



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS DA  
VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)**

**ENGENHARIA FÍSICA**

## **GPS Y CORRECCIONES RELATIVISTAS**

**NICOLÁS VALENTÍN MOLINA TERRA**

Foz de Iguazú  
2022



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE O DE  
CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)**

**ENGENHARIA FÍSICA**

## **GPS Y CORRECCIONES RELATIVISTAS**

**NICOLÁS VALENTÍN MOLINA TERRA**

Trabajo de Conclusión de Curso presentado al Instituto Latinoamericano de Ciencias de la Vida y la Naturaleza de la Universidad Federal de la Integración Latinoamericana, como requisito parcial para la obtención del título de Bacharel em Engenharia Física.

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Dáfni Fernanda Zenedin Marchioro

Foz de Iguazú  
2022

NICOLÁS VALENTÍN MOLINA TERRA

## **GPS Y CORRECCIONES RELATIVISTAS**

Trabajo de Conclusión de Curso presentado al Instituto Latinoamericano de Ciencias de la Vida y la Naturaleza de la Universidad Federal de la Integración Latinoamericana, como requisito parcial para la obtención del título de Bacharel em Engenharia Física.

### **TRIBUNAL**

---

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Dáfni Fernanda Zenedin Marchioro  
UNILA

---

Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza  
UFPR

---

Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Hönnicke  
UNILA

Foz de Iguazú, 29 de marzo de 2022.

## TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor(a): \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

	Tipo de Documento
<input checked="" type="checkbox"/> graduação	<input type="checkbox"/> artigo
<input type="checkbox"/> especialização	<input checked="" type="checkbox"/> trabalho de conclusão de curso
<input type="checkbox"/> mestrado	<input type="checkbox"/> monografia
<input type="checkbox"/> doutorado	<input type="checkbox"/> dissertação
	<input type="checkbox"/> tese
	<input type="checkbox"/> CD/DVD – obras audiovisuais
	<input type="checkbox"/>

Título do trabalho acadêmico: \_\_\_\_\_

Nome do orientador(a): \_\_\_\_\_

Data da Defesa: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

### Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor(a):

a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons Licença 3.0 Unported*.

Foz do Iguaçu, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do Responsável

A mi madre Miriam Terra Correa

A mi mama Esther

## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar agradezco a la profesora Dáfni Marchioro por las orientaciones en el desarrollo de este trabajo, la paciencia y la disposición. A quien también agradezco la confianza, y las enseñanzas en el transcurso de la carrera no sólo a nivel profesional sino también personal.

A los profesores del tribunal por las orientaciones y sugerencias.

A mi madre Miriam, por el apoyo constante durante todo el ciclo universitario, no sólo en la UNILA sino también en lo anterior, y sin quien no estaría hoy presentando este trabajo. Por su ejemplo, su amor y su fuerza siempre.

A mis hermanas Yohana, Anyela, Camila y Natasha; y a mi padre Remo por el soporte emocional para continuar durante esta etapa, por su cariño y por su ejemplo, a quienes agradezco infinitamente ser parte de quien soy.

A mi compañero Federico por el apoyo y el cotidiano durante todo el transcurso de la carrera. A quien agradezco el impulso cada vez que lo necesité.

A mis colegas y amigos, Karen, Égon, Patricia, Victor, Ana, Paula y Anton sin quienes no estaría hoy terminando esta etapa. Agradezco enormemente la compañía en cada semestre y la fuerza para continuar cada vez que pensé en abandonar. Por todo el compañerismo, las risas y las experiencias en este ciclo.

A mis amigos Daniel, Lina, Stefanía, Fernando y Karen Bobadilla, que junto a mis colegas y Federico fueron pilares esenciales para transitar la universidad.

A mis amigos de antes de comenzar mi viaje por la UNILA, a todos ellos por haber estado siempre pendiente y acompañándome en mis regresos.

A los profesores del curso y de la universidad por la formación, en particular a los docentes Raphael Fortes, Patrícia Couto, Kelly Sossmeier y Victor de León que cada uno de ellos marcó mi paso por la UNILA de una forma diferenciada.

A la asistente en administración Denise Sayuri Oda Nampo, quien me ayudó innumerables veces a resolver problemas burocráticos con gran disposición y dedicación.

A la UNILA por la oportunidad de estudiar en Brasil.

Finalmente, agradezco a todos los que fueron parte de este ciclo.

TERRA, Nicolás Molina. **GPS E CORREÇÕES RELATIVÍSTICAS**. 2022. 50 páginas. Trabajo de Conclusión de Curso (Graduación en Ingeniería Física) – Universidad Federal de la Integración Latinoamericana, Foz de Iguazú, 2022.

## RESUMO

O Sistema de Posicionamento Global (GPS) usa quatro ou mais satélites para a localização do receptor e determinação do tempo. Devido ao campo gravitacional da Terra e à altura dos satélites, surgem efeitos relativísticos nas medições realizadas, por isso é necessário fazer correções para estabelecer com precisão a referência do usuário. Usando um método iterativo é possível calcular a localização e o tempo a partir dos sinais transmitidos. Tais sinais chegam ao receptor em momentos diferentes, sendo possível escolher dois instantes para realizar a medição: o momento em que os quatro sinais chegam ao receptor ou um único instante para a transmissão dos quatro sinais. Este trabalho apresenta uma revisão dos procedimentos de correção de erros relativísticos para cada um desses métodos, uma vez que os sinais são recebidos. Além disso, são analisadas as correções para os efeitos da excentricidade das órbitas dos satélites. Por fim, conclui-se que é possível observar que os métodos iterativos convergem rapidamente e que a precisão dos valores determinados é alta.

**Palavras-chave:** localização; relatividade; *tagging*; correções relativísticas; erros.

TERRA, Nicolás Molina. **GPS Y CORRECCIONES RELATIVISTAS**. 2022. 50 páginas. Trabajo de Conclusión de Curso (Graduación en Ingeniería Física) – Universidad Federal de la Integración Latinoamericana, Foz de Iguazú, 2022.

## RESUMEN

El Sistema de Posicionamiento Global (GPS) usa cuatro o más satélites para la determinación de la ubicación y el tiempo del receptor. Debido al campo gravitacional de la Tierra y la altura de las naves, efectos relativistas surgen en las medidas tomadas, por lo que es necesario realizar correcciones que permitan establecer con precisión la referencia del usuario. Mediante un método iterativo es posible calcular la ubicación y el tiempo a partir de las señales enviadas. Tales señales llegan al receptor en instantes diferentes, por lo que es posible elegir dos momentos para realizar la medición: instante en que las cuatro señales llegan al receptor o un único instante para la salida de las cuatro señales. En este trabajo se presenta una revisión de los procedimientos para la corrección de los errores relativistas para cada uno de estos métodos una vez que las señales son recibidas. Además, se analizan las correcciones por los efectos de la excentricidad de las órbitas satelitales. Finalmente se concluye que es posible observar que los métodos iterativos convergen rápido y que la precisión de los valores determinados es alta.

**Palabras clave:** ubicación; relatividad; *tagging*; correcciones relativistas; errores.

TERRA, Nicolás Molina. **GPS AND RELATIVISTIC CORRECTIONS**. 2022. 50 páginas. Trabajo de Conclusión de Curso (Graduación en Ingeniería Física) – Universidad Federal de la Integración Latinoamericana, Foz de Iguazú, 2022.

### **ABSTRACT**

The Global Positioning System (GPS) uses four or more satellites for receiver location and time determination. Due to the gravitational field of the Earth and the height of the ships, relativistic effects arise in the measurements, so it is necessary to make corrections to accurately establish the user's reference. Using an iterative method it is possible to calculate the location and time from the signals sent by the satellites. Such signals arrive at the receiver at different moments, so it is possible to choose two moments to carry out the measurement: the moment in which the four signals arrive at the receiver or a single moment for the transmission of the four signals. This paper presents a review of the procedures for correcting relativistic errors for two different moments. In addition, the corrections for the effects of the eccentricity of the satellite orbits are analyzed. Finally, it is concluded that it is possible to observe that the iterative methods converge quickly and that the precision of the determined values is high.

**Key words:** location; relativity; tagging; relativistic corrections; errors.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Señal de luz propagándose de B hasta A y de vuelta a B	19
<b>Figura 2</b> – Configuración de los satélites en la constelación	22
<b>Figura 3</b> – Segmento de control	23
<b>Figura 4</b> – Cuadro de coordenadas ECI	25
<b>Figura 5</b> – Ilustración de offsets para Satélite y receptor	38

## SUMARIO

<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>10</b>
1.1 OBJETIVOS	11
<b>2 RELATIVIDAD GENERAL</b>	<b>12</b>
2.1 PRINCIPIOS DE LA RELATIVIDAD GENERAL	12
2.1 PRINCIPIOS DE LA RELATIVIDAD GENERAL	12
2.2 INTERVALO ESPACIO-TIEMPO	14
2.3 VECTORES Y TENSORES	15
2.3.1 Vectores	15
2.3.2 Tensores	16
2.3.3 Producto Escalar Entre Dos Vectores	17
2.3.4 Tensor Métrico	17
2.3 DISTANCIAS E INTERVALOS DE TIEMPO	18
2.5 ECUACIONES DE EINSTEIN	20
<b>3 SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL (GPS)</b>	<b>22</b>
3.1 SISTEMA WGS-84	24
3.2 DOCUMENTOS DE CONTROL DE INTERFAZ	26
<b>4 CORRECCIONES RELATIVISTAS</b>	<b>27</b>
4.1 EFECTO DOPPLER RELATIVISTA	29
<b>5 CORRECCIONES DEL USUARIO</b>	<b>33</b>
5.1 TIME TAGGING AT THE RECEIVER	33
5.2 TIME TAGGING AT THE TRANSMITTER	38
<b>6 EJEMPLOS DE APLICACIONES</b>	<b>42</b>
<b>7 CONCLUSIÓN</b>	<b>46</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>47</b>

## 1 INTRODUCCIÓN

Los sistemas de navegación que permiten describir cualquier constelación de satélites a nivel global son conocidos como GNSS (*Global Navigation Satellite System*). Estos sistemas proporcionan posicionamiento, navegación y cronometría en cuatro dimensiones (longitud, latitud, altitud, y tiempo) a nivel regional o global. El principal GNSS utilizado a nivel global es el GPS (*Global Positioning System*), que es un sistema propiedad de Estados Unidos (EE. UU). y que utiliza al menos cuatro satélites para determinar la posición, pero existen múltiples sistemas, entre los que se pueden destacar: BDS (*BeiDou Navigation Satellite System*), sistema propiedad de China; Galileo, que pertenece a la Unión Europea; GLONASS (*Globalnaya Navigazionnaya Sputnikovaya Sistema*), sistema ruso; IRNSS (*Indian Regional Navigation Satellite System*) / NavIC (*Navigation Indian Constellation*), que son GNSS propiedad de India; y Quasi-Zenith Satellite System (QZSS), perteneciente a Japón (GPS.GOV).

Debido a la altitud a la que los satélites usados para el GPS orbitan y la velocidad a la que se dislocan en sus órbitas, efectos relativistas aparecen sobre las medidas de tiempo realizadas por los relojes atómicos presentes en los mismos. Por esto, es importante un entendimiento de la Teoría de la Relatividad General, ya que permite establecer formas de determinar tales efectos.

Una vez determinados los efectos es necesario aplicar las correcciones pertinentes a modo de contrarrestarlos. Para esto es necesario establecer un concepto de simultaneidad que permita definir dónde deben ser aplicadas las correcciones. Existen dos métodos principales para marcar el instante sobre el cual se desean realizar las medidas: *time tagging at the receiver* y *time tagging at the transmitter*. El primero consiste en medir los tiempos de llegada de las señales para un único tiempo en el receptor, y el segundo consiste en determinar un único tiempo de partida de las cuatro señales midiendo el tiempo en el que son recibidas.

Aplicar estas correcciones es de gran importancia ya que de las medidas de tiempo depende la precisión de la ubicación y cronometraje determinados por el GPS. En este trabajo se presentará una revisión de las técnicas

de *tagging*, el modo de determinación de los errores y las formas de analizar las medidas, fundamentándose principalmente en el trabajo de Ashby y Weiss (1999). Además, se dará una visión general sobre la Teoría de la Relatividad.

## 1.1 OBJETIVOS

### Objetivo general

Realizar una revisión sobre las correcciones aplicadas al sistema de GPS para los efectos relativistas.

### Objetivos específicos

1. Revisar los fundamentos y dar una visión general sobre la Teoría de la Relatividad.
2. Describir y analizar los métodos de *tagging* del tiempo en el receptor y *tagging* del tiempo en el transmisor.
3. Presentar las correcciones necesarias para mitigar los efectos de la excentricidad de la órbita satelital.

## 2 RELATIVIDAD GENERAL

La teoría relatividad general (1915) surge ante la necesidad de una teoría que abarque la comprensión de las leyes de la Física en referenciales no inerciales así como en referenciales inerciales. Basada en la relatividad especial y un determinado número de principios, esta teoría fue construida para explicar cómo la materia y la geometría del espacio se relacionan, definiendo y caracterizando un espacio-tiempo. También existía una gama de fenómenos físicos que no podían ser explicados a través de la teoría newtoniana, como la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio, para los cuales esta nueva teoría presentaría esclarecimientos.

### 2.1 PRINCIPIOS DE LA RELATIVIDAD GENERAL

Existen algunos principios básicos para la construcción de la relatividad general. Estos principios sirvieron como cimientos a Einstein para la posterior formalización de la teoría, por lo que es fundamental plasmarlos, aunque sea de forma superficial.

El Principio de Mach es una hipótesis sobre la naturaleza de las fuerzas no inerciales y establece que la masa y la distribución del universo son quienes determinan la magnitud de dichas fuerzas sobre un determinado cuerpo. La propiedad de isotropía que presenta el universo en gran escala es lo que determina que las fuerzas inerciales no dependan de una dirección. En la formulación de la relatividad general, Einstein entendía que “la inercia debería entenderse no como la resistencia de un cuerpo a la aceleración con respecto al espacio (absoluto vacío) sino como la resistencia al movimiento relativo de un cuerpo con respecto a la totalidad de la materia circundante” (VITERY, 2005). Así, teniendo en mente la definición de geometría como siendo las trayectorias en que las partículas y la luz viajan, y a partir del Principio de Mach, es posible imponer que una base para la formulación de la relatividad general consiste en asumir que la distribución de la materia es lo que determina la geometría, por lo que la ausencia de la misma provoca una falta de trayectorias privilegiadas. También se puede concluir que un

cuerpo no puede poseer propiedades inerciales si se encuentra en un universo vacío.

El Principio de Equivalencia es un principio fundamental para construir la teoría de la relatividad general. Este principio puede ser enunciado como: “[...] referidas a K (cuerpo de referencia de Galileo), las leyes de la naturaleza debían ser lo más sencillas posible. Pero al margen de K, deberían ser privilegiados en este sentido y exactamente equivalentes a K de cara a la formulación de las leyes de la naturaleza todos aquellos cuerpos de referencia K' que ejecutan respecto a K un movimiento rectilíneo, uniforme e irrotacional” (EINSTEIN, 2005.). Luego, los experimentos que se lleven a cabo bajo condiciones idénticas en estos dos sistemas de referencia darán lugar a resultados idénticos, de esta forma es posible manejar a la física en referenciales no inerciales, apenas encontrando el campo gravitacional que presente los mismos efectos que ocurren en el referencial no inercial. Estos efectos son iguales a nivel local, lo que diferencia tales campos de campos gravitacionales reales, o sea, sus efectos no son los mismos en cualquier punto del espacio, por ejemplo, no tienden a cero cuando estudiados en un punto suficientemente lejos de la fuente. Otra diferencia importante entre estos dos tipos de campos gravitacionales es que los reales no desaparecen sin importar cuál sea el referencial elegido.

Otro principio importante es el principio de Covarianza, que enuncia la necesidad de que exista una forma tensorial para las ecuaciones de la física, a modo que cualquier observador, sin importar el referencial ni el tipo de referencial, sea capaz de estudiar las leyes de la física.

La teoría de la relatividad general debe conseguir mantener consistencia respecto a las teorías anteriores, sustentando las características que permitieron explicar los fenómenos físicos antes del desarrollo de la misma. De esta forma, la relatividad general debe adecuarse a la Mecánica Newtoniana cuando las velocidades son suficientemente pequeñas comparadas con la velocidad de la luz y en presencia de un campo gravitacional débil, además de corresponderse con la relatividad especial en ausencia de gravitación. Esto es conocido como el principio de correspondencia.

## 2.2 INTERVALO ESPACIO-TIEMPO

El espacio-tiempo surge a partir de un modelo matemático que une al espacio y al tiempo de forma que son considerados como un único continuo en cuatro dimensiones, así los sistemas de coordenadas utilizados para la caracterización de eventos en un espacio-tiempo también deben ser tetradimensionales. Para referenciales en movimiento relativo uniforme, es decir, inerciales, un intervalo espacio-temporal que caracteriza un espacio plano puede ser definido según coordenadas cartesianas por la ecuación (2.1) y no cambia al alternar entre referenciales inerciales (MARCHIORO, 2019).

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

Para los referenciales no inerciales en este ejemplo de espacio-tiempo, el mismo presenta la característica de no poder convertir la ecuación (2.1) en otra de la misma forma para ninguna transformación del tiempo. Esto ocurre porque las transformaciones para la parte espacial que son presentadas por la ecuación (2.2), resultando en la ecuación (2.3) luego de incorporar la parte temporal, no permiten regresar a la forma simplificada que la ecuación (2.1) expresa. Sin embargo, otros referenciales no inerciales podrían ser caracterizados por espacios-temporales diferentes.

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) \\ y &= x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t) \\ z &= z' \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$ds'^2 = [c^2 - \omega^2(x'^2 - y'^2)]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\omega y' dx' dt - 2\omega x' dy' dt \quad (2.3)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular de la rotación.

Es posible concluir que no hay una métrica que caracterice un espacio plano para referenciales no inerciales. Para suplir esta necesidad, los intervalos espacio-temporales serán definidos por el lado derecho de la última

igualdad en la ecuación (2.1), donde  $g_{\mu\nu}$  pasa a definir la métrica del espacio-tiempo, que explica las propiedades geométricas para cada referencial. En campos gravitacionales reales también se define por  $g_{\mu\nu}$ , dado que de igual modo son modificaciones de la métrica del espacio-tiempo. La ecuación (2.4) abajo resume la definición del intervalo espacio-temporal para estos sistemas.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.4)$$

## 2.3 VECTORES Y TENSORES

### 2.3.1 Vectores

En función de la necesidad de escribir las leyes de la Física en forma covariante para cada referencial no inercial dado que no es garantida una equivalencia entre los diferentes referenciales, la descripción de cada fenómeno físico termina siendo dependiente del sistema elegido, por ello es necesario plantear un mecanismo que permita la transformación de coordenadas entre referenciales distintos. Para tal mecanismo son utilizados cuadvectores covariantes y contravariantes, que serán definidos a continuación.

A partir de aquí, y hasta el final de esta sección, la notación consistirá en usar las variables primas cuando medidas en un referencial no inercial primo, hecho respecto a otro referencial no primo, además de la notación utilizada anteriormente para los referenciales no primos. Las ecuaciones (2.5) y (2.6) mencionadas a continuación muestran cómo ocurren las transformaciones de coordenadas y de las diferenciales de las funciones  $f^\mu$ , entre referenciales.

$$x^\mu = f^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \quad (2.5)$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \quad (2.6)$$

De esta manera, es posible definir un cuadrivector contravariante como cualquier cantidad  $A^\mu$  (con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) que es transformado de igual forma que sus diferenciales al cambiar de referencial (MARCHIORO, 2019).

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A'^\nu \quad (2.7)$$

De forma similar a como fue definido un cuadrivector contravariante, es posible definir también un vector covariante ( $A_\mu$ ) cuando es posible una transformación como la de un escalar. Las transformaciones de un escalar y de un vector covariante son exhibidas en las ecuaciones (2.8) y (2.9) donde  $\phi$  representa un escalar.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \quad (2.8)$$

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A'_\nu \quad (2.9)$$

### 2.3.2 Tensores

Estos dos tipos de cuadrivectores tienen varias formas de relacionarse, entre las cuales se pueden destacar los tensores. Dentro de la clasificación de tensores se encuentran los tensores de segundo orden, denominados así por surgir del producto de las componentes de los dos tipos de cuadrivectores, resultando en tres tipos de tensores: contravariante, covariante y mixto. La forma en que se transforman los mismos aparecen en las ecuaciones (2.10), (2.11) y (2.12) respectivamente.

$$A^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} A'^{\alpha\beta} \quad (2.10)$$

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} A'_{\alpha\beta} \quad (2.11)$$

$$A_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} A'_{\beta}^{\alpha} \quad (2.12)$$

Entre las propiedades generales que presentan los diferentes tipos de tensores es posible destacar que sumas de tensores de un mismo carácter tiene como resultado otros tensor del mismo; así como el hecho de un tensor ser simétrico o antisimétrico en dos índices cualesquiera, lo será para cualquier sistema de coordenadas. También cabe destacar que un tensor nulo en un referencial certifica que el tensor es nulo para cualquier referencial escogido.

### 2.3.3 Producto Escalar Entre Dos Vectores

A diferencia del producto escalar definido para coordenadas cartesianas, los cuadvectores precisan ser de clasificación diferentes para que exista un producto escalar. Las coordenadas curvilíneas permiten únicamente tal definición según la ecuación (2.13).

$$A^{\mu} B_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\mu}} A'^{\alpha} B'_{\beta} = A'^{\alpha} B'_{\alpha} \quad (2.13)$$

### 2.3.4 Tensor Métrico

El tensor métrico permite la definición de distancias y módulos de vectores en el espacio-tiempo. La distancia infinitesimal entre dos puntos suficientemente próximos es definida por la ecuación (2.4), y se conoce como la primera forma fundamental o forma métrica (D'INVERNO, 1993), donde los  $g_{\mu\nu}$  son en función de las coordenadas, y es el tensor covariante que se denomina tensor métrico. Este tensor tiene como inverso a un tensor métrico contravariante.

El tensor métrico y su inverso permiten relacionar ambas formas de un vector (covariante y contravariante) según la ecuación (2.14), así como las formas tensoriales del mismo a través de la ecuación (2.15) y el cuadrado del valor absoluto de un vector conforme la ecuación (2.16).

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu; \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (2.14)$$

$$A^\mu_{\nu\lambda} = g_{\lambda\kappa} A^{\mu\kappa}_\nu; \quad A^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} g^{\nu\kappa} A_{\lambda\kappa}, \quad \dots \quad (2.15)$$

$$A_\mu A^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \quad (2.16)$$

## 2.4 DISTANCIAS E INTERVALOS DE TIEMPO

Así como es necesario encontrar las transformaciones para que el espacio-tiempo abarque lo que las leyes de la física explicaban antes de la formulación de la teoría de la relatividad general, también es fundamental determinar la relación entre la métrica del espacio y la del espacio-tiempo.

Para encontrar la relación existente entre la coordenada temporal del cuadrivector ( $x^0$ ) y el tiempo propio  $d\tau$ , es suficiente considerar dos eventos que difieran apenas de forma infinitesimal, a modo de ser tratados como un único punto del espacio, teniendo como resultado a las componentes espaciales ( $x^i$ , con  $i=1, 2, 3$ ) nulas. De esta forma, la ecuación (2.1) se transforma en la ecuación (2.17):

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 = g_{00} (dx^0)^2 \\ d\tau &= \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0 \\ \tau &= \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} dx^0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por el hecho de tener un tiempo propio que se relaciona con la coordenada temporal dependiendo de diferentes puntos en el espacio, no es posible obtener el elemento de distancia espacial  $dl$  de forma análoga, o sea, igualando la parte temporal a cero. Para auxiliar en la determinación de este elemento de distancia espacial, considérese la Figura 1.



Para conseguir  $dl$ , basta multiplicar por  $c/2$  al tiempo propio del evento una vez obtenido a través de la ecuación (2.17). Así, la métrica del espacio-tiempo es obtenida elevando al cuadrado el módulo de  $dl$ , expresado en la ecuación (2.20) y reescrito en la ecuación (2.21) que deja en evidencia al tensor de la métrica espacial, mostrando la relación entre ambas métricas.

$$dl^2 = \left( \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij} \right) dx^i dx^j \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} dl^2 &= \gamma_{ij} dx^i dx^j \\ \gamma_{ij} &= \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij} \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $\gamma_{ij}$  es el tensor métrico tridimensional de la métrica del espacio. Esta métrica aún varía con el tiempo dado que los tensores generalmente dependen de  $x^0$ , lo que provoca que la idea de distancia tenga sentido localmente.

El ejemplo de la Figura 1 también permite determinar que existe una diferencia de tiempo en eventos simultáneos que suceden infinitamente próximos, dado que el momento en que A refleja la señal es medido en el momento que la misma retorna a B. Es por eso que la noción de simultaneidad precisa una corrección para sincronizar el reloj de medida con el momento en el que ocurre el evento. Esta corrección es la mitad del camino entre la salida y el retorno en B, o sea

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2} \left[ dx^{0(2)} + dx^{0(1)} \right] \quad (2.22)$$

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \quad (2.23)$$

## 2.5 ECUACIONES DE EINSTEIN

A partir del Principio de mínima acción Einstein dedujo una ecuación (ecuación (2.24)) de la dinámica que explica cómo es alterada la geometría del

espacio-tiempo por la materia y energía. Tal modificación de la geometría es interpretada como el campo gravitacional de la materia que produce la curvatura, bajo el cual los objetos se mueven según su geodésica.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad (2.24)$$

donde  $k$  es la constante de gravitación

$$k = 6,67 \times 10^{-8} \frac{cm^3}{g \cdot s^2} \quad (2.25)$$

y  $T_{\alpha\beta}$  es el tensor energía-momento, que contiene características de la materia y de la interacción con otros campos. El término de la izquierda está formado por el tensor de Ricci ( $R_{\alpha\beta}$ ), el tensor métrico ( $g_{\alpha\beta}$ ) y el escalar de curvatura ( $R$ ).

Realizando una contracción para los índices  $\alpha$  y  $\beta$  se obtiene otra forma de la ecuación.

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \left( T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T^\alpha{}_\alpha \right) \quad (2.26)$$

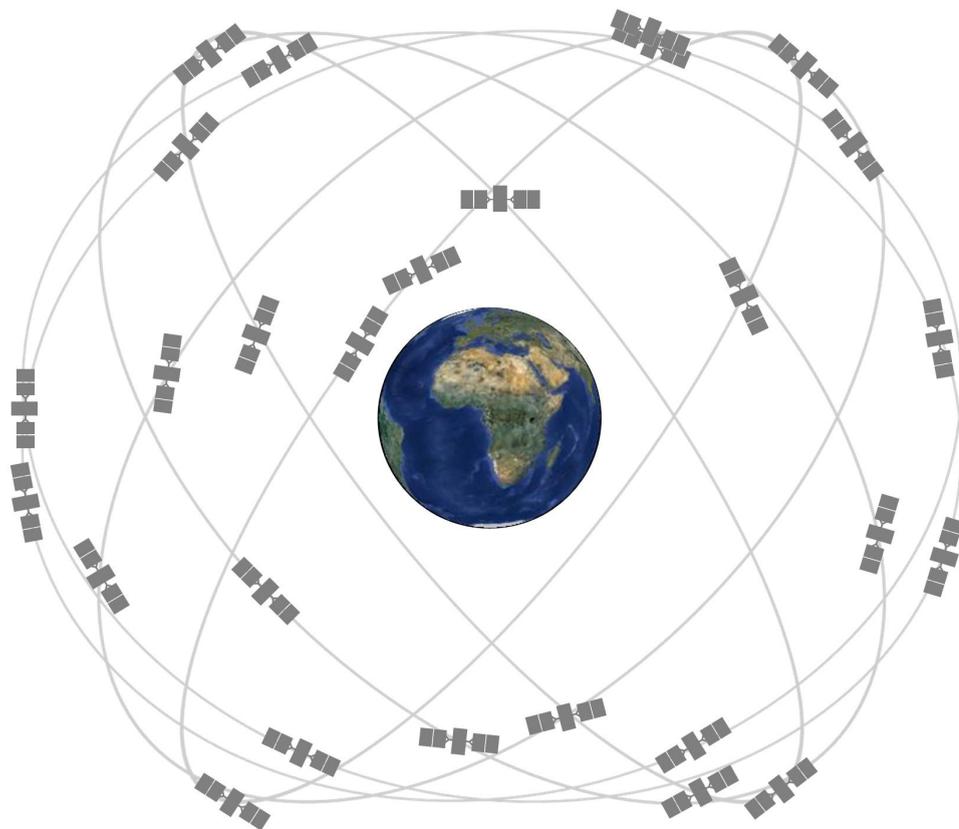
Dado que estas ecuaciones no son lineales, el principio de superposición no es válido para los campos gravitacionales como lo es para el campo electromagnético. Sin embargo, cuando el campo es débil las ecuaciones se tornan lineales en aproximación y el principio se torna válido (MARCHIORO, 2019).

### 3 SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL (GPS)

El GPS es constituido por tres segmentos principales que se encargan de etapas distintas para el posicionamiento y cronometraje: el segmento espacial, el segmento de control y el segmento de usuario.

El segmento espacial es el responsable de transmitir las señales de radio a los usuarios, y consiste en una constelación de 24 satélites en operación (actualmente EE. UU. mantiene 31, para garantizar que haya al menos 24 operacionales). Los mismos se encuentran distribuidos en seis planos orbitales igualmente espaciados, a una altitud aproximada de 20.200 km en la órbita terrestre media y cada vehículo orbita la Tierra dos veces al día (Figura 2) (GPS.GOV, 2022).

**Figura 2** – Configuración de los satélites en la constelación



Fuente: GPS.GOV, 2022.

El segmento de control, consiste en una red de instalaciones que permiten monitorear las transmisiones, comunicarse con los satélites para seguir el rastro de los mismos así como enviar comandos e información a la constelación y realizar análisis de funcionamiento. Actualmente el Segmento de Control Operacional (OCS) consiste de una estación central de control, una estación alternativa con ésta, 11 antenas de control y comando, y 16 sitios de monitoreo (Figura 3) (GPS.GOV, 2022).

**Figura 3 – Segmento de control**



Fuente: Adaptado de GPS.GOV, 2022.

El segmento del usuario es donde se encuentra el receptor sobre el cuál se necesita la determinación de los cuatro parámetros. Los satélites tienen diversos relojes atómicos que proporcionan información altamente precisa a la señal del GPS, la cual es recibida y decodificada por el receptor para luego ser sincronizado con el tiempo de tales relojes. Así, es posible obtener el tiempo con la precisión de un reloj atómico sin necesidad de poseer uno.

La precisión en la medida del tiempo es crucial, ya que variados sistemas requieren esta referencia para su correcto funcionamiento, como las redes eléctricas, las redes financieras y los sistemas de comunicación (GPS.GOV, 2022). Las redes inalámbricas de telefonía mantienen en perfecta sincronización sus estaciones, así los teléfonos móviles comparten de manera eficiente un espectro de radio. Las estaciones de radio digitales similarmente utilizan el tiempo de GPS para que los receptores reciban la información al mismo tiempo, disminuyendo la latencia al mínimo.

### 3.1 SISTEMA WGS-84

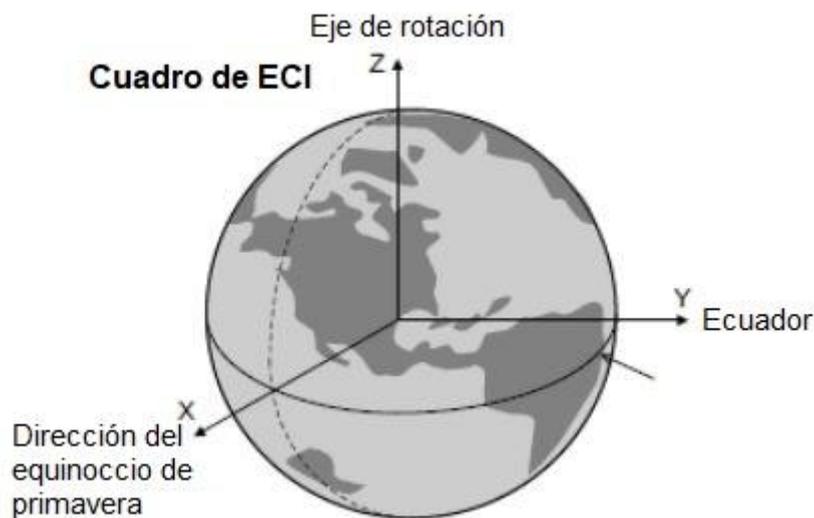
El WGS-84 (World Geodetic System 1984) es la cuarta versión del sistema de referencia geodésico global, utilizada como referencia para los efemérides operacionales del GPS, que fue constituido desde 1960 por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos visando proporcionar el posicionamiento para navegación a cualquier parte del mundo utilizando informaciones espaciales (MALYS, 1994). La localización a través del WGS-84 concede las coordenadas geográficas de un punto terrestre, utilizando como representación de la Tierra a un elipsoide (cuerpo regular). El origen del sistema de coordenadas se define coincidente con el centro de masa de la tierra, y los ejes coordenados del WGS-84 son definidos según la intersección del meridiano origen y el plano del Ecuador para el eje de abscisas, la dirección del polo de referencia del IERS (*International Earth Rotation Service*) para el eje de cota, y el eje perpendicular a los dos anteriores y coincidentes en el origen para el eje de ordenadas (Figura 4). Los parámetros principales para la definición del elipsoide (Tabla 1) son establecidos en el reporte técnico de la NIMA (*National Imagery and Mapping Agency*) del 4 de julio de 1997.

**Tabla 1 – Parámetros principales del WGS-84**

Tabla 2.1 - Algunos de los parámetros principales del WGS-84

Parámetro	Símbolo	Valor
Semieje mayor	$a_E$	6378137 m
Aplanamiento recíproco	$1/f$	298,257223563
Velocidad angular	$\omega_E$	$7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
Constante gravitatoria	GM	$398600,5 \text{ Km}^3\text{s}^{-2}$
Segundo armónico zonal	$J_2$	0,00108262998905

Fuente: Adaptado de CARARO, 2006.

**Figura 4 – Cuadro de coordenadas ECI**

Fuente: Adaptado de HASAN, 2015.

La red terrestre de referencia del WGS-84 se estableció en 1987 por medio de medidas Doppler, y sobre la cual se aplicaron algunos refinamientos hasta obtener la versión más actual, que fue implementada en el segmento de control a partir de enero de 1997. La Tabla 2 abajo muestra las principales diferencias para cada refinamiento

**Tabla 2 – Versiones del sistema WGS-84**

Versión	Sistema utilizado en la materialización	Número de estaciones utilizadas en la materialización	Modelos gravitacionales de la Tierra	Periodos de utilización
WGS84	TRANSIT(NSWC 9Z-2 )	10	WGS84	01/01/1987 a 01/01/1994
WGS84(G730)	GPS	10	WGS84	02/01/1994 a 28/09/1997
WGS84(G873)	GPS	12	EGM96	a partir de 29/09/1997

Fuente: Adaptado de IBGE.GOV, 2022.

### 3.2 DOCUMENTOS DE CONTROL DE INTERFAZ

Existen medios formales que permiten definir, establecer y controlar los límites de comunicación entre un sistema y el sistema de posicionamiento global, al igual que dentro del propio GPS. Tales límites son conocidos como interfaces y las vías para dichos controles son los Documentos de Control de Interfaz (ICD), que además posibilitan la documentación detallada de información sobre el diseño de interfaz para el programa GPS (NIMA, 1997).

Para el desenvolvimiento de este trabajo, así como los padrones para las correcciones que se realizará, será utilizado el ICD-200 que define los requisitos relacionados con la interfaz entre el segmento espacial y el segmento de navegación del usuario para GPS con radiofrecuencias únicas L1 y L2. Los errores relativistas no considerados en este ICD son menores a 1 ns (NIMA, 1997).

## 4 CORRECCIONES RELATIVISTAS

A modo de poder rotular los eventos, se torna necesario la creación de un sistema imaginario de relojes en torno de la Tierra a partir del cual es posible definir marcadores coherentes de tiempo que permitan medir de forma consistente el denominado tiempo coordinado (*coordinate time*), común a la red de relojes del GPS. Dicho sistema es sincronizado usando el principio de constancia de la velocidad de la luz, que requiere un sistema de coordenadas localmente inercial, por lo que será definido en relación a un sistema de coordenadas inercial centrado en la Tierra (ECIF) (ASHBY, 1999). En estos sistemas la luz viaja en línea recta Euclidiana con la velocidad  $c$  en relación a los cuadros inerciales (*inertial frames*), lo que simplifica de forma significativa el camino recorrido por las señales transmitidas por los satélites (ASHBY, 1996).

Entre los efectos actualmente incorporados en el GPS se encuentran los efectos debido a la altitud en que los satélites orbitan la Tierra y el impacto generado por la alta velocidad en que los mismos se mueven. Por esto, es necesario considerar que el campo gravitacional terrestre genera efectos relativistas en los tiempos medidos de propagación de la señal, así como los efectos de tales velocidades. Éstos son corregidos con el objetivo de ajustar las frecuencias de los relojes (*rates of clocks*) en el sistema de posicionamiento con la frecuencia de un reloj que se encuentre en el geode terrestre. Para compensar los efectos de la dilatación temporal generados por la velocidad relativa respecto al ECIF y los del cambio de frecuencia gravitacional, los relojes atómicos presentes en los satélites reciben una frecuencia fraccionaria fija de offset igual a  $-4,4645 \times 10^{-10}$  (ASHBY, 1999)

Aunque actualmente varios efectos relativistas fueron incorporados en el GPS como los mencionados anteriormente, el usuario (receptor de la señal) debe realizar dos correcciones: una por los efectos de la excentricidad de la órbita satelital y un segundo efecto de retardo del rango geométrico (*geometric path delay*) causado por la rotación del cuadro de ECEF (sistemas centrados en la Tierra no necesariamente inerciales) respecto a cualquier cuadro inercial, ya que la luz no

viaja en líneas rectas euclidianas en los mismos. El uso del ECEF es práctico para el usuario dado que las efemérides son transmitidas en el sistema WGS-84.

La conversión para el sistema WGS-84 generalmente es hecha a partir de medidas en un ECIF donde el eje de cota coincide en ambos sistemas. De esta forma, como el vector posición de un punto se denota por

$$\chi_{ECI} = \begin{bmatrix} x_{ECI} \\ y_{ECI} \\ z_{ECI} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

y suponiendo que los ejes coordenados coinciden para el ECI y el ECEF en cierto tiempo  $t_c$ , las coordenadas para el punto luego de un tiempo  $t$  son

$$\chi_{ECEF} = {}^{RS}(t) \chi_{ECI} = \begin{bmatrix} \cos \Theta(t) & \sin \Theta(t) & 0 \\ -\sin \Theta(t) & \cos \Theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ECI} \\ y_{ECI} \\ z_{ECI} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

donde  $\Theta(t) = \dot{\Omega}_e (t - t_c)$  es el ángulo que rotaron las coordenadas del ECEF, y  $\dot{\Omega}_e = 7,2921151467 \times 10^{-5}$  rad/s es el valor de rotación de la Tierra para el WGS-84 que se considera constante aunque en realidad varía, por lo que  $(t - t_c)$  tiene que ser pequeño (ASHBY, 1999).

La elección del cuadro de ECI juega un papel importante cuando las mediciones de tiempo precisan alta precisión como en el caso del GPS, dado que es indispensable definir la simultaneidad de eventos. Como los ECEF continúan rotando una vez que cada evento sucede, la luz no viaja en línea recta y por lo tanto sería necesario realizar múltiples correcciones, algo que al utilizar un ECIF no es requerido ya que la luz y las señales viajan en líneas rectas que permiten determinar el tiempo transcurrido entre la salida del transmisor y la llegada al receptor como el módulo de la diferencia entre las posiciones de los mismos dividido por  $c$  (ecuación (4.3)).

$$t_D = \frac{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|}{c} \quad (4.3)$$

Si bien utilizar ECEF simplifica de forma notoria el problema, aún se requiere una transformación de las posiciones de los cuatro satélites utilizados para determinar la posición y con esto determinar el tiempo de GPS del usuario en dicha solución. Además, el tiempo para el cual se define el cuadro del ECI ( $t_c$ ) precisa ser registrado ya que el usuario requiere las coordenadas en el ECEF para el tiempo de GPS, que debe considerar la rotación del ECEF en el tiempo entre  $t_c$  y  $t$ . La elección de este  $t_c$  puede ser para un único tiempo del receptor, con cuatro tiempos para las transmisiones de las señales (*time tagging at reception time*), o puede ser escogido para que exista un único tiempo para la transmisión con cuatro tiempos diferentes de recepción de las señales (*time tagging at transmission time*).

Las consecuencias del efecto Shapiro pueden ser despreciadas dado que para puntos próximos a la Tierra, el enlentecimiento de las señales está por debajo de los 200 ps (ASHBY, 1996).

#### 4.1 EFECTO DOPPLER RELATIVISTA

Como mencionado en la sección anterior, al existir movimiento relativo entre los transmisores de las señales y el receptor, el rango geométrico real cambia y debido al efecto Doppler relativista la frecuencia del portador cambia. A continuación será presentada la relación entre la frecuencia recibida ( $f$ ) y la frecuencia transmitida ( $F$ ) desconsiderando los efectos gravitacionales ya que como referencial es utilizado un cuadro del ECI.

Además de los tiempos de transmisión y recepción cabe definir algunos parámetros importantes para el análisis posterior, tales como el vector constante unitario del camino recorrido por la señal ( $\mathbf{N}$ ), las posiciones del transmisor ( $\mathbf{r}_T(t_T)$ ) y del receptor ( $\mathbf{r}_R(t_R)$ ) y las velocidades de los mismos cuando se transmiten o reciben los *epochs* que serán definidas por  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{v}$  respectivamente.

El tiempo en el que el receptor recibe la señal es definido según la ecuación (4.4)

$$t_R = K + t_T + \frac{1}{c} |\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)| \quad (4.4)$$

donde  $K$  representa errores sistemáticos en el tiempo coordinado del reloj en el receptor y el último término representa el retardo según la ecuación (4.3), que al ser integrado en el tiempo proporciona el efecto Doppler relativista.

Para realizar tal integración en el tiempo, se toma una segunda señal transmitida un periodo después de cierta señal con comportamiento definido por la ecuación (4.4), que a causa de la alta frecuencia de los osciladores en los transmisores puede considerarse infinitesimal (ASHBY, 1999). Así, la segunda señal tiene como tiempos de transmisión y recepción respectivamente a  $t_T + dt_T$  y  $t_R + dt_R$ . Bajo estas condiciones, la forma diferencial de la ecuación (4.4), siendo  $d\mathbf{r}_T$  y  $d\mathbf{r}_R$  los cambios infinitesimales en las posiciones según  $dt_T$  y  $dt_R$  se presenta como

$$dt_R = dt_T + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)}{|\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)|} \cdot (d\mathbf{r}_R - d\mathbf{r}_T) \quad (4.5)$$

Como el vector  $\mathbf{N}$  es

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)}{|\mathbf{r}_R(t_R) - \mathbf{r}_T(t_T)|} \quad (4.6)$$

y para los intervalos infinitesimales los vectores se transforman con las velocidades según

$$d\mathbf{r}_R = \mathbf{v} dt_R, \quad d\mathbf{r}_T = \mathbf{V} dt_T \quad (4.7)$$

entonces, sustituyendo estos vectores en la ecuación (4.4), se obtiene

$$dt_R = dt_T + \frac{1}{c} \mathbf{N} \cdot (\mathbf{v} dt_R - \mathbf{V} dt_T) \quad (4.8)$$

que puede ser reescrita como

$$dt_R \left(1 - \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) = dt_T \left(1 - \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}}{c}\right) \quad (4.9)$$

Para encontrar la relación entre las frecuencias transmitida y recibida serán utilizadas expansiones sólo hasta el segundo orden en  $1/c$ , o sea,  $c^{-2}$ . Tomando en consideración la fuerza centrípeta por la rotación de la Tierra, y siendo  $\Phi_0$  el potencial gravitacional efectivo en el geode, el potencial gravitacional Newtoniano  $\Phi(\mathbf{r})$  para una determinada posición  $\mathbf{r}$  es

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0 \quad (4.10)$$

El tiempo propio transcurrido en los relojes atómicos durante el movimiento del reloj una distancia  $d\mathbf{r}$  en un tiempo  $dt$ , según la relatividad general (sección 2.2) puede ser definido según la ecuación (4.11)

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 + \frac{2\Delta\Phi}{c^2}\right)c^2 dt^2 - (d\mathbf{r})^2 = \left(1 + \frac{2\Delta\Phi}{c^2} - \frac{(d\mathbf{r}/dt)^2}{c^2}\right)c^2 dt^2 \quad (4.11)$$

Resolviendo esta ecuación para el incremento temporal (coordinado) y expandiendo la solución según expansión binomial (sólo hasta el primer término), los intervalos de tiempo (recibido y transmitido) entre las dos señales pueden expresarse en función del tiempo propio

$$dt_R = \frac{d\tau_R}{1 + \frac{\Delta\Phi(\mathbf{r}_R)}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \quad (4.12)$$

$$dt_T = \frac{d\tau_T}{1 + \frac{\Delta\Phi(\mathbf{r}_T)}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}} \quad (4.13)$$

y sustituyendo en la ecuación ecuación (4.9), se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{d\tau_R \left(1 - \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)}{1 + \frac{\Delta\Phi(\mathbf{r}_R)}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = \frac{d\tau_T \left(1 - \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}}{c}\right)}{1 + \frac{\Delta\Phi(\mathbf{r}_T)}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{V}^2}{c^2}} \quad (4.14)$$

Por lo tanto las frecuencias propias transmitida ( $F=1/d\tau_T$ ) y recibida ( $f=1/d\tau_R$ ) se relacionan a través de

$$\frac{f(1 + \Delta\Phi(\mathbf{r}_R)/c^2 - \mathbf{v}^2/2c^2)}{1 - \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}}{c}} = \frac{F(1 + \Delta\Phi(\mathbf{r}_T)/c^2 - \mathbf{V}^2/2c^2)}{1 - \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}}{c}} \quad (4.15)$$

que a su vez puede ser reescrita como ecuación (4.16) cuando la diferencia de potencial gravitatorio puede ser despreciada

$$\frac{f}{\gamma(\mathbf{v})(1 - \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}}{c})} = \frac{F}{\gamma(\mathbf{V})(1 - \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{v}}{c})} \quad (4.16)$$

donde

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.17)$$

El razonamiento puede hacerse de forma inversa integrando la variación de la frecuencia generada por el efecto Doppler en vez de derivando a partir de la variación de tiempo de propagación de la señal. De esta manera queda demostrado que para corregir el efecto Doppler relativista basta incorporar una de estas opciones, según las medidas obtenidas en relación al ECI (ASHBY, 1999). Es importante resaltar que en caso de ambos estar en reposo la frecuencia coordinada se conserva (basta colocar  $\mathbf{v}=0$  y  $\mathbf{V}=0$  en la ecuación (4.9)), proporcionando consistencia al argumento.

## 5 CORRECCIONES DEL USUARIO

Para determinar las tres coordenadas y el tiempo  $t$  de un usuario a través de la utilización del GPS, son necesarias cuatro ecuaciones formuladas a partir de las medidas de cuatro satélites. Existen dos formas principales de realizar estas medidas, siendo la más simple de ellas realizar las cuatro medidas en simultáneo para un instante en el receptor. Esta forma de medición se denomina etiquetado de tiempo en el receptor (*time tagging at the receiver*). La otra forma principal de realizar el etiquetado del tiempo para determinar las coordenadas y el tiempo para el usuario, es hacerlo para un instante en común según los transmisores, y se conoce como *time tagging at the transmitter*.

### 5.1 TIME TAGGING AT THE RECEIVER

El procedimiento para etiquetar según el receptor consiste en varias etapas. La técnica comienza con la selección del instante de recepción y la medición de los tiempos de transmisión en el mismo, usando los códigos del *pseudorandom noise* (PRN) de los cuatro satélites. A partir de ellos se obtienen los  $t_{sv}$  de los relojes en cada satélite al momento de transmisión para el tiempo de recepción definido.

A continuación es necesario determinar el tiempo de GPS  $t$  a partir de los  $t_{sv}$  realizando correcciones debido a fluctuaciones provenientes de la excentricidad de la órbita del vehículo satelital. Estas variaciones periódicas del campo gravitacional tornan necesario realizar una compensación a las medidas obtenidas, a modo de mantener una tasa de variación constante en los relojes atómicos, igual al del tiempo coordinado. Nótese que estas fluctuaciones no dependen del estado del receptor, sino únicamente del transmisor. Para obtener el tiempo  $t$ , es necesario determinar el offset ( $\Delta t_{sv}$ ) adecuado para aplicar a las mediciones.

$$t = t_{sv} - \Delta t_{sv} \quad (5.1)$$

El offset de fase para los valores obtenidos del código de PRN es

$$\Delta t_{sv} = a_{f0} + a_{f1}(t - t_{oc}) + a_{f2}(t - t_{oc})^2 + \Delta t_r \quad (5.2)$$

donde  $a_{f0}$ ,  $a_{f1}$  y  $a_{f2}$  son coeficientes polinomiales definidos en el ICD-200,  $t_{oc}$  el tiempo de referencia proporcionado en el mensaje de navegación y  $\Delta t_r$  es el término de corrección relativista dado por

$$\Delta t_r = F \cdot e \cdot \sqrt{A} \cdot \sin(E_k) \quad (5.3)$$

en que  $e$ ,  $A^{1/2}$  y  $E_k$  (excentricidad, semieje mayor y anomalía excéntrica del satélite) son parámetros de la órbita contenidos en el mensaje, y donde  $F = -4.442807633 \times 10^{-10} \text{ s}\cdot\text{m}^{-1/2}$  es constante. Otra forma equivalente de la ecuación para el efecto relativista, utilizado por el segmento de control es

$$\Delta t_r = -2 \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{V}}{c^2} \quad (5.4)$$

donde  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{V}$  son los vectores de posición y velocidad instantáneas del satélite.

Para continuar el método, una vez determinados los tiempos de sistema es requerido computar las posiciones de cada satélite en el cuadro del ECEF para el tiempo de transmisión de cada uno. La determinación de las posiciones está establecida en el ICD-200, para las cuales  $x_k$ ,  $y_k$ , y  $z_k$  (el subíndice  $k$  indica para cuál satélite está siendo determinado) son definidas por

$$\left. \begin{aligned} x_k &= x'_k \cos \Omega_k - y'_k \cos i_k \sin \Omega_k \\ y_k &= x'_k \sin \Omega_k + y'_k \cos i_k \cos \Omega_k \\ z_k &= y'_k \cos i_k \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

donde  $x'_k$ ,  $y'_k$ , son las posiciones en el plano orbital,  $i_k$  es la inclinación corregida y  $\Omega_k$  es la longitud corregida del nodo ascendente que depende de la tasa de rotación de la Tierra para el WGS-84. El mensaje transmitido brinda los valores de las posiciones en el instante de transmisión con referencia al ECEF en el marco de WGS-84.

Antes de resolver las ecuaciones del retardo de la trayectoria para la posición y el tiempo del receptor, es necesario definir el ECIF en el cual se computará el retardo de la trayectoria. Si bien esta elección es arbitraria, una elección adecuada puede simplificar el problema, por lo que una elección comúnmente utilizada es la de congelar el ECEF a un tiempo próximo del  $t$  de recepción esperado. Una vez que el sistema inercial es elegido, es necesario convertir las coordenadas calculadas anteriormente en el ECEF a este nuevo sistema para los cuatro satélites, lo que generalmente demanda al menos tres rotaciones. Algunas de las mejores simplificaciones en la elección del ECIF consiste en congelar el ECEF en el instante de transmisión de uno de los satélites, lo que torna suficientes tres rotaciones, o elegir el tiempo de GPS igual al instante de recepción local.

Una vez que las etapas anteriores sean concluidas, es posible hallar la solución para las ecuaciones del retardo de la trayectoria para la posición y el tiempo del receptor, linealizando las ecuaciones y resolviéndolas de forma iterativa. A continuación será presentado un método de linealización que es válido para sistemas de coordenadas inerciales, como lo es el ECIF, asumiendo que las etapas anteriores ya fueron realizadas y las posiciones y tiempos son expresados en dicho referencial. Una vez tomadas estas consideraciones, se parte de que en los instantes  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  y  $t_4$  cada satélite envía la señal desde su posición  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$  y  $\mathbf{r}_4$  respectivamente, y son captadas por el receptor en una posición  $\mathbf{r}$  y tiempo  $t$ , incógnitas del problema. Las cuatro incógnitas se determinan en base a la propagación con velocidad  $c$  según las siguientes cuatro ecuaciones

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)^2 - c^2(t - t_j)^2 = 0; \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (5.6)$$

Si se conocen posiciones y tiempos aproximados, como en el caso de definir el ECIF en el instante de llegada de la señal, la ecuación (5.6) se reducen a

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(i)} + \Delta \mathbf{r}; \quad t = t^{(i)} + \Delta t \quad (5.7)$$

donde  $\mathbf{r}^{(i)}$ ,  $t^{(i)}$  son las  $i$ -ésimas estimaciones (o suposiciones) para la posición y tiempo del usuario en el proceso iterativo, y  $\Delta\mathbf{r}$  y  $\Delta t$  son suficientemente pequeños que serán determinados a partir de la ecuación (5.6). Sustituyendo la ecuación (5.7) en la ecuación (5.6) y despreciando los términos cuadrados de  $\Delta\mathbf{r}$  y  $\Delta t$  luego de expandir, se obtiene para  $j = 1, 2, 3, 4$

$$(\mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{r}_j) \cdot \Delta\mathbf{r} - c^2(t^{(i)} - t_j)\Delta t = \frac{1}{2}(c^2(t^{(i)} - t_j)^2 - (\mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{r}_j)^2) \quad (5.8)$$

donde  $c(t^{(i)} - t_j)$  representa la  $i$ -ésima estimación para el pseudorange entre el receptor y el satélite  $j$ . Este sistema de ecuaciones lineales que no es homogéneo puede resolverse de forma matricial, y los términos  $\Delta\mathbf{r}$  y  $\Delta t$  pueden ser separados en una matriz que generalmente tiene determinante no nulo, excepto en configuraciones particulares de los satélites. Aunque estas soluciones sean aproximaciones, puede repetirse el procedimiento de forma iterativa hasta encontrar una solución para  $\Delta\mathbf{r}$  y  $\Delta t$ . Luego, pueden obtenerse mejores aproximaciones a partir de

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^i + \Delta\mathbf{r}; \quad t^{(i+1)} = t^{(i)} + \Delta t \quad (5.9)$$

que converge rápidamente haciendo que los términos de la derecha en la ecuación (5.8) se tornen despreciables, y por lo tanto se satisface la ecuación (5.6). Es necesario destacar que en estos procedimientos no son considerados otros tipos de efectos como los producidos por la ionósfera o troposfera. El proceso de etiquetado de tiempo en el receptor termina aquí si el cuadro del ECI fue seleccionado muy próximo del instante de recepción, caso contrario, será necesario realizar las rotaciones de la posición del usuario para el ECEF en el instante de recepción.

## 5.2 TIME TAGGING AT THE TRANSMITTER

Esta manera de etiquetado es un poco más compleja que la realizada sobre el receptor dado que se debe estimar la velocidad del mismo (aunque será despreciada su aceleración), una vez que el movimiento del mismo

acaba generando una diferencia de hasta 20 ms en el tiempo de recepción de las señales y por ello existen dos problemas principales que deben ser abordados (ASHBY, 1999). Ya que todas las señales salen en un mismo instante según el cuadro del ECEF y el usuario tiene movimiento durante ese lapso de hasta 20 ms según el referencial inercial, es necesario aplicar correcciones que permitan compensar tales diferencias para poder tener una determinación correcta de la posición.

El otro problema a abordar es la corrección que se realizará a los tiempos medidos y que comienza con la selección de un  $t_C$  adecuado para simplificación del problema. Dado que el análisis realizado en este trabajo es para transmisores de frecuencia única, será discutido únicamente el uso del código C/A (*Coarse/acquisition code*), que se repite a cada milisegundo. Seleccionar el instante de medición como el momento en el que empieza una repetición del código C/A (*code boundary*), elimina el tiempo transcurrido desde  $t_C$  hasta el envío de la señal, eliminando la necesidad de aplicar correcciones sobre ese tiempo. Con tal selección,  $t_C$  es el tiempo del sistema GPS, que difiere del tiempo satelital  $t_{SV}$  por las correcciones aplicadas conforme el ICD-200 según la ecuación (5.1), dando lugar a una corrección necesaria para  $t_{SV}$  dada por

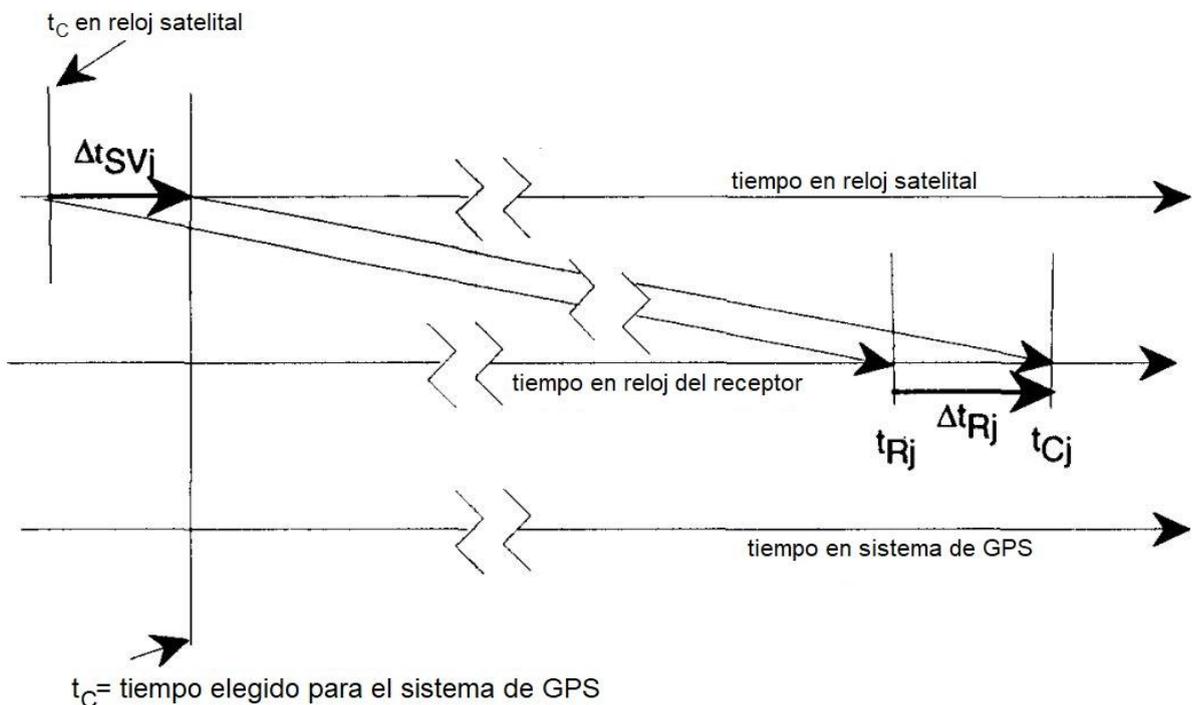
$$t_{SV} = t_C + \Delta t_{SV} \quad (5.10)$$

donde  $\Delta t_{SV}$  para cada satélite es parte del mensaje de navegación es considerado constante ya que en tiempos de hasta 20 ms aproximadamente la tasa de variación es baja (ASHBY, 1999).

Asumiendo que el tiempo de fase ( $\tau$ ) coincide con un límite de código (es múltiplo de 1 ms) y ya que es transmitido por el satélite en el momento  $t_{SV}$  y recibido en el momento  $t_R$ , los eventos suceden según la Figura 5 (para  $j = 1, 2, 3, 4$  indicando el satélite). Si bien el tiempo de sistema  $t$  debería coincidir  $t_C$  escogido para realizar el etiquetado,  $t_C$  también coincide con un límite de código, que numéricamente igual al tiempo de fase ( $\tau = t_C$ ). En consecuencia de las correcciones realizadas sobre los relojes de los satélites, el tiempo  $t_C$  escogido ocurre  $\Delta t_{SV}$  antes en cada uno de los satélites que en el sistema de GPS. Entonces el  $\tau$  es transmitido

(en  $t_c$  para el satélite) antes que el sistema esté en tal tiempo  $t_c$ . Cuando el paquete de ondas llega al receptor en los tiempos  $t_{Rj}$ , para los cuales  $\tau = t_c$  (según satélite), el valor del tiempo es almacenado, dado que será necesario determinar un  $\Delta t_{Ri}$  para determinar el tiempo de llegada al receptor del paquete enviado en el tiempo del sistema  $t_c$ . Nótese que este  $\Delta t_{Ri}$  no es igual a  $\Delta t_{SVj}$  debido al efecto Doppler.

**Figura 5** – Ilustración de offsets para Satélite y receptor



Fuente: Adaptado de ASHBY, 1999.

Para determinar la relación entre  $\Delta t_{Ri}$  y  $\Delta t_{SVj}$ , debido a la pequeña magnitud de los mismos puede ser usada la ecuación (4.9), sin generar errores perceptibles y reescribirla como

$$\Delta t_{Rj} = \Delta t_{SVj} \frac{\left(1 - \frac{\mathbf{N}_j \cdot \mathbf{V}_j}{c}\right)}{\left(1 - \frac{\mathbf{N}_j \cdot \mathbf{v}}{c}\right)} \quad (5.11)$$

Para determinar tal relación es preciso que los vectores  $\mathbf{V}_j$  estén representados en un ECI, por lo que pueden ser necesarias algunas rotaciones. Las  $\mathbf{V}_j$  pueden obtenerse a partir de la derivación de las posiciones según el tiempo coordinado, y  $\mathbf{v}$

y  $\mathbf{N}_j$  deben ser definidos en un ECI con sus valores estimados por varias soluciones de navegación sucesivas.

Luego de que las correcciones anteriores son realizadas y los tiempos correspondientes al  $t_c$  según el sistema de GPS de llegada al receptor son  $t_{Cj} = t_{Rj} + \Delta t_{Ri}$ . Nótese que estos tiempos no son los tiempos del sistema debido a sesgos (*bias*) del reloj local. Denotando tal sesgo como  $b_c$  y los tiempos de GPS como  $t_j$ , entonces los tiempos referentes a cada evento están dados por

$$t_j = t_{Cj} + b_c \quad (5.12)$$

Debido al movimiento del receptor en referencia al ECI durante la medición de esos cuatro tiempos (para usuarios cerca de la Tierra siendo entre 67 - 86 ms después de  $t_c$ ) se torna necesario tener una aproximación de la velocidad del mismo para poder calcular la posición y los tiempos de recepción. Considerando su velocidad como conocida ( $\mathbf{v}_c$ ) en para cierto  $t_c$ , es preciso calcular la posición  $\mathbf{r}_c$  y  $b_c$

$$\mathbf{r}_{Rj} = \mathbf{r}_R(t_j) = \mathbf{r}_c + \mathbf{v}_c(t_{Cj} + b_c - t_c) \quad (5.13)$$

La elección del ECI de referencia coincidente con el cuadro del ECEF en el tiempo  $t_c$  simplifica de manera significativa para este tipo de *tagging*, ya que las posiciones  $\mathbf{r}_j$  de los satélites son proporcionadas por los mensajes de navegación en referencia al WGS-84, o sea, todas son especificadas en el mismo ECEF, lo que muestra una ventaja para el uso de este tipo de etiquetado dado que no se precisa hacer ninguna rotación de vectores para ubicar las posiciones en un mismo cuadro inercial, y la solución para  $\mathbf{r}_c$  en el ECIF (y en el cuadro del ECEF) tampoco. Caso el ECIF no sea definido como coincidente con el ECEF en el  $t_c$ , los vectores  $\mathbf{r}_{Rj}$  precisan ser rotados para el ECEF (ASHBY, 1999).

El *delay* generado por la propagación para los cuatro vectores puede escribirse en función de las informaciones obtenidas anteriormente, teniendo como incógnitas el sesgo y las componentes de la posición del receptor en el ECEF.

$$[\mathbf{r}_c + \mathbf{v}_c(t_{Cj} + b_c - t_c) - \mathbf{r}_j]^2 = c^2(t_{Cj} + b_c - t_c)^2, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (5.14)$$

Una forma de resolver tal sistema de ecuaciones es a través de un método iterativo en el cuál es requerido una lógica similar al usado para el *time tagging at the receiver*, en el que a las incógnitas se les agrega un término pequeño de variaciones, esto es

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_C^{(i)} + \Delta \mathbf{r}, \quad b_C = b_C^{(i)} + \Delta t \quad (5.15)$$

Dado que tales variaciones son pequeñas, las expansiones realizadas al sustituir esta ecuación en la ecuación del retardo para la propagación se deben hacer despreciando los términos de orden superior a 1, luego de lo que se obtiene

$$\mathbf{R}_j^{(i)} \cdot \Delta \mathbf{r} - c^2(T_j^{(i)} - \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{R}_j^{(i)})\Delta t = \frac{1}{2} \left[ c^2(T_j^{(i)})^2 - (\mathbf{R}_j^{(i)})^2 \right] \quad (5.16)$$

donde

$$T_j^{(i)} = t_{Cj} + b_C^{(i)} - t_C, \quad \mathbf{R}_j^{(i)} = \mathbf{r}_C^{(i)} + \mathbf{v}_C T_j^{(i)} - \mathbf{r}_j \quad (5.17)$$

El procedimiento para realizar el etiquetado del tiempo en el transmisor está basado en las consideraciones vistas anteriormente, sin embargo es importante establecer el orden en el cuál realizar cada una de las etapas ya que de no ser así es posible acabar aplicando correcciones demás, quitando precisión a las medidas. El método debe iniciar con las medidas de los tiempos para cada uno de los cuatro transmisores ( $t_{Rj}$ ) tomadas en el reloj local, para un único *epoch*  $\tau$  correspondiente a un único tiempo de fase de GPS. De forma similar con el *tagging* en el receptor, es necesario determinar la variación de tiempo entre el instante en que se transmite la señal y el tiempo de GPS para un mismo valor. Tal variación ( $\Delta t_{SVj}$ ) se determina siguiendo el mismo protocolo usado anteriormente, definido por el ICD-200 (*User algorithm for SV Clock Correction*). Luego tienen que computarse las posiciones de los satélites según el ECEF en el momento de transmisión de  $t_C$ , aplicando directamente la ecuación (5.5).

El siguiente paso consiste en la elección del sistema de coordenadas inercial, para el que cabe destacar que una elección inmediata es congelar el ECEF al momento de la transmisión. Si se selecciona esta opción para definir el ECI, no es necesario rotar las coordenadas de los satélites, y si se estima la posición del receptor para el  $t_c$ , tampoco será necesario realizar rotaciones a ésta. Sin embargo hay que realizar correcciones en los tiempos medidos por el reloj local, ya que este continúa en movimiento según el cuadro del ECI durante las mediciones, provocando una diferencia entre el  $\Delta t_{sv}$  y el  $\Delta t_{Ri}$  y además el tiempo  $t_c$  no ocurre en simultáneo para el sistema y para el satélite. Para obtener las ecuaciones del retardo en el camino geométrico que son usadas para determinar la posición del receptor y el offset en  $t_c$ , es necesario considerar la velocidad y el offset del receptor como constantes durante el periodo de medición, siendo tal velocidad expresada en referencia al ECI (caso no estar definida en este, hay que realizar rotación del vector). A partir de ella, es posible estimar la posición del usuario para determinar  $\Delta t_{Ri}$  (ecuación (5.11)), lo que permite calcular los tiempos de recepción de las señales enviadas en el tiempo de sistema  $t_c$  según

$$t_{Cj} = t_{Rj} + \Delta t_{Rj} \quad (5.18)$$

Al igual que para el *tagging* en el receptor, las ecuaciones son linealizadas y resueltas por el proceso iterativo descrito anteriormente, y termina cuando las diferencias tienden a cero. Cuando las ecuaciones son resueltas para el tiempo  $t_c$ , donde coinciden ECI y ECEF, el proceso acaba dado que la posición ya se encuentra en el referencial requerido (generalmente WGS84), caso contrario es necesario realizar las rotaciones pertinentes para obtenerlas en tal referencial.

## 6 EJEMPLOS DE APLICACIONES

Debido al carácter teórico de este trabajo no fueron realizadas simulaciones ni mediciones sobre datos reales. A modo de discusión y completitud de esta monografía, serán presentados a continuación ejemplos que pueden ser encontrados en la literatura (ASHBY, 1999), donde se realizaron simulaciones. El objetivo es discutir los efectos de aplicar cada uno de los métodos planteados anteriormente, a modo de visualizar la importancia de los mismos para determinar la posición y el tiempo de un receptor.

Primeramente será presentado un ejemplo para la determinación de la posición y tiempo del usuario usando el *tagging* en el receptor. La medida realizada por el usuario es ejecutada para un tiempo  $t = 37.239,9994223656$  s en su reloj, que corresponde a un tiempo de GPS  $t = 37.240$  s exactamente. La ubicación real del mismo en el sistema geocéntrico está dada por la latitud y longitud  $35^\circ$  N,  $0^\circ$  E respectivamente, y a una distancia del centro de la Tierra  $R = 6.378.136,3$  m. Según el sistema WGS-84 su posición está dada por

$$\chi_{WGS84} = \begin{bmatrix} R\cos(35^\circ) \\ 0 \\ R\sin(35^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.224.663,389 & m \\ 0 \\ 3.658.348,690 & m \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Siguiendo el método para la determinación de la posición visto en la sección 5, son obtenidos los tiempos del sistema  $t_i$  para los cuáles se realizó la transmisión en cada uno de los satélites, y a partir de estos se obtuvo la posición para cada uno de ellos. Luego, con la matriz de rotación dada por la ecuación (4.2) fueron transformados para un  $t_c = 27.239$  s exactos, instante en el cual se definió el ECI congelando el ECEF. Así, una vez terminado el procedimiento, solucionando el sistema de ecuaciones para el *delay* en la propagación (Tabla 3), se transformó el vector posición para el sistema WGS-84 (ecuación (6.2)).

$$\chi_{WGS84} = \begin{bmatrix} 5.224.663,388 & m \\ 0,000 & m \\ 3.658.348,689 & m \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Comparando las ecuaciones (6.1) y (6.2) puede observarse que el procedimiento usado para la técnica determina la posición de un usuario con una precisión alta. En este caso la diferencia con la posición real difiere en distancias de 1 milímetro, lo que demuestra la efectividad de usar este método. También es posible observar a partir de la Tabla 3 que el proceso iterativo converge rápidamente, dado que en tres iteraciones ya habían sido obtenidas las posiciones con una precisión de 1 m.

**Tabla 3** – Resultados de la solución iterativa para las ecuaciones de propagación del *delay*

Intento	x del usuario	y del usuario	z del usuario	t del reloj de usuario
0 (start)	0 m	0 m	0 m	37 239.999 422 365 6 s
1	5 057 363.392 m	2 355.126 m	3 541 092.792 m	37 239.997 532 305 8 s
2	5 226 931.552 m	354.224 m	3 659 938.391 m	37 240.000 033 455 9 s
3	5 224 663.780 m	380.983 m	3 658 348.973 m	37 240.000 000 006 0 s
4	5 224 663.374 m	380.988 m	3 658 348.689 m	37 240.000 000 000 0 s
5	5 224 663.374 m	380.988 m	3 658 348.689 m	37 240.000 000 000 0 s

Fuente: Adaptado de ASHBY, 1999, p. 15

La importancia de considerar la rotación de la Tierra durante el transcurso de las mediciones también puede ser observado en este ejemplo. Para eso se computó el mismo procedimiento iterativo de resolución, usando los mismos valores de posición de los satélites encontrados inicialmente en el ECEF, pero sin usar un sistema inercial. Los resultados de este nuevo procedimiento (Tabla 4) muestran que si bien el tiempo presenta una diferencia menor a 14 ns, la posición determinada difiere por casi 28 m. De esta forma queda claro que es imperativo tomar en consideración la rotación de la Tierra aún en esos pequeños intervalos de tiempo.

**Tabla 4** – Resultados de la solución iterativa sin considerar la rotación de la Tierra

Intento	x del usuario (m)	y del usuario (m)	z del usuario (m)	t del reloj de usuario (s)
0 (start)	0	0	0	37 239.999 422 365 6
1	5 057 359.485	2 012.579	3 541 090.386 m	37 239.997 532 323 0
2	5 226 927.086	00.194	3 659 935.704 m	37 240.000 033 469 3
3	5 224 659.325	27.107	3 658 346.291 m	37 240.000 000 019 6
4	5 224 658.919	27.112	3 658 346.008 m	37 240.000 000 013 6
5	5 224 658.919	27.112	3 658 346.008 m	37 240.000 000 013 6

Fuente: Adaptado de ASHBY, 1999, p. 16

Para el análisis de la información cuando el *tagging* se ejecuta sobre el transmisor, fue utilizado el mismo ejemplo de la situación anterior pero en la cual el límite de código elegido es  $t_c = 240.0$  s exactamente. Siguiendo las indicaciones dadas en la sección 5.2, primero se registraron los tiempos, en el reloj local, para los que llega cada una de las transmisiones y con ello junto a informaciones del mensaje de navegación, fue posible determinar las posiciones de los satélites al momento del envío de la señal, según el ECEF en el tiempo de GPS  $t_c$ . Para este instante se definió el cuadro del ECI coincidente con el ECEF, y se incorporan las correcciones del efecto Doppler de primer orden. Los resultados de aplicar esta técnica (Tabla 5) muestran nuevamente la rapidez con que el método iterativo converge, dado que con tres iteraciones se consigue una estimación de la posición con error menor a un metro.

**Tabla 5** – Resultados de la solución iterativa para  $r_c$  y  $b_c$ 

Intento	$x_c$ del receptor (m)	$y_c$ del receptor (m)	$z_c$ del receptor (m)	Sesgo de reloj local $b_c$ (s)
0	0.0	0.0	0.0	0.000 000 300 0
1	5 051 460.568	-9 835.265	3 545 131.610	-0.002 453 425 2
2	5 226 991.162	132.182	3 659 870.280	0.000 032 544 3
3	5 224 663.799	-0.023	3 658 349.573	-0.000 000 417 2
4	5 224 663.390	-0.000	3 658 348.690	-0.000 000 423 0
5	5 224 663.390	-0.000	3 658 348.690	-0.000 000 423 0

Fuente: Adaptado de ASHBY, 1999, p. 29

Dado que las correcciones por el efecto Doppler de primer orden son pequeñas, se realizó el mismo procedimiento pero desconsiderando estas correcciones, para analizar la relevancia de tener en cuenta tales rectificaciones al encontrar la posición del usuario (Tabla 6).

**Tabla 6** – Resultados de la solución iterativa para  $r_C$  y  $b_C$  sin las correcciones del efecto Doppler

Intento	$x_C$ del receptor (m)	$y_C$ del receptor (m)	$z_C$ del receptor (m)	Sesgo de reloj local $b_C$ (s)
0	0.0	0.0	0.0	0.000 000 300 0
1	5 051 461.207	-9 835.359	3 545 131.862	-0.002 453 427 6
3	5 226 991.866	132.086	3 659 870.566	0.000 032 542 4
4	5 224 664.501	-0.072	3 658 349.243	-0.000 000 419 1
5	5 224 664.092	-0.096	3 658 348.976	-0.000 000 424 9
6	5 224 664.092	-0.096	3 658 348.976	-0.000 000 424.9

Fuente: Adaptado de ASHBY, 1999, p. 30

Comparando estos resultados con los de la Tabla 5, es posible reparar que tales efectos causan un error de aproximadamente 75 cm (ASHBY, 1999). Este valor puede considerarse pequeño o muy elevado dependiendo de la precisión requerida por el usuario. Cuando, por ejemplo, el GPS es utilizado para desplazarse en la cotidianeidad, 75 cm es un valor que no causa grandes desafíos para llevar a cabo el objetivo de la persona que lo utiliza, sin embargo, este valor puede tornarse grande si la precisión que se requiere es alta. En base a esto acaba siendo propio de la aplicación que se le va a dar a la medida, la necesidad de considerar el efecto Doppler de primer orden.

## 7 CONCLUSIÓN

El desarrollo de este trabajo consistió en una recopilación de la teoría detrás del Sistema de Posicionamiento Global, enfocada en los métodos para correcciones relativistas necesarias. Dadas las condiciones bajo las cuales se encuentran los vehículos satelitales utilizados para la determinación de la posición y el tiempo, la necesidad de entender la Teoría de la Relatividad se tornó indispensable.

Con la demanda de precisión alta para algunas medidas de posición por GPS, considerar la mayor cantidad de factores se torna indispensable. Este trabajo fue centrado en las correcciones relativistas necesarias, pero eludiendo otros efectos como los efectos atmosféricos, las variaciones en la geometría de los satélites y antenas entre otros, que deberían ser tomados en cuenta si se requiere mayor precisión.

Según la discusión realizada sobre la aplicación de los métodos utilizados fue posible ver la eficiencia de los mismos, ya que errores pequeños fueron encontrados entre valores reales y las simulaciones. También pudieron apreciarse las diferencias que aparecen cuando se desconsideran características como el movimiento del receptor durante el periodo de las mediciones y el efecto Doppler de primer orden. Esto dejó en evidencia la necesidad de aplicar métodos de corrección a los tiempos medidos y la importancia de la teoría de la relatividad para ello.

## REFERENCIAS

ÁLVAREZ, D. A. G. **Sistema GNSS (global navigation satellite system)**. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid, 2008.

ASHBY, N.; SPILKER, J. J. **Introduction to relativistic effects on the Global Positioning System. Global Positioning System: Theory and applications**. Washington: v. 1, p. 623-697. 1996.

ASHBY, N.; WEISS, M. **Global Positioning System Receivers and Relativity**. Washington: U.S. GPO, 1999.

DUNN, M. J.; DISL, D. **Global Positioning System Directorate Systems Engineering & Integration Interface Specification IS-GPS-200**. 2012

D'INVERNO, R. A.; HARVEY, A. Introducing Einstein's Relativity. **Physics Today**, v. 46, n. 8, p. 59, 1993. DOI: 10.1063/1.2809013. Disponible en: <https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/1.2809013>. Acceso: 15 mar. 2022.

EINSTEIN, A.; LARRUCEA, M. P. **Sobre la teoría de la relatividad especial y general**. Alianza Editorial, 2005.

GPS.GOV. **Control Segment**. 2022. Disponible en: <https://www.gps.gov/systems/gps/control/>. Acceso: 15 mar. 2022.

GPS.GOV. **El Sistema de Posicionamiento Global**. 2022. Disponible en: <https://www.gps.gov/systems/gps/spanish.php>. Accesado: 15 mar. 2022.

GPS.GOV. **Space Segment**. 2022. Disponible en: <https://www.gps.gov/systems/gps/space/>. Acceso: 15 mar. 2022.

HASAN, M. Z. et al. ANALYSIS ON ATTITUDE POSITION OF EARTH CENTERED INERTIAL (ECI) BASED ON RAZAKSAT DATA. **Jurnal Teknologi**, [S. l.], v. 76, n. 12, 2015. DOI: 10.11113/jt.v76.5887. Disponible en: <https://journals.utm.my/jurnalteknologi/article/view/5887>. Acceso: 15 mar. 2022.

IBGE.GOV. **Informações sobre posicionamento geodésico**. 2022. Disponible en: [https://geofp.ibge.gov.br/informacoes\\_sobre\\_posicionamento\\_geodesico/sirgas/sisref\\_2.pdf](https://geofp.ibge.gov.br/informacoes_sobre_posicionamento_geodesico/sirgas/sisref_2.pdf). Accesado: 7 mar. 2022.

MALYS, S.; SLATER, J. **Maintenance and enhancement of the World Geodetic System 1984**. In: Proceedings of the 7th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1994), Salt Lake City, 1994. p. 17-24.

MARCHIORO, D. Z. **Notas de aula de relatividade**. Foz de Iguazú: UNILA, 2019.

NIMA, T. . **Department of Defense World Geodetic System 1984: Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems**. Bethesda: NIMA TR8350.2,

1997.

SWIFT, E. **Improved WGS 84 coordinates for the DMA and air force GPS tracking sites**. In: Proceedings of the 7th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1994), Salt Lake City, 1994. p. 285-292.

VITERY, F. E. C. El Aumento de la Masa Inercial; Einstein y las Coordenadas. **Ciencia e Ingeniería Neogranadina**, Bogotá, n. 15, p. 116-126. 2005