentes, à direita e à esquerda, resultando em  $2^3 = 8$  configurações de vizinhança possíveis. Dada essa configuração, existem  $2^8 = 256$  regras potencialmente aplicáveis [17, 20, 37].

ACs bidimensionais normalmente possuem redes quadradas ou retangulares. As configurações de vizinhança mais comuns são as definidas por von Neumann e Moore. Há também variações dessas vizinhanças, como a vizinhança de Moore estendida, que inclui células adicionais em um raio maior [17, 20]. A escolha do tipo de vizinhança dependerá diretamente do fenômeno que se deseja modelar. É difícil determinar um número exato de regras aplicáveis em ACs bidimensionais, dada a sua vasta aplicabilidade em diferentes campos da ciência. Consequentemente, a pesquisa em ACs

continua a ser uma área em rápido desenvolvimento, com novas regras e aplicações emergindo regularmente.

#### 2.1.4 Aplicações e Relevância Científica

O estudo de fenômenos complexos como terremotos, desenvolvimento de câncer, formação de cristais de neve e incêndios florestais tem implicações significativas em diversas áreas científicas. Modelos computacionais, particularmente ACs, têm se mostrado ferramentas poderosas para entender esses sistemas.

No contexto da sismologia [4], a teoria de criticidade auto-organizada de Bak, Tang e Wiesenfeld oferece um quadro teórico para o entendimento dos terremotos. Em meados do século XX, Gutenberg e Richter introduziram uma relação matemática que descreve a frequência e magnitude desses eventos, posteriormente adaptada para uma lei de potência. Olami, Feder e Christensen avançaram nesse campo ao combinar ACs com o modelo de bloco-mola de Burridge-Knopoff em 1992. Esse modelo computacional permitiu explorar mais a fundo as relações matemáticas de GR e concordou bem com dados experimentais.

Na área médica, particularmente na oncologia [13], a modelagem computacional oferece insights valiosos para o diagnóstico precoce e tratamento de cânceres. Uma abordagem híbrida que combina equações diferenciais parciais com ACs foi desenvolvida para estudar a interação entre o sistema imunológico e o crescimento tumoral. Esse modelo complexo permitiu a análise de várias fases do câncer, desde seu desenvolvimento inicial até a metástase.

O estudo da formação de cristais de neve também se beneficiou de modelos baseados em ACs [16]. Utilizando uma matriz bidimensional em forma hexagonal, foi possível simular com sucesso as estruturas complexas encontradas em cristais de neve reais, embora limitadas a representações bidimensionais.

Por fim, a modelagem de incêndios florestais [24], especialmente na região do Parque Nacional das Emas em Goiás, também foi abordada através de ACs. Combinando dados reais sobre vegetação, topografia e condições meteorológicas, os pesquisadores puderam criar um modelo computacional eficaz para simular a propagação desses desastres naturais, contribuindo para estratégias de mitigação e combate a incêndios.

## 2.2 JOGO DA VIDA

### 2.2.1 Contexto Histórico

Apesar do sucesso que os ACs tiveram em meados do século XX, eles haviam perdido sua relevância e destaque no âmbito geral da sociedade. Isto devido aos recorrentes trabalhos desenvolvidos nas áreas das ciências exatas, que careciam de modelos ilustrativos, tornando-se desinteressantes e distantes da realidade. Foi somente a partir das célebres publicações na coluna de Martin Gardner na prestigiada *Scientific American*, a respeito do sistema proposto por Conway, que os ACs tiveram sua relevância e impacto renovados e até mesmo ampliados [3, 23, 35].

O primeiro sistema de AC que se popularizou entre a comunidade científica foi o criado entre 1960-1970 pelo matemático britânico de Cambridge John Horton Conway (1937-2000), denominado Jogo da Vida (JdV). Este autômato bidimensional se difundiu tanto que se tornou o modelo de ACs mais conhecido no mundo e pode contribuir para o desenvolvimento de inúmeras áreas, como, p.ex., a informática [8, 8, 18, 37, 91].

Conway idealizou o JdV por estar interessado em configurações elementares que possuíssem a interessante capacidade de produzir espectros com grau elevado de sofisticação e informação. Seu objetivo era entender os mecanismos por trás de estruturas singelas que formavam padrões tão originais, refinados, complicados e inesperados. Mediante a compreensão da lógica atrelada ao estabelecimento progressivo dessas estruturas complexas o matemático tinha a intenção de descobrir a essência desses padrões e desenvolver regras matemáticas associadas as suas formações. Com isso seria capaz de explicar através de princípios matemáticos simples, mas fundamentais, a geração de sistemas complicados [8, 19, 35].

Primordialmente o contexto que impulsionou Conway a elaborar o JdV estava associado ao estudo da dinâmica presente na sociedade. O matemático empenhou-se em fabricar um modelo apoiado em leis elementares que fosse capaz de recriar e proporcionar a investigação das taxas de variação de indivíduos em comunidades localizadas. Os princípios lógicos concebidos por Conway estavam subordinados as arbitrariedades presentes nas taxas de natalidade e mortalidade mundiais [18, 19, 92].

Os ACs do JdV são altamente sensíveis as definições preliminares implementadas, de modo que mínimas mudanças nestas condições podem gerar

resultados completamente diferentes. Estes sistemas embora pareçam triviais são responsáveis pela geração de padrões altamente complexos e são capazes de reproduzir satisfatoriamente inúmeros modelos dinâmicos [21].

O que chamou a atenção do público em geral em relação ao JdV foi a sua surpreendente simplicidade, mas ao mesmo tempo, acessibilidade pela sua habilidade em traduzir de maneira transparente e evidente os princípios de funcionamento de modelos que outrora eram de difícil compreensão [14, 23]. Esta novidade elevou o interesse por pesquisas com ACs e motivou cientistas e exploradores de diferentes áreas, como as de ciências exatas e computação, a se aventurarem com este jogo e gerarem respostas instigantes. As características intrínsecas ao JdV produziram um interesse duradouro por estes sistemas [14].

Os assuntos populares na ciência que remetem a época da criação do JdV eram o modelo caótico de Edward Lorenz atrelado ao fenômeno de convecção na atmosfera e o estudo de sistemas dinâmicos formadores de padrões enigmáticos e o modelo matemático discreto, o qual, por exemplo, é capaz de fornecer meios para a investigação de variações existentes nas taxas de indivíduos em sociedade [30]. Alinhado a esses estudos, o JdV pode somar ao escopo de pesquisas que contemplavam a investigação de sistemas complicados, e sua abrangência superou as fronteiras da física e da matemática, motivando o interesse geral pelo desvelamento do complexo [23].

Conway queria estudar os processos de interações locais próximas entre componentes de um sistema, os quais eram os principais responsáveis pela formação dos aspectos macroscópicos interessantes. Foi somente através da elaboração e execução de muitos ensaios que o matemático pode formular seu modelo de AC matricial cujas leis de modificação eram simples, mas que conferiam padrões espaciais sofisticados [23].

Historicamente o JdV foi idealizado para estudar as interessantes e intrigantes estruturas encontradas na natureza [93]. Desde a sua criação este sistema atraiu a atenção de inúmeros pesquisadores e entusiastas [8, 23]. Nas últimas duas décadas a excelente desenvoltura nas aplicações desses modelos pode contribuir significativamente com o aperfeiçoamento de muitas áreas [8, 23]. É possível encontrar em diferentes literaturas trabalhos voltados a investigação dessas estruturas simples, mas formadoras de padrões tão complexos [58].

## 2.2.2 Características e Propriedades

O JdV formulado por Conway é formado por uma matriz uniforme de células. Cada célula da rede em duas dimensões pode apresentar apenas dois estados: vivo/ligado e morto/desligado. Para representar esses estados utilizam-se os números 0 e 1, que graficamente representam geralmente cores [5, 6, 8, 9, 12,14,16, 19, 23, 34, 19]. Como exemplo, tem-se a Figura 7, que ilustra um modelo de JdV elaborado com as condições definidas por Conway.

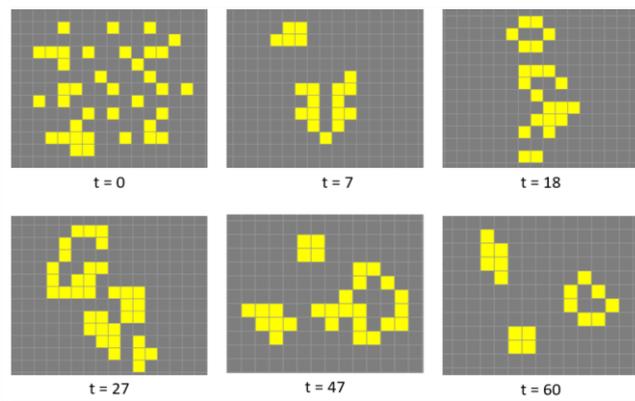


Figura 7 – Exemplo da modificação espaço-temporal de um autômato celular do jogo da vida. As configurações iniciais no tempo  $t=0$  foram implementadas de forma arbitrária, sem a intenção de seguir um padrão pré-definido. Após 60 iterações a estrutura se estabilizou, produzindo dois padrões estáveis e um periódico. Os quadrados em amarelo e cinza representam as células vivas e mortas, respectivamente (Fonte: [76]).

O modelo de vizinhança escolhido para o JdV foi o de Moore, em que as células localizadas imediatamente ao redor da célula focal são consideradas, refletindo no valor de raio de alcance igual a um (Figura 4, Vizinhança de Moore, (ii)  $r = 1$ ). Isto corresponde aos elementos ao norte, nordeste, leste, sudeste, sul, sudoeste, oeste e nordeste da célula central. Assim, os sítios elementares deste modelo possuem a forma quadrada [6, 8, 16, 18, 19, 23].

O JdV de Conway difere de um jogo tradicional em que são implementadas diferentes e constantes ações ao longo de sua duração para a alteração do estado primordial. Este AC refere-se a um jogo em que a única atuação efetiva do jogador é definir as condições iniciais do sistema, selecionando regiões no espaço para assumirem valores de 0 e 1 a fim de formar uma estrutura primária específica e obter posteriormente sua modificação espaço-temporal. Após a seleção da geração inaugural, o modelo será transformado mediante a implementação consecutiva de um conjunto de regras, o qual gerará novos padrões de elementos na grade até a ocorrência ou não de sua estabilização. A quantidade de vezes em que as normas serão empregadas no sistema deverá ser

definida antes do início do jogo, não sendo permitidas alterações posteriores até a execução completa de sua simulação [6, 12, 21, 26].

O objetivo do JdV é, através da aplicação de um conjunto elementar de princípios lógicos, desenvolver um sistema capaz de simular a ocorrência de mudanças dinâmicas em conjuntos de seres vivos [18, 21], tornando possível a investigação da interação e o processo de competição nesse meio a partir de regras comuns a todos os indivíduos [2, 16]. Daí o sentido para o nome JdV. Sua característica marcante é a ocorrência de nascimentos, mortes e sobrevivências de células [2, 16, 18], com frequências, métodos, e interações ajustáveis.

É importante assinalar que embora o nome do jogo elaborado por Conway carregue uma conotação relativa ao estudo de organismos vivos, existem inúmeras possibilidades de emprego desses sistemas. Em lugar de pensar os componentes da matriz apenas como células, é possível associá-los a pesquisa envolvendo animais, moléculas orgânicas, cristais de neve, grandezas relativas à mecânica estatística, poluição de mares, indivíduos interessados em adquirir propriedades imobiliárias, detecção de regiões com possível degradação do solo devido à falta de chuvas, entre outras aplicações [5, 32, 42, 43, 44].

Os estados de cada componente pertencente ao modelo matemático são atualizados mediante os valores identificados tanto nas células focais quanto em suas oito vizinhas mais próximas em uma unidade de tempo anterior [9, 14]. O esquema de renovação celular mediado por regras pré-definidas depende da quantidade de elementos vizinhos vivos e mortos no entorno de uma célula central [18, 34]. Os modelos de JdV apresentam a propriedade totalística. Isto significa que a condição futura de uma célula localizada no centro de um sítio dependerá exclusivamente do cálculo de soma dos valores assumidos por seus vizinhos na etapa de tempo anterior [94]. A mudança na condição de cada elemento ocorre de forma síncrona e descontínua no tempo [12, 34]. As estruturas obtidas na modificação total do sistema possibilitam o desenvolvimento de estudos pertinentes as áreas de ciências exatas [6].

O conjunto de normas estabelecidos nos modelos de ACs do JdV apresentam a propriedade determinística. Isto significa que os processos de modificação de estado relativo a cada elemento da rede acontecerão de forma exata. O sistema irá verificar a condição efetiva de cada célula e calcular com precisão os valores que irão assumir no intervalo unitário de tempo futuro [2, 14]. Contudo, estes modelos exibem também a qualidade da irreversibilidade, não sendo possível retornar ao estado inicial em

que o sistema foi proposto. Uma vez alterada sua configuração preliminar, as disposições espaço-temporais das células seguirão com a modificação de seus estados mediados pelas regras empregadas até o fim da simulação [93].

Conway experimentou exaustivamente diferentes normas matemáticas para seu modelo de AC, com a finalidade de conceber uma formulação adequada, capaz de equilibrar as taxas de natalidade e mortalidade de células na rede 16. A condição final do JdV após a conclusão de sua simulação geralmente produz um espaço homogêneo ausente de células ou com a presença de padrões equilibrados, periódicos, ou até mesmo estruturas que se deslocam ao longo da grade [14, 18].

O JdV que pertence à Classe 4 de Wolfram. Isso implica que o estado final do sistema só pode ser determinado após a execução completa da sua simulação. Diferentemente dos ACs das três outras classes, que podem ser analisados usando métodos aplicados em sistemas dinâmicos, os ACs da Classe 4 requerem consideráveis recursos computacionais para sua investigação e desenvolvimento. É na Classe 4 que se encontram os autômatos com propriedades de universalidade computacional. Essa característica confere a esses sistemas a capacidade de executar qualquer modelo de código que seja finito. No entanto, a manifestação dessa propriedade crucial depende da configuração espaço-temporal adequada de seus elementos e estados [1, 2, 7].

A primeira vez que a propriedade de computação universal foi comprovada para o JdV data o ano de 1982 [93]. Como exemplo, um sistema de Conway que exibiu essa singularidade foi um modelo em que cada célula podia assumir dezoito valores de estado distintos e cuja vizinhança possuía um raio limitado a uma unidade [22]. Vale destacar que são poucos os sistemas constituídos por um conjunto particular de regras, estados superiores a dois valores distintos e raio de alcance acima do unitário que exibem a capacidade de computação universal. Contudo, todos os sistemas que demonstram estas habilidades apresentam um desempenho com elevado grau de complexidade [1].

Do ponto de vista físico, em conformidade com [5], a rede de ACs idealizada por Conway não se refere a um modelo hamiltoniano e linear, além de não possuir uma função de energia. Da ótica de sistemas de informação, o JdV pode ser entendido como um dispositivo tecnológico de ampla aplicação, capaz de processar informações mediante o emprego de regras sobre configurações espaço-temporais de elementos pré-definidas na rede celular. Através da seleção apropriada de componentes e normas estas ferramentas computacionais são aptas para executar qualquer sequência de dados e algoritmos, incluindo os mais complexos [7]. Estes sistemas também apresentam o potencial de auto

replicação, propriedade almejada desde a época de von Neumann em seus estudos inaugurais quanto aos ACs [17].

Considerando que o JdV apresenta a formação de padrões sofisticados, de elevada complexidade, tal qual os encontrados nas organizações de seres vivos e no meio ambiente, espera-se que estes protótipos sejam eficazes nos estudos do ecossistema. A perspectiva através do emprego desses modelos computacionais para a investigação de sistemas reais é tornar a pesquisa mais próxima dos fenômenos existentes na realidade concreta. Como exemplos, tem-se as pesquisas in vivo e in vitro associadas as mudanças ocorridas em comunidades de mamíferos roedores ou aqueles pertencentes a classe diversa de insetos coleópteros, os besouros, respectivamente. Isto porque os ACs são competentes para os estudos de padrões caóticos [25].

As regras para o JdV são rigorosamente estabelecidas da seguinte forma [2, 5, 6, 8, 9, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 26, 35]:

#### 1. NASCIMENTO:

- a. Uma célula em estado inativo (estado 0, ou “morto”) transitará para um estado ativo (estado 1 ou “vivo”) no próximo passo de tempo se, e somente se, exatamente três de seus vizinhos mais próximos (vizinhança de Moore com  $r = 1$ ) estiverem em estado ativo (veja Figura 8a).
- b. Qualquer célula em estado inativo permanecerá nesse estado se o número de células adjacentes em estado ativo for diferente de três [26].

#### 2. MORTE POR SUPERLOTAÇÃO OU SUFOCAMENTO:

- a. Uma célula em estado ativo será desativada (i.e., transitará para o estado 0, ou “morto”) no próximo passo de tempo se possuir quatro ou mais vizinhos em estado ativo (veja Figura 8b).

#### 3. MORTE POR SUBPOPULAÇÃO, SOLIDÃO OU ISOLAMENTO:

- a. Uma célula em estado ativo será desativada no próximo intervalo de tempo discreto se estiver cercada por menos de duas células em estado ativo (veja Figura 8c).
- b. Sob essas mesmas condições, uma célula em estado inativo permanecerá inativa [23].

#### 4. SOBREVIVÊNCIA:

- Uma célula em estado ativo permanecerá ativa no próximo passo de tempo se tiver exatamente dois ou três vizinhos em estado ativo (veja Figura 8d).
- Quando uma célula ativa possui exatamente dois vizinhos ativos, aplica-se a propriedade da inércia para essa célula, ou seja, ela permanecerá no seu estado atual no próximo intervalo de tempo discreto [6].

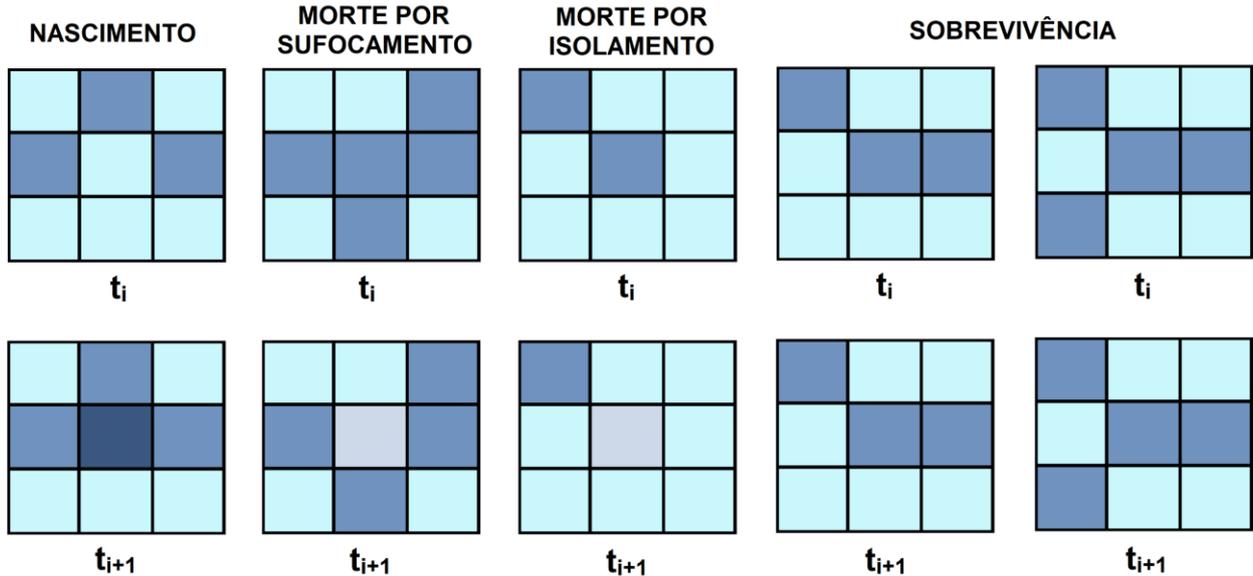


Figura 8 – Representação das regras do jogo da vida definidas por Conway. (a) Uma célula morta cercada por exatamente três células vivas se tornará viva na próxima geração. (b) Uma célula viva rodeada de quatro ou mais células ativas será desativada na geração seguinte. (c) Uma célula viva com menos de dois vizinhos vivos irá morrer no passo de tempo seguinte. (d) Uma célula viva com duas ou três células vivas pertencentes ao seu bairro irá permanecer viva na seguinte geração. As células mortas estão representadas pela cor azul claro e as vivas estão em azul escuro (Fonte: adaptado de [23]).

Com base na Ref. [5], em linguagem matemática o sistema proposto por Conway pode ser escrita como:

$$\omega_{i,j}(t+1) = \omega_{i,j}(t)\delta_{2,\sum \omega_{k,l}(t)} + \delta_{3,\sum \omega_{k,l}(t)}, \quad (4)$$

onde  $\delta_{\alpha,\beta}$  representa o delta de Kronecker, a depender da vizinhança  $V_{i,j}$  da célula  $c = (i,j)$ , conforme Eq. (3), cuja soma dos estados  $\sum \omega_{k,l}(t)$  calcula efetivamente o número de células “vivas” (i.e.,  $\omega_{k,l} = 1$ ) em  $V_{i,j}$ . As constantes 2 e 3 se remetem às regras definidas por Conway quanto soma dos oito elementos adjacentes e a possibilidade da ocorrência de nascimentos, mortes ou invariância de estados das células centrais,  $c = (i,j)$ . De forma geral, a condição de um componente central no passo de tempo unitário futuro irá depender exclusivamente da soma dos estados identificados em sua vizinhança no passo de tempo anterior.

De acordo com o estudo conduzido na Ref. [18], as regras estabelecidas por Conway para JdV foram formuladas com o intuito de criar configurações que sugerem um desenvolvimento ilimitado. No entanto, essa propriedade não pode ser asseveradamente confirmada para todas as estruturas geradas pelo modelo. Adicionalmente, o JdV é capaz de produzir padrões que são espacialmente homogêneos, periódicos ou em estado de equilíbrio estático.

Desde sua inauguração no cenário científico, o JdV tem suscitado significativo interesse acadêmico, resultando em uma vasta gama de estudos e desenvolvimentos subsequentes. Em consequência da sua notoriedade, observou-se que o JdV produz certas estruturas de maneira recorrente em variadas simulações, independentemente da configuração inicial ou do domínio específico da pesquisa em questão. Tais estruturas são categorizadas com base em suas características particulares, que se manifestam ao longo do processo iterativo [8, 18].

Em ACs modelados pelo JdV, existem estruturas que evanescem após um número determinado de iterações. Isso ocorre devido às propriedades intrínsecas de suas configurações iniciais, que conduzem à anulação de todas as células componentes, em conformidade com as regras de transição definidas por Conway [14].

Há também um conjunto de estruturas que exhibe propriedades de estabilidade, mantendo suas características originais ao longo de múltiplas iterações. Devido à recorrência dessas estruturas no JdV, elas foram designadas com nomenclaturas específicas para facilitar sua identificação e diferenciação. Exemplos incluem “block” (Figura 9(i)), “loaf” (Figura 9(ii)), “ship” (Figura 9 (iii)), “beehive” (Figura 9(iv)) e “boat” (Figura 9(v)) [14, 17].

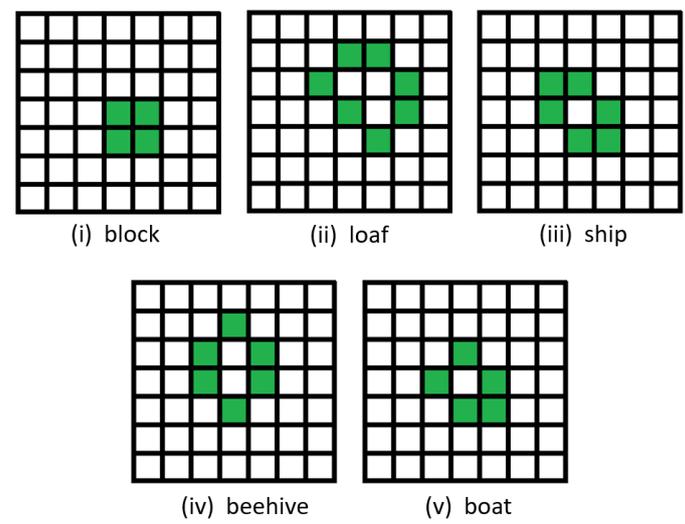


Figura 9 – Ilustração das estruturas estacionárias recorrentes no jogo da vida. Quadrados coloridos em verde e branco representam as células vivas e mortas, respectivamente. (i) block; (ii) loaf; (iii) ship; (iv) beehive e (e) boat (Fonte: adaptado de 17, p. 34 e 18, p. 10).

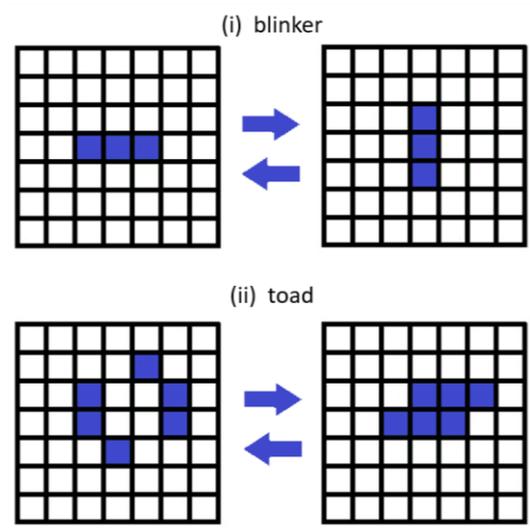


Figura 10 – Representação de padrões cíclicos encontrados no jogo da vida. (i) blinker: estrutura que oscila entre três células vivas orientadas na horizontal e três células vivas dispostas na vertical e (ii) toad: formação que assume duas configurações distintas compostas por seis células vivas. Quadrados em azul e branco simbolizam células vivas e mortas, respectivamente (Fonte: adaptado de 17, p. 34 e 18, p. 10).

Padrões que apresentam ciclos entre duas ou mais configurações também foram identificados. Como exemplos, é possível citar o “blinker” e o “toad” (Figura 10(i) e Figura 10(ii), respectivamente) [14, 17, 18].

É possível encontrar objetos que se locomovem ao longo do tempo pela a grade uniforme e que exibem a propriedade da periodicidade. A cada duas iterações duas configurações específicas de células são repetidas, porém com a ocorrência de rotações e deslocamentos espaciais por orientações diagonais. Somente após quatro passos de tempo estas estruturas retornam as suas configurações iniciais, quanto a direção e sentido na grade, porém, deslocadas das coordenadas iniciais (Veja a Figura 11). Pela recorrente

aparição nas experimentações computacionais do JdV estas formações receberam o nome de “gliders” ou “planadores” [6, 14, 17, 18, 35].

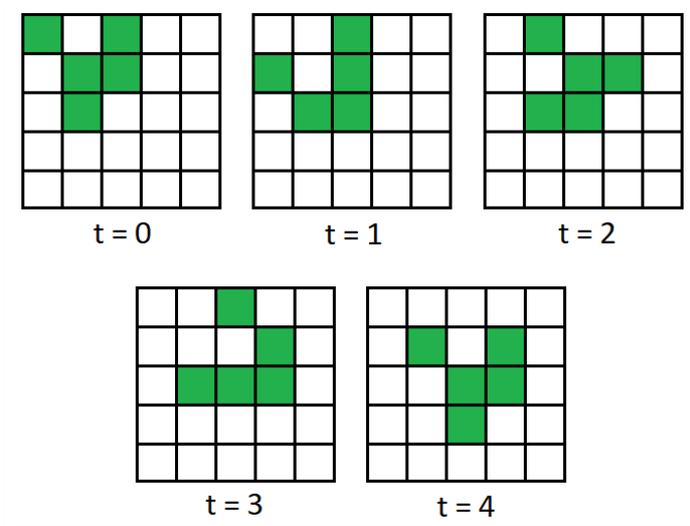


Figura 11 – Sequência de iterações com o objeto denominado planador. Estas estruturas repetem suas configurações a cada dois passos de tempo, porém, defasadas em relação a orientação original. Após quatro passos de tempo retornam ao sentido e direção inicial, porém, deslocadas de suas posições iniciais. Células em branco e verde representam os elementos mortos e vivos, respectivamente.

Além dos objetos denominados planadores, existem configurações assimétricas de células vivas que fornecem uma estrutura capaz de disparar planadores através da rede celular ao longo do tempo. Estas estruturas são conhecidas como “gosper”, “glider gun” ou “armas planadoras” (Figura 12). São formadas após quarenta iterações do JdV, instante no qual começam a descarregar planadores, e passam, a cada trinta passos de tempo, a disparar um planador pela grade. Inicialmente a configuração da metralhadora de planadores é limitada, contudo, conforme o sistema é simulado, o número de células envolvidas tende a um crescimento ilimitado. O processamento de um sistema como este é complexo, visto que existem estruturas em movimento para disparar planadores, bem como estes passam a se locomover pelo sistema indefinidamente [7, 11, 19].

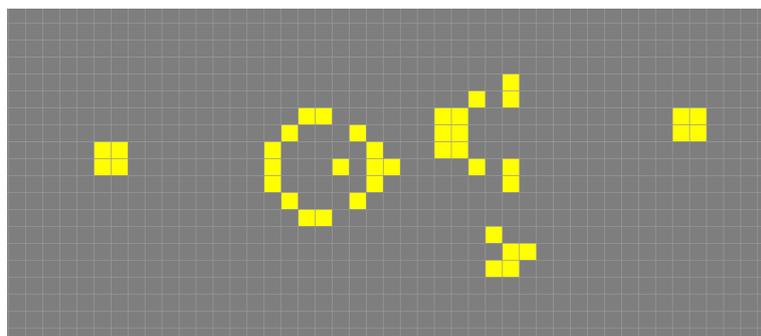


Figura 12 – Representação de uma arma de planadores. Dispositivo que emite um planador a cada trinta iterações do jogo da vida. Instantâneo tirado na iteração de número 30, evidenciando a emissão de um planador, estrutura mais abaixo, formada por cinco células vivas (em amarelo) (Fonte: [76]).

No JdV existe uma estrutura específica denominada "r-pentomino", a qual possui uma configuração inicial relativamente simples, composta por cinco células em estado ativo (veja Figura 13a). Esta estrutura é notável por gerar comportamentos de elevada complexidade. O "r-pentomino" é capaz de engendrar uma variedade de estruturas, que podem ser classificadas como complexas, periódicas, arbitrárias e estáveis. Este fenômeno perdura por múltiplas gerações até que, na iteração de número 1103, a estrutura atinge um estado de equilíbrio, composto por objetos que exibem propriedades tanto inertes quanto cíclicas [14].

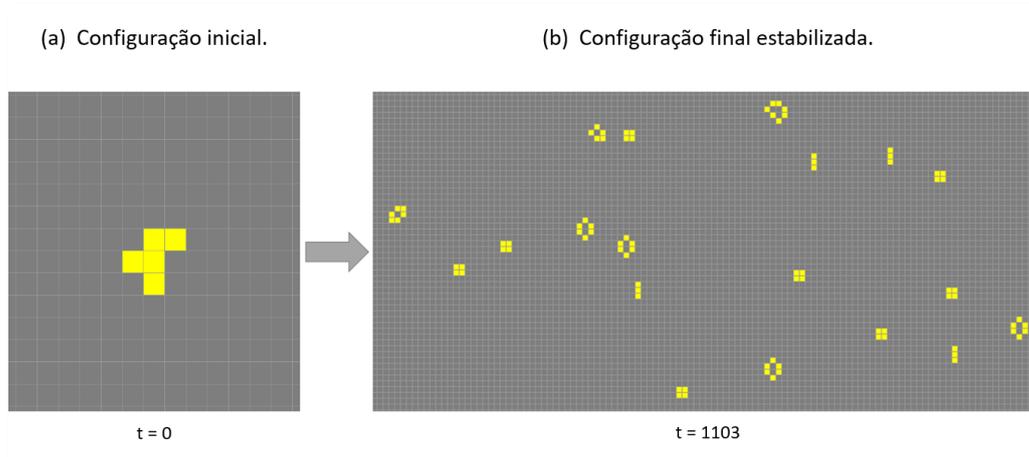


Figura 13 – Representação do objeto r-pentomino pertencente ao grupo de estruturas que aparecem com frequência no jogo da vida. (a) Inicialmente é formado por um conjunto de cinco células vivas (em amarelo) rodeadas por células mortas (em cinza). Posteriormente é modificado pelas iterações do jogo, formando inúmeras estruturas, até se (b) estabilizar na geração 1103 (Fonte: [76]).

### 2.2.3 Aplicações e Relevância Científica

ACs do tipo JdV são modelos computacionais simples mas poderosos, reconhecidos por sua universalidade computacional [58]. Esses sistemas podem funcionar como construtores universais, capazes de originar uma vasta gama de estruturas complexas. Dentre suas aplicações, destacam-se a modelagem de portas lógicas e contadores [11], bem como a interligação com tecnologias avançadas semelhantes à Máquina de Turing [18]. Sua versatilidade é evidenciada pela aplicação em campos diversos, como criptografia, biologia, engenharia, e artes [95, 96, 97, 98], demonstrando seu impacto significativo tanto na ciência quanto na sociedade [58].

A busca por sistemas com universalidade computacional é uma constante nas ciências exatas e da informação. Desde 1982, já era reconhecido que os ACs do tipo JdV possuíam essa propriedade [93]. Pesquisadores elaboraram modelos inspirados no

JdV para alcançar universalidade computacional, modificando aspectos como regras de vida, morte e sobrevivência das células [11]. Esse modelo de duas dimensões utilizou um parâmetro extra e diversas estruturas recorrentes no JdV, como planadores e objetos estáveis. Os resultados confirmaram sua capacidade de realizar computação universal, sublinhando o potencial dos ACs nesse domínio.

O interesse em redes de sensores sem fio tem crescido, especialmente para monitoramento ambiental e aplicações médicas. No entanto, um desafio persistente é o esgotamento energético desigual dos sensores próximos ao ponto coletor. Para abordar essa questão, Reyes et al. (2022) [12] propuseram um modelo baseado no algoritmo A-star ajustado aos ACs do tipo JdV. Essa abordagem demonstrou resultados superiores em termos de eficiência energética e taxa de coleta de dados.

Em um estudo separado na física estatística e da matéria condensada, Schulman e Seiden (1978) empregaram ferramentas computacionais do JdV para estudar sistemas de alta complexidade. A pesquisa focou em entender mecanismos microscópicos e gerar estruturas complexas com base em regras simples. Os resultados corroboraram o potencial do JdV como uma ferramenta eficaz para investigar sistemas não-lineares [5].

## 2.3 FENÔMENO DA DIFUSÃO

### 2.3.1 Conceito

O fenômeno físico da difusão é um tópico de crescente interesse nas ciências naturais e ambientais, abordando questões relativas à matéria e aos organismos vivos. Este avanço tem permitido diversas aplicações significativas, inclusive na análise de processos químicos de difusão-reação [40].

O entendimento matemático e físico da difusão é fundamentado em princípios que avaliam a taxa de deslocamento de substâncias em relação ao tempo e à área disponível. Em particular, o fenômeno está ligado às leis de conservação da massa e à equação da continuidade, expressa como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (5)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente das unidades elementares (ou partículas) que compõem a substância em estudo e  $\nabla \cdot$  é o operador de divergência. A densidade de

corrente pode ser expressa em termos da constante de difusão  $D$  e do gradiente da densidade  $\rho$  como:

$$J = -D \nabla \rho \quad (6)$$

o vetor velocidade do fluido, e  $\nabla \cdot$  é o operador de divergência. Esta equação é crucial para entender como a difusão opera em sistemas variados, oferecendo uma base teórica robusta para pesquisas e aplicações práticas.

Se o coeficiente de difusão  $D$  é constante e não dependente da densidade da matéria  $\rho$  ou da configuração espacial do sistema, então a difusão é considerada linear e homogênea. Nesse caso, o fenômeno pode ser adequadamente descrito pela Lei de Fick,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho. \quad (7)$$

Em escalas moleculares ou atômicas, o processo de difusão é essencialmente governado por movimentos aleatórios de partículas, que são influenciados pelas propriedades específicas do meio em que se encontram. Existem numerosos sistemas na natureza que possuem altos graus de liberdade e exibem tais comportamentos. Nestes sistemas, ocorrem diversas interações e eventos de espalhamento entre as partículas constituintes, levando a estados complexos e configurações elaboradas [40].

### 2.3.3 O movimento browniano, a Equação de Langevin, a classificação do fenômeno de difusão e o Teorema de Flutuação-Dissipação

O interesse pelo movimento de partículas flutuantes em fluidos data do século 18, mas foi mais claramente descrito no século 19 através das observações de Robert Brown, um botânico e físico escocês. Brown observou o comportamento errático de partículas de pólen na superfície da água, um fenômeno que posteriormente levaria o seu nome como Movimento Browniano.

Diversos pesquisadores trabalharam para caracterizar matematicamente esse fenômeno aleatório. Nesse contexto, os estudos realizados por Willian Sutherland (1904) [55] e Albert Einstein (1905) [56] foram particularmente importantes para o entendimento da dinâmica dessas partículas. Sutherland focou em derivar uma expressão para calcular a massa molecular, usando dados relacionados aos processos de difusão. Sua formulação considerou fatores como o raio das moléculas e a viscosidade do fluido, e permitiu a definição da força resistiva e da constante de difusão do sistema.

Einstein, por sua vez, baseou sua análise em um sistema infinitesimal sujeito a uma força externa, usando a relação de Stokes para a fricção, considerando o fluxo de partículas devido a um gradiente de pressão. Ele também empregou fundamentos matemáticos básicos para descrever o comportamento das partículas no limite de dimensões infinitesimais. A equação resultante de Einstein fornece uma descrição mais completa e rigorosa do processo de difusão [78].

Considerando uma partícula browniana de massa  $m$ , raio efetivo  $r$  e velocidade  $v$  suspensa em um fluido de viscosidade  $\eta$  e influenciada por uma força externa  $K$ , em um estado de equilíbrio dinâmico, em um sistema unidimensional, Einstein mostrou que essa força é equilibrada pelas forças decorrentes da pressão osmótica  $P$  da suspensão. Assim,

$$K = -\frac{m}{\rho N_A} \frac{\partial P}{\partial x} = 6\pi\eta r v, \quad (8)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa,  $m$  é a massa molar e  $N_A$  é o número de Avogadro. Através do alcance da expressão para a força externa foi possível expressar o fluxo material em concordância com a pressão osmótica, tal que

$$J = \rho v = -\frac{m}{6\pi\eta r N_A} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (9)$$

Mediante a caracterização deste fluxo, Einstein obtém a constante de difusão,

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta r N_A}, \quad (10)$$

ou em termos da constante de Boltzmann,  $k_B = R/N_A$ ,

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}. \quad (11)$$

Einstein reformulou a equação diferencial da difusão usando considerações fundamentadas em probabilidade. Ele baseou sua análise em uma densidade de probabilidade simétrica e normalizada, associada à presença de uma partícula browniana em um local específico, verificando seu deslocamento infinitesimal. Isso permitiu uma definição estatística do número de partículas por unidade de volume e ínfimos espaços temporais, considerando que seus movimentos são independentes. Em face das relações de caráter elementar, expansões foram implementadas, e considerou-se apenas os termos dominantes, resultando na seguinte expressão para a equação de difusão:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (12)$$

Neste processo concebe uma conexão diferencial entre o número de partículas e a constante de difusão. Avaliando  $D$  em termos do tratamento probabilístico, alcança-se uma relação integral entre o deslocamento quadrático médio e  $D$ ,

$$\langle \Delta^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 p(\Delta) d\Delta = 2D\tau \quad (13)$$

Ademais, o físico propõe uma distribuição gaussiana como solução para a expressão (12), e com isso constrói uma relação entre o deslocamento quadrático médio das partículas com a constante de difusão, em condições de equilíbrio térmico com o banho térmico à temperatura  $T$  e para tempos longos, maiores que o tempo de relaxação, i.e.,  $t \gg \tau$ :

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt = \frac{k_B T}{3\pi\eta r} t, \quad (14)$$

onde  $\langle \dots \rangle$  representa a média sobre o ensemble.

Paul Langevin (1908) [57], um físico francês, chegou na mesma expressão tecida por Einstein quanto a difusão. No entanto, Langevin expandiu a teoria browniana ao incluir uma força estocástica em sua análise. Essa força era fundamentada no espaço de velocidades e suas propriedades dinâmicas gerais.

Langevin formulou uma representação do comportamento aleatório de partículas submersas em um fluido, provocado pela constante interação destes elementos com os corpúsculos que constituem o meio. O efeito do deslocamento foi descrito mediante a consideração de uma força geral subdividida em duas classes de força: 1. força viscosa,  $-m\gamma v(t)$ , atrelada a uma constante de fricção  $\gamma$  que impõe uma resistência do ambiente ao trânsito de matéria, a qual exhibe influência temporal prolongada; e 2. força aleatória (ou ruído),  $\xi(t)$ , associada a dinâmica entre as partículas suspensas e as moléculas do sistema, cuja influência temporal é de curta duração, frequentemente caracterizada como impulso. Desconsiderando interferências exteriores, pode-se escrever a Equação de Langevin Normal (ELN) a partir da relação diferencial do momento linear da partícula em termos dessas duas forças:

$$\frac{d}{dt} p(t) = -\gamma p(t) + \xi(t). \quad (15)$$

Ao se considerar um meio estável e homogêneo, pode-se assumir que a força estocástica deriva-se de um processo gaussiano cuja média é nula. Outrossim, que o

sistema não apresenta qualquer correlação entre a condição inicial da partícula browniana sobre as flutuações decorrentes da dinâmica entre essa partícula e o meio. Essas relações podem ser escritas como condições gerais, i.e.,

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (16)$$

e

$$\langle \xi(t)p(0) \rangle = 0. \quad (17)$$

Assim, é possível calcular a correlação do momento, ou velocidade, a partir da transformada de Laplace da Eq. (15) e de sua inversa,

$$p(t) = [p(0) + \xi(t)]e^{-\gamma t}. \quad (18)$$

Multiplicando a Eq. (18) por  $p(0)$  é possível obter a função de correlação do momento linear (ou equivalentemente da velocidade),

$$C_p(t) = \langle p(t)p(0) \rangle - \langle p(t) \rangle \langle p(0) \rangle = [\langle p^2(0) \rangle - \langle p(0) \rangle^2] e^{-\gamma t}, \quad (19)$$

que tende ao valor nulo em escalas temporais prolongadas, representando o decrescimento rápido da influência das condições iniciais sobre a evolução do sistema.

O Teorema de Flutuação-Dissipação (TFD) é um resultado fundamental que estabelece uma relação entre as flutuações espontâneas em um sistema em equilíbrio térmico com o reservatório térmico à temperatura  $T$  e a resposta desse sistema às perturbações. A partir das Eqs. (13) e (17) e considerando o Teorema de Equipartição da Energia é possível demonstrar que [8]

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2m\gamma k_B T \delta(t - t'), \quad (20)$$

onde  $\delta(t)$  é a função Delta de Dirac, indicando que as forças estocásticas em diferentes tempos são descorrelacionadas. O TFD mostra que as interações não conservam as informações das flutuações anteriores, sendo "esquecidas" instantaneamente. Em outras palavras, a força estocástica em um dado momento não fornece informações sobre a força em qualquer outro momento. Isto é uma característica do que é conhecido como um processo de Markov e é uma simplificação que torna o problema tratável. Em sistemas reais, entretanto, pode haver correlações temporais que violam esta suposição.

Quando a relação entre o deslocamento quadrático médio e a variável temporal não segue um padrão linear, Eq. (14), o fenômeno de difusão é identificado como anômalo, e pode ser dividido em subdifusivo e superdifusivo.

Nos regimes anômalos as fases da dinâmica difusiva, de maneira oposta à difusão normal, apresentam inhomogeneidade quanto ao tempo e ao espaço. Ademais, o deslocamento quadrático médio pode não estar linearmente relacionado à grandeza temporal, mas seguir um comportamento assintótico atrelado a uma lei de potência, na forma

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2] \sim t^\alpha. \quad (21)$$

Dependendo do valor que o expoente de difusão  $\alpha$  assumir, poderá caracterizar a difusão como normal ( $\alpha = 1$ ) ou anômala, que se subdividindo em subdifusão ( $0 < \alpha < 1$ ) ou superdifusão ( $1 < \alpha \leq 2$ ).

No âmbito da difusão anômala, Mori e Zwanzig [59, 60, 62, 63] generalizam a ELN estendendo o conceito da constante de fricção para um termo de memória, ou fricção generalizada, que viabilize um detalhamento pormenorizado da dinâmica do sistema e as relações de correlação existentes entre suas variáveis a cada passo de tempo. Por este ângulo, desconsiderando-se a influencias externas, concebe-se a Equação de Langevin Generalizada (ELG) como

$$\frac{dp}{dt} = - \int_0^t \Gamma(t-t')p(t')dt' + \xi(t), \quad (20)$$

onde  $\Gamma(t)$  é a função de memória. É fácil ver que, considerando  $\Gamma(t) = 2\gamma\delta(t)$  a ELG reduz-se à ELN, Eq. (15), representando o limite ôhmico (ruído branco) 64. A função de memória codifica a história anterior do sistema e é responsável pela contribuição "não-Markoviana" para a dinâmica, i.e., a dependência da dinâmica em um determinado instante  $t$  nas configurações passadas  $t'$ . O termo de ruído  $\xi(t)$  pode também ser generalizado para incluir correlações temporais, correspondendo a um processo estocástico generalizado com distribuição gaussiana, o qual satisfaz as condições Eqs. (16) e (17).

O Teorema de Flutuação-Dissipação Generalizado (TFDG), que nesta dissertação encontra fundamentação em trabalhos seminais na área da mecânica estatística e termodinâmica, incluindo as contribuições de Kubo, Mori, e Zwanzig [65, 66, 67], em condições de equilíbrio satisfaz a relação 68

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \langle p^2 \rangle_{eq} \Gamma(t-t'). \quad (23)$$

O TFDG está intrinsecamente ligado ao valor médio do momento linear quadrático no estado de equilíbrio térmico, como  $\langle p^2 \rangle_{eq}$ . Esta relação é especialmente relevante, uma vez que a função de correlação de ruído desempenha um papel crucial no balanço energético do sistema. Vale ressaltar que, embora o TFDG forneça um quadro robusto para compreender

a termodinâmica de sistemas em equilíbrio, ele não aborda diretamente como o sistema evolui para alcançar esse estado.

O cálculo de  $\langle p^2 \rangle_{eq}$  foi primeiramente desenvolvido por Costa et al. [61] e demonstra os limites da validade do TFDG. Esse resultado é possível através do cálculo da correlação do momento, análogo ao desenvolvimento da Eq. (19). A normalização da correlação do momento em relação à correlação inicial,  $C_p(0)$ , estabelece a Função de Relaxação normalizada:

$$R(t) = \frac{C_p(t)}{C_p(0)}, \quad (24)$$

Nesse contexto, é importante introduzir o conceito da validade da Hipótese Ergódica (HE), que prevê que as médias temporais e de ensemble das variáveis no espaço de fase são equivalentes. Esta hipótese pondera que para períodos prolongados, em condições de equilíbrio mecânico, térmico e químico, o modelo percorre todos os seus estados possíveis e a lembrança, em termos estatísticos, sobre os períodos inaugurais do sistema tendem a desaparecer [8].

Este postulado é fundamental para o cálculo de quantidades termodinâmicas a partir das equações de movimento das partículas e é crucial para a validação de teoremas essenciais em mecânica estatística, como o TFDG. Um exemplo notável é o Teorema de Khinchin (TK), que estabelece uma relação entre a ergodicidade da variável  $p$  e a irreversibilidade de sua função de autocorrelação, Eq. (23). Esta equação define a Relação de Mistura ou Irreversibilidade quando seu comportamento assintótico para tempos longos a reduz a zero, i.e.,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0. \quad (25)$$

Na Ref. [43] mostra-se que o TK pode não ser aplicável a uma vasta gama de sistemas. Isso levanta uma questão desafiadora: identificar os sistemas para os quais o TK é de fato válido.

A exemplo, considerando a difusão normal, através de um processo exponencial, Eq. (19), tem-se que  $R(t) = e^{-\gamma t}$  converge a zero para tempos longos. Esse comportamento se revela à maioria dos regimes difusivos no limite de longas escalas temporais, inclusive para os regimes difusivos anômalos. Costa et al. [38, 41, 61] mostram que para processos balísticos na ausência de forças externas o valor assintótico neste limite será diferente de zero.

No tocante aos regimes difusivos, é possível estabelecer uma relação entre o comportamento assintótico do deslocamento quadrático médio e a correlação do momento

linear, ao se considerar a média sobre a função de posição e sua derivada [39]. Assim, o fenômeno de difusão pode ser classificado por intermédio da correlação do momento de acordo com a relação de Kubo [31, 33], na forma

$$D = \frac{1}{m^2} \int_0^\infty C_p(t) dt. \quad (26)$$

Neste contexto, Morgado et al. [39] demonstram que se o resultado desta integral for nulo, consistirá em uma subdifusão. Resultados com valores constantes indicam difusão normal ou de Einstein. E para regimes cuja integral é indefinida, com tendência para o infinito, há a implicação de um processo de superdifusão, i.e.,  $D \sim t^{\alpha-1}$ .

Em estatística, o desvio em relação à normalidade de uma distribuição (i.e., distribuição gaussiana) é frequentemente descrito através de medidas como assimetria (também conhecida como “obliquidade”, do inglês “skewness”) e curtose (ou fator não-gaussiano, do inglês “kurtosis”). Estes fatores são de extrema importância para entender a natureza da distribuição subjacente, especialmente quando estamos lidando com sistemas complexos onde as simplificações gaussianas não são adequadas.

O tipo de assimetria em uma distribuição pode ser identificado visualmente pela forma da curva ou calculado usando o coeficiente de Fisher ou a fórmula para o terceiro momento estatístico. O valor resultante indicará se a distribuição é simétrica, assimétrica à direita ou à esquerda. Especificamente, se o valor calculado for igual, maior ou menor que zero, a distribuição será categorizada como simétrica, assimétrica à direita e assimétrica à esquerda, respectivamente.

Nesta dissertação faremos a descrição da assimetria da distribuição  $\rho(x; t)$  de uma determinada variável estocástica  $x(t)$  em torno de sua média  $\langle x(t) \rangle$  através da dependência temporal [8]

$$\zeta(t) = \frac{\langle x^3(t) \rangle - \langle x(t) \rangle [3\sigma_x^2(t) + \langle x(t) \rangle^2]}{\sigma_x^3(t)}, \quad (27)$$

onde  $\sigma_x(t)$  é a variância de  $x(t)$ . Um valor de simetria maior do que zero indica uma distribuição com cauda alongada à direita da média; um valor menor que zero indica uma cauda à esquerda; enquanto um valor igual a zero representa uma simetria da distribuição  $\rho(x; t)$ . Em uma distribuição perfeitamente simétrica, a curva é idêntica em ambos os lados da média, fazendo com que a média, a mediana e a moda sejam iguais. No caso da assimetria à direita, a parte mais elevada da curva está à esquerda da média, e a cauda se estende para a direita. Isso resulta em uma média maior que a mediana, que por sua vez é maior que a moda. Os dados tendem a se agrupar em valores abaixo da média. Por fim, a

assimetria à direita é caracterizada pela parte mais elevada da curva está à direita da média, e a cauda se estendendo para a esquerda. A moda será maior que a mediana, que por sua vez será maior que a média. Os dados tendem a se agrupar em valores acima da média.

A curtose é uma medida estatística que descreve o "achatamento" da distribuição  $\rho(x; t)$  permitindo avaliar o quão essa distribuição difere de uma distribuição Gaussiana. Matematicamente, a curtose pode ser definida como

$$\eta(t) = \frac{\langle x^4(t) \rangle}{3\langle x^2(t) \rangle^2} - 1. \quad (28)$$

Um valor de curtose superior a zero indica que eventos extremos são mais prováveis do que em uma distribuição normal, o que é característico de distribuições com caudas pesadas. Inversamente, um valor negativo de curtose sugere que eventos extremos são menos prováveis [2].

A curtose categoriza a concavidade da curva de uma distribuição em relação à média e pode ser classificada em três tipos: mesocúrticas, platicúrticas e leptocúrticas. Distribuições mesocúrticas são normalmente distribuídas e servem como um modelo padrão. Distribuições platicúrticas apresentam maior dispersão de dados, resultando em um desvio padrão elevado e uma concavidade inferior à da curva normal. Em contrapartida, as distribuições leptocúrticas têm menor dispersão de dados, o que se traduz em um desvio padrão menor e uma concavidade mais acentuada.

O tipo de curtose de um conjunto de dados pode ser identificado tanto pela análise gráfica quanto pelo cálculo matemático envolvendo o quarto momento estatístico ou o coeficiente de Fisher para a curtose. Com base nesses cálculos, a curtose pode ser classificada em mesocúrtica (curtose = 0), platicúrtica (curtose < 0) ou leptocúrtica (curtose > 0).

Métricas de assimetria e curtose são instrumentos analíticos cruciais para examinar sistemas complexos e não-lineares. No entanto, é importante notar que essas métricas fornecem apenas descrições estatísticas e não elucidam os mecanismos subjacentes dessas distribuições. Essas questões serão discutidas em maior profundidade no próximo capítulo.

### 2.3.4 Estudo da Difusão em Autômatos Celulares

Chopard e Droz (1989) [40] destacam a importância da difusão em diversos contextos naturais e sociais. Por exemplo, na construção civil, a difusão está ligada à vulnerabilidade do concreto à corrosão. Em termodinâmica, a difusão é frequentemente

modelada usando equações diferenciais parciais. Os Autômatos Celulares (ACs) surgem como uma abordagem eficaz para modelar esses fenômenos complexos.

A pesquisa de Chopard e Droz concentrou-se na modelagem da difusão em um sistema bidimensional. O estudo empregou regras probabilísticas para simular o comportamento dos elementos, gerando um modelo matemático representativo. O modelo foi validado através de experimentos, demonstrando consistência entre dados teóricos e experimentais.

Weimar e Boon (1994) [45] também investigaram sistemas de reação-difusão usando ACs. Na literatura científica, os ACs têm sido aplicados a quatro grandes áreas: modelos de Ising para mudanças de fase, gases de rede, análise de sistemas complexos, e como alternativa às equações diferenciais parciais. Em comparação com métodos tradicionais, os ACs oferecem maior eficiência computacional e flexibilidade para lidar com condições discretas.

Na pesquisa de Weimar e Boon, os ACs foram empregados para simular a dinâmica de sistemas químicos em uma rede  $d$ -dimensional. O estudo utilizou métodos probabilísticos para mitigar as limitações da discretização. O modelo proposto foi validado contra as equações de Ginzburg-Landau, demonstrando sua aplicabilidade a uma ampla gama de contextos e cenários relacionados à difusão e reações químicas.

Como vimos anteriormente, o fenômeno de difusão envolve a dispersão de substâncias como matéria, partículas e íons, dentre outras. Este conceito é aplicável não apenas em contextos científicos, mas também em situações críticas como desastres ambientais. Por exemplo, em 1997, o Japão enfrentou dois grandes derramamentos de petróleo que juntos liberaram mais de 18.000 toneladas de petróleo no oceano. Estes eventos sublinham a necessidade de métodos eficazes para modelar e mitigar a difusão de poluentes.

Vários modelos matemáticos têm sido propostos para abordar essa questão. No entanto, esses modelos frequentemente falham em capturar a complexidade real, como as variações nas correntes de ar e água do mar. Além disso, a simulação computacional destes modelos é muitas vezes demorada e computacionalmente intensiva.

Nesse contexto, Nakano, Hasegawa e Morishita (1998) [43, 44] introduziram um modelo baseado em ACs para simular a difusão de poluentes marítimos. Utilizando uma rede bidimensional para representar um sistema unidimensional, o modelo foi calibrado e validado com dados reais, mostrando uma correspondência favorável.

O campo de ACs também tem mostrado promessa na modelagem de processos de reação-difusão em outras disciplinas, como química e tecnologia. Adamatzky, Martínez e Mora (2006) [10] propuseram um modelo de AC que foi particularmente eficaz na simulação de processos como a precipitação. A implementação executada neste trabalho remete-se a uma expansão do modelo de Conway (JdV). Este modelo permitiu a investigação de diferentes taxas de difusão e reação, proporcionando insights valiosos sobre a dinâmica dos sistemas estudados.

Neste capítulo, exploramos a complexidade intrínseca de sistemas difusivos e ACs. No próximo capítulo, vamos mergulhar profundamente no o Jogo da Vida de Conway, mas com um toque diferente dos estudos até então desenvolvidos na literatura; vamos analisá-lo sob a lente da abordagem de Langevin Generalizada. Esta abordagem, que é tipicamente aplicada para entender sistemas estocásticos e fenômenos de transporte, oferece uma perspectiva intrigante e possivelmente reveladora sobre a natureza do Jogo da Vida, suas propriedades emergentes e seu potencial para modelar sistemas complexos.

### 3 DISCUSSÃO E ANÁLISE DE DADOS

Este capítulo consolida as especificações das características e propriedades de cada AC simulado neste estudo, além de abordar as análises estatísticas realizadas com base em suas variações espaço-temporais, as quais são subordinadas às regras definidas por Conway. Optamos por investigar 18 configurações iniciais que foram previamente catalogadas no banco de dados criado por Stephen A. Silver [76]. Embora existam diversas estruturas padronizadas de ACs associadas ao JdV, que foram identificadas ao longo dos anos, a escolha dessas 18 foi feita levando em consideração as limitações de poder computacional disponível e o elevado número de ciclos que algumas estruturas exigem para estabilização, como é o caso da estrutura conhecida como Arca (736.692 gerações necessárias para estabilização). Entre os padrões selecionados, focamos em estruturas que alcançam estabilização após um número específico de ciclos ou, no caso de sistemas de crescimento infinito, até um ponto em que a análise se torna viável.

Os 18 autômatos implementados são: Arma de Planador, Atirador de Ponta, B-heptomino, Bolota, Bombardeiro B-52, Crescimento Infinito (modelo 1), Crescimento Infinito (modelo 2), Crescimento Infinito (modelo 3), Duro de Matar, E-heptomino, Fusível, Fx119, HWSS, Planador, Pombo, Quase Cavalaria, Retroceder e Vaca.

A escolha do conjunto supracitado se deu em face da observação e preferência por sistemas que evidenciassem características e propriedades interessantes quanto ao número de gerações e aos aspectos de propagação de seus componentes através da rede.

Desenvolveu-se um programa em linguagem Python responsável por implementar em cada uma das estruturas as mudanças quanto as posições e taxas temporais das células pertencentes a matriz celular.

A fim de realizar uma análise estatística, o programa foi construído para medir e armazenar, em documentos gerados de forma simultânea, medidas temporais, contadores de células vivas, posições bidimensionais e subsequentes médias, velocidades relativas, velocidades quadráticas, acelerações, deslocamentos quadráticos médios, correlações de velocidade e de aceleração, medidas de curtose e de assimetria. Entende-se que os parâmetros aqui considerados podem contribuir para compreensão da dinâmica dos autômatos celulares para o estudo da difusão.

No que se refere às análises, empregamos os softwares Origin e Gnuplot como ferramentas gráficas para analisar os dados, assim como desenvolvemos outros recursos da linguagem Python. Por meio desses programas, determinamos os regimes difusivos a partir dos expoentes de difusão, acompanhados de suas respectivas incertezas experimentais.

Destarte, descrever-se-á adiante as características e propriedades inerentes a essas configurações em concordância com as informações registradas por Silver, seguidas da análise das modificações espaço-temporais implementadas para cada um desses autômatos celulares.

### 3.1 ARMA DE PLANADOR

#### 3.1.1 Definição

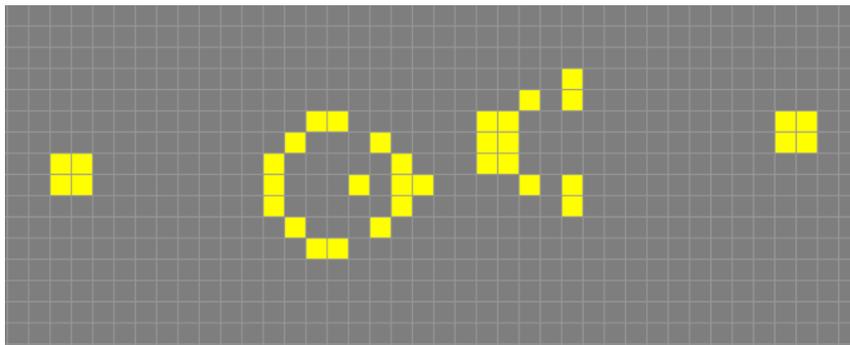


Figura 14 – Configuração de células vivas que especificam a estrutura Arma de Planador (Fonte: [76]).

A arma de planador (simulação disponível em [https://playgameoflife.com/lexicon/Gosper\\_glider\\_gun](https://playgameoflife.com/lexicon/Gosper_glider_gun)) refere-se a uma estrutura composta por dois padrões moveis que executam deslocamentos de vai e vem na horizontal, delimitados por dois objetos estáticos, formadas por quatro células vivas com disposições quadradas, conforme Figura 14.

A medida com que se desloca, essa configuração ejeta periodicamente um arranjo de cinco células vivas conhecido como planador, o qual será descrito posteriormente. Seu nome se dá em virtude da classe de padrões que dispersa pela grade uniforme.

Foi descoberta por Bill Gosper no século XX e trata-se da primeira espécie de arma descoberta no âmbito dos ACs e a primeira estrutura a exibir o comportamento de geração infinita.

Apresenta a característica de ser formada por um padrão de células delimitado que produz geração ilimitada de células vivas ao longo do tempo. A cada trinta gerações emite um planador pela rede celular.

### 3.1.2 Número de Células

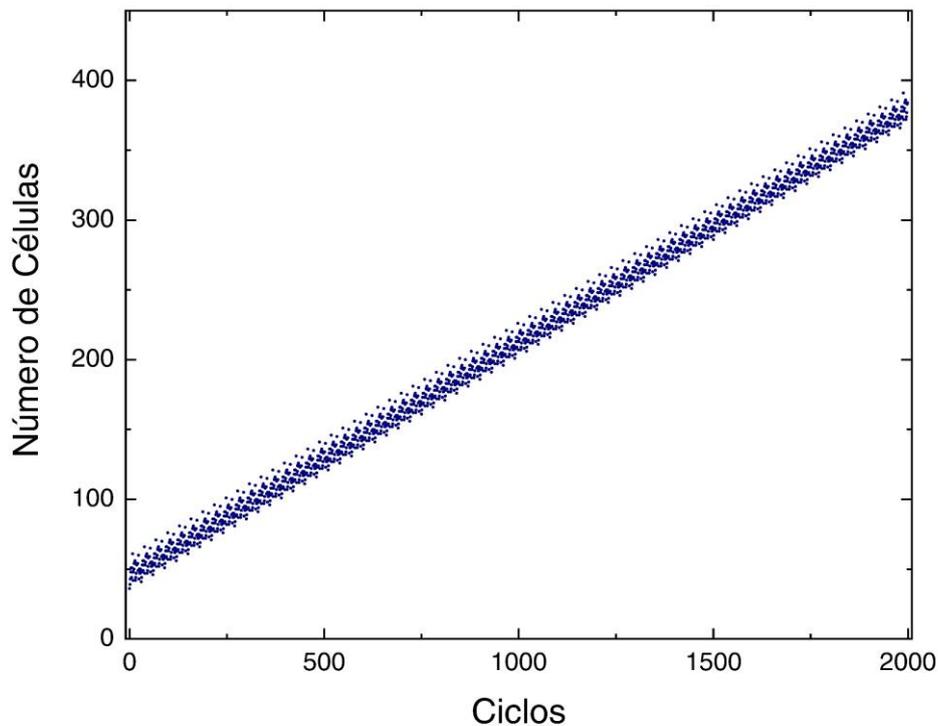


Figura 15 – Número de células ao longo do tempo de simulação da estrutura Arma de Planador.

A arma de planador inicia-se com um número limitado de células em conformidade com as formas estáveis e móveis que a definem. Mediante a continuidade de sua simulação, exibe um comportamento progressivamente crescente e com um padrão constante.

A Figura 15 mostra o aumento de sua população caracteriza-se pela sua periodicidade. Com o passar das gerações, incrementa à rede cinco células vivas, através das ejeções de objetos planadores no espaço de trinta ciclos temporais.

As posições médias da população de células vivas a cada ciclo  $t$ , podem ser mensuradas pelas relações de  $\langle x(t) \rangle$  e  $\langle y(t) \rangle$ , definidas como

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{N(t)} \sum_{i,j} i \omega_{i,j}(t) \text{ e } \langle y(t) \rangle = \frac{1}{N(t)} \sum_{i,j} j \omega_{i,j}(t), \quad (21)$$

onde  $N(t) = \sum_{i,j} \omega_{i,j}(t)$  é o número de células vivas a cada ciclo  $t$  (veja Figura 15). Vale notar que, conforme definido no capítulo anterior,  $\omega_{i,j}(t) = 0$  para as células em estado inativo, ou morto, e  $\omega_{i,j}(t) = 1$  para células vivas, onde  $(i, j) \in G$ , o espaço dos ACs.

A Figura 16 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28). Interessantemente, é possível observar que, apesar das interações individuais serem determinísticas, o comportamento emergente do coletivo segue um padrão aleatório, assemelhando-se a um movimento browniano.

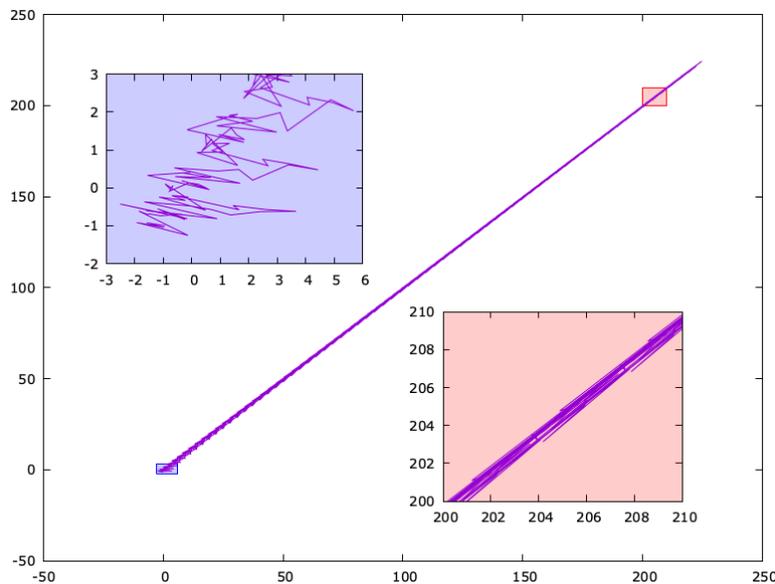


Figura 16 - Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da Arma de Planador. Os subgráficos ampliam as regiões delimitadas no gráfico principal.

### 3.1.3 Assimetria e Curtose

A distribuição de cada célula viva ao longo do tempo pode ser caracterizada pelas relações de Assimetria e Curtose, Eqs. (26) e (27), respectivamente. A Figura 17 mostra as curvas relativas à assimetria e a curtose das variáveis  $x$  e  $y$  ao longo dos ciclos de simulação. Observa-se que, embora inicialmente mostrem uma distribuição simétrica e mesocúrtica, as regras do JdV exercem forças que intensificam as variações nas caudas das distribuições. Tanto para o eixo- $x$  quanto para o eixo- $y$ , as distribuições exibem um padrão de assimetria positiva: os picos estão deslocados para a esquerda e há uma extensão das medidas orientadas para o lado oposto, formando uma cauda mais

proeminente. Nesse contexto, os valores numéricos coletados situam-se em uma região inferior à área relativa à média.

As curtoses referentes as medidas para  $x$  e  $y$  são similares, dado que ambas se inclinam para zonas mais negativas da escala. Isso evidencia um maior achatamento das curvas e, conseqüentemente, picos mais baixos. Essas características indicam que ambas as distribuições podem ser classificadas como platicúrticas.

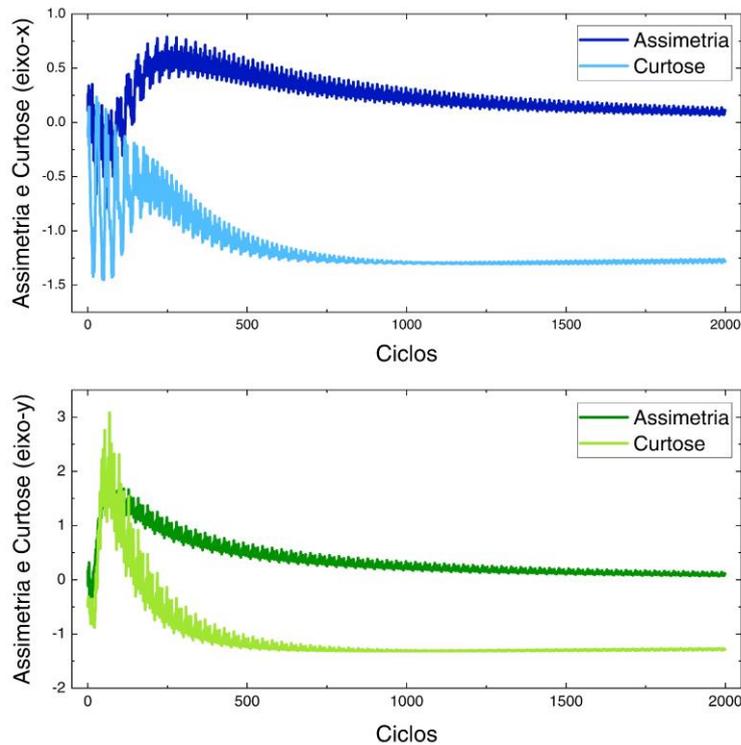


Figura 17 – Assimetria e curtose relativas as variáveis de posição da Arma Planadora.

### 3.1.4 Aceleração

A Figura 18 ilustra a aceleração, ou força sobre a partícula browniana efetiva, em ambos os eixos- $xy$ . Nota-se que a média da força no tempo não é nula, i.e.,  $\bar{F} \neq 0$ . Há um comportamento dinâmico em ambas as variáveis, exibindo picos proeminentes em determinados instantes e mais brandos em outros.

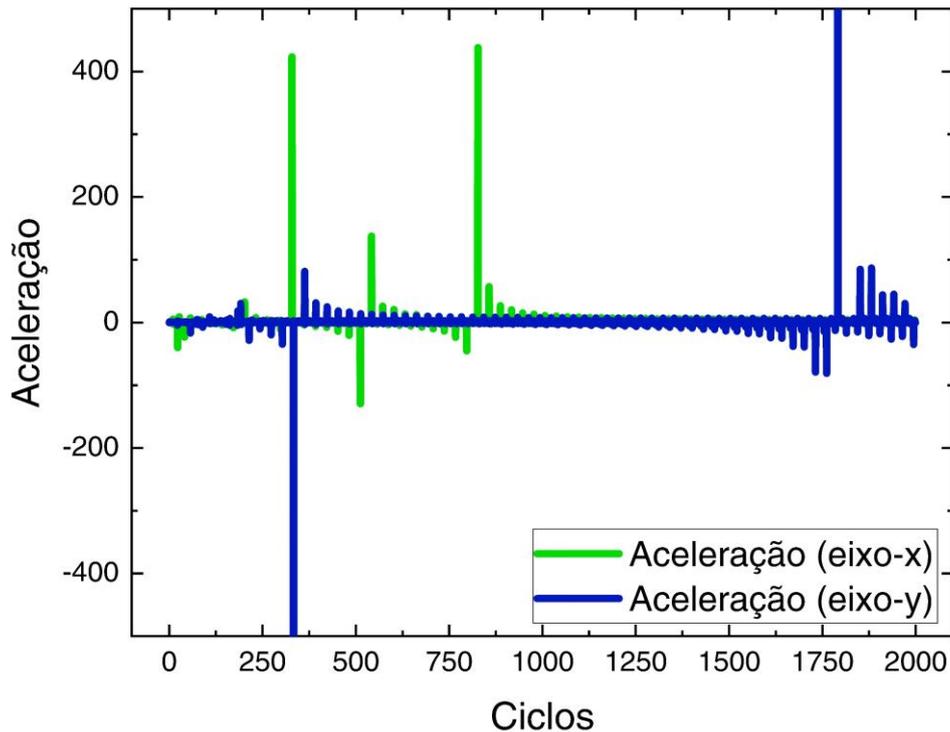


Figura 18 – Aceleração nos eixos- $x$  e  $y$  ao longo dos ciclos da simulação da Arma Planadora.

Inicialmente, o modelo abrange apenas uma área limitada da rede. À medida que os ciclos avançam, a extensão da área de alcance aumenta progressivamente. Esse aumento da grade é implementado com o objetivo de mitigar a carga computacional. Tal fenômeno ocorre devido à propagação dos planadores emitidos pela estrutura elementar. Portanto, o efeito gerado pelas forças identificadas não abrange o sistema completo de forma abrangente, mas foca em regiões específicas e limitadas. Esses impulsos resultam em comportamentos atípicos quando comparados aos regimes de difusão tradicionalmente estudados na literatura, estendendo-se além da difusão balística, como será discutido a seguir.

### 3.1.5 Deslocamento Quadrático Médio

A Figura 19a exibe o comportamento do Deslocamento Quadrático Médio (DQM) das curvas para  $x$ ,  $y$  e  $xy$  em escala linear. Nota-se uma dispersão no princípio ( $t < 100$  ciclos), atribuída ao baixo número de células vivas (conforme ilustrado na Figura 15). No entanto, essa dispersão é corrigida ao longo do tempo devido ao aumento significativo na população de células vivas, revelando um comportamento típico de uma lei de potência.

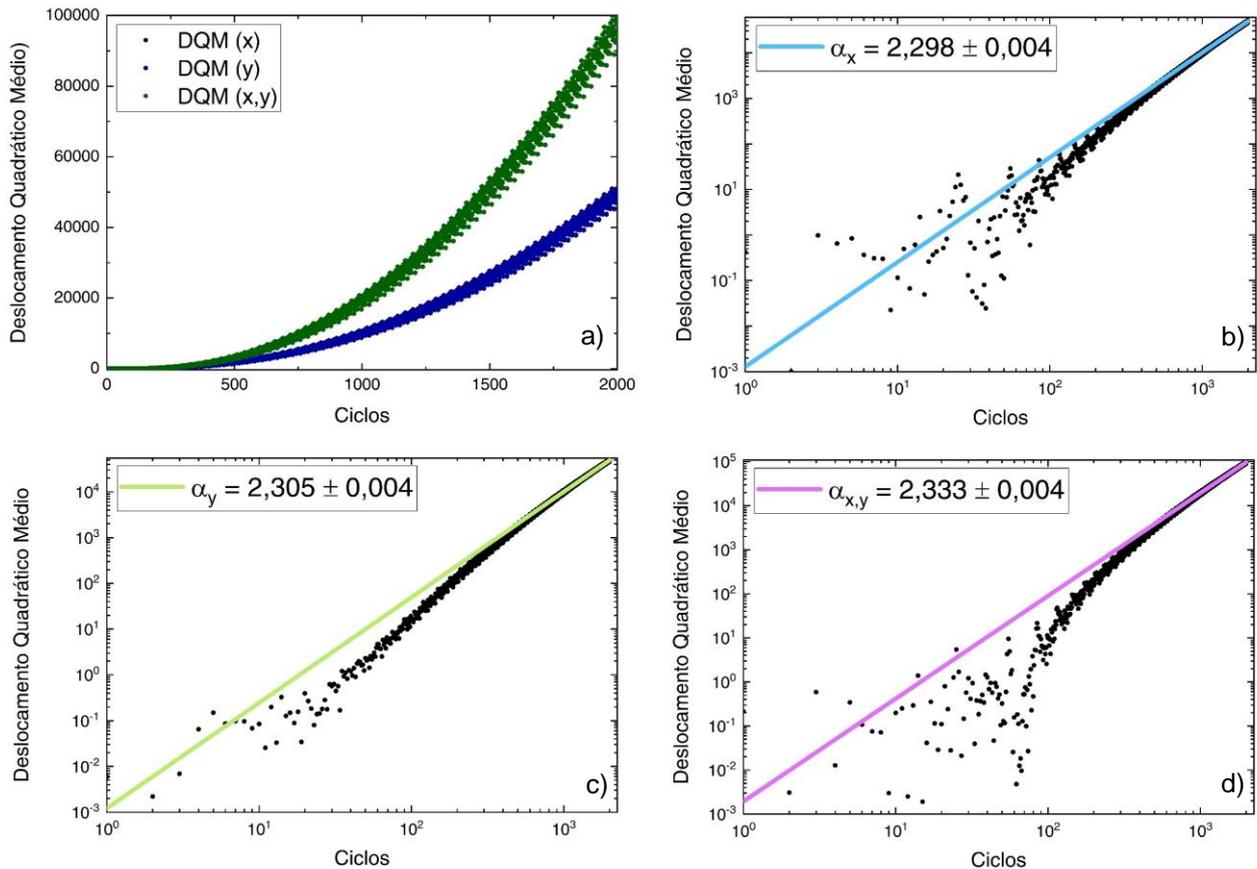


Figura 19 – Deslocamento quadrático médio do sistema Arma Planadora. a) Comportamento em escala linear. b) Eixo-x em escala logarítmica. c) Eixo-y em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

As Figura 19b (componente  $x$ ), Figura 19c (componente  $y$ ) e Figura 19d (resultante) exibem o DQM em escala logarítmica. A partir dessas figuras, é possível obter o expoente de difusão mediante a linearização e a subsequente regressão linear da curva, que foi comparada com a Eq. (21).

Obteve-se para o expoente de difusão relativo à componente  $x$  um valor de  $2,298 \pm 0,004$ , correspondente a uma superdifusão hiper-balística. Este comportamento tem sido observado em outros sistemas, como, p.ex., modelo de partículas que inclui interações apenas através da concentração local [69] e múltiplas transições em caminhadas quânticas com saltos dependentes do tempo a partir do modelo de caminhada quântica do elefante, com expoente de difusão podendo ser igual a 3 [70]. Em relação à variável  $y$ , observa-se um expoente de difusão de  $2,305 \pm 0,004$ , semelhante ao eixo- $x$ . Considerando a contribuição de ambas componentes, o expoente de difusão é  $2,333 \pm 0,004$ . Como era de se esperar, em virtude das magnitudes de cada grandeza, é encontrado aqui novamente um processo de superdifusão hiper-balístico.

Ademais, em virtude dos valores relativos ao expoente de difusão para  $x$ ,  $y$  e  $xy$  serem superiores a 2, entende-se de que este modelo apresenta em sua dinâmica

a existência de potenciais efetivos aleatórios que influenciam o desenvolvimento dos processos difusivos.

Partículas, sejam elas clássicas ou quânticas, em campos potenciais aleatórios apresentam comportamentos que se assemelham aos descritos pela equação não amortecida de Langevin, onde o termo de fricção é nulo, i.e.,  $\gamma = 0$  na Eq. (15)(13) [69]. Eles manifestam um tipo de difusão chamada hiperbalística, com um valor de  $\alpha = 3$  [71]. Similarmente, em experimentos que envolvem ótica [72, 73], foi notada uma dispersão hiperbalística, onde a variável espacial na direção da luz atua como uma representação do tempo. Este fenômeno está correlacionado com o conceito de localização de Anderson [74] e é gerado quando a luz ajusta seu trajeto efetivo ao atravessar o meio em questão.

### 3.1.6 Correlação da Velocidade

A Figura 20 corresponde à função de correlação do momento normalizada, ou simplesmente função de relaxação, Eq. (24). Analisando os comportamentos para tempos longos, observa-se as correlações normalizadas para cada eixo partem da unidade e com o passar das gerações convergem para zero.

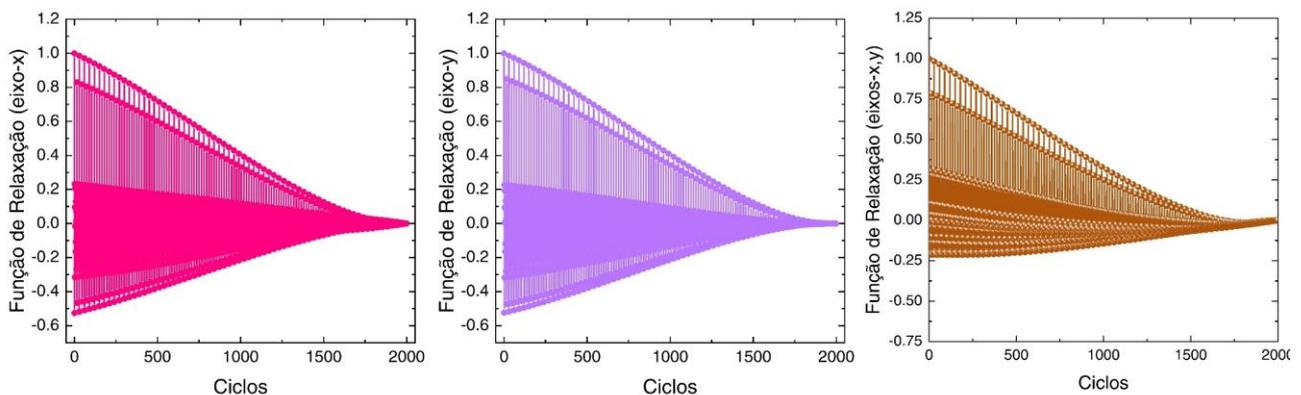


Figura 20 – Funções de Relaxação relativas à estrutura Arma de Planador, considerando a)  $x$ , b)  $y$  e c)  $xy$ .

Diferente do comportamento esperado difusão normal, i.e.,  $R(t) = e^{-\gamma t}$ , o comportamento observado é rapidamente oscilatório, mas convergente para zero. Com efeito, mesmo sendo  $\alpha > 2$ , o sistema satisfaz o Teorema de Khinchin, Eq. (25).

## 3.2 ATIRADOR DE PONTA

### 3.2.1 Definição

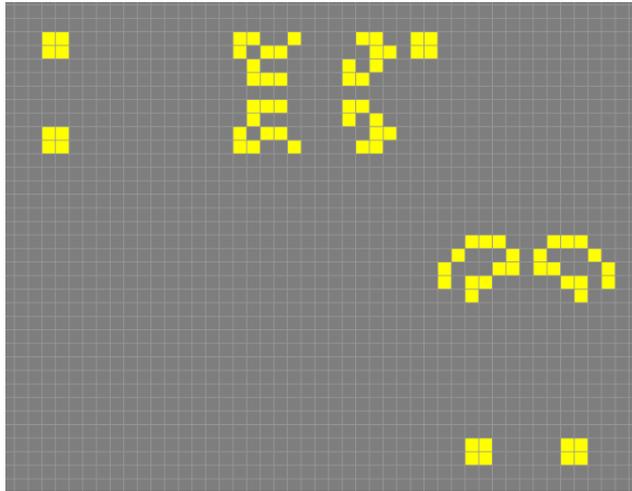


Figura 21 – Configuração espacial de células que formam a estrutura Atirador de Ponta (Fonte: [76]).

De forma análoga a Arma de Planadores, o Atirador de Ponta (Figura 26 – simulação disponível em <[https://playgameoflife.com/lexicon/edge\\_shooter](https://playgameoflife.com/lexicon/edge_shooter)>) trata-se de uma estrutura formada por objetos móveis que executam deslocamentos na horizontal e vertical delimitados pelos objetos imóveis do sistema composto. As formações estáticas possuem o aspecto de blocos 2x2 de células vivas. Dois blocos encontram-se dispostos na extremidade superior esquerda, um na região superior direita e dois na extremidade inferior direita da rede celular.

Conforme as estruturas móveis interagem com os blocos estáticos, ocorrem projeções periódicas de objetos planadores. A primeira ejeção de um planador ocorre na geração de número 29. A partir da segunda ejeção, a cada 46 gerações um planador é disperso pela rede.

Este modelo integrado por um número limitado de elementos vivos concebe um número ilimitado de células ao longo do tempo. Apresenta a característica de crescimento infinito, não exibindo um período de geração em que apresente estabilidade e finalização de sua dinâmica espaço-temporal.

A Figura 22 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28).

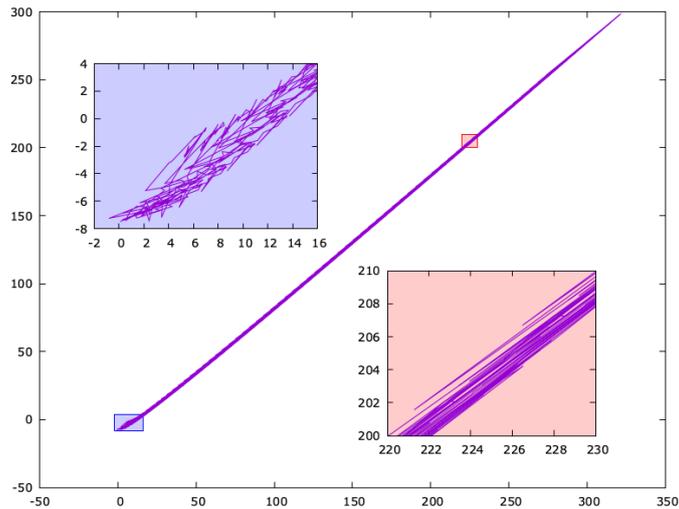


Figura 22 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da Atirador de Ponta. Os subgráficos ampliam as regiões delimitadas no gráfico principal.

### 3.2.2 Número de Células

O modelo apresentado na Figura 23 exibe um comportamento de crescimento infinito e com padrão constante. De acordo com o padrão inicial ilustrado pela Figura 26, segundo as propriedades do sistema, um conjunto de 5 células vivas é adicionado à população, inicialmente após 29 ciclos e posteriormente após 46 ciclos.

No entanto, a estrutura é dinâmica e experimenta flutuações contínuas no número de células vivas. Isso ocorre porque os "planadores" são gerados à medida que as estruturas básicas interagem entre si, levando ao nascimento e à morte de células no sistema. As taxas desses nascimentos e mortes são estáveis e são influenciadas pelo posicionamento dos objetos dentro do modelo, bem como pelas cinco células adicionais que são emitidas.

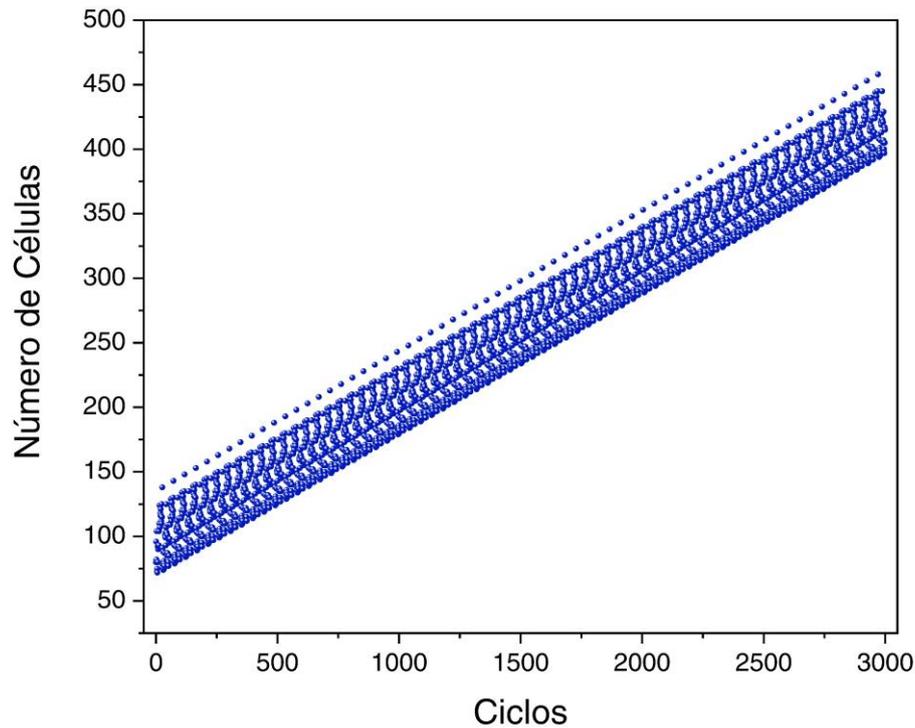


Figura 23 – Número de células geradas pela estrutura Atirador de Ponta.

### 3.2.3 Assimetria e Curtose

De acordo com Figura 24 e analisando o aspecto das curvas de assimetria para  $x$  e  $y$ , nota-se que para ambas as curvas o resultado é similar ao caso da Seção 3.1, i.e.,  $\zeta_x, \zeta_y > 0$ . As distribuições indicarão uma tendência para a esquerda, criando uma espécie de cauda alongada à direita. Com base nessas características, pode-se concluir que as assimetrias destas duas grandezas são classificadas como assimétricas à direita.

Diante das informações pertinentes a curtose para  $x$  e  $y$ , verifica-se que ambas as grandezas apresentam tendências para as regiões negativas do gráfico. Por conseguinte, identificam-se nessas curvas um nível de achatamento maior e picos menores, indicando que os dados se encontram mais dispersos. Estas propriedades denotam que ambas as medidas de distribuição podem ser categorizadas como platicúrticas.

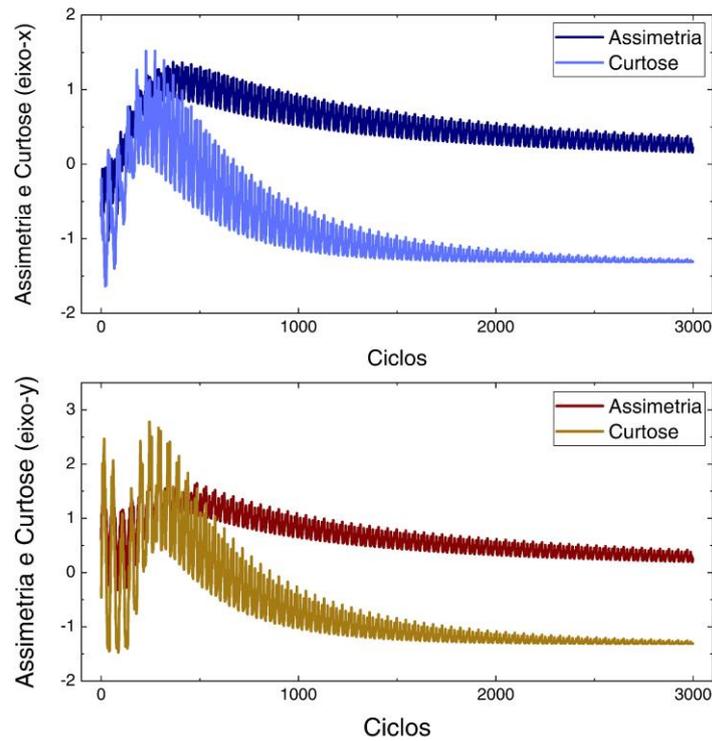


Figura 24 – Assimetria e curtose relativas as variáveis de posição da estrutura Atirador de Ponta.

### 3.2.4 Aceleração

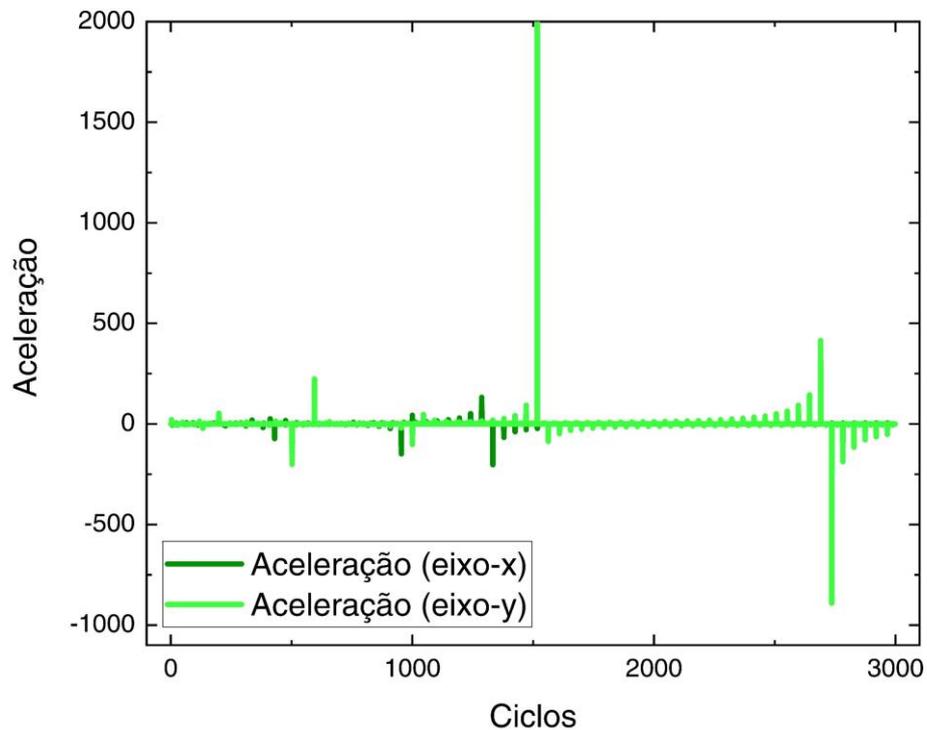


Figura 25 – Aceleração nos eixos- $x$  e  $y$  ao longo dos ciclos da simulação do Atirador de Ponta.

A partir da Figura 25, observa-se um comportamento bastante similar à Arma de Planador, Seção 3.1, de modo que a média das forças líquidas sobre este sistema não será nula e apresenta-se proveniente de um potencial com modos aleatórios.

### 3.2.5 Deslocamento Quadrático Médio

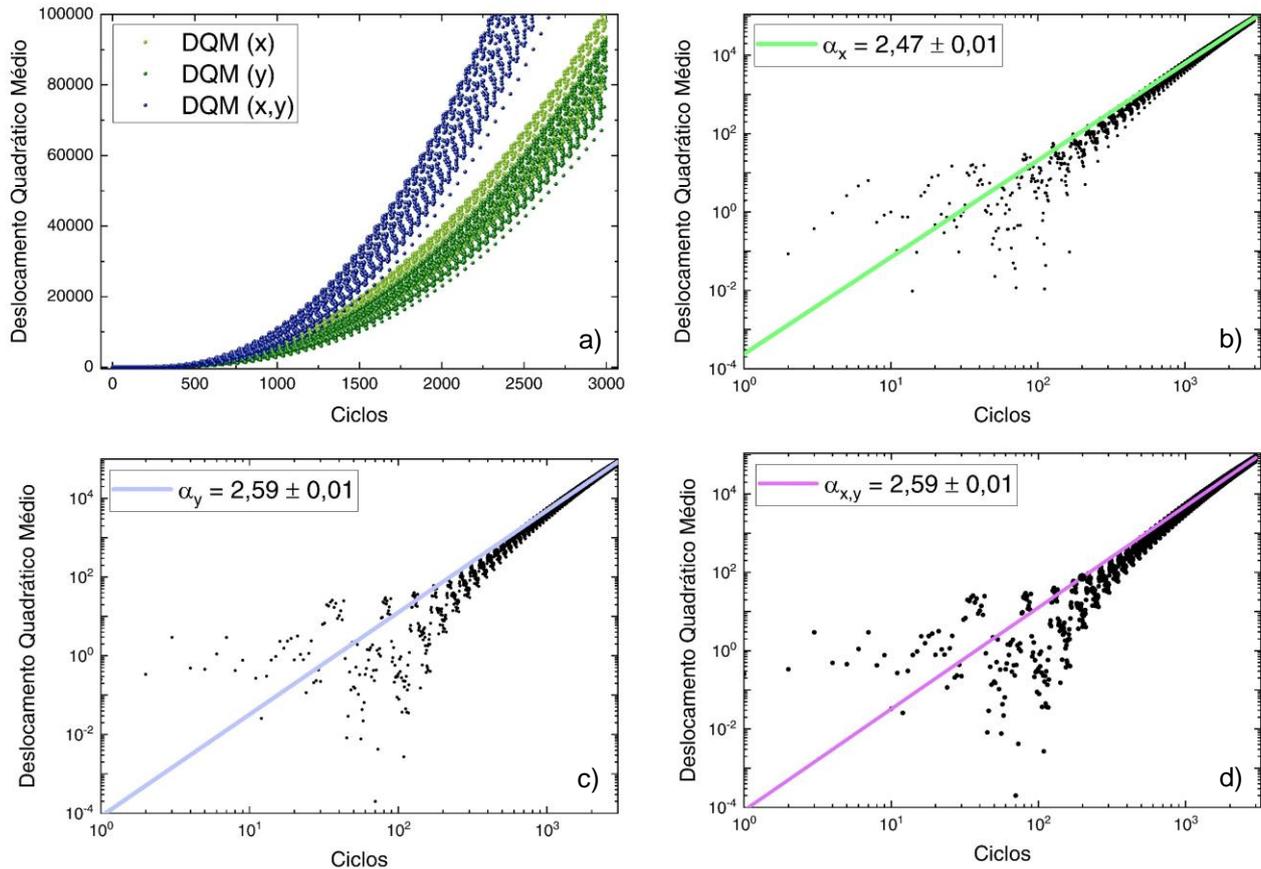


Figura 26 – Deslocamento quadrático médio do sistema Atirador de Ponta. a) Comportamento em escala linear. b) Eixo-x em escala logarítmica. c) Eixo-y em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

A Figura 26a ilustra o comportamento tipicamente de lei de potência do DQM em relação às variáveis  $x$ ,  $y$  e resultante  $xy$ . A partir da Figura 23, observa-se que a baixa quantidade de células com estado ativo no início da simulação acarreta maior dispersão dos dados relativos ao DQM; veja Figura 26b, Figura 26c e Figura 26d, ciclos  $t < 300$ . Conforme a simulação avança, os dados convergem modulados por um padrão.

Para realizar a determinação dos expoentes de difusão, utilizou-se da relação expressa na Eq. (16). Em face disto, conforme os dados obtidos com implementação deste sistema, estimou-se  $\alpha$  com o auxílio da ferramenta de ajuste de curva do software Origin.

Para a variável  $x$ , Figura 26b, o expoente de difusão com respectiva incerteza foi no valor de  $2,47 \pm 0,01$ , o que configura uma superdifusão hiper-balística, similar à Arma de Planador estudada na Seção 3.1. Com relação à variável  $y$ , Figura 26b, as medidas para  $\alpha_y$  são de  $2,59 \pm 0,01$ ; novamente, classifica-se como um regime superdifusivo hiper-balística. Por fim, considerando o aspecto resultante,  $\alpha_{xy} = 2,59 \pm 0,01$ , consistindo, conforme previsto, um regime superdifusivo hiper-balístico.

### 3.2.6 Correlação da Velocidade

A Figura 27 exhibe os padrões para a função de relaxação gerados pelos dados de correlação da velocidade para  $x$ ,  $y$  e resultante  $xy$ , consoante a Eq. (24).

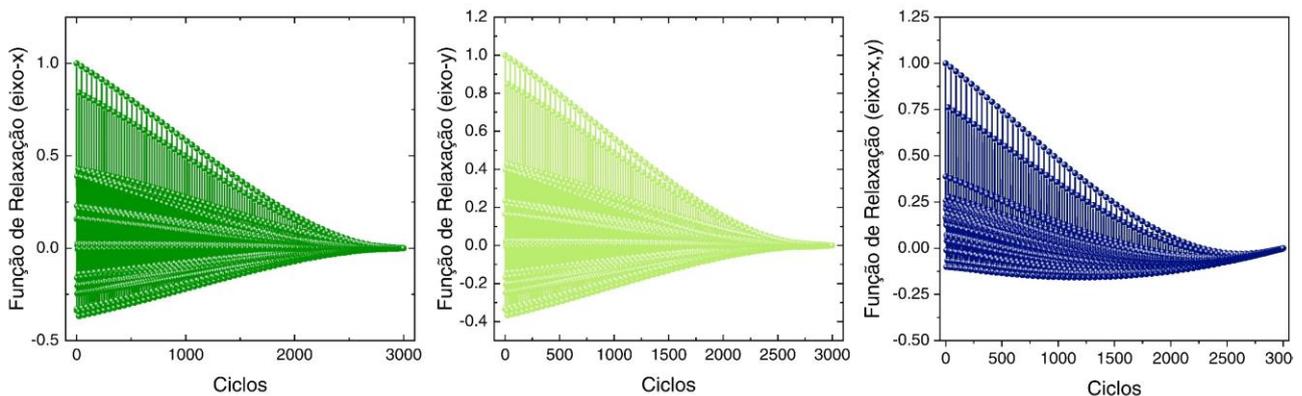


Figura 27 – Funções de Relaxação relativas à estrutura Atirador de Ponta, considerando a)  $x$ , b)  $y$  e c)  $xy$ .

Assim como no caso anterior, i.e., Arma de Planador, verifica-se um comportamento oscilatório rápido da relação de relaxação, contudo, novamente, convergindo para zero quando o sistema estabiliza. Esse resultado mostra que apesar do efeito de fricção ser desprezível, o Teorema de Khinchin é assegurado.

## 3.3 B-HEPTOMINO

### 3.3.1 Definição

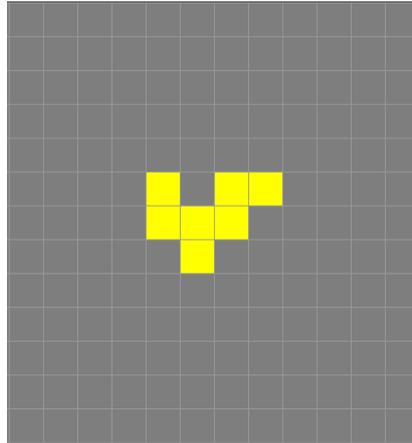


Figura 28 – Arranjo de células que formam a estrutura B-heptomino (Fonte: [76]).

A Figura 28 mostra estrutura B-heptomino (simulação disponível em <https://playgameoflife.com/lexicon/B-heptomino>). Esta configuração faz parte de um grupo de estruturas conhecidas como Matusalém. Isto se deve ao fato de apresentarem a característica de produzir inúmeras estruturas por algumas gerações mediante um arranjo restrito de células iniciais. A Figura 29 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28).

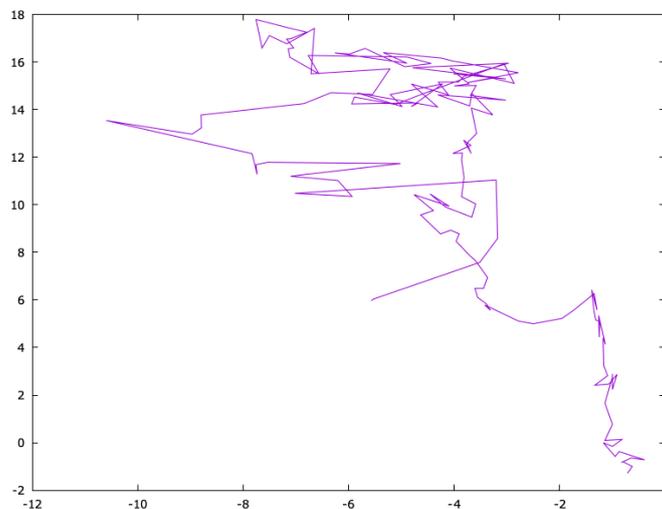


Figura 29 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da B-heptomino.

Especificamente o B-heptomino apresenta estabilização, ou finalização das modificações espaço-temporais de suas células, após o tempo de 148 gerações. Seu aspecto final é caracterizado pela presença de uma “nave espacial”, i.e., três blocos estáticos e três planadores que se propagam diagonalmente pelo espaço. O corpo principal exibe um padrão de velocidade e propaga-se pela rede deixando rastros de células vivas que afetam sua continuidade por interferência gerada pela interação desses elementos, ocasionando sua rápida estabilização.

### 3.3.2 Número de Células

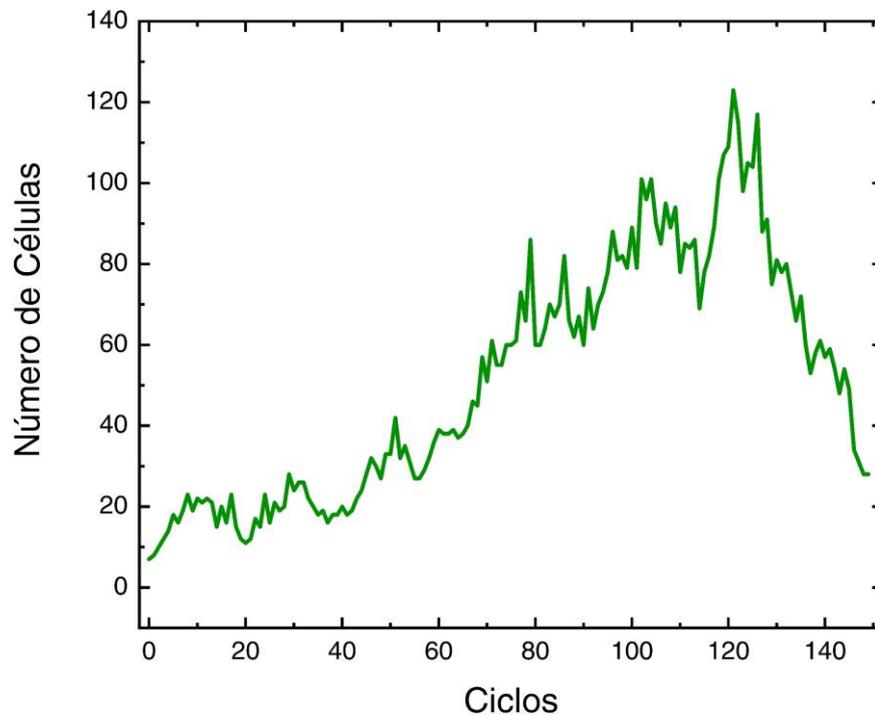


Figura 30 – Número de células ao longo da simulação da estrutura B-heptomino.

Este autômato inicia-se com uma rede de células restrita a uma pequena região, que se expande sutilmente, concluindo suas gerações rapidamente, deixando na grande apenas 2 objetos móveis e 4 estáveis.

### 3.3.3 Assimetria e Curtose

A Figura 31 mostra os comportamentos de assimetria e curtose da evolução da estrutura B-heptomino. O padrão investigado neste subtópico estabiliza-se em um curto período de ciclos. Seu desenvolvimento é suave e seu alcance é mínimo. Com base nisto, seu crescimento é arbitrário, de modo que não são observadas dinâmicas repetitivas, e sim, uma propagação limitada de elementos através da rede.

A assimetria e a curtose deste sistema, tanto para  $x$  quanto para  $y$ , exibem um comportamento irregular e significativamente diferente dos casos até aqui estudados. Verifica-se a existência de quedas e elevações ao longo de todo processo de simulação,

evidenciando o comportamento flutuativo assumido por estas grandezas em torno da origem.

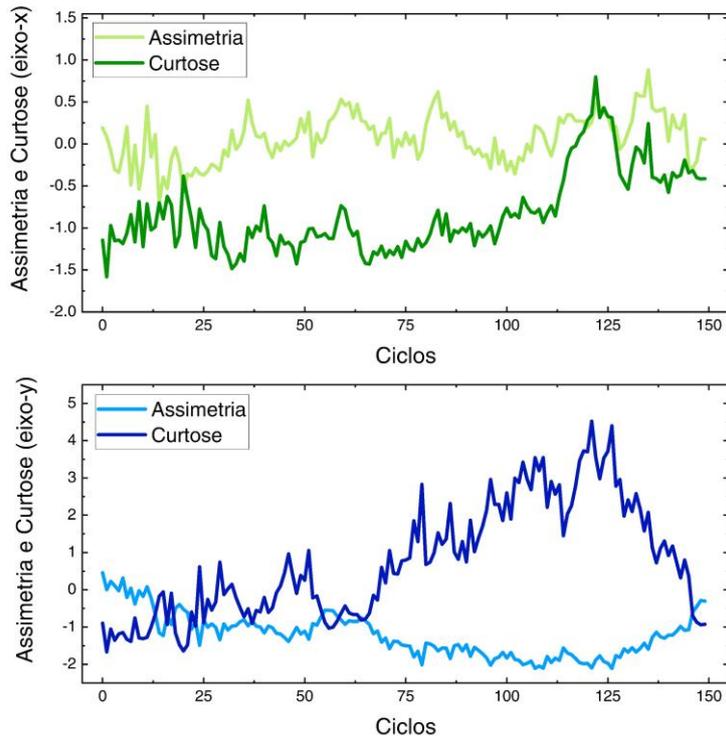


Figura 31 – Assimetria e curtose relativas as variáveis de posição da estrutura B-heptomino.

Com respeito a medida de assimetria para  $x$ , observa-se que a curva apresenta oscilação em torno de zero ao longo da modificação dinâmica do sistema. Contudo, em média, a disposição numérica desses dados apresenta a tendência para regiões positivas, o que sugere uma assimetria à direita.

Por outro lado, a curva de assimetria de  $y$  inicia-se positiva, porém, prossegue apenas em regiões negativas até a conclusão da simulação, apresentando tendência para números menores que zero, o que caracteriza uma distribuição assimétrica à esquerda.

Com respeito as medidas de curtose das variáveis de posição, verifica-se uma predominância de pontos negativos para a curtose da variável  $x$ , enquanto  $y$  exibe medidas positivas. Neste sentido, as curtoses podem ser categorizadas como platicúrtica para  $x$  e leptocúrtica para  $y$ .

### 3.3.4 Aceleração

A Figura 32 ilustra a variação da aceleração nos eixos-  $x$  e  $y$ . que o sistema tem uma média de aceleração que não é zero, indicando a presença de uma força atuante, em decorrências das regras definidas por Conway. O comportamento dessas curvas é irregular, exibindo picos e vales durante a simulação computacional.

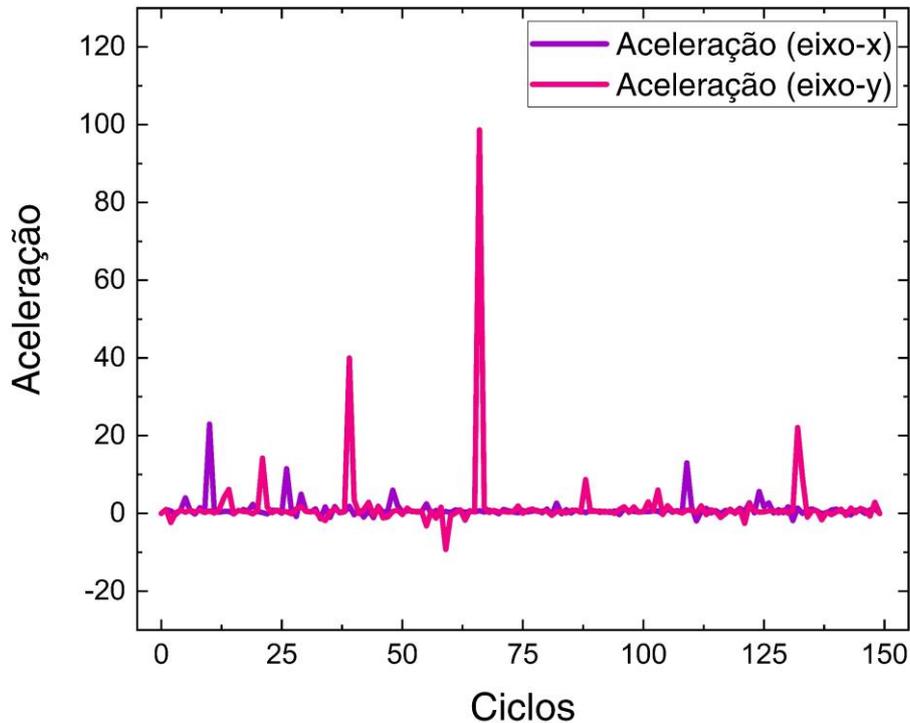


Figura 32 – Aceleração nos eixos-  $x$  e  $y$  ao longo dos ciclos da simulação do B-heptomino.

Ao comparar as Figura 31 e Figura 32, observa-se como os picos de força influenciam os padrões de assimetria e curtose para a variável  $x$ . No primeiro pico de força, a assimetria aumenta, enquanto a curtose permanece estável. No segundo pico, há uma diminuição na assimetria e um aumento na curtose.

Em relação à variável  $y$ , o primeiro pico de força resulta em uma significativa redução na assimetria e um aumento notável na curtose. No segundo pico, tanto a curtose quanto a assimetria mostram tendências opostas, com a curtose aumentando e a assimetria diminuindo.

Essas análises sugerem fortemente que as forças atuantes no sistema têm um impacto direto sobre sua dinâmica espaço-temporal. Isso é evidenciado pelas mudanças observadas nos padrões de assimetria e curtose em resposta aos picos de força.

### 3.3.5 Deslocamento Quadrático Médio

A Figura 33 mostra o aspecto geral gerado pelos dados de DQM para as variáveis  $x$ ,  $y$  e resultante. Neste sentido, a partir da Figura 33a, verifica-se que a princípio as três curvas apresentavam comportamentos semelhantes sem difusão. Porém, com o passar das gerações, começam a se afastar umas das outras, seguindo dinâmicas distintas de distribuição similares.

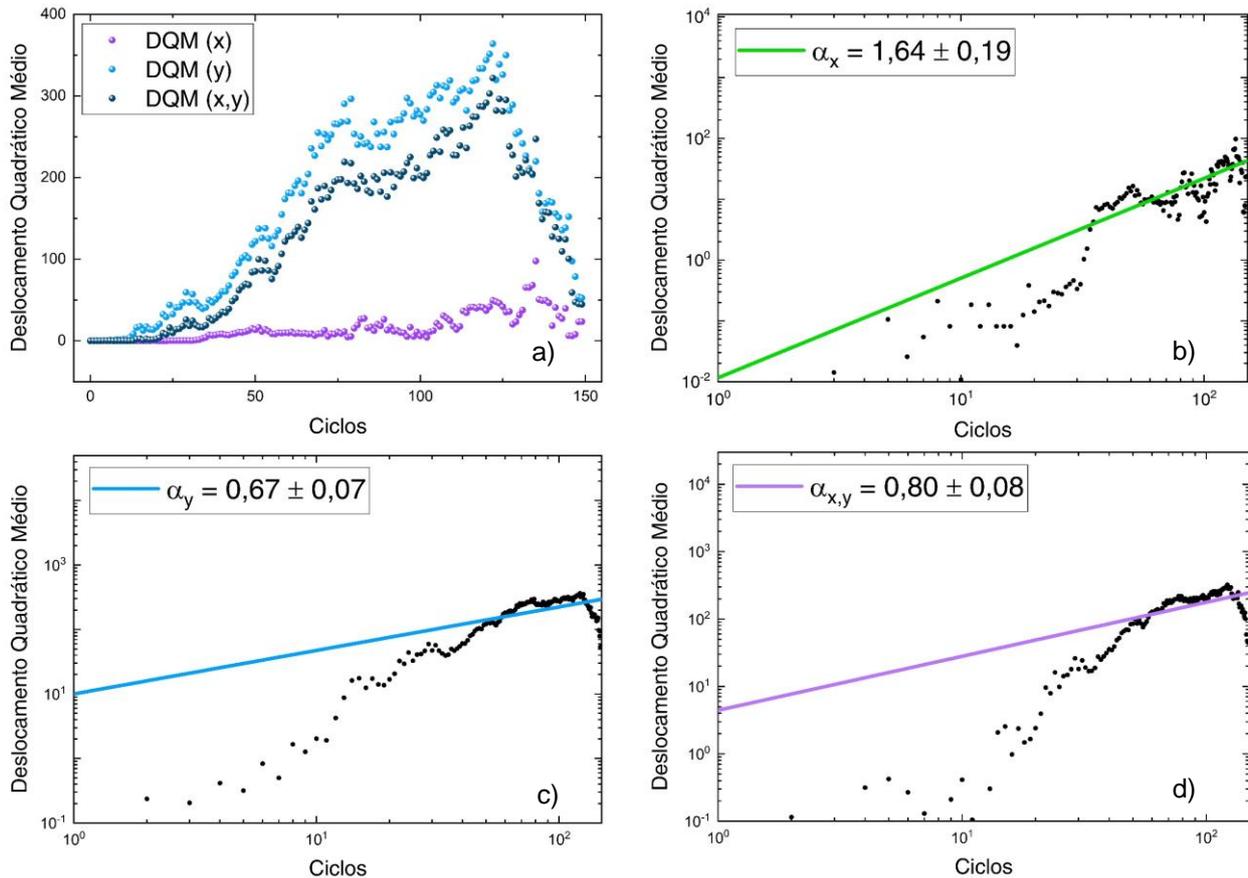


Figura 33 – Deslocamento quadrático médio do sistema B-heptomino. a) Comportamento em escala linear. b) Eixo-x em escala logarítmica. c) Eixo-y em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

As Figura 33a, Figura 33b, e Figura 33c correspondem as curvas de  $x$ ,  $y$  e resultante  $xy$  plotadas separadamente em escala logarítmica, com a finalidade de determinar o coeficiente angular da sequência de dados, e por conseguinte, o expoente de difusão. Para tanto, utiliza-se da definição dada pela Eq. (16).

Para a variável  $x$ , o expoente de difusão e erro associado foram de  $\alpha_x = 1,6 \pm 0,2$ . Este valor configura um processo de superdifusão. Em contraste, para  $y$ , o expoente de difusão e seu erro associado foram  $\alpha_y = 0,67 \pm 0,07$ , caracterizando uma subdifusão. Para a resultante, o expoente de difusão foi de  $\alpha_{xy} = 0,80 \pm 0,08$ , o que também aponta para uma subdifusão. No entanto, após  $t > 120$  ciclos, há um decaimento abrupto do DQM. Esta queda, quando comparada com a Figura 29, sugere a presença de

passos de Lévy [75] por um breve período, até que o sistema se estabilize e o movimento cesse.

### 3.3.6 Correlação da Velocidade

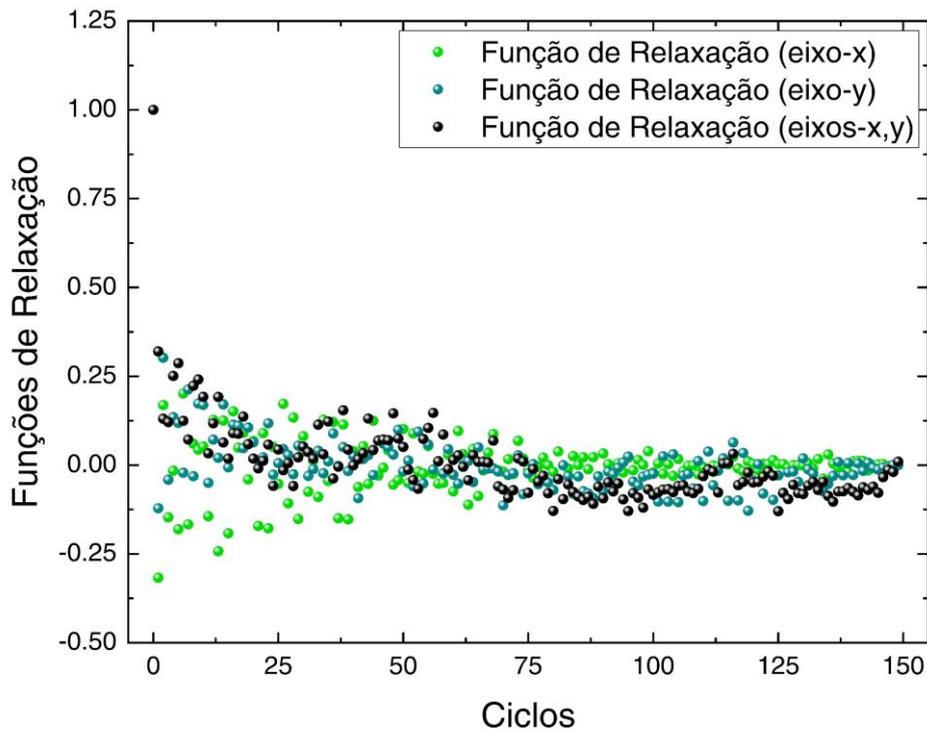


Figura 34 – Funções de relaxação concernentes a estrutura B-heptomino.

A Figura 34 exhibe as funções de relaxação que, com base na Eq. (24), ilustram as medidas de correlação de velocidade normalizadas para os eixos  $x$ ,  $y$  e magnitude resultante em  $xy$ . Observa-se que o comportamento das funções de relaxação para esses eixos difere de um decaimento exponencial. Levando em consideração as classificações de difusão derivadas dos cálculos para o DQM e as estruturas relativas às correlações de velocidades, conclui-se que os regimes observados são anômalos, variando entre subdifusivos e superdifusivos.

## 3.4 BOLOTA

### 3.4.1 Definição

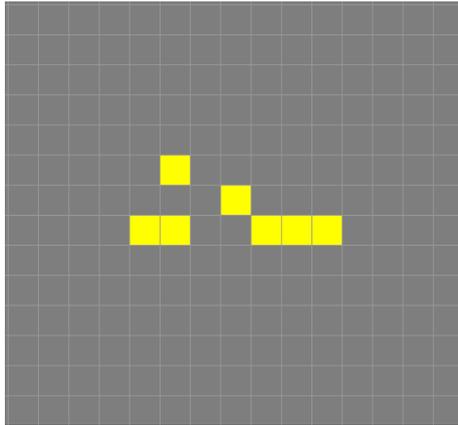


Figura 35 – Estrutura que especifica o objeto pertencente ao jogo da vida, denominado Bolota (Fonte: [76]).

Análogo ao B-heptomino supramencionado, a estrutura denominada Bolota (veja a Figura 35, simulação disponível em <https://playgameoflife.com/lexicon/acorn>) classifica-se como um Matusalém. Refere-se, portanto, a um arranjo ínfimo de células que produz um elevado número de estruturas, com diferentes formatos e características, e que conclui sua dinâmica somente após um número considerável de gerações.

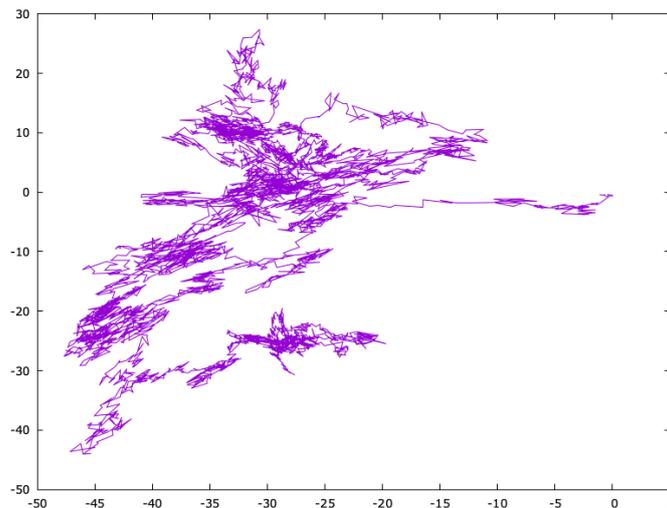


Figura 36 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura Bolota.

A Figura 36 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28).

### 3.4.2 Número de Células

A Figura 37 mostra um aumento significativo no número de células vivas ao longo das gerações da simulação. Inicialmente, o modelo tinha apenas 7 células, mas com o passar do tempo, esse número cresce consideravelmente.

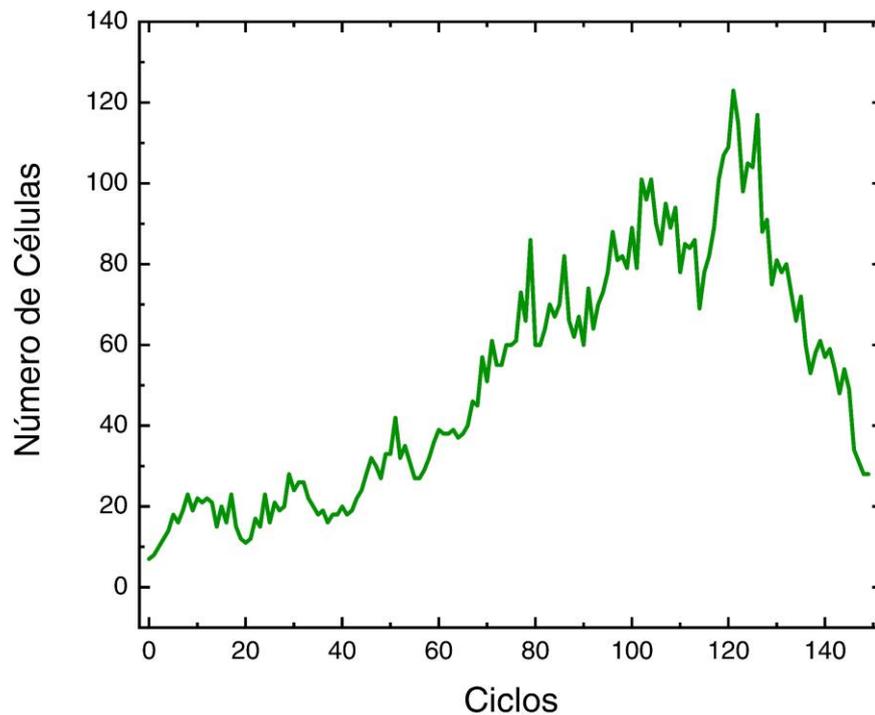


Figura 37 – Número de células ao longo da simulação da estrutura Bolota.

O sistema demonstra um comportamento altamente dinâmico e disperso. Embora as células inicialmente ocupem apenas uma área limitada, a região afetada por suas mudanças espaço-temporais se expande substancialmente ao final da simulação.

Vale ressaltar que o crescimento não é constante; existem flutuações e irregularidades durante todo o processo computacional. Isso ocorre devido aos nascimentos e mortes de células, que seguem regras específicas.

O sistema tem a capacidade de abranger uma área de 215 por 168 células. Ao alcançar a estabilidade na geração de número 5206, a população se estabiliza com 633 células vivas. Essas células são compostas por objetos estáticos, periódicos e um objeto móvel, o planador, que continua sua trajetória diagonal mesmo após a estabilização do sistema.

### 3.4.3 Assimetria e Curtose

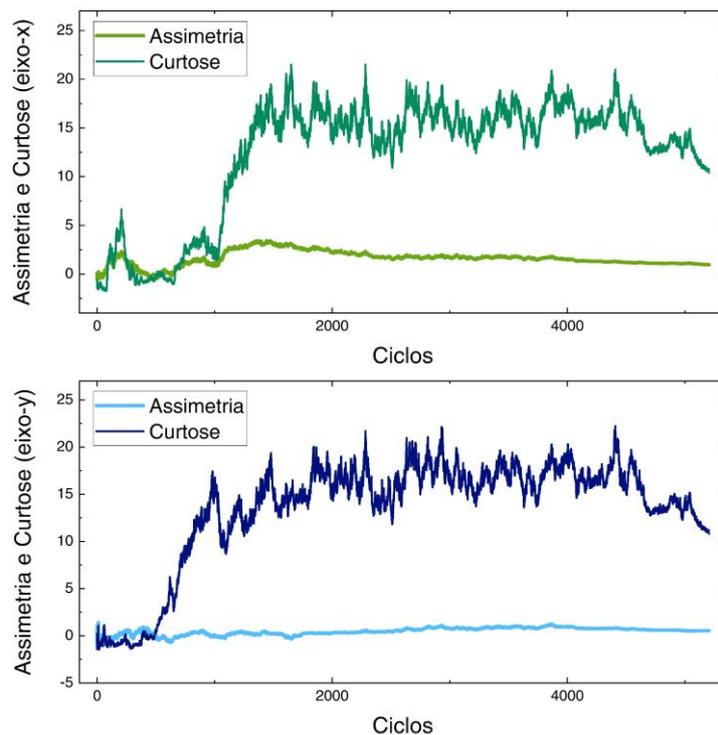


Figura 38 – Assimetria e curtose para as variáveis  $x$  e  $y$ , com respeito a estrutura Bolota.

Ao analisar a Figura 38, fica evidente que a assimetria na variável  $x$  tende a ser positiva, com uma ligeira elevação dos picos da distribuição deslocados para a esquerda, resultando em uma "cauda" mais alongada à direita. Essas características indicam uma curva com assimetria para a direita.

Em relação à assimetria na variável  $y$ , os primeiros quase dois mil pontos de dados mostram uma oscilação suave em torno do zero. No entanto, à medida que os ciclos avançam, a distribuição passa a ter uma tendência para valores positivos, semelhante à observada em  $x$ . Portanto, ambas as variáveis  $x$  e  $y$  exibem uma distribuição com assimetria positiva.

Quanto à curtose de  $x$  e  $y$ , observa-se que inicialmente há oscilações em torno do zero. Com o decorrer do tempo, ambas as curvas se inclinam fortemente para o lado positivo, com valores significativamente acima de zero. Dessa forma, as curtoses dessas variáveis podem ser classificadas como leptocúrticas, indicando uma maior concentração de dados e, conseqüentemente, um pico mais acentuado.

#### 3.4.4 Aceleração

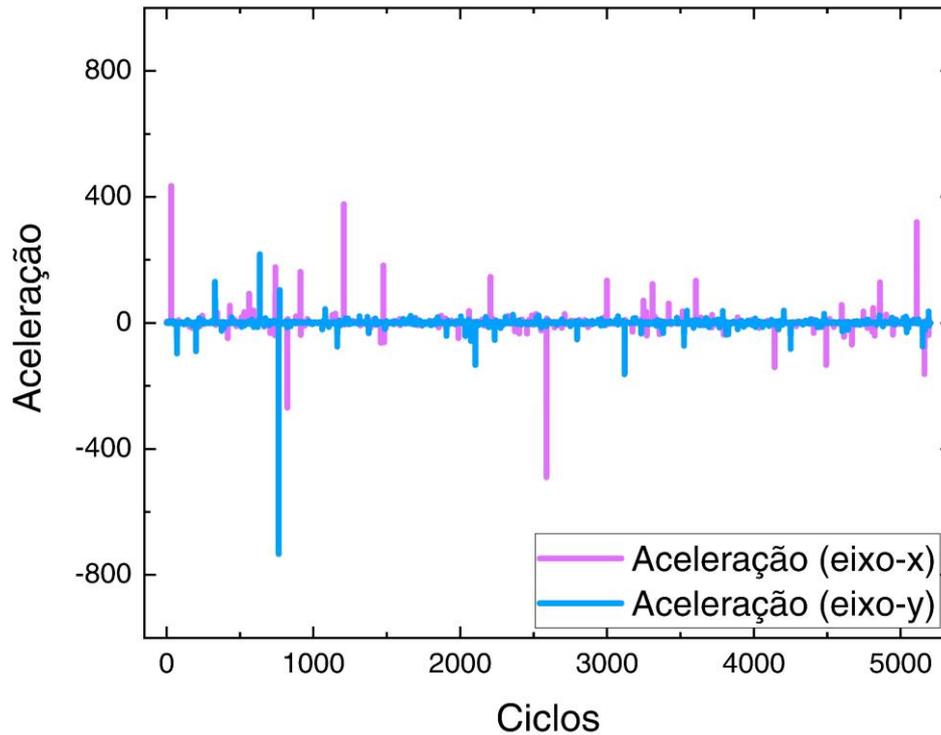


Figura 39 – Aceleração nos eixos-x e y ao longo dos ciclos da simulação do Bolota.

Com base na Figura 39, fica claro que estamos lidando com um sistema de comportamento imprevisível, sem um padrão definido. Em vez disso, há zonas específicas onde ocorrem picos de força ao longo de toda a simulação, indicando que o valor médio da aceleração não será zero.

#### 3.4.5 Deslocamento Quadrático Médio

Na Figura 40, verifica-se o aspecto geral do processo de difusão em termos do DQM relativo às variáveis  $x$ ,  $y$  e resultante  $xy$  em escala logarítmica. Observa-se que os expoentes de difusão tanto para a variável  $x$ , que domina em termos de sua magnitude, quanto para a resultante apresentam um comportamento subdifusivo. Sem embargo, quando se trata da difusão da difusão ao longo do eixo- $y$ , com tendências à descontinuidade em alguns intervalos de ciclos (vales com quedas abruptas), tipicamente relacionados a passos de Lévy, e comumente associados a superdifusão.

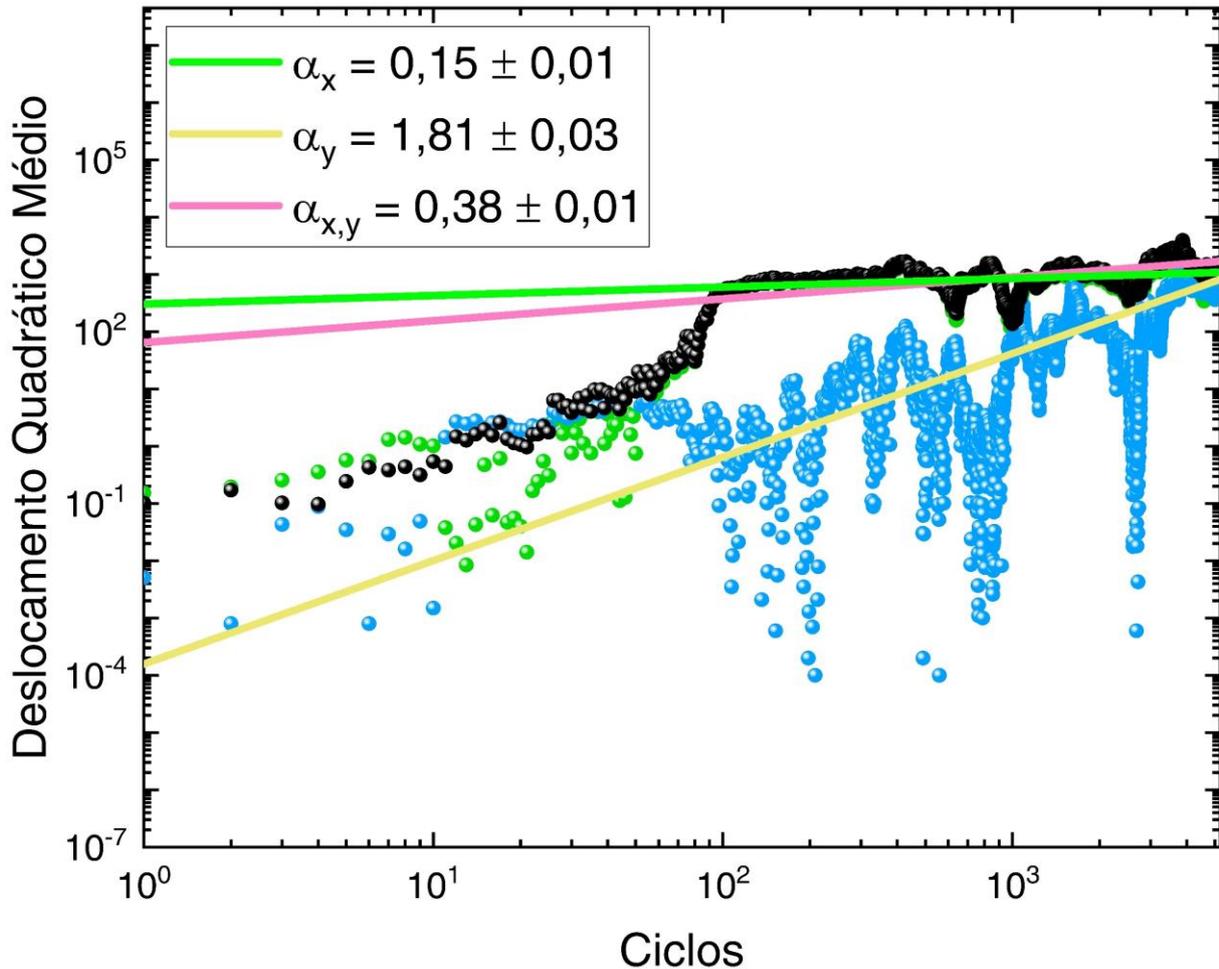


Figura 40 – Deslocamento Quadrático Médio relativo ao modelo Bolota.

Tais características sugerem a inhomogeneidade espacial e dependência das configurações iniciais presentes em regimes anômalos de difusão.

### 3.4.6 Correlação da Velocidade

Os gráficos apresentados na Figura 41 foram elaborados com base nas informações de correlação de velocidade normalizadas para os eixos  $x$ ,  $y$  e resultante  $xy$ , conforme estabelecido pela Eq. (24). As observações indicam que todas as correlações alcançam estabilização em zero, adequado à validade do Teorema de Khincin, porém de forma distinta de um decaimento exponencial, como ocorre na difusão normal. Nesse contexto, e em consonância com os dados obtidos através do DQM, esse resultado corrobora a perspectiva de difusão anômala.

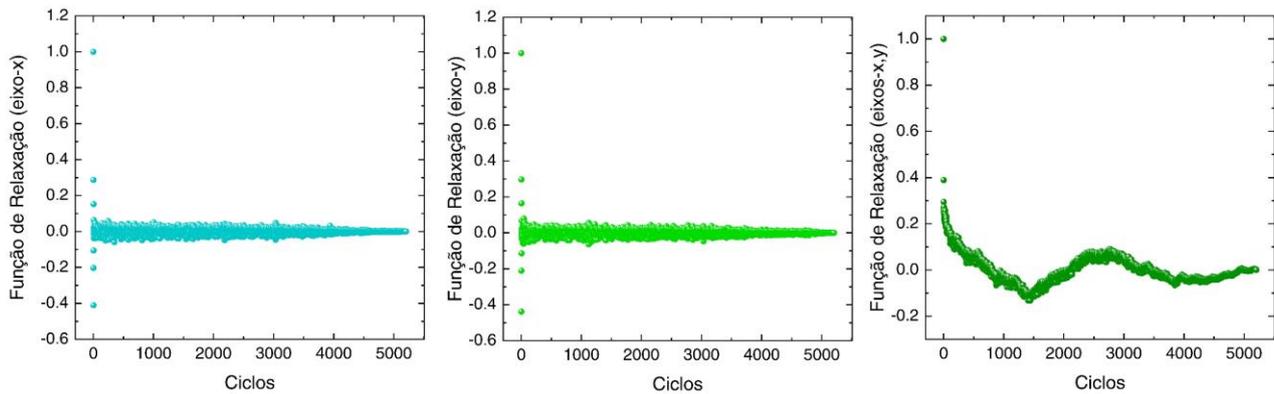


Figura 41 – Funções de Relaxação pertinentes a estrutura Bolota.

## 3.5 BOMBARDEIRO B-52

### 3.5.1 Definição

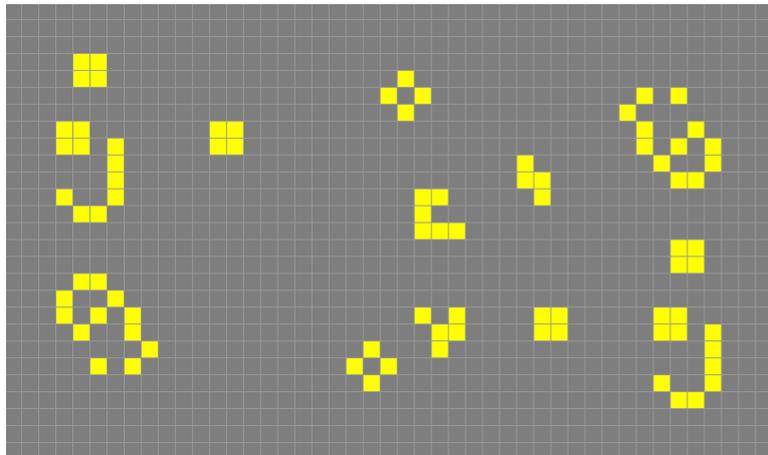


Figura 42 – Arranjo que caracteriza a estrutura Bombardeiro B-52 (Fonte: [76]).

A Figura 42 apresenta a configuração inicial conhecida como Bombardeiro B-52 (simulação disponível em [https://playgameoflife.com/lexicon/B-52\\_bomber](https://playgameoflife.com/lexicon/B-52_bomber)). Esta é uma configuração complexa de células que inclui tanto padrões estáticos quanto móveis. Eles interagem entre si para formar uma "arma de cano duplo" que lança objetos planadores tanto na direção diagonal superior quanto na inferior.

Esta configuração faz uso do padrão conhecido como B-heptomino (descrito na subseção 3.3). Quando combinado com as células vivas existentes em seu sistema, ele exibe um comportamento periódico, gerando novos objetos a cada 52 gerações.

O modelo foi originalmente descoberto por Noam Elkies no século XX e posteriormente aprimorado por David Bell após um mês de trabalho.

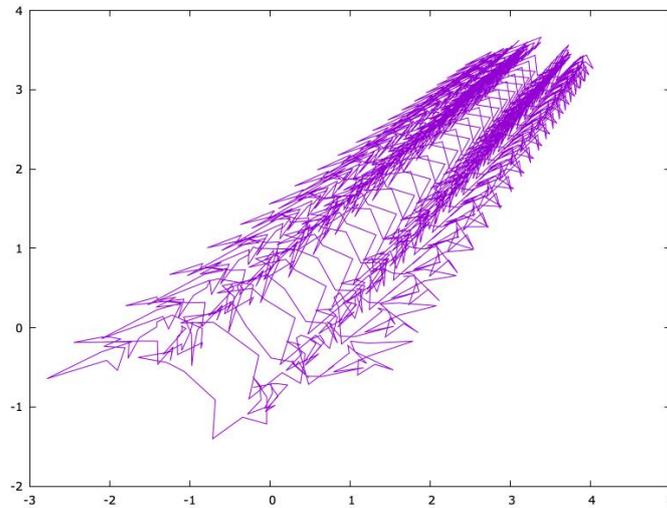


Figura 43 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura Bombardeiro B-52.

A Figura 43 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28). Nota-se que, diferentemente de outras estruturas, seu deslocamento médio apresenta um padrão de similaridade.

### 3.5.2 Número de Células

Ao analisar a evolução da estrutura Bombardeiro B-52, Figura 44, nota-se um aumento contínuo e constante no número de células vivas no sistema. Este crescimento é marcado pela liberação periódica de planadores em direções noroeste e sudeste, adicionando 10 novos elementos à rede em intervalos de tempo específicos.

O padrão principal do sistema se auto-interage, resultando no nascimento e morte de células que, por sua vez, geram os planadores que são lançados. Apesar dessas mudanças, a estrutura mantém um comportamento que é temporalmente invariante, ou seja, o padrão de crescimento e decréscimo se mantém estável ao longo do tempo

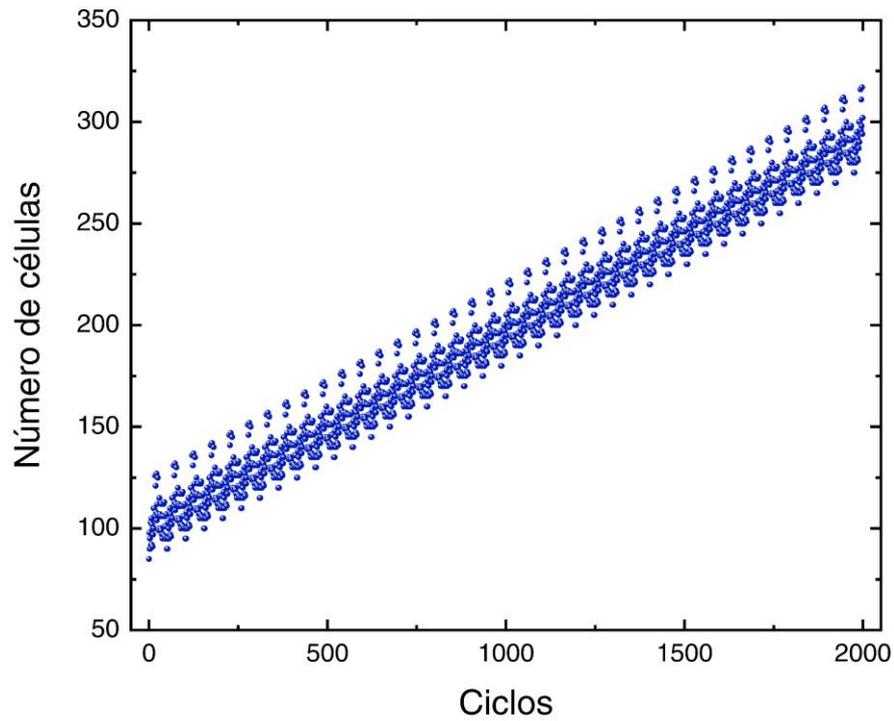


Figura 44 – Número de células no decurso da simulação do Bombardeiro B-52.

### 3.5.3 Assimetria e Curtose

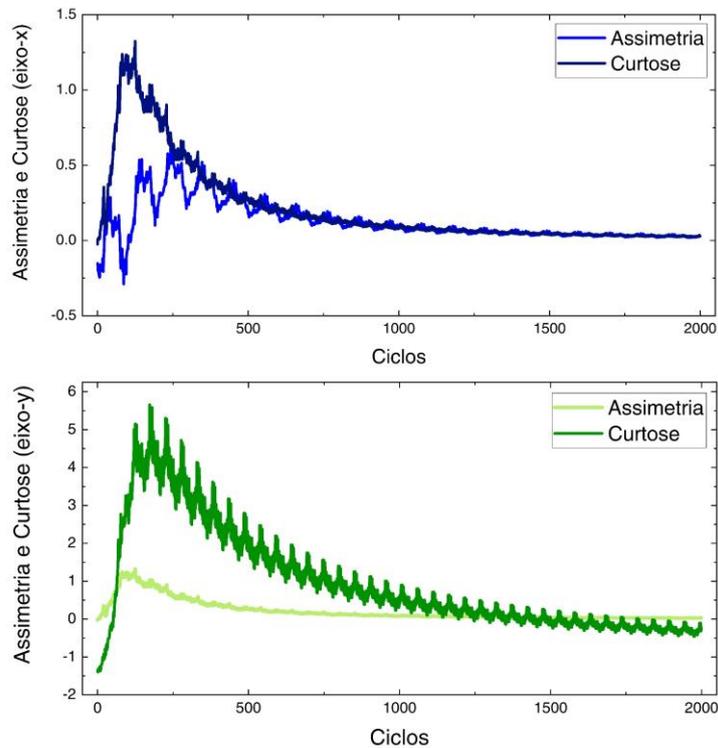


Figura 45 – Assimetria e curtose relativas às variáveis x e y da estrutura Bombardeiro B-52.

Avaliando as curvas de assimetria para  $x$  e  $y$ , Figura 45, observa-se que se tratam de distribuições assimétricas à direita, em virtude do prolongamento dos dados na região direita, e projeção da área de maior concentração de valores estar direcionada para a esquerda. Ambas as curvas se classificam da mesma forma, e suas distribuições de frequências concentram-se em níveis inferiores aos valores médios.

Com respeito as curtoses dessas medidas, identifica-se que os dados se encontram concentrados em regiões positivas da escala. Ademais, o nível de achatamento de ambas as curvas é menor e os picos mais elevados. Neste sentido, as curtoses pertinentes a  $x$  e a  $y$  qualificam-se como leptocúrticas.

### 3.5.4 Aceleração

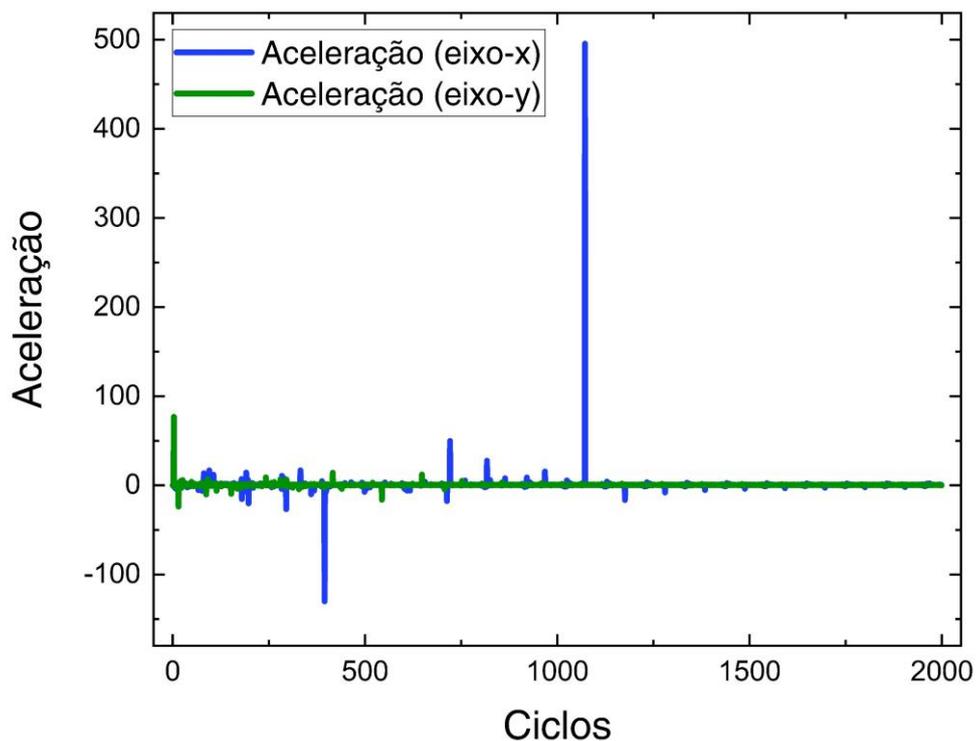


Figura 46 – Aceleração decorrente do processo de simulação do modelo Bombardeiro B-52.

Com base na Figura 46, fica evidente que a aceleração média do sistema é distinta de zero, indicando que as forças atuantes têm um papel relevante no modelo em questão. Os picos de força em  $x$  e  $y$  variam em intensidade; alguns são sutis, enquanto outros são mais acentuados.

Ao analisar o impacto dessas forças na distribuição dos dados, percebe-se que o primeiro pico em  $x$  não provoca alterações perceptíveis na assimetria ou

na curtose. Além disso, no segundo pico identificado, tanto a assimetria quanto a curtose continuam a diminuir, tal como vinham fazendo antes do surgimento dessa força, indicando que ela não afetou a distribuição nessa coordenada.

Quanto às forças em  $y$ , nos dois picos mais intensos observados, tanto a assimetria quanto a curtose continuam a aumentar. No entanto, não é possível afirmar com certeza que esse comportamento seja diretamente causado pelas forças em questão.

### 3.5.5 Deslocamento Quadrático Médio

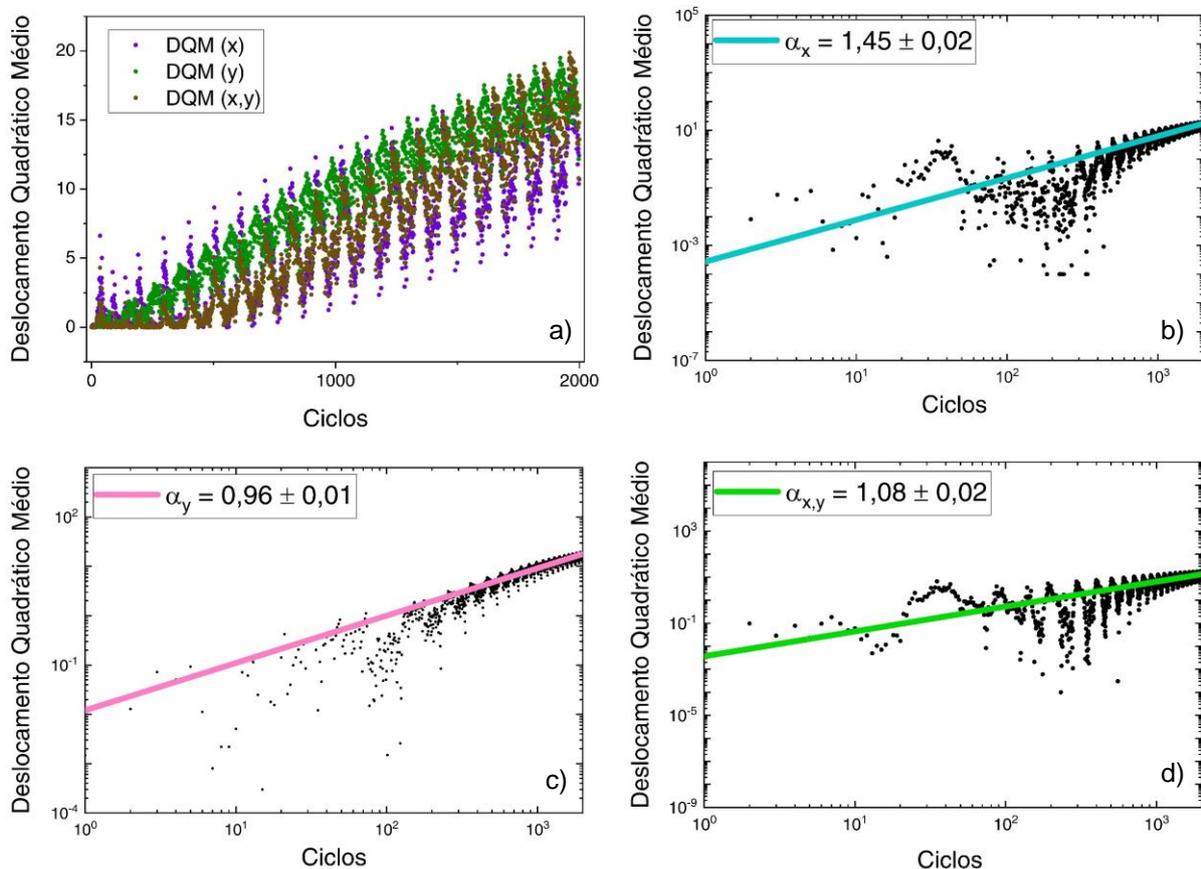


Figura 47 – Deslocamento quadrático médio do sistema Bombardeiro B-52. a) Comportamento em escala linear. b) Eixo-x em escala logarítmica. c) Eixo-y em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

A Figura 47a ilustra o comportamento geral das curvas para os eixos  $x$ ,  $y$  e resultante  $xy$ . Nesse contexto, é notável que, tanto para os elementos divididos por eixos quanto para aqueles justapostos, existe um padrão consistente de dispersão intensa e crescente ao longo de toda a representação gráfica. Similaridade que também ocorre para a trajetória do centro de massa.

Quanto aos gráficos subsequentes, os dados foram estruturados de forma a destacar as características das curvas para  $x$  (Figura 47b),  $y$  (Figura 47c) e  $xy$  (Figura 47d) em escala logarítmica. Isso permitiu obter o expoente de difusão e os respectivos erros com base na Eq. (21).

Para o expoente de difusão em  $x$ , com seu erro associado, os valores obtidos foram de  $\alpha_x = 1,45 \pm 0,02$ . Esse resultado sugere que o processo é de superdifusão.

Em relação ao expoente de difusão e seu erro em  $y$ , o valor encontrado foi de  $\alpha_y = 0,96 \pm 0,01$ . Isso indica que estamos diante de um fenômeno de subdifusão, que se aproxima da difusão normal.

Por último, no que concerne ao comportamento em ambos os eixos, o coeficiente de difusão e o erro associado foram de  $\alpha_{xy} = 1,08 \pm 0,02$ . Isso caracteriza nos limites de uma difusão normal, ou de Einstein.

### 3.5.6 Correlação da Velocidade

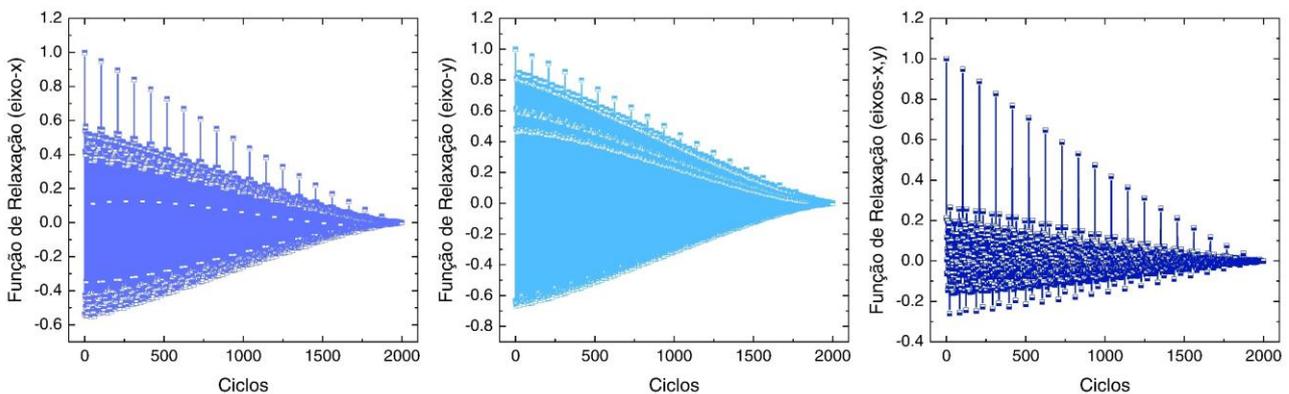


Figura 48 – Funções de Relaxação associadas ao modelo Bombardeiro B-52.

As funções de relaxação mostradas na Figura 48 foram calculadas com base nas medidas de correlação de velocidade, normalizadas para os eixos  $x$ ,  $y$  e para a magnitude resultante  $xy$ . Essas medidas estão em conformidade com a Eq. (24). Ressalva se faz ao comportamento oscilatório rápido das funções de relaxação, que se contrapõe aos padrões convencionais de estabilização em regimes de difusão normal, que geralmente são modelados por uma função exponencial decrescente; os dados apresentados sugerem justamente comportamentos distintos desse. Em uma palavra, os regimes de difusão

normal, frequentemente observados em sistemas bem-comportados, a função de relaxação segue decaimento exponencial. Essa curva representa uma estabilização rápida e é uma característica típica de sistemas em que a difusão ocorre de forma homogênea no espaço. Em contraste, as observações feitas no presente estudo indicam uma divergência significativa desse comportamento das correlações das velocidades, apontando para o que poderia ser categorizado como uma "difusão anômala" no tocante à inhomogeneidade espacial, com comportamentos difusivos distintos ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ .

Este fenômeno de difusão anômala é notável porque, embora opere dentro do contexto da difusão de Einstein e em relação ao eixo- $x$  e no aspecto resultante bidimensional, ele exibe características únicas que não se alinham com as expectativas convencionais. Em autômatos celulares e sistemas similares, isso pode ser indicativo de complexidades subjacentes no sistema que afetam a forma como a difusão ocorre, potencialmente tornando o sistema mais sensível a condições iniciais ou outros fatores.

### 3.6 CRESCIMENTO INFINITO (MODELO 1)

#### 3.6.1 Definição

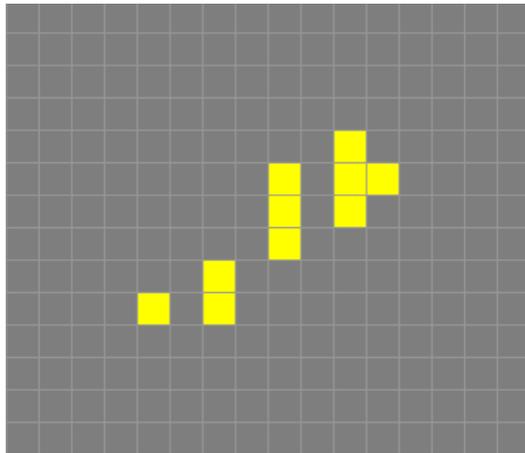


Figura 49 – Arranjo de células que caracteriza a estrutura Crescimento Infinito (modelo 1) (Fonte: [76]).

Os estudos de Callahan e as pesquisas tecidas por Nick Gotts estabeleceram um marco no âmbito dos ACs do JdV: a definição da quantidade mínima de células vivas, no valor de 10, arranjadas de forma a obter um padrão gerador de crescimento infinito (simulação disponível em [<https://playgameoflife.com/lexicon/infinite\\_growth\\_\(1\)>](https://playgameoflife.com/lexicon/infinite_growth_(1))).

Através da modificação espaço-temporal de sua estrutura inicial, este conjunto de células que forma o arranjo geral é capaz de gerar objetos estáveis, periódicos e móveis. Caracteriza-se por deixar um rastro de objetos periódicos no princípio, seguidos por formações organizadas de blocos no sentido diagonal, à noroeste.

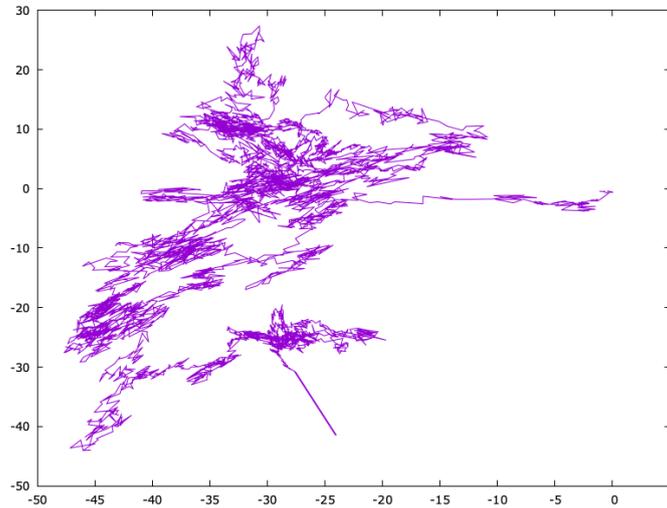


Figura 50 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura Crescimento (modelo 1).

A Figura 50 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28).

### 3.6.2 Número de Células

A princípio este modelo apresenta uma dinâmica irregular. Com o passar dos passos de tempo assume um caráter de crescimento padronizado que se estende pela rede indefinidamente.

Através de suas características inerentes, após a padronização de sua dinâmica, este modelo de Crescimento Infinito adiciona à sua grade celular blocos fileiras ordenadas de blocos 2x2, conferindo o aspecto da curva de crescimento de elementos a medida com que avança em sua simulação.

Como o próprio nome sugere, por se tratar de uma estrutura de crescimento infinito, esta curva relativa ao número de células prolonga-se ininterruptamente de acordo com o desenvolvimento do autômato celular avaliado.

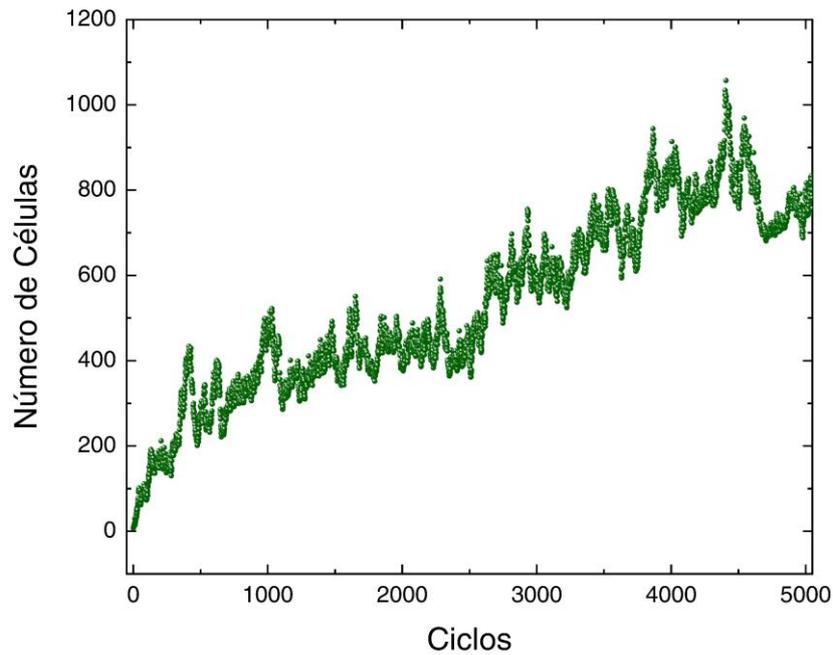


Figura 51 – Número de células do sistema denominado Crescimento Infinito (modelo 1) (Fonte: autor).

### 3.6.3 Assimetria e Curtose

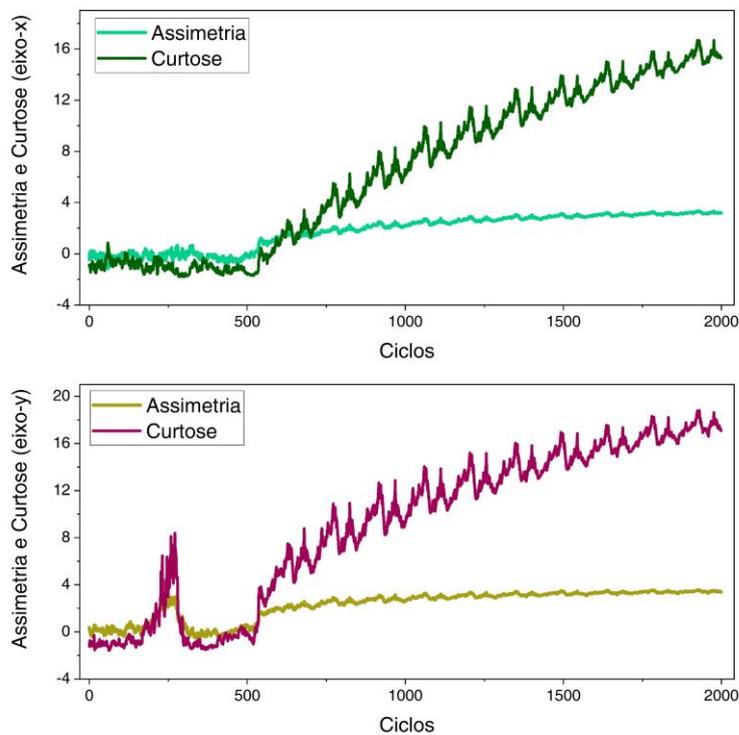


Figura 52 – Assimetria e Curtose relativos a  $x$  e  $y$  para a estrutura Crescimento Infinito (modelo 1).

Com respeito a assimetria para  $x$  e para  $y$ , nota-se, através da disposição dos dados nos gráficos acima, que ambas as curvas a princípio circundam o perfil de uma

distribuição gaussiana, a exceção em torno de  $t = 250$  para a variável  $y$  (tanto na assimetria quanto na curtose). Porém, a partir de cerca de 500 gerações, as curvas apresentam tendências para os valores positivos. Estas características indicam que se tratam de curvas com assimetria com cauda alongada à direita.

De forma análoga a assimetria, ambas as curvas de curtose relativas a  $x$  e a  $y$  apresentam um aspecto semelhante. No início localizam-se próximo ao valor nulo, e posteriormente, inclinam-se para os valores positivos da escala. Em face destas propriedades, as curtoses dessas grandezas podem ser categorizadas como leptocúrticas, onde os dados aglutinam-se em menores regiões promovendo um aspecto mais agudo para seu pico de distribuição.

### 3.6.4 Aceleração

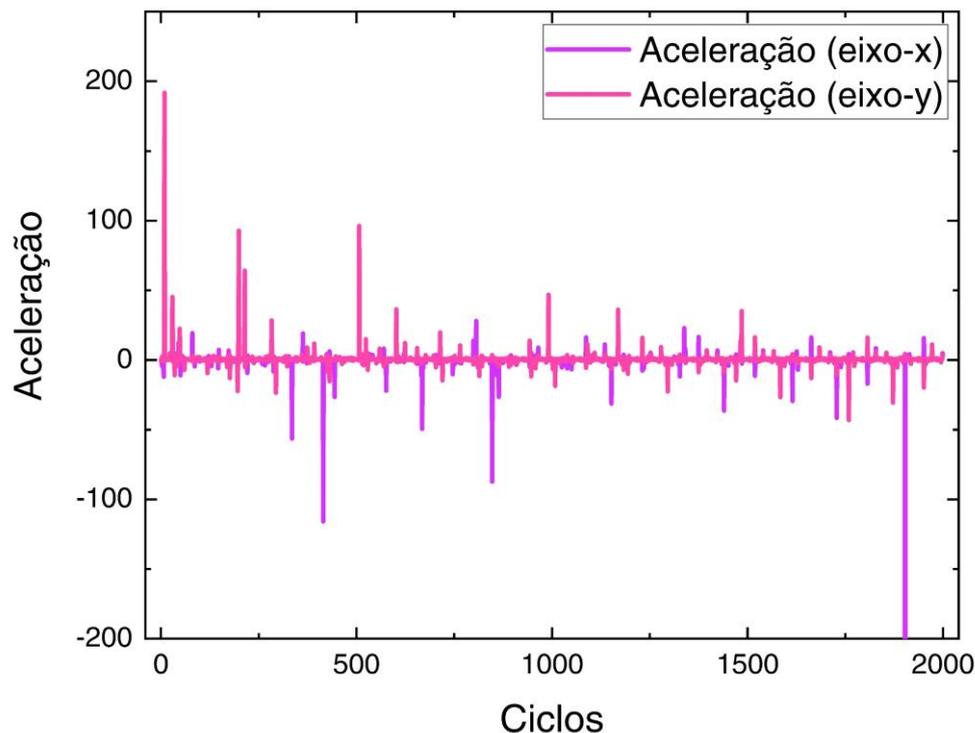


Figura 53 – Aceleração dos elementos que constituem o sistema intitulado Crescimento Infinito (modelo 1).

Em face da disposição dos dados de aceleração associada aos eixos  $x$  e para  $y$ , verifica-se que esta grandeza não possui média nula, como nos casos anteriores, e evidência focos de força localizados ao longo de toda a simulação da estrutura.

Diante destes pontos de força intensos, não se verifica mudanças associadas ao comportamento das curvas de assimetria e curtose. Em face disto, conclui-

se que, apesar da existência de forças substanciais, não é identificada influência das mesmas para a variação aparentes do sistema. Compreende-se que isto se dá em virtude de o corpo da estrutura apresentar crescimento contínuo, contemplando regiões progressivamente maiores, de modo que interferências localizadas não conseguem promover a desestabilização da estrutura completa.

### 3.6.5 Deslocamento Quadrático Médio

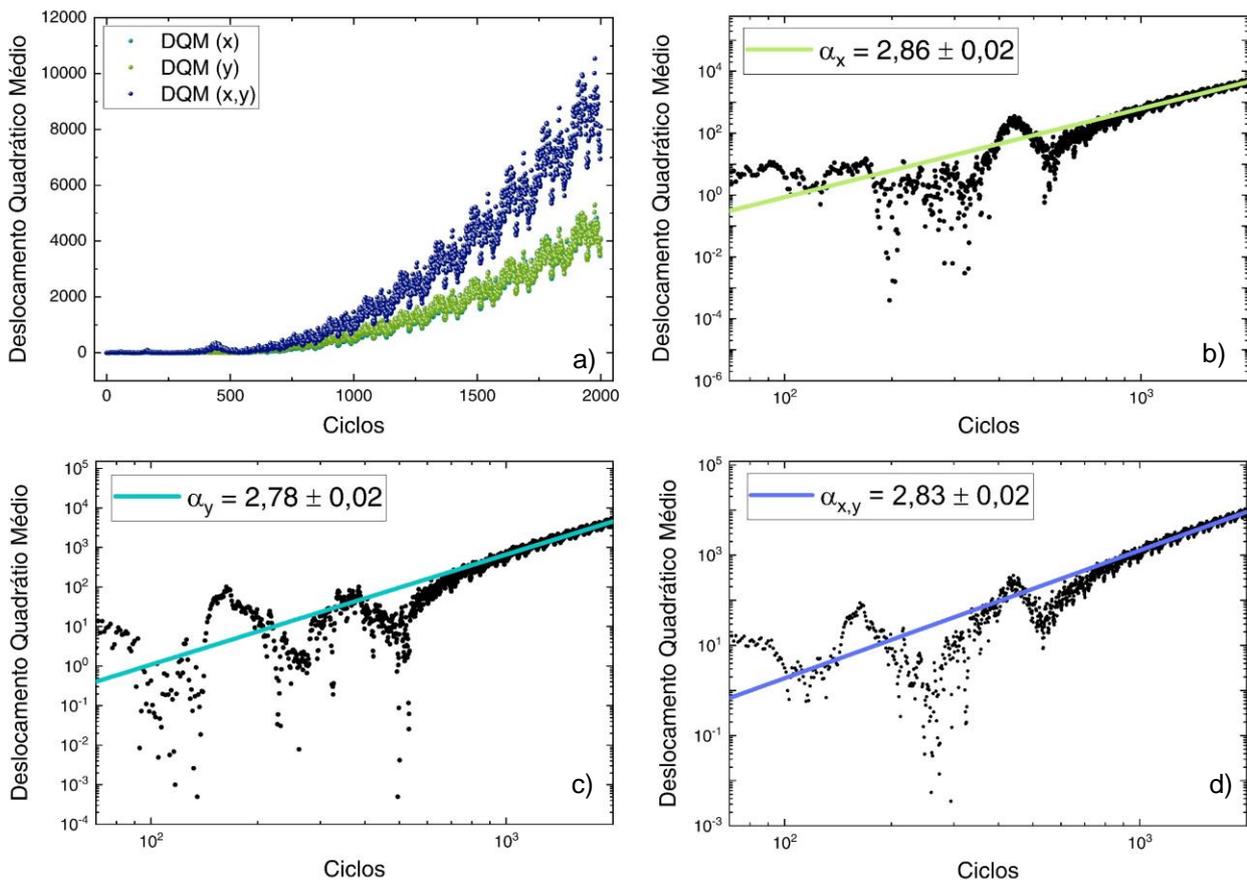


Figura 54 – Deslocamento quadrático médio do sistema Crescimento Infinito (modelo 1). a) Comportamento em escala linear. b) Eixo-x em escala logarítmica. c) Eixo-y em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

Em relação aos dados apresentados na Figura 54, o primeiro gráfico (Figura 54a) ilustra as curvas do deslocamento quadrático médio para as variáveis  $x$ ,  $y$  e a combinação  $xy$  em escala linear. A partir dessas curvas, fica evidente que o sistema exibe um comportamento inicial irregular e imprevisível, que eventualmente converge para uma dinâmica mais padronizada para todas as três variáveis.

Os gráficos subsequentes (Figura 54b, Figura 54c e Figura 54d) em escala logarítmica evidenciam expoentes de difusão e o erro associado, com base na Eq. (21),

$\alpha_x = 2,86 \pm 0,02$ ,  $\alpha_y = 2,78 \pm 0,02$  e  $\alpha_{x,y} = 2,83 \pm 0,02$ . Em todos esses casos observe-se, portanto, superdifusão hiper-balística.

### 3.6.6 Correlação da Velocidade

A Figura 55 ilustra os dados de correlação da velocidade normalizados para os eixos  $x$ ,  $y$  e a magnitude resultante bidimensional  $xy$ , de acordo com a Eq. (23). Mais uma vez, mesmo observando-se uma superdifusão hiper-balística, o Teorema de Khinchin é assegurado para este modelo do JdV.

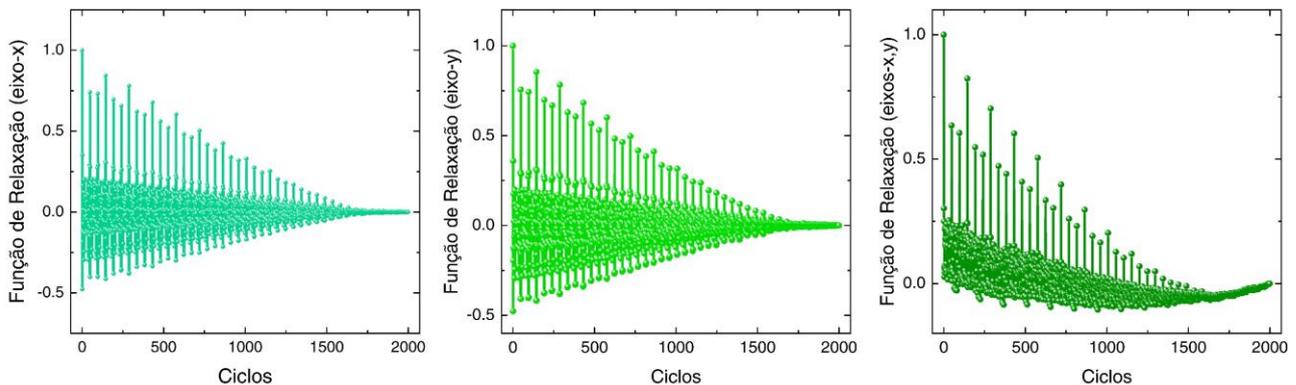


Figura 55 – Funções de relaxação associadas ao sistema Crescimento Infinito (modelo 1).

## 3.7 CRESCIMENTO INFINITO (MODELO 2)

### 3.7.1 Definição

Semelhante ao modelo 1 supracitado, refere-se a um sistema limitado quanto ao número de componentes que o formam inicialmente, mas que produz um número indefinido de células ao longo de sua dinâmica (simulação disponível em [https://playgameoflife.com/lexicon/infinite\\_growth\\_\(2\)>](https://playgameoflife.com/lexicon/infinite_growth_(2)>)).

Este sistema foi observado inicialmente por Paul Callahan e consiste na única distribuição de células que se agrupam em um arranjo formado por apenas cinco unidades de área da rede celular.

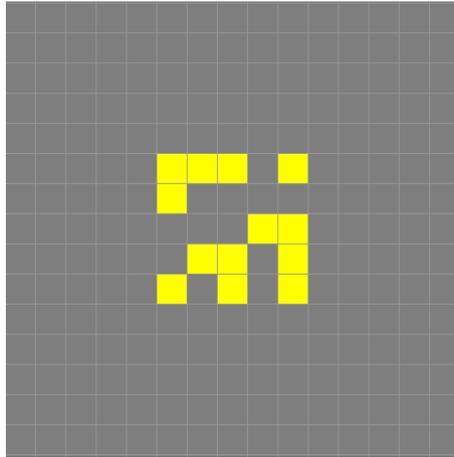


Figura 56 – Modelo da estrutura Crescimento Infinito (modelo 2) (Fonte: [76]).

No decorrer de suas iterações produz planadores que se locomovem em caminhos diagonais, além de estruturas estáticas e cíclicas que inauguram o início da formação de um padrão organizado de blocos 2x2, semelhante ao modelo 1, que se orientam à noroeste da grade.

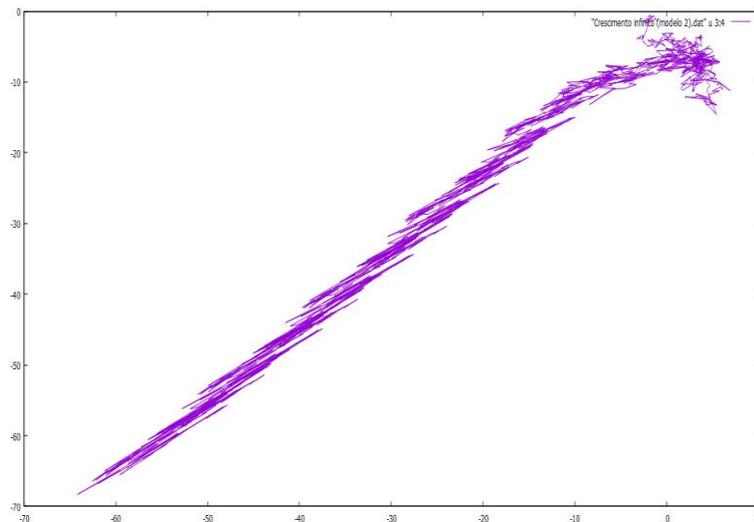


Figura 57 – Trajetória do centro de massa das células em estado “vivo” da estrutura Crescimento Infinito (modelo 2).

A Figura 57 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28).

### 3.7.2 Número de Células

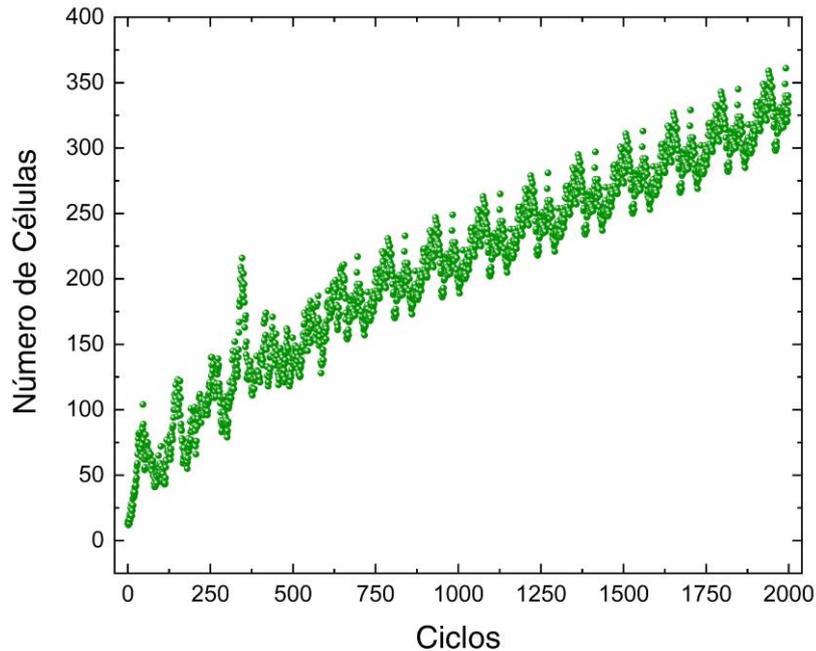


Figura 58 – Número de células ao longo da simulação da estrutura Crescimento Infinito (modelo 2).

Semelhante ao modelo apresentado no tópico anterior, este sistema inicia-se com um número restrito de células vivas que se movem aleatoriamente pelo espaço. Com o passar das gerações manifesta um padrão de construção e organização de blocos 2x2 indefinidamente.

Estas duas fases de dinâmica apresentadas por esta estrutura caracterizam o aspecto de crescimento contínuo dos elementos no sistema, e dependente das interações destrutivas e construtivas entre os componentes que o constituem.

### 3.7.3 Assimetria e Curtose

A assimetria para as variáveis  $x$  e  $y$  exibe, no início, um comportamento oscilante em torno de zero. Após aproximadamente 300 gerações,  $\zeta_x > 0$ . Por outro lado,  $\zeta_y < 0$  até aproximadamente  $t = 1000$  ciclos, tornando-se positivo para  $t \gtrsim 1000$ .

A curtose mostra um comportamento mais achatado para valores de  $t \lesssim 400$  ciclos, no caso de  $x$ , e  $t \lesssim 300$  ciclos, para  $y$ . Após esses períodos comportam-se como distribuições leptocurticas.

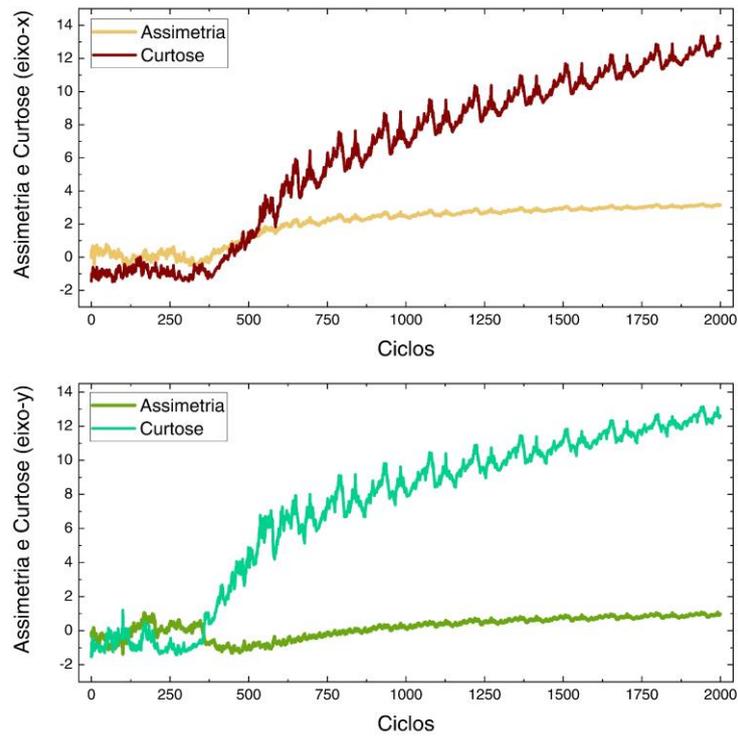


Figura 59 – Assimetria e curtose para as variáveis  $x$  e  $y$  do sistema Crescimento Infinito (modelo 2).

### 3.7.4 Aceleração

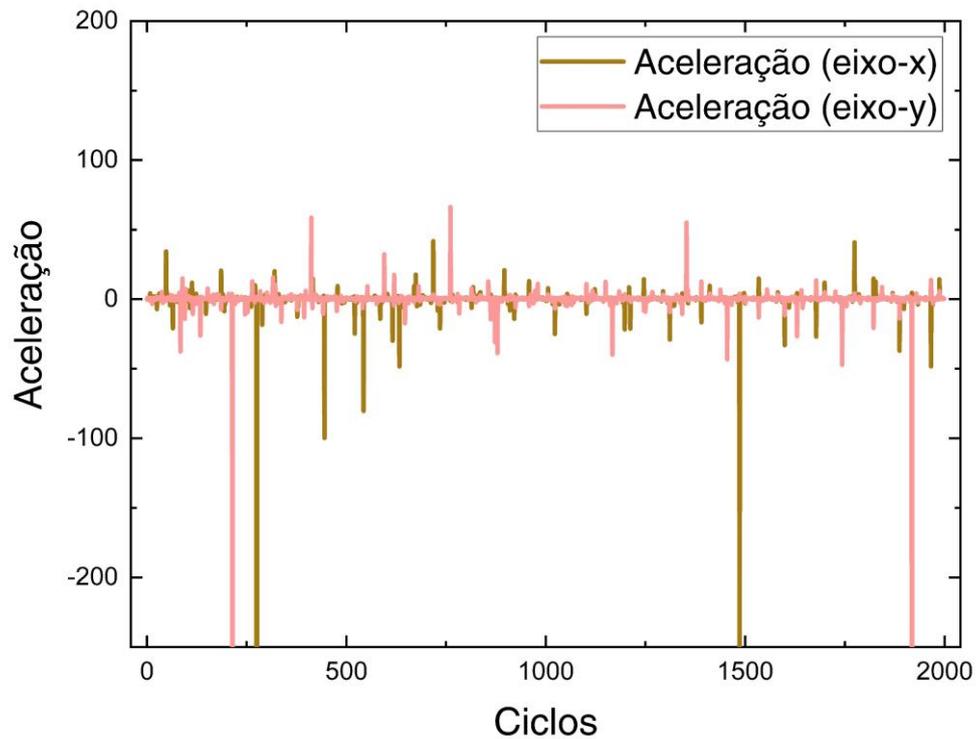


Figura 60 – Aceleração concernente aos componentes do sistema Crescimento Infinito (modelo 2).

Os elementos do modelo mostram aceleração média não nula nos eixos  $x$  e  $y$ , com picos notáveis em pontos específicos e flutuações menores ao longo de toda a simulação computacional.

Diante desses achados, exploramos a possibilidade de forças externas estarem influenciando significativamente a distribuição de frequências dentro do sistema. No entanto, ao analisar os pontos com forças mais intensas em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , observamos que nem a assimetria nem a curtose sofreram alterações significativas nos dados experimentais.

Esta falta de influência das forças identificadas sugere que o impacto das mesmas é condicionado pela escala do fenômeno. O modelo abrange uma área em expansão contínua e ilimitada, enquanto as zonas de força intensa são circunscritas a intervalos específicos. Portanto, essas forças localizadas não parecem ter a capacidade de afetar o sistema como um todo, mas regiões específicas como nos casos precedentes de superdifusão hiper-balística.

### 3.7.5 Deslocamento Quadrático Médio

A Figura 61a ilustra a dinâmica nos eixos  $x$ ,  $y$  e na combinação  $xy$ . Inicialmente, os eventos ocorrem de maneira arbitrária, sem um padrão ou trajetória claramente definidos. No entanto, com o passar do tempo, observa-se uma organização na movimentação dos componentes, resultando em uma distribuição numérica mais estruturada.

Os gráficos subsequentes focam na análise individual de cada variável de posição. Essa análise permitiu determinar os expoentes de difusão, conforme a Eq. (21), e os valores desses expoentes são extraídos dos coeficientes angulares das retas de ajuste.

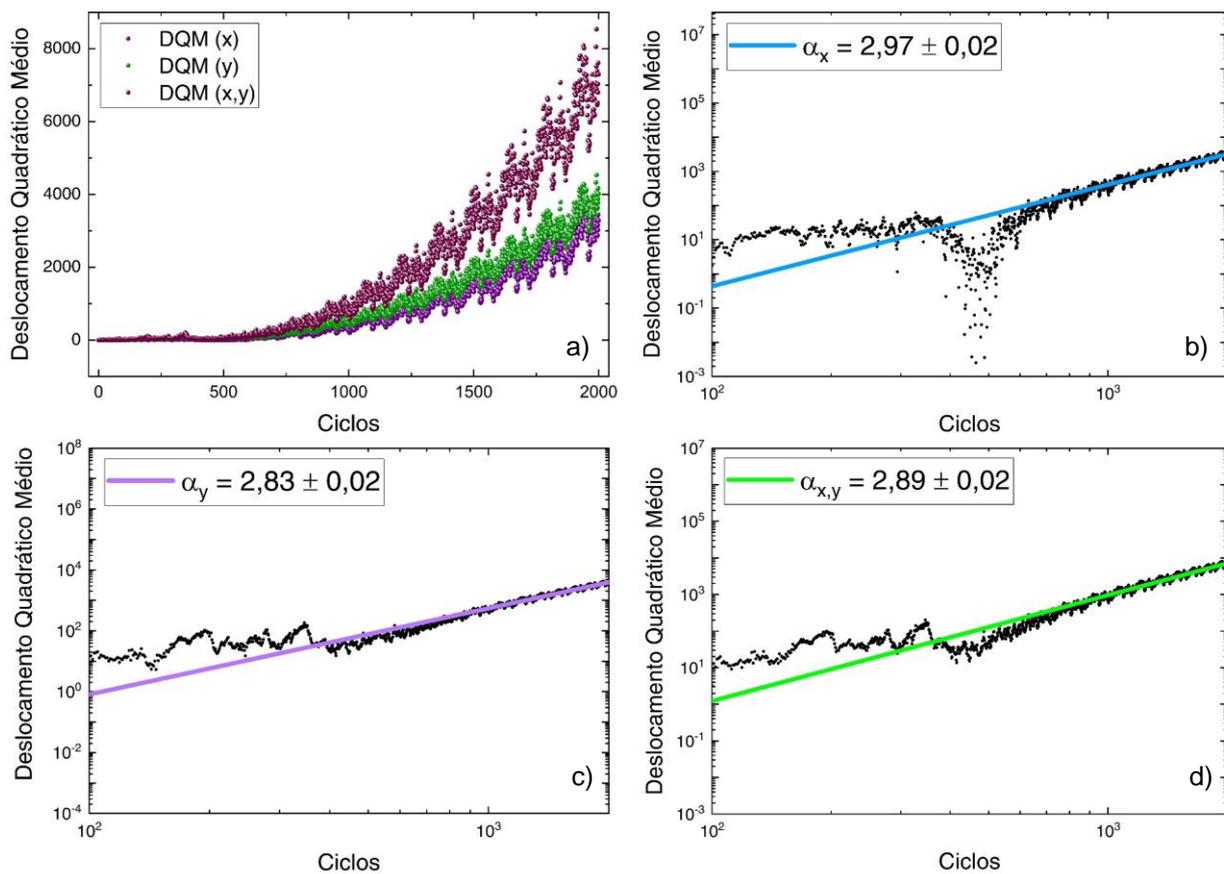


Figura 61 – Deslocamento quadrático médio do sistema Crescimento Infinito (modelo 2). a) Comportamento em escala linear. b) Eixo- $x$  em escala logarítmica. c) Eixo- $y$  em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

Nessa análise,  $\alpha_x = 2,97 \pm 0,02$ ,  $\alpha_y = 2,83 \pm 0,02$  e  $\alpha_{xy} = 2,89 \pm 0,02$ , confirmando mais uma vez um comportamento superdifusivo hiperbalístico.

### 3.7.6 Correlação da Velocidade

A Figura 62 foi construída com base em dados de correlação de velocidade para os eixos  $x$ ,  $y$  e  $xy$ , formando as respectivas funções de relaxação, conforme especificado pela Eq. (23). Fica evidente a formação de padrões, porém cumprindo o Teorema de Khinchin.

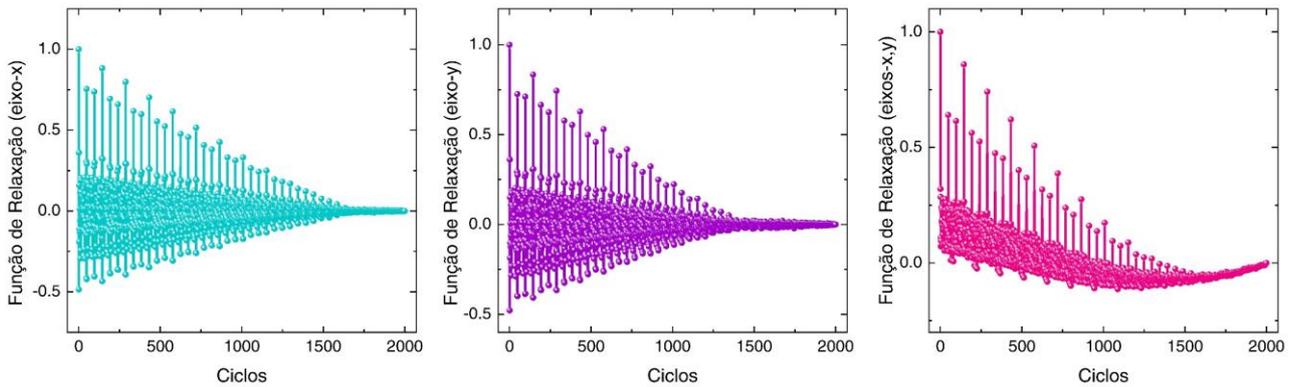


Figura 62 – Funções de relaxação relativas à estrutura Crescimento Infinito (modelo 2).

### 3.8 CRESCIMENTO INFINITO (MODELO 3)

#### 3.8.1 Definição

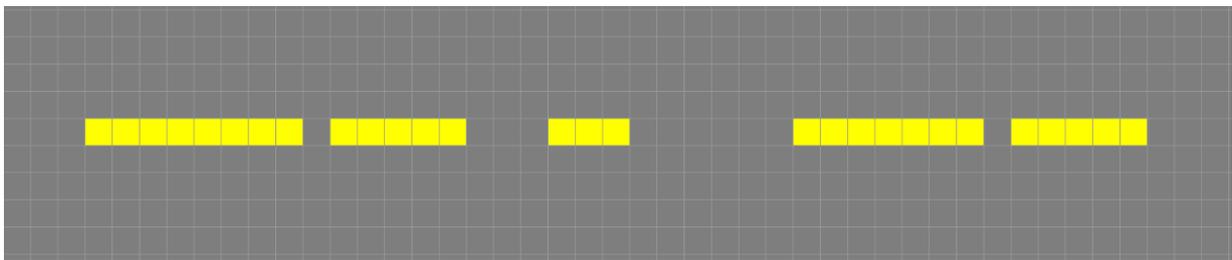


Figura 63 – Configuração espacial de células vivas que formam a estrutura denominada Crescimento Infinito (modelo 3) (Fonte: [76]).

O sistema de crescimento infinito exibido na Figura 63 (simulação disponível em <[https://playgameoflife.com/lexicon/infinite\\_growth\\_\(3\)>](https://playgameoflife.com/lexicon/infinite_growth_(3)>)) consiste em uma estrutura idealizada por Paul Callahan. É concebida como fruto de uma dedução tecida por Nick Gotts quanto a arranjos unidimensionais.

O desafio consistia em projetar uma estrutura em uma dimensão capaz de gerar crescimento infinito. Antes do modelo de Callahan, outras configurações foram elaboradas, contudo, apresentavam um número elevado de células. O modelo de Callahan, por sua vez, demonstrou um nível considerável de simplificação, sem comprometer o alcance do objetivo inicialmente proposto.

No decorrer de sua simulação este conjunto de células produz dois planadores que se deslocam à noroeste e à sudoeste, além de estruturas estáticas e

periódicas que marcam o início da região do espaço na qual este modelo percorrerá deixando para trás um rastro de objetos estáticos, como blocos 2x2 e estruturas periódicas.

Consoante a formação inicial, este construtor começa a executar o mesmo padrão observado nos outros dois modelos supracitados, formados essencialmente por blocos estáveis, os quais seguem uma sequência crescente regida por orientações à nordeste e sudeste.

Esta formação conjunta entre o aspecto populacional inicial e subsequente comutação de blocos faz lembrar o formato da calda de um peixe, que começa discreta e apresenta carácter progressivamente abrangente, com angulo crescente e crescimento infinito.

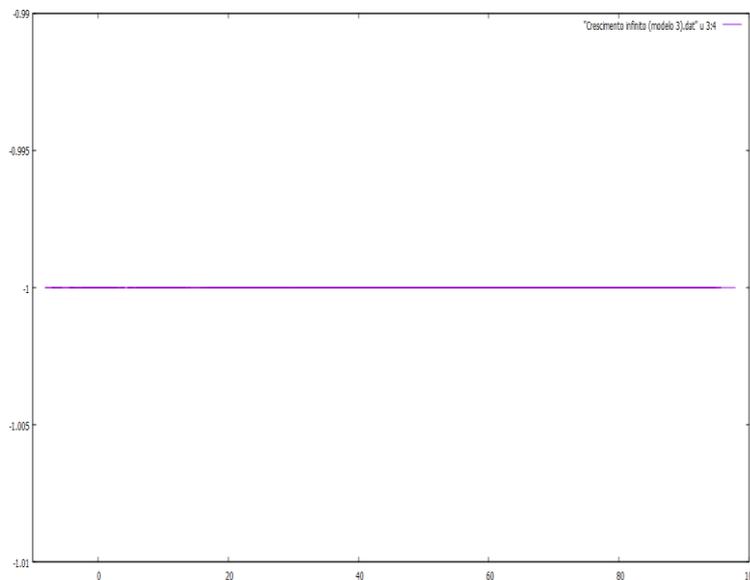


Figura 64 – Trajetória do centro de massa das células em estado “vivo” da estrutura Crescimento Infinito (modelo 3).

A figura acima ilustra o percurso assumido pelo centro de massa de acordo com as posições médias do sistema avaliado, conforme expresso na Eq. (28).

### 3.8.2 Número de Células

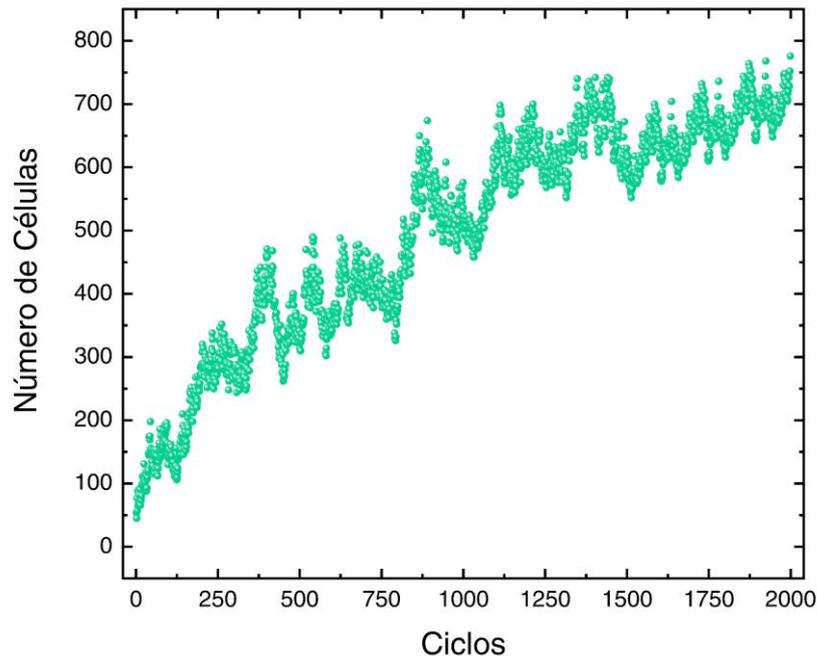


Figura 65 – Número de células em função do número de ciclos da estrutura Crescimento Infinito (modelo 3).

A Figura 63 representa o crescimento populacional do sistema descrito neste tópico. A princípio a população é limitada a um pequeno número de células. Com o passar das gerações este valor cresce consideravelmente e por se tratar de uma estrutura que não se estabiliza, a comunidade a ser gerada se desenvolve indefinidamente.

### 3.8.3 Assimetria e Curtose

A Figura 66 demonstra os padrões de assimetria e curtose para as variáveis de posição do modelo. É possível verificar que o parâmetro de assimetria em  $x$  apresenta inicialmente oscilação em torno de zero e posteriormente exibe uma tendência para valores negativos. Estas propriedades indicam que o regime pode ser classificado como uma assimetria negativa. Com respeito a  $y$  a assimetria exibe o mesmo comportamento ao longo de todos os ciclos experimentados pelo modelo, indicando tratar-se de uma distribuição simétrica.

O aspecto apresentado pela curtose em  $x$  inicia-se oscilando em torno da origem. Após cerca de 500 gerações os dados são deslocados para regiões positivas. Estas características descrevem uma distribuição leptocúrtica, as quais são caracterizadas por apresentarem concentrações de dados em menores regiões, conferindo menores desvios padrões e picos de distribuição mais elevados.

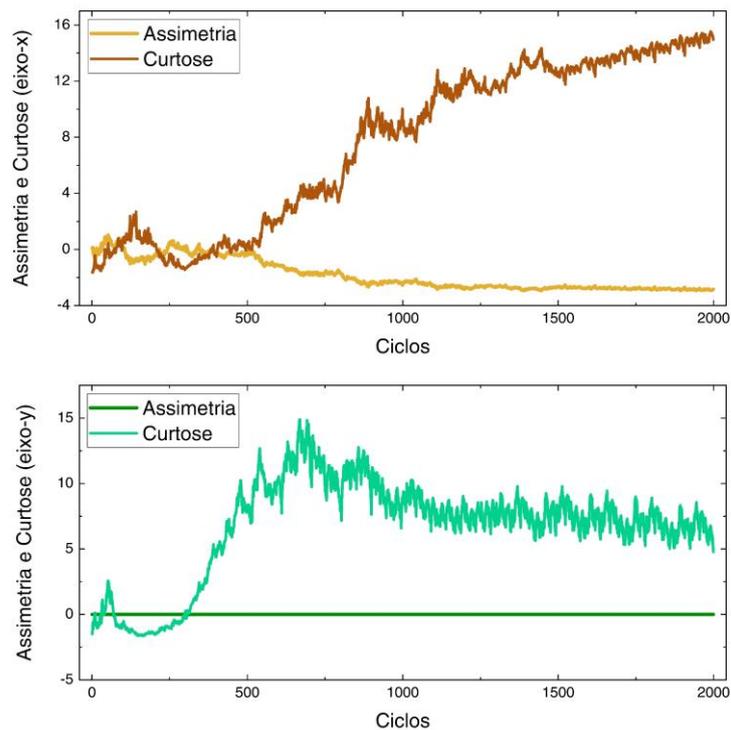


Figura 66 – Assimetria e curtose relacionados aos elementos em x e y do sistema Crescimento Infinito (modelo 3) (Fonte: autor).

Em relação a curtose em  $y$ , observa-se no princípio uma sequência de dados alternando entre zonas negativas e positivas do gráfico. Após 310 ciclos, observa-se o domínio das escalas positivas concernentes aos dados do sistema até o final das gerações. Estes atributos sugerem que se trata de uma curva leptocúrtica, assim como para  $x$ , onde o pico da curva situa-se em um intervalo limitado mais alto e aos dados são menos dispersos.

### 3.8.4 Aceleração

Diante das relações de aceleração demonstradas no gráfico acima, verifica-se que a aceleração não tem média nula, apresenta picos em regiões específicas, as quais evidenciam a existência de forças no sistema estudado.

Este modelo não apresenta aceleração no eixo  $y$ . Compreende-se que o aspecto nulo observado em  $y$  esteja relacionado ao seu desenvolvimento simétrico ao longo da simulação. No que se refere ao eixo  $x$ , identifica-se a presença de aceleração, e conseqüentemente, de parâmetros de força em determinadas localizações espaciais.

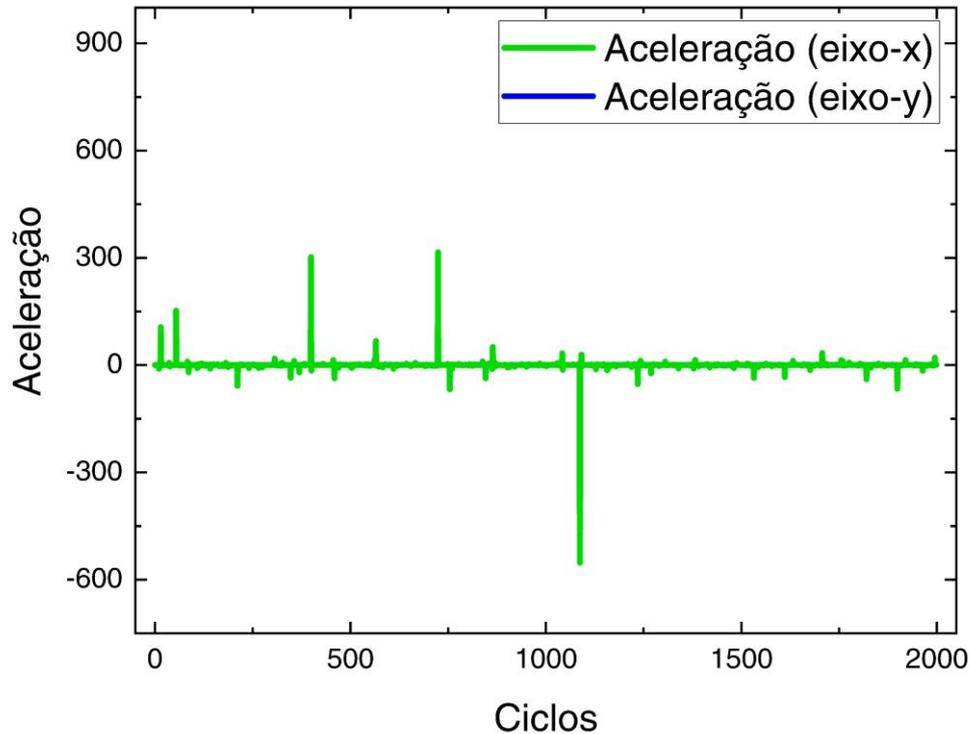


Figura 67 – Aceleração relativa aos componentes do sistema Crescimento Infinito (modelo 3) (Fonte: autor).

Ao realizar-se a comparação entre as regiões com maiores intensidades de picos com os dados de assimetria e curtose, constatou-se que o primeiro pico não produz modificações nestas grandezas. Quanto ao pico secundário, verifica-se uma ínfima mudança na assimetria, no sentido de decaimento. Enquanto para a curtose, observa-se que a curva se encontrava em um curso crescente, e prosseguiu desta maneira, apenas com uma mínima elevação na região de pico. Desta forma existe a possibilidade de uma pequena contribuição de força no arranjo destes elementos.

### 3.8.5 Deslocamento Quadrático Médio

A Figura 68 compreende o comportamento do deslocamento quadrático médio relativo a  $x$ ,  $y$  e  $xy$  em conjunto (Figura 68a), em escala linear, e separados (Figura 68b, Figura 68c, Figura 68d), em escala logarítmica. Através das curvas geradas, é possível notar que o modelo estudado parte de uma dinâmica não uniforme para atividades com determinado nível de organização mediante o avanço dos processos de iteração para  $x$  e  $xy$ . Com respeito a  $y$ , observa-se um padrão constante e invariante ao longo de toda a simulação.

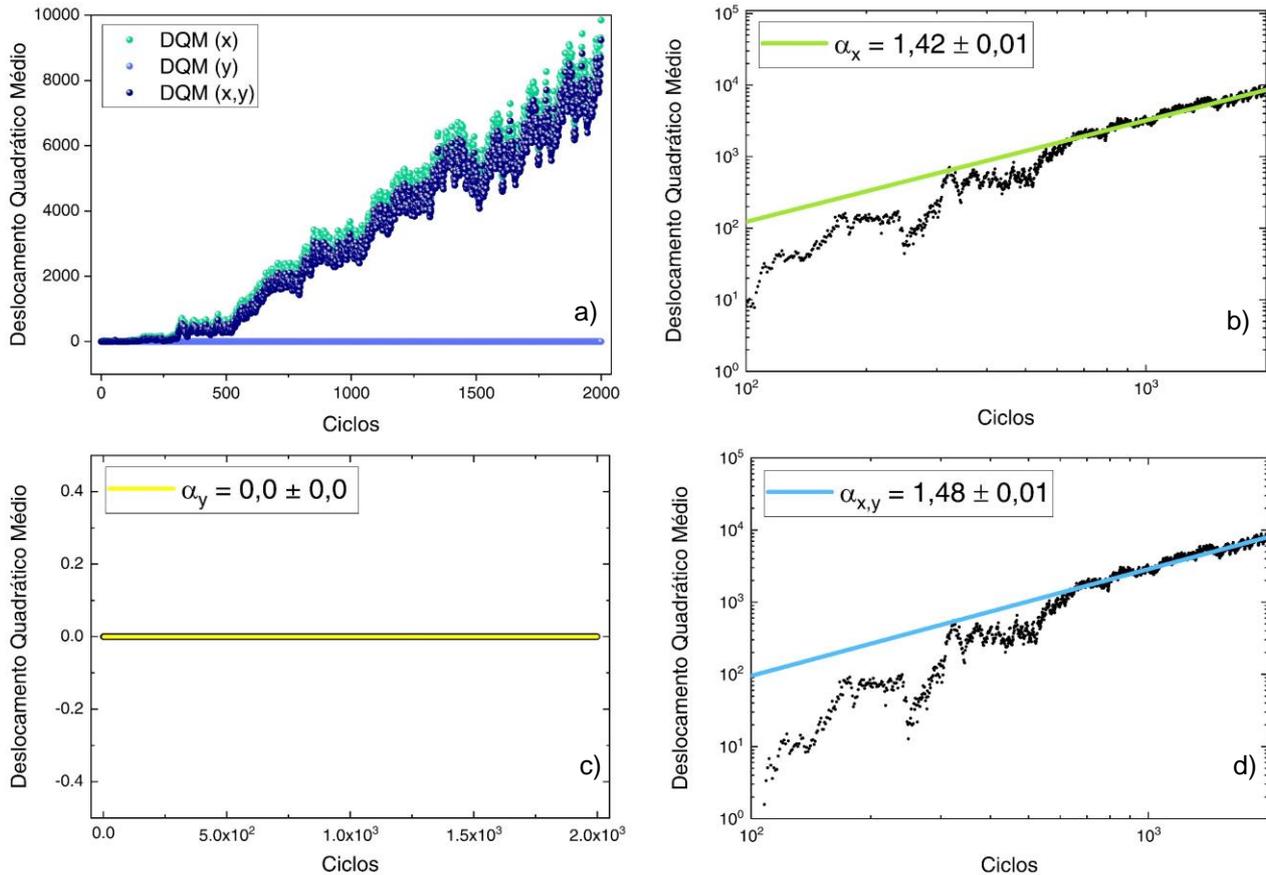


Figura 68 – Deslocamento quadrático médio do sistema Crescimento Infinito (modelo 3b). a) Comportamento em escala linear. b) Eixo- $x$  em escala logarítmica. c) Eixo- $y$  em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

Em conformidade com a equação (19), através das análises dos gráficos, obtêm-se os valores de  $\alpha_x = 1,42 \pm 0,01$ ,  $\alpha_y = 0,0 \pm 0,0$  e  $\alpha_{x,y} = 1,48 \pm 0,01$  para os expoentes de difusão. Estes resultados indicam que o eixo  $x$  e os eixos conjuntos  $xy$  apresentam processos superdifusivos ( $\alpha > 1$ ), enquanto o eixo  $y$  não exibe comportamento difusivo no contexto geral. Entende-se que isto ocorra em virtude da perfeita simetria de elementos exibida por este eixo, produzindo o efeito de interferência destrutiva na contabilização das contribuições das células que são formadas e dispersas nessa direção de propagação.

### 3.8.6 Correlação da Velocidade

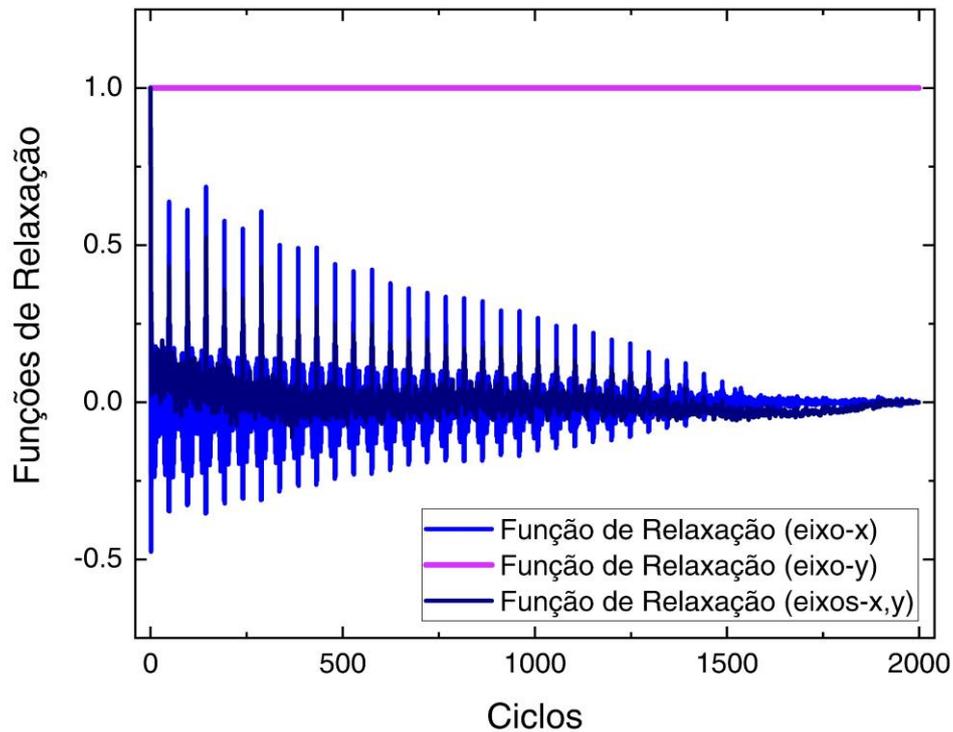


Figura 69 – Funções de relaxação associadas ao sistema Crescimento Infinito (modelo 3).

O gráfico acima composto por três distribuições foi desenvolvido mediante os dados de correlação da velocidade normalizados dos elementos coletadas na simulação, o qual, em conformidade com a equação (20), produz curvas que expressam as funções de relaxação.

A partir da análise da figura acima, identifica-se que os regimes singulares e unidos demonstram funções de correlação que não se desenvolvem conforme uma função exponencial negativa.

Este resultado sugere que se tratam de regimes de difusão anômala, tal como foi identificado através das determinações do expoente de difusão atrelado ao deslocamento quadrático médio das partículas do sistema.

### 3.9 DURO DE MATAR

#### 3.9.1 Definição

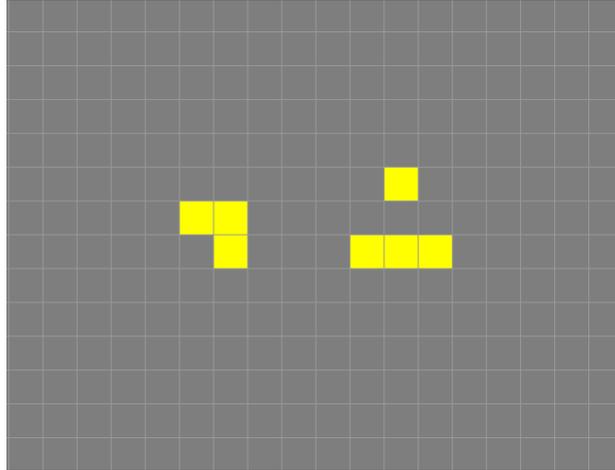


Figura 70 – Arranjo celular que forma o padrão Duro de Matar (Fonte: [76]).

O nome deste modelo remete-se a categoria de padrões de autômatos que apresentam a propriedade de extinguir-se completamente somente após um número considerável de gerações. Este modelo citado desaparece após 130 passos de tempo, e consiste em um número importante em face de ser constituído por apenas sete células vivas (simulação disponível em <<https://playgameoflife.com/lexicon/diehard>>).

Seu desenvolvimento caracteriza-se por processos discretos de curto alcance, especificados por interações entre unidades básicas estáticas e estruturas cíclicas que se modificam mutuamente gerando estruturas mais elaboradas que se deslocam suavemente pela rede, até restar apenas duas células vivas orientadas verticalmente e então desaparecer por completo, consoante as regras do jogo.

A Figura 71 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28).

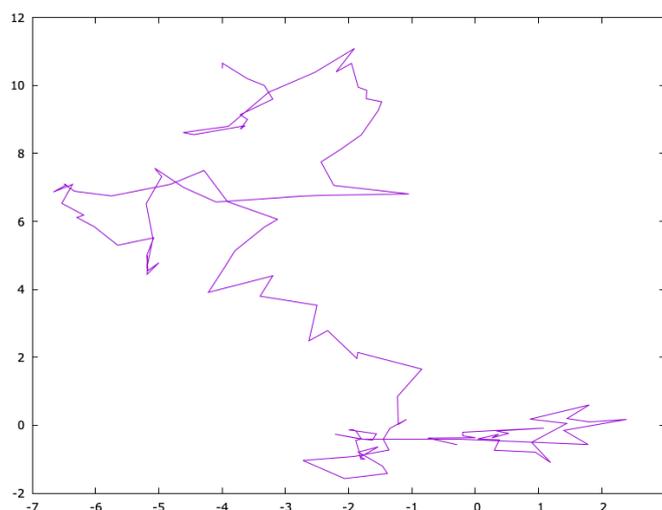


Figura 71 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura Duro de Matar.

### 3.9.2 Número de Células

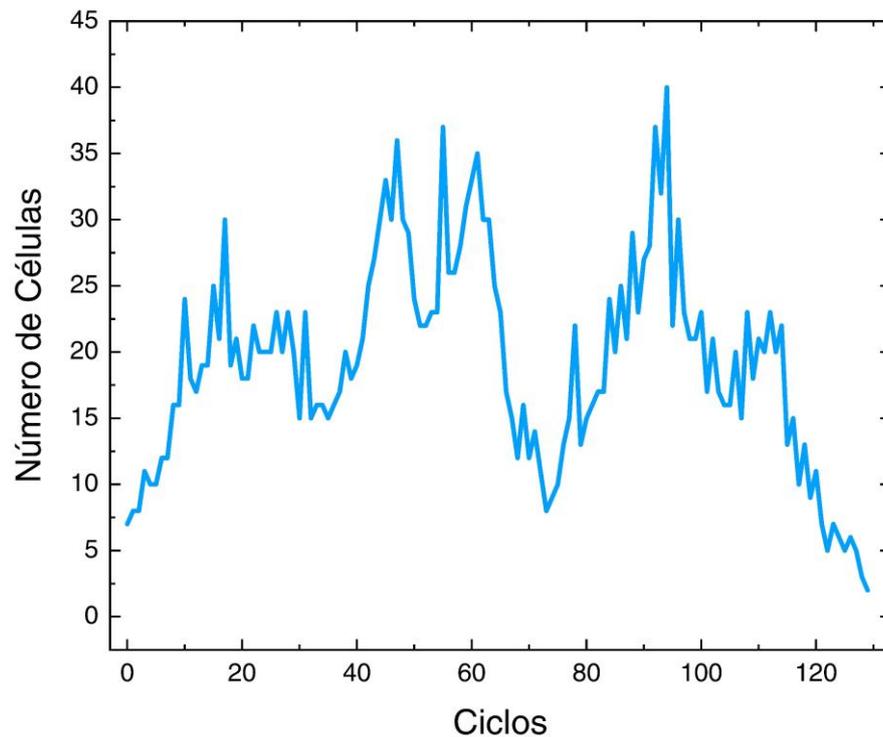


Figura 72 – Número de células decorrentes do processo de simulação do modelo Duro de Matar (Fonte: autor).

O modelo apresentado (veja Figura 72) indica um padrão composto por poucas células vivas, que ao interagirem e se propagaram minimamente pela rede, promovem o nascimento e a morte de células.

O estado final é alcançado quando não restam células vivas na grade. Em função disto a distribuição do número de células apresenta crescimentos e decrescimentos persistentes até a configuração alcançar o estado de equilíbrio estático.

### 3.9.3 Assimetria e Curtose

Diante das relações de assimetria para  $x$  e para  $y$  dispostas no gráfico acima, verifica-se que ambas as curvas apresentam o padrão de oscilar em torno zero, de modo que os dados se distribuem em zonas positivas e negativas ao longo do tempo, porém próximas a um perfil de simetria.

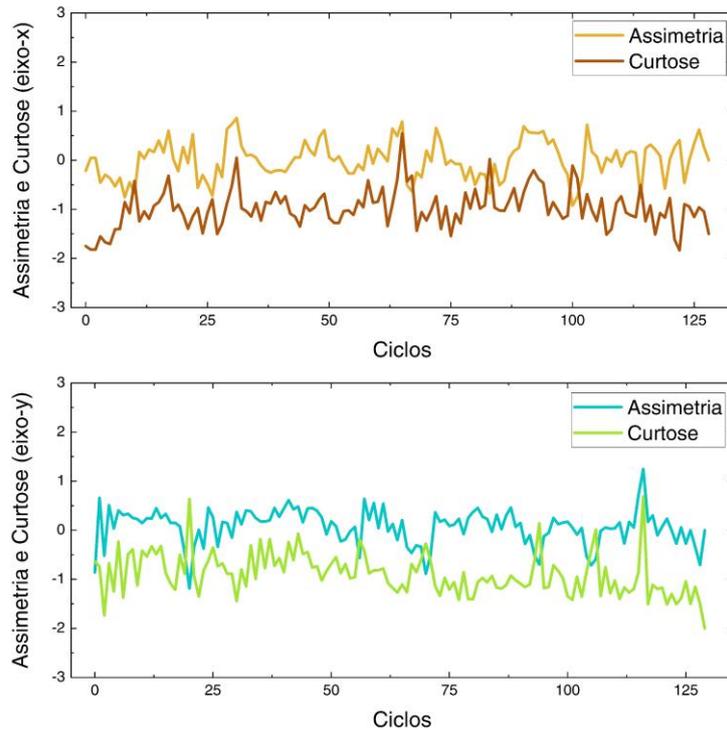


Figura 73 – Assimetria e curtose relativas as variáveis de posição da estrutura Duro de Matar.

O comportamento de ambas as curvas de curtose, para  $x$  e  $y$ , são semelhantes. Os dados encontram-se concentrados em regiões negativas da escala, apresentando poucos dados positivos. Isto caracteriza disposições achatadas, com picos baixos, categorizadas como platicúrticas.

#### 3.9.4 Aceleração

A Figura 74 revela que o sistema em questão apresenta uma aceleração média distinta de zero, manifestada por sequências de picos de força ao longo da simulação. Quanto ao impacto dessas forças sobre a distribuição de dados, uma análise detalhada foi conduzida, focando nas regiões de picos mais significativos.

Na primeira região de interesse relacionada às medidas no eixo  $x$ , observa-se uma diminuição sutil tanto na assimetria quanto na curtose. No segundo ponto de destaque, a assimetria se mantém estável, enquanto a curtose registra uma leve redução.

Em relação aos pontos de força mais proeminentes no eixo  $y$ , uma elevação discreta na assimetria e na curtose foi identificada na primeira localização. Contudo, na segunda localização, essa tendência não se mantém; em vez disso, a

assimetria e a curtose permanecem inalteradas, evidenciando uma invariância nos respectivos padrões gráficos.

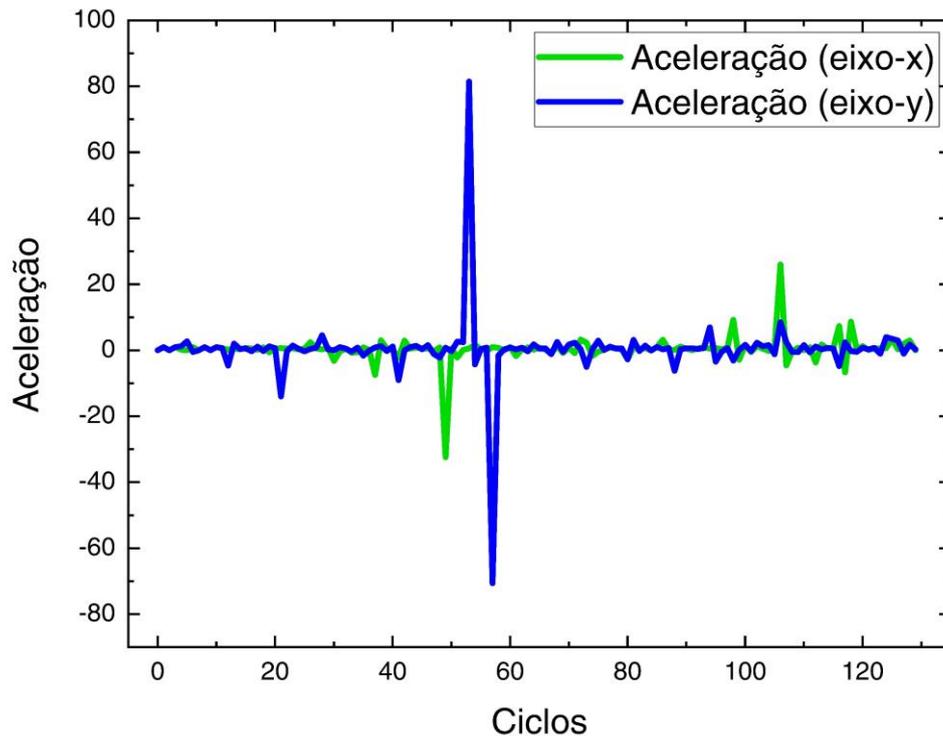


Figura 74 – Aceleração relativa às componentes  $x$  e  $y$  do sistema Duro de Matar.

### 3.9.5 Deslocamento Quadrático Médio

A Figura 75 exibe o comportamento geral dos dados para o deslocamento quadrático médio em  $x$ . Assim como nos casos precedentes, foi possível obter o expoente de difusão a partir da linearização do DQM. A partir da Eq. (16), obteve-se  $\alpha_x = 0,7 \pm 0,2$ . Este dado indica que este regime experimenta um fenômeno de subdifusão.

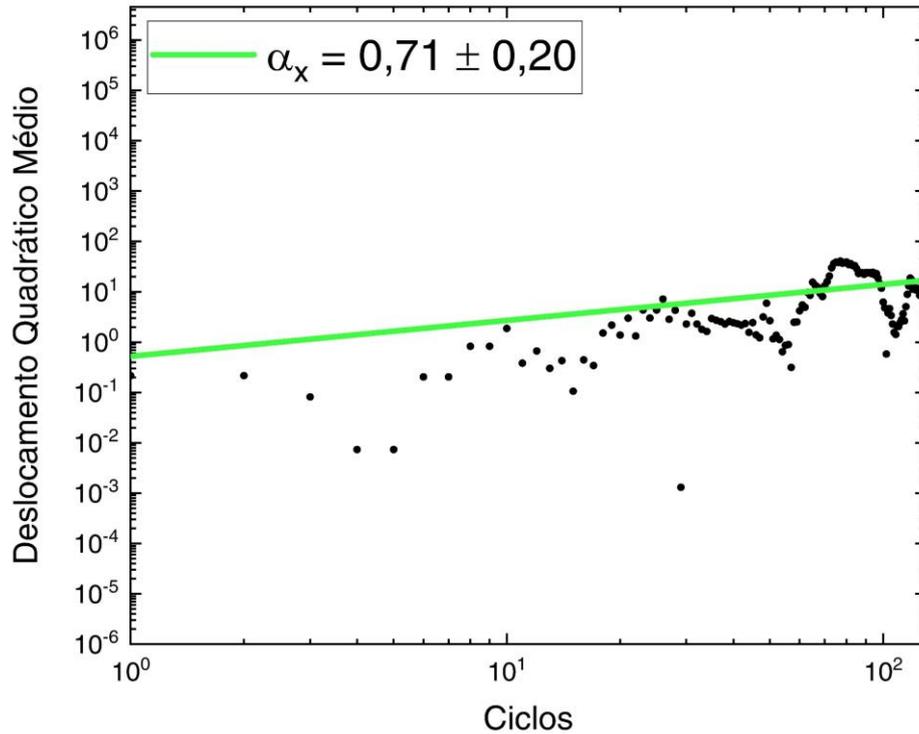


Figura 75 – Deslocamento Quadrático Médio para a variável  $x$  relativo à estrutura Duro de Matar.

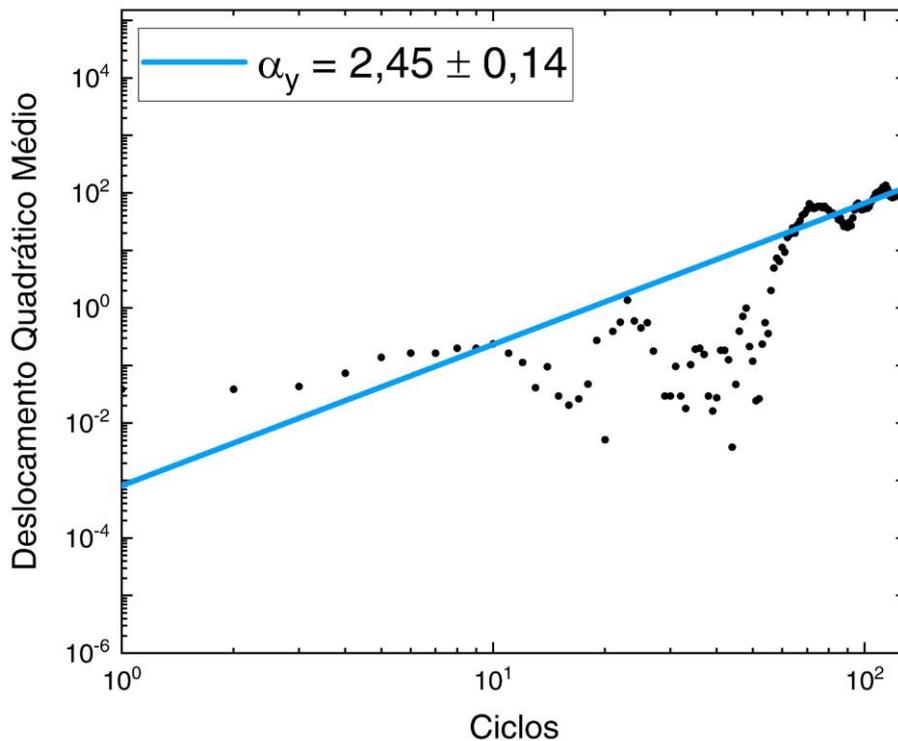


Figura 76 – Deslocamento Quadrático Médio relativo à variável  $y$  para o modelo Duro de Matar.

A Figura 76 demonstra o comportamento completo da simulação da estrutura Duro de Matar com relação a  $y$ , levando em conta o comportamento para os pontos finais da dinâmica de elementos. Observa-se que no princípio os dados apresentam

um caráter aleatório de dispersão. O expoente de difusão e respectiva incerteza foi de  $\alpha_y = 2,45 \pm 0,14$ , o que indica uma superdifusão hiper-balística.

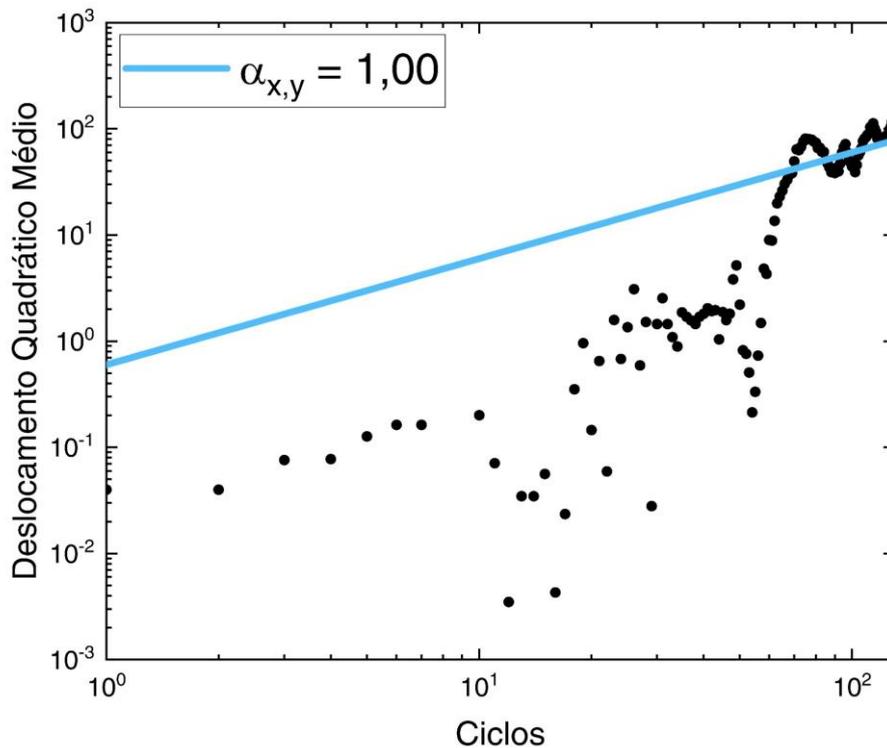


Figura 77 – Deslocamento Quadrático Médio no plano  $xy$  concernente a estrutura Duro de Matar.

O comportamento geral do sistema levando em conta a resultante do DQM no plano  $xy$  (Figura 77) assemelha-se a um comportamento típico de difusão normal.

### 3.9.6 Correlação da Velocidade

A Figura 78 foi concebido mediante os dados de correlação da velocidade normalizados, os quais proporcionaram a construção das funções de relaxação, de acordo com a Eq. (24)(17).

Como nos casos anteriores, verifica-se a validade do Teorema de Khinchin, visto que ambos apontam para atividades anômalas concernentes ao fenômeno de difusão investigado, que competem entre si, porém reproduzindo o comportamento global de uma difusão normal.

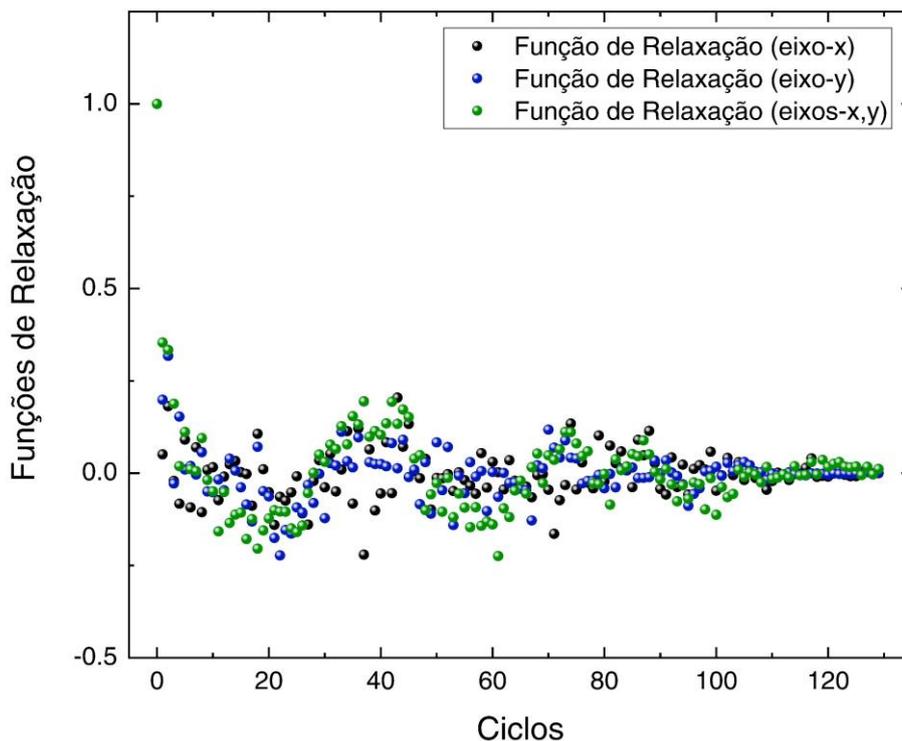


Figura 78 – Funções de Relaxação relacionadas a estrutura Duro de Matar.

### 3.10 E-HEPTOMINO

#### 3.10.1 Definição

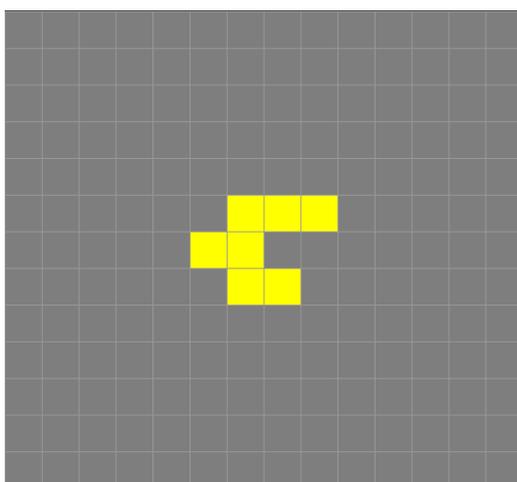


Figura 79 – Padrão que caracteriza a estrutura E-heptomino (Fonte: [76]).

Este modelo faz parte de um conjunto de estruturas classificadas como poliomínos, as quais são caracterizadas pela formação restrita a sete células vivas. Existem no total 108 formatos de arranjos assim classificados.

A estrutura de E-heptomino (Figura 79, simulação disponível em <https://playgameoflife.com/lexicon/E-heptomino>) inicia sua dinâmica de forma modesta, com interações particulares de estruturas estáveis, cíclicas e móveis, que passam a abranger um número progressivamente maior de células propagando-se pela rede.

Estabiliza-se na geração de número 343, deixando como população final objetos imóveis e periódicos, além de gerar um planador que se locomove consoante orientação subcolateral à nordeste da rede.

A figura abaixo ilustra o curso do centro de massa relativo as posições médias dos elementos da estrutura, em conformidade com a Eq. (28).

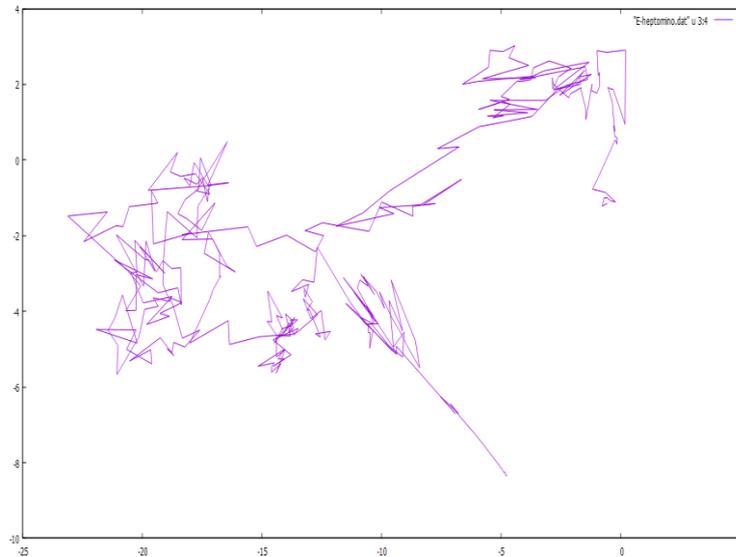


Figura 80 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" do modelo E-heptomino.

### 3.10.2 Número de Células

O processo de desenvolvimento da população gerada pela estrutura E-heptomino é definido por interações locais que promovem deslocamentos sutis dos elementos pela rede.

Observa-se nesta dinâmica a ocorrência de nascimentos e mortes, até a etapa de estabilização, quando o modelo conclui suas gerações deixando alguns objetos estáticos, um cíclico e um móvel na rede celular (veja Figura 81).

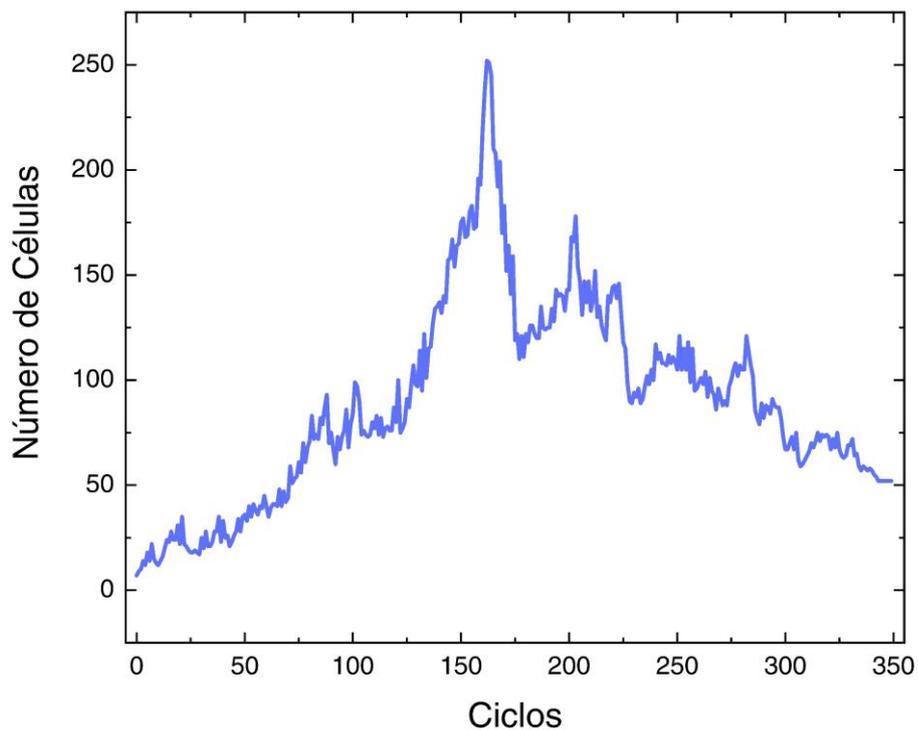


Figura 81 – Número de células variável consoante o processo de simulação da estrutura E-heptomino.

### 3.10.3 Assimetria e Curtose

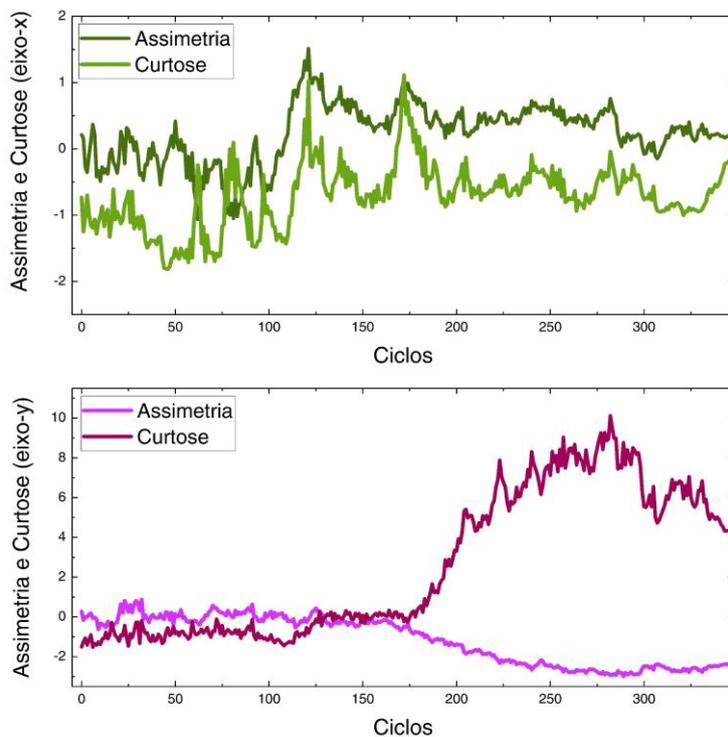


Figura 82 – Assimetria e curtose pertinentes às variáveis de posição do modelo E-heptomino.

A curva de assimetria relativa a  $x$  demonstra um comportamento negativo até cerca de 107 iterações. A partir deste número de gerações começa a evidenciar inclinações para valores positivos, definindo o aspecto geral desta medida como positivo, significando que se trata de uma distribuição com assimetria positiva.

No que concerne a assimetria em  $y$ , a distribuição inicia-se oscilando em relação a origem, e após cerca de 139 gerações concentra-se em regiões negativas. Nestes termos, a assimetria é classificada como negativa ou à esquerda.

Os dados de curtose para  $x$  acumulam-se, em sua maioria, em regiões negativas da escala. Enquanto para  $y$ , os valores iniciam-se negativos, porém, a partir da geração de número 175 passam a se agrupar em áreas positivas do gráfico. Estas propriedades indicam que as curtoses de  $x$  e  $y$  podem ser categorizadas como platicúrtica e leptocúrtica, respectivamente.

#### 3.10.4 Aceleração

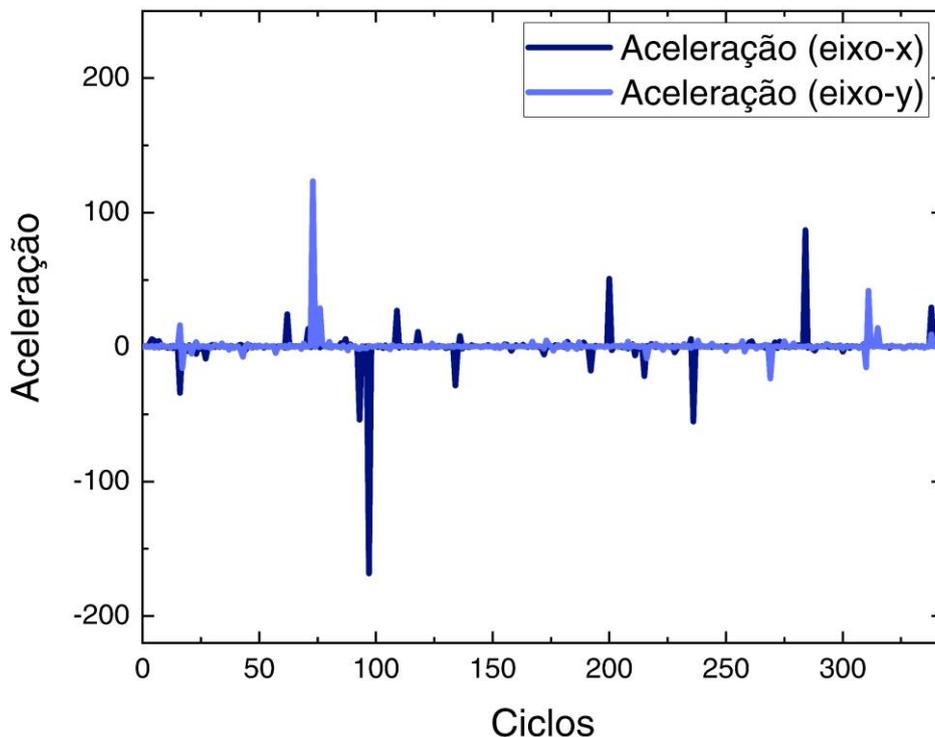


Figura 83 – Componentes da aceleração da estrutura E-heptomino.

Identifica-se na Figura 83 picos de força em algumas regiões do espaço, relacionados ao padrão de autômato denominado E-heptomino. Verifica-se que tanto a

intensidade quanto as localizações das forças encontradas não compreendem um padrão, apresentando média não nula.

Constatou-se a existência de interferência da força presente no sistema sobre elementos que caracterizam os padrões de distribuições gerados nos dois picos mais intensos.

Com respeito a  $x$ , no primeiro par ordenado de força relativo a (96.48, -167.76) pode-se observar uma elevação no nível da assimetria e um decaimento na curtose. Em relação ao segundo pico a assimetria e curtose decaem.

No que tange a variável  $y$ , os primeiros dois picos mais elevados dispostos em (72.71, 124.32) e (310.42, 43.45) não promovem mudanças na assimetria e na curtose.

### 3.10.5 Deslocamento Quadrático Médio

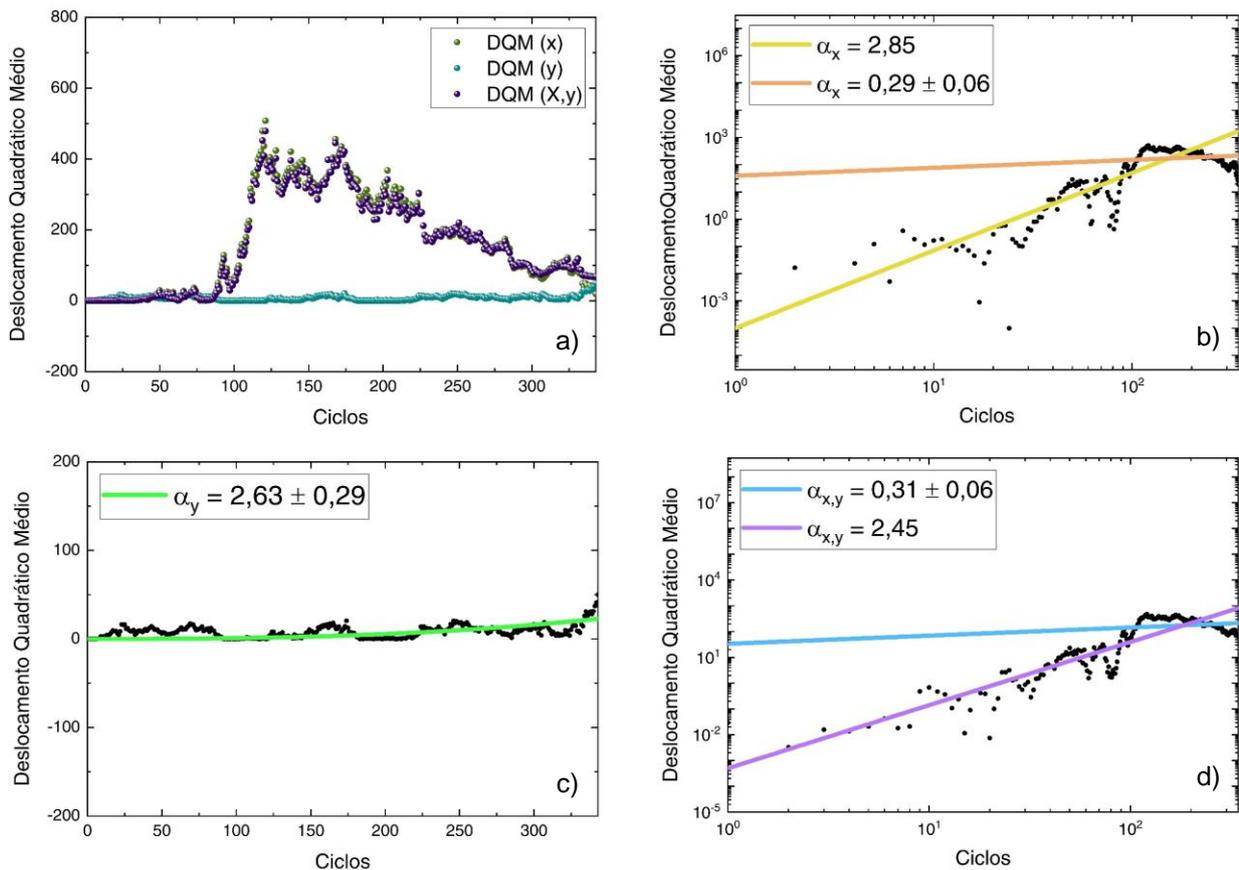


Figura 84 – Deslocamento quadrático médio do sistema E-heptomino. a) Comportamento em escala linear. b) Eixo- $x$  em escala logarítmica. c) Eixo- $y$  em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

A Figura 84a compreende a descrição geral e os aspectos singulares de cada eixo individual e em conjunto. Nota-se que há uma dispersão fortemente arbitrária no

princípio, e com o passar das gerações o objeto começa a oferecer indícios de determinado nível de organização.

Com o auxílio da Eq. (16) e de funções de ajuste para os dados experimentais foi possível a determinação dos expoentes de difusão.

Em relação à variável  $x$ , percebe-se dois padrões distintos quanto ao fluxo de matéria. A dinâmica inicia-se com pontos convergindo para uma constante no valor de 2,85 que posteriormente passa a assumir o valor de  $0,29 \pm 0,06$ . Em face destas medidas compreende-se que neste eixo o fenômeno começou em um regime de superdifusão hiper-balística e se estabiliza em uma subdifusão.

Com respeito a variável  $y$ , verifica-se apenas uma fase caracterizada pela quantidade de  $2,63 \pm 0,29$ , o que implica que se trata de um processo de superdifusão hiper-balística.

Finalmente, de forma semelhante as características demonstradas pela difusão em  $x$ , este fenômeno relativo a  $xy$  evidenciou dois momentos distintos. A princípio o regime dominante apresentava uma constante de difusão no valor de 2,45 e posteriormente caiu para  $0,31 \pm 0,06$ . Neste aspecto este regime iniciou-se com eventos superdifusivos hiper-balístico e prosseguiu para uma subdifusão.

### 3.10.6 Correlação da Velocidade

Os pontos descritos pela Figura 85 expressam a função relaxação de  $x$ ,  $y$  e resultante no plano  $xy$ , concebida mediante os valores coletados para a correlação da velocidade ao longo da simulação.

Avaliando a organização dos, não é possível identificar padrões correspondentes aos exibidos por funções exponenciais decrescentes, as quais caracterizam fenômenos de difusão normal.

Diante deste fato, pode-se confirmar que se tratam de regimes anômalos, tal qual foi demonstrado por intermédio da análise realizada consoante o deslocamento quadrático médio em cada eixo, assim como a validade do Teorema de Khinchin.

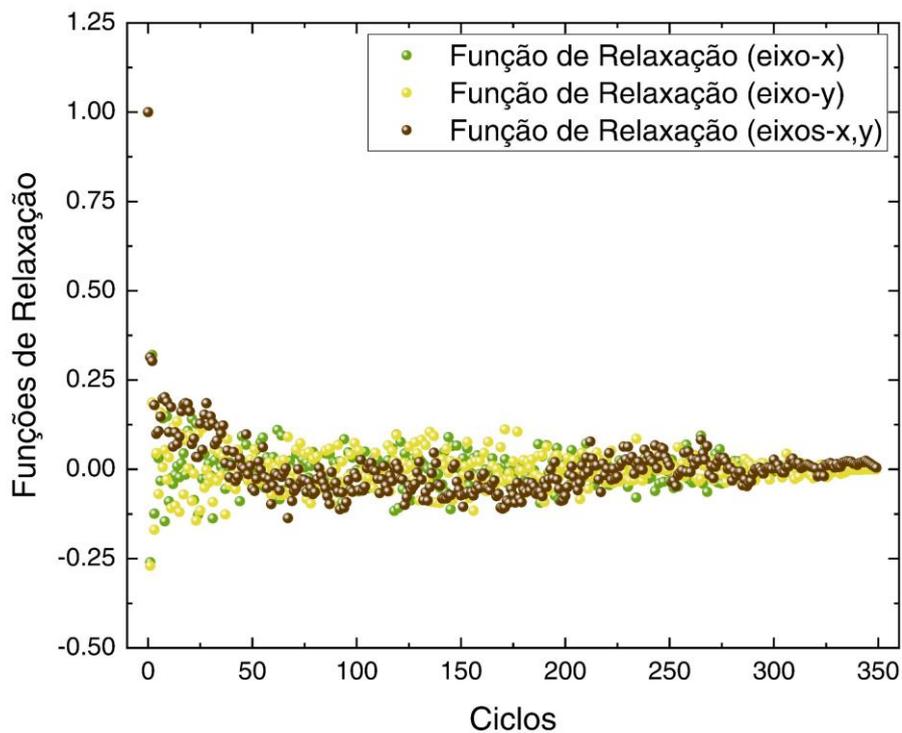


Figura 85 – Funções de Relaxação pertinentes ao modelo E-heptomino.

### 3.11 FUSÍVEL

#### 3.11.1 Definição

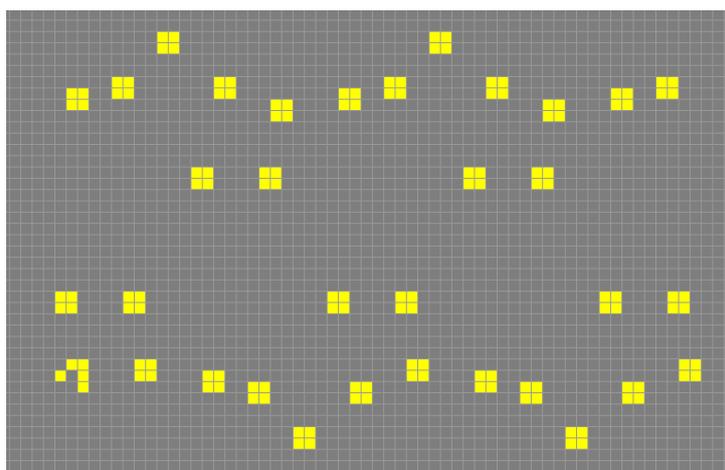


Figura 86 – Explicitação da configuração de células que formam o Fusível (Fonte: [76]).

O Fusível (simulação disponível em <https://playgameoflife.com/lexicon/fuse>) pertence a uma classe de ACs que exibem um

comportamento semelhante a chama produzida por combustão propagando-se pelo espaço até seu desaparecimento.

Em especial, o fusível selecionado demonstra um processo desacelerado de propagação, exibindo uma velocidade de  $c^2/10$ . Há estruturas mais rápidas e outras mais lentas, a depender do arranjo e distanciamento das células que constituem o corpo principal da estrutura.

Fundamentalmente sua dinâmica consiste no deslocamento de um planador alternado por uma nave espacial entre blocos de células 2x2 no sentido vertical, percorrendo desde o início até o final da estrutura celular que forma o Fusível. Na conclusão de sua simulação, este modelo produz um planador que segue indefinidamente sua trajetória diagonal através da grade uniforme.

Especificamente este sistema é estruturado para efetuar a morte de 24 células à direita consoante 240 etapas de tempo.

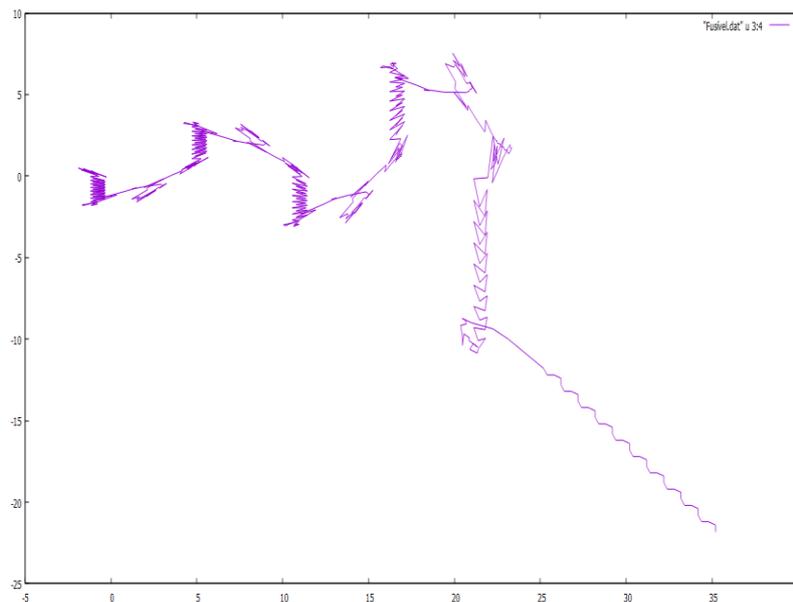


Figura 87 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" do modelo Fusível.

A figura acima ilustra o comportamento do centro de massa fundamentado na Eq. (28), de acordo com os dados de posições médias dos componentes do modelo.

### 3.11.2 Número de Células

<sup>2</sup> A grandeza "c" denota no contexto dos autômatos celulares de Conway, a velocidade máxima que um elemento ou conjunto de componentes do sistema pode assumir, correspondendo ao passo de uma célula por ciclo.

O gráfico da Figura 88 demonstra as variações na população da estrutura denominada Fusível. O padrão gerado se dá em virtude do aspecto apresentado pela sua configuração inicial.

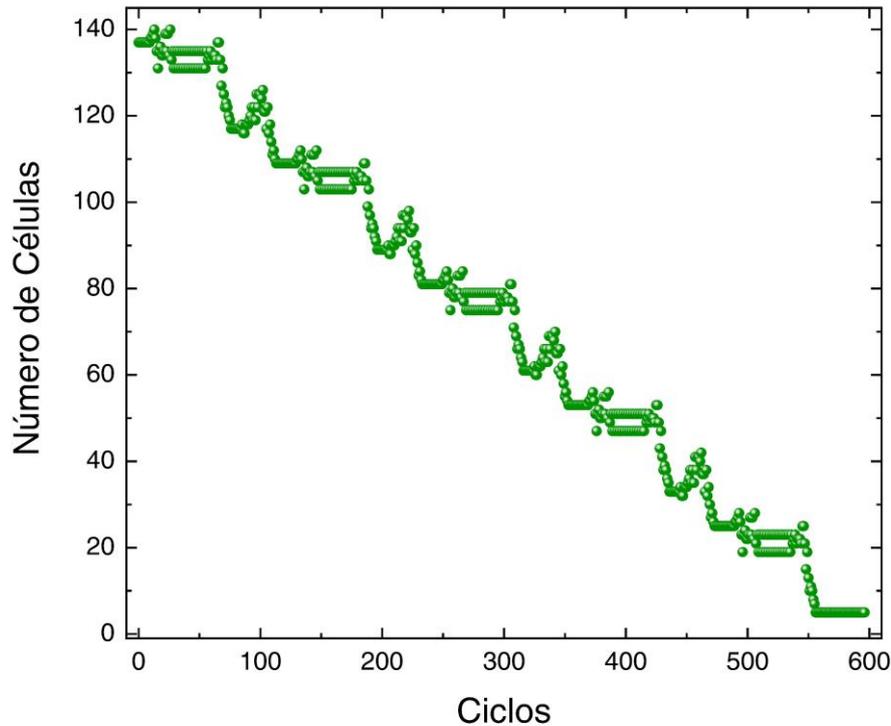


Figura 88 – Número de células relacionados ao autômato Fusível (Fonte: autor).

O comportamento incipiente é caracterizado por um conjunto de objetos que interagem progressivamente entre si, de forma a se auto destruir, restando ao final apenas um planador que prossegue em seu curvo diagonal pelo espaço celular.

### 3.11.3 Assimetria e Curtose

A Figura 89 reúne os dados de assimetria e curtose do modelo Fusível. Ambas as curvas de assimetria oscilam em relação a origem ao longo da execução de todo processo computacional. No contexto geral, a grandeza de assimetria em  $x$  tende a um valor nulo, o que implica que esta distribuição se aproxima de uma simetria normal. Com respeito a  $y$ , em virtude do predomínio de números negativos, sua distribuição pode ser classificada como uma assimetria negativa.

Em relação a curtose, ambas as curvas relativas as variáveis de posição  $x$  e  $y$  apresentam dados que se concentram em regiões negativas. Neste sentido o

achatamento destas distribuições tende a ser superior, refletindo em maiores níveis de dispersão dos dados coletados. Estas propriedades caracterizam distribuições platicúrticas.

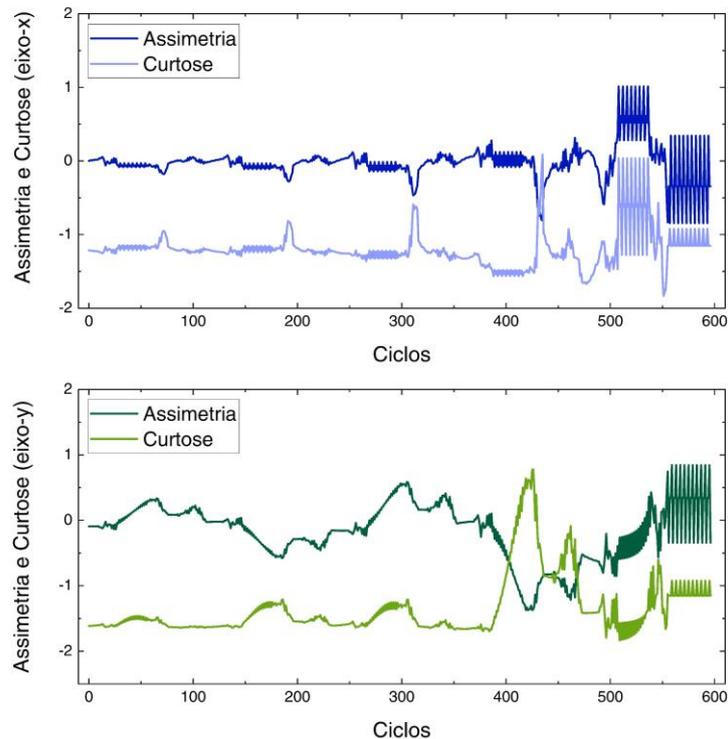


Figura 89 – Assimetria e curtose referentes as distribuições em x e em y para o sistema Fusível (Fonte: autor).

#### 3.11.4 Aceleração

Com base na Figura 90, é possível perceber que a aceleração deste conjunto é diferente de zero, indicando a presença de forças no sistema. As regiões de pico de força variam em escala e intensidade ao longo da simulação.

Notoriamente esta estrutura gera um padrão de pontos de força extremamente elevados. As duas primeiras coordenadas relativas à x onde são observadas essas grandezas localizam-se em (3.97,  $2.34 \times 10^{14}$ ) e (199.66,  $1.05 \times 10^{14}$ ) e para y em (117.47,  $2.09 \times 10^{13}$ ) e (317.91,  $2.09 \times 10^{13}$ ).

Contudo, em detrimento dos excepcionais alcances dessas medidas, não se identificam mudanças na assimetria e na curtose concernentes as variáveis de posição da estrutura avaliada.

Entende-se que a não interferência das forças sobre os componentes do sistema se dê em virtude da estrutura compactada deste modelo. Os elementos que o compõem são ajustados de tal forma a seguirem percursos bem definidos em direção a

outros objetos promovendo suas rápidas aniquilações, restando apenas um planador ao final da simulação.

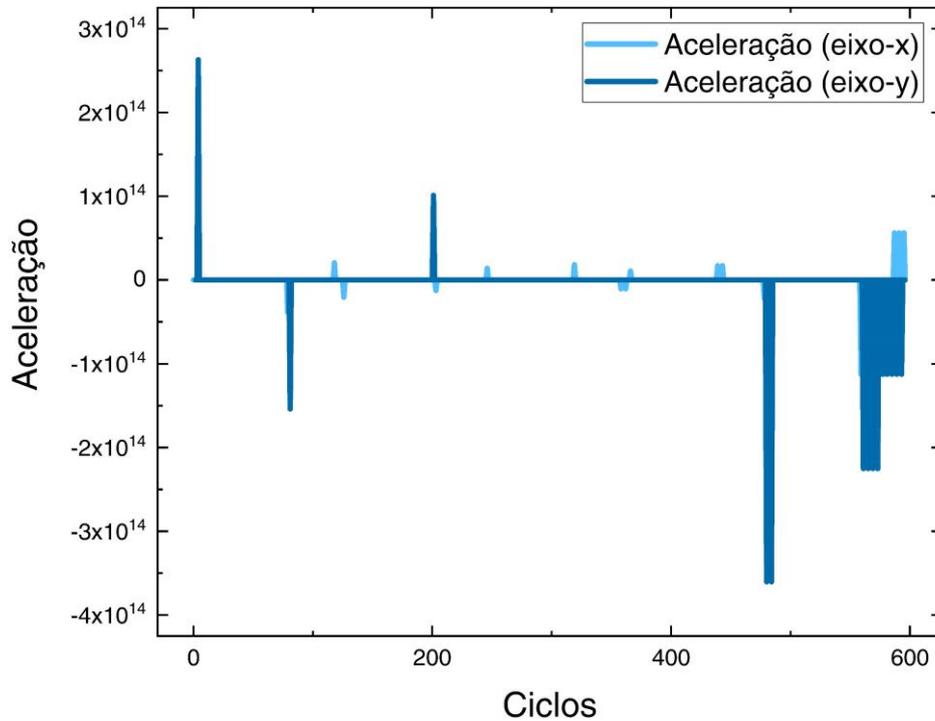


Figura 90 – Descrição gráfica das mudanças na aceleração dos componentes da estrutura Fusível (Fonte: autor).

Considerando que as interações entre as células são destrutivas, não se torna possível constatar a existência de influência dos picos de força, pois, consoante o desenvolvimento do modelo, estes elementos deixam de existir.

### 3.11.5 Deslocamento Quadrático Médio

A Figura 91 compreende as curvas de deslocamento quadrático médio para os eixos  $x$ ,  $y$  e resultante  $xy$  de forma conjunta (Figura 91a), em escala linear e individual (Figura 91b, Figura 91c e Figura 91d), em escalar logarítmica. Observam-se comportamentos arbitrários nas três distribuições no princípio da simulação. Após 200 gerações os dados de cada variável assumem propriedades próprias, distanciam-se umas das outras.

Diante destes arranjos e em conformidade com a Eq. (21), obteve-se para os expoentes de difusão associados à variável  $x$ ,  $y$  e resultante  $xy$  os valores de  $\alpha_x = 2,55 \pm 0,05$ ,  $\alpha_y = 2,00$  e  $\alpha_{x,y} = 2,62$ , respectivamente. Indicando que o sistema é caracterizado majoritariamente por regimes de difusão anômalos hiper-balísticos.

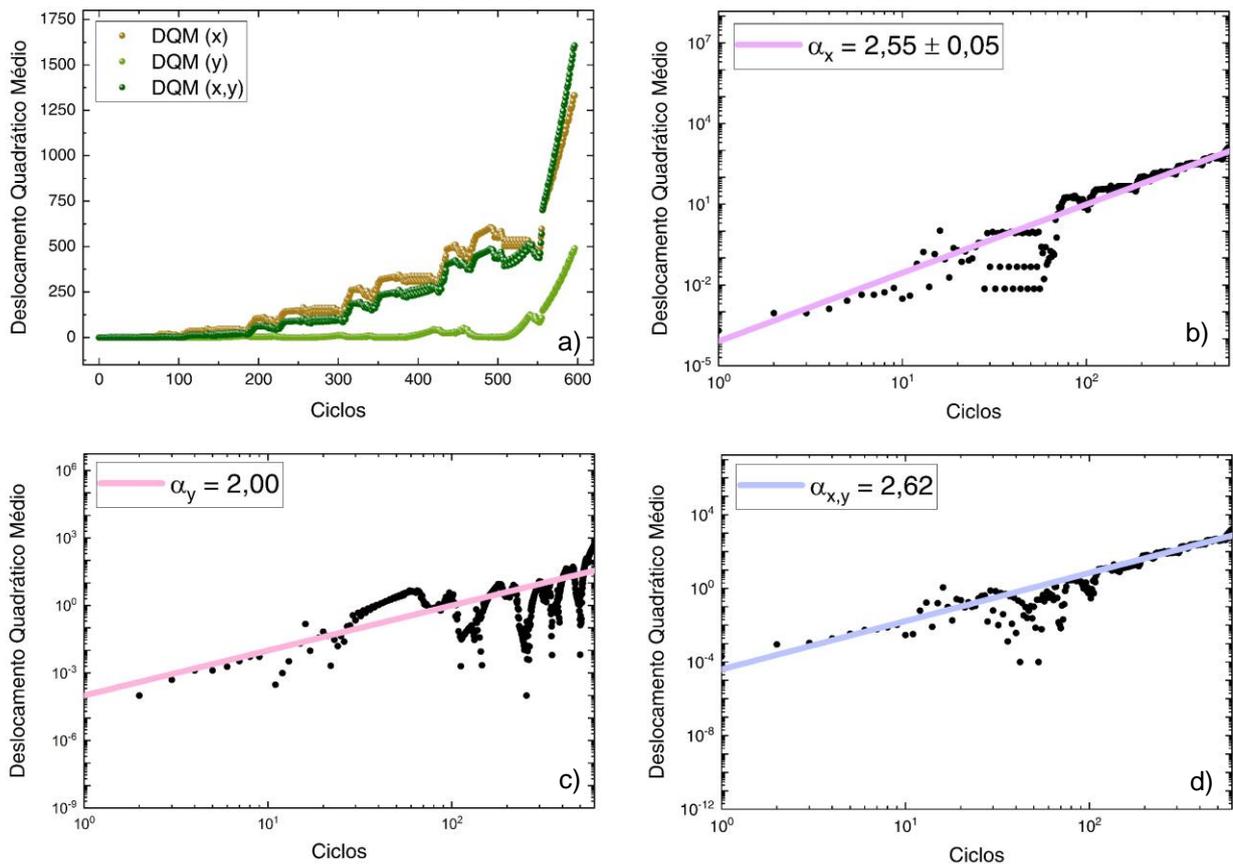


Figura 91 – Deslocamento quadrático médio do sistema Fusível. a) Comportamento em escala linear. b) Eixo-x em escala logarítmica. c) Eixo-y em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

### 3.11.6 Correlação da Velocidade

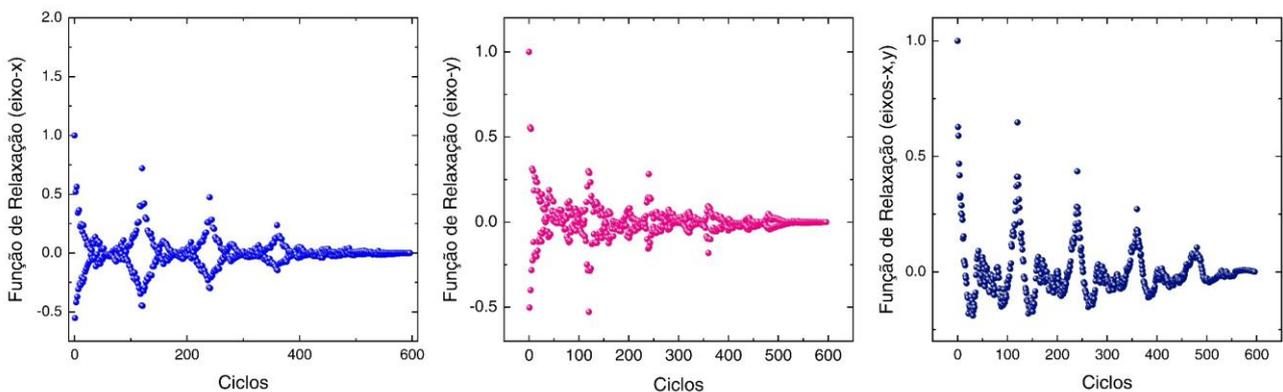


Figura 92 – Funções de Relaxação associadas a estrutura Fusível.

A Figura 92 compreende as funções de relaxação do sistema, as quais, em conformidade com a Eq. (24), são formadas a partir das medidas de correlação de velocidade normalizadas para as variáveis de posição  $x$ ,  $y$  e resultante  $xy$ .

Observa-se nas três distribuições um comportamento oscilatório e flutuante dos dados, os quais diferem dos aspectos esperados por regimes difusivos normais, que decrescem segundo funções exponenciais.

Estes resultados indicam regimes de difusão anômalos. Nos estágios finais da simulação as funções de relaxação convergem para valores nulos. Neste sentido, verifica-se a satisfação do Teorema de Khinchin, mesmo diante de expoentes de difusão superiores a 2.

### 3.12 FX119

#### 3.12.1 Definição

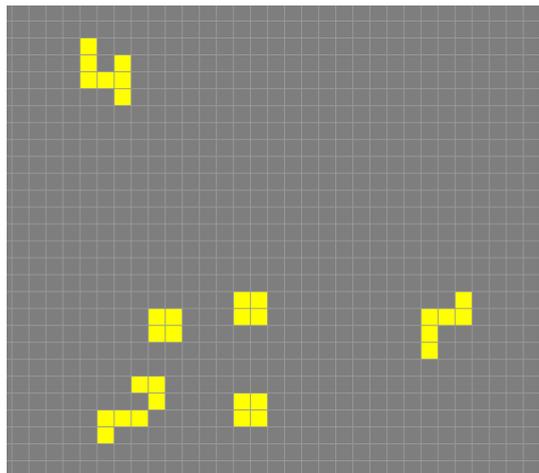


Figura 93 – Estrutura que caracteriza o sistema Fx119 (Fonte: [76]).

A Figura 93 demonstra a configuração de células que forma a estrutura denominada Fx119 (simulação disponível em <<https://playgameoflife.com/lexicon/Fx119>>). Trata-se de um condúite elementar, assim classificado por apresentar em sua composição estruturas mortas e periódicas que em sua interação deslocam um arranjo de células de lugar, podendo inclusive modificar sua configuração inicial.

Demonstra a propriedade de não gerar estruturas invariantes na rede enquanto desenvolve sua dinâmica espaço-temporal. Sua formação pode produzir algumas naves espaciais, como por exemplo, os planadores. Faz parte de um grupo de dezesseis estruturas concebidas originalmente por Dave Buckingham no século XX.

Apresenta um comportamento suave, com interações celulares que geram deslocamentos lentos de curto alcance. A população final deixada por esta estrutura é caracterizada pela presença de cinco blocos 2x2, duas configurações estáveis, e quatro planadores que se locomovem pela rede, três à sudoeste e um à nor-noroeste.

O percurso delineado pelo centro de massa do modelo (Figura 95) foi construído consoante as posições médias, em conformidade com a Eq. (28).

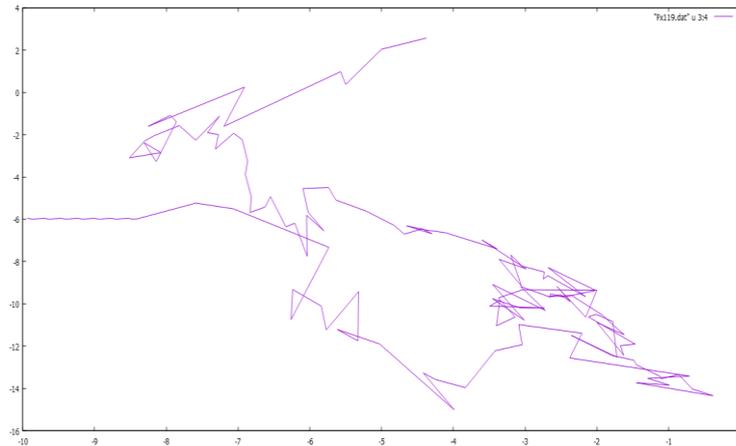


Figura 94 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura Fx119.

### 3.12.2 Número de Células

A dinâmica entre as células pertencentes a estrutura Fx119 apresenta um caráter progressivo e intensivo que se estabiliza ao final de sua implementação computacional (veja Figura 95). As atividades nesse modelo iniciam-se restritas apenas aos elementos situados na região superior do sistema. Seguidamente o efeito das interações desses componentes se propagam para demais localidades produzindo a morte e o nascimento de células, assim como objetos estáticos e móveis, os quais caracterizam o aspecto da população final deixada pelo modelo.

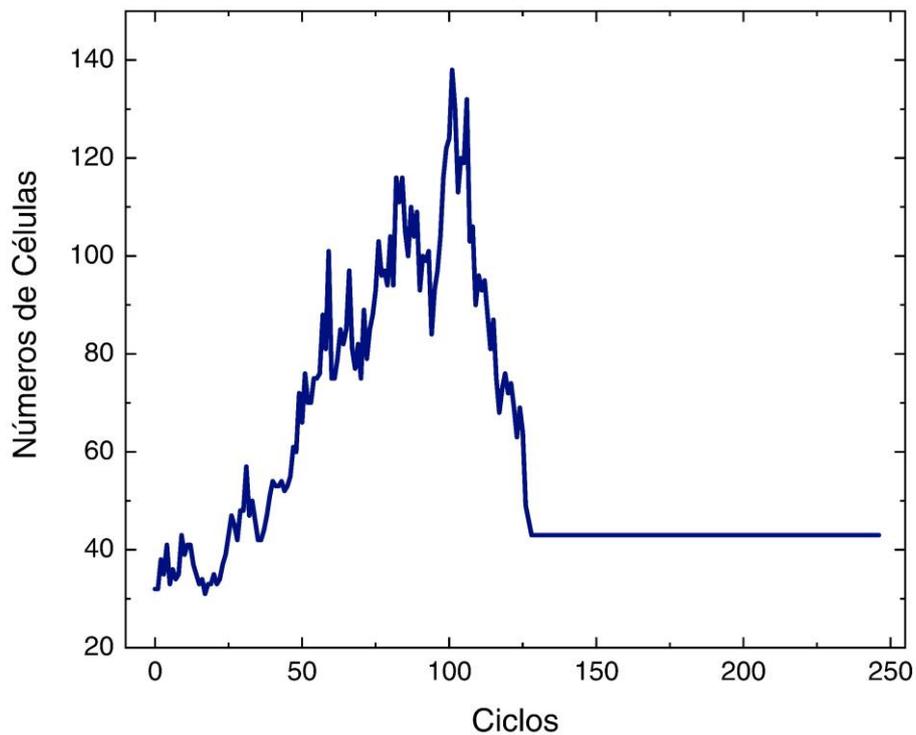


Figura 95 – Número de células variáveis correspondentes ao modelo Fx119 (Fonte: autor).

### 3.12.3 Assimetria e Curtose

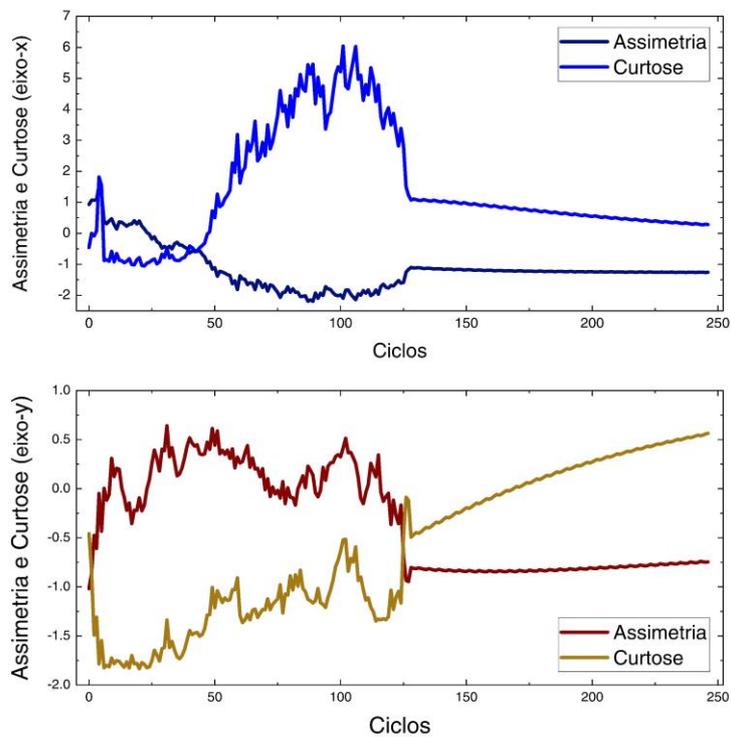


Figura 96 – Assimetria e Curtose pertinentes às variáveis de posição do modelo Fx119.

As curvas de assimetria apresentadas na Figura 96 pertinentes as variáveis de posição  $x$  e  $y$  evidenciam um comportamento predominantemente negativo. Neste sentido, as assimetrias avaliadas para este modelo podem ser categorizadas como assimétricas à esquerda, o que indica que seus valores se concentram à direita, gerando uma cauda no sentido oposto.

A curtose associada ao eixo  $x$  no princípio da simulação assume valores negativos. Após cerca de 50 gerações passa a inclinar-se para as zonas positivas do gráfico até a estabilização da estrutura. A maior parte dos valores apresentados por esta grandeza são positivos. Assim sendo, a curtose relativa a  $x$  classifica-se como leptocúrtica, nas quais são encontrados picos mais elevados e dados menos dispersos.

Os dados de curtose associados a variável  $y$  no início concentram-se em regiões negativas, porém, após 170 gerações migram para as zonas positivas da escala. Verifica-se para esta grandeza que os números negativos são dominantes. Neste sentido, compreende-se a curtose relativa a  $y$  classifica-se como platicúrtica, nas quais são observadas dispersões mais abrangentes de dados, promovendo picos de distribuição inferiores.

#### 3.12.4 Aceleração

O gráfico ilustrado na Figura 97 representa a grandeza física da aceleração associada as variáveis de posição  $x$  e  $y$  pertencentes ao padrão Fx119. Verifica-se que esta medida não é nula para este sistema, através da localização de regiões de força.

A fim de verificar a influência desses agentes de mudanças de estado sobre as partículas presentes no ambiente de análise, contrastou-se as coordenadas dos dois picos de maior intensidade com as respectivas coordenadas relacionadas as medidas de curtose e assimetria das variáveis de espaço.

Verificou-se que dos picos em  $x$  localizados em (45.68, -33.04) e (113.04, 67.85), apenas no segundo foi constatada uma sutil elevação na assimetria e na curtose. Com respeito a  $y$ , dentre os pontos de força localizados nos pares ordenados (38.06, -8.69) e (96.96, -58.09), apenas na segunda localização foi possível testificar um suave crescimento na distribuição dos dados de assimetria.

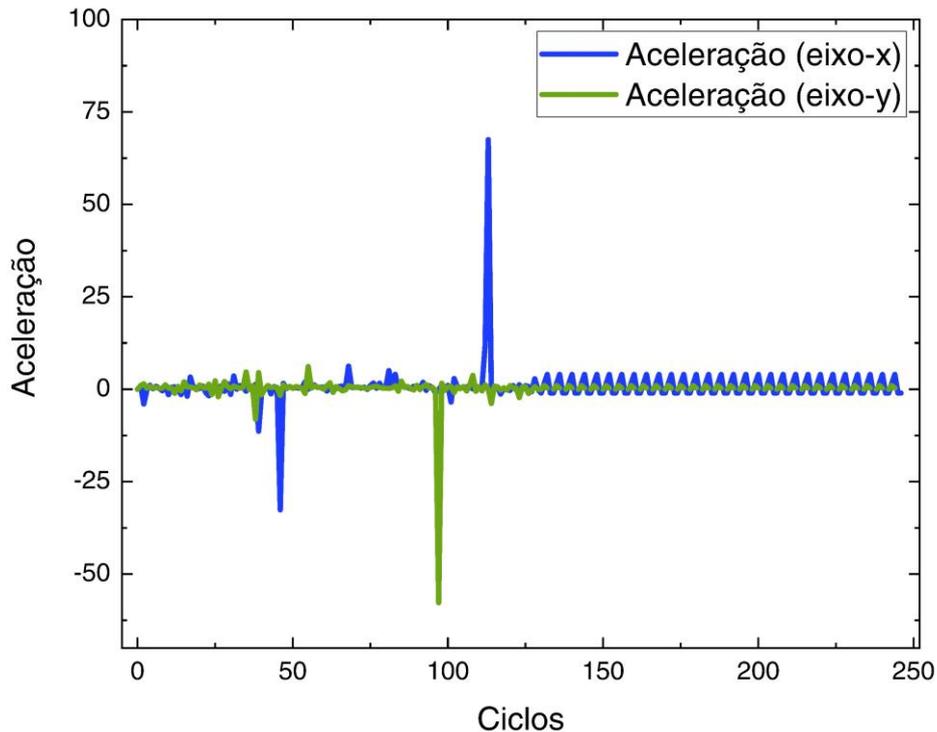


Figura 97 – Aceleração das partículas pertencentes ao sistema intitulado Fx119 (Fonte: autor).

### 3.12.5 Deslocamento Quadrático Médio

Através da Figura 98a, é possível observar o comportamento geral dos dados de deslocamento quadrático médio associados as variáveis de posição  $x$ ,  $y$  e  $xy$  em escala linear. Neste processo, constata-se que o fluxo de partículas se inicia de maneira arbitrária, porém, consoante o avanço do processo de implementação computacional, passa a apresentar uma dinâmica melhor delineada.

Os gráficos individuais expressos nas Figura 98b, Figura 98c e Figura 98d compreendem os dados individuais de deslocamento quadrático médio pertinentes a  $x$ ,  $y$  e  $xy$  resultantes, em escalas logarítmicas. Com base na Eq. (21) e da aplicação de funções de ajustes para os parâmetros medidos com a simulação, foi possível determinar os expoentes de difusão com respectivos erros associados. Obteve-se os valores de  $\alpha_x = 3,05 \pm 0,05$ ,  $\alpha_y = 1,0$  e  $0,0$  e por fim,  $\alpha_{x,y} = 1,21 \pm 0,06$ .

Diante destes resultados, compreende-se que o eixo  $x$  experimenta um processo de difusão anômala hiper-balístico. Com relação ao eixo  $y$ , identifica-se a ocorrência de transição de um regime com difusão normal ou difusão de Einstein para a

ausência de fenômenos difusivos. Por fim, constata-se que o comportamento resultante dos dois eixos de posição apresenta atividades de superdifusão.

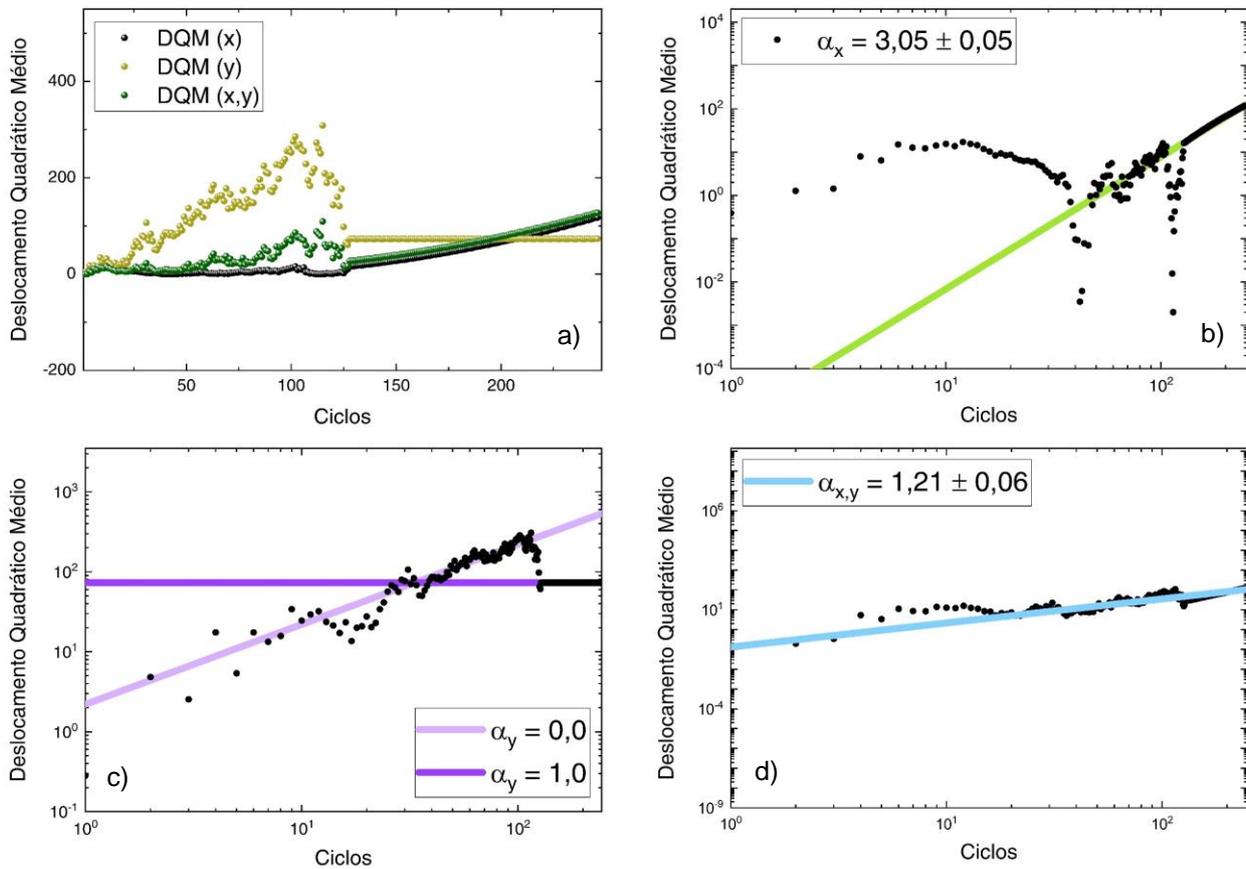


Figura 98 – Deslocamento quadrático médio do sistema Fx119. a) Comportamento em escala linear. b) Eixo-x em escala logarítmica. c) Eixo-y em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

### 3.12.6 Correlação da Velocidade

A Figura 99 apresenta as funções de relaxação do sistema Fx119, de acordo com os dados das correlações das velocidades de  $x$ ,  $y$  e a resultante  $xy$ , em conformidade com as informações expressas na Eq. (24).

Mediante as disposições numéricas dos dados, é possível perceber a competição existente entre processos normais e anômalos concernentes aos fenômenos de difusão. Isto ocorre em virtude desta estrutura apresentar diferentes regimes deste fenômeno físico ao longo de seu desenvolvimento computacional. Ademais, todas as estruturas tendem a medidas nulas no fim de suas escalas temporais. Neste sentido, constata-se a validade do Teorema de Khinchin.

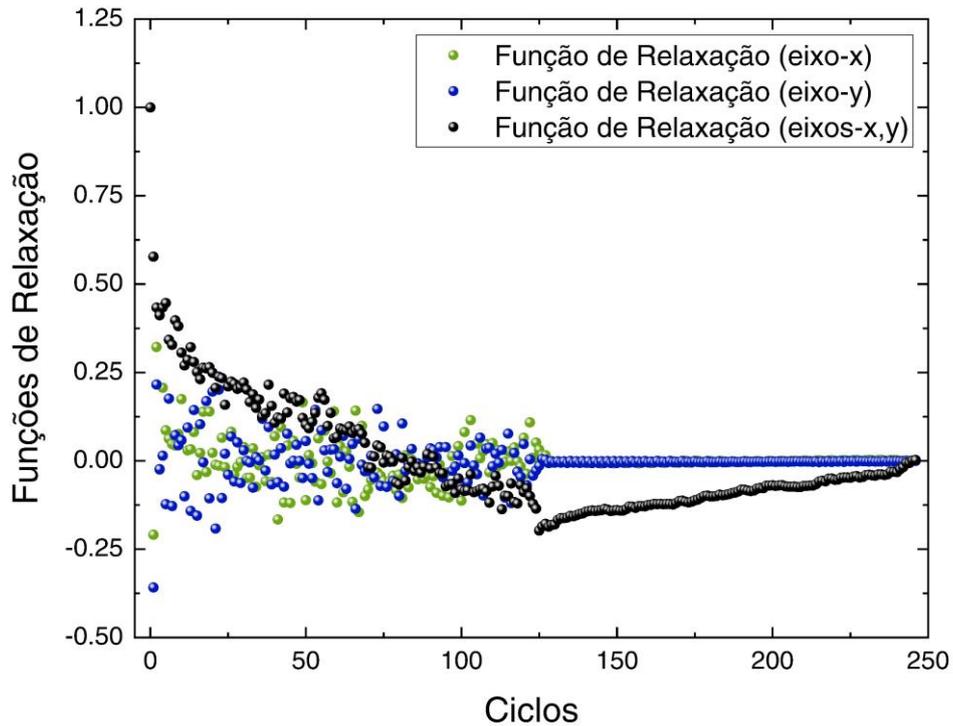


Figura 99 – Funções de Relaxação pertinentes ao modelo Fx119.

### 3.13 HWSS

#### 3.13.1 Definição

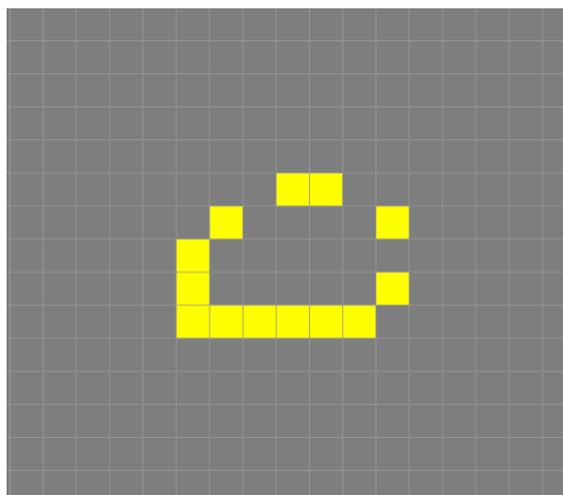


Figura 100 – Configuração estrutural para o modelo HWSS (Fonte: [76]).

O padrão ilustrado na Figura 100 (simulação disponível em [<https://playgameoflife.com/lexicon/HWSS\(1\)>](https://playgameoflife.com/lexicon/HWSS(1))) é classificado dentro da categoria de naves espaciais em autômatos celulares, sendo a quarta estrutura mais comum deste tipo.

Esta nave espacial é composta por dois padrões específicos conhecidos como "faísca de cauda" e "faísca de dominó".

A "faísca de cauda" se refere à configuração na extremidade da nave espacial, enquanto a "faísca de dominó" está associada a uma forma particular de poliomino, que é composto por dois elementos ativos. Poliomino são conjuntos de células conectadas que se organizam ortogonalmente em relação à grade de células. Essas estruturas foram um dos principais focos de investigação de John Conway quando desenvolveu o Jogo da Vida.

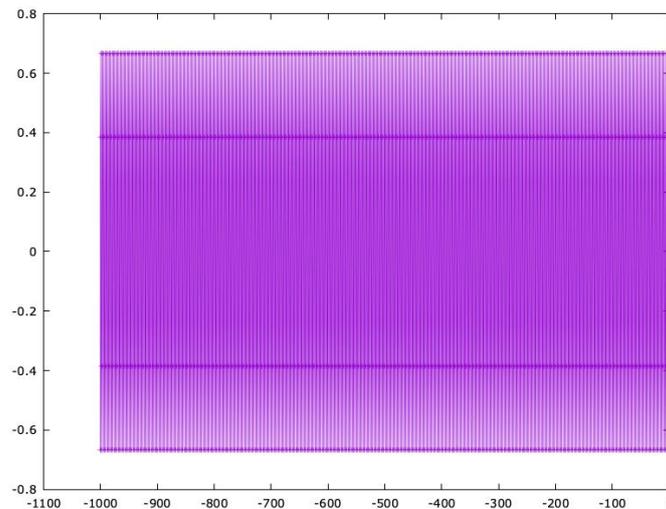


Figura 101 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura HWSS.

O interesse de Conway nos poliominos estava ligado à identificação e ao monitoramento do desenvolvimento dessas estruturas, proporcionando insights sobre suas dinâmicas espaço-temporais.

A estrutura conhecida como HWSS (Heavyweight Spaceship) foi originalmente descoberta por Conway no século XX. Posteriormente, Dave Buckingham reconheceu que essas configurações poderiam ser geradas através de um arranjo específico composto por três planadores.

O comportamento desta nave é cíclico: a cada quatro gerações ou passos de tempo, ela retorna à sua configuração original. Ao mesmo tempo, a nave se desloca indefinidamente e de maneira ortogonal pela grade celular.

A Figura 101 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28).

### 3.13.2 Número de Células

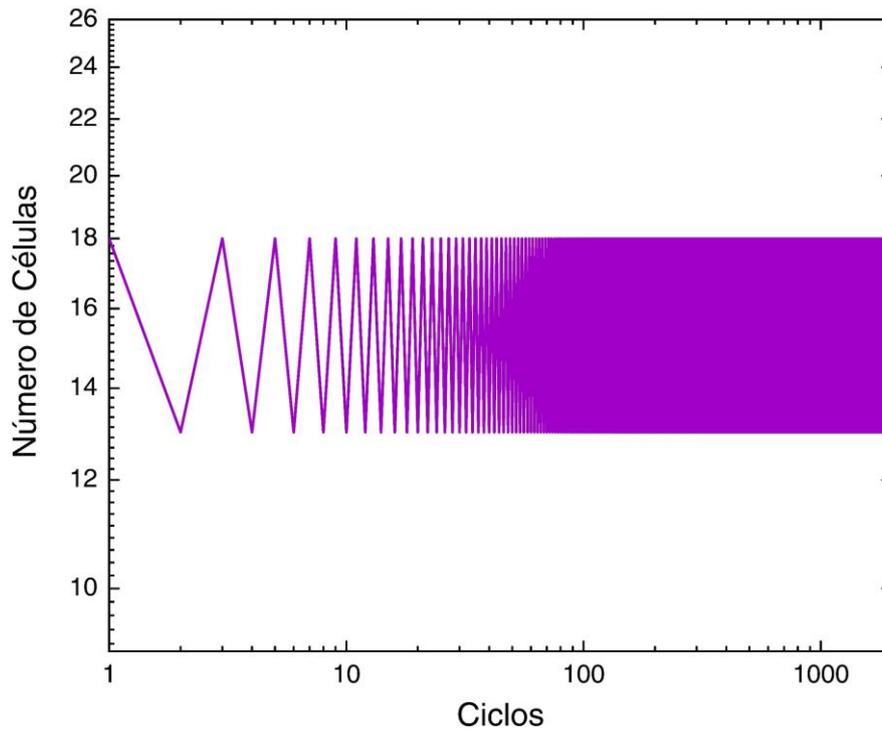


Figura 102 – Número de células referentes a estrutura HWSS.

A Figura 102 mostra um padrão específico de número de células, caracterizado por oscilações entre 13 a 18 elementos vivos. Isto se deve a característica estrutural destes sistemas. O movimento desta nave é produzido pela ocorrência de mortes e nascimentos de quantidades específicas das células que constituem e seu deslocamento ocorre sempre na horizontal orientado da direita para a esquerda.

### 3.13.3 Assimetria e Curtose

Com base na Figura 103, observa-se que a assimetria relativa às medidas em relação à variável  $x$  não é simétrica; os dados tendem a se deslocar para as zonas positivas da escala, i.e.,  $\zeta > 0$ .

Em relação à assimetria da variável  $y$ , há uma distribuição simétrica dos dados em torno da de  $\zeta = 0$ . Os pontos se distribuem igualmente nas regiões negativas e positivas, com intensidades e distâncias equivalentes em relação ao ponto médio nulo. Dada essa simetria, os valores obtidos na simulação para esta variável se organizam de acordo com uma distribuição oscilante em relação às caudas de uma distribuição normal.

Quanto às medidas de curtose para as variáveis  $x$  e  $y$ , os dados da simulação se concentram predominantemente em áreas negativas,  $\eta < 0$ , durante toda a execução do modelo. Portanto, as curtoses para ambas as variáveis são classificadas como platicúrticas.

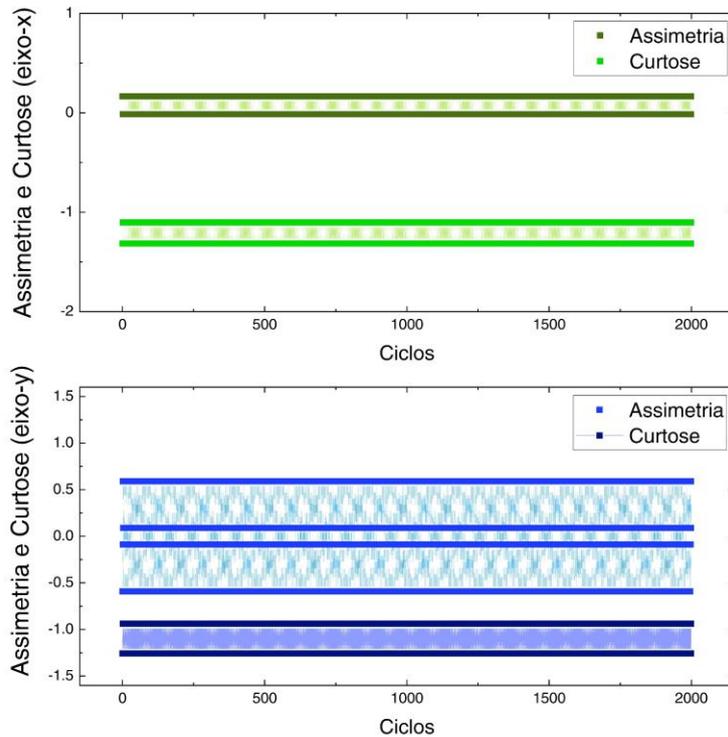


Figura 103 – Assimetria e Curtose associadas às variáveis de posição da estrutura HWSS.

### 3.13.4 Aceleração

A aceleração demonstrada por esta estrutura comporta-se de acordo com o padrão apresentado pela Figura 104. O deslocamento desta nave é cíclico, e se dá em virtude da taxa constantemente variável de indivíduos vivos e mortos que promove um efeito de movimento para cima e para baixo enquanto percorre um caminho horizontal.

Neste sentido a aceleração em  $x$  assume somente dois valores possíveis, assim como a aceleração em  $y$ , de modo que o deslocamento é precisamente delineado por essas intensidades variavelmente constantes. A média em ambos os casos é maior que zero.

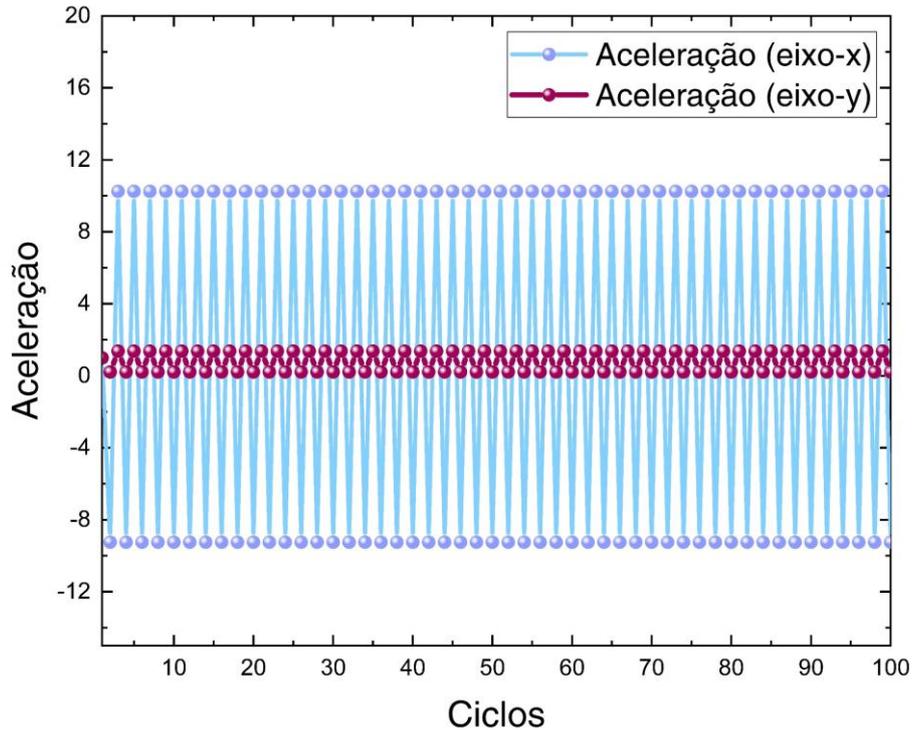


Figura 104 – Componentes da aceleração exibida pela estrutura HWSS.

### 3.13.5 Deslocamento Quadrático Médio

A Figura 105a apresenta um comportamento abrangente das variáveis  $x$  e  $y$ . O sistema se desloca horizontalmente da direita para a esquerda e se move verticalmente dentro de um intervalo fixo de 7 células (veja Figura 101). Os padrões observados confirmam a estruturação específica dos elementos modelados.

Para calcular os expoentes de difusão nos respectivos eixos, foram aplicadas funções de ajuste não lineares, baseadas na Eq. (21). Os expoentes de difusão determinados foram  $\alpha_x = 1,9999600 \pm 0,0000004$  e  $\alpha_{xy} = 2,000130 \pm 0,000004$ , Figura 105b, Figura 105d. Estes valores indicam a presença de fenômenos superdifusivos balísticos no comportamento sobre o plano  $xy$ , assim como no eixo  $x$ . Contudo, em relação à variável  $y$  isoladamente, não há difusão ( $\alpha_y = 0$ ), Figura 105c.

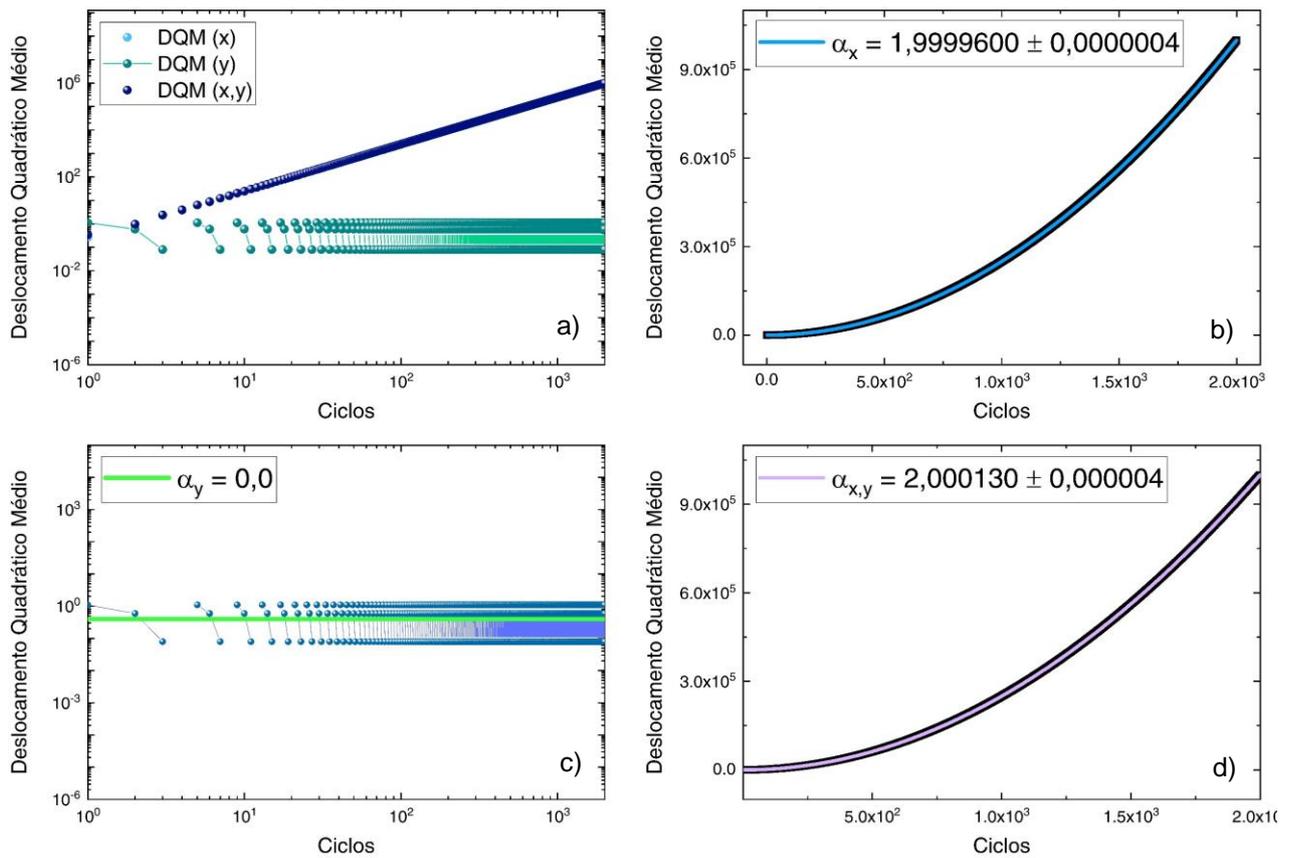


Figura 105 – Deslocamento quadrático médio do sistema HWSS. a) Comportamento em escala linear. b) Eixo-x em escala linear. c) Eixo-y em escala logarítmica. d) Resultante em escala linear.

### 3.13.6 Correlação da Velocidade

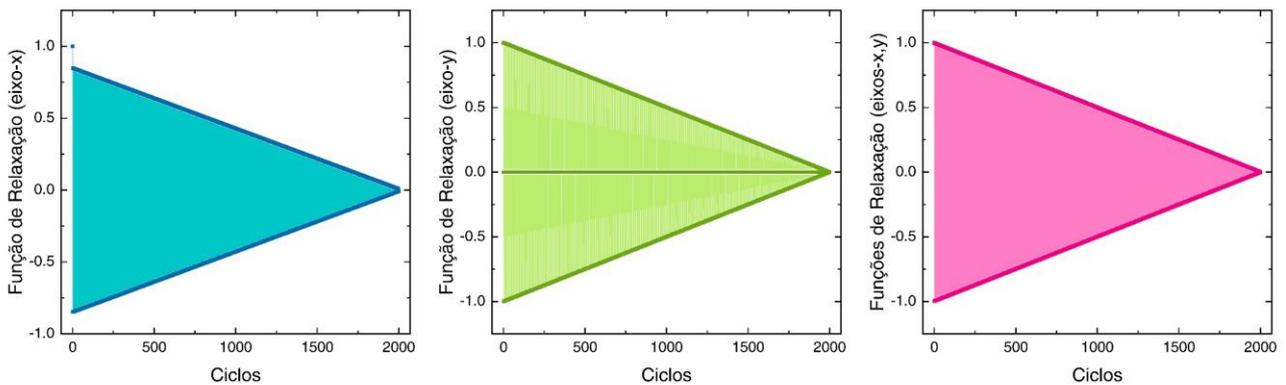


Figura 106 – Funções de Relaxação pertinentes a estrutura HWSS.

A Figura 106 mostra o comportamento da relação de relaxação, Eq. (24). Nota-se um padrão oscilatório rápido modulado por um decaimento linear convergente a zero. Esse resultado corrobora a validade do Teorema de Khinchin.

### 3.14 PLANADOR

#### 3.14.1 Definição

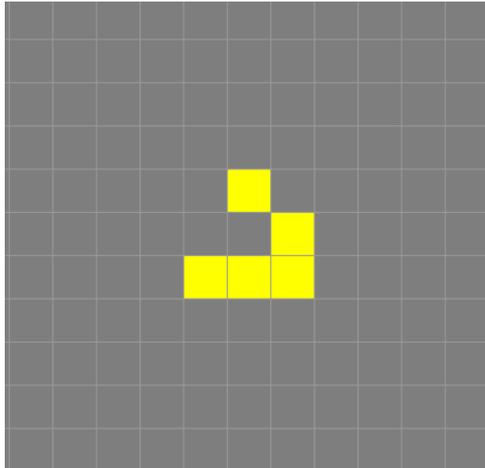


Figura 107 – Configuração de células que formam um Planador (Fonte: [76]).

Trata-se de uma estrutura elementar formada por apenas cinco células vivas (Figura 107, simulação disponível em <<https://playgameoflife.com/lexicon/glider>>). Corresponde a menor e mais comum estrutura de nave espacial encontrada.

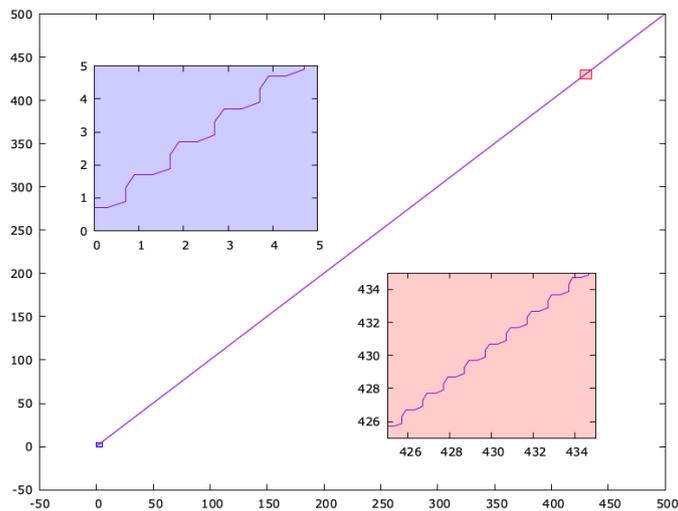


Figura 108 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura Planador.

As naves espaciais são assim classificadas em virtude na natureza que exibem de se propagarem pela rede celular com determinada velocidade, sem perder a razão de aspecto padrão finita pré-definida.

A princípio, apenas duas naves espaciais eram conhecidas. Esse número cresceu consideravelmente consoante as contribuições desenvolvidas por Dean Hickerson em 1989 e seus sucessores, os quais investigaram, através de métodos computacionais automatizados, a existência de diferentes modelos de naves espaciais.

Atualmente existem registradas diferentes estruturas classificadas como naves espaciais, que apresentam arranjos de células e taxas de variação espaço-temporal distintos.

O planador apresenta a característica de se deslocar diagonalmente pela matriz e efetuar rotações, de maneira periódica, repetindo sua configuração e orientação inicial a cada quantidade específica de tempo. É encontrado nas gerações de diferentes estruturas, consoante a ocorrência das modificações dinâmicas desses modelos. A Figura 108 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28).

Este sistema apresenta a propriedade de deslocamento contínuo e infinito. Isto significa que enquanto houver rede celular para percorrer seguirá indefinidamente seu deslocamento característico. Sua locomoção apresenta aspecto uniforme, equitativo, cíclico, previsível e invariante no tempo e no espaço.

### 3.14.2 Número de Células

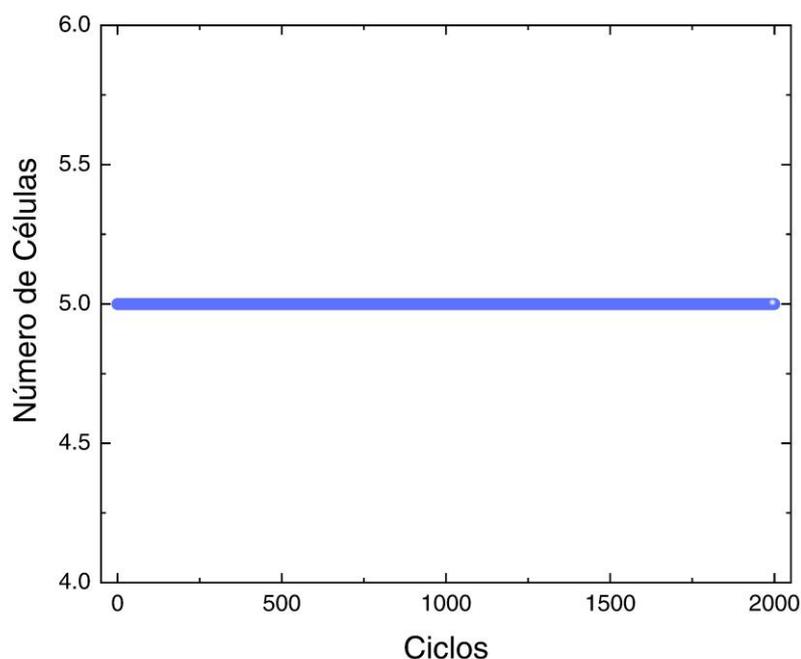


Figura 109 – Número de células ao longo das gerações do objeto Planador.

O número de células da estrutura denominada Planador é invariante no tempo, pois esta estrutura é constituída apenas por 5 células vivas. Apesar deste sistema apresentar movimento, a quantidade de células não sofre variações.

### 3.14.3 Assimetria e Curtose

Ao analisar a Figura 110, observa-se que as assimetrias para as variáveis  $x$  e  $y$  tendem a uma distribuição de dados voltada para as regiões negativas da escala, fazendo com que a maioria dos seus valores sejam negativos. Nesse contexto, essas curvas são classificadas como negativamente assimétricas com caudas alongadas à esquerda.

De maneira análoga, as medidas de curtose para ambas as variáveis de posição exibem um comportamento similar. Todos os valores obtidos para essas métricas estão situados em regiões numéricas negativas. Portanto, as curtoses relativas a  $x$  e  $y$  são classificadas como platicúrticas.

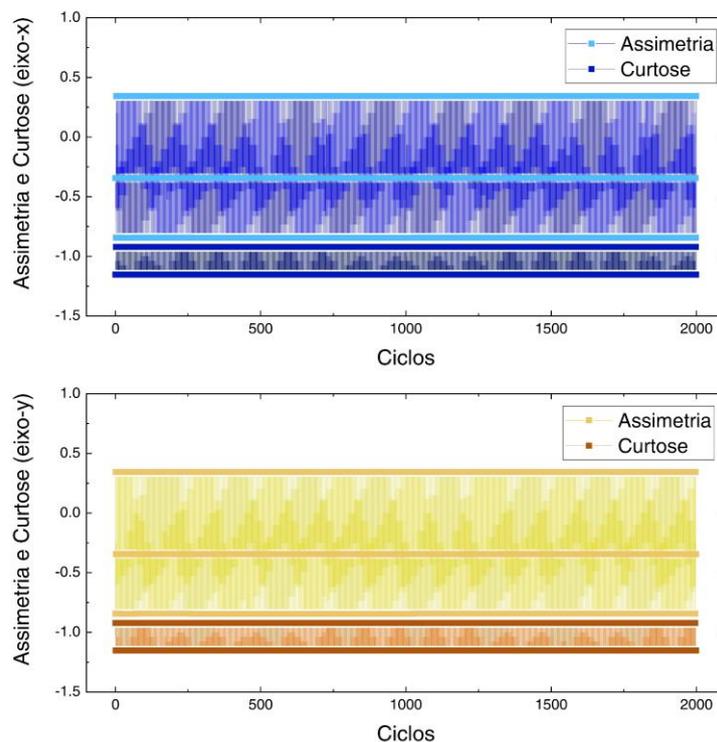


Figura 110 – Assimetria e Curtose referentes as variáveis de posição da estrutura Planador.

### 3.14.4 Aceleração

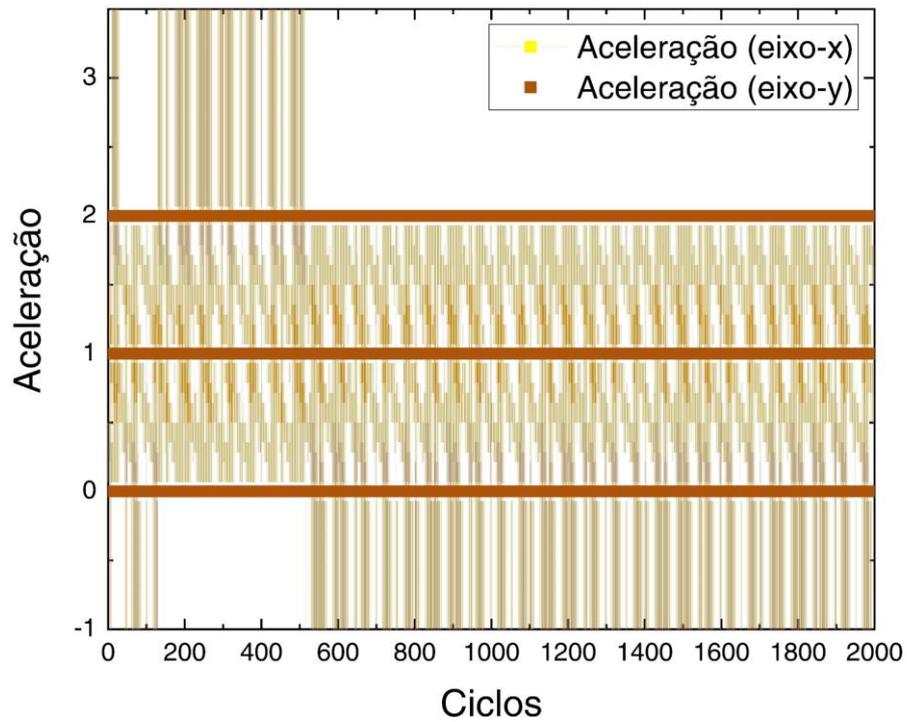


Figura 111 – Aceleração nos eixos  $x$  e  $y$  referente ao objeto Planador.

A Figura 111 mostra o padrão geral encontrado na grandeza física da aceleração associada ao sistema Planador. De acordo com as características desse modelo, a aceleração apresenta um aspecto oscilatório modulado por degraus, podendo assumir somente três valores possíveis: 0, 1 e 2 em ambos os eixos.

### 3.14.5 Deslocamento Quadrático Médio

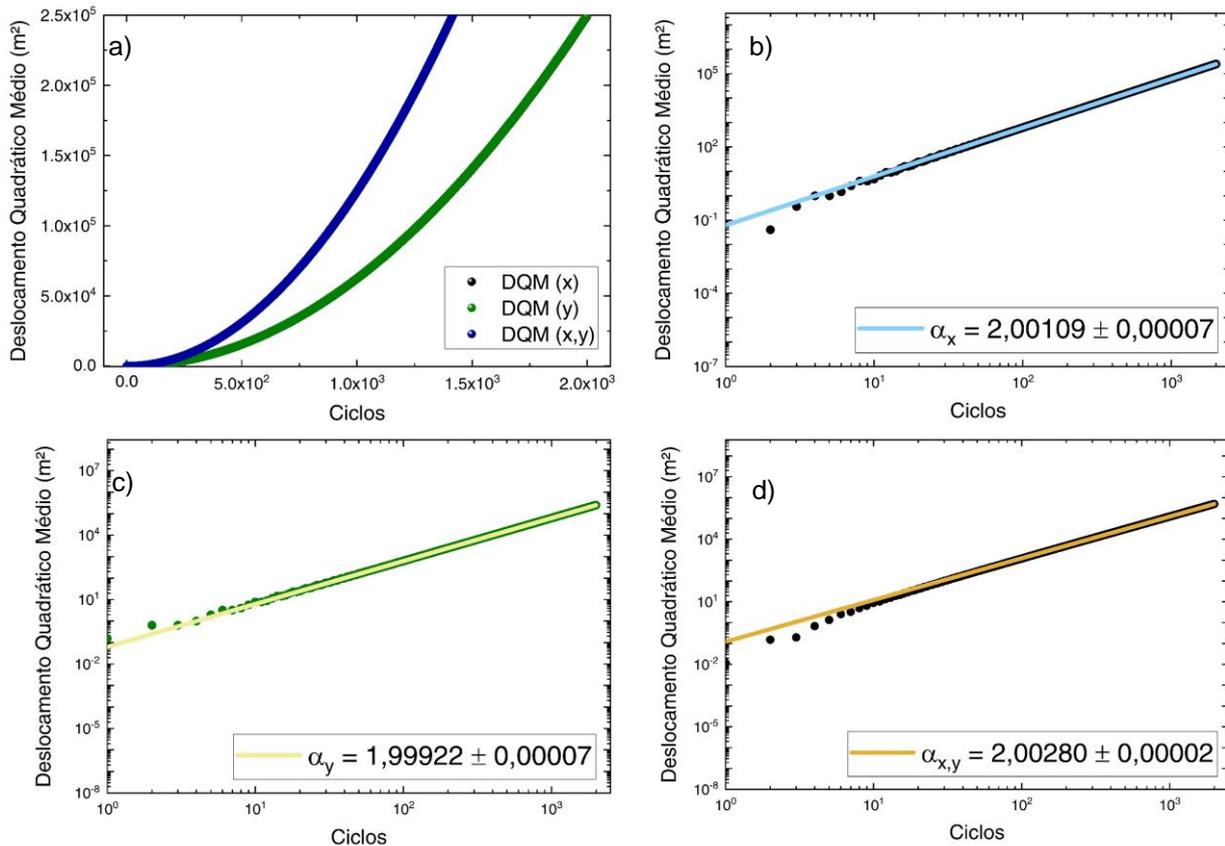


Figura 112 – Deslocamento quadrático médio do sistema Planador. a) Comportamento em escala linear. b) Eixo- $x$  em escala logarítmica. c) Eixo- $y$  em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

A Figura 112a reúne o aspecto conjunto do DQM para as variáveis  $x$ ,  $y$  e a resultante do plano  $xy$ . Identifica-se um comportamento padronizado ao longo de todo processo computacional empregado.

Utilizando curvas individuais, aplicou-se uma função não linear de ajuste baseada nas diretrizes estabelecidas pela Eq. (21) para determinar os expoentes de difusão associados a cada eixo. Neste contexto, os valores obtidos foram  $\alpha_x = 2,00109 \pm 0,00007$  (Figura 112b),  $\alpha_y = 1,99922 \pm 0,00007$  (Figura 112c) e  $\alpha_{x,y} = 2,00280 \pm 0,00002$  (Figura 112d). Esses resultados indicam que os fenômenos observados nesses eixos são característicos de regimes de superdifusão balística.

### 3.14.6 Correlação da Velocidade

A Figura 113 foi estruturada de acordo com os dados de correlação da velocidade normalizada, obtida com a implementação computacional, em conformidade com a Eq. (24).

Estes resultados concordam com os obtidos por intermédio das análises de DQM, as quais indicaram, em todos os eixos investigados, processos de difusão balística, como na subseção 3.13.6.

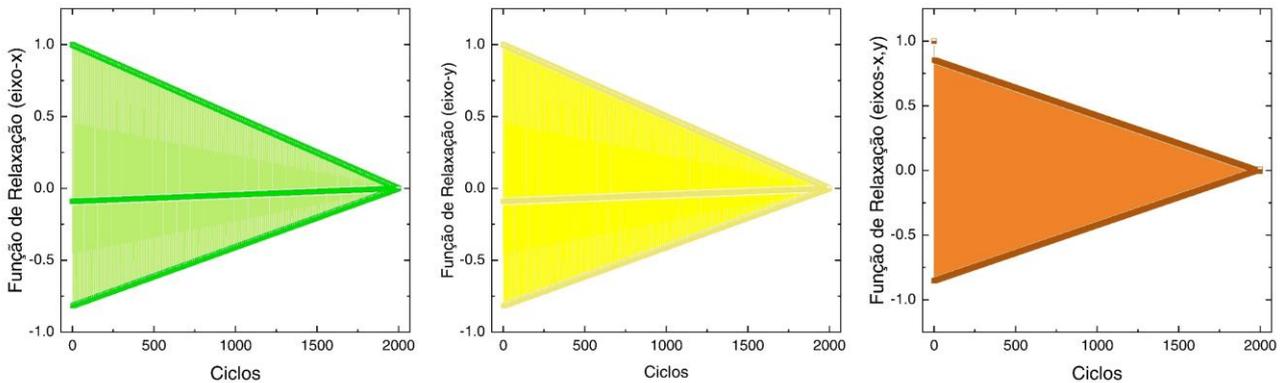


Figura 113 – Funções de Relaxação associadas aos elementos pertencentes a estrutura Planador.

### 3.15 POMBO

#### 3.15.1 Definição

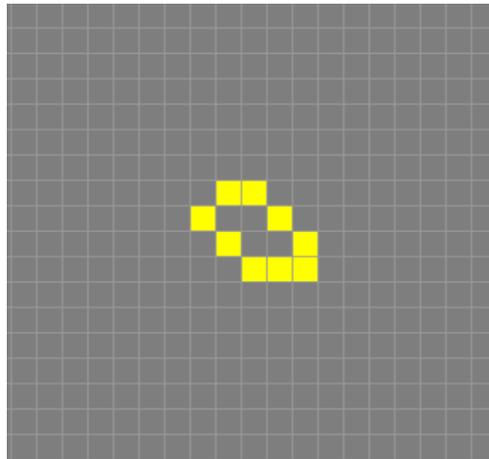


Figura 114 – Arranjo de células vivas que formam a estrutura conhecida como Pombo (Fonte: [76]).

A estrutura em questão foi concebida com o objetivo de estabilizar regiões de fronteira e pode ser adaptada para outros modelos, servindo como um meio para transmitir informações ou reagir a estímulos da rede. Quando combinada com outros objetos, essa formação tem o potencial de conferir ao sistema propriedades significativas, atuando como uma espécie de memória funcional, conversor de dados e harmonizador de extremidades.

Descoberto no século 21, o modelo representado na Figura 114 (simulação disponível em <<https://playgameoflife.com/lexicon/dove>>) exibe um crescimento discreto e de curto alcance, caracterizado pela interação entre objetos estáveis e padrões que se deslocam suavemente pela rede. Alcança a estabilização na 200ª geração, resultando em uma população final composta por três blocos de dimensões 2x2 e dois objetos periódicos conhecidos como "blinkers", conforme ilustrado na Figura 10i.

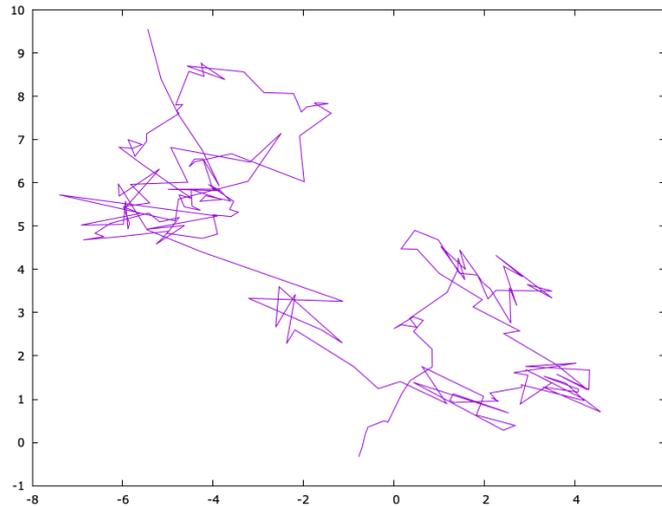


Figura 115 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura Pombo.

A Figura 115 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28).

### 3.15.2 Número de Células

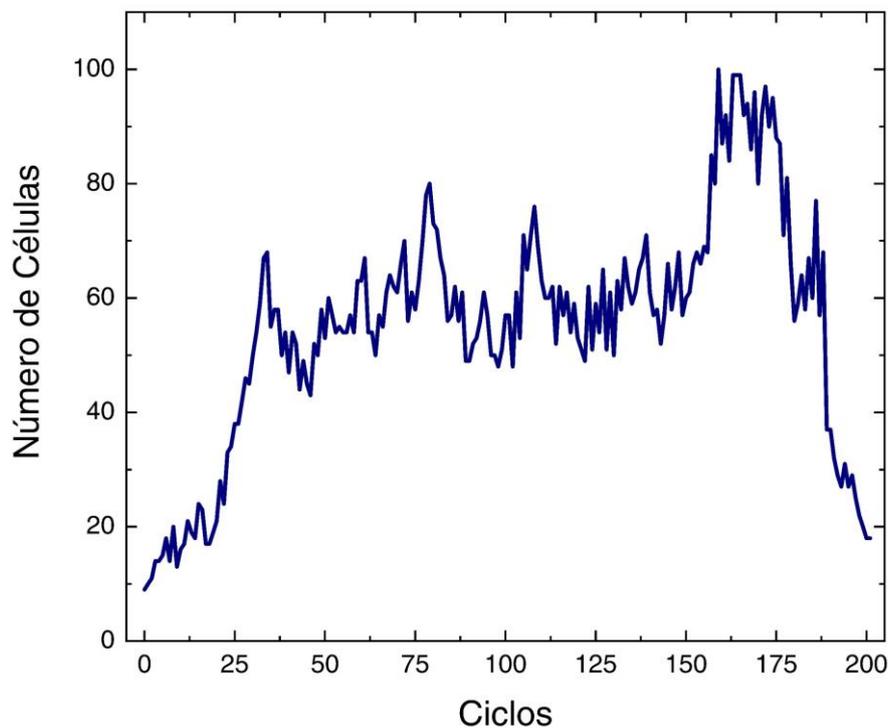


Figura 116 – Números de células pertinentes a simulação da estrutura Pombo.

A dinâmica identificada no modelo denominado Pombo é caracterizada pelo deslocamento e constante interação de células pela rede, promovendo mortes, nascimentos e edificando objetos estáveis e cíclicos, conferindo o perfil populacional de células ativas conforme a Figura 116.

### 3.15.3 Assimetria e Curtose

Ao analisar a Figura 117, nota-se que a assimetria relacionada ao eixo  $x$  inicialmente flutua em torno de zero, mas, após cerca de 50 gerações, a distribuição se concentra predominantemente na zona positiva do gráfico. Em média, os valores numéricos associados a esta variável são maiores que zero, o que indica uma assimetria positiva da distribuição em relação ao eixo  $x$ .

Quanto à assimetria em relação ao eixo  $y$ , os dados também começam oscilando em torno de zero. No entanto, diferentemente do eixo  $x$ , esses valores posteriormente se inclinam para as regiões negativas do gráfico. Em geral, a curva de assimetria consiste em valores negativos, o que sugere uma distribuição predominantemente assimétrica negativa para o eixo  $y$ .

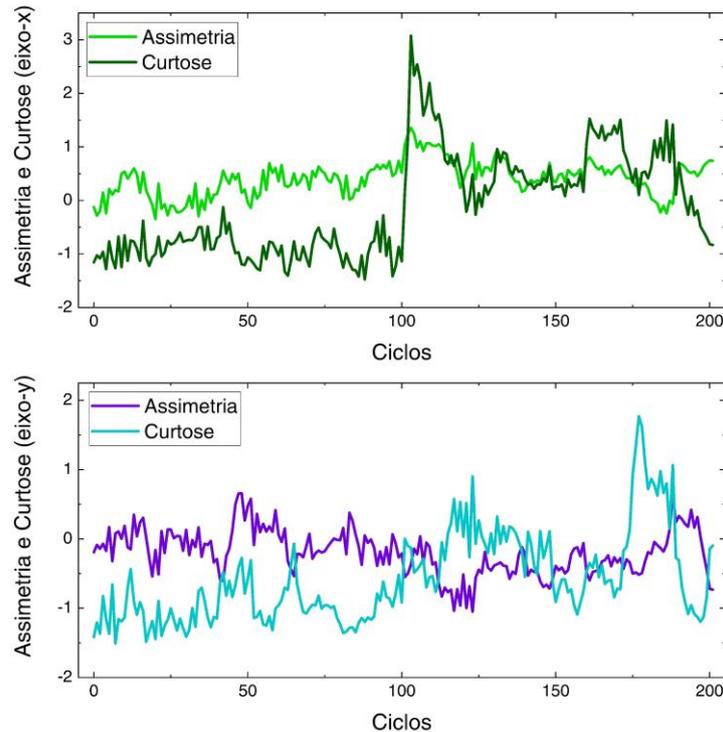


Figura 117 – Assimetria e curtose relativas as variáveis de posição do sistema denominado Pombo.

Em relação à curtose para os eixos  $x$  e  $y$ , ambas as distribuições exibem valores dispersos tanto em regiões positivas quanto negativas. No entanto, globalmente, essa variável tende para valores menores que zero em ambas as curvas. Essas características sugerem que as curtoses para ambos os conjuntos de dados podem ser classificadas como platicúrticas.

#### 3.15.4 Aceleração

A aceleração do conjunto de células denominada Pombo (veja Figura 118) evidêcia algumas localidades com medidas de força de diferentes magnitudes ao longo de sua implementação computacional. Esse resultado demonstra que as forças que atuam no sistema não possuem média nula e apresentam características flutuantes.

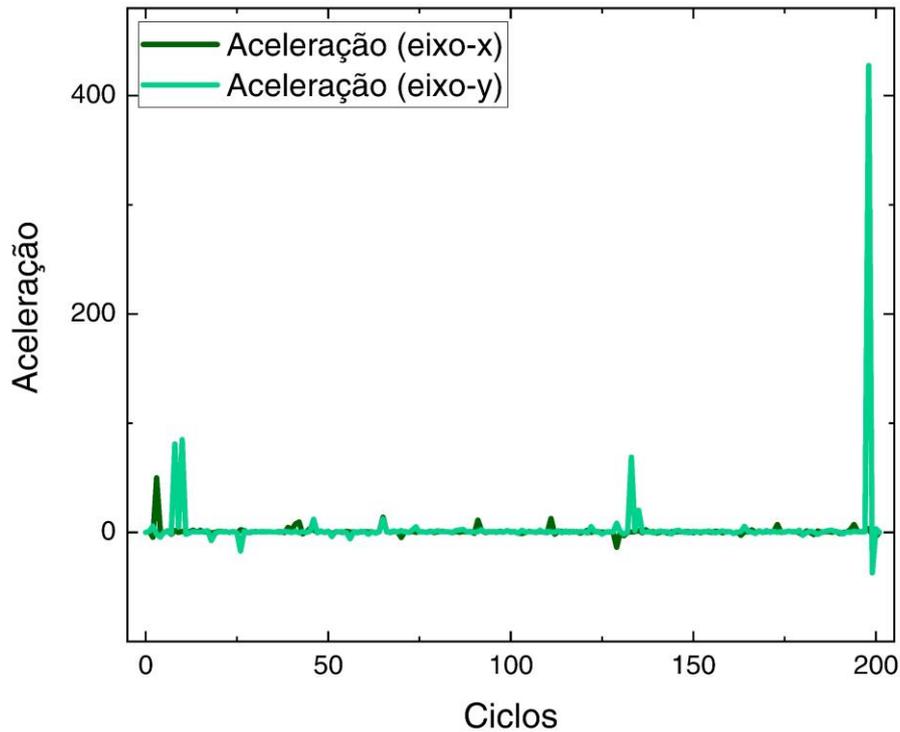


Figura 118 – Componentes de aceleração pertinente aos elementos que constituem o padrão intitulado Pombo.

Consoante a essas medidas da componente  $x$  da força, localizadas nas coordenadas (3,04, 49,42) e (65, 16,28), identificou-se mínimas reduções nas curvas de assimetria e de curtose. Para  $y$ , as forças mais elevadas encontram-se nos pontos em (9,85, 86,64), no qual pode-se observar um pequeno decaimento na assimetria e invariância com respeito a curtose. No segundo pico em (198,10, 430,28) ambas as grandezas demonstraram invariância diante das forças presentes nestas regiões.

### 3.15.5 Deslocamento Quadrático Médio

A Figura 119 reúne as informações dos DQMs para as variáveis de posição de forma conjunta (Figura 119a) e separada (demais gráficos).

O primeiro gráfico (Figura 119a) mostra um comportamento mais ordenado no princípio, que se torna mais disperso nas fases finais da simulação em razão da diminuição do número de células ativas (Figura 116).

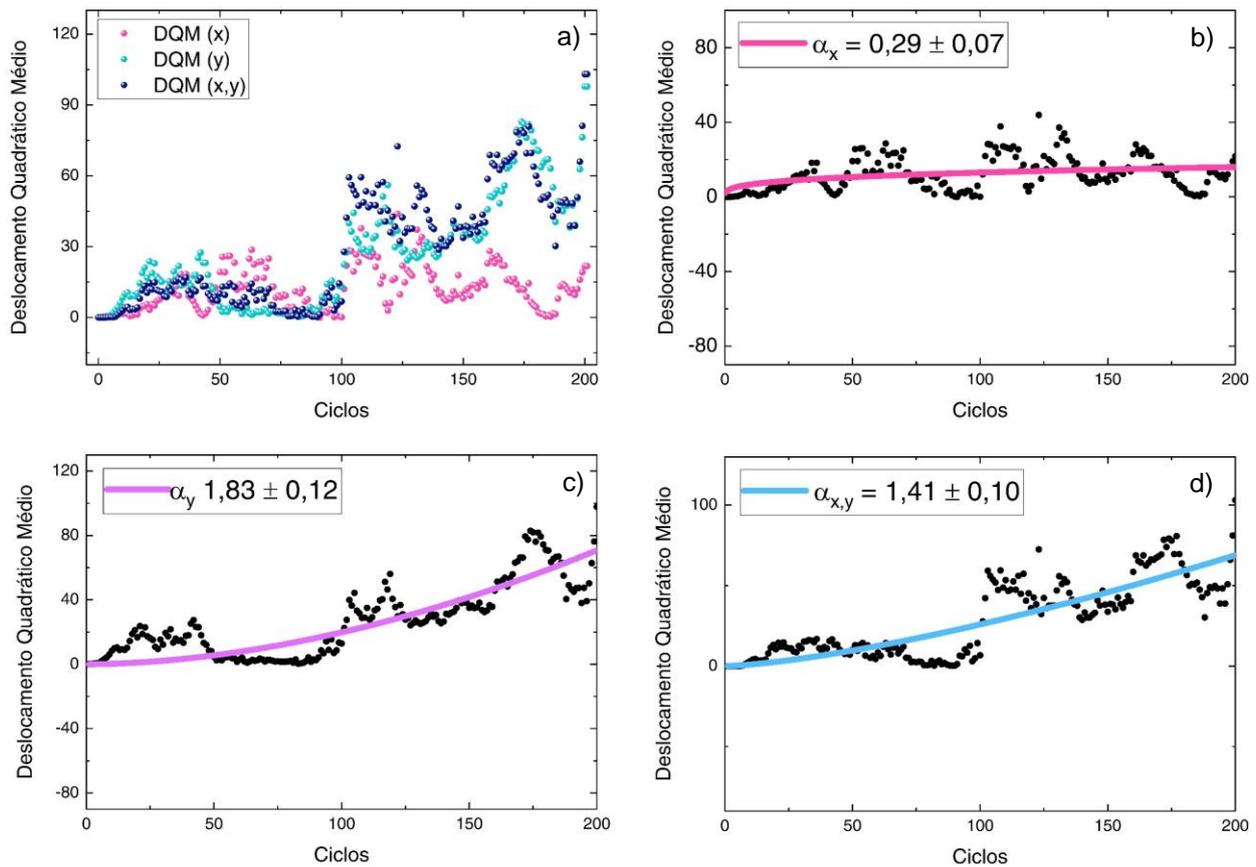


Figura 119 – Deslocamento quadrático médio do sistema Pombo. a) Comportamento geral em escala linear. b) Eixo-x em escala linear. c) Eixo-y em escala linear. d) Resultante em escala linear.

Para entender como ocorre o fenômeno da difusão neste sistema, os gráficos individuais foram implementados, com vistas a determinar o expoente de difusão que caracteriza este fenômeno com o auxílio da Eq. (16).

Foram encontradas  $\alpha_x = 0,29 \pm 0,07$  (Figura 119b), demonstrando um processo de subdifusão;  $\alpha_y = 1,8 \pm 0,1$  (Figura 119c), superdifusão; e  $\alpha_{xy} = 1,4 \pm 0,1$  (Figura 119d), o que qualifica novamente uma superdifusão.

### 3.15.6 Correlação da Velocidade

As funções de relaxação (Figura 120) foram construídas de acordo com as medidas de correlação da velocidade normalizada, as quais foram coletadas por intermédio da simulação do modelo de AC denominado Pombo.

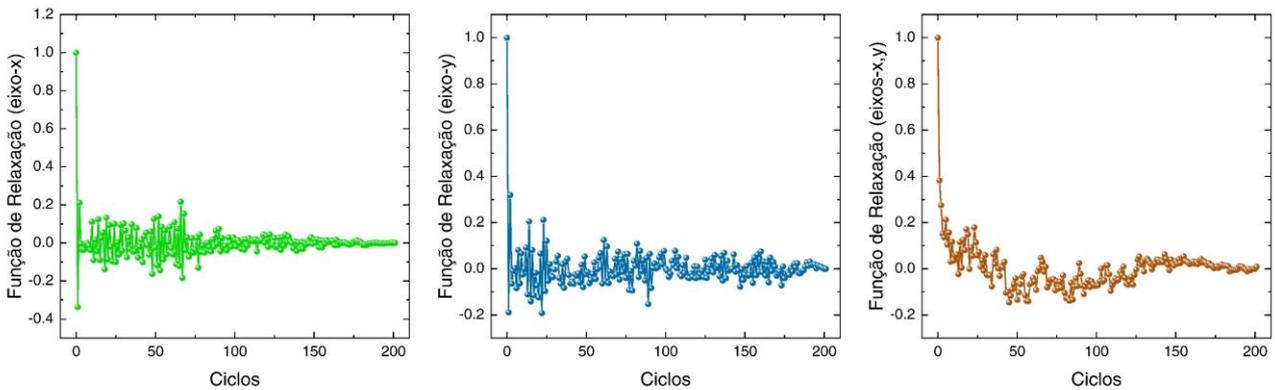


Figura 120 – Funções de Relaxação associadas a estrutura denominada Pombo.

Verifica-se graficamente que os fluxos de matéria podem ser categorizados como anômalos, em concordância com as informações obtidas mediante a análise do DQM.

### 3.16 QUASE CAVALARIA

#### 3.16.1 Definição

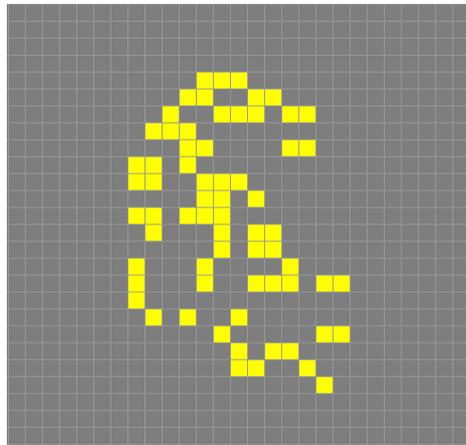


Figura 121 – Configuração de células que formam a figura denominada Quase Cavalaria (Fonte: [76]).

O padrão ilustrado na Figura 121 (simulação disponível em [https://playgameoflife.com/lexicon/almost\\_knightship](https://playgameoflife.com/lexicon/almost_knightship)) é classificado como um resultado parcial devido à sua natureza incompleta, que gera respostas igualmente parciais. Sua estrutura tende a se desintegrar à medida que a simulação avança. No entanto, o valor desse padrão reside no potencial para estudos futuros e na geração de novas informações.

Este padrão serve como um template para entender as complexidades do modelo e suas características estruturais. Ele pode funcionar como um molde de limites

variáveis, auxiliando na realização de uma estrutura mais completa com características de interesse prático.

A Figura 122 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme expresso na Eq. (28).

Descoberto acidentalmente pelo pesquisador Eugene Langvagen no século 21, enquanto ele buscava um modelo diferente conhecido como "conduto elementar," este padrão exibe uma variedade de comportamentos. Ele gera estruturas móveis que se espalham pela rede, incluindo estruturas estáveis, configurações cíclicas e naves espaciais, como os planadores.

A dispersão dos elementos começa na área do padrão inicial e, posteriormente, se expande significativamente para outras regiões. O sistema alcança a estabilidade na geração 1425, deixando atrás de si planadores em movimento contínuo direcionados para as regiões noroeste, nordeste, sudoeste e sudeste da rede.

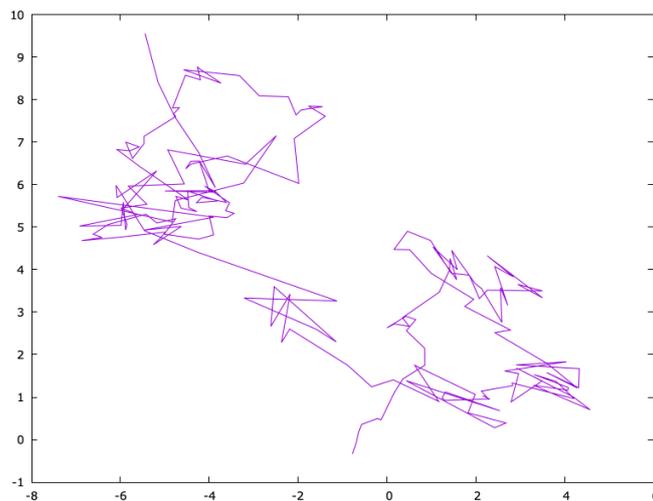


Figura 122 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura Quase Cavalaria.

### 3.16.2 Número de Células

Inicialmente, o número de células na rede está confinado à configuração inicial da estrutura Quase Cavalaria. Com a execução da simulação baseada no JdV, essa população começa a sofrer mudanças dinâmicas.

O modelo se distingue por expandir seu alcance para áreas progressivamente mais extensas à medida que as gerações avançam. Durante esse processo, ele produz na grade diversos tipos de objetos, incluindo estruturas estáveis, configurações cíclicas e objetos móveis.

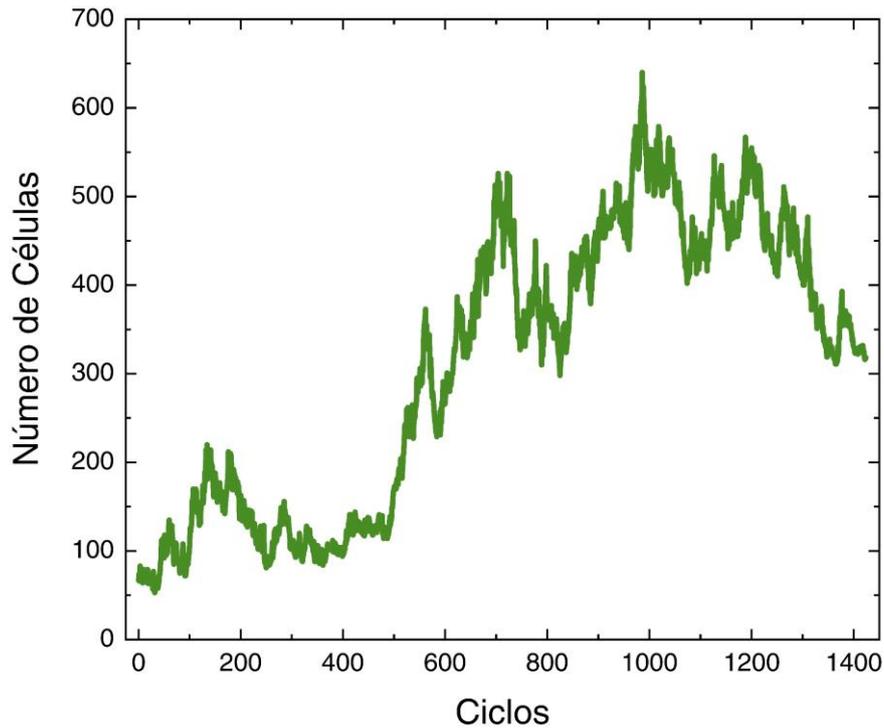


Figura 123 – Número de células referente a simulação da estrutura Quase Cavalaria.

O deslocamento dos elementos do sistema ocorre em face das aplicações simultâneas das regras de Conway, de modo que o padrão de elevações e declínios é explicado pela ocorrência de mortes e nascimentos ao longo da simulação deste sistema (veja Figura 123).

### 3.16.3 Assimetria e Curtose

A Figura 124 compila dados referentes às medidas de assimetria e curtose dos pontos experimentais coletados por meio da simulação da estrutura examinada neste estudo. Na análise dos gráficos, observa-se que a assimetria relacionada às medidas em  $x$  distribui seus dados tanto em regiões positivas quanto negativas. No entanto, o sinal predominante ocorre em zonas com valores superiores a zero. Em contraste, a assimetria em  $y$  se concentra majoritariamente em áreas negativas da escala. Com base nesses dados, podemos classificar as assimetrias de  $x$  e  $y$  como positiva e negativa, respectivamente.

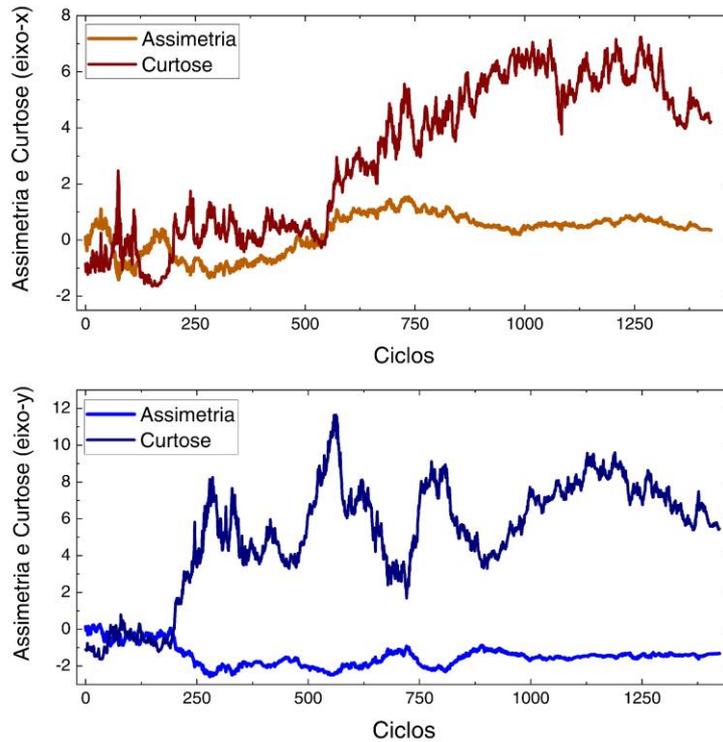


Figura 124 – Assimetria e Curtose relativas aos elementos da estrutura Quase Cavalaria.

As curvas referentes às medidas de curtose para  $x$  e  $y$  são semelhantes em que ambas exibem uma tendência para áreas positivas no gráfico. Nessas condições, as distribuições apresentam picos mais altos e larguras menores, sugerindo que ambas as curtoses podem ser classificadas como leptocúrticas.

#### 3.16.4 Aceleração

A Figura 125 oferece insights sobre a variável física da aceleração. Uma análise minuciosa revela que a aceleração não é constante, e suas regiões específicas apresentam variações aleatórias sem padrões aparentes nos níveis de força.

Para avaliar o impacto dessas variações de força na distribuição dos elementos dentro do sistema, foram identificados os pontos de maior intensidade em relação a ambos os eixos coordenados. Esses pontos foram então comparados com suas correspondentes localizações nas curvas de distribuição de assimetria e curtose.

No primeiro ponto de interesse, localizado nas coordenadas (228,12, 94,28), observou-se uma ligeira diminuição na assimetria e um aumento sutil na curtose. Em contraste, no segundo ponto de destaque, com coordenadas (803.36, 110.41), a assimetria mostrou um aumento, enquanto a curtose permaneceu estável.

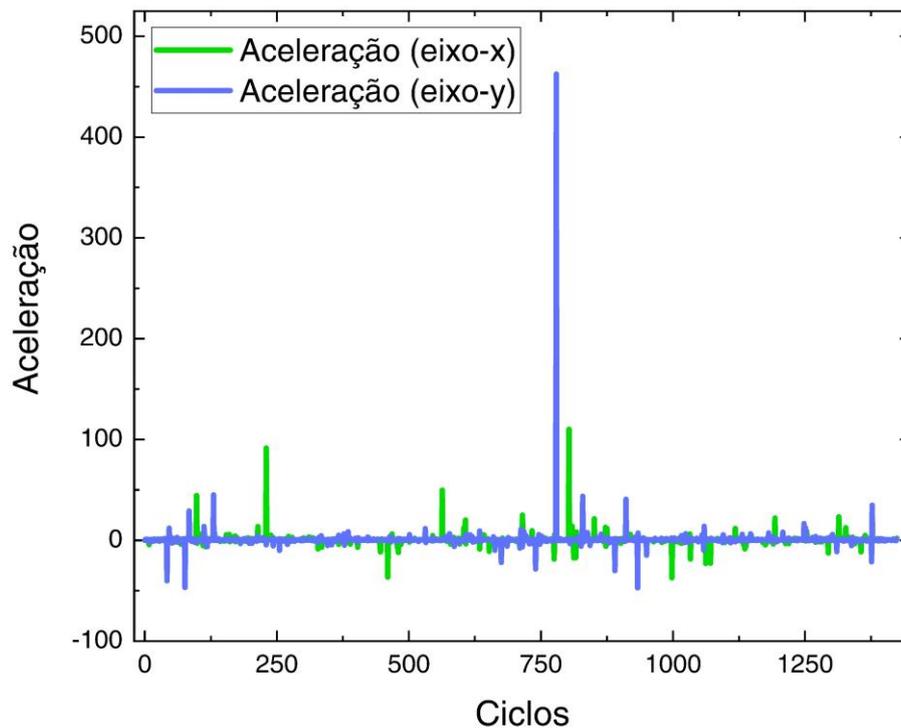


Figura 125 – Componentes  $x$  e  $y$  da aceleração das células que constituem o modelo Quase Cavalaria.

Em relação à análise no eixo  $y$ , foram observados efeitos divergentes nos dois pontos de máxima intensidade. No primeiro pico, situado em  $(75,68, -48,12)$ , a assimetria experimentou uma queda, enquanto a curtose apresentou um aumento. No entanto, no segundo pico, cujas coordenadas são  $(778,78, 464,45)$ , ocorreu um aumento na assimetria e uma redução na curtose.

### 3.16.5 Deslocamento Quadrático Médio

Através da Figura 126, verifica-se o aspecto das atividades de difusão relativas ao eixo  $x$ , em âmbito geral (Figura 126a), em escala linear e por intervalos limitados (Figura 126b, Figura 126c e Figura 126d), em escala logarítmica.

Identifica-se um comportamento complexo e arbitrário neste sistema, o qual não segue um padrão de modificação bem definido. Ademais, é possível notar agrupamentos de dados que configuram quebras ou descontinuidades nas curvas de distribuição, as quais relacionam-se a passos de Lévy e associam-se a processos superdifusivos.

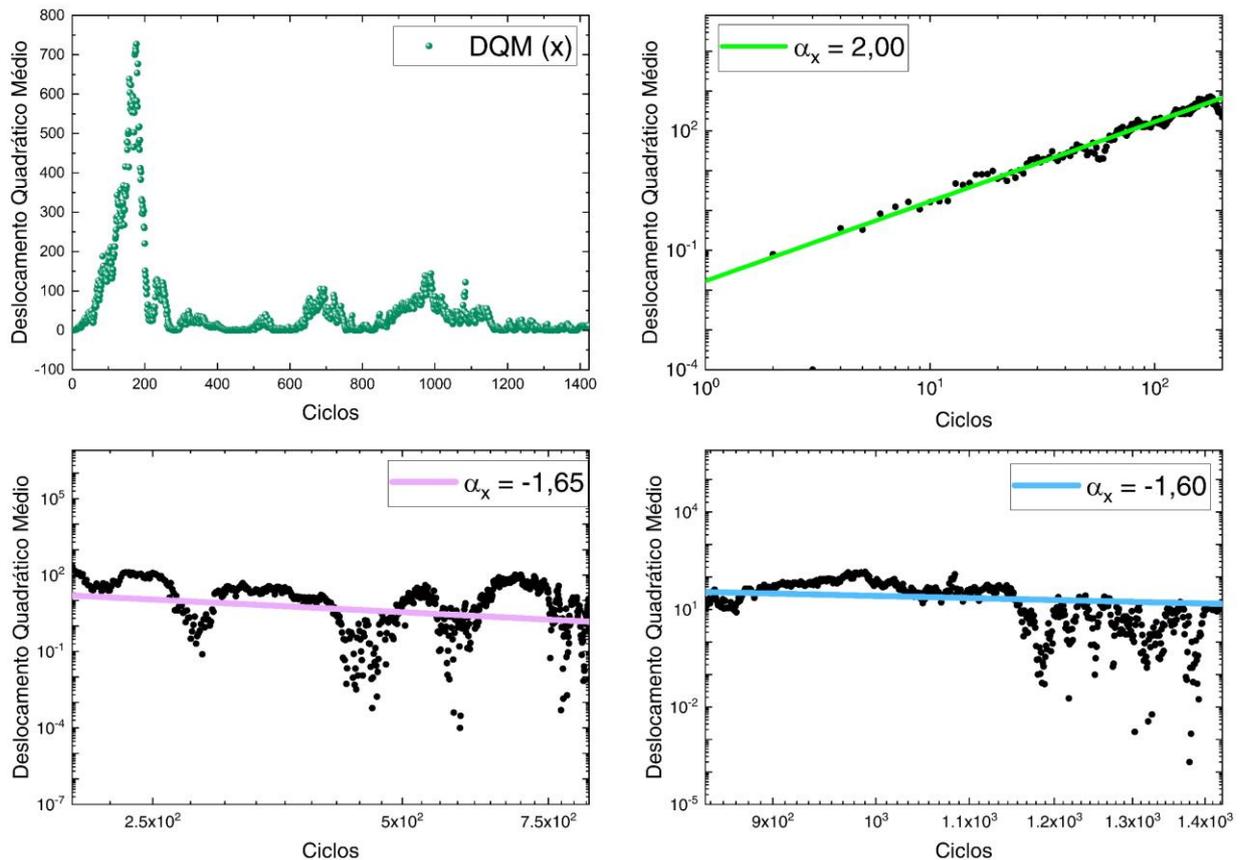


Figura 126 – Deslocamento Quadrático Médio para  $x$  relativo ao modelo Quase Cavalária.

Com o auxílio da Eq. (21) e funções de ajustes dos dados coletados com a simulação, pode-se determinar os diferentes valores para os expoentes de difusão em  $x$ ,  $\alpha_x = 2,00$ ,  $\alpha_x = -1,65$  e  $\alpha_x = -1,60$ , indicando fenômenos superdifusivos e remissivo, respectivamente. Estes resultados confirmam as implicações gráficas que assinalavam para regimes de difusão anômalos superdifusivos.

Com respeito aos fluxos dos elementos no eixo  $y$ , observa-se, mediante a análise da Figura 127, perfis imprevisíveis e variáveis concernentes as distribuições dos dados, não sendo possível identificar padrões recorrentes ao longo de todo processo de simulação. Análogo as medidas em  $x$ , utilizou-se das definições encontradas na Eq. (21) em conjunto com funções de ajuste para a determinação dos expoentes de difusão. Alcançou-se os valores de  $\alpha_y = 0,35$  e  $\alpha_y = 1,08 \pm 0,03$ , assinalando que o modelo parte de um regime de subdifusão ( $\alpha < 1$ ) para a difusão normal ou de Einstein ( $\alpha = 1$ ).

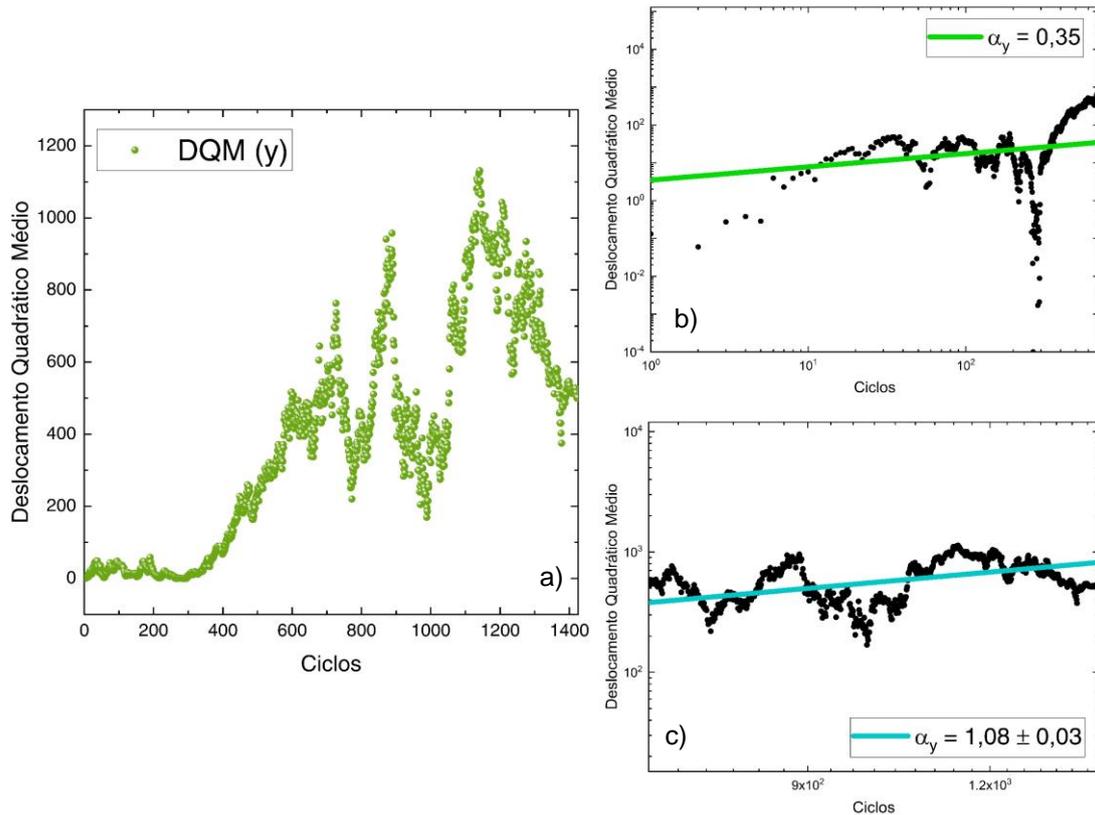


Figura 127 – Deslocamento Quadrático Médio para y associado ao modelo Quase Cavalaria.

A Figura 128a exibe o perfil total dos processos de difusão experimentados por ambos os eixos de posição, em escala linear. A curva apresentada é caracterizada por picos e vales ao longo de toda a simulação, com a ausência geral de padrões e repetições sistemáticas. Os demais gráficos (Figura 128d, Figura 128c, Figura 128d) consistem em intervalos específicos pertinentes aos dados de deslocamento quadrático médio em  $xy$ .

Utilizando-se das informações encontradas na Eq. (21), em conformidade com as funções de ajustes empregadas, determina-se os expoentes de difusão concernentes a resultante dos parâmetros de posição. Inicialmente o regime é caracterizado por eventos superdifusivos com caráter crescente, visto que parte de  $\alpha = 1,50$  para  $\alpha = 2,75$ , ambos maiores que a unidade. Nos estágios finais o sistema exibe um decaimento nos processos de difusão, que passam a se comportar como subdifusivos, considerando que  $\alpha = 0,84 \pm 0,03$ .

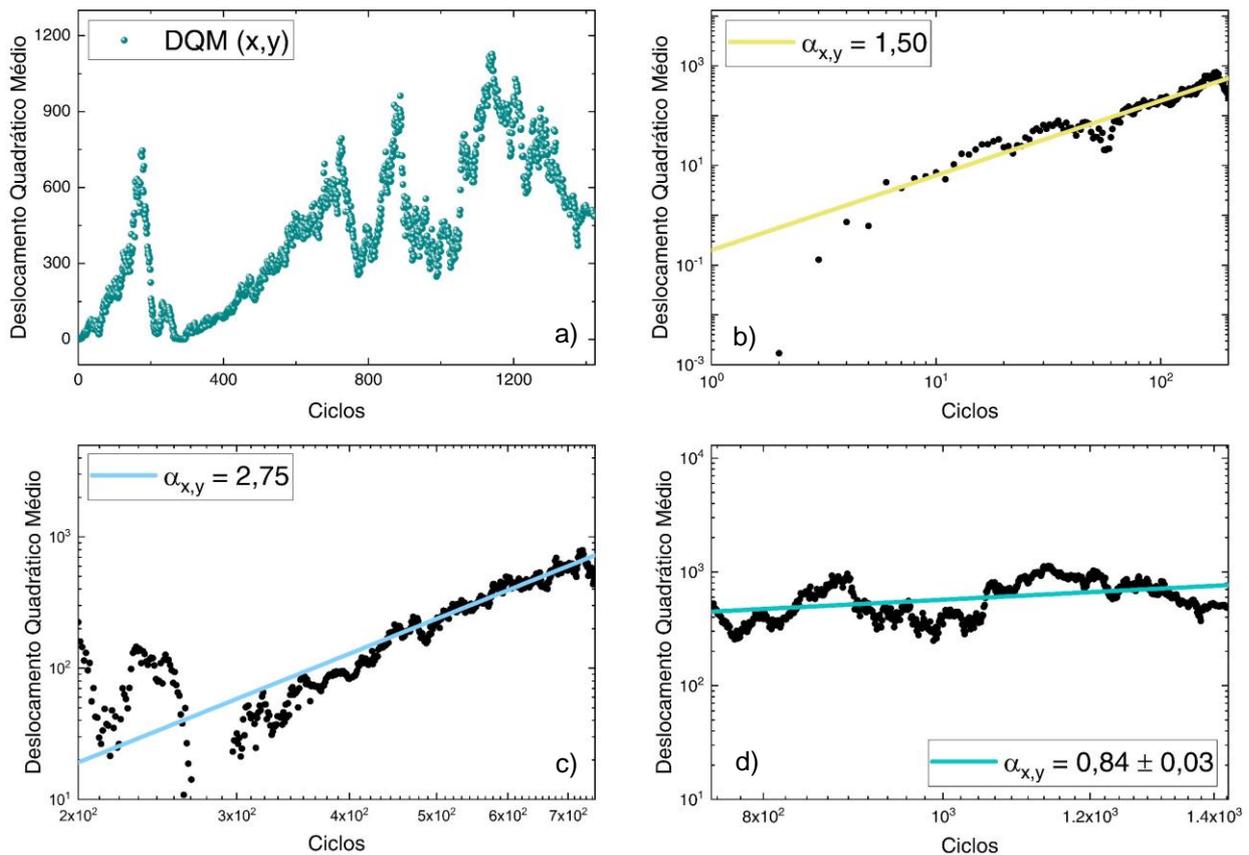


Figura 128 – Deslocamento quadrático médio do sistema Quase Cavalaria. a) Comportamento em escala linear da resultante  $xy$ . b), c) e d) Eixo- $x$  em escala logarítmica em diferentes intervalos numéricos.

### 3.16.6 Correlação da Velocidade

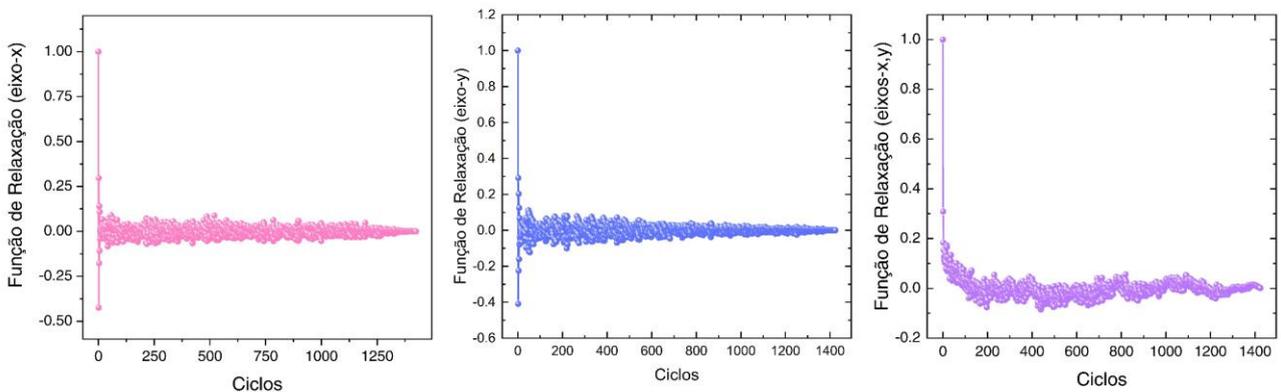


Figura 129 – Funções de Relaxação pertinentes a estrutura Quase Cavalaria.

As funções de relaxação (veja Figura 129), delineadas pela Eq. (24), elucidam as relações de correlação entre as velocidades das células ativas no sistema

analisado. Com base nos padrões de distribuição e nas análises de DQM, fica claro que o sistema apresenta com comportamento anômalo, porém assegurando a validade do Teorema de Khinchin e baixa relevância de eventos passados nos comportamentos futuros do sistema. matriciais.

### 3.17 RETROCEDER

#### 3.17.1 Definição

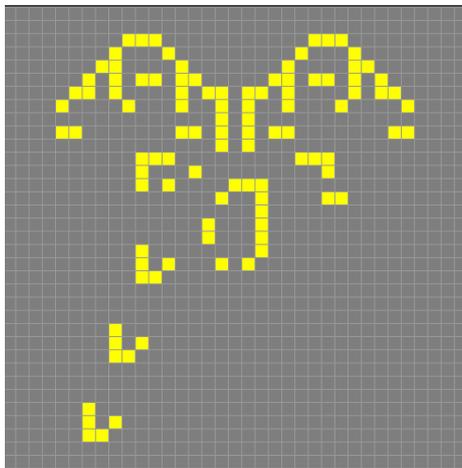


Figura 130 – Estrutura celular que caracteriza o objeto composto denominado Retroceder (Fonte: [76]).

O objeto Retroceder (simulação disponível em <https://playgameoflife.com/lexicon/backrake>) diz respeito a uma estrutura classificada como “puffer”, cuja característica principal é se deslocar pela rede como uma nave espacial. Ademais, também é descrito como um “rake”, pois ao locomover-se libera simultaneamente objetos classificados como naves espaciais pelo caminho por onde percorreu.

As estruturas que inauguraram essa categoria de ACs apresentavam uma taxa de deslocamento típica e moviam-se com um ângulo de 90° em relação a grade. Posteriormente objetos com velocidades menores e ângulos de propagação distintos foram descobertos.

O modelo ilustrado na Figura 130 foi encontrado por Jason Summers. Trata-se de uma estrutura de crescimento infinito, e que, portanto, não apresenta uma determinada geração em que ocorra estabilização.

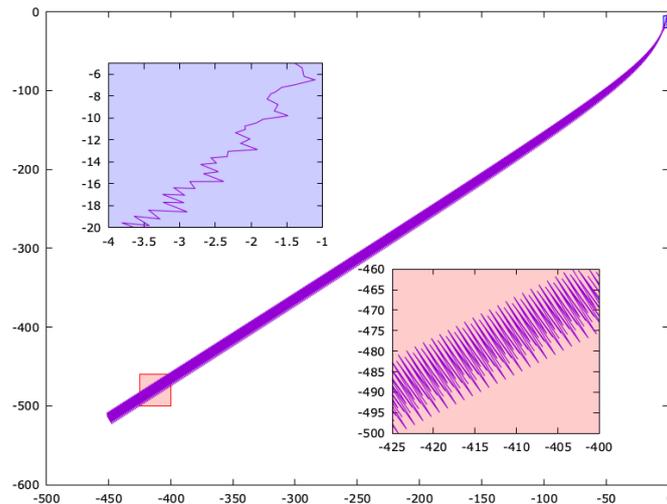


Figura 131 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura Retroceder.

Caracteriza-se por apresentar periodicidade. A cada quantidade fixa de tempo deixa para trás planadores, que continuam seus próprios caminhos consoante suas propriedades intrínsecas, enquanto o corpo principal avança indefinidamente em direção ao norte do sistema regular de células.

A Figura 131 ilustra a trajetória do centro de massa com base nas posições médias, conforme Eq. (28).

### 3.17.2 Número de Células

O número de células exibido na Figura 132, relativo ao modelo denominado Retroceder, é determinado tanto pelos elementos da configuração inicial—que formam o corpo principal—quanto pelos objetos ejetados por essa estrutura. Este sistema dinâmico dispersa cinco células vivas em intervalos de tempo fixos à medida que se desloca pelo espaço. O corpo principal é marcado por frequentes ocorrências de morte e renovação celular, e são essas mudanças estruturais que facilitam seu movimento. Assim, a flutuação no número de células no sistema está intrinsecamente ligada à taxa de variação dos elementos que são adicionados, nascem ou morrem na matriz.

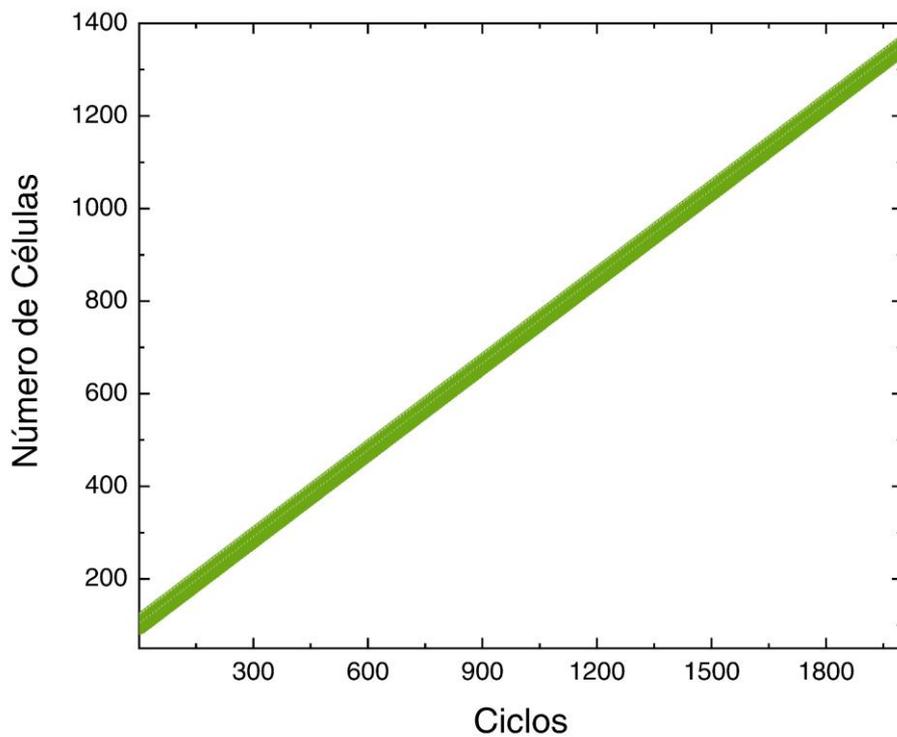


Figura 132 – Números de células ao longo das gerações da estrutura denominada Retroceder.

### 3.17.3 Assimetria e Curtose

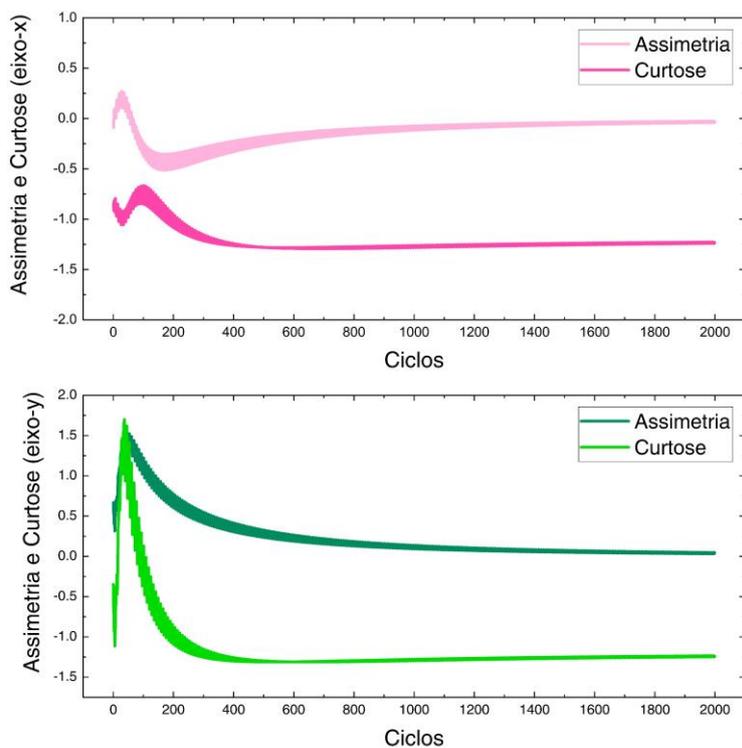


Figura 133 – Assimetria e curtose associada aos componentes de posição da estrutura Retroceder.

Avaliando as informações reunidas nos gráficos da Figura 133, identifica-se duas modalidades distintas em relação a assimetria e apenas uma para as curtoses concernentes aos dados obtidos.

A assimetria em  $x$  no princípio apresentou valores positivos. Porém, após aproximadamente 50 gerações seus valores desviaram-se para regiões negativas até a conclusão da simulação aproximando-se de  $\zeta_x = 0$ . Neste sentido, medidas negativas descrevem o domínio dos dados de assimetria associados a variável  $x$ , o que configura uma distribuição assimétrica com cauda alongada à esquerda.

Por outro lado, a assimetria associada a variável  $y$  é predominantemente caracterizada por números positivos, produzindo um prolongamento dos dados denominado cauda, para a direita tendendo a uma simétrica; como no caso de  $\zeta_x$ . Estas propriedades qualificam a assimetria como positiva ou com cauda alongada à direita.

As informações de curtose para  $x$  são definidas exclusivamente por medidas negativas. Em relação a curtose relativa a  $y$ , no início dos pontos gráficos alguns dados são positivos. Porém, após cerca de 96 etapas de tempo o regime se torna plenamente negativo. Ambas as curtoses apresentam tendências gerais para valores abaixo de zero, assinalando para classificações platicúrticas.

#### 3.17.4 Aceleração

Os padrões das componentes  $x$  e  $y$  da aceleração (Figura 134) revelam duas fases distintas experimentadas por essa estrutura. Na fase inicial da simulação, a aceleração apresenta picos de notáveis magnitudes (veja o subgráfico da Figura 134). No entanto, após aproximadamente 35 gerações, esses picos declinam acentuadamente, estabilizando a aceleração em ambos os eixos.

A pesquisa também investigou o impacto desses picos de aceleração nas distribuições das partículas. Foram identificadas regiões de força intensa e comparadas com as respectivas áreas nas distribuições de assimetria e curtose. Para o eixo  $x$ , os pontos de interesse são (2,91, 13,68) e (14,10, -37,50), onde a assimetria aumentou e a curtose diminuiu. Em relação ao eixo  $y$ , os mesmos picos de força foram observados. No entanto, as medidas de distribuição continuaram um padrão de crescimento já existente antes dos picos, o que torna inconclusiva a relação de influência dessas forças nos elementos do sistema.

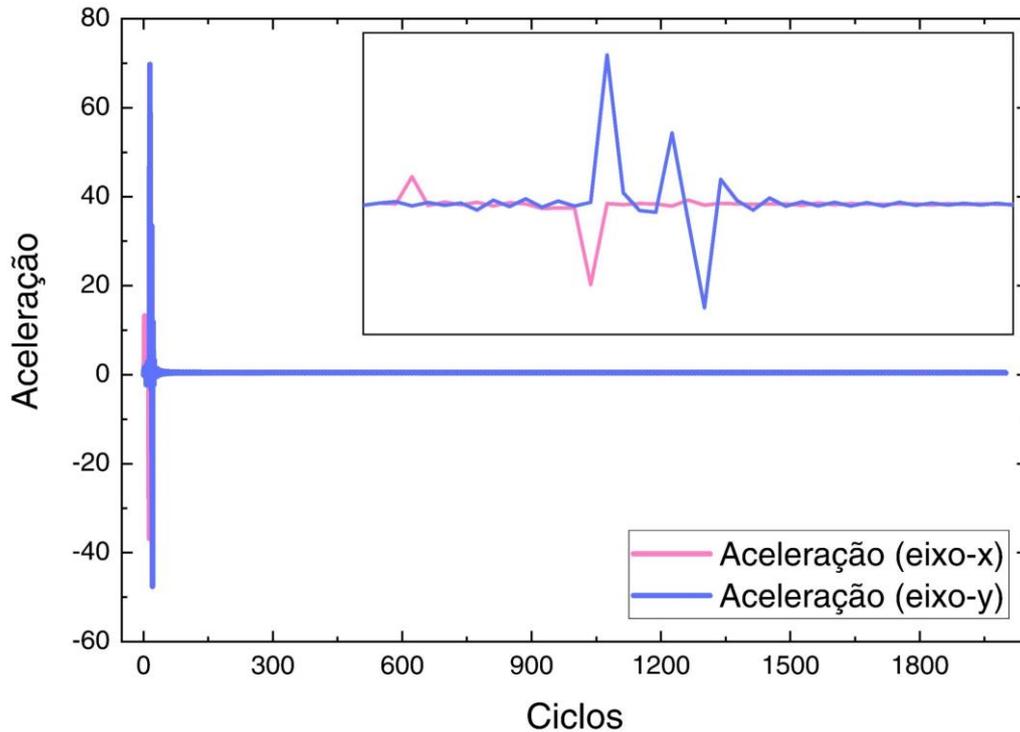


Figura 134 – Componentes  $x$  e  $y$  da aceleração em virtude da dinâmica existente na estrutura Retroceder.

### 3.17.5 Deslocamento Quadrático Médio

A Figura 135 mostra padrões de DQM tanto de forma agregada quanto separada. O comportamento das partículas nos eixos  $x$  e  $y$  permanece constante. Utilizando a Eq. (21), aplicamos ajustes não lineares aos dados experimentais coletados na simulação para determinar os seguintes expoentes de difusão:  $\alpha_x = 2,147 \pm 0,002$ ,  $\alpha_y = 1,596 \pm 0,004$  e  $\alpha_{xy} = 1,785 \pm 0,002$ . Esses resultados indicam que todas as atividades de partículas interagentes experimentam superdifusão, tornando o meio efetivo anisotrópico.

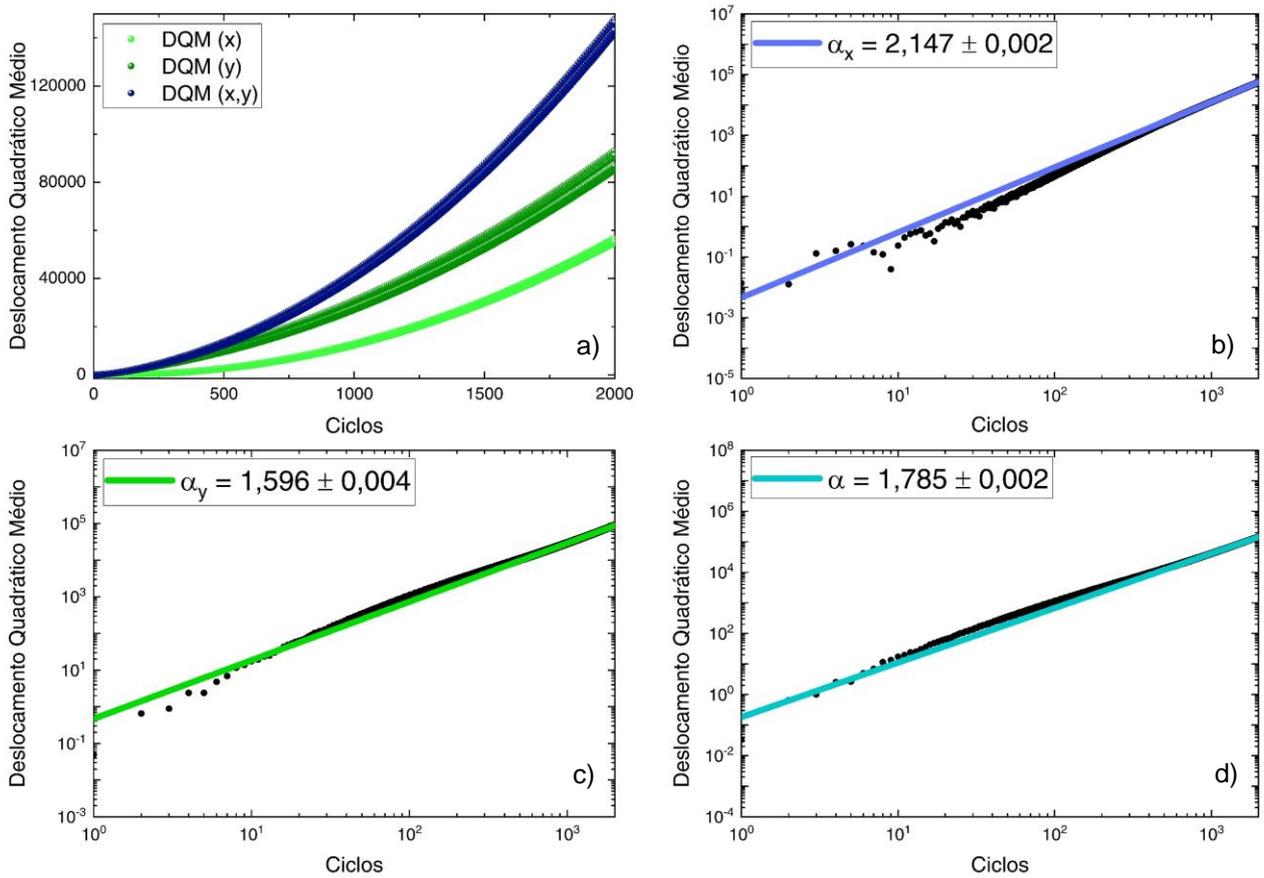


Figura 135 – Deslocamento quadrático médio do sistema Retroceder. a) Comportamento geral em escala linear. b) Eixo-x em escala logarítmica. c) Eixo-y em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

### 3.17.6 Correlação da Velocidade

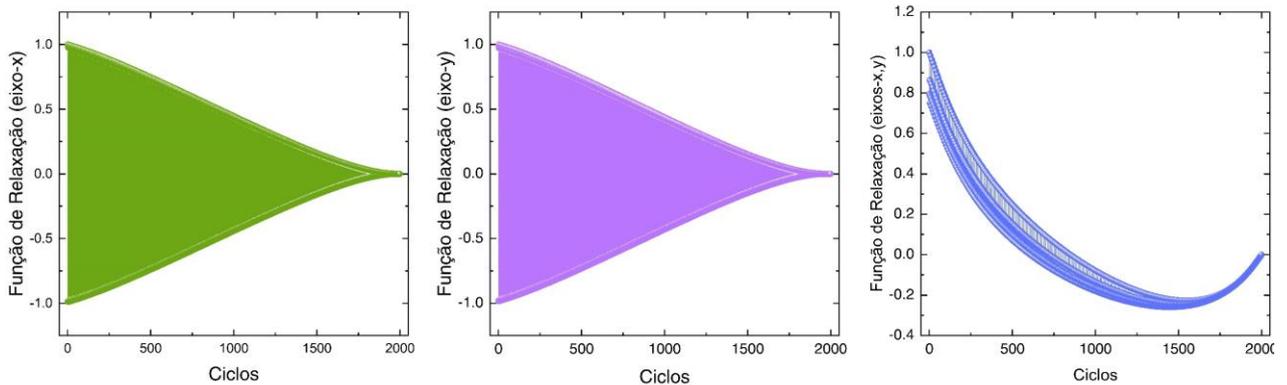


Figura 136 – Funções de Relaxação pertinentes ao modelo Retroceder.

Na Figura 136, os dados computacionais da velocidade normalizada foram gerados com base na Equação (20). Esses dados estão em consonância com análises

anteriores de deslocamento quadrático médio (DQM), que identificaram processos de difusão anômala. Vale destacar que o efeito de memória age de forma distinta para cada eixo, indicando que os sistemas são altamente correlacionados e sensíveis às condições iniciais. Nesse contexto, as correlações de velocidade nas direções  $x$  e  $y$  não apresentam comportamentos similares, sugerindo efeito anisotrópico efetivo, ainda que o Teorema de Khinchin seja assegurado em razão da estabilização na evolução do AC.

### 3.18 VACA

#### 3.18.1 Definição

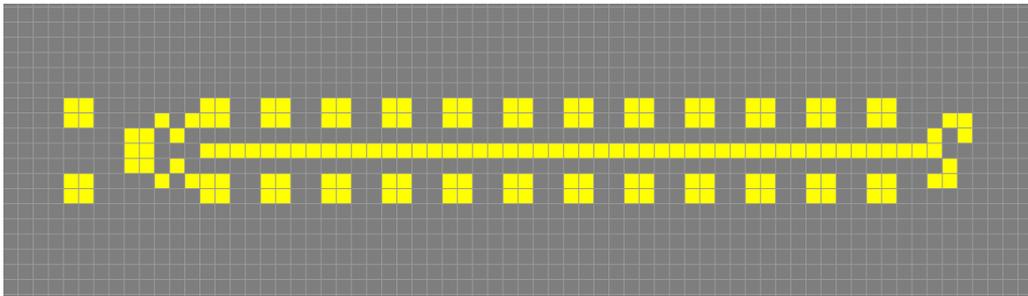


Figura 137 – Conjunto de células organizadas para formar a estrutura denominada Vaca (Fonte: [76]).

O padrão descrito na Figura 137 (simulação disponível em <https://playgameoflife.com/lexicon/cow>) consiste em um modelo classificado como um tipo de fusível. Seu arranjo espacial é caracterizado por apresentar organizações de células periódicas específicas recorrentes ao longo de toda a estrutura.

Tal qual o fusível explanado na Seção 3.11, refere-se a um modelo que se propaga como uma chama, transmitindo informações características que se espalham pela rede com caráter ondulatório.

O arranjo dos componentes que constitui a estrutura é tal que o sistema global exibe um comportamento dinâmico progressivo. Agrupamentos celulares entre objetos imóveis realizam movimentos de vai e vem, da esquerda para a direita, fazendo com que os blocos da estrutura vão se desfazendo gradativamente.

Quando a onda de células vivas é transmitida pela rede até o final do arranjo, o modelo começa uma nova fase de dinâmica celular. Interações entre elementos ativos e estáticos começam a provocar deslocamentos irregulares inicialmente restritos a pequenas regiões, mas que ampliam seu alcance com o decorrer das gerações.

Nesse interim objetos planadores são gerados, sendo espalhados para várias direções. No corpo principal o modelo forma estruturas estáveis e cíclicas, encontrando equilíbrio no passo de tempo de número 1137.

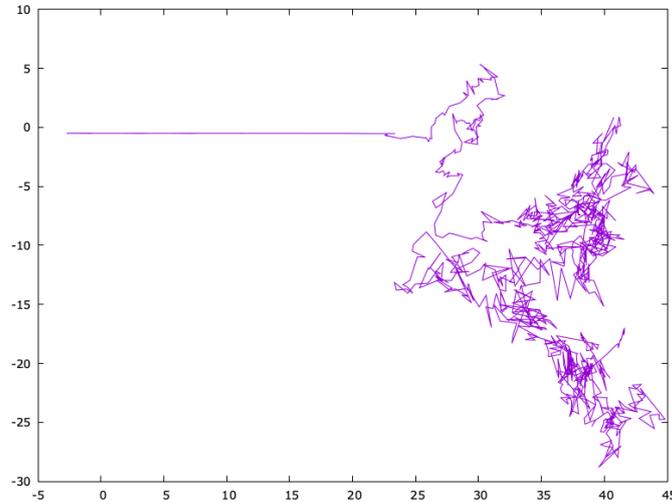


Figura 138 – Trajetória do centro de massa das células em estado "vivo" da estrutura Vaca.

A rapidez com que ocorre a dinâmica de queima depende necessariamente do nível de espaçamento existente entre o conjunto selecionado e organizado de naturezas ativas e inativas que compõem o modelo.

A Eq. (28) serve como base para a Figura 138, que representa graficamente a trajetória do centro de massa com base nas posições médias das células vivas da estrutura intitulada Vaca.

### 3.18.2 Número de Células

A modificação da estrutura chamada Vaca ocorre em duas etapas distintas (veja Figura 139). Na primeira etapa, as células do corpo principal são progressivamente destruídas, movendo-se em direção ao lado direito da estrutura. Uma vez alcançado esse ponto, a segunda fase se inicia. Nesta etapa, a estrutura começa a se deslocar de forma constante e a gerar diferentes tipos de padrões: estáveis, cíclicas e móveis. Além disso, durante essa segunda fase, ocorrem mortes e nascimentos de células de forma contínua.

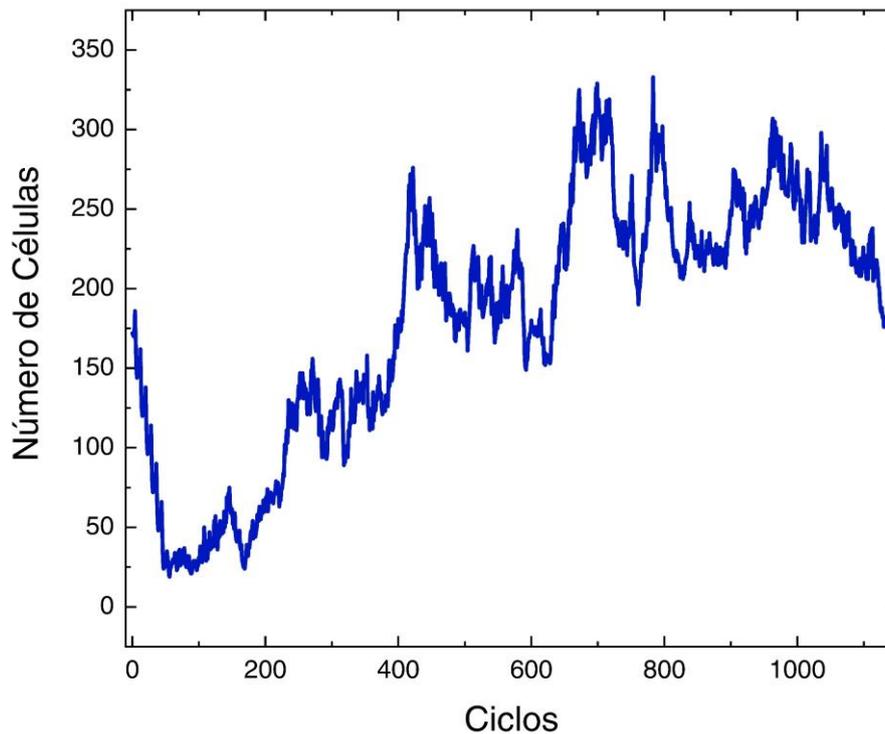


Figura 139 – Número de células variável para a estrutura denominada Vaca.

### 3.18.3 Assimetria e Curtose

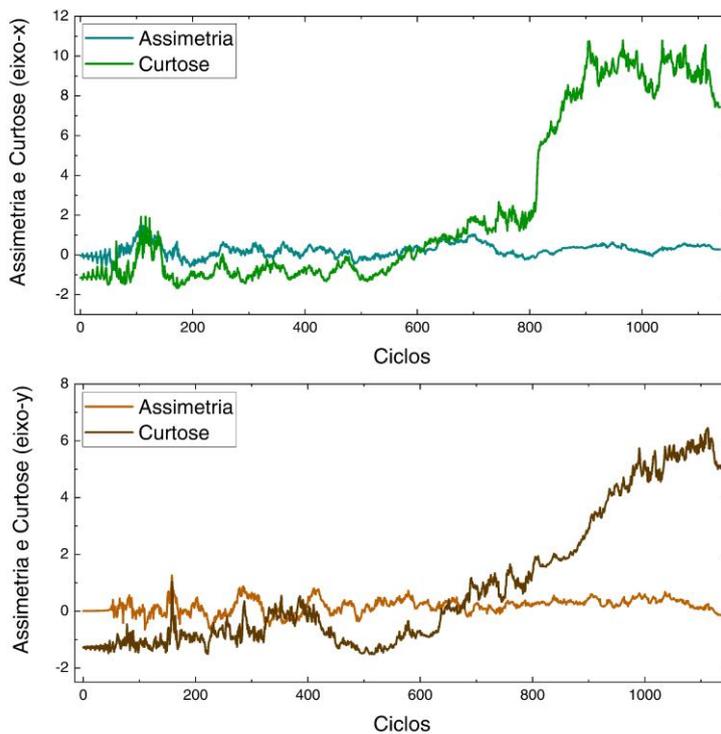


Figura 140 – Assimetria e Curtose relativas aos elementos de posição do modelo denominado Vaca (Fonte: autor).

A Figura 140 mostra as assimetrias e curtoses relacionadas as variáveis  $x$  e  $y$ . As assimetrias das distribuições de ambas as variáveis oscilam entre regiões positivas e negativas consoante a  $\zeta = 0$ . Porém, em média, seus dados apresentam a tendência de se espalharem para áreas positivas do gráfico. Estas qualidades definem a distribuição assimétrica positiva, a qual é a modalidade de ambas assimetrias da estrutura avaliada neste tópico.

E de forma análoga, as curtoses de  $x$  e  $y$  começam em localidades negativas e, aproximadamente após 600 ciclos, passam a distribuir-se em faixas positivas. Em termos gerais ambas as curvas se inclinam para os valores positivos da escala, indicando que podem ser categorizadas como distribuições leptocúrticas.

#### 3.18.4 Aceleração

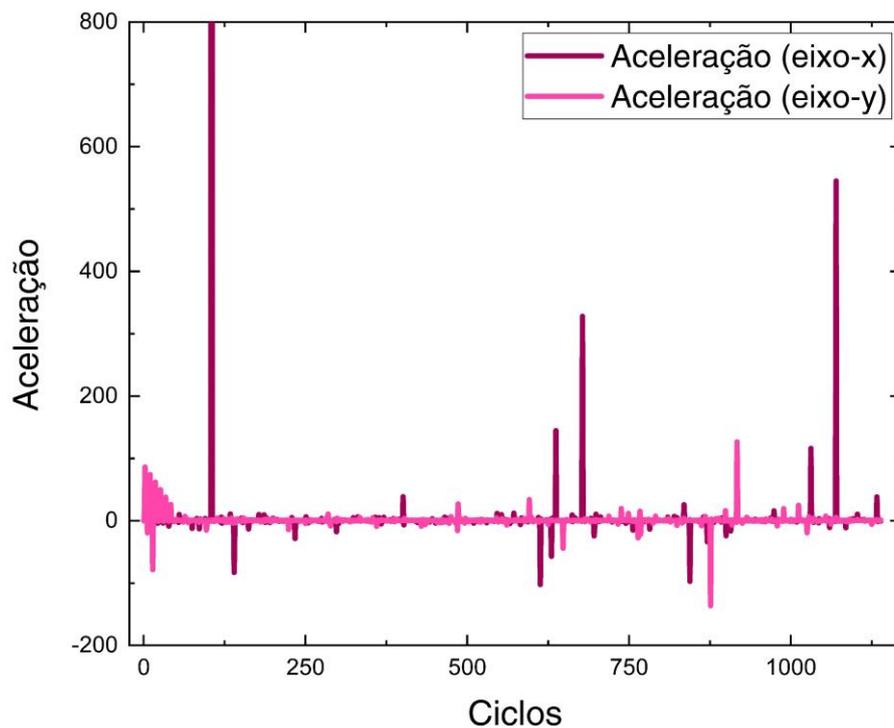


Figura 141 – Componentes  $x$  e  $y$  da aceleração dos componentes pertencentes ao modelo Vaca.

A estrutura conhecida como "Vaca" mostra variações na aceleração (veja Figura 141), com regiões de força tanto mais quanto menos intensas identificadas durante toda a simulação. Os dois principais picos de aceleração para o eixo  $x$  foram localizados em (104,31, 4,71E13) e (1068,99, 545,39). No primeiro pico, observou-se um aumento sutil na curtose, enquanto no segundo houve um ligeiro decréscimo na assimetria.

Quanto ao eixo  $y$ , os picos mais elevados ocorreram em (876,06, -137,27) e (916,65, 129,64). No segundo pico, notou-se apenas uma redução leve na assimetria. Esses dados sugerem que, apesar das variações significativas em força, o desenvolvimento global do sistema não é substancialmente afetado.

Essa resistência a mudanças drásticas pode estar relacionada ao fato de que o sistema, à medida que se desenvolve, ocupa áreas cada vez mais extensas. Isso torna improvável que forças localizadas tenham um impacto considerável sobre uma região tão ampla.

### 3.18.5 Deslocamento Quadrático Médio

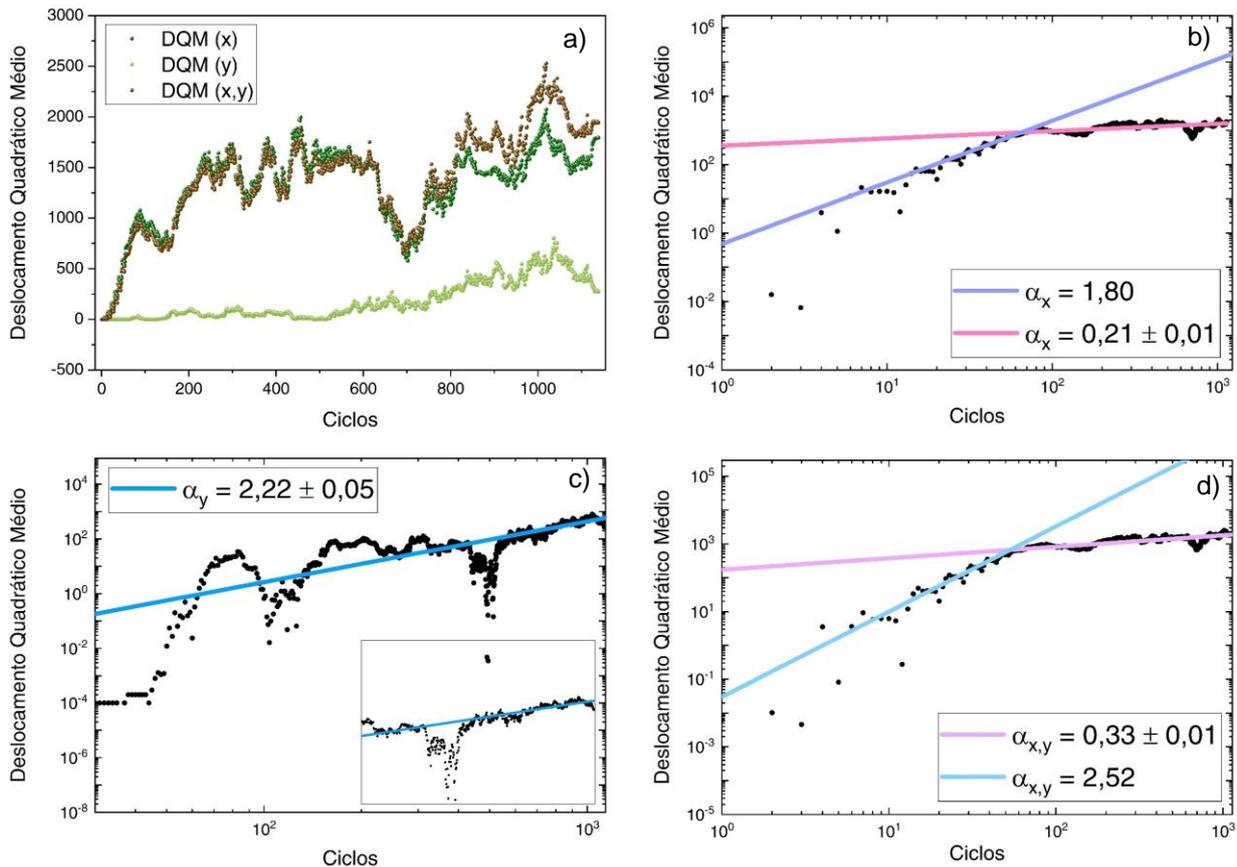


Figura 142 – Deslocamento quadrático médio do sistema Vaca. a) Comportamento geral em escala linear. b) Eixo- $x$  em escala logarítmica. c) Eixo- $y$  em escala logarítmica. d) Resultante em escala logarítmica.

A Figura 142 apresenta quatro gráficos relacionados ao DQM da estrutura Vaca. O primeiro gráfico (Figura 142a) fornece uma visão geral das atividades nos eixos  $x$  e  $y$ , enquanto os gráficos subsequentes detalham as mudanças experimentadas individualmente e em conjunto por esse sistema.

Utilizamos o software Origin para gerar funções de ajuste para os dados em  $x$ ,  $y$  e  $xy$ , com o objetivo de determinar os expoentes de difusão, baseando-nos na Eq. (21). Os gráficos para  $x$  (Figura 142b) e  $xy$  (Figura 142d) revelam duas diferentes fases de difusão. Inicialmente, observa-se um comportamento superdifusivo com  $\alpha_x = 1,8$ , que depois experimenta uma notável redução e se estabiliza em  $\alpha_x = 0,21 \pm 0,01$ , indicando um processo de subdifusão.

Em relação ao eixo  $y$ , o sistema começa com um comportamento irregular, que se torna mais ordenado ao longo dos ciclos, resultando em um regime superdifusivo hiper-balístico com  $\alpha_y = 2,22 \pm 0,48$ .

Finalmente, quanto à dinâmica no plano  $xy$ , o expoente de difusão inicial é  $\alpha_{xy} = 2,52$ . Após 50 gerações, o sistema entra em um regime subdifusivo, estabilizando-se em  $\alpha_{xy} = 0,33 \pm 0,01$ .

### 3.18.6 Correlação da Velocidade

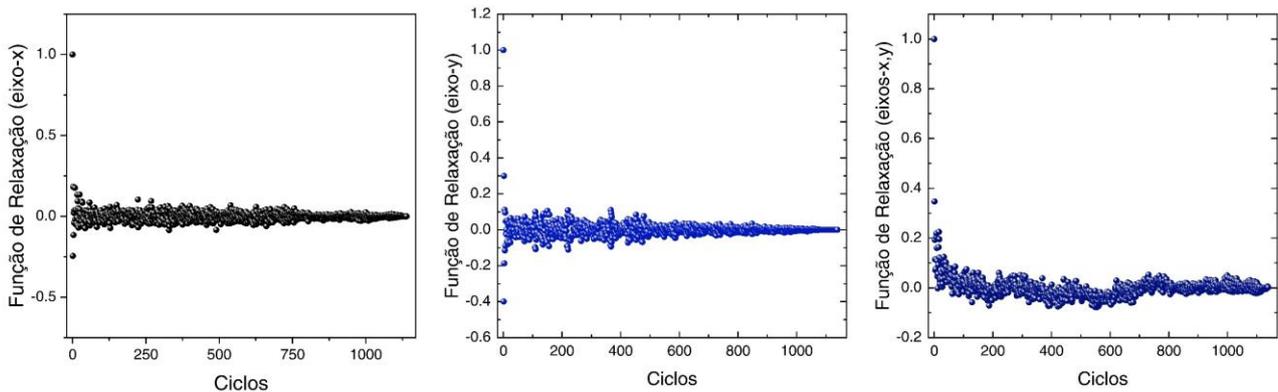


Figura 143 – Funções de Relaxação do sistema denominado Vaca.

As funções de relaxação demonstradas na Figura 143 foram desenvolvidas em conformidade com a Eq. (24), a qual estabelece uma conexão entre as funções de relação e as correlações de velocidade dos componentes do modelo.

Diante do aspecto das três distribuições, observa-se a perda do efeito de memória em relação às condições iniciais, conduzindo à validade do Teorema de Khinchin.

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, inicialmente realizamos uma revisão bibliográfica abrangente sobre ACs, abordando seu contexto histórico, desenvolvimento técnico-científico, conceitos básicos, propriedades e aplicações. Em particular, a pesquisa focou no JdV, um tipo específico de AC, examinando sua evolução histórica e conceitual.

Também investigamos o fenômeno físico da difusão, incluindo contribuições significativas de Sutherland, Einstein e Langevin. Consideramos conceitos matemáticos fundamentais como a Equação de Langevin Generalizada e o Teorema da Flutuação-Dissipação, além de variáveis como deslocamento quadrático médio e expoente de difusão.

Com o objetivo de estudar a difusão em ACs, selecionamos 18 estruturas do Léxico de Silver para análise estatística. Desenvolvemos um programa em Python para simular essas estruturas no JdV, registrando várias métricas, como número de células, posições médias, velocidades relativas, acelerações, correlações das velocidades normalizadas e das acelerações, deslocamentos quadráticos médios, velocidades quadráticas, medidas de assimetria e de curtose.

Após a simulação, analisamos a distribuição de dados coletados, identificando diferentes regimes de força e sua influência sobre as partículas da rede. Com base nos DQMs e nas correlações de velocidade, classificamos os tipos de difusão para cada sistema de AC.

Tabela 1. Autômatos celulares simulados e respectivos resultados a respeito do expoente de difusão e subsequente classificação deste fenômeno.

AUTÔMATOS CELULARES	COEFICIENTES DE DIFUSÃO	CLASSIFICAÇÃO
Arma de Planador	$\alpha_x = 2,298 \pm 0,004$ $\alpha_y = 2,305 \pm 0,004$ $\alpha_{x,y} = 2,333 \pm 0,004$	Superdifusão Superdifusão Superdifusão
Atirador de Ponta	$\alpha_x = 2,47 \pm 0,01$ $\alpha_y = 2,59 \pm 0,01$ $\alpha_{x,y} = 2,59 \pm 0,01$	Superdifusão Superdifusão Superdifusão
B-Heptomino	$\alpha_x = 1,64 \pm 0,19$ $\alpha_y = 0,67 \pm 0,07$ $\alpha_{x,y} = 0,80 \pm 0,08$	Superdifusão Subdifusão Subdifusão

Bolota	$\alpha_x = 0,15 \pm 0,01$ $\alpha_y = 1,81 \pm 0,03$ $\alpha_{x,y} = 0,38 \pm 0,01$	Subdifusão Superdifusão Subdifusão
Bombardeiro B-52	$\alpha_x = 1,45 \pm 0,02$ $\alpha_y = 0,96 \pm 0,01$ $\alpha_{x,y} = 1,08 \pm 0,02$	Superdifusão Difusão Normal Difusão Normal
Crescimento Infinito (modelo 1)	$\alpha_x = 2,86 \pm 0,02$ $\alpha_y = 2,78 \pm 0,02$ $\alpha_{x,y} = 2,83 \pm 0,02$	Superdifusão Superdifusão Superdifusão
Crescimento Infinito (modelo 2)	$\alpha_x = 2,97 \pm 0,02$ $\alpha_y = 2,83 \pm 0,02$ $\alpha_{x,y} = 2,89 \pm 0,02$	Superdifusão Superdifusão Superdifusão
Crescimento Infinito (modelo 3)	$\alpha_x = 1,42 \pm 0,01$ $\alpha_y = 0,0 \pm 0,0$ $\alpha_{x,y} = 1,48 \pm 0,01$	Superdifusão Não difunde Superdifusão
Duro de Matar	$\alpha_x = 0,71 \pm 0,20$ $\alpha_y = 2,45 \pm 0,14$ $\alpha_{x,y} = 1,00$	Subdifusão Superdifusão Difusão Normal
E-Heptomino	$\alpha_x = 2,85 e 0,29 \pm 0,06$ $\alpha_y = 2,63 \pm 0,29$ $\alpha_{x,y} = 0,31 \pm 0,06 e 2,45$	Superdifusão → Subdifusão Superdifusão Subdifusão → Superdifusão
Fusível	$\alpha_x = 2,55 \pm 0,05$ $\alpha_y = 2,00$ $\alpha_{x,y} = 2,62$	Superdifusão Superdifusão Superdifusão
Fx119	$\alpha_x = 3,05 \pm 0,05$ $\alpha_y = 1,0 e 0,0$ $\alpha_{x,y} = 1,21 \pm 0,06$	Superdifusão Difusão Normal → Não difunde Superdifusão
HWSS	$\alpha_x = 1,9999600 \pm 0,0000004$ $\alpha_y = 0,0$ $\alpha_{x,y} = 2,000130 \pm 0,0000004$	Superdifusão Não difunde Superdifusão
Planador	$\alpha_x = 2,00109 \pm 0,00007$ $\alpha_y = 1,99922 \pm 0,00007$ $\alpha_{x,y} = 2,00280 \pm 0,00002$	Superdifusão Superdifusão Superdifusão
Pombo	$\alpha_x = 0,29 \pm 0,07$	Subdifusão

	$\alpha_y = 1,83 \pm 0,12$ $\alpha_{x,y} = 1,41 \pm 0,10$	Superdifusão Superdifusão
Quase Cavalaria	$\alpha_x = 2,00, -1,65 e -1,60$ $\alpha_y = 0,35 e 1,08 \pm 0,03$ $\alpha_{x,y} = 1,50, 2,75 e 0,84 \pm 0,03$	Superdifusão → Contração → Contração Subdifusão → Difusão Normal Superdifusão → Superdifusão → Subdifusão
Retroceder	$\alpha_x = 2,147 \pm 0,002$ $\alpha_y = 1,596 \pm 0,004$ $\alpha_{x,y} = 1,785 \pm 0,002$	Superdifusão Superdifusão Superdifusão
Vaca	$\alpha_x = 1,80 e 0,21 \pm 0,01$ $\alpha_y = 2,22 \pm 0,05$ $\alpha_{x,y} = 0,33 \pm 0,01 e 2,52$	Superdifusão → Subdifusão Superdifusão Subdifusão → Superdifusão

De forma geral, os resultados elencados na tabela 1 podem ser reunidos no gráfico a seguir:

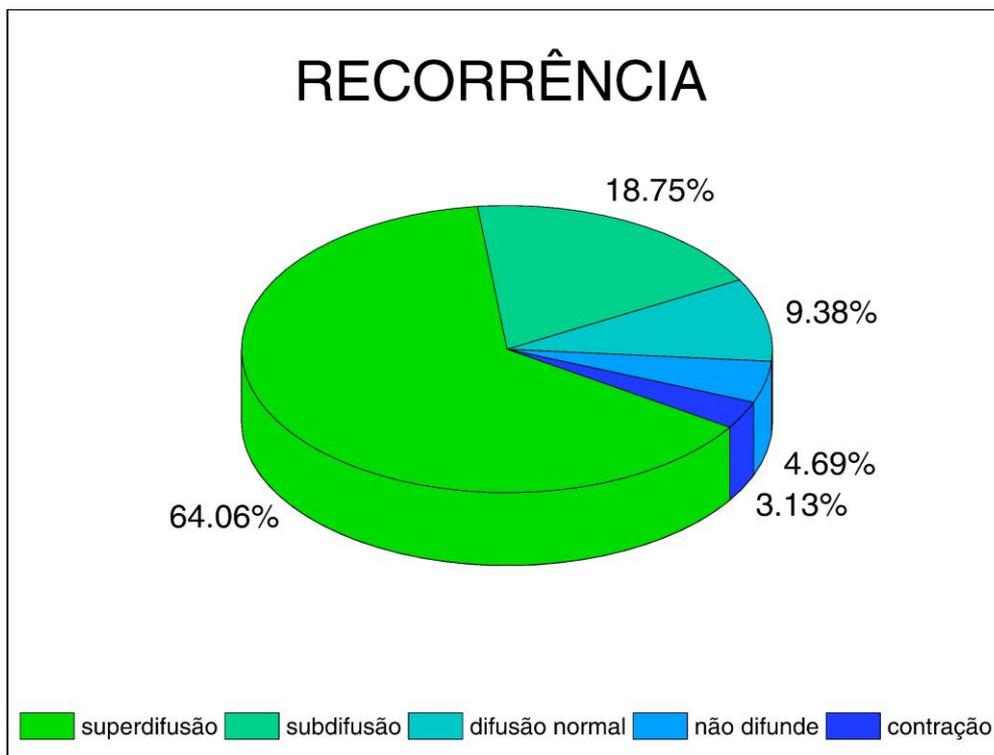


Figura 144 – Percentual das modalidades de difusão identificadas nas dezoito estruturas avaliadas.

Os resultados, resumidos na Tabela 1, mostram que a superdifusão é o regime predominante nas 18 estruturas e nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $xy$  avaliados. Além disso, constatamos através da análise de funções de relaxação que, em geral, todos os sistemas convergem para estados de difusão anômala. Isso sugere a predominância de regimes

anômalos sobre a dinâmica da posição média das células ativas, mesmo em casos onde são observados regimes normais ou não difusivos.

De acordo com a Figura 144, constata-se que o regime de superdifusão predomina nas 18 estruturas avaliadas. Dos eventos identificados, 41 se enquadram nesta categoria de difusão.

É notável que entre os diversos tipos de regimes de difusão observados, também foi identificado o comportamento hiper-balístico. Esse fenômeno raro implica em um transporte de partículas extremamente eficiente e sugere interações complexas dentro do sistema. A identificação deste regime torna evidente a necessidade de mais estudos focados para decifrar as condições sob as quais tal comportamento ocorre e suas implicações para a dinâmica geral do sistema.

Em segundo lugar em frequência vem a subdifusão, com 12 ocorrências registradas. Além disso, o estudo revelou 6 casos de difusão normal, 3 instâncias de sistemas que não exibem difusão e duas ocorrências de comportamento remissivo.

Esses dados fornecem um panorama abrangente dos diversos tipos de dinâmicas difusivas presentes nas estruturas estudadas, oferecendo insights valiosos para a compreensão geral do fenômeno de difusão em sistemas complexos.

Nossa análise sugere que os resultados observados podem ser atribuídos majoritariamente à ausência de efeitos dissipativos na dinâmica do sistema, juntamente com a existência de um potencial aleatório efetivo que advém das regras fundamentais estabelecidas por John Conway para o JdV. Este achado é de relevância significativa, pois evidencia a importância do efeito de memória nas condições iniciais do sistema, o que se reflete nas propriedades dinâmicas capturadas pelas curvas de relaxação.

O rigor dessas conclusões é fortalecido pela validade do Teorema de Khinchin, que é uma condição essencial para garantir a aplicabilidade da hipótese ergódica no sistema em estudo. A conformidade com a hipótese ergódica, por sua vez, valida o Teorema da Flutuação-Dissipação Generalizada (TFDG) e outros princípios estatísticos associados, conferindo assim uma elevada confiabilidade aos resultados obtidos.

Em suma, a observância dessas teorias e hipóteses matemáticas não apenas fortalece a robustez dos nossos resultados, mas também realça a sofisticação do modelo de autômato celular utilizado, particularmente no que diz respeito à sua sensibilidade às condições iniciais e a possíveis estados de difusão anômala. Dessa forma, nossa pesquisa contribui para uma compreensão mais completa e matematicamente

rigorosa dos fenômenos de difusão em sistemas complexos, como é o caso dos autômatos celulares representados pelo JdV.

Posteriormente, pretende-se desenvolver o modelo proposto nesta pesquisa, ampliando o espectro ao contemplar outras estruturas, com diferentes configurações iniciais, que produzem interessantes resultados e populações de células. Deseja-se implementar simulações para estruturas com elevados índices de gerações.

Ademais, propõe-se considerar outros aspectos para um estudo mais abrangente e detalhado atrelado a Física Estatística. Consoante as medidas obtidas com a simulação, pensa-se em avaliar as informações atreladas as correlações de força, integral das distribuições de correlação das velocidades, medidas de temperatura, entropia.

## REFERÊNCIAS

- [1] WOLFRAM, Stephen. Cellular automata as models of complexity. *Nature* 311, 419–424 (1984). DOI: <<https://doi.org/10.1038/311419a0>>
- [2] LOCK, Robin H. et al. *Statistics: Unlocking the Power of Data*. 1st Edition (2017).
- [3] MATTONS, T. G.; MOREIRA, J. G. Universality Classes of Chaotic Cellular Automata. *Brazilian Journal of Physics*, vol. 34, no. 2A, June, 2004. DOI: <<https://doi.org/10.1590/S0103-97332004000300024>>
- [4] OLAMI, Zeev; FEDER, Hna Jacob S. and CHRISTENSEN, Kim. Self-Organized Criticality in a Continuous, Nonconservative Cellular Automaton Modeling Earthquakes. *Physical Review Letters*, vol. 68, number 8, 24 February, 1992. DOI: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.1244>>
- [5] SCHULMAN, L. S. e SEIDEN, P. E. Mecânica Estatística de um Sistema Dinâmico Baseado no Jogo da Vida de Conway. *Journal of Statistical Physics*, Vol. 19, No. 3, 293–314 (1978). DOI: <<https://doi.org/10.1007/BF01011727>>
- [6] BOSCH, Robert A. Integer Programming and Conway's Game of Life. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Vol. 41, No. 3, pp. 594–604, 1999. DOI: <10.1137/S0036144598338252>
- [7] WOLFRAM, Stephen. Universality and Complexity in Cellular Automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 10, Issues 1–2, January 1984, Pages 1-35. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(84\)90245-8](https://doi.org/10.1016/0167-2789(84)90245-8)
- [8] LAPAS, Luciano Calheiros. Difusão anômala e termodinâmica de nanopartículas. Tese de Doutorado em Física, Universidade de Brasília, 2008. Disponível em: <[http://www.realp.unb.br/jspui/bitstream/10482/4563/1/2008\\_LucianoCalheirosLapas.pdf](http://www.realp.unb.br/jspui/bitstream/10482/4563/1/2008_LucianoCalheirosLapas.pdf)>
- [9] GAN, Z. et al. Um esquema eficaz de compressão-criptografia de imagem baseado em detecção compressiva (CS) e jogo da vida (GOL). *Computação Neural e Aplicação* 32, 14113–14141 (2020). DOI: <<https://doi.org/10.1007/s00521-020-04808-8>>
- [10] ADAMATZKY, Andrew; MARTÍNEZ, Genaro Juárez and MORA, Juan Carlos Seck Tuoh. Phenomenology of Reaction-Diffusion Binary-State Cellular Automata. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 16, No. 10 (2006) 2985–3005. DOI: <<https://doi.org/10.1142/S0218127406016598>>
- [11] SOTO, José Manuel Gómez and WUENSCHÉ, Andrew. The X-rule: universal computation in a non-isotropic Life-like Cellular Automaton. *Nonlinear Sciences > Cellular Automata and Lattice Gases*, arXiv:1504.01434 (nlin), *Journal of Cellular Automata*, 15 March 2015. DOI: <<https://doi.org/10.48550/arXiv.1504.01434>>
- [12] REYES, Joel et al. Game of Sensors: An Energy-Efficient Method to Enhance Network Lifetime in Wireless Sensor Networks Using the Game of Life Cellular Automaton. *IEEE Access*, v. 10, p. 129687 – 129701, 2022. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3228585
- [13] MALLETT, D. G.; PILLIS, L. G. A cellular automata model of tumor-immune system interactions. *Journal of Theoretical Biology*, Volume 239, Issue 3, 7 April 2006, Pages 334-350. DOI: <<https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.08.002>>
- [14] BRECKLING, Broder. PE'ER, Guy. MATSIONOS, Yiannis G. Cellular Automata in Ecological Modelling. F. Jopp et al. (eds.), *Modelling Complex Ecological Dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011. DOI: <10.1007/978-3-642-05029-9\_8>
- [15] CECCHINI, A. Urban modelling by means of cellular automata: generalised urban automata with the help on-line (AUGH) model. *Environment and Planning B:*

Urban Analytics and City Science, Planning and Design, 1996, Volume 23, Issue 6, pages 721–732. DOI: <<https://doi.org/10.1068/b230721>>

- [16] REITER, C. A. A local cellular model for snow crystal growth. *Chaos, Solitons & Fractals*, 23(4), 1111-1119, 2005, Elsevier Ltd. All rights reserved. DOI: <[10.1016/j.chaos.2004.06.071](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.06.071)>
- [17] MARTINS, Caroline Collaço. Autômato celular aplicado no crescimento de câncer. Dissertação (Mestrado em Ciências - Área de concentração Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2010. Disponível em: <<https://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/880>>
- [18] CASTRO, Marcia Luciana Aguená. CASTRO, Reinaldo de Oliveira. Autômatos celulares: implementações de von Neuman, Conway e Wolfram. *Revista de Ciências Exatas e Tecnologia*, Vol. III, Nº. 3, Ano 2008. Disponível em: <[https://www.esalq.usp.br/lepse/imgs/conteudo\\_thumb/mini/Aut-matos-Celulares-Implementa--es-de-Von-Neumann--Conway-e-Wolfram.pdf](https://www.esalq.usp.br/lepse/imgs/conteudo_thumb/mini/Aut-matos-Celulares-Implementa--es-de-Von-Neumann--Conway-e-Wolfram.pdf)>
- [19] SARKAR, Palash. A Brief History of Cellular Automata. *Association for Computing Machinery – ACM Computing Surveys*, Vol. 32, Issue 1, pp 80–107, 01 March 2000. DOI: <https://doi.org/10.1145/349194.349202>.
- [20] FERREIRA, Giordano Bruno Santos. Modelos baseados em autômatos celulares para o planejamento de caminhos em robôs autônomos. Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Ciência da Computação, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/12573>>
- [21] CIOLPAN, Gheorghe. Autômatos Celulares. Universidade de Évora, 2022. Disponível em: <<https://dspace.uevora.pt/rdpc/handle/10174/32601>>
- [22] DALCIN, Guilherme Kruger. Simulação dos impactos do mercado imobiliário e do aumento do nível do mar no desenvolvimento urbano: agentes e autômatos celulares aplicados à estimativa de cenários futuros em Imbé e Tramandaí, RS. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Arquitetura, Programa de Pós-Graduação em Planejamento Urbano e Regional, Porto Alegre, BR-RS, 2022. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/252785>>
- [23] ROCHA, Fernando Jorge Pedro da Silva Pinto da. Sistemas Complexos, Modelação e Geosimulação da Evolução de Padrões de Uso e Ocupação do Solo. Tese de doutoramento, Geografia (Ciências da Informação Geográfica), Universidade de Lisboa, Instituto de Geografia e Ordenamento do Território, 2012. URI: <<http://hdl.handle.net/10451/6772>>
- [24] ALMEIDA, Rodolfo Maduro et al. Autômatos celulares probabilísticos aplicados à modelagem da propagação de incêndios de vegetação. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, Vol. 3, N. 1, 2015. DOI: <<https://doi.org/10.5540/03.2015.003.01.0393>>
- [25] LANZER, André Thiago de Souza. Um modelo de simulação de autômatos celulares para avaliação de condições de biodiversidade e resiliência na exploração de florestas naturais. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/86743>>
- [26] CELANI, André Araujo; CELANI, Gabriela. Interpretações Arquitetônicas dos Autômatos Celulares: conceitos e aplicações recentes. *Cadernos PROARQ: Revista de Arquitetura e Urbanismo do PROARQ*, no. 29 (Dec., 2017), p. 155-173. Disponível em: <<https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/1189094>>
- [27] SOUZA, Gustavo M.; BUCKERIDGE, Marcos S. Sistemas complexos: novas formas de ver a Botânica. *Revista Brasil. Bot.*, v.27, n.3, p.407-419, jul-set. 2004.

Disponível em:

<<https://www.scielo.br/j/rbb/a/4NqfQKWyDH8WvcXLmPRQxDR/?format=pdf&lang=pt>>

- [28] LIMA, Caio César Carvalho. O longo caminho até a sociedade da informação: dos primórdios da comunicação à interação digital. Disponível em: <<http://alfa-redi.org/sites/default/files/articles/files/caio2.pdf>>
- [29] TINÉ, Mariana; PEREZ, Liliana; HORAS, Roberto Molowny. Fundamentos teóricos de modelagem em sistemas complexos. Revista Contexto Geográfico, ISSN 2595-7236, v. 4, n. 7, 2019. DOI: <<https://doi.org/10.28998/contegeo.v4i7.8363>>
- [30] MAGNAGO, Karine F. BASSANEZI, Rodney C.; BARROS, Laécio C. Equação Logística Discreta: Novas Soluções Estacionárias na abordagem Fuzzy. Biomatemática 14 (2004), 59-80. ISSN 1679-365X. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/259297841\\_Equacao\\_Logistica\\_Discreta\\_Novas\\_Solucoes\\_Estacionarias\\_na\\_Abordagem\\_Fuzzy](https://www.researchgate.net/publication/259297841_Equacao_Logistica_Discreta_Novas_Solucoes_Estacionarias_na_Abordagem_Fuzzy)>
- [31] KUBO, R. The Fluctuation-Dissipation theorem. Rep. Prog. Phys. 29, 255 (1966). DOI: <10.1088/0034-4885/29/1/306>
- [32] BARBOSA, Vanessa Laís Valentino Soares. Localização de áreas susceptíveis à desertificação utilizando autômatos celulares em Gilbués – PI. 2019. 107 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Florestais) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Agrárias e Engenharias, Jerônimo Monteiro, 2019. Disponível em: <<http://repositorio.ufes.br/handle/10/11032>>
- [33] KUBO, Ryogo; EOKOTA, Mario; NAKAJIMA, Sadao. Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. II. Response to Thermal Disturbance. J. Phy. Soc. Jpn. 12, 1203–1211 (1957). DOI: <<https://doi.org/10.1143/JPSJ.12.1203>>
- [34] RENDELL, Paul. **A Universal Turing Machine in Conway's Game of Life.** International Conference on High Performance Computing & Simulation, 2011. DOI: <10.1109/HPCSim.2011.5999906>
- [35] CHOPARD, Bastien; DROZ, Michel. Cellular Automata Modeling of Physical Systems. Cambridge University Press (June 30, 2005).
- [36] MATTOS, Thiago de. Análise do Espaço Elementar de Autômatos Celulares com Atualização por Prioridade de Vizinhança. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica e Computação) Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2022).
- [37] GABRICK, Enrique Chipicoski. Análise da Faixa Dinâmica em Redes Neurais através de Autômatos Celulares. Dissertação (Mestrado em Ciências – Área de Concentração: Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2021. Disponível em: <<https://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/3497>>
- [38] I. V. L. COSTA, I. V. L. et al, Mixing, ergodicity and slow relaxation phenomena. Physica A, vol. 371, p. 130-134, 2006. DOI: <<https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.04.096>>
- [39] MORGADO, Rafael et al. Relation Between Anomalous and Normal Diffusion in Systems with Memory. Phys. Rev. Lett. Vol. 89, Iss. 10, 100601 (2002). DOI: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.100601>>
- [40] CHOPARD, B.; DROZ, M. (1989). Cellular Automata Approach to Diffusion Problems. In: Manneville, P., Boccara, N., Vichniac, G.Y., Bidaux, R. (eds) Cellular Automata and Modeling of Complex Physical Systems. Springer Proceedings in Physics, vol 46. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: <[https://doi.org/10.1007/978-3-642-75259-9\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-75259-9_12)>.
- [41] VAINSTEIN, M. H.; COSTA, I. V. L.; OLIVEIRA, F. A. Mixing, Ergodicity and the Fluctuation-Dissipation Theorem in Complex Systems. Lecture Notes in Physics, 688, 159-188 (2006). DOI: <[https://doi.org/10.1007/11581000\\_10](https://doi.org/10.1007/11581000_10)>

- [42] KELLY, James G.; BOYER, Everett C. Physical improvements to a mesoscopic cellular automaton model for three-dimensional snow crystal growth. *Crystal Growth Design*. 2014, 14, 3, 1392–1405. Copyright © 2014 American Chemical Society. DOI: <<https://doi.org/10.1021/cg401862u>>.
- [43] LAPAS, Luciano Calheiros et al. Khinchin Theorem and Anomalous Diffusion. *Physical Review Letters*, v. 101, Iss. 23, p. 230602, 2008. DOI: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.230602>>
- [44] NAKANO, Takaaki; HASEGAWA, Junichi; MORISHITA, Shin. Coastal oil pollution prediction by a tanker using cellular automata. *IEEE Oceanic Engineering Society. OCEANS'98. Conference Proceedings (Cat. No.98CH36259)*, Nice, France, 1998, pp. 1324-1328 vol.3. DOI: <10.1109/OCEANS.1998.726283>.
- [45] WEIMAR, Jörg R.; BOON, Jean-Pierre. Class of cellular automata for reaction-diffusion systems. *American Physical Society, Physical Review E covering statistical, nonlinear, biological, and soft matter physics*, Vol. 49, Iss. 2 – February 1994. DOI: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.1749>>.
- [46] KARAFYLLIDIS, Ioannis. THANAILAKIS, Adonios. A model for predicting fire spreading using cellular automata. *Ecological Modelling*, Volume 99, Issue 1, 16 June, Pages 87-97. DOI: <[https://doi.org/10.1016/S0304-3800\(96\)01942-4](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(96)01942-4)>
- [47] TOFFOLI, Tommaso; MARGOLUS, Norman. *Cellular Automata Machines: A New Environment for Modeling*. The MIT Press, 1987, ISBN electronic: 9780262291019. DOI: <<https://doi.org/10.7551/mitpress/1763.001.0001>>
- [48] ADAMATZKY, Andrew. *Computing in Nonlinear Media and Automata Collectives*. CRC Press, 2001.
- [49] VICHNIAC, Gérard. Simulating physics with cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 10, Issues 1–2, January 1984, Pages 96-116. DOI: <[https://doi.org/10.1016/0167-2789\(84\)90253-7](https://doi.org/10.1016/0167-2789(84)90253-7)>
- [50] DEUTSCH, Andreas; DORMANN, Sabine. *Cellular Automaton Modeling of Biological Pattern Formation Characterization, Examples, and Analysis*. Springer Science & Business Media. *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*, 2005. DOI: <10.1007/b138451>
- [51] GARDNER, Martin. Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life". *Scientific American*, Vol. 223, No. 4 (October 1970), pp. 120-123. JSTOR, <<http://www.jstor.org/stable/24927642>>
- [52] LURIE, Jacob. JH Conway. Sobre números e jogos. *Monografias LMS*, não. 6. Academic Press, Londres, Nova York e São Francisco, 1976, ix 238 pp. *The Journal of Symbolic Logic*, 63 (4), 1602-1604, 1998. DOI: <10.2307/2586671>
- [53] VON NEUMANN, John. *Theory of Self-reproducing Automata*. Edited and completed by Arthur W. Burks. University of Illinois Press, 1966. Disponível em: <<https://cba.mit.edu/events/03.11.ASE/docs/VonNeumann.pdf>>
- [54] COOK, Matthew. *Complex Systems*. Complex Systems Publications, Inc., 15 (2004) 1–40. Disponível em: <<https://wpmedia.wolfram.com/uploads/sites/13/2018/02/15-1-1.pdf>>
- [55] SUTHERLAND, William. LXXV. A dynamical theory of diffusion for non-electrolytes and the molecular mass of albumin, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 9:54, 781-785, 1905. DOI: <10.1080/14786440509463331>
- [56] EINSTEIN, Albert. *Investigation on the theory of the Brownian movement*. Dover Publications, INC., New York, 1956. Disponível em: <[https://www.maths.usyd.edu.au/u/UG/SM/MATH3075/r/Einstein\\_1905.pdf](https://www.maths.usyd.edu.au/u/UG/SM/MATH3075/r/Einstein_1905.pdf)>

- [57] LANGEVIN, Paul. Sur la théorie du mouvement brownien. C. R. Acad. Sci. (Paris) 146, 530–533 (1908). Disponível em: <<https://www.physik.uni-augsburg.de/theo1/hanggi/History/Langevin1908.pdf>>
- [58] LIOLIS, Orestis; SIKAKOULIS, Georgios, Ch. e ADAMATZKY, Andrew. Conway's Game of Life in Quantum-dot Cellular Automata. Microelectronics Journal, Volume 109, March 2021, 104972. DOI: <<https://doi.org/10.1016/j.mejo.2020.104972>>
- [59] MORI, Hazime. Transport, Collective Motion, and Brownian Motion. Progress of Theoretical Physics, Volume 33, Issue 3, March 1965, Pages 423–455. DOI: <<https://doi.org/10.1143/PTP.33.423>>
- [60] ZWANZIG, Robert. Memory Effects in Irreversible Thermodynamics. Physical Review, 124(4), 983–992, November 1961. DOI: <10.1103/PhysRev.124.983>
- [61] COSTA, I. V. L. et al. The Fluctuation-Dissipation Theorem Fails for Fast Superdiffusion. Europhysics Letters, Volume 63, Number 2 (2003). DOI: 10.1209/epl/i2003-00514-3
- [62] ZWANZIG, Robert. Nonequilibrium Statistical Mechanics. Oxford University Press, 2001. Disponível em: <[http://vattay.web.elte.hu/lectures/Nonequilibrium%20Statistical%20Physics/Robert%20Zwanzig%20-%20Nonequilibrium%20Statistical%20Mechanics%20\(2001,%20Oxford%20University%20Press,%20USA\).pdf](http://vattay.web.elte.hu/lectures/Nonequilibrium%20Statistical%20Physics/Robert%20Zwanzig%20-%20Nonequilibrium%20Statistical%20Mechanics%20(2001,%20Oxford%20University%20Press,%20USA).pdf)>
- [63] MORI, Hazime. A Continued-Fraction Representation of the Time-Correlation Functions. Progress of Theoretical Physics, Volume 34, Issue 3, September 1965, Pages 399–416. DOI: <<https://doi.org/10.1143/PTP.34.399>>
- [64] KRAMERS, H. A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. Physica, Volume 7, Issue 4, April 1940, Pages 284-304, 1940. DOI: <[https://doi.org/10.1016/S0031-8914\(40\)90098-2](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(40)90098-2)>
- [65] KUBO, Ryogo. Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problem. Journal of the Physical Society of Japan, vol. 12, no. 6, pp. 570–586, 1957. Disponível em: <<https://journals.jps.jp/doi/pdf/10.1143/JPSJ.12.570>>
- [66] MORI, Hazime. Transport, Collective Motion, and Brownian Motion. Progress of Theoretical Physics, vol. 33, no. 3, pp. 423–455, 1965. Disponível em: <<https://courses.physics.ucsd.edu/2020/Fall/physics210b/Mori-1965.pdf>>
- [67] ZWANZIG, Robert. Nonequilibrium Statistical Mechanics. Oxford University Press, 2001. Disponível em: <[http://vattay.web.elte.hu/lectures/Nonequilibrium%20Statistical%20Physics/Robert%20Zwanzig%20-%20Nonequilibrium%20Statistical%20Mechanics%20\(2001,%20Oxford%20University%20Press,%20USA\).pdf](http://vattay.web.elte.hu/lectures/Nonequilibrium%20Statistical%20Physics/Robert%20Zwanzig%20-%20Nonequilibrium%20Statistical%20Mechanics%20(2001,%20Oxford%20University%20Press,%20USA).pdf)>
- [68] LAPAS, Luciano Calheiros et al. Non-equilibrium fluctuation-dissipation theorem for stationary anomalous diffusion. Acta Physica Polonica. B, v. 46, p. 1155, 2015. DOI: <10.5506/APhysPolB.46.1155>
- [69] FLEKKØY, Eirik G.; HANSEN, Alex; BALDELLI, Beatrice. Hyperballistic Superdiffusion and Explosive Solutions to the Non-Linear Diffusion Equation. Frontiers in Physics, Vol. 9, 17 March 2021. DOI: <<https://doi.org/10.3389/fphy.2021.640560>>
- [70] PIRES, Marcelo A.; MOLFETTA, Giuseppe Di.; QUEIRÓS, Sílvio M. Duarte. Multiple transitions between normal and hyperballistic diffusion in quantum walks with time-dependent jumps. Sci Rep 9, 19292 (2019). DOI: <<https://doi.org/10.1038/s41598-019-55642-5>>

- [71] JAYANNAVAR, A. M.; KUMAR, N. Nondiffusive Quantum Transport in a Dynamically Disordered Medium. *Phys. Rev. Lett.* Vol. 48, Iss. 8, 553, 22 February 1982. DOI: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.553>>
- [72] Levi, L., Krivolapov, Y., Fishman, S., & Segev, M. (2012). Hyper-transport of light and stochastic acceleration by evolving disorder. *Nature Physics*, 8(12), 912–917. DOI: <10.1038/nphys2463>
- [73] Sagi, Y., Brook, M., Almog, I., & Davidson, N. (2012). Observation of Anomalous Diffusion and Fractional Self-Similarity in One Dimension. *Physical Review Letters*, 108(9). DOI: <10.1103/physrevlett.108.093002>
- [74] Anderson, P. W. Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Physical Review*, 109(5), 1492–1505 (1958). DOI: <10.1103/physrev.109.1492>
- [75] ZABURDAEV, V.; DENISOV, S.; KLADTER, J. Lévy walks. *Reviews of Modern Physics*, 87(2), 483–530 (2015). DOI: <10.1103/revmodphys.87.483>
- [76] SILVER, Stephen A. A. *Life Lexicon*. Disponível em: <<https://playgameoflife.com/lexicon/>>
- [77] WOLFRAM, Stephen. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, 2002. Disponível em: <<https://www.wolframscience.com/nks/>>
- [78] SALINAS, Silvio R. A. Einstein e a teoria do movimento browniano. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 2, p. 263-269, (2005). Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S1806-11172005000200013>>
- [79] LEVY, Steven. *Artificial Life*. Penguin, I-lannondsworth, 1993.
- [80] VON NEUMANN, J. The general and logical theory of automata. *Cerebral Mechanisms in Behavior—The Hixon Symposium*, 1948. L. A. Jeffress. Pasadena, CA, New York (1951): Wiley: 1–41.
- [81] RENDELL, P. **A Universal Turing Machine in Conway's Game of Life In: High Performance Computing and Simulation (HPCS)**, 2011 International Conference on. IEEE, p. 764-772, 2011.
- [82] LANGTON, C. G. Self-reproduction in cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 10, n. 1–2, p. 135–144, 1984.
- [83] AGUIAR, M. S.; DIMURO, G. P.; COSTA, F. A. Modelos matemáticos baseados em autômatos celulares para geoprocessamento. SBMAC. São Carlos, SP, Brasil, 2004, 58 p.
- [84] VON NEUMANN, J. *The Theory of Self-Reproducing Automata*, A. W. Burks (Ed.), Vhampaign, IL, USA: University of Illinois Press, 1966, 388 p.
- [85] SIGNORINI, J. How a SIMD machine can implement a complex cellular automaton? A case study: von Neumann's 29-state cellular automaton. *Supercomputing '89: Proceedings of the 1989 ACM/IEEE conference on Supercomputing*, ACM. Reno, Nevada, USA, p. 175-186, 1989.
- [86] A.W. Burks. Von Neumann's self-reproducing automata. In A.W. Burks, editor, *Essays on Cellular Automata*, pp. 3-64. University of Illinois Press, 1970.
- [87] U. Pesavento. An implementation of von Neumann's self-reproducing machine. *Artificial Life*, 2 :337-354, 1995.
- [88] F. V. Borries; S. P. Walz; M. Bttger. *Game of Life. On Architecture, Complexity and the Concept of Nature as a Game*. Birkhuser Basel, 2007.
- [89] WOLFRAM, S. Cellular automata as simple self-organizing systems. Caltech preprint CALT-68-938, 1982.
- [90] KARI, J. Theory of cellular automata: A survey. *Theoretical Computer Science*, Elsevire, v. 334, n. 1-3, p. 3-33, 2005.
- [91] LANGLOIS, P. Cellular automata for modeling spatial systems. *The Modeling Process in Geography: From Detreminism to Complexity*, p. 278–306, 2008.

- [92] GARDNER, M. Mathematical Games - The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life". *Scientific American*, v. 223, p. 120-123, 1970.
- [93] BERLEKAMP, E. R.; CONWAY, J. H.; GUY, R. K. *Winning Ways for your Mathematical Plays* (Academic, New York, 1982), Vol. 2).
- [94] WOLFRAM, S. *Rev. Mod. Phys.* 55, 601 (1983).
- [95] KECHAIDOU, M.; SIRAKOULIS, G. Game of life variations for image scrambling. *Journal of Computational Science* 21 (2017) 432–447. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2016.09.002>
- [96] BRINDHA, M.; AMMASAI GOUNDEN, N.; SRIRAM, M. A hybrid image encryption **algorithm using chaos and conway's game-of-life** cellular automata. *Secur. Commun. Network.* 9 (2015) 634–651.
- [97] A. Adamatzky (Ed.). *Game of Life Cellular Automata*. Springer, 2010.
- [98] A. Adamatzky, G. Martínez (Eds.). *Designing Beauty: the Art of Cellular Automata*. Vol. 9, Springer, 2016.