



INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE
CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA
(ILACVN)

MATEMÁTICA – LICENCIATURA

UM ESTUDO SOBRE OS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E A BASE DUODECIMAL

BIANCA LAÍS SCHRIPE

Foz do Iguaçu
2022



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE
CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA
(ILACVN)**

MATEMÁTICA – LICENCIATURA

UM ESTUDO SOBRE OS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E A BASE DUODECIMAL

BIANCA LAÍS SCHRIPE

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto Latino-Americano de
Ciências da Vida e da Natureza da
Universidade Federal da Integração Latino-
Americana, como requisito parcial à obtenção
do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Zaqueu Vieira Oliveira

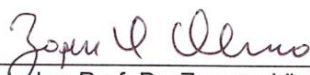
Foz do Iguaçu
2022

BIANCA LAÍS SCHRIppe

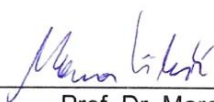
UM ESTUDO SOBRE OS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E A BASE DUODECIMAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

BANCA EXAMINADORA



Orientador: Prof. Dr. Zaqueu Vieira Oliveira
UNILA



Prof. Dr. Marcos Lübeck
UNIOESTE



Profa. Dra. Camila Isoton
UNILA

Foz do Iguaçu, 19 de dezembro de 2022.

TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor(a): Bianca Laís Schrippe_____

Curso: Matemática - Licenciatura_____

	Tipo de Documento
(x) graduação	(.....) artigo
(.....) especialização	(x) trabalho de conclusão de curso
(.....) mestrado	(.....) monografia
(.....) doutorado	(.....) dissertação
	(.....) tese
	(.....) CD/DVD – obras audiovisuais
	(.....)_____

Título do trabalho acadêmico: Um estudo sobre os sistemas de numeração e a base duodecimal_____

Nome do orientador(a): Prof. Dr. Zaqueu Vieira Oliveira_____

Data da Defesa: 19/12/2022

Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor(a):

a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons Licença 3.0 Unported*.

Foz do Iguaçu, 19 de dezembro de 2022.

Assinatura do Responsável

RESUMO

A necessidade da contagem é um processo histórico indispensável à organização da vida humana na sociedade. Antigamente, vários grupos possuíam um sistema de numeração próprio. Desde meados do século XVI, adotou-se o sistema Hindu-Arábico de base decimal como ferramenta política facilitadora entre a comunicação social, sendo padrão aos sistemas de numeração. O sistema foi construído, aperfeiçoando estruturas de demais sistemas. Existe um debate de que a base decimal não é necessariamente a base mais facilitadora de ensino, mas sim a base duodecimal. E o objetivo central do trabalho é apresentar a vertente desta base duodecimal como contribuinte ao ensino da matemática. A pesquisa foi realizada sob referencial bibliográfico, tendo caráter exploratório e qualitativo, além de buscar a compreensão do funcionamento do sistema de numeração Mesopotâmico e Egípcio. Sendo a matemática uma ciência que se desenvolve pela e a partir da sociedade, não se invalida a possibilidade de mudanças, mas tão pouco se faz necessário haver essa troca.

Palavras-chave: sistemas de numeração; base numérica duodecimal; história da matemática.

RESUMEN

La necesidad de contar es un proceso histórico indispensable para el desarrollo humano cuanto una sociedad. En el pasado, varios grupos tenían su propio sistema de numeración. Desde aproximadamente el siglo XVI, el sistema decimal indoárabe se ha adoptado como una herramienta política estándar de los sistemas numéricos para facilitar la comunicación social. El sistema fue construido, mejorando estructuras de otros sistemas. Existe un debate de que la base decimal no es necesariamente la base más sencilla de enseñar, pero si, la base duodecimal lo es. El objetivo principal del trabajo es presentar el aspecto de esta base duodecimal como coadyuvante de la enseñanza de las matemáticas. La investigación se realizó utilizando exploración bibliográfica cualitativa y de carácter exploratorio, además se intentó a comprender el funcionamiento del sistema de numeración mesopotámico y egipcio. Pues siendo la matemática una ciencia que se desarrolla a través y desde la sociedad, no se invalida la posibilidad de cambios en su estructura, sin embargo, tampoco es necesario.

Palabras clave: sistemas de numeración; base numérica duodecimal; historia de las matemáticas.

ABSTRACT

The necessity for counting is an indispensable historical process to the organization of human life in society. In the past, several groups had their own numbering system. Since the middle of the 16th century, the Hindu-Arabic decimal base system has been adopted as a facilitating political tool among the social communication, being the standard for numbering systems. The system was built, improving structures of other systems. There is a debate that the decimal base is not necessarily the most teaching-friendly base, but the duodecimal system is. And the main work's goal is to present the aspect of this dozenal base as a collaborator to the teaching of mathematics. The research was carried out using a bibliographical reference, with an exploratory and qualitative character, in addition to seeking to understand the functioning of the Mesopotamian and Egyptian numbering system. As mathematics is a science that develops through and from society, the possibility of changes is not invalidated, but neither is this exchange necessary.

Key words: numeral systems; duodecimal number base; history of mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Números maias	15
Figura 2 – Representação do número 15.001 em potências de dez	19
Figura 3 – Osso de Ishango no Museu de Ciências Naturais de Bruxelas	20
Figura 4 – <i>Tokens</i> de aproximadamente 8.000 a.E.C à 3.000 a.E.C	21
Figura 5 – <i>Tokens</i> de aproximadamente 4.400 a.E.C. à 3.100 a.E.C.	22
Figura 6 – <i>Tokens</i> de aproximadamente 3.750 a.E.C.	22
Figura 7 – <i>Tokens</i> de aproximadamente 3.500 a.E.C.	23
Figura 8 – <i>Tokens</i> de aproximadamente 3.700 a.E.C. à 2.600 a.E.C.	23
Figura 9 – <i>Tokens</i> de aproximadamente 3.500 a.E.C. à 2.600 a.E.C.	23
Figura 10 – Tablete de aproximadamente 3.500 a.E.C. à 2.100 a.E.C.	24
Figura 11 – Tablete de aproximadamente 3.500 a.E.C. à 2.100 a.E.C.	25
Figura 12 – Tablete de Uruk, 3.200 a.E.C.	27
Figura 13 – Símbolos sumérios	27
Figura 14 – Símbolos elamitas	28
Figura 15 – Representação babilônica do número 100	28
Figura 16 – Representação do número 100 com o acréscimo do zero	29
Figura 17 – Tablete de Plimpton 322	30
Figura 18 – Tablete YBC 7.289	32
Figura 19 – Tablete BM 15.285	32
Figura 20 – Algarismos fundamentais de numeração hieróglifa egípcia e as principais variantes que figuram nos monumentos de pedras	34
Figura 21 – Representação do número 20.178 no sistema de numeração hieróglifo egípcio	35
Figura 22 – Representação da operação 12×27 tendo como base o sistema de numeração egípcio	36
Figura 23 – Representação da operação da adição com símbolos egípcios	36
Figura 24 – Como contar de um a doze utilizando uma mão	38
Figura 25 – Representação em potências de 12	39
Figura 26 – Tabela de adição duodecimal	40
Figura 27 – Soma de dúzias	41
Figura 28 – Subtração de dúzias	41

Figura 29 – Tabela de multiplicação duodecimal	42
Figura 30 – Exemplo de multiplicação duodecimal	43
Figura 31 – Exemplo de multiplicação duodecimal, com mais do que um algarismo no multiplicador	43
Figura 32 – Divisão no sistema duodecimal	45
Figura 33 – Exemplo de operação de soma de frações na base duodecimal	46
Figura 34 – Tabela de multiplicação na base doze	46
Figura 35 – Equação de primeiro grau no sistema de numeração duodecimal	47
Figura 36 – Primeira versão de <i>New Numbers</i>	49

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Quadro Valor de Lugar sistema decimal posicional	16
Quadro 2 – Indica o multiplicando e a ordem de grandeza do resultado	30
Quadro 3 – Acréscimo do valor do tablete de multiplicação por 19, o correspondente à multiplicação por 28	30
Quadro 4 – Acréscimo do valor do tablete de multiplicação por 19, o correspondente à multiplicação por 37	31
Quadro 5 – Simplificação para o resultado 11; 51; 52	31
Quadro 6 – Quadro Valor de Lugar sistema duodecimal posicional	37

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 OBJETIVOS	11
2.1 OBJETIVO GERAL	11
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
3 METODOLOGIA DE PESQUISA	12
4 ALGUNS CONCEITOS MATEMÁTICOS	13
4.1 ALGARISMO, NÚMERO E NUMERAL	13
4.2 O ZERO PARA REPRESENTAR O “VAZIO”	14
4.3 BASES NUMÉRICAS	16
4.4 ORDENS E CLASSES	16
4.5 REPRESENTAÇÕES NUMÉRICAS	17
4.6 SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL	17
4.7 SISTEMA DE NUMERAÇÃO NÃO POSICIONAL	19
5 A ORIGEM DOS NÚMEROS	20
5.1 SISTEMA DE NUMERAÇÃO MESOPOTÂMICO	26
5.2 SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIO	33
6 A BASE DUODECIMAL	37
6.1 TÁBUAS DE ADIÇÃO DO SISTEMA DUODECIMAL	40
6.2 TÁBUAS DE MULTIPLICAÇÃO DO SISTEMA DUODECIMAL	42
6.3 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE DUODECIMAL	44
6.4 EQUAÇÕES DUODECIMAIS	47
6.5 A CRIAÇÃO E HISTÓRIA DA <i>THE DOZENAL SOCIETY OF AMERICA (DSA)</i>	48
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

Segundo Eves (2004, p. 25), considera-se a matemática mais antiga:

[...] aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número, é por aí que começaremos focalizando de início o surgimento no homem primitivo do conceito de número e do processo de contar.

Não é difícil imaginar que sociedades antigas tenham carecido da contagem, decorrente da necessidade de organizar insumos relacionados à sobrevivência. O processo de contagem começou a se desenvolver anteriormente ao processo de escrita, portanto, possuímos poucos elementos concretos para sua análise (MOL, 2013). Provavelmente, o primeiro procedimento aritmético da história teve uso da correspondência unidade a unidade, conhecido como método da comparação aplicado em seres ou objetos, tendo ou não a mesma natureza, sem por isso apelar para a contagem abstrata (IFRAH, 1997).

A correspondência unidade a unidade, empregam assim a prática do entalhe sobre osso ou sobre madeira. Outros utilizam o amontoado ou o alinhamento de pedras, conchas, ossos ou paus. Outros, enfim, se referem às diversas partes de seus corpos, apelando aos dedos das mãos e dos pés, às articulações dos braços e das pernas, aos olhos, ao nariz, à boca, às orelhas, aos mamilos, ao tórax. pedras, pauzinhos, nós em cordas, etc. (IFRAH, 1997, p. 18).

Por necessidade, o homem aprendeu a comparar, contar e agrupar. Também por necessidade, precisou desenvolver símbolos e valores para eles. A matemática desenvolveu-se de acordo com a necessidade da humanidade, influenciada pelo cotidiano. Então, dessas necessidades, vários símbolos foram atribuídos e progressivamente evoluiu à abstração dos números.

Embora a questão seja controversa e haja poucos indícios, acredita-se que um dos meios que possibilitaram a contagem, foi o uso da mão. Considerada a primeira máquina de contar e de calcular, muitos povos recorreram a ela. O uso dos dedos, das falanges e das articulações dos dedos permitiram a criação de diversos sistemas de numeração (IFRAH, 1997; MOL, 2013).

A base 10, que hoje usamos e que era empregada pelos egípcios antigos, teria origem nos 10 dedos da mão. A base 20, usada pelos maias pré-colombianos, teria sido motivada pelo uso dos 10 dedos das mãos e dos 10 dedos dos pés. A contagem em dúzias, ou seja, na base 12, pode também ser vista como de natureza antropomórfica: em uma mão, o dedo polegar é usado para contar às 12 falanges dos outros quatro dedos. A possibilidade

de contar 12 unidades em uma das mãos, conjugada com os cinco dedos da outra mão, pode estar na origem de sistemas de contagem na base 60. (MOL, 2013, p. 14).

Diversos sistemas de numeração foram criados em épocas e regiões diferentes por distintos grupos culturais, cada qual com características específicas de acordo com a cultura destes povos. Em meados do século XVI, padronizou-se o uso do sistema de numeração posicional decimal hindu-arábico, uma adaptação dos sistemas de numeração hindu e do sistema de numeração arábico. Apesar de ter sido adotado como padrão, o sistema de numeração hindu-arábico não é o único utilizado atualmente, como acontece na China, onde utiliza-se a escrita ideográfica.

O sistema de numeração, assim como a matemática, não é imutável, é um conjunto de adaptações para atender melhor a sociedade. Nesse viés, desde meados de 1.944, nos Estados Unidos, uma corporação de educação voluntária nomeada *The Dozenal Society of America* defende a adoção de um sistema de contagem formado por 12 dígitos (SCHIFFMAN, 1982)

Indivíduos e povos têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, instrumentos materiais e intelectuais [que chamo ticas] para explicar, entender, conhecer, aprender para saber e fazer [que chamo de matema] como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência em diferentes ambientes naturais, sociais e culturais [que chamo de etnos] (D'AMBROSIO, 2009, p.60)

Deste modo, o presente trabalho visa estudar o sistema duodecimal com o objetivo de analisar os algoritmos utilizados de modo “automático” ao trabalhar com a base decimal. Além de tudo, examinando diferentes bases distintas da convencional, valoriza-se a construção científica de povos originários, desvinculando a ideia da matemática ser imutável.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem como objetivo central revisar alguns aspectos históricos acerca do desenvolvimento matemático mostrando que esta área do conhecimento se transforma e se reconfigura ao longo da história a partir do que diferentes culturas e

povos produziram. O tema central da pesquisa serão os sistemas de numeração e a base duodecimal.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Esta pesquisa apresenta os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar alguns sistemas de numeração utilizados por diferentes civilizações e povos.
- Teorizar a base duodecimal apresentando seu funcionamento e suas características matemáticas principais: operações, critérios de divisibilidade e algumas propriedades da base.
- Por fim, apresentar a *The Dozenal Society of America (DSA)* e seus objetivos.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Esta pesquisa tem caráter exploratório na medida em que, como afirmam Gerhardt e Silveira (2009, p. 37), “tem como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema” estudado. Deste modo, este trabalho visa apresentar algumas características históricas acerca dos sistemas de numeração e da base duodecimal. Tendo como base conhecimentos matemáticos e analisando qualitativamente que a matemática é construída dia após dia, sendo uma ciência humana, reflexiva, permitindo compreender diversos aspectos culturais de cada época.

Esta pesquisa tem caráter bibliográfico, em que

A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem porém pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta; (FONSECA, 2002, p. 32 apud GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 39)

Este estudo utilizou como referências base o livro *Introdução à história da matemática* de Howard Eves (2004) e *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas* de Tatiana Roque (2012) e *História universal dos*

algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo de Georges Ifrah (1997). Além disso, esta pesquisa teve como base arquivos disponibilizados no site da *The Dozenal Society of America (DSA)*¹, corporação de educação voluntária, sem fins lucrativos, organizada para a realização de pesquisas e educação do público no uso do sistema duodecimal.

4 ALGUNS CONCEITOS MATEMÁTICOS

Nesta seção, abordaremos de maneira breve e resumida a história de alguns sistemas numéricos, destacando suas principais características. Para evitar a dualidade dos conceitos, evitando o entendimento abstrato, apresentaremos nesta seção conceitos matemáticos que serão utilizados frequentemente nos próximos capítulos.

4.1 ALGARISMO, NÚMERO E NUMERAL

A palavra algarismo homenageia o matemático árabe Abu Abdalá Maomé ibne Muça ibne Alcuarismi ou Abu Jafar Maomé ibne Muça Alcuarismi (c. 780-c. 850), um importante matemático cujo foi atrelado, no século XII, a notação posicional decimal para o Mundo Ocidental, por meio de traduções para o latim de sua obra sobre numerais indianos.

Algarismo significa: “Sinal convencional com que se representam os números” (MICHAELIS, 2022), é, portanto, uma composição de símbolos. No sistema de numeração decimal são dez os dígitos que formam os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Diferentemente do sistema de numeração egípcio, onde são 7 símbolos pitorescos que formam os algarismos: o bastão; o calcanhar; o rolo de corda; a flor de lótus; o dedo apontando; o peixe e o homem. Os algarismos podem ser compostos por infinitos dígitos. Veremos no capítulo de Sistema de Numeração Posicional, como a representação por algarismos é organizada em ordem e classes, e como os valores variam de acordo com a posição. Dessa forma 001, 010 e 100 podem ser escritos com os mesmos dígitos 0 e 1, mas possuem diferentes valores.

¹ Acesse o site através do seguinte link: <https://dozenal.org/>

O número é “Cada elemento ou um conjunto de elementos do sistema numérico usado em contagem ou medição” (MICHAELIS, 2022), o valor que perpetua aquele símbolo. Segundo Stewart (2016, p. 8) “números individuais têm seus próprios traços característicos e conduzem a uma variedade de áreas da matemática”.

Eves (2004, p. 25) defende que “o conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos (há evidências arqueológicas de que o homem, já há uns 50.000 anos, era capaz de contar) que a maneira como ocorreram é largamente conjectural”. O desenvolvimento hipotético, baseado em relatórios de antropólogos, diz que se desenvolveu primeiramente sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno e posteriormente com o aprimoramento da escrita, foram surgindo arranjos de símbolos para representar esses números (EVES, 2004).

Numeral é “Relativo a número; Que representa um número” (MICHAELIS, 2022), podendo ser escrito, falado ou digitado. Para representar um mesmo número podemos utilizar numerais diferentes, o número cinco, por exemplo: 5 (numeral indo-arábico); V (numeral romano); IIII (numeral egípcio). Eves (2004) afirma que numeral é a representação escrita do número, o símbolo.

4.2 O ZERO PARA REPRESENTAR O “VAZIO”

O zero é um algarismo que pode representar tanto a falta valor, como um número usufruindo de operações matemáticas, como pode representar algebricamente a ausência de valor na casa decimal. Nos sistemas de numeração posicionais, o valor de cada símbolo é determinado pela sua posição. Com o uso do zero para representar “o valor vazio” ou falta de valor de uma casa posicional, distinguimos, por exemplo, 101 de 11, auxiliando a representação de grandes números e também facilitando os cálculos por meio do Quadro de Ordens ou Quadro Valor de Lugar (QDL).

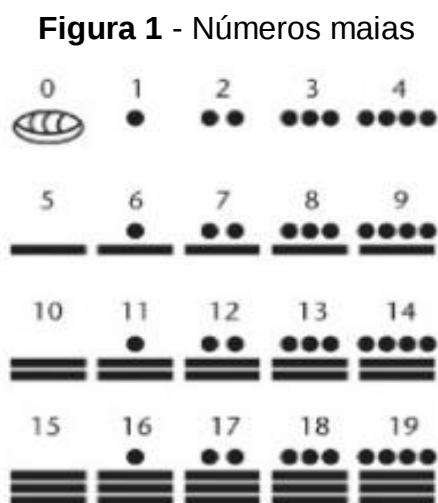
De acordo com Ifrah (1997, p. 685), “à medida que o princípio de posição foi sendo regularmente aplicado, chegou um momento em que se fez necessário um sinal gráfico especial para representar as unidades faltantes” e, deste modo, “[...] a descoberta do zero marcou a etapa decisiva de uma revolução sem a qual não se

poderia imaginar o progresso da matemática, das ciências e das técnicas modernas” (IFRAH, 1997, p. 685).

Provavelmente, por um longo período, as culturas não necessitavam do zero para representar uma quantidade nula. Acredita-se, que por estarem inseridos em um sistema de numeração não posicional representar a falta de algo não se fazia necessário. De acordo com Roque (2012, p. 56), “escrever uma história do zero é tarefa bastante complexa, pois devem ser levados em conta, antes de tudo, os diversos contextos em que ele aparece e o que essa noção pode significar em cada contexto”. Os babilônios, em sua base 60, indicavam a ausência de um termo 60^2 por um espaço, mas por volta de 300 a.E.C. os astrônomos selêucidas, no segundo período babilônico, introduziram o símbolo  para designar uma casa vazia em operações aritméticas, como recurso notacional, mas ele não podia ser utilizado como último algarismo nem podia ser resultado de um cálculo.

A ideia de notação posicional de base 10 aparece no Lokavibhāga, o texto cosmológico jainista de 458 d.C., que também usa shunya (significando vazio) onde nós usaríamos o 0. Em 498, o famoso matemático e astrônomo indiano Aryabhata descreveu a notação posicional como “de lugar a lugar com dez vezes o valor”. O primeiro uso não controverso de um símbolo específico para o algarismo decimal 0 ocorre em 876 numa inscrição no templo Chaturbhujā, em Gwalior, e – adivinhe só – é um pequeno círculo. (STEWART, 2016, p. 136)

A representação de um símbolo para o zero também pode ser presenciada em registros maias, que utilizavam a base 20, entre 250 E.C. e 900 E.C. Como podemos observar nos numerais maias, apresentados pela (Figura 1):



Fonte: STEWART, 2016, p.137.

4.3 BASES NUMÉRICAS

Quando se tornou necessário efetuar contagens mais extensas, o processo de contar teve de ser sistematizado. Isso foi feito dispondo-se os números em grupos básicos convenientes, sendo a ordem de grandeza desses grupos determinada em grande parte pelo processo de correspondência empregado. Esquematizando-se as ideias, o método consistia em escolher um certo número b como base e atribuir nomes aos números 1, 2, ..., b . Para os números maiores do que b os nomes eram essencialmente combinações dos nomes dos números já escolhidos. (EVES, 2004, p. 27)

Uma base numérica é uma estrutura para representar e interpretar números em um sistema numérico, mostrando a quantidade de números ou símbolos que compõem o sistema. No sistema de numeração indo-arábico utiliza-se a base decimal (com 10 algarismos) para representação numérica. Por regra, por ser um sistema posicional cada algarismo possui um valor de acordo com sua posição em relação aos demais algarismos.

4.4 ORDENS E CLASSES

Cada algarismo em um sistema posicional carrega, além do seu valor intrínseco, um valor de posição. Isso implica que na representação decimal 111, por exemplo, cada algarismo “1” possui valor distinto, apesar de ser o mesmo símbolo.

Cada algarismo de um número segue uma ordem da direita para a esquerda. A cada três ordens formam uma classe. As ordens são de unidade, dezena e centena. As primeiras classes são: as classes das unidades, milhares e milhões.

Quadro 1 - Quadro Valor de Lugar sistema decimal posicional

Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades		
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas	Dezenas	Unidades	Centenas	Dezenas	Unidades	Centenas	Dezenas	Unidades

Fonte: a autora.

4.5 REPRESENTAÇÕES NUMÉRICAS

Ao representarmos um número com um conjunto de algarismos, não indicamos o sistema numérico a que ele pertence. Embora convencionou-se o uso do sistema decimal, é possível trabalharmos com diversas bases. Ao assumir um conjunto de algarismos, a quantidade que ele representa varia de acordo com a base numérica.

Para diferenciar as bases, denotaremos a base utilizada com um número subscrito ao número. Por exemplo, o conjunto de algarismos (100) são representados, respectivamente, na base dez (decimal), na base dois (binário), na base oito (octal) e na base doze (duodecimal) da seguinte maneira: 100 , 100_2 , 100_8 , 100_{12} . Apenas na base decimal 100 equivale a cem unidades. Na base binária, 100 representa o 4 da base decimal, na base octal o 64 da base decimal, e na base duodecimal o 144 da base decimal. Neste trabalho, para indicarmos a base, adotamos o numeral subscrito, exceto quando for a base decimal.

4.6 SISTEMA DE NUMERAÇÃO POSICIONAL

O sistema de valor posicional faz com que os algarismos tenham valor dependente da posição que ocupam, além do seu próprio valor intrínseco, possibilitando representar números grandes e cada vez maiores sem a necessidade de haver inúmeros símbolos.

Para representarmos os números em uma determinada base $\square$, utilizamos $\square$ símbolos, um para cada número de 0 à $\square - 1$ chamados de algarismos (dígitos). Multiplicando um destes números (algarismos), pelas potências de $\square$ ($\square^0$, $\square^1$, $\square^2$, $\square^3$, ..., $\square^{\square-1}$), e somando-os, conseguimos expressar um número em uma determinada base. Por exemplo, 15 na base decimal: $15_{10}: 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$. Assim como 15.001, escrito na base decimal, é $15.001_{10}: 1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$. Podemos notar que com quase os mesmos algarismos (1,5 e 0) conseguimos escrever números distintos e cada vez maiores, pois os algarismos em qualquer número dado representam um múltiplo de alguma potência da base.

Segundo Hefez (2006), os sistemas de numeração posicionais baseiam-se no resultado de uma aplicação de divisão euclidiana:

Teorema: Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ menores do que b , univocamente determinados, tais que $a = \alpha_0 + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 + \dots + \alpha_n b^n$.

Demonstração: Vamos demonstrar o teorema usando a segunda forma do Princípio de Indução Matemática sobre n . Se $n = 0$, ou se $n = 1$, basta tomar $\alpha = 0$ e $\alpha_0 = a$.

Supondo que o resultado é válido para todo número natural menor do que n , vamos prová-lo para n . Pela divisão euclidiana, existem q e r únicos, tais que:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Com $r < b$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais $\alpha'_0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ com $\alpha'_j < b$, para todo j , tais que:

$$r = \alpha'_0 + \alpha'_1 b + \dots + \alpha'_n b^n.$$

Levando em conta as igualdades acima destacadas temos que:

$$a = bq + r = b(\alpha_0 + \alpha_1 b + \dots + \alpha_n b^n) + r,$$

Donde o resultado segue-se pondo

$$\alpha_0 = r, \alpha_j = \alpha'_j + 1 \text{ e } \alpha_n = \alpha'_n \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

A unicidade segue-se facilmente das unicidades acima estabelecidas. A representação dada no teorema acima é chamada de expansão relativa à base b . A demonstração do Teorema também nos fornece um algoritmo para determinar a expansão de um número qualquer relativamente à base b . Trata-se de aplicar, sucessivamente, a divisão euclidiana, como segue:

$$a = b\alpha_0 + r, \quad 0 \leq r < b$$

$$\alpha_0 = b\alpha_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b$$

$$\alpha_1 = b\alpha_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < b$$

E assim por diante. Com

$$a > \alpha_0 > \alpha_1 > \dots$$

Devemos em um certo ponto ter $\alpha_{n-1} < b$, e, portanto, $\alpha_{n-1} = b\alpha_n + r_n$, decorre que $\alpha_n = 0$. Isso implica que

$$0 = \alpha_n = \alpha_{n+1} = \alpha_{n+2}$$

portanto,

$$0 = \alpha_n = \alpha_{n+1} = \alpha_{n+2}.$$

Temos então que

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 b + \dots + \alpha_n b^n.$$

A expansão numa dada base β nos fornece um método para representar os números naturais. Para tanto, escolha um conjunto Σ de β símbolos

$$\Sigma = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\beta-1}\},$$

com α_0 para representar os números de 0 a $\beta - 1$. Um número natural a na base se escreve da forma $\alpha_{\beta-1}\alpha_{\beta-2}\dots\alpha_1\alpha_0$, com $\alpha_0, \dots, \alpha_{\beta-1} \in \Sigma$, e β variando, dependendo de α , representando o número

$$\alpha_0 + \alpha_1\beta + \dots + \alpha_{\beta-1}\beta^{\beta-1}.$$

Desta forma, todo número natural pode ser representado em qualquer base numérica, por meio de propriedade de soma de potências. Voltemos ao exemplo que apresentamos antes, de 15.001 no sistema decimal posicional (Figura 2), cujo representamos $15.001_{10}: (1 \cdot 10^4) + (5 \cdot 10^3) + (0 \cdot 10^2) + (0 \cdot 10^1) + (1 \cdot 10^0)$.

Figura 2 - Representação do número 15.001 em potências de dez

unidade de milhão	centena de milhar	dezenas de milhar	unidades de milhar	centenas	dezenas	unidades
6	5	4	3	2	1	0
10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
0	0	1	5	0	0	1

Fonte: a autora.

Na base decimal, o agrupamento de dez unidades forma uma dezena, o agrupamento de dez dezenas forma uma centena, o agrupamento de dez centenas forma uma unidade de milhar, e assim por diante.

4.7 SISTEMA DE NUMERAÇÃO NÃO POSICIONAL

Nos sistemas de numeração não posicionais, cada símbolo ou algarismo representa um valor fixo, imutável, independentemente da posição. Assim os números são formados pela repetição dos símbolos escolhidos. As operações utilizadas na construção do número, em sua maioria, são baseadas na adição e multiplicação.

Esse tipo de sistema, que não obedece a ordem de posição, foi utilizado pelos gregos que utilizavam símbolos pictóricos para representação numérica, pelos egípcios, que utilizavam hieróglifos, e também pelos romanos com a sua representação por letras. Matematicamente falando, uma desvantagem destes sistemas está na representação de números grandes, pois para saber o valor soma-se todos os algarismos, podendo ser vários. Contudo, em um sistema posicional, um valor grande possui a estruturação através da soma de potências, o que possibilita uma representação menor. Outra desvantagem do uso de sistemas não posicionais pode ser caracterizada em relação aos cálculos de operações e propriedades matemáticas, como a multiplicação e a divisão.

5 A ORIGEM DOS NÚMEROS

Na Essuatíni (anteriormente conhecido como Suazilândia), especificamente em uma caverna nos montes Lebombo, surgiu um dos grandes desafios da matemática quanto à origem dos números e contagens. Cerca de 35.000 anos atrás, alguém entalhou 29 marcas na fíbula de um babuíno. Acredita-se que o Osso de Lebombo, como é conhecido este instrumento, seja um bastão de contagem (STEWART, 2016).

Em Ishango, na fronteira entre Uganda e Congo, entre os restos de uma pequena comunidade que estava soterrada pela erupção de um vulcão foi encontrada uma fíbula de babuíno entalhada, que data de aproximadamente 20 mil anos atrás (Figura 3). Segundo Stewart (2016), neste instrumento que também acredita-se ser um bastão de contagem, há elementos de estrutura aritmética, padrões, multiplicação, divisão e números primos.

Figura 3 - Osso de Ishango no Museu de Ciências Naturais de Bruxelas



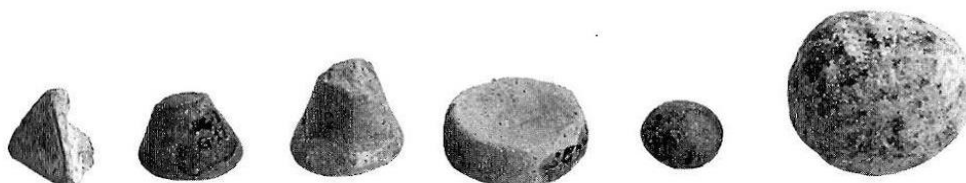
Fonte: STEWART, 2016, p.10.

Outro bastão de contagem, com 55 marcas, foi encontrado na Tchecoslováquia, possui cerca de 30 mil anos de idade, conhecido como Osso do Lobo (STEWART, 2016).

Há cerca de 10.000 anos atrás, os povos antigos do Oriente, utilizavam de artifícios para a contagem, instrumentos chamados *tokens*, que são pequenas esculturas de argila (Figura 4). Os *tokens* mais antigos foram encontrados em Tepe Asiab e Ganj-i-Dareh Tepe, na cordilheira de Zagros, no Irã.

É a etnomatemática dos povos agricultores-pastoreadores. A introdução da agricultura e do pastoreio exigiu a concepção de novos métodos de quantificação. A introdução dos tokens para a contagem de bens sobrepujou a técnica de entalhes paleolítica. A associação de um determinado formato de token com um bem específico introduziu um simbolismo na contagem até então inédito. (ALMEIDA, 2011, p.48)

Figura 4 - Tokens de aproximadamente 8.000 a.E.C à 3.000 a.E.C



Fonte: ALMEIDA, 2011, p. 98.

Por meio do simbolismo, associava-se um determinado formato de *token* com um bem específico. Tais instrumentos eram utilizados para o controle da administração dos bens e dos insumos produzidos pela sociedade. Segundo Roque (2012), a versão histórica tradicional, trata as primeiras formas oriundas da Mesopotâmia, do final do quarto milênio a.E.C., baseados em uma fase pictográfica, e as discrepâncias entre as representações e os objetos simbolizados foram considerados falhas humanas limitantes da cultura primitiva.

Por volta dos anos 1.930, descobriram-se novos tabletas, provenientes da região de Uruk, no Iraque, com datas próximas ao ano 3.000 a.E.C. [...] O material contradizia a tese pictográfica, pois nessa fase inicial da escrita as figuras que representavam algum objeto concreto eram exceção. Diversos tabletas traziam sinais comuns que eram abstratos, isto é, não procuravam representar um objeto. Assim, o sinal para designar uma ovelha não era o desenho de uma ovelha, mas um círculo com uma cruz. (ROQUE, 2012, p.40)

Os *tokens* passaram por diversas evoluções, acredita-se que primeiramente eram caracterizados por motivos geométricos, como representados na Figura 4. Entre 4.400 a.E.C à 3.100 a.E.C possuíram maior variedade de formas geométricas, incluindo formas naturalísticas (Figura 5). Também tinham uma variedade maior de marcas lineares e perfurações. Nesta segunda fase, os *tokens* eram amarrados num barbante, mas por serem facilmente manipulados podendo ser acrescentados ou removidos *tokens*, foi introduzida uma medida de segurança (STEWART, 2016).

Figura 5 - *Tokens* de aproximadamente 4.400 a.E.C. à 3.100 a.E.C.



Fonte: ALMEIDA, 2011, p. 98.

Em 3.750 a.E.C. os *tokens* passaram pela sua terceira fase ou geração. Os *tokens* complexos passaram a fazer parte de grupos de mesmo formato, com variações de linhas ou pontos (Figura 6).

Figura 6 - *Tokens* de aproximadamente 3.750 a.E.C.



Fonte: ALMEIDA, 2011, p. 98.

A quarta fase foi aproximadamente em 3.500 a.E.C. (Figura 7). Segundo Almeida (2011), eles foram difundidos para onde a burocracia do sul da Mesopotâmia estivesse envolvida, no norte da Mesopotâmia, Susa e Síria. Pode-se verificar os

indícios pelos artefatos típicos do sul da Mesopotâmia, como arquitetura monumental com mosaicos de cones de argila, selos cilíndricos, etc.

Figura 7 - Tokens de aproximadamente 3.500 a.E.C.



Fonte: ALMEIDA, 2011, p. 99.

De 3.700 a.E.C à 2.600 a.E.C, segundo Almeida (2011), os *tokens* começaram a ser incluídos em envelopes (*Bullae*) de argila, para serem mantidos em conjuntos, como podemos (Figura 8).

Figura 8 - Tokens de aproximadamente 3.700 a.E.C. à 2.600 a.E.C.



Fonte: ALMEIDA, 2011, p. 99.

Posteriormente foram embrulhados nas *Bullae*, que poderia ser ou não queimada (Figura 9). E para saber a quantia que possuía era necessário quebrar o invólucro de barro. A partir de 3.500 a.E.C. à 2.600 a.E.C, na antiga Mesopotâmia, realizava-se marcas no invólucro da *Bullae*, listando a quantidade de *tokens* de seu interior.

Figura 9 - Tokens de aproximadamente 3.500 a.E.C. à 2.600 a.E.C.



Fonte: ALMEIDA, 2011, p. 99.

Posteriormente, em 3.500 a.E.C., entrou em desuso as *Bullaes*, e as marcações foram realizadas sobre superfícies planas, nos tabletas de argila (Figura 10). Segundo Roque (2012, p. 43),

[...] as marcas impressas nos invólucros passaram a incluir impressões com estiletes que, aos poucos, foram sendo transpostas para tabletas. Uma vez que o registro na superfície tornava desnecessária a manipulação dos tokens, os invólucros não precisavam ser usados enquanto tais e as impressões passaram a ser feitas sobre tabletas planos de argila.

Pouco a pouco os sinais impressos evoluíram a símbolos, além de sistemas de medidas e bases distintas, desenvolvendo o processo de notação numérica e escrita. Segundo Roque (2012, p. 43),

[...] as marcas representando as quantidades passaram a ser acompanhadas de ideogramas que se referiam aos objetos que estavam sendo contados. Esse foi um passo em direção à abstração, pois o registro das quantidades podia servir para coisas de naturezas distintas, tanto que surgiu a necessidade de se indicar o que estava sendo contado.

Figura 10 - Tablete de aproximadamente 3.500 a.E.C. à 2.100 a.E.C.



Fonte: ALMEIDA, 2011, p. 100.

Em 3.000 a.E.C. à 3.100 a.E.C. os tabletas passaram por uma evolução e Almeida (2011), acredita que com o uso dos caracteres pictográficos traçados neles (Figura,11), determinou-se o verdadeiro começo da escrita. No mesmo período, os *tokens* desaparecem.

Figura 11 - Tablete de aproximadamente 3.500 a.E.C. à 2.100 a.E.C.



Fonte: ALMEIDA, 2011, p. 100.

A maior quantidade de dados quanto à escrita e a matemática dos povos da Mesopotâmia é resultante da conservação do uso dos tabletes de argila. Segundo Roque (2012, p. 37), “Os tabletes que nos permitem conhecer a matemática mesopotâmica encontram-se em museus e universidades de todo o mundo”. E Katz (2008) reforça a ideia que somos afortunados por estes tabletes serem quase indestrutíveis já que é nossa única fonte sobre a matemática da Mesopotâmia.

Roque e Pitombeira (2012, p. 19) afirmam, a respeito dos *tokens*, que:

Os primeiros numerais não eram símbolos criados para representar números abstratos, mas sinais impressos indicando medidas de grãos. Em um segundo momento, as marcas representando as quantidades passaram a ser acompanhadas de ideogramas que se referiam aos objetos que estavam sendo contados. Este foi um passo em direção à abstração, pois o registro das quantidades podia servir para coisas de natureza distintas, tanto que surgiu a necessidade de se indicar o que estava sendo contado.

Os tabletes revelavam que se utilizavam sistemas de medidas e bases, dependentes do assunto que era tratado, assim a representação do numeral modificava-se de acordo com o assunto. Desenvolveu-se a escrita cuneiforme, “em forma de cunha”, ao longo do terceiro milênio. Roque e Pitombeira (2012, p. 19) afirmam que:

[...] o sistema evoluiu de um estágio no qual um único contador era impresso várias vezes a uma fase mais econômica, na qual era possível diminuir a quantidade de impressões dos contadores de tamanhos e formas diferentes. Esta é a essência do sistema posicional: um mesmo símbolo serve para representar diferentes números, dependendo da posição que ocupa na escrita. Este é o caso do símbolo em forma de cunha, que serve para 1, 60 e 3.600.

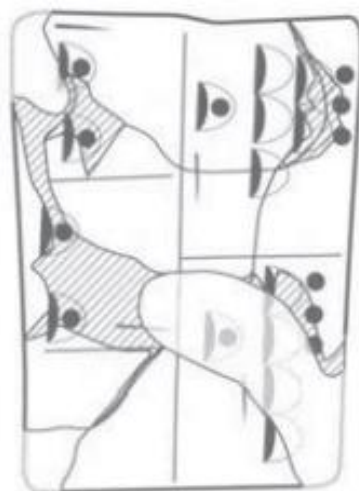
A matemática antiga não era puramente empírica, nem envolvia somente problemas práticos, ela evoluiu pelo desenvolvimento de suas técnicas e pela padronização dos sistemas numéricos. Veremos nos demais capítulos como as técnicas usadas dependiam do sistema de numeração que era utilizado, e como os cálculos se relacionavam com a cultura.

5.1 SISTEMA DE NUMERAÇÃO MESOPOTÂMICO

A civilização mesopotâmica se desenvolveu no vale dos rios Tigre e Eufrates, a partir do quinto milênio a.E.C., com os Sumérios. O desenvolvimento da escrita na região, segundo Katz (2.009), aconteceu ao mesmo tempo em que ocorreu na região do Egito, durante o quarto milênio a.E.C. Em meados do ano 2.000 a.E.C., teve origem o sistema sexagesimal posicional, o sistema de numeração dos povos mesopotâmicos. Acredita-se que os sistemas de numeração da época, distintos entre si com bases distintas e símbolos distintos, podem ter-se uniformizado e utilizado símbolos comuns em uma mesma base, utilizando esses símbolos de forma posicional.

Na Mesopotâmia desenvolveu-se diferentes sistemas de contagem utilizando símbolos distintos para coisas de naturezas distintas, portanto, por mais que sejam agrupamentos de objetos iguais, um símbolo poderia caracterizar o agrupamento de outro agrupamento, designando quantidades dissemelhantes. A utilização de um mesmo símbolo para designar quantidades diferentes configura o sistema posicional, em que o mesmo símbolo pode designar quantidades de natureza diferente. Assim, como pode ser observado na Figura 12, onde um escriba representou com três sinais numéricos, diferentes comprimentos ao calcular a área de um campo. Pequenos círculos representavam 10 varetas; uma grande impressão em forma de D representava uma unidade de 60 hastes, enquanto um pequeno círculo dentro de um grande D, que representava $60 \times 10 = 600$ varetas. Além destes, há dois outros sinais no tablete de barro, uma linha horizontal representando a largura e uma linha vertical representando o comprimento.

Figura 12 - Tablete de Uruk, 3.200 a.E.C.



Fonte: KATZ, 2008, p. 11.

Após 3.300 a.E.C., os contadores sumérios (escribas), já inseridos no sistema sexagesimal, como pode-se observar pela Figura 13, passaram a simbolizar a unidade representada pelo pequeno cone, por um talho fino. A dezena representada pela esfera, por uma pequena marca circular, o grande cone das sessenta unidades por um talho grosso, o grande cone perfurado que vale 600 por um talho grosso munido de uma pequena marca circular, a esfera que vale 3.600 por uma grande marca circular, a esfera perfurada representada o número 36.000 por uma grande marca circular munida de outra pequena.

Mas os símbolos sumérios não permitiram a prática de um cálculo escrito, apenas a memorização das quantidades.

Figura 13 - Símbolos sumérios



Fonte: PEDROZA, 2011, p. 5.

Os elamitas também elaboraram um sistema semelhante aos sumérios (Figura 14), com 5 símbolos representantes. Porém eles utilizavam um pequeno bastão para uma unidade simples, uma bolinha para 10, um disco para 100, um cone para $300 = (60 \times 5)$ e um grande cone perfurado para $3.000 = (300 \times 10 = 60 \times 5 \times 10)$.

Figura 14 - Símbolos elamitas



Fonte: PEDROZA, 2011, p. 5.

Considera-se que os povos babilônicos, desenvolveram o sistema de numeração sexagesimal posicional, por volta de 1600 a.E.C., através da uniformização do desenvolvimento de todos os sistemas, gerando o sistema cuneiforme. Este sistema é composto pelo agrupamento de dois símbolos: ∇ representando o 1 e o $\triangleleft$ representando o 10. Para representar os números agrupava-se os símbolos, então por exemplo 27 era decomposto do agrupamento de dois $\triangleleft$ com sete ∇ .

Para números maiores que 59, os babilônios usavam um sistema de valor posicional sendo, portanto, representados por “lugares”, de maneira que o símbolo representa o número de uma potência de 60 dependendo da sua posição. Exemplificando: para representar a quantidade 100, na linguagem matemática atual, utilizava-se de operações algébricas para agrupar valores superiores a 59. Portanto, teríamos $60 + 40 = 100$, sendo representado da seguinte maneira (Figura 15).

Figura 15 - Representação babilônica do número 100



Fonte: a autora.

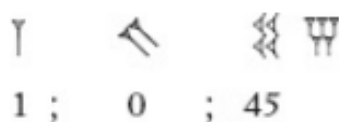
O sistema dá origem a possíveis ambiguidades referentes ao valor posicional devido a sua representação e a necessidade de um símbolo para representar uma posição vazia. Como não sabemos a real posição dos símbolos apresentados na Figura 15, eles podem representar as seguintes quantidades: $(1 \cdot 60^1 + 4 \cdot 60^0 = 100)$, ou $(1 \cdot 60^2 + 4 \cdot 60^1 = 3.720)$, ou $(1 \cdot 60^3 + 4 \cdot 60^2 = 230.400)$.

[...] houve uma época em que se usava o símbolo ∇ com tamanhos diferentes para representar o 60 e o 1, hábito que talvez esteja na origem do sistema

posicional. Mas quando os símbolos se tornaram padronizados para facilitar os registros, gerou-se outra ambiguidade. Sem símbolos com tamanhos diferentes e sem símbolos para representar uma casa vazia, não podemos diferenciar 1 de 60, a não ser pelo contexto dos problemas em que esses números apareciam. (ROQUE, 2012, p. 52)

Posteriormente, os astrônomos selêucidas adotaram o símbolo  como índice de casa vazia. Ainda não exprimia a condição de símbolo sem valor que pudesse ser utilizado em contas. Assim, a representação de números maiores pode ser realizada. Como o caso de 3.645, cuja representação (Figura 16) no sistema sexagesimal é $(1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 45 \cdot 60^0 = 3.645)$.

Figura 16 - Representação do número 3.645 com o acréscimo do zero



Fonte: ROQUE, 2012, p. 56.

Além das somas, podemos realizar multiplicações, subtrações e divisões na base. Segundo Roque (2012, p. 51), a parte inteira também era representada separada da parte fracionária por uma vírgula. Portanto, $1,30 \div 3 = 0,30$. Assim como $4 \times 20 = 1;20$. Com a inserção de um símbolo para representar a casa vazia, Roque (2012), afirma que o decimal 3.601 pode ser convertido na base 60, tomando-se os coeficientes de $1 \times 3.600 (= 60 \times 60) + 0 \times 60 + 1$, logo, teríamos 1;0;1. Roque (2012) afirma também que o fato da base 60 ser divisível por todos os inteiros entre 1 e 6, facilita a inversão dos números expressos nessa base, em contas.

Entre os babilônios, havia também tabletes equivalentes às tabuadas (GONÇALVES, 2014). Segundo Roque (2012, p.58), “basta observar que os cálculos elementares, ou seja, aqueles que correspondem à nossa tabuada, incluem multiplicações até 59×59 ! Isso pode indicar a necessidade de tabletes mesmo para os cálculos mais elementares”. Acredita-se que aproximadamente entre 1.900 a.E.C. e 1.600 a.E.C., criou-se o então tablete de argila Plimpton 322² (Figura 17), que possui várias hipóteses referentes a seu conteúdo.

² Os tabletes que nos permitem conhecer a matemática mesopotâmica encontram-se em museus e universidades de todo o mundo. Eles são designados por seu número de catálogo em uma determinada coleção. Por exemplo, o tablete YBC 7.289 diz respeito ao tablete catalogado sob o número 7.289 da

Figura 17 - Tablete de Plimpton 322



Fonte: ROQUE, 2012, p. 57.

A hipótese mais convincente sobre o conteúdo da placa Plimpton 3.229 associa os resultados desse tablete ao procedimento de “cortar e colar” (...) Esse tablete conteria, na verdade, uma lista de pares de números recíprocos usados para encontrar triplas pitagóricas por meio do método de completar quadrados. (ROQUE, 2012, p. 71)

Tanto as multiplicações como divisões possuíam tabletes específicos. Roque (2012) exemplifica em seu trabalho, o cálculo do produto de 37; 28 por 19 (utilizando o símbolo “;” para representação de casa vazia nos cálculos).

Quadro 2 - Indica o multiplicando e a ordem de grandeza do resultado

ordem de 60×60	ordem das sessentenhas	unidades	multiplicando
			37; 28

Fonte: a autora, com base em ROQUE, 2012, p. 58.

O primeiro passo é adicionar 37; 28 o multiplicando à tabela. Posteriormente procuramos no tablete específico de multiplicação por 19 o valor correspondente à multiplicação por 28 (8 sessentenhas e 52 unidades) e reproduzimos o valor encontrado nas colunas apropriadas.

Quadro 3 - Acréscimo do valor do tablete de multiplicação por 19, o correspondente à multiplicação por 28

ordem de 60×60	ordem das sessentenhas	Unidades	Multiplicando
	8	12	37; 28

Fonte: a autora, com base em ROQUE, 2012, p. 58.

coleção da Universidade Yale (Yale Babylonian Collection). O tablete mencionado é da coleção Plimpton (George A. Plimpton Collection, Universidade Columbia) (ROQUE, 2012, p.37).

Subsequentemente apagamos o 28 da coluna do multiplicando e procuramos novamente no tablete de multiplicação por 19 o valor correspondente a 37 (11; 43). Como 37 é de uma ordem superior à utilizada até esse ponto, escrevemos o valor correspondente a ele, 11 na coluna das ordens de 60^2 e 43 na coluna das sessentenhas.

Quadro 4 - Acréscimo do valor do tablete de multiplicação por 19, o correspondente à multiplicação por 37

ordem de 60×60	ordem das sessentenhas	Unidades	multiplicando
n	8 43	52	37

Fonte: a autora, com base em ROQUE, 2012, p. 58.

Por fim, como encontramos o valor, vamos apagar o 37. Resta simplificar cada coluna unindo as ordens, para obter o resultado 11; 51; 52.

Quadro 5 - Simplificação para o resultado 11; 51; 52

ordem de 60×60	ordem das sessentenhas	Unidades	multiplicando
n	51	52	

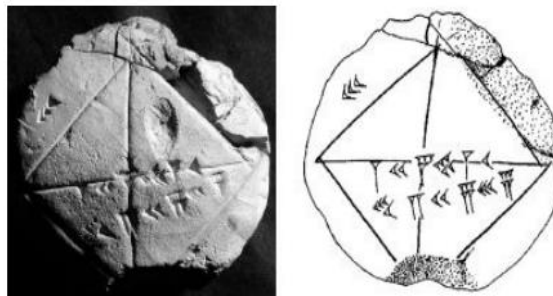
Fonte: a autora, com base em ROQUE, 2012, p. 58.

Já as divisões eram realizadas com o auxílio dos “Tabletes recíprocos”, cujo a divisão de $M/N = M \times 1/N$. Um problema surge quanto aos inversos sem representação, segundo Roque (2012, p.60):

[...] os números cujos inversos não possuem representação finita em base 60, como 7 ou 11. Esses números equivalem, em nosso sistema decimal, ao 3, cujo inverso ($\frac{1}{3}$) não conta com representação finita em nossa base decimal (é uma dízima) (...) o fato de não podermos representar de modo finito os inversos de 7 e 11 em base 60 não significa que não podemos realizar multiplicações do tipo $22 \times$ (ou seja, dividir 22 por 11). Por essa razão, essas divisões eram escritas em tabletes, assim como a solução dos problemas análogos que apareciam na extração de raízes.

Outra herança que os tabletes mostram a respeito do sistema Mesopotâmico, é que já se resolviam potências e raízes quadradas. Como é possível verificar na Figura 18, representando o cálculo do irracional $\sqrt{2}$.

Figura 18 - Tablete YBC 7.289

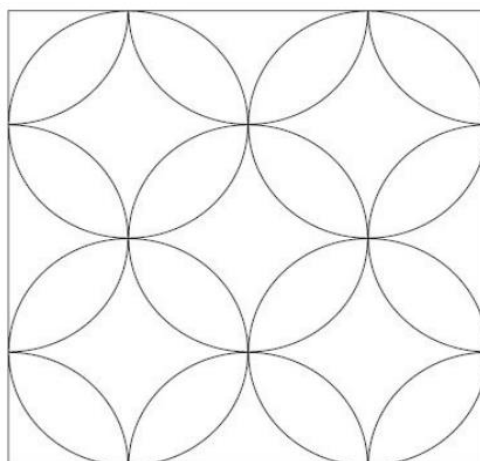


Fonte: ROQUE, 2012, p. 62.

Roque (2012) afirma que alguns historiadores defendem que o procedimento pode ter sido realizado quando se atribui $k = 2$, e escolhendo $a = \frac{3}{2}$ obtendo assim $a' = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$. Obtemos uma primeira aproximação. Em números sexagesimais, equivale a 1,25 pois $\frac{17}{12} = \frac{85}{60} = \frac{60 + 25}{60} = 1 + \frac{25}{60} = 1,25$.

Roque (2012) defende que com $a' = 1,25$ fazemos a soma de 0,42;30 com o inverso de 1,25 $a'' = \frac{1,25}{2} + \frac{1}{1,25}$. No entanto, o número não possui inverso com representação finita em base 60 e, portanto, uma aproximação desse valor era representada em um tablete como 0,42;21;10. Calculamos, assim, $a'' = 0,42;30 + 0,42;21;10 = 1,24;51;10$, que seria o valor aproximado da raiz de 2 encontrado sobre a diagonal do quadrado desenhado no tablete YBC 7.289 (Figura 18), em escrita cuneiforme. Expressando a'' na forma decimal com, temos uma aproximação conhecida para $\sqrt{2}$: 1,4142129629.

Figura 19 - Tablete BM 15.285



Fonte: ROQUE, 2012, p. 72.

Outros problemas matemáticos que constam dos tabletas babilônicos envolvem a investigação sobre formas, encontrar quantidades desconhecidas, áreas e volumes. Exemplificado: na Figura 19, o quadrado de área determinada com outras figuras em seu interior.

5.2 SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIO

O Egito está localizado na região nordeste do continente africano, próximo à península arábica e ao Oriente Médio. A civilização egípcia instaurou-se ao longo de desertos e terras que margeiam o rio Nilo, mantiveram-se protegidos isoladamente de invasões estrangeiras.

Os egípcios desenvolveram três formas de escrita. A mais antiga, usada pelos sacerdotes em monumentos e tumbas, foi chamada hieroglífica. Desta deriva uma forma cursiva, usada nos papiros, chamada hierática, da qual resulta, mais tarde, na escrita demótica, de uso geral. Para registrar suas pesquisas, os egípcios anotavam suas descobertas em papiros.³ Roque (2012, p. 73) afirma que “O sistema decimal egípcio já estava desenvolvido por volta do ano 3.000 a.E.C., ou seja, antes da unificação do Egito sob o regime dos faraós”.

Burns (1965) defende que durante aproximadamente os anos de 4.000 a.E.C à 3.200 a.E.C., não havia um estado unificado no Egito, a região era dividida em certas cidades-estados (ou nomos), a fusão dos estados, gerou dois reinos um ao norte e outro ao sul, esse foi o período conhecido como pré-dinástico.

A sociedade egípcia, com o regime dos faraós, se organizava baseado no topo posterior ao faraó, a nobreza, os sacerdotes, os escribas, os soldados e, por fim, os camponeses e os escravos. A necessidade de resolver problemas cotidianos de sua realidade, principalmente no período das cheias do rio Nilo, impulsionou grandes descobertas dos egípcios.

Desenvolveram dois sistemas diferentes de numeração, que recorriam aos dois modos distintos disponíveis para a escrita, hieróglifo e hierático. O termo hieróglifo

³ Os papiros de Moscou e Rhind são as fontes principais de informações referentes à matemática egípcia antiga. O papiro Golonishev ou de Moscou datado aproximadamente no ano 1.850 a.E.C., onde encontramos um texto matemático que contém 25 problemas e o papiro Rhind (ou *Ahmes*) datado aproximadamente no ano 1.650 a.E.C. onde encontramos um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.

vem do grego e significa “Escrita Sagrada”, era comumente utilizado para escrever em monumentos, já o hierático, era uma espécie de letra cursiva que atualmente utilizamos e era útil na escrita em papiros, uma espécie de escrita taquigráfica própria para seu uso contábil e matemático.

O sistema hieróglifo (Figura 20), usava a base dez, mas ainda não havia símbolo para representar o zero. A representação da unidade (10^0) era feita por traços verticais. Dez traços formam a dezena (10^1) e sua representação é um semicírculo na horizontal. A centena (10^2), era representada por uma espiral. A unidade de milhar (10^3) era figurada por uma flor de lótus com seu caule. A dezena de milhar (10^4) era representada por uma falange. A centena de milhar (10^5) era simbolizada por uma rã e a unidade de milhão (10^6), por um uma figura humanóide ajoelhada erguendo os braços ao céu.

Figura 20 - Algarismos fundamentais de numeração hieróglifa egípcia e as principais variantes que figuram nos monumentos de pedras

	LEITURA DA DIREITA PARA A ESQUERDA					LEITURA DA ESQUERDA PARA A DIREITA				
1	I					I				
10	n					n				
100										
1 000										
10 000										
100 000										
1 000 000										

Fonte: IFRAH, 1997, p.342.

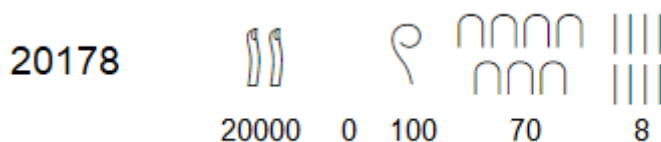
Segundo Ifrah (1997), esses algarismos mudam geralmente de orientação segundo o sentido de leitura do texto hieroglífico: assim, o girino (10.000) e o gênio (1.000.000) devem estar sempre voltados para o início da linha. E apesar de ser um sistema não posicional, os egípcios limitavam-se ao algarismo de cada classe decimal sempre que necessário na ordem dos valores decrescentes, a partir do algarismo da

maior potência de dez do número. Mas por não ser regra, em outros números, o pensamento era inverso, reproduzia-se primeiro os algarismos de maior ordem reduzindo a menor.

Para os símbolos serem definidos como hieróglifos precisava ter a função de significar o que era representado por ideias semelhantes ou ações. Utilizava-se uma técnica de associação perante a junção de pronúncias em francês. Quanto aos símbolos pictográficos eram alusões a símbolos do cotidiano.⁴

Para evitar grandes aglomerações numa mesma linha de vários algarismos de uma mesma classe de unidades e facilitando a leitura do número a adição dos valores correspondentes, formou-se frequentemente em duas ou três linhas superpostas, pequenos grupos de dois, três ou quatro sinais idênticos. Para exemplificar, tomamos o número 20.178 (Figura 21), separando do maior ao menor temos duas falanges ($2 \cdot 10^4$), mais uma espiral ($1 \cdot 10^2$), mais sete semicírculos ($7 \cdot 10^1$), mais oito traços verticais ($8 \cdot 10^0$). Vale o destaque da falta de simbolismo para representação da casa decimal 10^3 , sendo ignorada.

Figura 21 - Representação do número 20.178 no sistema de numeração hieróglifo egípcio



Fonte: a autora.

O conjunto de algarismos de ordem 10^0 possui seu próprio símbolo, assim como cada múltiplo de 10, entre 10 e 90, e cada múltiplo de 100, entre 100 e 900, sucessivamente. Portanto, ampliando a quantidade dos símbolos.

Os papiros trazem o desenvolvimento do conhecimento egípcio, mas infelizmente o número de papiros é limitado. Um dos papiros mais conhecido é o de Rhind com vários problemas matemáticos, datado de cerca de 1.650 a.E.C. Além dele,

⁴ Os hieróglifos eram utilizados geralmente em templos, pirâmides, sarcófagos e em objetos de valor religioso. Para os assuntos do cotidiano era usado o hierático, uma versão mais simplificada dos hieróglifos, muito comum em papiros. Posteriormente surgiu o demótico, que em grego significa “popular”. A última etapa da antiga língua egípcia foi o Copta, que propiciou a chave para a decifração dos hieróglifos. <https://antigoegito.org/a-escrita-dos-hieroglifos/>

outro papiro bem conhecido é o de Moscou ou Moscovo, também conhecido como Papiro Golonishev, de aproximadamente 1.850 a.E.C. Possuindo 25 problemas matemáticos grafados com escrita hierática.

As operações egípcias destacam-se a divisão e representação fracionária. A operação de soma, consistia em agrupar e caso fosse necessário alterar o símbolo, de acordo com os estabelecidos pelo sistema de numeração. Segundo Roque (2012, p. 77), “(...) a multiplicação era sempre efetuada como uma sequência de multiplicações por 2, podendo ser empregadas também, para acelerar o processo, algumas multiplicações por 10.” Caso desejáramos multiplicar 12 por 27 (Figura 22). Roque (2012) afirma que, devemos duplicar o 12 até que a soma das duplicações exceda o valor 27.

Figura 22 - Representação da operação 12×27 tendo como base o sistema de numeração egípcio

\1	12
\2	24
4	48
\8	96
\16	192
\27	324

Fonte: ROQUE, 2012, p.79.

Somando os termos barrados, obtemos $1 + 2 + 8 + 16 = 27$, logo, $12 \times 27 = 12 + 24 + 96 + 192 = 324$. A conta com os símbolos egípcios pode ser visualizada a seguir (Figura 23):

Figura 23 - Representação da operação da adição com símbolos egípcios

$$\begin{array}{r}
 27 \quad \overline{\text{||||}} \\
 + \quad \overline{\text{||||}} \\
 38 \quad \overline{\text{||||}} = \text{||} \\
 \hline
 65 \quad \overline{\text{||||}} \\
 \quad \overline{\text{||||}}
 \end{array}$$

Fonte: GALVÃO, 2008, p. 74.

Uma das consequências do sistema de numeração egípcio é o caráter aditivo da aritmética dependente. Assim, a multiplicação e a divisão eram em geral efetuadas por uma sucessão de duplicações com base no fato de que todo

número pode ser representado por uma soma de potências de 2. (EVES, 2004, p. 57)

Como afirmou Eves (2004), as divisões eram efetuadas por uma sucessão de duplicações, porém realizada em etapas. Caso tenhamos n para dividir em m partes, por exemplo, deve-se dobrar sucessivamente o divisor m até um passo antes que o número de duplicações exceda o dividendo n . A vantagem do sistema é a facilidade de comparar as frações resultantes, que não são iguais. A representação egípcia de frações faz com que a divisão não exata seja simples. “As frações unitárias eram indicadas, na notação hieroglífica egípcia, pondo-se um símbolo elíptico sobre o número do denominador. Um símbolo especial era usado também para a fração excepcional $2/3$ e um outro símbolo às vezes aparecia para $1/2$ ” (EVES, 2004, p. 73).

Segundo Roque (2012), $\frac{1}{2}$ era representado por , em hieróglifo e $\frac{2}{3}$ era representada por . Esse tipo de fração corresponderia às frações que diríamos ter numerador 1. As demais frações egípcias eram configuradas com o símbolo oval sobre o “denominador”. Indicando o inverso do valor.

O problema número 6 do Papiro de Moscou traz um método para calcular retângulo, uma vez que este papiro possuía as respostas. “Se lhe um retângulo de área $12 \frac{2}{3}$ do comprimento para o comprimento. Calcule $\frac{2}{3}$ até obter 1. Resultado $1 \frac{1}{3}$. Calcule com estes 12, $1 \frac{1}{3}$ vezes. Resultado 16. Calcule [sua raiz quadrada]. Resultado 4 para o comprimento. $\frac{2}{3}$ é 3 para a largura”. Segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 41), segue-se então que o comprimento é igual a 4 e que $\frac{2}{3}$ da largura (altura) é 3.

Discute-se que os egípcios calculavam a área tomando a metade da base vezes a altura ou se tomavam metade da base vezes um lado. Além disso, sabiam deduzir o volume de um bloco retangular e de um cilindro circular reto.

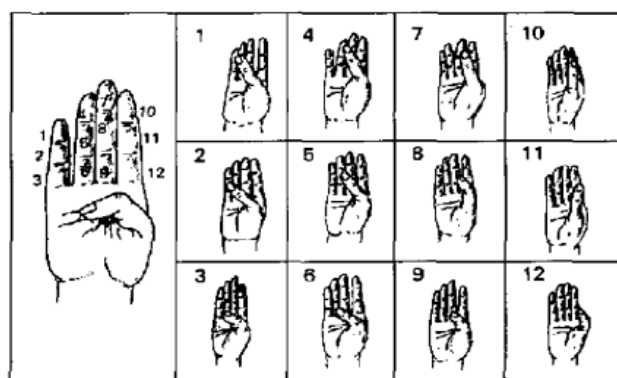
6 A BASE DUODECIMAL

Segundo Ifrah (1997, p. 19), “a mão é a primeira ‘máquina de contar e de calcular’ de todos os tempos”. Os dedos das mãos são grandes influentes no desenvolvimento da contagem e, em alguns casos, utilizavam-se também os dedos dos pés. Não se sabe com exatidão onde e quando a base duodecimal, também conhecida como base doze, começou a ser desenvolvida, mas especula-se que tenha

sido na região da Babilônia. Segundo Eves (2004, p. 29) “há evidências também de que o 12 pode ter sido usado como base em épocas pré-históricas”, contudo sabe-se que a ideia de contar em doze não é recente.

Ifrah (1997, p. 67) afirma que “É possível contar de 1 a 12 usando os dedos das mãos” (Figura 24), através da contagem das falanges (articulações), com os quatro dedos de uma mão, excluindo as do polegar (que era utilizado para acompanhar a contagem, passando o polegar pelas falanges), enquanto os dedos da outra mão marcavam as dúzias.

Figura 24 - Como contar de um a doze utilizando uma mão



Fonte: IFRAH, 1997, p. 209.

Para contar em dúzias, precisamos de 12 algarismos, que podem diferir de acordo com a referência utilizada. Por isso, neste trabalho, adotaremos os algarismos baseados na *The Dozenal Society of America (DSA)*. Seus algarismos e nomenclaturas são, respectivamente, em ordem crescente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	x	ε	10
Um	Dois	Três	Quatro	Cinco	Seis	Sete	Oito	Nove	Dek	El	Do

Também não existe um padrão para grandes potências, tal como na base decimal. Portanto utilizaremos a tradução da nomenclatura que a *The Dozenal Society of America* utiliza. O sistema duodecimal é posicional, implicando que a cadeia de algarismos possua ordenação, padronizado da direita para a esquerda. Cada terna de ordens, também contadas da direita para a esquerda, formam uma classe. As primeiras classes e ordens podem ser verificadas no quadro 6, a seguir:

Quadro 6 - Quadro Valor de Lugar sistema duodecimal posicional

Classe dos "milhões"	Classe dos "milhares"			Classe das unidades		
7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Grosas maiores	Grosa de grandes grosas	Dúzia de grandes grosas	Grandes grosas	Grosa	Dúzia	Unidades

Fonte: a autora, com base em SCHIFFMAN, 1982, p. 1.

Este quadro apresenta uma proposta de tradução para o português dos termos utilizados para se referir às ordens no artigo de Schiffman (1982) (Figura 25). Para a primeira ordem, o termo adotado é *units*, que traduzimos por unidades; a segunda ordem *dozens*, foi traduzida por dúzias, mas também poderia ser dozena; a terceira *grosses*, grosas; a quarta *great-grosses*, grandes grosas; a quinta *dozen great-grosses*, dúzia de grandes grosas; a sexta *gross great-grosses*, grosa de grandes grosas; e a última "*grand grosses*", grosas maiores.

Figura 25 - Representação em potências de 12

"GRAND GROSSES"	GROSS GREAT-GROSSES	DOZEN GREAT-GROSSES	GREAT-GROSSES	GROSSES	DOZENS	UNITS
12^6	12^5	12^4	12^3	12^2	12^1	12^0
0, 0 0	4, 8	χ	8			

Fonte: SCHIFFMAN, 1982, p. 1.

Deste modo, doze unidades formam uma dúzia, doze dúzias formam uma grosa, doze grosas formam uma grande grosa, doze grandes grosas formam uma dúzia de grandes grosas, doze dúzias de grandes grossas formam uma grosa de grandes grosas, doze grosas de grandes grosas formam uma grosa maior, que é a maior ordem que denotaremos.

12^0 : unidades, 12^1 : dúzias, 12^2 : grosas, 12^3 : grandes grosas, 12^4 : dúzia de grandes grosas, 12^5 : grossa de grandes grosas, 12^6 : grosas maiores.

Este fato não implica que o sistema duodecimal tenha menos ordens, ou seja, que é menor que o sistema decimal, apenas não há estabelecido uma nomenclatura para ordens maiores.

6.1 TÁBUAS DE ADIÇÃO DO SISTEMA DUODECIMAL

Para realizar as operações dentro do sistema duodecimal é preciso desvincular-se da base decimal, portanto não há necessidade de converter as bases para realização de cálculos. A DSA desenvolveu algumas tábuas para facilitar a compreensão de como o sistema se comporta, como a tabela de adição (Figura 26) Afinal, não é tão intuitivo que $5 + 9 = 12$.

Figura 26 - Tabela de adição duodecimal

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	χ	ε
1	2	3	4	5	6	7	8	9	χ	ε	10
2	3	4	5	6	7	8	9	χ	ε	10	11
3	4	5	6	7	8	9	χ	ε	10	11	12
4	5	6	7	8	9	χ	ε	10	11	12	13
5	6	7	8	9	χ	ε	10	11	12	13	14
6	7	8	9	χ	ε	10	11	12	13	14	15
7	8	9	χ	ε	10	11	12	13	14	15	16
8	9	χ	ε	10	11	12	13	14	15	16	17
9	χ	ε	10	11	12	13	14	15	16	17	18
χ	ε	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
ε	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1χ

Fonte: SCHIFFMAN, 1982, p. 1.

A tabela, estruturada em tabela, distribui em sua primeira linha e primeira coluna os 12 algarismos, cada célula é a correlação da célula da linha onde está localizada mais a célula de coluna onde está localizada. Portanto, para saber o valor de $(\square + 3)_{12}$ relacionamos a coluna de χ_{12} com a linha de 3_{12} , resultante em 11_{12} . Vamos realizar alguns exemplos de adição e subtração de dúzias em números maiores, com estrutura de quadro valor. Por exemplo $467_{12} + 238_{12}$, representado na Figura 27:

Figura 27 - Soma de dúzias

STEP 1	STEP 2	STEP 3
$\begin{array}{r} \overset{1}{4}67; \\ + 238; \\ \hline 3; \end{array}$	$\begin{array}{r} \overset{1}{4}67; \\ + 238; \\ \hline \text{X}3; \end{array}$	$\begin{array}{r} \overset{1}{4}67; \\ + 238; \\ \hline 6\text{X}3; \end{array}$

Fonte: SCHIFFMAN (1982, p. 2)

A ideia central é a mesma da base decimal, onde soma-se separadamente cada ordem posicional, da esquerda para a direita. Para conferir os valores da soma na base decimal, podemos converter 467 para a base decimal utilizando soma de potências $= (4 \cdot 12^2) + (6 \cdot 12^1) + (7 \cdot 12^0) = (576 + 72 + 7) = 655$, e 238 na base decimal $= (2 \cdot 12^2) + (3 \cdot 12^1) + (8 \cdot 12^0) = (288 + 36 + 8) = 332$, somando $(655 + 332_{10}) = 987$.

A subtração de dúzias é feito de modo análogo. Vamos subtrair $463_{12} - 13\Box_{12}$:

Figura 28 - Subtração de dúzias

STEP 1	STEP 2	STEP 3
$\begin{array}{r} \overset{1}{4}63; \\ - 13\text{X}; \\ \hline 5; \end{array}$	$\begin{array}{r} \overset{1}{4}63; \\ - 13\text{X}; \\ \hline 25; \end{array}$	$\begin{array}{r} \overset{1}{4}63; \\ - 13\text{X}; \\ \hline 325; \end{array}$

Fonte: SCHIFFMAN, 1982, p. 2.

Para finalidade de curiosidade a conversão também cabe para verificação da conta. Vamos converter 463 para a base decimal, pela soma de potências $= (4 \cdot 12^2) + (6 \cdot 12^1) + (3 \cdot 12^0) = (576 + 72 + 3) = 651$, e 13X na base decimal $= (1 \cdot 12^2) + (3 \cdot 12^1) + (\text{X} \cdot 12^0) = (144 + 36 + 10) = 190$, subtraindo $(651 - 190_{10}) = 461$.

Caso seja necessário utilizar o “empréstimo” (ou reagrupamento), deve-se sempre levar em consideração que se empresta em dúzias. A estrutura lógica ainda é a mesma.

6.2 TÁBUAS DE MULTIPLICAÇÃO DO SISTEMA DUODECIMAL

A multiplicação é a adição repetida de termos. Levando em consideração a multiplicação de números reais, ao realizarmos $(a \cdot b)$ estamos agrupando b termos a vezes (ou analogamente o contrário, visto que a multiplicação é comutativa⁵), ou seja, somando $(a + a + \dots + a)$ b vezes.

Vamos observar o comportamento de $5 \cdot 9$, nas tábuas.

$$(5 \cdot 9) = (9 + 9 + 9 + 9 + 9)$$

$$(9 + 9) = 16 \text{ (uma dúzia e seis)}$$

$$(9 + 9 + 9) = 23 \text{ (duas dúzias e três)}$$

$$(9 + 9 + 9 + 9) = 30 \text{ (três dúzias)}$$

$$(9 + 9 + 9 + 9 + 9) = 39 \text{ (três dúzias e nove)}$$

Figura 29 - Tabela de multiplicação duodecimal

1	2	3	4	5	6	7	8	9	X	£	10
2	4	6	8	X	10	12	14	16	18	1X	20
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	30
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	40
5	X	13	18	21	26	2£	34	39	42	47	50
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56	60
7	12	19	24	2£	36	41	48	53	5X	65	70
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	80
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	90
X	18	26	34	42	50	5X	68	76	84	92	X0
£	1X	29	38	47	56	65	74	83	92	X1	£0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	X0	£0	100

Fonte: SCHIFFMAN, 1982, p. 1.

Primeiramente realiza-se a conta utilizando a tábua e posteriormente a simplificação das dezenas. Método que pode ser observado na Figura 30, da direita para esquerda em cada passo, é análogo à operação decimal. De acordo com Schiffman (1982), primeiro multiplicamos o multiplicando pelo menor dígito do

⁵ Comutatividade é uma propriedade matemática, define que não importa a ordem dos valores cujo cálculo é realizado. Caso inverta a ordem o resultado será o mesmo. A comutatividade da multiplicação não se aplica à multiplicação de matrizes.

multiplicador, prosseguindo para multiplicar o multiplicando pelo próximo dígito do multiplicador, etc., assim quando a multiplicação pelos dígitos do multiplicador estiver completa, somamos todos os produtos parciais que obtivemos através da multiplicação.

Figura 30 - Exemplo de multiplicação duodecimal

STEP 1	STEP 2	STEP 3
² 124; <u>× 6;</u> 0;	^{1 2} 124; <u>× 6;</u> 20;	^{1 3} 124; <u>× 6;</u> 720;

Fonte: SCHIFFMAN. 1982, p. 3.

O mesmo acontece caso aumentarmos a ordem, deixando o multiplicador com mais do que um algarismo, como por exemplo em $6\text{X}3 \times 24$, (Figura 31). Podemos observar que Schiffman separa ao final os numerais pelo símbolo (;) para facilitar a compreensão.

Figura 31 - Exemplo de multiplicação duodecimal, com mais do que um algarismo no multiplicador

PHASE 1:	STEP 1	STEP 2	STEP 3
	¹ 6X3; <u>× 24;</u> 0;	^{3 1} 6X3; <u>× 24;</u> 50;	^{3 1} 6X3; <u>× 24;</u> 2350;
PHASE 2:	STEP 1	STEP 2	STEP 3
	^{3 1} 6X3; <u>× 24;</u> 2350; + 60;	¹ ^{3 1} 6X3; <u>× 24;</u> 2350; + 860;	¹ ^{3 1} 6X3; <u>× 24;</u> 2350; +11860;
PHASE 3:	STEP 1	STEP 2	STEP 3
	¹ ^{3 1} 6X3; <u>× 24;</u> 2350; +1186 £0;	¹ ^{3 1} 6X3; <u>× 24;</u> 2350; +1186 ££0;	¹ ^{3 1} 6X3; <u>× 24;</u> 2350; +1186 13££0;

Fonte: SCHIFFMAN, 1982, p. 3.

Na Fase 1, multiplicamos pelo dígito mais à direita do multiplicador. Na Fase 2, multiplicamos o próximo dígito do multiplicador e na Fase 3, unimos os dois

produtos parciais. A operação é análoga à operação no sistema decimal, a diferença é quanto a tabuada e resultado da adição deve ser realizado conforme descrito anteriormente.

Para entender como funciona a divisão na base 12, é necessário estabelecer alguns critérios de divisibilidade.

6.3 CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE DUODECIMAL

Uma das vantagens que atribuem ao sistema duodecimal está relacionado a quantidade de divisores inteiros que a base 12 possui. Por doze ser múltiplo de 2, 3, 4 e 6, além dele mesmo assumindo os critérios, segundo Rocha (2019, p. 64):

“Seja $\square$ um número escrito no sistema de numeração duodecimal, então

$$\square = (\square_{\square}, \square_{\square-1}, \dots, \square_1, \square_0)_{12}$$

Assumimos que o número $\square$ esteja escrito no sistema duodecimal, para ele ser divisível por 2 o seu último algarismo for 0, 2, 4, 6, 8, ou X; para ser divisível por 3 o último algarismo de $\square$ deve terminar em 0, 3, 6 ou 9; para ser divisível por 4 seu último algarismo terminar em 0, 4 ou 8. E para ser divisível por 6 precisa que o último algarismo seja divisível por 6 (terminando em 0 ou 6). Por fim, para ser divisível por 10, o critério é terminar em 0.

Para realizar a divisibilidade por 5, Treisaran (2013) nos propõe a realizar as etapas que nomeia como Dividir, Promover, Descartar (SPD)

Divida os últimos dois dígitos, deixando dois números. Promova o segundo número para o múltiplo de 5 mais próximo (adicionar ou subtrair). Some ou subtraia o mesmo valor desde o primeiro número. Descarte o número certo; repita 1–3 com a esquerda. Continue até que o número à esquerda seja um ou dois dígitos. Se este número for divisível por 5, o original também é; se não, o original é não. (TREISARAN, 2013, tradução nossa)⁶

⁶ Texto literal “Split, Promote, Discard (SPD) Divisibility by 5. Split the last two digits off, leaving two numbers. Promote the second number to the nearest multiple of 5 (add or subtract). Add or subtract the same amount from the first number. Discard the right number; repeat 1–3 with the left. Continue until the left number is one or two digits. If this number is divisible by 5, the original is also; if not, the original is not.”

Os demais critérios de divisibilidade possuem próprias distinções. Para $\square$ na base 12 ser divisível por 8, seu penúltimo dígito deve ser divisível por 2 e o último sendo 0 ou 8, ou o penúltimo dígito não ser divisível por 2 e o último é 4. Para ser divisível por 9, os dois últimos algarismos do número decomposto precisam ser divisíveis por 9, por tanto há três possibilidades O penúltimo dígito é 0, 3, 6 ou 9 e o último é 0 ou 9, ou o penúltimo dígito é 1, 4, 7 ou X e o último é 6, podendo também o penúltimo dígito é 2, 5,8 ou $\square$ e o último é 3. Para serem divisíveis por 14 os dois últimos dígitos precisam ser múltiplos de 14 e por fim o critério de divisibilidade por 28 o antepenúltimo dígito dividido por 2 e os dois últimos são 00, 28, 54, 80 ou χ 8, ou então o penúltimo dígito não divide por 2 e seus dois últimos são 14, 40, 68 ou 94 (TREISARAN, 2013, tradução nossa).

Agora que nos familiarizarmos com os critérios de divisibilidade duodecimal, podemos compreender o funcionamento da operação de divisão nessa base. Por meio do sistema de chaves vamos dividir $235; \div 7$ (Figura 32).

Figura 32 - Divisão no sistema duodecimal

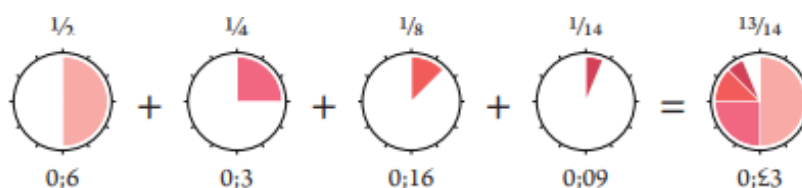
Passo 1	Passo 2
$\begin{array}{r} 235 \overline{)7} \\ -19 \\ \hline 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 235 \overline{)7} \\ -19 \\ \hline 65 \\ -65 \\ \hline 0 \end{array}$

Fonte: a autora.

Para realizar a divisão, ampara-se na Figura 29, na tabela de multiplicação duodecimal. Primeiro verificamos o primeiro dígito do dividendo, vemos que é menor que o divisor, buscamos então os dois primeiros dígitos do dividendo, agora verificamos a tabuada do divisor (7), a fim de encontrar um número próximo igual ou menor que 23, no caso 19 resultante de 3×7 . Acrescentamos o 3 no quociente e continuamos a conta baixando o 5 do dividendo, estabelecendo 65 como dividendo agora, e realizando os mesmos passos anteriores. Neste exemplo a resultante foi nula, portanto, 235 é múltiplo de 7 na base doze. Caso sobrasse resto na operação, seria um número fracionário.

Segundo Michael deVlieger (2.011, p.1) um dos benefícios de uma dúzia é a sua representação sucinta e regular (não repetitiva) de frações mais comuns, dado que as frações equivalentes decimais são mais longas ou são frações repetidas. (tradução nossa)⁷. O que seria facilitador nas somas de frações de diferentes denominadores, como pode ser observado na (Figura 33).

Figura 33 - Exemplo de operação de soma de frações na base duodecimal



Fonte: DEVLIEGER, 2011, p.1.

Na Figura 33, deVlieger (2011) representa a soma das frações $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$, cuja a representação em duodecimal é: $0;\epsilon 3$ (por vezes é utilizado o “;” como substituto da “,” em valores fracionários). Na base decimal, este valor seria aproximadamente: 0,92857143, sendo mais difícil de representar pelo tamanho.

Outra facilidade da base seria quanto a tabuada ser mais expansiva. Como Smith (1891, p. 2) afirma ao mencionar que a superioridade de doze sobre dez começará a ser revelado na tabuada, que pode ser observada na (Figura 34).

Figura 34 - Tabela de multiplicação na base doze

2×1 = 2	3×9 = 23	5×5 = 21	7×1 = 7	8×9 = 60	t×5 = 42
2×2 = 4	3×t = 26	5×6 = 26	7×2 = 12	8×t = 68	t×6 = 50
2×3 = 6	3×e = 29	5×7 = 2e	7×3 = 19	8×e = 74	t×7 = 5t
2×4 = 8	3×10 = 30	5×8 = 34	7×4 = 24	8×10 = 80	t×8 = 68
2×5 = t	4×1 = 4	5×9 = 39	7×5 = 2e	9×1 = 9	t×9 = 76
2×6 = 10	4×2 = 8	5×t = 42	7×6 = 36	9×2 = 16	t×t = 84
2×7 = 12	4×3 = 10	5×e = 47	7×7 = 41	9×3 = 23	t×e = 92
2×8 = 14	4×4 = 14	5×10 = 50	7×8 = 48	9×4 = 30	t×10 = t0 ²
2×9 = 16	4×5 = 18	6×1 = 6	7×9 = 53	9×5 = 39	e×1 = e
2×t = 18	4×6 = 20	6×2 = 10	7×t = 5t	9×6 = 46	e×2 = 1t
2×e = 1t	4×7 = 24	6×3 = 16	7×e = 65	9×7 = 53	e×3 = 29
2×10 = 20	4×8 = 28	6×4 = 20	7×10 = 70	9×8 = 60	e×4 = 38
3×1 = 3	4×9 = 30	6×5 = 26	8×1 = 8	9×9 = 69	e×5 = 47
3×2 = 6	4×t = 34	6×6 = 30	8×2 = 14	9×t = 76	e×6 = 56
3×3 = 9	4×e = 38	6×7 = 36	8×3 = 20	9×e = 83	e×7 = 65
3×4 = 10	4×10 = 40	6×8 = 40	8×4 = 28	9×10 = 90	e×8 = 74
3×5 = 13	5×1 = 5	6×9 = 46	8×5 = 34	t×1 = t	e×9 = 83
3×6 = 16	5×2 = t	6×t = 50	8×6 = 40	t×2 = 18	e×t = 92
3×7 = 19	5×3 = 13	6×e = 56	8×7 = 48	t×3 = 26	e×e = t1
3×8 = 20	5×4 = 18	6×10 = 60	8×8 = 54	t×4 = 34	e×10 = e0

Fonte: SMITH, 1891, p.2.

⁷ One of the benefits of dozenal is its succinct, regular (non-repeating) representation of the commonest fractions. The decimal equivalents of such fractions, apart from the half, are either longer, or are repeating fractions.

A vantagem seria pela extensão que a tabuada pode alcançar. Outra aplicação vantajosa seria em consideração aos erros calculados. Segundo Smith, (1891, p 3) “Na expressão de números irracionais por meio de duodecimais, obtém-se um grau de precisão muito maior do que pelo uso do mesmo número de dígitos em decimais” (tradução nossa)⁸.

6.4 EQUAÇÕES DUODECIMAIS

“Lembre-se de que uma equação é uma afirmação matemática de igualdade entre duas expressões. No sistema decimal, “ $2 + 5 = 7$ ” e “ $3 \times 7 = 21$ ” são exemplos de equações” (SCHIFFMAN 1982, p.3). Novamente a operação é análoga à operação de base decimal, utilizando incógnitas.

Schiffman (1982) traz como exemplo a equação solucionada $n - 145; = 789;$ (Figura 35).

Figura 35 - Equação de primeiro grau no sistema de numeração duodecimal

$$\begin{array}{r}
 n - 145; = 789; \\
 \underline{+ 145; = + 145;} \\
 n = 789; + 145;
 \end{array}$$

Thus, add:

STEP 1	STEP 2	STEP 3
$\overset{1}{7}89;$	$\overset{1}{7}\overset{1}{8}9;$	$\overset{1}{7}\overset{1}{8}9;$
$\underline{+ 145;}$	$\underline{+ 145;}$	$\underline{+ 145;}$
$\textcolor{red}{2};$	$\textcolor{red}{12};$	$\textcolor{red}{912};$

Fonte: SCHIFFMAN, 1982, p. 3.

Como é uma equação de primeiro grau, Schiffman (1982) resolve ela acrescentando 145 de ambos os lados da igualdade e faz a soma da resultante com tranquilidade, encontrando como resultado $n = 912$.

Em mais um exemplo, Schiffman (1982) resolve $\square: \square^2 = \square 1$, como $\mathcal{E} \times \mathcal{E} = \mathcal{E}^2 = \chi 1$. Uma vez que um valor negativo ou positivo de uma, ao quadrado, é igual a um número positivo, nossa solução tem duas respostas possíveis. Nossa solução é $a = \{ \mathcal{E}^2, -\mathcal{E}^2 \}$ ou $\pm \mathcal{E}^2$.

⁸ In the expression of irrational numerics through duodecimals a much higher degree of accuracy is obtained than by the use of the same number of digits in decimals. Smith (1.891, p. 3).

6.5 A CRIAÇÃO E HISTÓRIA DA *THE DOZENAL SOCIETY OF AMERICA* (DSA)

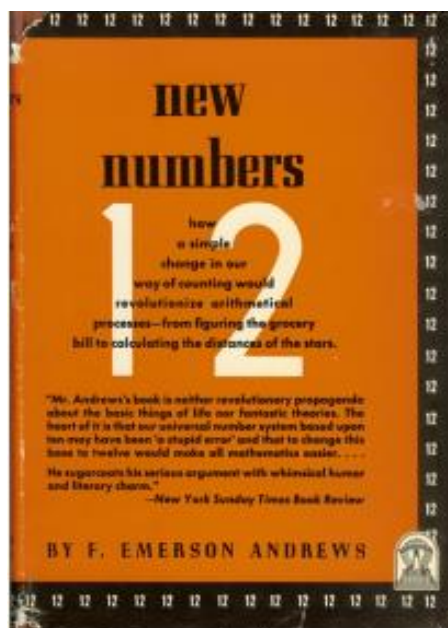
Todos os indícios de criação da *The Dozenal Society of America*, iniciam-se com Frank Emerson Andrews (1902-1978) com suas indagações. Em 1.934, embasado por curiosidades, Andrews afirma ter recordado de um professor, que lhe disse que era mais fácil contar até doze do que dez, e com isso precisou inventar dois algarismos para começar suas (ANDREWS, 1.972). Criou um artigo explicando a contagem por dezenas e após ter sua publicação rejeitada, a reformula e encaminha para a *Atlantic Monthly*, o artigo voltou, com uma carta do editor assistente Edward C. relatando que o considerou um dos artigos mais interessantes do ano, mas a revista ainda não havia publicado sobre matemática e precisaria do aval do editor Ellery Sedgwick que estava em viagem (ANDREWS, 1972). Posteriormente o editor aprovou a publicação desde que houvesse a inserção de um parágrafo alertando os leitores não matemáticos no ponto em que o artigo começasse a ser menos filosófico e mais aritmético, e assim aconteceu. Em outubro o artigo "Uma Excursão em Números" foi ao ar, com a seguinte frase:

Até agora, espero que meus amigos leigos tenham me seguido com conforto. Para continuar nossas explorações de agora em diante, algum instinto matemático é necessário. Talvez aqueles que desejam relaxar devam parar por aqui, mas posso prometer aos que desejam estender suas mentes um pouco mais que não ficarão sem recompensa. (ZIRKEL, 1995, p. 2) Tradução nossa⁹.

A publicação foi um sucesso, rendeu a Andrews e à revista muitas cartas como *feedbacks*. Posteriormente, segundo Zirkel (1995), Andrews escreveu "*Revolving Numbers*" publicado na *Atlantic Monthly* e, em 1.937, escreveu "*New Numbers*" (Figura 36) publicado na "*Harcourt, Brace and Company*. No entanto, a maioria dos exemplares foi destruída em um ataque aéreo da Segunda Guerra Mundial. O livro foi tão bem recebido que as edições começaram a ser postadas em vários países. E com o sucesso, Andrews (1972) afirma que acabou se desenvolvendo um grupo radical que escreveu por anos, que aos poucos começou a se autodenominar *The Duodecimal Society of America*.

⁹ Thus far I hope my lay friends have followed me in comfort. To pursue our explorations from now on, some mathematical instinct is needed. Perhaps those who desire to take their ease had better stop here, but I can promise the ones who wish to stretch their minds a bit further that they will not go unrewarded. (ZIRKEL, 1.995, p. 2)

Figura 36 - Primeira versão de *New Numbers*



Fonte: ANDREWS, 1972, p. 2.

Andrews (1972) ressalta que uma das grandes contribuições foi a de George S. Terry, em 1.938, quando publicou o *Duodecimal Arithmetic* pela *Longmans, Green and Company* disponibilizando tabelas de logaritmos para a base doze e funções trigonométricas em termos do círculo duodecimal. Terry já havia proposto o financiamento do projeto da Sociedade, mas a ideia não foi cumprida. Em 1.941, Ralph H. Beard pressionou por uma organização formal, por receios do resultado da Segunda Guerra Mundial vivida no período, Andrews (1972) afirma que Beard acreditava que provavelmente seria estabelecido um governo internacional cujo moveria novos padrões de pesos e medidas e um serviço telefônico integrado, sendo necessário progressos rápidos sobre Os primeiros membros, segundo Zirkel (1995), foram: F. Emerson Andrews, como presidente; George S. Terry, eleito presidente do conselho; F. Howard Seely, vice-presidente e presidente da associação; Ralph H. Beard, secretário, tesoureiro e editor do “*O Boletim Duodecimal*”; e F. Morton Smith, membro.

Sob as tensões da Segunda Guerra Mundial, em 5 de abril de 1.944, a primeira reunião oficial da DSA foi realizada.

[...] A ação foi iniciada para obter uma carta sem fins lucrativos, que afirma que o objetivo da Sociedade é “conduzir pesquisa e educação do público em ciência matemática, com relação particular ao uso da Base Doze em

numeração, matemática, pesos e medidas, e outros ramos da ciência pura e aplicada". (ANDREWS, 1972, p. 3, tradução nossa)

Posteriormente suas vertentes se espalharam pela França, Grã-Bretanha e ilhas britânicas. Desde então, várias pessoas passaram a auxiliar a DSA, e a sociedade teve novos secretários, tesoureiros, editores e presidentes. As publicações a respeito da base duodecimal continuaram com demais vertentes e os aspirantes à Sociedade só aumentavam (ZIRKEL, 1995).

Um fato importante aconteceu em 1.960, quando realizou-se a Primeira Conferência Duodecimal Internacional, com os representantes da DSA e da *Duodecimal Society of Great Britain*. Zirkel (1995, p. 8) afirma que "Vários membros trabalharam na ideia de uma calculadora dúzia sem sucesso. As empresas de calculadoras estavam interessadas apenas em produtos para marketing de massa". Harvey Kramer Hawksd, em 2.002 conseguiu elaborar uma calculadora que funciona tanto em decimal quanto em dúzia, escrita para Windows. Segundo Zirkel (1995), a calculadora de Harvey fez as 4 funções aritméticas. Em 2.004, Michael Punterda desenvolveu, em linguagem C++, uma calculadora que facilmente convertia as dezenas e decimais, além de incluir logaritmos que funcionam na base 10, e funções trigonométricas, com quatro medidas angulares diferentes: graus, radianos, um círculo completo e um semicírculo. Além de incluir (1 duodécimo de π) equivalente a 13; (15.) graus (ZIRKEL, 1995).

Atualmente a DSA conta com o *site online*, fóruns espalhados em diversos países e uma Coleção Dozenal permanente nomeada Coleção Dozenal de F. Emerson Andrews.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Refletir sobre o desenvolvimento da matemática é uma tarefa árdua e nada simples. As pesquisas em História da Matemática são complexas e ao longo deste trabalho, constatou-se escassez ao acesso de fontes históricas em português, mais recorrentes a base duodecimal. Em contrapartida o assunto abordado era amplo, focou-se então em escrever a história dos números de maneira resumida, reunindo alguns fatos principais de algumas civilizações.

Uma problemática em relação às fontes, foi constatar com facilidade o juízo de valor sobre registros matemáticos sendo úteis ou não, um pensamento problemático

visto que conduz a falsa ideia de uma matemática verdadeira, enquanto outra uma matemática falsa. Também pode estar ligada a um preconceito sob a ótica de uma desvalorização cultural.

Infelizmente grande quantidade dos *links* relacionados ao sistema duodecimal, referidos em artigos da DSA, encontram-se desatualizados. Outra problemática se encontra no site funcionar apenas na versão em inglês, termos e nomenclaturas próprias acabam perdendo sentido ao serem traduzidos. Não foi possível encontrar o que faz com que um artigo seja disponibilizado na aba de “Livros e Artigos” ou porque outros são apenas referidos em *The Duodecimal Bulletin* sendo que possuem desenvolvimentos matemáticos e tábuas do sistema. A falta deste mapeamento no site trouxe dificuldades à pesquisa.

Por fim, é válido refletir a respeito dos conceitos expostos sobre a base duodecimal. Provavelmente se, houvessem optado por estabelecer a base duodecimal ao invés da base decimal, seria menos árduo resolver contas fracionárias, facilitando no aprendizado de divisões e frações. Entretanto, trocar de sistema por outro semelhante na atualidade geraria confusão, uma vez que o sistema decimal foi bem aceito pela sociedade. Possuir mais divisores não garante que um sistema de numeração fique estabelecido, como aconteceu com o sistema sexagesimal. Contudo, a matemática não é imutável e pode se desenvolver em relação ao sistema.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Origens da matemática:** a pré-história da matemática o neolítico e o alvorecer da história. Curitiba: Progressiva, 2011.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **A história da matemática e o antigo testamento** (Tb 5, 1-3, O episódio do depósito e Gen 15, 9-11;17, a aliança de Deus com Abraão). Conferência. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2016.

ANDREWS, F. Emerson. **My Love Affair with Dozens.** The Dozenal Society of America. 1972. Disponível em: <https://dozenal.org/drupal/sites_bck/default/files/DSA-MyLoveAffair_0.pdf>. Acesso em: 30 ago. 2022.

BURNS, Edward Mcnall. **História da civilização ocidental:** Do homem das cavernas até a bomba atômica. 2. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1965. 717 p.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática:** elo entre tradições e a modernidade. (2ª ed.) Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

DEVILEGER, Michael. **Key Dozenal Fractions.** The Dozenal Society of America. 2011. Disponível em: <https://dozenal.org/drupal/sites_bck/default/files/db4b224_0.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2022.

DOZENAL Society of America, The. **Manual of the Dozen System.** Disponível em: <https://dozenal.org/drupal/sites_bck/default/files/ManualOfTheDozenSystem1174-web_0.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2022.

EVES, Howard. Sistemas de numeração. In. EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Hygino H. Domingues (Trad.). 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 22-51.

GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes. **História da Matemática**: dos números à geometria. Osasco: Edifício, 2008. 208 p.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (Orgs.). **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GONÇALVES, Carlos Henrique Barbosa. Matemática Cuneiforme: introdução e oficina de tabletas de argila. In: BELTRAN, Maria Helena Roxo, SAITO, Fumikazu & TRINDADE, Laís dos Santos Pinto. **História da Ciência**: tópicos atuais 3. São Paulo: Editora Livraria da Física, p. 116-141, 2014.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de aritmética**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. v. 1. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky (Trad.). Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

KATZ, Victor J. **A history of mathematics** 3 ed. New York: Pearson Education, 2009.

MICHAELIS. **Dicionário Brasileiro de Língua Portuguesa**. Editora Melhoramentos, 2022. Versão online. Disponível em: <<https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/>>; Acesso em: 30 ago. 2022.

MOL, Rogério S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

PEDROZA, Patrícia Aires. **Sistemas de Numeração Antigos**. 2010. 24 f. (Trabalho de Conclusão de Curso) - Curso de Licenciatura Plena em Matemática, Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, Universidade Estadual do Ceará, Quixadá- 2010. Disponível em: <<http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini-Cursos/PatriciaAires/Sistemas-de-Numera%C3%A7%C3%A3o-Antigos-Patricia.docpdf.pdf>>. Acesso em: 02 dez. 2022.

ROCHA, Katiuce Fernandes. **Bases Numéricas Não Usuais: Um breve estudo**. 2019. 88 f. Tese (Doutorado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática - Profmat, Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD, Dourados, 2019. Disponível em: <https://sca.profmato-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160330453> Acesso em: 04 dez. 2022.

ROQUE, Tatiana. Matemáticas na Mesopotâmia e no Antigo Egito. In. ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. p. 35-91.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, Joao Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 301 p. Disponível em: <https://www.professoresdematematica.com.br/wa_files/Topicos_20de_20Historia_20da_20Matematica_28PROFMAT_29_TatianaRoque_Pitombeira.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2022.

SCHIFFMAN, Jay. **Fundamental Operations in the Duodecimal System**. The Dozenal Society of America. 1982. Disponível em: <https://dozenal.org/drupal/sites_bck/default/files/db31315_0.pdf>. Acesso em: 30 ago. 2022.

SMITH, William B. **Twelve versus Ten**. The Dozenal Society of America. 1891. 6 f. Disponível em: <https://dozenal.org/drupal/sites_bck/default/files/DSA_smith_william_tens_twelves.pdf>. Acesso em: 28 nov. 2022.

STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números: a matemática do zero ao infinito**. George Schlesinger (Trad.). São Paulo: Editora Schwarcz - Companhia das Letras, 2016. 368 p.

TREISARAN. **Dozenal Divisibility Tests Quick Guide** The Dozenal Society of America. 2013. Disponível em:

<https://dozenal.org/drupal/sites_bck/default/files/DSA_treisaran_div_tests.pdf>.

Acesso em: 30 ago. 2022.

ZIRKEL, Gene. **A history of the DSA**. The Dozenal Society of America. 1995.

Disponível em: <https://dozenal.org/drupal/sites_bck/default/files/db49209_0.pdf>.

Acesso em: 13 dez. 2022.