



**Ministerio de Educación**  
**Universidad Federal de Integración Latino Americana**  
**Instituto Latino-Americano de Tecnología, Infraestructura e Territorio**  
Centro Interdisciplinar de Tecnología e Infraestructura  
Ingeniería Civil de Infraestructura

# **ESTUDIO DE MODELO DISCRETO (NBR:6123) PARA EL ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA DE ESTRUCTURAS**

**ANGEL FERNANDO GUALAN JAPA**

Foz de Iguazú - PR  
Junio de 2023



**Ministerio de Educación**  
**Universidad Federal de Integración Latino Americana**  
**Instituto Latino-Americano de Tecnología, Infraestructura e Territorio**  
Centro Interdisciplinar de Tecnología e Infraestructura  
Ingeniería Civil de Infraestructura

# **ESTUDIO DEL MODELO DISCRETO (NBR:6123) PARA EL ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA DE ESTRUCTURAS**

**ANGEL FERNANDO GUALAN JAPA**

Trabajo de conclusión de curso presentada al comité evaluador del curso de Ingeniería civil de infraestructura UNILA, como requisito parcial para la obtención del título de grado en Ingeniería civil.

Foz de Iguazú - PR

Junio de 2023

# **ESTUDIO DEL MODELO DISCRETO (NBR:6123) PARA EL ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DINÁMICA DE ESTRUCTURAS**

Trabajo de conclusión de curso  
presentada al comité evaluador del  
curso de Ingeniería civil de  
infraestructura UNILA, como requisito  
parcial para la obtención del título de  
grado en Ingeniería civil.

## **COMITÉ EVALUADOR**

---

Orientador: Prof. Ing. Phd. Iván Dario Gomez Araújo  
UNILA

---

Prof. Ing. Dr. Ulises Bodadilla Guadalupe  
UNILA

---

Prof. Ing. Dr. Paulo Junges  
UNILA

Foz de Iguazú, \_\_\_\_ de \_\_\_\_ de \_\_\_\_.

## DEDICATORIA

Dedico este trabajo, a mi padre  
José Francisco, a mi madre  
María Angelita, a mis hermanos  
y familia.

## **AGRADECIMIENTOS**

A mis padres por el apoyo incondicional y la paciencia, a mis hermanos por estar siempre pendientes, a mis sobrinas, sobrinos y familia que siempre estuvieron echando porras.

A los profesores que hicieron parte de este proceso de formación académica, me enseñaron el camino del crecimiento personal y la ética. En especial agradezco al Profesor Iván Darío Araújo, por haber aceptado ser mi orientador, por la paciencia, sobre todo, sin su orientación este trabajo no sería posible.

A mis amigos, de mencionar a cada uno me faltaría página para escribir, y por el aprecio que les tengo a todos, me limito a nombrarles, de antemano, sepan que, si un día tuvimos la oportunidad de relacionarnos, los llevo eternamente guardado en el baúl de mis recuerdos, fueron ustedes parte esencial dentro de todo este proceso.

## RESUMEN

El análisis de estructuras sometidas a esfuerzos de viento es fundamental en la construcción civil, especialmente para estructuras de tamaño mediano y grande. Por tal motivo, para guiar este análisis, se establecen normas y regulaciones que se basan en investigaciones científicas y prácticas establecidas. Generalmente la metodología utilizada para determinar las cargas de viento es el modelo discreto. Antiguamente, debido a la limitada capacidad computacional disponible, se solían emplear hipótesis simplificadoras para facilitar la determinación rápida de resultados. Siendo este el caso de la norma brasileña NBR 6123:1988 con actualización del año 2013, se basa en la metodología del modelo discreto simplificado. En ese sentido, el objetivo de este trabajo fue estudiar e implementar computacionalmente el modelo discreto propuesto en la norma para la evaluación de fuerzas del viento. Para el cual primeramente se realizó una revisión bibliográfica de los contenidos de la norma, como la definición de la velocidad característica del viento y los factores asociados. También se revisaron los conceptos de análisis de vibraciones aleatorias y análisis dinámico de estructuras. Seguidamente, se desarrolló el código en MATLAB® para analizar la respuesta dinámica de las estructuras ante la acción del viento. Se evalúan los resultados a partir de dos ejemplos académicos y se presenta los resultados. En resumen, este trabajo se centró en el análisis de estructuras sometidas a esfuerzos de viento, destacando sobre todo la importancia del dominio de la norma brasilera para campo del análisis estructural. Se implementó el modelo discreto propuesto en la norma brasileña NBR 6123:1988 mediante el uso del software MATLAB®, permitiendo analizar la respuesta dinámica de las estructuras. Los resultados obtenidos brindan información relevante con respecto al funcionamiento de los métodos.

**Palabras clave:** Modelo discreto. Modelo discreto simplificado. Análisis dinámico. Fuerzas del viento.

## ABSTRACT

The analysis of structures subjected to wind loads is essential in civil construction, especially for medium and large-sized structures. For this reason, standards and regulations based on established scientific research and practices are established to guide this analysis. Generally, the methodology used to determine wind loads is the discrete model. In the past, due to limited computational capacity, simplifying assumptions were often employed to facilitate quick determination of results. This is the case with the Brazilian standard NBR 6123-1988, updated in 2013, which is based on the methodology of the simplified discrete model. In this regard, the objective of this study was to study and computationally implement the discrete model proposed in the standard. Firstly, a bibliographic review of the standard's content was conducted, including the definition of wind characteristic velocity and associated factors. Random vibration analysis concepts and dynamic analysis of structures were also reviewed. Subsequently, MATLAB® code was developed to analyze the dynamic response of structures to wind action. The results were evaluated based on two academic examples and presented. In summary, this study focused on the analysis of structures subjected to wind loads, highlighting the importance of adhering to the Brazilian standard in the field of structural analysis. The proposed discrete model of the Brazilian standard NBR 6123:1988 was implemented using MATLAB® software, allowing the analysis of dynamic response of structures. The obtained results provide relevant information regarding the performance of the methods.

**Keywords:** Discrete model. Simplified discrete model. Dynamic analysis. Wind forces.

## LISTA DE FUGURAS

<b>Figura 1</b> - Isopleta de velocidad básica del viento $V_0$ .....	16
<b>Figura 2</b> – Factor topográfico $S_1$ .....	18
<b>Figura 3</b> – Perfiles de velocidad media de viento para diferentes tipos de terrenos.....	19
<b>Figura 4</b> – Coeficiente de amplificación dinámica $\xi$ , para terrenos de categoría I.....	22
<b>Figura 5</b> – Coeficiente de amplificación dinámica $\xi$ , para terrenos de categoría II.....	23
<b>Figura 6</b> – Coeficiente de amplificación dinámica $\xi$ , para terrenos de categoría III.....	23
<b>Figura 7</b> – Coeficiente de amplificación dinámica $\xi$ , para terrenos de categoría IV .....	24
<b>Figura 8</b> - Coeficiente de amplificación dinámica $\xi$ , para terrenos de categoría V .....	24
<b>Figura 9</b> – Señal aleatoria .....	26
<b>Figura 10</b> – Función de distribución Normal .....	26
<b>Figura 11</b> – Definición del valor medio para señales aleatorias.....	27
<b>Figura 12</b> – Análisis del valor medio para una señal en el tiempo .....	28
<b>Figura 13</b> – Ilustración de las propiedades de autocorrelación para $x(t)$ .....	32
<b>Figura 14</b> – Enfoque de Davenport, determinación de respuesta resonante inducida por el viento.....	35
<b>Figura 15</b> – Esquema del modelo discreto. ....	36
<b>Figura 16</b> – Factor de pico medio $\bar{g}_{m\acute{a}x}$ .....	44
<b>Figura 17</b> – Espectro normalizado de Harris .....	46
<b>Figura 18</b> - Esquema de proyecciones de las velocidades del viento.....	47
<b>Figura 19</b> – Admitancia aerodinámica .....	49
<b>Figura 20</b> – Esquema de la chimenea y el modelo dinámico discreto .....	58
<b>Figura 21</b> – Grafico para los cinco primeros modos de vibración. ....	64
<b>Figura 22</b> – Admitancia aerodinámica .....	65



<b>Figura 23</b> – Espectro de la fuerza de los modos .....	66
<b>Figura 24</b> – Espectro de respuesta de los modos .....	66

## LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 1</b> – Parámetros meteorológicos: $b$ , $p$ , $F_{r,II}$ en función de la categoría y clase.....	21
<b>Tabla 2</b> – Coeficientes de rugosidad $z_0$ según la categoría .....	46
<b>Tabla 3</b> – Pares ordenados para la interpolación en función de $h$ .....	56
<b>Tabla 4</b> – Pares ordenados para la interpolación en función de $x$ .....	56
<b>Tabla 5</b> – Propiedades del modelo adoptado .....	58
<b>Tabla 6</b> – Resultados de: $\bar{V}_p$ , $\bar{q}_0$ , $\xi$ .....	59
<b>Tabla 7</b> – Resultados de la norma y el modelo discreto simplificado. ....	60
<b>Tabla 8</b> – Resultados: tiempo para la velocidad media y parámetros meteorológicos .....	61
<b>Tabla 9</b> – Fuerza obtenidas por el método discreto: simplificado y completo.....	61
<b>Tabla 10</b> – Resultados, frecuencias naturales asociados a los modos de vibración .....	63
<b>Tabla 11</b> – Resultados de los 11 modos de vibración.....	64
<b>Tabla 12</b> – Resultado de las fuerzas modales .....	67
<b>Tabla 13</b> - Resultado de las combinaciones de las contribuciones modales.....	67
<b>Tabla 14</b> – Resultado de las fuerzas modales .....	68
<b>Tabla 15</b> – Resultado de las combinaciones de las contribuciones modales .....	68

## SUMÁRIO

RESUMEN .....	4
ABSTRACT .....	7
LISTA DE FIGURAS .....	8
LISTA DE TABLAS .....	10
1 INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICATIVA .....	13
2 OBJETIVOS .....	14
2.1 Objetivo General.....	14
2.2 Objetivos Específicos .....	14
3 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA .....	15
3.1 Consideraciones de la norma brasileira NBR 6123:1988.....	15
3.1.1 Velocidad característica del viento.....	15
3.1.2 Coeficiente de amplificación dinámica $\xi$ .....	22
3.1.3 Combinación de contribuciones modales.....	25
3.2 Análisis de vibraciones aleatorias .....	25
3.2.1 Función de distribución normal .....	26
3.2.2 Función de Correlación y autocorrelación.....	30
3.2.3 Transformada de Fourier .....	32
3.2.4 Densidad espectral .....	34
3.3 Modelo discreto completo .....	35
3.3.1 Ecuación del movimiento.....	35
3.3.2 Función de auto-correlación entre las fuerzas de excitación.....	38
3.3.3 Fuerza del viento .....	39
3.3.4 Función de correlación cruzada de las fuerzas del viento.....	40
3.3.5 Espectro de las fuerzas del viento y de la excitación .....	41
3.3.6 Función de densidad espectral de respuesta.....	42
3.3.7 Densidad espectral de potencia de la velocidad longitudinal .....	44
3.3.8 Función de densidad espectral cruzada de la velocidad del viento .....	46
3.3.9 Admitancia aerodinámica.....	48
3.3.10 Determinación de fuerzas estáticas equivalente .....	50
3.4 Modelo discreto simplificado (NBR:6123) .....	53
4 EJEMPLO DE APLICACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	57

4.1	Ejemplo 1 .....	57
4.1.1	Solución método simplificado del modelo discreto y análisis .....	59
4.1.2	Solución modelo discreto completo .....	60
4.2	Ejemplo 2 .....	62
4.2.1	Solución método simplificado del modelo discreto .....	63
4.2.1	Solución modelo discreto completo .....	68
5	CONSIDERACIONES FINALES .....	70
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	72
	ANEXO A: Código MATLAB® .....	74

## 1 INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICATIVA

El análisis de estructuras sometidas a esfuerzos de viento es importante en la construcción civil, especialmente para estructuras de tamaño mediano y grande. En este contexto, es fundamental considerar la importancia de establecer normas y regulaciones que guíen dicho análisis. Cabe destacar, las normas: canadiense NBCC(National Building Code of Canada) y la estadounidense ASCE/SEI 7-10 (American Society of Civil Engineers) fueron las pioneras; teniendo en consideración que la ingeniería del viento es una disciplina relativamente joven(TERRÉS-NÍCOLI, JM; MANS, 2014).

Estas normas, basadas en investigaciones científicas y prácticas establecidas, fueron referentes importantes para la creación de normas en los demás países. Teniendo en cuenta que básicamente, todas las normas derivan, en términos generales, de los procedimientos adoptados tanto para la evaluación de las cargas de viento como de sus respuestas inducidas a partir de la denominada la “cadena de carga de viento de Alan G. Davenport”, en honor al ya difunto ingeniero canadiense, pionero en estudiar este fenómeno dentro del área de ingeniería eólica (ISYUMOV, 2012).

La cadena de carga de viento de Alan G. Davenport, en términos generales establece que el viento es influenciado por variables como: los efectos combinados del clima y la meteorología, por la influencia del entorno del terreno o entorno circundante, la aerodinámica de la estructura (geometría de la estructura), la respuesta dinámica de la estructura y finalmente los criterios de proyecto. Siendo así, la determinación de las cargas de viento es una tarea multidisciplinar.

La metodología aplicada en la norma brasileña (ABNT NBR 6123, 2013) para la determinación de las cargas del viento es el modelo discreto. Antiguamente debido a baja capacidad computacional existente para la época, era común optar por hipótesis simplificadoras, con el propósito de facilitar una rápida y fácil la determinación de resultados(GALINDEZ, 1979), tal es el caso de la metodología del modelo discreto simplificado presentado en la norma brasilera (ABNT NBR 6123, 2013). Importante especificar según la misma norma, que el método simplificado del modelo discreto es aplicable exclusivamente en estructuras apoyadas con altura inferior a 150 m con sección constante, consiste en considerar únicamente la contribución del modo fundamental. Por otro lado, el método del modelo discreto

completo abraza una gama de edificaciones con: propiedades variables en relación a la altura. A diferencia de la anterior permite considerar la contribución de más de un modo de vibración, hasta conseguir establecer un umbral de convergencia.

En ese sentido, el presente trabajo tuvo como objetivo estudiar e implementar computacionalmente el modelo discreto en la forma completa y modelo discreto simplificado propuesto en la norma (ABNT NBR 6123, 2013). Con base en la comprensión de las fundamentaciones teóricas que respaldan la metodología y se desarrolló una rutina en MATLAB® para el análisis de la respuesta dinámica de estructuras ante la acción del viento.

De esa forma este trabajo fue dividido en los siguientes aspectos: empieza por una breve revisión bibliográfica de contenidos como: las consideraciones de la norma (ABNT NBR 6123, 2013) y sus parámetros: la definición de la velocidad característica del viento, definición de los factores, etc. Seguidamente se realiza una revisión general del análisis de vibraciones aleatorias y conceptos. Para finalmente entrar en el campo del análisis dinámico de la estructura y el análisis del método discreto.

Finalmente se realiza el código en el software MATLAB®, se evalúan los resultados para dos ejemplos académicos, posteriormente se da paso la presentación de resultados y sus respectivas consideraciones finales.

## **2 OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivo General**

El presente trabajo tiene como objetivo estudiar y modular computacionalmente el modelo discreto completo y el modelo discreto simplificado propuesto en la norma (ABNT NBR 6123, 2013).

### **2.2 Objetivos Específicos**

- a) Estudiar las bases teóricas que llevan a la definición del método del modelo discreto propuesto en la NBR 6123:1988;
- b) Modelar en MATLAB® el método del modelo discreto y el método simplificado del modelo discreto para la respuesta dinámica de la estructura debido a la acción del viento;
- c) Comparar y analizar los resultados obtenidos a través del modelo.

### 3 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Se presenta la fundamentación teórica relevante de conceptos que serán abordados a continuación, cuya finalidad es asentar las bases para el desarrollo de los objetivos planteado en el presente trabajo.

#### 3.1 Consideraciones de la norma brasileira NBR 6123:1988

La norma brasileña (ABNT NBR 6123, 2013) presenta el análisis de los efectos dinámicos causados por la turbulencia atmosférica, en la cual propone un modelo de cálculo simplificado a partir del modelo discreto. De acuerdo con (MIGUEL, 2003) la norma brasileña determina la acción dinámica del viento tomando como referencia el método de la vibración aleatoria propuesta por Davenport, sin embargo, igual que otras normas existentes, la norma brasileira asume su propia metodología para la determinación de ciertos parámetros importantes que serán necesarios abordar para ejecución del presente trabajo, a continuación, se detalla:

##### 3.1.1 Velocidad característica del viento

La velocidad característica básica del viento es dada por la siguiente ecuación:

$$V_k = V_0 S_1 S_2 S_3 \quad (3.1)$$

Donde:  $V_0$ : Es la velocidad básica del viento,  $S_1$ : Factor topográfico,  $S_2$ : Factor de rugosidad del terreno,  $S_3$ : Factor probabilístico. A continuación, se presenta una breve explicación de cada uno de los factores.

**Velocidad básica del viento:** La velocidad básica del viento  $V_0$ , es la velocidad de ráfaga de 3 segundos superada en el valor medio una vez en 50 años. Se obtiene a partir de datos colectados a la altura de referencia de 10 metros con relación al suelo, en campos abiertos y planos. La norma admite que el viento puede soplar en cualquier dirección en el plano horizontal. En el gráfico de isopleta **Figura 1**, de la norma brasileira se puede observar las velocidades básicas para las regiones de Brasil. Cabe mencionar que las curvas de velocidades básicas se encuentran distanciadas a por intervalos de 5, por lo que es de esperar que ciertas regiones se encuentren dentro de esos intervalos, para lo cual se recomienda obtener la velocidad

Isopletas: Son medidas de enumeraciones de fenómenos discretos distribuidos de manera discontinua, también se define como una línea a lo largo de la cual se mantiene una relación constante entre dos conjuntos de información (PORTER, 1957), en el presente caso se muestra la relación de velocidad del viento con la superficie.

The map displays the North Atlantic Ocean with a grid of latitude and longitude lines. Isotherms (lines of equal temperature) are shown as solid lines, and isohyets (lines of equal precipitation) are shown as dashed lines. The shaded area represents a region of interest, likely the North Atlantic Current. Isotherms are labeled with values such as 30, 35, 40, 45, and 50. Isohyets are labeled with values such as 30, 35, 40, 45, and 50. The map also includes a scale bar at the bottom right indicating 40°.

Cabe destacar que, en la medida que la obra o infraestructura sea de excepcional relevancia, la norma recomienda que velocidad básica sea obtenida a través de estudios para la localización específica.

a) Para terreno plano o poco accidentado  $S_1 = 1$ .

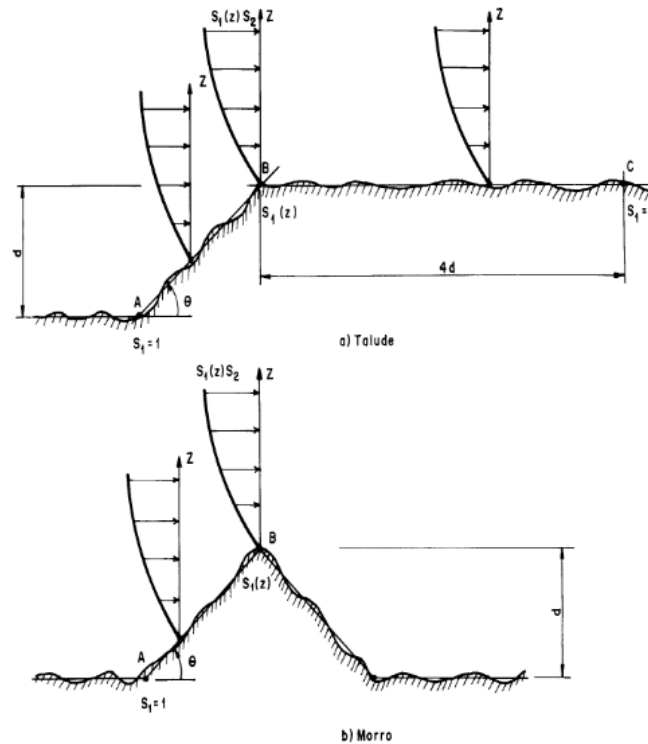


## b) Taludes y colinas.

Para taludes y colinas alargadas, la norma admite el flujo de aire bidimensional soplando en la dirección conforme mostrada en la **Figura 1**. Para los puntos A y C de la **Figura 2 a)** y para el punto **A** de la **Figura 2 b)** se considera  $S_1 = 1$ . Para los puntos **B** de la **Figura 2 a)** como de la **Figura 2 b)**  $S_1$  es dada por la función  $S_1(z, \theta)$ , conforme mostrado en la ecuación ( 3. 2 ). Para los intervalos  $3^\circ < \theta < 6^\circ$  y  $17^\circ < \theta < 45^\circ$  los resultados de  $S_1$  se obtiene a través de interpolación.

$$S_1(z) = \begin{cases} 1.0 & \theta \leq 3^\circ \\ \frac{(S_6(z) - S_3(z))}{(6^\circ - 3^\circ)} * \theta & 3^\circ < \theta < 6^\circ \\ 1.0 + \left(2.5 - \frac{z}{d}\right) * \text{tg}(\theta - 3) \geq 1.0 & 6^\circ \leq \theta \leq 17^\circ \\ \frac{(S_{45}(z) - S_{17}(z))}{(45^\circ - 17^\circ)} * \theta & 17^\circ < \theta < 45^\circ \\ 1.0 + \left(2.5 - \frac{z}{d}\right) * 0.35 \geq 1.0 & 45^\circ \leq \theta \end{cases} \quad (3.2)$$

**Figura 2** – Factor topográfico  $S_1$



**Fuente:** (ABNT NBR 6123, 2013)

**Factor de rugosidad del terreno  $S_2$ :** Considera el efecto combinado de la rugosidad del terreno, de la variación del viento con respecto a la altura y de las dimensiones de la edificación. La norma clasifica en cinco categorías.

**Categoría I:** Superficies lisas de grandes dimensiones con más de 5km de extensión, medido en dirección y sentido del viento incidente. Como, por ejemplo: mal calmo, lagos, ríos, pantanos sin vegetación.

**Categoría II:** Terrenos rasos abiertos o aproximadamente rasos, con pequeños obstáculos, tales como: árboles y pequeñas construcciones. Por ejemplo: zonas costeras planas, pantanos con vegetaciones dispersas, pequeños matorrales, campos de aviación, praderas, haciendas sin muros o con cercas de arbustos. Se considera las cotas medias de altura de los obstáculos igual o inferior a 1m.

**Categoría III:** Terrenos planos u ondulados, con obstáculos, tales como sebes y muros, pequeños quiebra vientos de árboles, edificaciones bajas y dispersas, por ejemplo: granjas y casas de campo con excepción de partes con vegetación densa, haciendas con sebes y muros, suburbios a distancias considerables de la ciudad

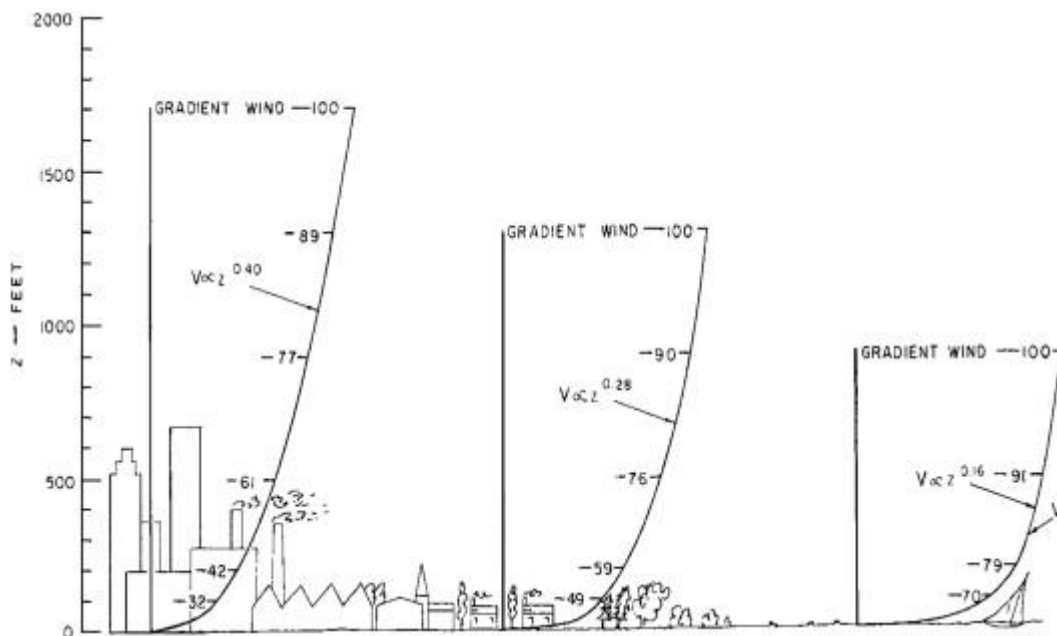
céntrica cuyas casas sean bajas y dispersas entre ellas. La cota media de los obstáculos varía entre 1m a 3 m.

**Categoría IV:** Terrenos parcialmente densos, cubiertos por numerosos obstáculos, zonas como: bosques, áreas industriales y áreas urbanas. Por ejemplo: zonas de parques, bosques con muchos árboles; pequeñas ciudades o alrededores; suburbios densos de grandes ciudades; sectores industriales plena o parcialmente desarrollados. La altura media de los obstáculos es de 10 m.

**Categoría V:** Terrenos cubiertos por numerosos obstáculos, grandes, altos y poco espaciados. Lugares como: bosques con árboles altos, de copas aislados; centros de grandes ciudades; complejos industriales desarrollados. La cota media de la altura de los obstáculos es considerado igual o superior a 25m.

Sobre las categorías, en la **Figura 3** se muestra algunos perfiles de las velocidades de acuerdo a sus localizaciones, cuyo perfil son definido por el parámetro  $S_2$ . Por lo que en función a las definiciones de las categorías realizadas, se puede apreciar perfiles para la categoría V, IV y I.

**Figura 3** – Perfiles de velocidad media de viento para diferentes tipos de terrenos.



Fuente: (ISYUMOV, 2012)

**Dimensiones de la edificación:** Con relación a las dimensiones de las estructuras, la velocidad del viento varía continuamente y el valor medio puede ser calculado sobre cualquier intervalo de tiempo. La norma específica, para el intervalo

de tiempo más corto, en este caso, 3 segundos, las ráfagas cubren tranquilamente obstáculos de hasta 20 metros en la dirección del valor medio del viento. Quiere decir que cuanto mayor sea el intervalo del tiempo usado en la obtención de la velocidad media, mayor será la distancia abarcada por la ráfaga. Dada esta consideración, la norma clasifica en clases: para 3s como clase A, 5s clase B y 10s clase C, ver **Tabla 1**. A continuación, se especifican cada una de las clases.

**Clase A:** Toda edificación en la cual la mayor dimensión horizontal o vertical no sea superada los 20 m, corresponde al tiempo 3s.

**Clase B:** Toda edificación o parte de la edificación en la cual la mayor dimensión horizontal o vertical de la superficie frontal se encuentre en un intervalo de 20m a 50 m, corresponde al tiempo 5s.

**Clase C:** Toda edificación o parte de la edificación en la cual la mayor dimensión horizontal o vertical de la superficie frontal exceda los 50 m y corresponde al tiempo 10s

Independientemente de las categorías de rugosidades definidas en la norma, el factor  $S_2$  se puede obtener a través de la siguiente ecuación.

$$S_2 = bF_{r,II} \left( \frac{z}{10} \right)^p \quad (3.3)$$

Donde:  $F_{r,II}$ : Es el factor de ráfaga siempre correspondiente a la categoría II;  $z$ : es la cota;  $p$ : Exponente de ley potencial de variación de  $S_2$ ;  $b$ : Factor multiplicativo. Estos parámetros también son conocidos como parámetros meteorológicos. En la **Tabla 1** se presentan algunos de los parámetros en función de categorías y clases. Para casos donde la dimensión mayor de la edificación, siendo este horizontal o vertical cuya longitud supere los 80 m, la norma recomienda calcular el intervalo de tiempo de cálculo de velocidad media a través de la ecuación:

$$t = 7.5 \frac{L}{V_t(h)} \quad (3.4)$$

Donde  $L$ : es la dimensión mayor de: la altura o base de la edificación, cuya superficie es frontal a la incidencia del viento.  $V_t(h)$ : Es la velocidad media del viento sobre  $t$  segundos en la parte superior de la estructura en estudio, es dada por la ecuación ( 3. 5 ) , la norma recomienda realizar el cálculo por aproximaciones sucesivas. Implica que a partir de aproximaciones sucesivas se puede obtener los parámetros meteorológicos para el intervalo de tiempo  $t$  calculado.

$$V_t(h) = S_1 S_2(h) V_0 \quad (3.5)$$

**Tabla 1** – Parámetros meteorológicos:  $b$ ,  $p$ ,  $F_{r,II}$  en función de la categoría y clase.

Cat	t(s)	3	5	10	15	20	30	45	60	120	300	600	3600
I	b	1.10	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.19	1.21	1.23	1.25
	p	0.06	0.065	0.07	0.075	0.075	0.08	0.085	0.085	0.09	0.095	0.095	0.10
II	b	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	p	0.085	0.09	0.10	0.105	0.11	0.115	0.12	0.125	0.135	0.145	0.15	0.16
	$F_{r,II}$	1.00	0.98	0.95	0.93	0.90	0.87	0.84	0.82	0.77	0.72	0.69	0.65
III	b	0.94	0.94	0.93	0.92	0.92	0.91	0.90	0.90	0.89	0.87	0.86	0.85
	p	0.10	0.105	0.115	0.125	0.13	0.14	0.145	0.15	0.16	0.175	0.185	0.20
IV	b	0.86	0.85	0.84	0.83	0.83	0.82	0.80	0.79	0.76	0.73	0.71	0.68
	p	0.12	0.125	0.135	0.145	0.15	0.16	0.17	0.175	0.195	0.215	0.23	0.25
V	b	0.74	0.73	0.71	0.70	0.69	0.67	0.64	0.62	0.58	0.53	0.50	0.44
	p	0.15	0.16	0.175	0.185	0.19	0.205	0.22	0.23	0.255	0.285	0.31	0.35

Fuente: (ABNT NBR 6123, 2013)

**Factor probabilístico  $S_3$** : Factor basado en conceptos estadísticos, considera el grado seguridad requerido y la vida útil de la edificación. Según la norma, la velocidad básica del viento presenta un periodo de recurrencia de 50 años, para lo cual la probabilidad de que la velocidad básica sea igualada o excedida en este periodo es de 63%. Sabe-se que generalmente se considera una vida útil de 50 años para edificaciones normales destinadas a viviendas, hoteles, escritorios, etc. Sin embargo, para otros niveles de probabilidades, tanto como para otros periodos de exposición, puede ser calculada a través de la siguiente ecuación.

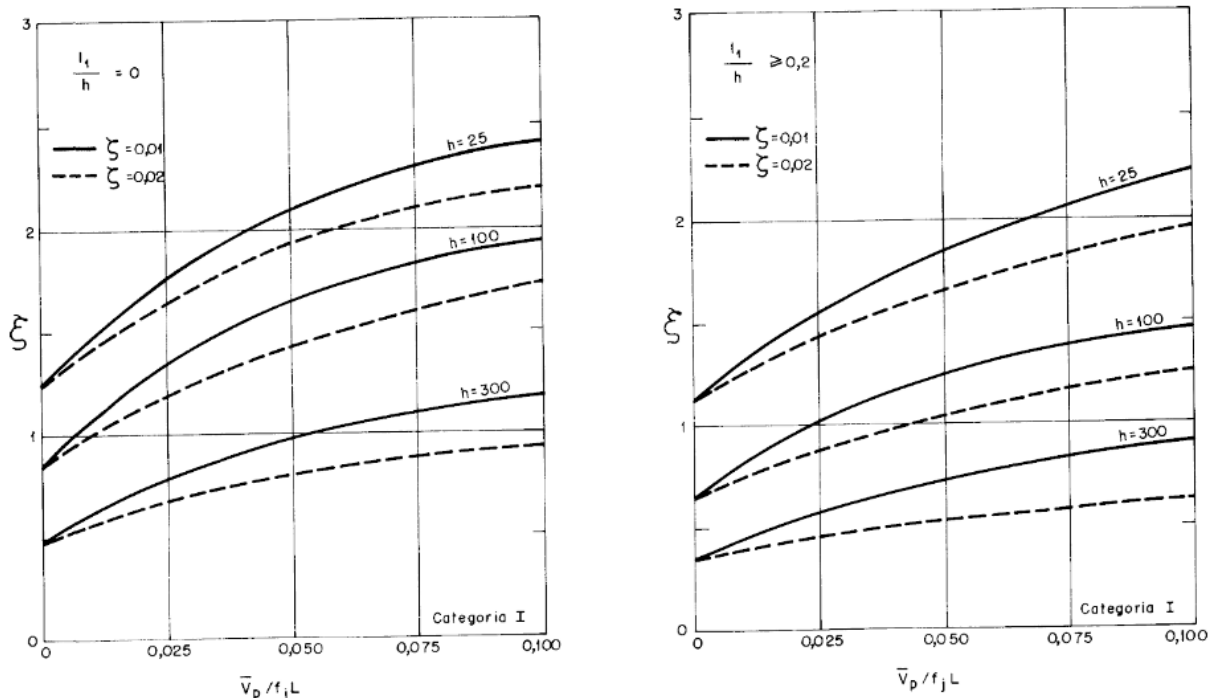
$$S_3 = 0.54 \left( -\frac{\ln(1-P_m)}{m} \right)^{-0.157} \quad (3.6)$$

Donde:  $P_m$ : Probabilidad de cierta velocidad del viento ser superada por lo menos una vez en un periodo de  $m$  años;  $m$ : Vida útil de edificación en años.

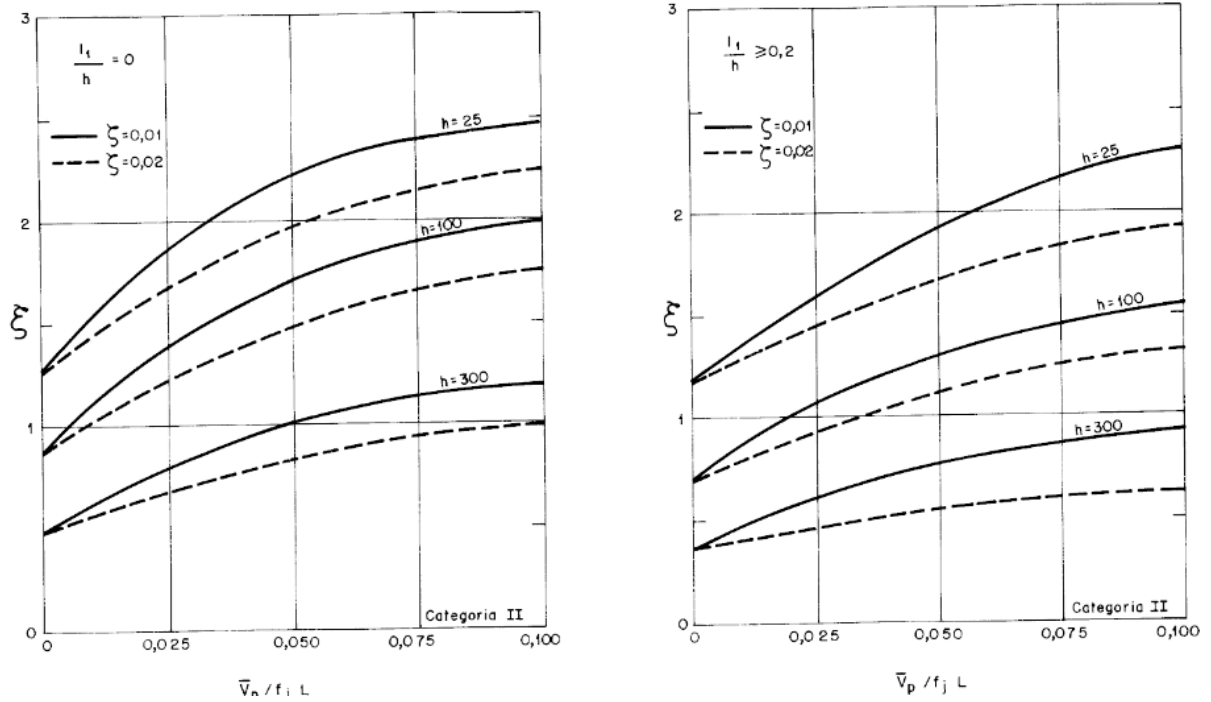
### 3.1.2 Coeficiente de amplificación dinámica $\xi$

Representados por la norma en las siguientes figuras: **Figura 4** a **Figura 8**: Cada categoría es representada por dos figuras correspondiente a la relación entre la dimensión horizontal de la edificación perpendicular a la dirección del viento y la altura de la edificación  $l_1/h=0$  y  $l_1/h \gg 0.2$ ; las curvas corresponde al coeficiente de amortiguación  $\zeta=0.01$  y  $\zeta=0.02$  para la altura de 25 m, 100m y 300m, donde el dominio de las curvas son dado por la relación  $\bar{V}_p / f_j L$ . Donde  $\bar{V}_p$ : es velocidad media del proyecto, ajustado con los parámetros de la **Tabla 1**, correspondiente al tiempo  $t=600s$  de la categoría II,  $f_j$ : es  $i$ -ésima frecuencia natural de vibración natural en Hz y  $L$ : es la dimensión característica para la determinación del coeficiente de amplificación dinámica  $L=1800m$ .

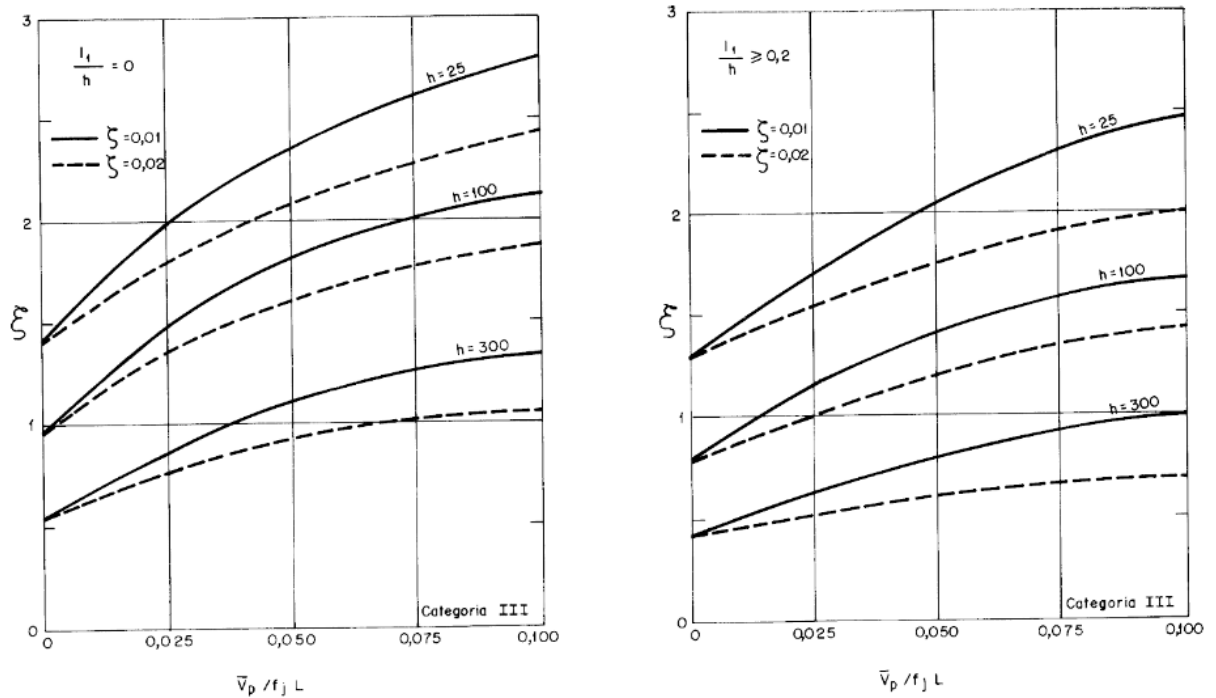
**Figura 4** – Coeficiente de amplificación dinámica  $\xi$ , para terrenos de categoría I



Fuente: (ABNT NBR 6123, 2013)

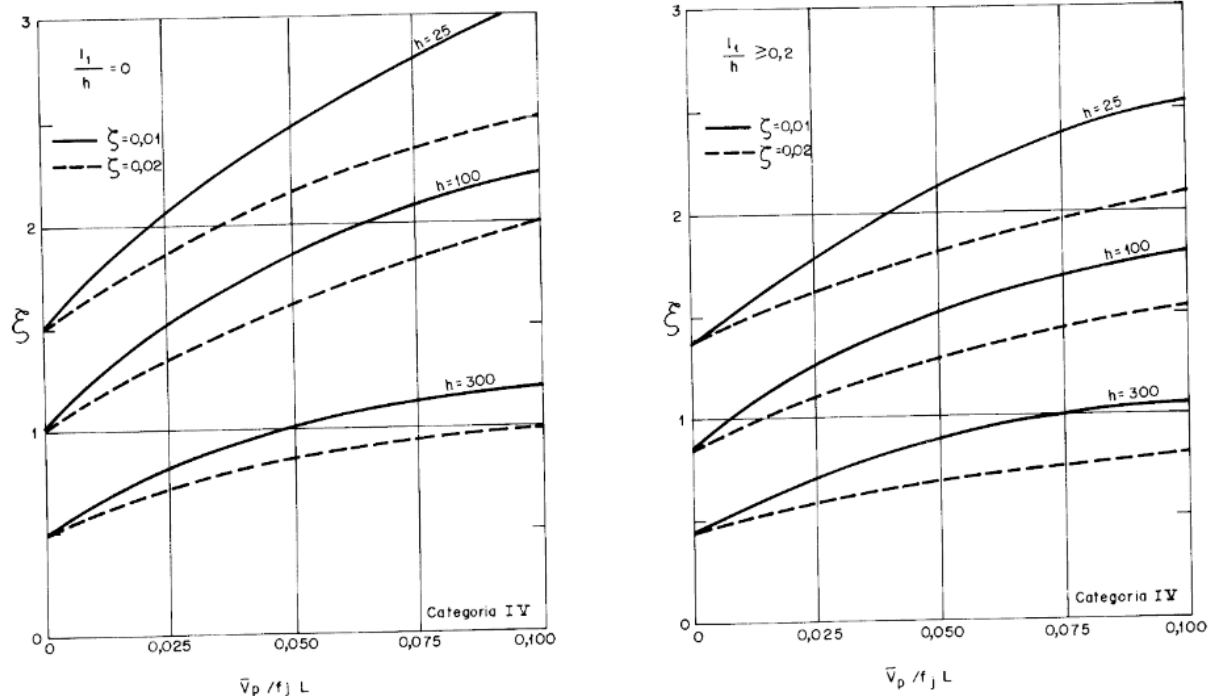
**Figura 5** – Coeficiente de amplificación dinámica  $\xi$ , para terrenos de categoría II

Fuente: (ABNT NBR 6123, 2013)

**Figura 6** – Coeficiente de amplificación dinámica  $\xi$ , para terrenos de categoría III

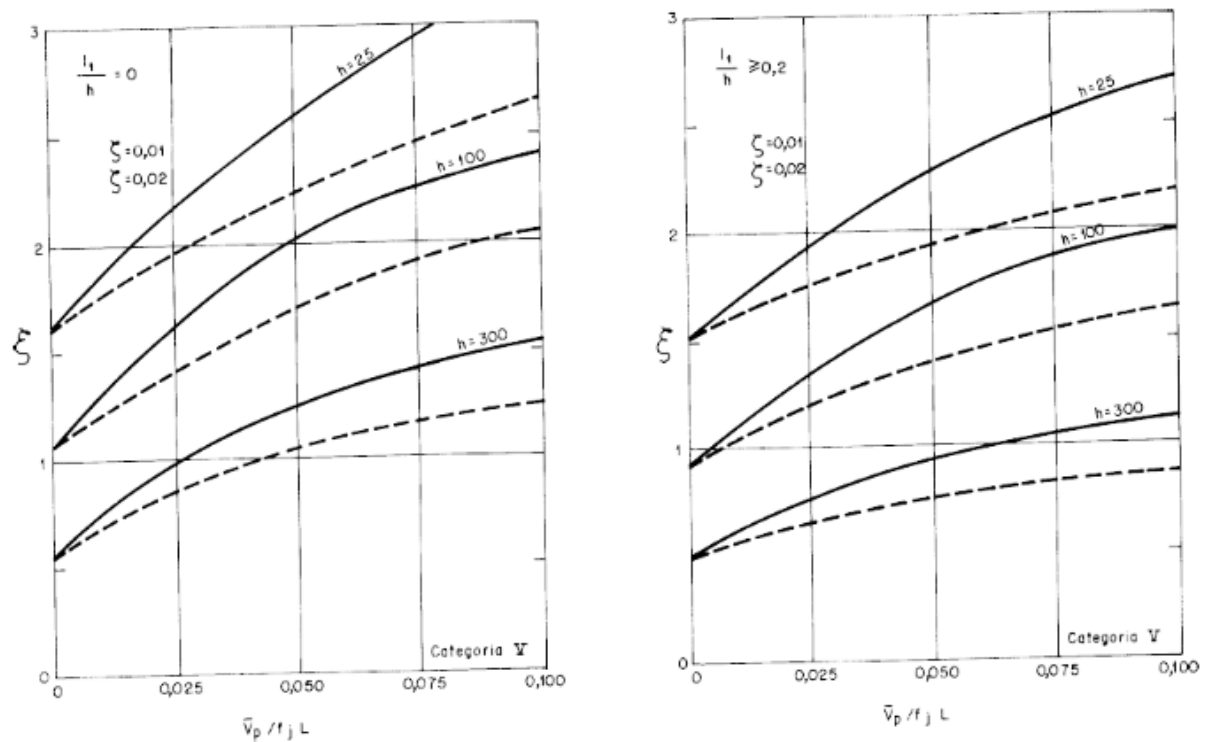
Fuente: (ABNT NBR 6123, 2013)

**Figura 7** – Coeficiente de amplificación dinámica  $\xi$ , para terrenos de categoría IV



Fuente: (ABNT NBR 6123, 2013)

**Figura 8** - Coeficiente de amplificación dinámica  $\xi$ , para terrenos de categoría V





Fuente: (ABNT NBR 6123, 2013)

### 3.1.3 Combinación de contribuciones modales

Esta operación matemática tendrá relevancia importante al final del trabajo, sobre todo en la solución de método del modelo discreto completo. En relación con la contribución de los modos de vibración ( $r > 1$ ), siendo  $r$  el modo de vibración, el efecto combinado se puede computar por el criterio de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados. Luego de la obtención de la respuesta de cada modo de vibración  $j$  ( $j=1, \dots, r$ ), deben ser determinada todas las variables de interés asociadas a cada modo, procedimiento denominado como superposición de efectos, es dado por la ecuación:

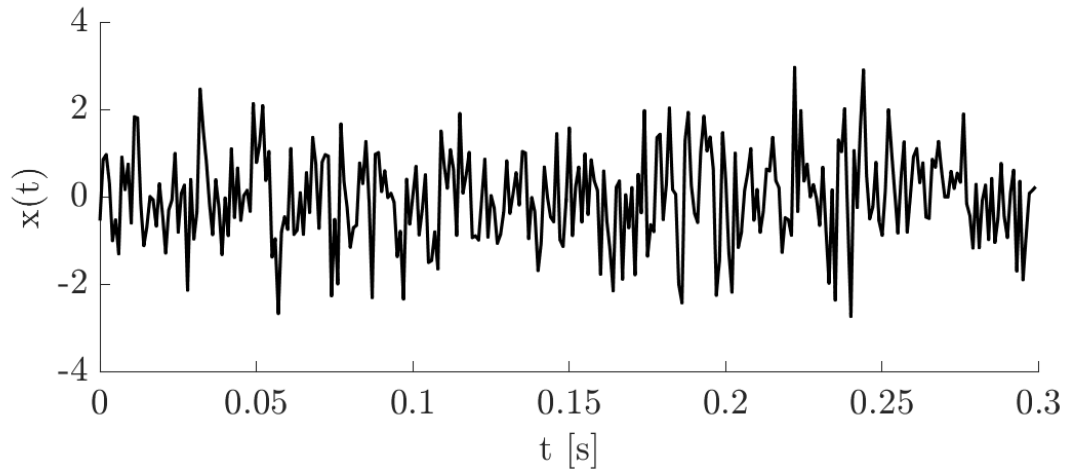
$$\hat{Q} = \left[ \sum_{j=1}^r \hat{Q}_j^2 \right]^{1/2} \quad (3.7)$$

## 3.2 Análisis de vibraciones aleatorias

El análisis de vibraciones aleatorias es una técnica utilizada para analizar señales de vibración en sistemas físicos que exhiben comportamientos aleatorios. Esta técnica se utiliza en una variedad de campos, incluyendo ingeniería mecánica, aeroespacial, civil y eléctrica, para evaluar y mejorar el rendimiento y la fiabilidad de los sistemas.

De acuerdo con (NEWLAND, 2012), explica del siguiente modo: Un sistema vibra si se sacude, tiembla o se mueve hacia atrás y hacia adelante de alguna manera. Si este movimiento es impredecible, entonces se dice que el sistema está en vibración aleatoria. El estudio de las vibraciones aleatorias es importante dado que se preocupa por descubrir cómo las características estáticas del movimiento de un sistema excitado al azar por una señal Aleatoria  $x(t)$  **Figura 9** se manifiesta en relación a las propiedades dinámicas del sistema vibrante: la masa, la rigidez y la amortiguación.

**Figura 9** – Señal aleatoria



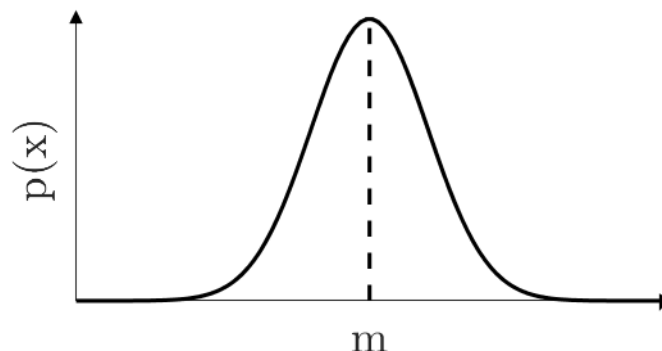
**Fuente:** Señal aleatoria generada en MATLAB®

En términos generales, el análisis de vibraciones aleatorias implica el estudio de la vibración de un sistema que está sometido a una carga aleatoria. Por lo tanto es necesario la comprensión de los aspectos y conceptos estadísticos. Esto implica la comprensión de conceptos como: variable aleatoria, la función de densidad espectral, la autocorrelación, la distribución de probabilidad, etc.

### 3.2.1 Función de distribución normal

De acuerdo a (BENDAT; PIERSOL, 2010; NEWLAND, 2012) muchas de las vibraciones aleatorias tienden a la conocida función de distribución normal o la también denominada distribución gaussiana, **Figura 10**, expresión( 3. 8 ), razón por lo cual la distribución es ampliamente utilizada en teoría de vibraciones aleatorias, para aproximar las características de dicha excitación aleatoria.

**Figura 10** – Función de distribución Normal



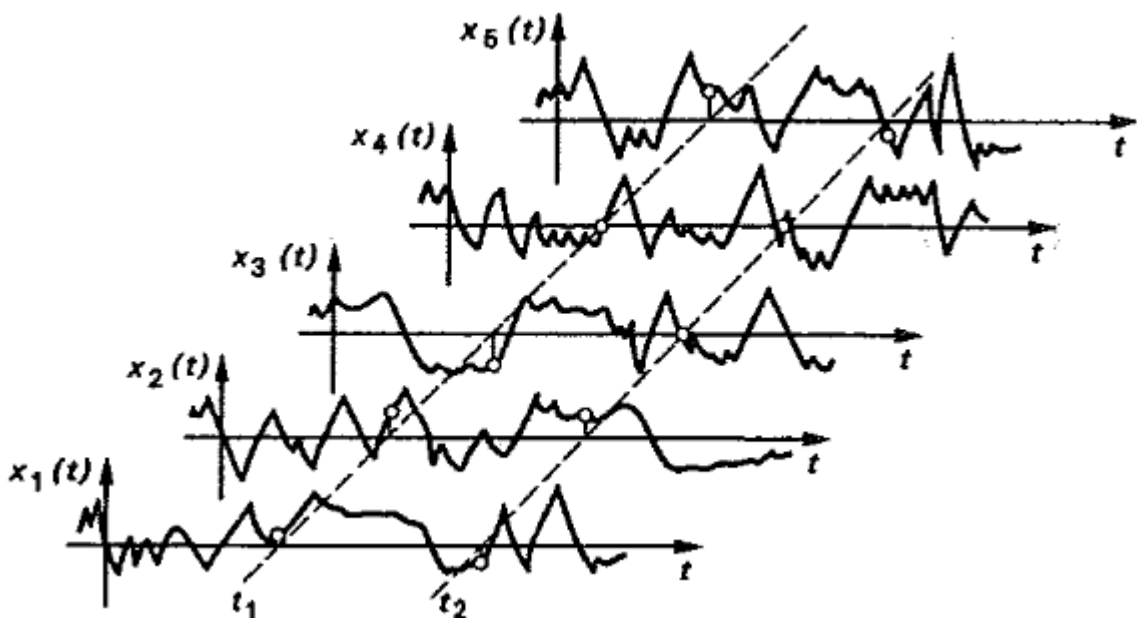
Fuente: Adaptado de MATLAB®

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (3.8)$$

Donde:  $m$  es el valor medio o esperanza,  $\sigma$  es la desviación estándar.

El valor medio, (NEWLAND, 2012) considera que, puede ser analizado desde dos perspectivas diferentes: por un lado considera un conjunto o colección de muestras de funciones aleatorias, conforme mostrado en la **Figura 11**  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ . En ese caso el valor medio  $\bar{x}(t)$  puede ser calculada conforme la expresión (3.9). Pero, para el caso de la vida real Newland afirma que sería tedioso la colección de un número de señales representativas para luego analizar estadísticamente. Entonces propone que, una señal colectada bajo ciertos parámetros de rigurosidad de muestreo, representaría una aproximación para el conjunto infinito de señales aleatorias. Y esta única señal podría ser evaluado estadísticamente en el dominio del tiempo, esto ayuda a simplificar el análisis de y la caracterización del proceso aleatorio  $x(t)$ , siendo este la otra perspectiva de evaluación, afirma que este es el método más utilizado en la práctica.

**Figura 11** – Definición del valor medio para señales aleatorias

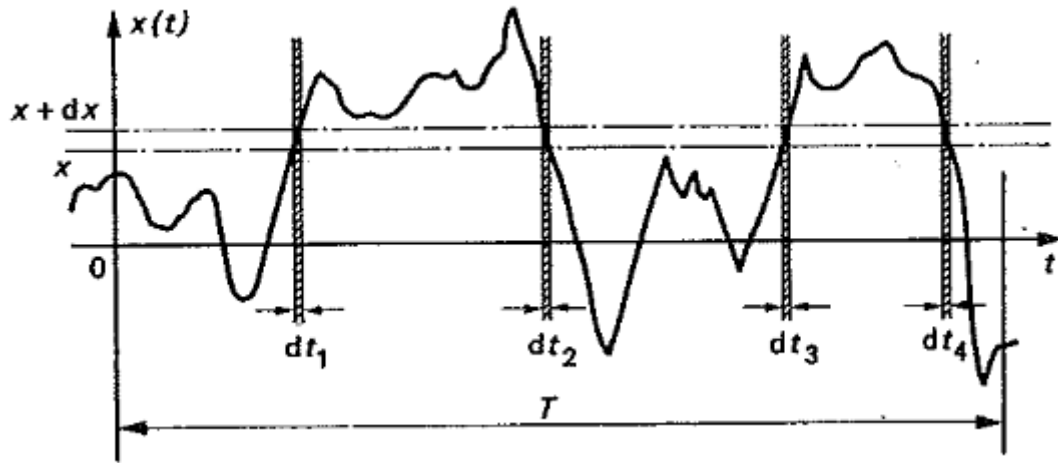


Fuente: (NEWLAND, 2012)

$$\bar{x}(t_1) = \frac{1}{N} \sum_{N=1}^N x_N(t_1) \quad (3.9)$$

Consiste en muestrear el registro de la señal para muchos puntos a lo largo del dominio  $t$ , y obtener así una población o número representativo de valores de muestreo, luego el valor medio puede ser calculado a través de la expresión (3.10),

**Figura 12** – Análisis del valor medio para una señal en el tiempo



Fuente: (NEWLAND, 2012)

$$\bar{x}(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_i) \quad (3.10)$$

Dicho esto, introduce el concepto de proceso estacionario y proceso ergódico. Una señal  $x(t)$  es estacionario si su comportamiento estadístico para un conjunto de señales no cambia a lo largo del tiempo. Mientras que un proceso ergódico es el proceso en el cual una única señal representa las propiedades del conjunto, analizado en el dominio del tiempo.

De esta manera, justifica qué, para un proceso estacionario y ergódico será necesario de una sola muestra de señal  $x(t)$  **Figura 12** para la obtención de los

parámetros estadísticos. De ahí, la esperanza  $E(x)$  puede obtenido a través de la expresión ( 3. 11 ).

$$m = E(x(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (3. 11)$$

Seguidamente, a partir de la definición de varianza  $\sigma^2 = Var(x)$  podemos encontrar el valor cuadrático medio  $E(x^2(t))$ , a partir de las operaciones presentada a continuación, finalmente se llega a la expresión ( 3. 12 ).

$$\begin{aligned} Var(x(t)) &= E\left[\left(x(t) - E(x(t))\right)^2\right] \\ Var(x(t)) &= E\left[x^2(t) - 2xE(x(t)) + (E(x))^2\right] \\ Var(x(t)) &= E(x^2(t)) - 2E(x(t))E(x(t)) + (E(x(t)))^2 \\ Var(x(t)) &= E(x^2(t)) - 2m^2 + m^2 \\ Var(x(t)) &= E(x^2(t)) - m^2 \\ \sigma^2 &= E(x^2(t)) - m^2 \\ E(x^2(t)) &= \sigma^2 + m^2 \end{aligned} \quad (3. 12)$$

De esta manera, el valor cuadrático medio de la variable aleatoria  $E(x^2(t))$ , es dada por la siguiente expresión ( 3. 13 )

$$E(x^2(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (3. 13)$$

Generalmente, en los procesos aleatorios se considera una media o esperanza igual a cero (GÓMEZ, 2015), en esos casos, a partir de la expresión ( 3. 12 ) se puede adoptar que la varianza es igual al valor cuadrático medio.

$$\sigma^2 = E(x^2(t)) \quad (3.14)$$

### 3.2.2 Función de Correlación y autocorrelación

La correlación de señales es básicamente una medida de dependencia que describe la similitud o a-similitud entre dos señales aleatorias, asumiendo la señal como un vector,  $x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ ,  $y(t) = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ . Del algebra lineal se sabe que el producto escalar de dos vectores está dado por la relación  $x(t) \bullet y(t) = |x(t)| |y(t)| \cos(\theta)$ , donde el ángulo  $\theta$  define el grado de correlación entre los dos vectores, teniendo en cuenta que para vectores unitarios los resultados pueden variar entre: -1, 0 y 1. Nótese que 0 representa ortogonalidad o correlación 0, resultados próximos de 0 representarán bajísima correlación y resultados próximos de 1 o -1 representan alta correlación. Para resultados de 1 representa una correlación perfecta, además, significa que son vectores paralelos y poseen la misma dirección, para el resultado de -1 implica correlación perfecta, con vectores paralelos, pero con sentidos contrarios, nótese, por ejemplo, para la correlación de una misma señal  $x(t) \bullet x(t)$  sería igual a 1. Esta breve introducción sobre correlación es importante para a continuación entrar en la definición de autocorrelación.

La función de autocorrelación para un proceso aleatorio  $x(t)$  se define como el valor promedio del producto  $x(t)x(t+\tau)$ . El proceso se muestrea en el tiempo  $t$  y luego de nuevo en el tiempo  $t+\tau$  y se calcula el valor promedio del producto  $E(x(t)x(t+\tau))$ . Si el proceso es estacionario, el valor de  $E(x(t)x(t+\tau))$  será independiente del tiempo absoluto  $t$  y el resultado de la operación será una nueva función  $R_x(\tau)$ , de modo que podemos escribir:

$$R_{xx}(\tau) = E(x(t)x(t+\tau)) \quad (3.15)$$

Donde  $R_{xx}(\tau)$  es la función de autocorrelación de la señal  $x(t)$ . Para una señal estacionaria, la media es independiente del tiempo  $t$  al igual que la varianza, y son dados por las siguientes expresiones.

$$E(x(t)) = E(x(t+\tau)) = m \quad (3.16)$$

$$E(x^2(t)) = E(x(t)x(t+\tau)) = \sigma^2 \quad (3.17)$$

Por consiguiente, la función de autocorrelación es dado por la siguiente expresión:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E(x(t)x(t+\tau)) dt \quad (3.18)$$

Propiedades de Autocorrelación:

$$R_{xx}(\tau = 0) = E(x^2(t))$$

$$-\sigma^2 + m^2 \leq R_{xx}(\tau) \leq \sigma^2 + m^2$$

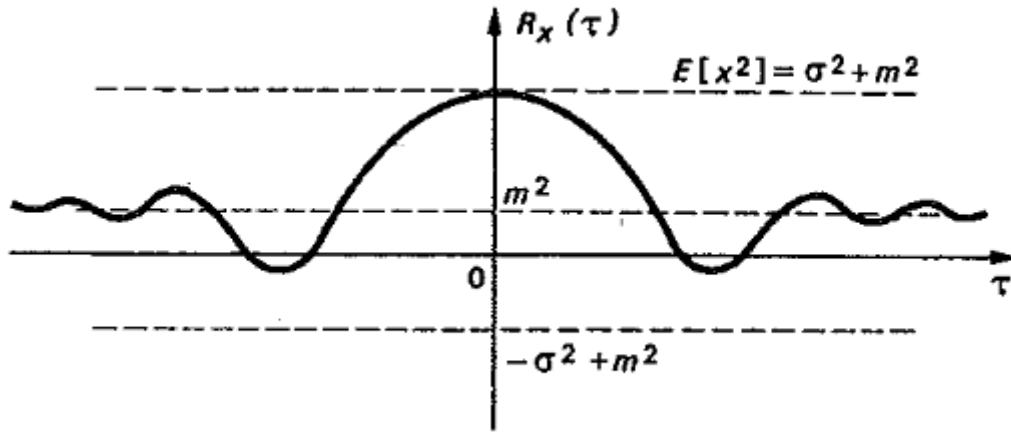
$$-\sigma^2 + m^2 \leq R_{xx}(\tau) \leq \sigma^2 + m^2$$

$$R_{xx}(\tau \rightarrow \infty) = m^2$$

$$R_{xx}(\tau) = E(x(t)x(t+\tau)) = E(x(t-\tau)x(t)) = R_{xx}(-\tau)$$

Las propiedades de autocorrelación pueden ser graficada conforme la **Figura 13**, donde se puede observar todas las propiedades. Nótese que existe una rápida pérdida de correlación en un espacio corto de tiempo  $\tau$ .

**Figura 13** – Ilustración de las propiedades de autocorrelación para  $x(t)$



Fuente: (NEWLAND, 2012)

El producto de correlación de diferentes procesos aleatorios estacionarios  $x(t)$ ,  $y(t)$  se denomina correlación cruzada. A continuación, se presenta algunas propiedades:

$$R_{xy}(\tau) = E(x(t)y(t+\tau)) = E(x(t-\tau)y(t)) = R_{yx}(-\tau)$$

$$R_{yx}(\tau) = E(y(t)x(t+\tau)) = E(y(t-\tau)x(t)) = R_{xy}(-\tau)$$

Luego:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E(x(t)y(t+\tau)) dt \quad (3.19)$$

Después de estas definiciones importantes, cuyo objetivo es abrir el camino para la definición de la densidad espectral, antes de eso, es importante hablar de la transformada de Fourier.

### 3.2.3 Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una técnica matemática que se utiliza para analizar señales en el dominio de la frecuencia. Permite descomponer una señal  $x(t)$  en una combinación de componentes sinusoidales de diferentes frecuencias.



$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right) \quad (3.20)$$

Donde:  $a_0, a_k, b_k$  son k-ésimos constantes de Fourier o también denominado como coeficientes de Fourier y son dados por las siguientes expresiones:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

$$a_1 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \quad \text{para } k \geq 1$$

$$b_1 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \quad \text{para } k \geq 1$$

Las constantes de Fourier y la señal en general  $x(t)$ , como se viene diciendo, se puede expresar en función de la frecuencias angulares o frecuencias:

$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}, f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{k}{T} = f_0 k, f_0 = \frac{1}{T}$ ,  $\omega_k$  es la k-ésima frecuencia angular,  $f_k$  es la k-ésima frecuencia.

La transformada de Fourier se utiliza para convertir una señal del dominio del tiempo  $x(t)$  al dominio de la frecuencia  $X(f)$ . Esta transformación revela la contribución relativa de diferentes frecuencias en una señal y proporciona información sobre las componentes frecuenciales presentes en ella. Se dice que el análisis de Fourier permite examinar una función desde otro punto de vista, el dominio transformado. (BRIGHAM, 1988). Luego de una serie de hipótesis y de operaciones matemáticas, a partir de la ecuación (3.20), se puede llegar a la ecuación general de la transformada de Fourier (3.21) y a la transformada inversa de Fourier (3.22) (NEWLAND, 2012), cabe mencionar que en el presente trabajo no se pretende abordar una discusión teórica al respecto.

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.21)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.22)$$

Donde:  $j$  es el numero complejo  $\sqrt{-1}$ ,  $X(\omega)$  es la amplitud o espectro de Fourier de la señal  $x(t)$ .

### 3.2.4 Densidad espectral

De acuerdo con (COHEN, 1998) manifiesta que el teorema de Wiener-Khinchin expresa la densidad de potencia en términos de la función de autocorrelación y estas a su vez son pares de transformadas de Fourier. A continuación, se presenta las siguientes expresiones:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.23)$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (3.24)$$

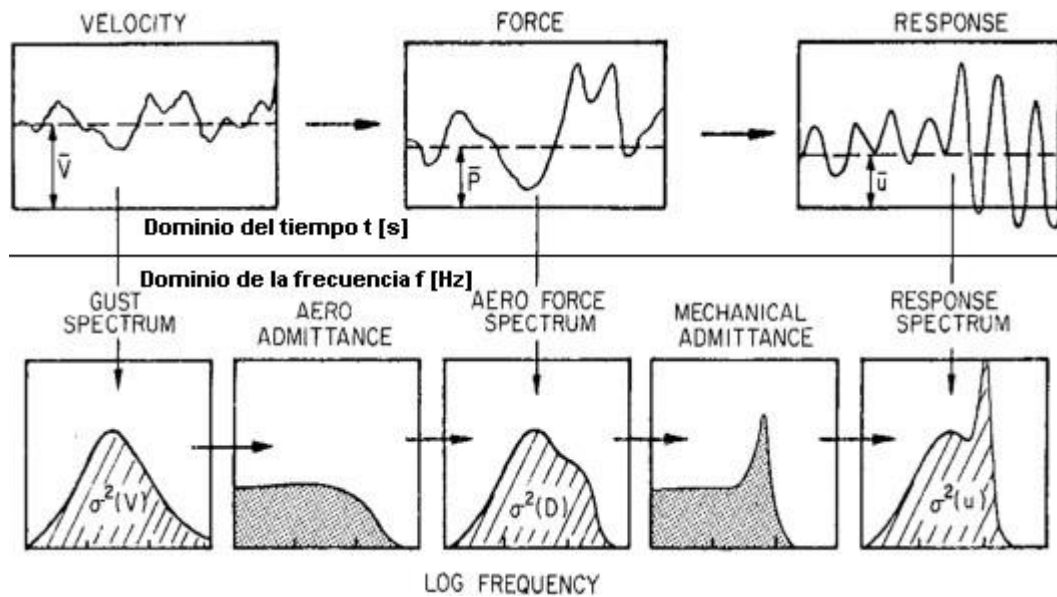
Nótese que para  $\tau = 0$  tenemos (3.25) una relación para la varianza en función de la frecuencia a partir de la ecuación (3.17).

$$\sigma^2 = E(x^2(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (3.25)$$

La teoría de vibraciones aleatorias y la dinámica estructural permite determinar las cargas y respuestas inducidas por el viento de edificios y estructuras. El enfoque para determinar la respuesta dinámica resonante de las estructuras en modos particulares de vibración se muestra el artículo de (DAVENPORT, 1967), se resumen en la **Figura 14**. Desde el punto de vista físico en la figura se muestra la relación de viento con la fuerza, luego la relación de la fuerza con la respuesta. La conexión entre la velocidad y la fuerza está dada por la admitancia aerodinámica. Consiste en qué el flujo del viento al encontrar una forma genera un campo de presiones y esta genera

una carga. La conexión de la fuerza con la respuesta se da a través de la admitancia mecánica. La admitancia mecánica está asociada a características internas de la estructura: como la rigidez, la masa y amortiguamiento, en otras palabras, la admitancia define el grado de la respuesta que tendrá la estructura luego de la acción ejercida por el viento.

**Figura 14** – Enfoque de Davenport, determinación de respuesta resonante inducida por el viento.



Fuente: (DAVENPORT, 1967)

Con esta breve explicación, a continuación, se procede a ejecutar el enfoque propuesto por Davenport.

### 3.3 Modelo discreto completo

Se admite que el viento puede ser idealizado como un proceso estocástico estacionario y ergódico; y que la estructura incidente actúe dentro del rango elástico lineal con amortiguamiento de tipo proporcional.

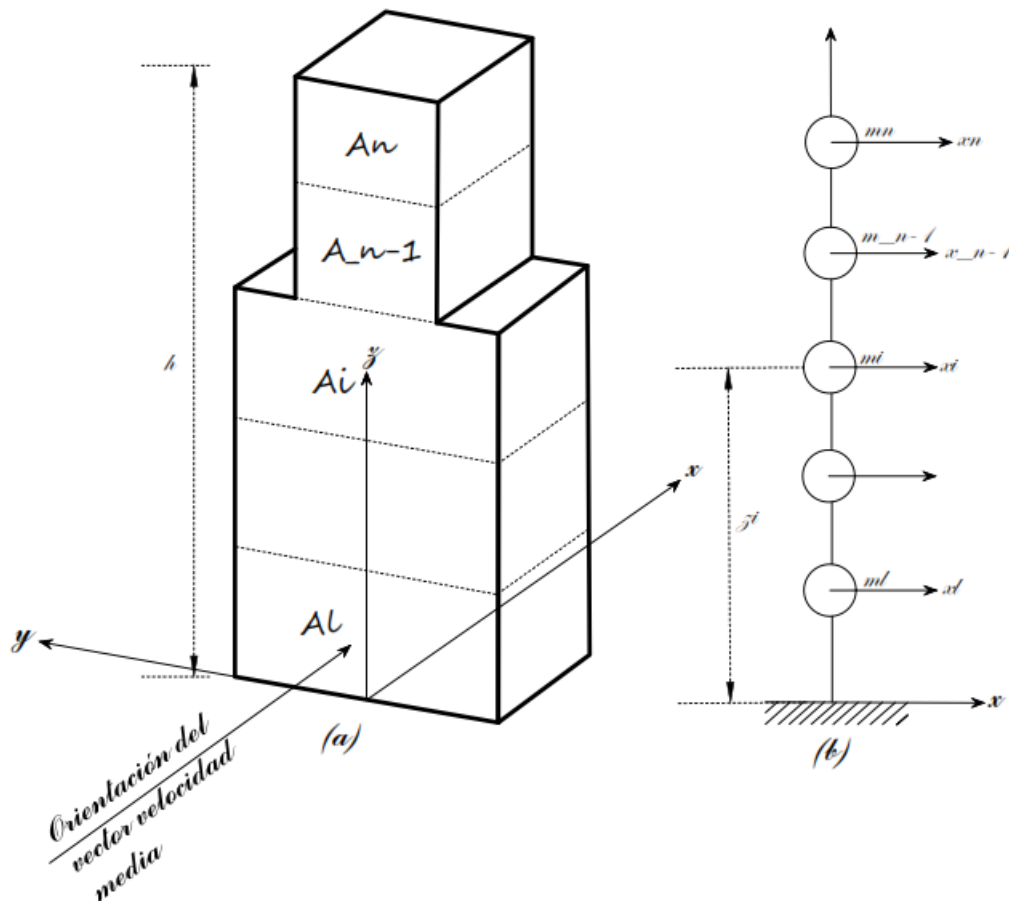
#### 3.3.1 Ecuación del movimiento

Se presentan las ecuaciones de movimiento del sistema en la dirección del viento, esquematizada en la **Figura 15** a) y b), para  $N$  grados de libertad es dado por la siguiente ecuación:

$$[M]\{\ddot{\vec{x}}\} + [C]\{\dot{\vec{x}}\} + [K]\{\vec{x}\} = \{F(t)\} \quad (3.26)$$

Donde:  $[M]$ : Representa la matriz de masa del sistema, de orden  $N \times N$ ,  $[C]$ : Representa la matriz de amortiguamiento, de orden  $N \times N$ ,  $[K]$ : Representa la matriz de rigidez del sistema, de orden  $N \times N$ ,  $\{\ddot{\vec{x}}\}, \{\dot{\vec{x}}\}, \{\vec{x}\}$ : Representa los vectores de: desplazamientos, velocidades y aceleración, de orden  $N$  respectivamente,  $\{\vec{F}(t)\}$ : Representa los vectores de carga de viento de orden  $N$ ,  $N$ : representa el número de grados de libertad, es análisis dinámico sigue la fundamentación teórica dada por (CHOPRA, 2014).

**Figura 15** – Esquema del modelo discreto.



**Fuente:** Adaptado de la norma (ABNT NBR 6123, 2013).

Utilizando el teorema de superposición modal, podemos introducir el siguiente cambio de variable:

$$\{\bar{x}\} = [\Phi] \{\bar{\eta}\} \quad (3.27)$$

Donde,  $[\Phi]$  representa la matriz modal, las columnas de la matriz modal representan los autovectores del sistema,  $\{\bar{\eta}\}$  vector de coordenadas modales; remplazando en la ecuación ( 3. 26 ) y multiplicando en dos lados de la expresión por la matriz modal transpuesta  $[\Phi^T]$ , se obtiene la ecuación:

$$[M_r] \{\ddot{\bar{\eta}}\} + [C_r] \{\dot{\bar{\eta}}\} + [K_r] \{\bar{\eta}\} = [\Phi^T] \{F(t)\} \quad (3.28)$$

Donde:

$$[M_r] = [\Phi^T] [M] [\Phi]$$

$$[C_r] = [\Phi^T] [C] [\Phi]$$

$$[K_r] = [\Phi^T] [K] [\Phi]$$

Donde,  $[M_r]$ ,  $[K_r]$  son matrices diagonales,  $[C_r]$  también será diagonal si  $[C]$  es combinación lineal de  $[M]$  y  $[K]$ , esta condición permite desacoplar un sistema amortiguado como una superposición de varios sistemas de un grado de libertad. Teniendo como resultado la r-ésima ecuación no acoplada del sistema ( 3. 29 ), también conocido como ecuaciones independiente.

$$\ddot{\eta}_r + 2\zeta_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = F_r(t) \quad (3.29)$$

Donde:

$$F_r(t) = \frac{\{\phi_r^T\} \{\vec{F}_r(t)\}}{m_r} \quad (3.30)$$

Donde:

$$m_r = \{\phi_r^T\} [M] \{\phi_r\}$$

Donde:  $r$  representa el número de modo de vibración,  $\{\phi_r\}$ : Representa el r-ésimo modo natural de vibración del sistema sin amortiguamiento,  $m_r$ : Es la r-ésima masa generalizada,  $\zeta_r$ : Relación del coeficiente de amortiguamiento y el coeficiente de amortiguamiento crítico para el modo  $r$ ,  $\omega_r$ : Frecuencia natural del modo  $r$ . La ecuación (3.30) puede ser reescrita por la siguiente ecuación:

$$F_r(t) = \frac{\sum_{i=1}^N \phi_{i,r} F_i(t)}{m_r} \quad (3.31)$$

Donde:  $i$  representa el número de grados de libertad,  $\phi_{ir}$  y  $F_i$  representa las i-ésimas componente de  $\vec{\phi}_r$  y  $\vec{F}$  respectivamente.

### 3.3.2 Función de auto-correlación entre las fuerzas de excitación

La función de autocorrelación de la fuerza de excitadora  $F_r(t)$  es dada por:

$$R_{FrFr}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^N \frac{\phi_{ir} F_i(t)}{m_r} \sum_{j=1}^N \frac{\phi_{jr} F_j(t+\tau)}{m_r} dt \quad (3.32)$$

A continuación, la ecuación ( 3. 32 ) puede ser reescrito en la siguiente expresión:

$$R_{FrFr}(\tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{m_r^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_i(t) F_j(t+\tau) dt \quad (3.33)$$

Considerando:

$$R_{F_i F_j}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_i(t) F_j(t+\tau) dt \quad (3.34)$$

Por lo tanto, la ecuación ( 3. 33 ) puede ser reescrita en la siguiente expresión.

$$R_{FrFr}(\tau) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{m_r^2} R_{F_i F_j}(\tau) \quad (3.35)$$

Donde,  $R_{F_i F_j}(\tau)$  representa la función de correlación cruzada de las fuerzas  $F_i$  y  $F_j$

### 3.3.3 Fuerza del viento

Las fuerzas del viento pueden descritas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \frac{1}{2} \rho A_i C_{D_i} V_{T_i}^2(t) \\ F_j(t) &= \frac{1}{2} \rho A_j C_{D_j} V_{T_j}^2(t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Donde  $\rho$  es la masa específica del aire,  $A_i$  es el área de referencia y  $C_{D_i}$  es el coeficiente de arrastre, al igual que en  $F_j$ . La velocidad total del viento  $V_{T_i}$  es constituida por la velocidad media  $\bar{V}_i$  y una parte fluctuante  $V_i(t)$  mostrada en la siguiente expresión:

$$V_{T_i}(t) = \bar{V}_i + V_i(t) \quad (3.37)$$

### 3.3.4 Función de correlación cruzada de las fuerzas del viento

A partir de la ecuación (3.36), la función de correlación cruzada de las fuerzas  $F_i(t)$  y  $F_j(t)$  es dada por la siguiente ecuación:

$$R_{F_i F_j}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \rho A_i C_{D_i} V_{T_i}^2(t) \frac{1}{2} \rho A_j C_{D_j} V_{T_j}^2(t + \tau) dt \quad (3.38)$$

La ecuación (3.38) puede ser reescrita en la siguiente expresión:

$$R_{F_i F_j}(\tau) = \frac{1}{4} \rho^2 A_i C_{D_i} A_j C_{D_j} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V_{T_i}^2(t) V_{T_j}^2(t + \tau) dt \quad (3.39)$$

Remplazando la (3.37) en la ecuación (3.39) tenemos la siguiente ecuación:

$$R_{F_i F_j}(\tau) = \frac{1}{4} \rho^2 A_i C_{D_i} A_j C_{D_j} \frac{1}{T} \int_0^T [\bar{V}_i^2 + 2\bar{V}_i V_i(t) + V_i^2(t)] [\bar{V}_j^2 + 2\bar{V}_j V_j(t + \tau) + V_j^2(t + \tau)] dt \quad (3.40)$$

De acuerdo con (GALINDEZ, 1979) en condiciones normales la amplitud de rms (valor cuadrado medio) de la parte fluctuante de la velocidad no excede del 10% al 15% de la velocidad media, por lo tanto, los términos  $V_i^2(t)$  y  $V_j^2(t + \tau)$  en la ecuación (3.40) puede ser desconsiderados, obteniendo la siguiente ecuación:



$$\begin{aligned}
R_{F_i F_j}(\tau) = & \frac{1}{4} \rho^2 A_i C_{D_i} A_j C_{D_j} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{V}_i^2 \bar{V}_j^2 dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T 2 \bar{V}_i^2 \bar{V}_j V_j(t + \tau) dt \right. \\
& \left. + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T 2 \bar{V}_j^2 \bar{V}_i V_i(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T 4 \bar{V}_i \bar{V}_j V_i(t) V_j(t + \tau) dt \right]
\end{aligned} \quad (3.41)$$

La segunda y tercera integral de la ecuación ( 3. 41 ) son nulas dado que el valor medio de las velocidades fluctuantes de  $V_i(t)$  y  $V_j(t)$  es cero, de ahí se la siguiente ecuación:

$$R_{F_i F_j}(\tau) = \frac{1}{4} \rho^2 A_i C_{D_i} A_j C_{D_j} \left[ \bar{V}_i^2 \bar{V}_j^2 + 4 \bar{V}_i \bar{V}_j R_{V_i V_j}(\tau) \right] \quad (3.42)$$

Donde  $R_{V_i V_j}(\tau)$  es la función de correlación cruzada de las velocidades fluctuantes.

El termino constante de la ecuación ( 3. 42 ) correspondiente al producto cruzado entre  $\bar{V}_i^2 \bar{V}_j^2$ , resulta en un efecto puramente estático, por lo que es omitido en la determinación de la respuesta a la parte fluctuante. Por lo tanto, se puede expresar la función de correlación cruzada de las fuerzas fluctuantes a través de la siguiente ecuación:

$$R_{F_i F_j}(\tau) = \rho^2 A_i C_{D_i} A_j C_{D_j} \bar{V}_i \bar{V}_j R_{V_i V_j}(\tau) \quad (3.43)$$

### 3.3.5 Espectro de las fuerzas del viento y de la excitación

Calculando la transformada de Fourier en los dos lados de la ecuación ( 3. 43 ) se obtiene la relación entre las función de densidad espectral cruzada de las fuerzas fluctuantes  $S_{F_i F_j}(f)$  y la función de densidad espectral de las velocidades fluctuantes del viento  $S_{V_i V_j}(f)$ , conforme mostrado en la siguiente ecuación:

$$S_{F_i F_j}(f) = \rho^2 A_i C_{D_i} A_j C_{D_j} \bar{V}_i \bar{V}_j S_{V_i V_j}(f) \quad (3.44)$$

De manera análoga, calculando la transformada de Fourier en los dos lados de la ecuación (3.35) tenemos:

$$S_{F_r R_r}(f) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{m_r^2} S_{F_i F_j}(f) \quad (3.45)$$

### 3.3.6 Función de densidad espectral de respuesta

Las funciones de densidad espectral de potencia de la coordenada modal  $\eta_r$  y de la fuerza generalizada  $F_r$  están vinculadas a la siguiente ecuación: (BENDAT; PIERSOL, 2010)

$$S_{nnr}(f) = |H(f)|^2 S_{F_r F_r}(f) \quad (3.46)$$

Donde,  $H(f)$  es la función de respuesta asociada a la ecuación: (3.29):

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{(2\pi f_r)^4} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{f}{f_r}\right)^2\right]^2 + 4\zeta_r^2 \left(\frac{f}{f_r}\right)^2} \quad (3.47)$$

Donde,  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  es la frecuencia en Hz.

Por lo tanto, el valor cuadrático medio de la coordenada modal es:

$$E[n_r^2] = \int_0^\infty |H(f)|^2 S_{F_r F_r}(f) df \quad (3.48)$$

Donde  $E$  indica el valor esperado, por lo tanto, el desvío padrón de  $\eta_r$ , es dado por la siguiente expresión:

$$\sigma_{\eta_r} = \sqrt{E[n_r^2]} \quad (3.49)$$

El valor máximo probable de  $\eta_r$  es dada por la siguiente expresión:

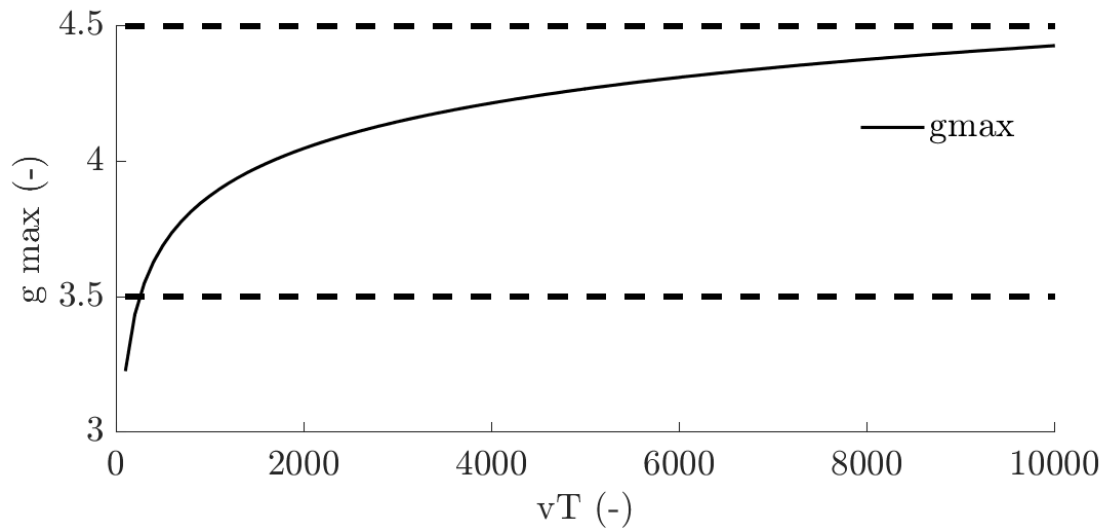
$$(\eta_r)_{m\acute{a}x} = \bar{g} \sigma_{\eta_r} \quad (3.50)$$

Donde  $\bar{g}$  es el fator de pico medio correspondiente a la carga máxima superada al valor medio de las velocidades ocurridas en un periodo determinado, cuya información es colectada a través de un anemómetro meteorológico. (DAVENPORT, 1964) considera que el periodo ideal para predecir el valor, máximo es de 1 hora o 3600 segundos. Por lo que definió al factor de pico medio máximo por la siguiente expresión:

$$\bar{g}_{m\acute{a}x} = \sqrt{2 \ln(vT)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln(vT)}} \quad (3.51)$$

Donde,  $T$  es el periodo correspondiente a 3600s,  $\gamma$  es la constante de Euler igual a 0.5772 y  $v$  es la frecuencia (Hz) donde se concentra la mayor parte de la energía del espectro. Por lo que considera que para para sistemas ligeramente amortiguados este valor estará más próximo a la frecuencia natural. A demás considera que los valores de  $vT$ , de interés práctico están dentro del intervalo de 100 a 10000, o sea, para intervalos de frecuencia de 0.0278Hz a 2.778Hz conforme mostrado en la figura. Por lo tanto, el factor medio de pico debe estar en el intervalo de 3.5 a 4.5.

**Figura 16** – Factor de pico medio  $\bar{g}_{m\acute{a}x}$



**Fuente:** Adaptado de (DAVENPORT, 1964).

Considerando la transformación dada **(3.27)** es posible encontrar la respuesta máxima en términos desplazamiento, a través de las coordenadas originales para cada modo de vibración con la siguiente ecuación:

$$(\vec{x}_{max})_r = g\sigma_{\eta r}\vec{\phi}_r \quad (3.52)$$

Donde,  $(\vec{x}_{max})_r$  representa la contribución del r-ésimo modo de vibración al vector de desplazamientos máximos. En la mayoría de los casos la contribución de los modos superiores es despresado, siendo suficiente apenas el primer modo:

$$\vec{x}_{max} = g\sigma_{\eta 1}\vec{\phi}_1 \quad (3.53)$$

### 3.3.7 Densidad espectral de potencia de la velocidad longitudinal

Las características de la turbulencia dentro de la capa atmosférica, especialmente las subcapas inferiores, teniendo en vista su respectivo impacto en el análisis de estructuras, fue estudiado inicialmente por (DAVENPORT, 1961), luego, estudiosos como (HARRIS, 1968; KAIMAL et al., 1972; SOLARI, 1989), entre otros,

propusieron otros espectros, dígase, con ciertas modificaciones a la propuesta inicial del espectro de Davenport. En este caso, se optó por utilizar el espectro propuesto por (HARRIS, 1970) **Figura 17** dado que es el espectro que adopta la norma brasilera, el espectro normalizado es dado por la siguiente expresión:

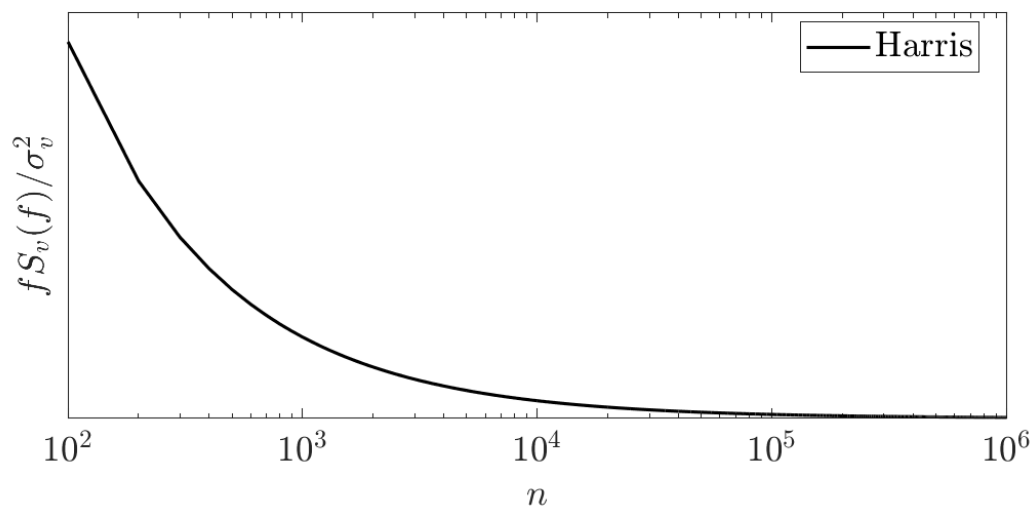
$$\frac{f S_v(f)}{\sigma_v^2} = 0.60 \frac{n}{(2 + n^2)^{\frac{5}{6}}} \quad (3.54)$$

Donde:  $S_v(f)$  es el espectro,  $\sigma_v$  representa el desvío padrón del grado de intensidad de turbulencia  $I_v$ , la misma relaciona-se con la velocidad media  $\bar{V}_{10}$  a la altura  $z_{10}$  10m y la rugosidad  $z_0$ , conforme la ecuación (3.55) (CIB REPORT, 1996),  $n$  es la frecuencia reducida adimensional dada por la ecuación (3.56),  $f$  es la frecuencia en  $Hz$ ,  $L$  es la longitud de escala  $L = 1200m$ . Los parámetros de rugosidad según la categoría adoptada por la norma brasilera, se presentan en la **Tabla 2**.

$$I_v = \frac{\sigma_v}{\bar{V}_{10}} = \frac{1}{\ln\left(\frac{z_{10}}{z_0}\right)} \quad (3.55)$$

$$n = \frac{f L}{\bar{V}_0} \quad (3.56)$$

**Figura 17** – Espectro normalizado de Harris



**Fuente:** Adaptado de (HARRIS, 1970).

**Tabla 2** – Coeficientes de rugosidad  $z_0$  según la categoría

Categoría	I	II	III	IV	V
$z_0$	0.005	0.07	0.03	1.00	2.5

**Fuente:** (ABNT NBR 6123, 2013)

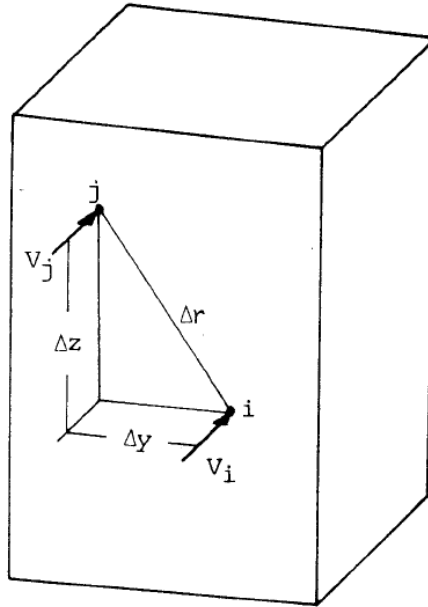
### 3.3.8 Función de densidad espectral cruzada de la velocidad del viento

En la práctica, el análisis de la respuesta se basa generalmente en el espectro de frecuencia de la turbulencia, mostrado en la ecuación (3.54), la misma representa a la componente de velocidad a lo largo del viento en una sola dirección con influencia en un solo punto con relación al plano normal de la velocidad del viento, por lo tanto, para dos puntos diferentes las fluctuaciones de las velocidades del viento no representan correlación perfecta, configurando así a una pérdida de correlación conforme varíe la distancia  $\Delta r$  (KRENK, 1996), veas-se el esquema de la **Figura 18**. Razón por la cual en el cálculo dinámico se debe considerar la relación entre los valores esperados de las fuerzas del viento para dos puntos diferentes (GALINDEZ, 1979). Llevando en consideración el aspecto de la correlación, la función de densidad espectral cruzada de la velocidad del viento  $S_{v_i v_j}(f)$  de la ecuación (3.44) se puede multiplicar por el factor de correlación conforme la siguiente ecuación:

$$S_{v_i v_j}(f) = S_v(f) R_v(\Delta y, \Delta z, f) \quad (3.57)$$

Donde:  $R_v$  Es el coeficiente de correlación,  $\Delta y, \Delta z$ : son las longitudes de proyecciones horizontales y verticales. La **Figura 18** muestra las proyecciones horizontales y verticales respectivamente del vector que une los puntos i e j, los que se supone están contenidos en un plano normal a la velocidad media del viento, conforme representado en la figura.

**Figura 18** - Esquema de proyecciones de las velocidades del viento



**Fuente:** Adaptado de (GALINDEZ, 1979)

El coeficiente correlación adoptado para el presente trabajo es la ecuación de Davenport adaptado por Harris con los parámetros con los coeficientes de Riera y Blessmann (GALINDEZ, 1979) mostrada en la siguiente ecuación:

$$R_v(\Delta y, \Delta z, f) = \exp \left( - \frac{11 \Delta r f}{\bar{V}_0} \left( \frac{z_m}{z_0} \right)^{-0.30} \right) \quad (3.58)$$

Donde:

$$\Delta r = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2} \quad (3.59)$$

Donde:  $\Delta y, \Delta z$  longitudes de proyecciones horizontales medidos sobre el plano normal a la velocidad media del viento,  $z_m$  es dada por la siguiente ecuación:

$$z_m = (z_i + z_j) / 2 \quad (3.60)$$

### 3.3.9 Admitancia aerodinámica

Hasta el momento fue admitido que la fuerza que actúa a lo largo de la coordenada generalizada  $i$ :

$$F_i(t) = \frac{1}{2} \rho A_i C_{Di} V_{Ti}^2(t) \quad (3.61)$$

Anteriormente se desconsideró el cuadrado de la parte fluctuante de la velocidad y se llegó a la siguiente ecuación:

$$F_i(t) = \bar{F}_i + \rho A_i C_{Di} \bar{V}_i V_i(t) \quad (3.62)$$

Donde:

$$\bar{F}_i = \frac{1}{2} \rho A_i C_{Di} \bar{V}_i^2 \quad (3.63)$$

La expresión ( 3. 62 ) tiene validez en la hipótesis de que el cuerpo en consideración sea suficientemente pequeño, caso donde se podría admitir de la existencia de una perfecta correlación espacial de las velocidades fluctuante. Para tal caso se tendría que la ecuación ( 3. 44 ) con las coordenadas generalizadas sean iguales  $i = j$ . Por lo que el espectro de la fuerza es dada por la siguiente ecuación:



$$S_F(f) = \rho^2 A_i^2 C_{Di}^2 \bar{V}_i^2 S_v(f) \quad (3.64)$$

En la mayoría de los problemas de interés práctico, es necesario considerar la imperfecta correlación espacial de las velocidades fluctuantes, por lo que es necesario introducir un factor de corrección de tal manera que:

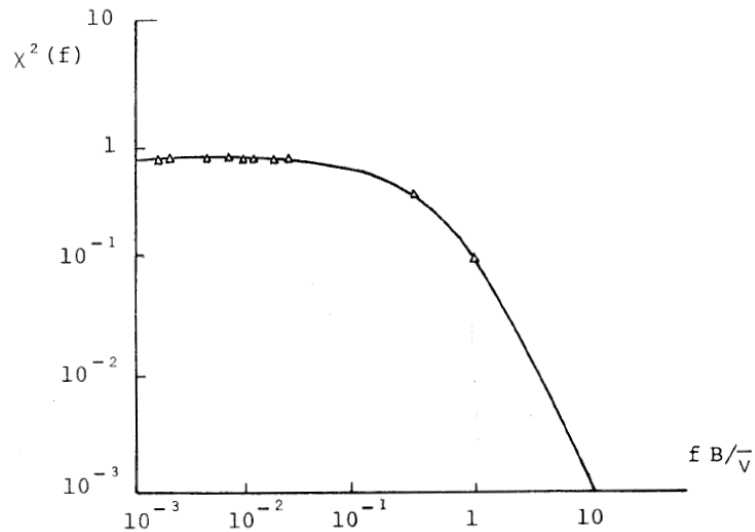
$$S_F(f) = \rho^2 A_i^2 C_{Di}^2 \bar{V}_i^2 S_v(f) X_i^2(f) \quad (3.65)$$

Donde:

$X_i^2(f)$ : Es el fator de admitancia aerodinámica del cuerpo.

La función de admitancia aerodinámica es una función de forma asociada a a las dimensiones del cuerpo, junto con las características de la turbulencia. La **Figura 19** muestra la variación de la admitancia aerodinámica en función de la frecuencia, según (VICKERY, 1965a), para una placa cuadrada, normal al sentido del flujo, con velocidad media uniforme.

**Figura 19** – Admitancia aerodinámica



Fuente: (VICKERY, 1965b)

Donde, la ecuación de la admitancia aerodinámica es dada por la siguiente ecuación( **3. 66** ) propuesta por (VICKERY, 1965b); en la que considera que presenta una correlación satisfactoria en ensayos de laboratorios para discos y placas planas.

$$X_i^2(f) = \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{2\pi f \sqrt{A_i}}{\bar{V}_i} \right)^{\frac{4}{3}} \right]^2} \quad (3. 66)$$

Donde  $A_i$  es el área de impacto de viento, multiplicando por este factor a la ecuación ( **3. 44** ) tenemos la siguiente expresión:

$$S_{F_i F_j}(f) = \rho^2 A_i C_{D_i} A_j C_{D_j} \bar{V}_i \bar{V}_j S_{V_i V_j}(f) X_i X_j \quad (3. 67)$$

### 3.3.10 Determinación de fuerzas estáticas equivalente

Fue visto anteriormente que la estructura responde a la parte fluctuante de la velocidad del viento, vibrando en sus modos naturales. En general las fuerzas estáticas  $F_r$  que provocan una deformación igual a la máxima deformación correspondiente al modo r de vibración dada por:

$$\vec{F}_r = g \sigma_{nr} K \vec{\phi}_r \quad (3. 68)$$

Donde  $\vec{\phi}_r$ , satisface el problema lineal de autovalores:

$$K \vec{\phi}_r = \omega_r^2 M \vec{\phi}_r \quad (3. 69)$$

Por lo que la ecuación ( **3. 68** ) puede ser rescrita por la siguiente ecuación:

$$\vec{F}_r = g \sigma_{nr} \omega_r^2 M \vec{\phi}_r \quad (3.70)$$

Asumiendo que  $M$  es diagonal tenemos:

$$\hat{F}_{ir} = g \sigma_{nr} \omega_r^2 m_i \vec{\phi}_{ir} \quad (3.71)$$

Con la finalidad de simplificar la notación, a continuación, se omite el índice  $r$ , recordando que los resultados son aplicados a un modo cualquiera, se puede reescribir la carga equivalente  $\hat{F}_i$  que actúa en correspondencia a la coordenada  $i$  por la siguiente expresión:

$$\hat{F}_i = (g \sigma_n \omega^2) m_i \phi_i \quad (3.72)$$

Luego, multiplicando por la masa arbitraria de referencia a la ecuación (3.71) y dividiendo para la misma tenemos:

$$\hat{F}_i = (g m_0 \sigma_n \omega^2) \frac{m_i}{m_0} \phi_i \quad (3.73)$$

$m_0$  representa la masa arbitraria de referencia, la parte representada entre paréntesis corresponde a un coeficiente con dimensión de fuerza / metros, depende de las características de la turbulencia del perfil vertical de velocidad media, de las dimensiones y de las propiedades de la estructura.

Combinando las ecuaciones (3.45) y (3.48) con (3.67) se obtiene la siguiente ecuación:

$$E(\eta^2) = \int_0^\infty |H(f)|^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{m_r^2} \rho^2 A_i A_j C_{Di} C_{Dj} \bar{V}_i \bar{V}_j X_i X_j S_{ViVj} df \quad (3.74)$$

Se puede reescribir la ecuación anterior considerando la ecuación (3.57)

$$E(\eta^2) = \bar{q}_0^2 A_T^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{m_r^2} \left[ 4 \int_0^\infty |H(f)|^2 \left( \frac{S_v}{V_0^2} \right) R(\Delta y, \Delta z, f) X_i(f) X_j(f) df \right] \quad (3.75)$$

$$E(\eta^2) = \bar{q}_0^2 A_T^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\phi_{ir} \phi_{jr}}{m_r^2} \beta_i \beta_j \gamma_{ij}^2 \quad (3.76)$$

Donde  $\bar{q}_0$  es la presión media a la altura de referencia  $z_0$ ,  $A_T$  es el área total expuesta,  $\beta_i$  y  $\beta_j$  son factores adimensionales conforme mostrado en las siguientes expresiones.

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{2} \rho \bar{V}_p^2 \quad (3.77)$$

$$\beta_i = \frac{A_i C_{Di} \bar{V}_i}{A_T \bar{V}_0} \quad (3.78)$$

$$\beta_j = \frac{A_j C_{Dj} \bar{V}_j}{A_T \bar{V}_0} \quad (3.79)$$

Seguidamente:

$$\gamma_{ij}^2 = \left[ 4 \int_0^\infty |H(f)|^2 \left( \frac{S_v}{V_0^2} \right) R(\Delta y, \Delta z, f) X_i(f) X_j(f) df \right] \quad (3.80)$$

Conocido el valor de  $E(\eta^2)$  es posible obtener el desvío padrón de  $\eta$  dado por:

$$\sigma_\eta = \sqrt{E[n^2]} \quad (3.81)$$

Introduciendo este valor en ( 3. 53 ), se obtiene el vector de desplazamientos máximos correspondientes al modo considerado. La ecuación ( 3. 72 ) permite determinar la carga estática equivalente en el elemento i.

### 3.4 Modelo discreto simplificado (NBR:6123)

Para el método simplificado la fuerza estática es dada por la siguiente ecuación con los parámetros p y b definidos en función de la categoría presentada en la **Tabla 2** para el tiempo de  $t = 600s$ .

$$\bar{F}_i = \bar{q}_0 b^2 A_i C_{ai} \left( \frac{z_i}{z_{10}} \right)^{2p} \quad (3.82)$$

En la parte dinámica, se asume las siguientes condiciones: para la ecuación ( 3. 75 ): que el producto de  $[R(\Delta y, \Delta z, f) X_i(f) X_j(f)]$  no varíe en las posiciones  $i$  y  $j$ , por consiguiente permite adoptar y sustituir el producto de las influencia de la posición por un producto del valor medio, conforme mostrado en la siguiente ecuación:

$$E(\eta^2) = \bar{q}_0^2 A_T^2 \left( \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i}{M} \beta_i \right)^2 \gamma^2 \quad (3.83)$$

Donde:

$$\gamma^2 = \left[ 4 \int_0^\infty |H(f)|^2 \left( \frac{S_v}{V_0^2} \right) [R(\Delta y, \Delta z, f) X_i(f) X_j(f)]_{medio} df \right] \quad (3.84)$$

Por lo tanto, el desvío padrón es:

$$\sigma_\eta = \sqrt{E[n^2]} = \bar{q} A_T \frac{\sum_{i=1}^N \phi_i \beta_i}{M} \gamma \quad (3.85)$$

Donde:

$$M = \{\phi_r^T\} [M] \{\phi_r\} \quad (3.86)$$

Siendo la matriz  $[M]$  diagonal, tenemos la siguiente expresión:

$$M = \sum_{i=1}^n \phi_i^2 m_i \quad (3.87)$$

Substituyendo (3.87) en (3.85) tenemos:

$$\sigma_\eta = \bar{q} A_T \frac{\sum_{i=1}^N \phi_i \beta_i}{\sum_{i=1}^n \phi_i^2 m_i} \gamma \quad (3.88)$$

Remplazando ecuación (3.88) e la ecuación en la ecuación (3.73) tenemos la siguiente expresión:

$$\hat{F}_i = \bar{q} A_T \frac{\sum_{i=1}^N \phi_i \beta_i}{\sum_{i=1}^n \phi_i^2 \psi_i} \psi_i \phi_i (g \omega^2 \gamma) = \bar{q} A_T \frac{\sum_{i=1}^N \phi_i \beta_i}{\sum_{i=1}^n \phi_i^2 \psi_i} \psi_i \phi_i \xi \quad (3.89)$$

Donde:

$$\psi_i = \frac{m_i}{m_0} \quad (3.90)$$

Finalmente tenemos la ecuación:

$$\hat{F}_i = F' \psi_i \phi_i \quad (3.91)$$

Donde:

$$F' = \bar{q} A_T \frac{\sum_{i=1}^N \phi_i \beta_i}{\sum_{i=1}^n \phi_i^2 \psi_i} \xi \quad (3.92)$$

$$\xi = g \omega^2 \gamma \quad (3.93)$$

Siendo  $\hat{F}_i$  la fuerza estática equivalente en la coordenada para el modo considerado y  $\xi$  es el coeficiente de amplificación dinámica a partir de la ecuación (3.84). El coeficiente de ampliación dinámica para el método simplificado del modelo discreto se obtiene manualmente a partir de las figuras: **Figura 4** a **Figura 8** dependiendo de la categoría requerida.

Con el fin de facilitar la programación del código en MATLAB® y automatizar la obtención de este parámetro  $\xi$ , (DAVIES, F S.; GÓMEZ ARAÚJO, 2020) por el método de los mínimos cuadrados ajustaron las 60 curvas existentes entre la **Figura 4** a **Figura 8**, las ecuaciones se presentan en código MATLAB® Anexo A. Las ecuaciones facilitan el proceso de interpolación en siguientes casos:

- a) Donde  $l_1/h \geq 0.2$  y la altura de la edificación  $h$  es diferente de: 25 m, 100 m y 300m. Para  $x$  de la ecuación (3.94), en términos generales el procedimiento consiste en evaluar  $x$  para las tres curvas, considerando la categoría y razón de amortiguamiento, las variables pertenecientes a  $x$  fueron definidas en la descripción de la **Figura 4**. De esta manera se obtiene los pares ordenados presentados en la **Tabla 3**. Donde  $h_c[m]$  es la altura perteneciente a la curva  $\xi_c[-]$ . Por el método de los mínimos cuadrados se obtiene la función cuadrática  $\xi(h) = ah^2 + bh + c$ , los parámetros  $a, b, c$  serán ajustados en función de los datos obtenidos en la

**Tabla 3.** Finalmente se obtiene el coeficiente de amplificación mecánica  $\xi = \xi(h)$ .

$$x = \frac{\bar{V}_p}{f_j L} \quad (3.94)$$

**Tabla 3** – Pares ordenados para la interpolación en función de  $h$

$h_c (m)$	25	100	300
$\xi_c (-)$	$\xi_{12}(x)$	$\xi_{100}(x)$	$\xi_{300}(x)$

- b) Donde  $0 < l_1/h < 0.2$  y la altura de la edificación  $h$  es diferente de: 25 m, 100 m y 300m. En este caso se realiza la misma operación presentado en el ítem a) considerando las figuras:  $l_1/h = 0$  y  $l_1/h \geq 0.2$ . Se obtiene dos funciones cuadráticas  $\xi_0(h) = a_1 h^2 + b_1 h + c_1$  y  $\xi_{0.2}(h) = a_2 h^2 + b_2 h + c_2$ , se evalúa las funciones para la altura de la edificación, y se organiza la **Tabla 4**. Por el método de mínimos cuadrados se obtiene la función lineal  $\xi(x) = ax + b$ , finalmente se evalúa en  $x$ , para encontrar el coeficiente de amplitud mecánica  $\xi = \xi(x)$ . Es importante destacar que la definición de  $x$  y demás parámetros se encuentra en la descripción realizada para las figuras **Figura 4** a **Figura 8**.

**Tabla 4** – Pares ordenados para la interpolación en función de  $x$

$x[-]$	0.0	0.2
$\xi_c (-)$	$\xi_0(h)$	$\xi_{0.2}(h)$



## 4 EJEMPLO DE APLICACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

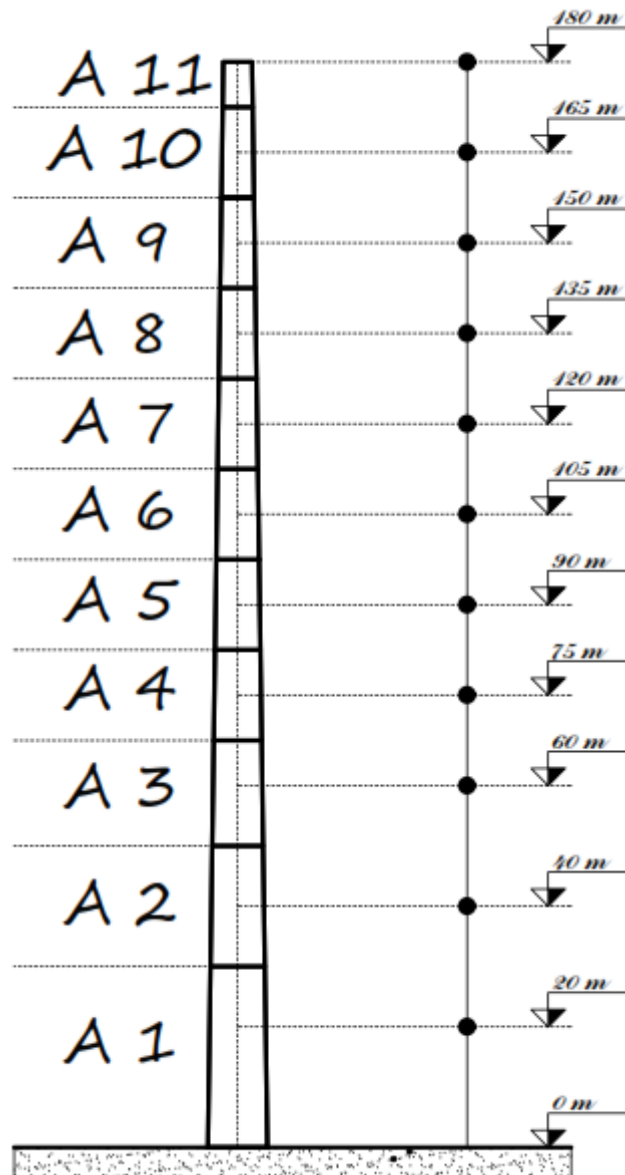
Se resuelve dos ejemplos de aplicación partiendo del ejemplo propuesto en norma: tanto para el método simplificado del modelo discreto como para el modelo discreto-completo. Se analizará una chimenea de concreto para la categoría III.

### 4.1 Ejemplo 1

Se determina la acción dinámica del viento en dirección de la velocidad media para una chimenea con las características presentadas en la **Tabla 5**, esquematizado en la **Figura 20**:

Con frecuencia fundamental  $f_1 = 0.26 \text{ Hz}$ , con la forma del modo fundamental de vibración  $\phi_1$  mostrado en **Tabla 5**, la razón de amortiguamiento  $\xi = 0.01$ , el coeficiente de arrastre  $C_a = 0.60$ , rugosidad  $z_0 = 0.3 \text{ m}$ ,  $V_0 = 39.4 \text{ m/s}$ ,  $S_1 = 1.00$ ,  $S_3 = 1.00$ ,  $m_0 = 10^6 \text{ kg}$ ,. Solucione por el método simplificado del modelo discreto.

**Figura 20** – Esquema de la chimenea y el modelo dinámico discreto



Fuente: Adaptado de (ABNT NBR 6123, 2013)

**Tabla 5** – Propiedades del modelo adoptado

$Z_i [m]$	$m_i [kg]$	$A_i [kg]$	$C_i [-]$	$\phi_i [-]$
180	70900	36.3	0.60	1.00
165	146200	76.4	0.60	0.83
150	153700	81.6	0.60	0.68
135	163100	86.9	0.60	0.56
120	174400	93.0	0.60	0.46
105	19500	99.9	0.60	0.36
90	232500	107.2	0.60	0.28
75	292500	114.0	0.60	0.20
60	463800	141.4	0.60	0.14
40	750000	173.2	0.60	0.07

20	1254000	282.5	0.60	0.03
----	---------	-------	------	------

Fuente: (ABNT NBR 6123, 2013)

#### 4.1.1 Solución método simplificado del modelo discreto y análisis

Se realizó el código en el software MATLAB® **Anexo A**, considerando las ecuaciones mostradas anteriormente para el contexto del método simplificado. Es importante mencionar: para el método simplificado del modelo discreto; la velocidad media del proyecto  $\bar{V}_p$  se obtiene a partir de la ecuación ( 3. 1 ) en función de los parámetros presentados en la **Tabla 1** para el tiempo  $t = 600s$ . En ese sentido para la categoría III se presentan los resultados obtenidos a través del código. En la **Tabla 6** se presenta los resultados para: la velocidad media del proyecto, presión media del proyecto  $\bar{q}_0$  ecuación ( 3. 77 ) y el coeficiente de amplitud dinámica  $\xi$ , para efectos de comparación también se presenta los resultados del ejemplo de la norma (ABNT NBR 6123, 2013)

**Tabla 6** – Resultados de:  $\bar{V}_p, \bar{q}_0, \xi$ .

Resultados	Norma	Código MATLAB®	%_Diferencia
$\bar{V}_p [m / s]$	27.20	27.20	0.00
$\bar{q}_0 [N / m^2]$	453.52	453.06	0.10
$\xi [-]$	1.43	1.40	2.10

Fuente: (ABNT NBR 6123, 2013), Código MATLAB®

Dentro de la solución por el método discreto simplificado presentado en la **Tabla 6**, se observa una diferencia de 2.10% en resultado del coeficiente de amplitud dinámica  $\xi$ , esto se debe a que en cierto modo las curvas fueron obtenidos de forma manual, por lo tanto la posibilidad de la existencia de errores sistemáticos asociados: al software utilizado para la colección de puntos, al redondeo de parámetros calculados en la ejecución del método de los mínimos cuadrados, a la perspectiva del observador en la definición de puntos, etc. Entre tanto, esta diferencia influye muy poco en el resultado final del análisis dinámico conforme se verá más adelante.

En la **Tabla 7** se muestran los resultados de la norma y los resultados obtenidos para el modelo discreto simplificado, los resultados corresponden a: las fuerzas

medias estáticas FH1, fuerzas fluctuantes FH1 y las fuerzas totales FH\_T. Cuya influencia son ejercidas a lo largo de los 11 nodos mostrados en la **Figura 20** a partir del primer modo fundamental de vibración  $\phi_1$ . La parte estática FH1 se obtuvo a través de la ecuación ( 3. 82 ) y la parte fluctuante a través de la ecuación ( 3. 89 ).

**Tabla 7** – Resultados de la norma y el modelo discreto simplificado.

mod i	zi[m]	FH1	FH2	FH_T	FH1	FH2	FH_T	Diferencia
[-]	[m]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[%]
1	180	21.29	<b>30.27</b>	51.56	21.26	<b>29.68</b>	50.95	2
2	165	43.38	<b>51.81</b>	95.19	43.34	<b>50.80</b>	94.14	2
3	150	44.73	<b>44.63</b>	89.36	44.68	<b>43.76</b>	88.44	2
4	135	45.81	<b>39.00</b>	84.81	45.77	<b>38.24</b>	84.01	2
5	120	46.94	<b>34.26</b>	81.20	46.89	<b>33.59</b>	80.48	2
6	105	47.99	<b>29.98</b>	77.97	47.94	<b>29.39</b>	77.33	2
7	90	48.64	<b>27.80</b>	76.44	48.59	<b>27.26</b>	75.85	2
8	75	48.35	<b>24.98</b>	73.33	48.30	<b>24.49</b>	72.80	2
9	60	55.22	<b>27.73</b>	82.95	55.17	<b>27.19</b>	82.35	2
10	40	58.22	<b>22.42</b>	80.64	58.16	<b>21.98</b>	80.14	2
11	20	73.47	<b>16.06</b>	89.53	73.40	<b>15.75</b>	89.15	2
Resultados Norma				Discreto simplificado				

Fuente: (ABNT NBR 6123, 2013), Código MATLAB®

En la **Tabla 7** columna *FH2* (resultados de la norma), comparando con la columna *FH2* (discreto simplificado), pertenecientes a la parte fluctuante, se observa resultados con diferencia constante de 2%, demostrando, que la pequeña discrepancia a raíz del coeficiente de amplitud dinámica  $\xi$  mostrado en la **Tabla 6** influye muy poco en el resultado final. Demostrando que el código realizado en el presente trabajo, mostrado en el **anexo A** funciona correctamente. Es importante mencionar que el código está programado para la obtención de respuestas para todas las cinco categorías de la norma brasilera, siempre y cuando sea ingresado correctamente los parámetros conforme exige la norma.

#### 4.1.2 Solución modelo discreto completo

Se re realiza el código considerando las ecuaciones propuestas para el método de solución del modelo discreto, a continuación, se presentan algunos resultados importantes. Antes de todo, se debe mencionar que el código MATLAB® realizado

para la solución del modelo discreto completo no será anexado en presente trabajo, dado que se pretende publicar en trabajos futuros.

Dado que la estructura supera los 80 m de altura es necesario a través de iteraciones sucesivas calcular el tiempo  $t$  para la velocidad media como también para la obtención de los parámetros meteorológicos  $b$ ,  $p$  a través de las ecuaciones ( 3. 3 )( 3. 4 )( 3. 5 ). Los resultados se presentan en el la **Tabla 8**.

**Tabla 8** – Resultados: tiempo para la velocidad media y parámetros meteorológicos

Resultados	Código
$t[s]$	28.8200
$b[-]$	0.9112
$p[-]$	0.1388

Fuente: Código MATLAB®

A partir de los resultados presentados en la **Tabla 8** se destaca la importancia de calcular los parámetros meteorológicos una vez que la edificación supere la altura de 80 metros de altura. En este punto, para la verificación, la norma recomienda a partir del tiempo encontrado, 28.82 s en el presente caso. En la **Tabla 1** se debe buscar el intervalo de tiempo cerrado; entonces los parámetros encontrados tienen que localizarse entre los resultados pertenecientes a la columna de tiempo  $t=20s$  y la columna de tiempo  $t = 30s$  dentro de la categoría III, lo cual verifica.

Con la finalidad de comparar resultados, en la **Tabla 9** se presentan resultados obtenidos por el método discreto simplificado y por método discreto completo. La fuerza media estática FH1 se calculó a través de la ecuación ( 3. 63 ) mientras que la parte dinámica FH2 fue obtenida a través de la ecuación completa ( 3. 70 ).

**Tabla 9** – Fuerza obtenidas por el método discreto: simplificado y completo

Nod i	zi[m]	FH1	FH2	FH_T	FH1	FH2	FH_T	Diferencia
[-]	[m]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[%]
1	180	21.26	<b>29.68</b>	50.95	21.25	<b>35.49</b>	56.75	<b>16.4</b>
2	165	43.34	<b>50.80</b>	94.14	43.31	<b>60.75</b>	104.06	<b>16.4</b>
3	150	44.68	<b>43.76</b>	88.44	44.66	<b>52.32</b>	96.98	<b>16.4</b>
4	135	45.77	<b>38.24</b>	84.01	45.74	<b>45.72</b>	91.46	<b>16.4</b>
5	120	46.89	<b>33.59</b>	80.48	46.86	<b>40.16</b>	87.02	<b>16.4</b>
6	105	47.94	<b>29.39</b>	77.33	47.91	<b>35.14</b>	83.06	<b>16.4</b>
7	90	48.59	<b>27.26</b>	75.85	48.56	<b>32.59</b>	81.15	<b>16.4</b>
8	75	48.30	<b>24.49</b>	72.80	48.28	<b>29.29</b>	77.56	<b>16.4</b>
9	60	55.17	<b>27.19</b>	82.35	55.13	<b>32.51</b>	87.64	<b>16.4</b>
10	40	58.16	<b>21.98</b>	80.14	58.12	<b>26.28</b>	84.41	<b>16.4</b>
11	20	73.40	<b>15.75</b>	89.15	73.36	<b>18.83</b>	92.19	<b>16.4</b>
		Discreto Simplificado			Discreto Completo			

Fuente: Código MATLAB®

En la **Tabla 9** se presentan los resultados del método discreto: simplificado y completo; comparando los resultados de la parte dinámica, columna  $FH2$ , en términos porcentuales, se observa una diferencia constante de 16.4%, esto se puede atribuir a que, en el modelo simplificado, una parte de la ecuación (3.83), la parte de influencia de la posición es substituida por un valor medio, reduciendo así la ecuación a una sola integral, mientras que para el caso contrario dado la ecuación (3.80), el número de integrales es igual a  $N \times N$  veces el grados de libertad. Para 11 grados de libertad, caso del ejemplo 2, se tiene que realizar 121 integrales, dado que se considera las posiciones  $i$  y  $j$ .

## 4.2 Ejemplo 2

Monte la matriz de masa diagonal  $[M]$  a partir de los datos presentados en la **Tabla 5**, dado la matriz de rigidez  $[K]$  para  $k = 27000000 N/m$ , calcule: los 11 modos de vibración, las frecuencias asociadas a los modos, luego realice el análisis dinámico para los dos métodos. Razón de amortiguamiento  $\xi = 0.01$ , coeficiente de arrastre  $C_a = 0.60$ , rugosidad  $z_0 = 0.3m$ ,  $V_0 = 39.4 m/s$ ,  $S_1 = 1.00$ ,  $S_3 = 1.00$ ,  $m_0 = 10^6 kg$  para edificación presentada en el esquema de la **Figura 20**.

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 2k \end{bmatrix}$$

#### 4.2.1 Solución método simplificado del modelo discreto

En las tablas: **Tabla 10** y **Tabla 11** se muestran las frecuencias y los modos de vibración asociados, se obtuvo a través de cálculo de autovalores y auto vectores a partir de matriz de rigidez  $[K]$  y la matriz de masa  $[M]$ .

**Tabla 10** – Resultados, frecuencias naturales asociados a los modos de vibración

Modo	$F_n$ [Hz]
1	0.26
2	0.59
3	0.96
4	1.29
5	1.64
6	2.01
7	2.45
8	2.90
9	3.34
10	3.78
11	4.24

Fuente: Código MATLAB®

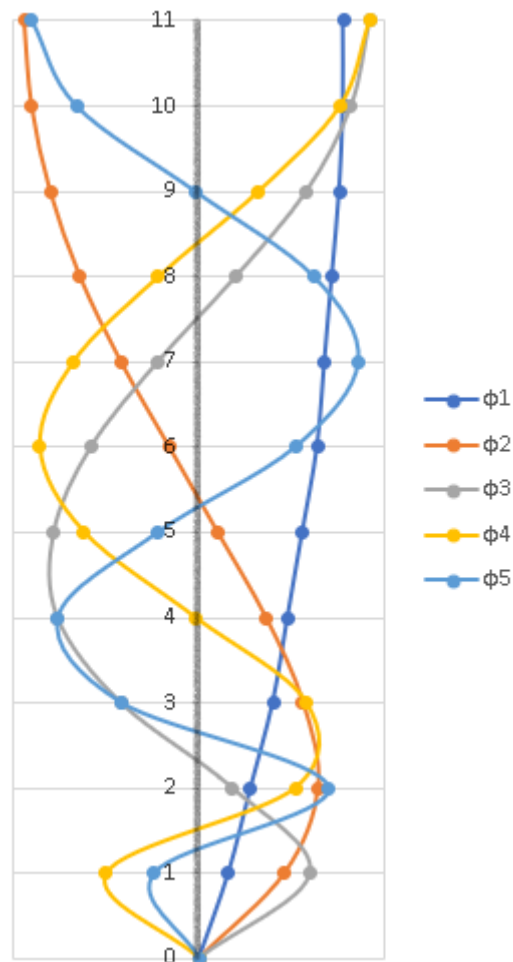
En las tabla: **Tabla 11**, **Tabla 12** y **Tabla 13** se muestra los resultados de los modos de vibración, las fuerzas modales y finalmente los resultados de todas las contribuciones modales, seguidamente en la **Figura 21** se presenta los grafico pertenecientes a los cinco primeros modos de vibración.

**Tabla 11** – Resultados de los 11 modos de vibración

$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_4$	$\phi_5$	$\phi_6$	$\phi_7$	$\phi_8$	$\phi_9$	$\phi_{10}$	$\phi_{11}$
0.39	-0.47	0.46	0.46	-0.45	0.46	0.47	-0.46	-0.48	0.49	0.67
0.39	-0.45	0.41	0.38	-0.33	0.27	0.18	-0.06	0.08	-0.24	-0.58
0.38	-0.40	0.29	0.16	-0.01	-0.16	-0.34	0.45	0.45	-0.24	0.39
0.36	-0.32	0.10	-0.11	0.31	-0.44	-0.40	0.11	-0.30	0.53	-0.21
0.34	-0.21	-0.11	-0.34	0.43	-0.30	0.12	-0.45	-0.25	-0.51	0.10
0.32	-0.08	-0.29	-0.43	0.26	0.15	0.45	-0.05	0.51	0.30	-0.03
0.28	0.05	-0.39	-0.31	-0.11	0.43	0.01	0.47	-0.36	-0.11	0.01
0.24	0.18	-0.38	-0.01	-0.38	0.12	-0.45	-0.36	0.14	0.03	0.00
0.20	0.28	-0.21	0.29	-0.21	-0.39	0.24	0.10	-0.03	0.00	0.00
0.14	0.32	0.09	0.26	0.35	0.18	-0.05	-0.01	0.00	0.00	0.00
0.08	0.23	0.30	-0.25	-0.12	-0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00

Fuente: Código MATLAB®

**Figura 21** – Grafico para los cinco primeros modos de vibración.



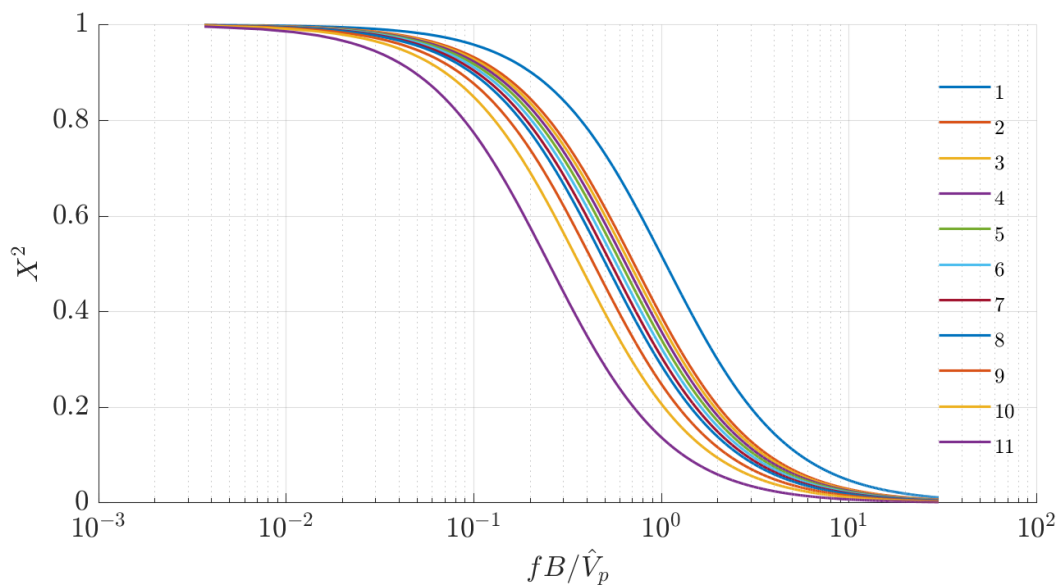


Fuente: Código MATLAB®

Dado que el planteamiento del ejemplo 2 se trata de la misma estructura del ejercicio 1, con parámetros idénticos, con la diferencia de que este cuenta con las matrices de masa y rigidez. Por lo tanto: los resultados para el tiempo y parámetros meteorológicos a son los mismos resultados obtenidos anteriormente en la **Tabla 8**.

En la **Figura 22** se muestra la admitancia aerodinámica obtenidas a través de ecuación ( 3. 66 ) para todos los 11 nodos mostrados en esquema de la **Figura 20**.

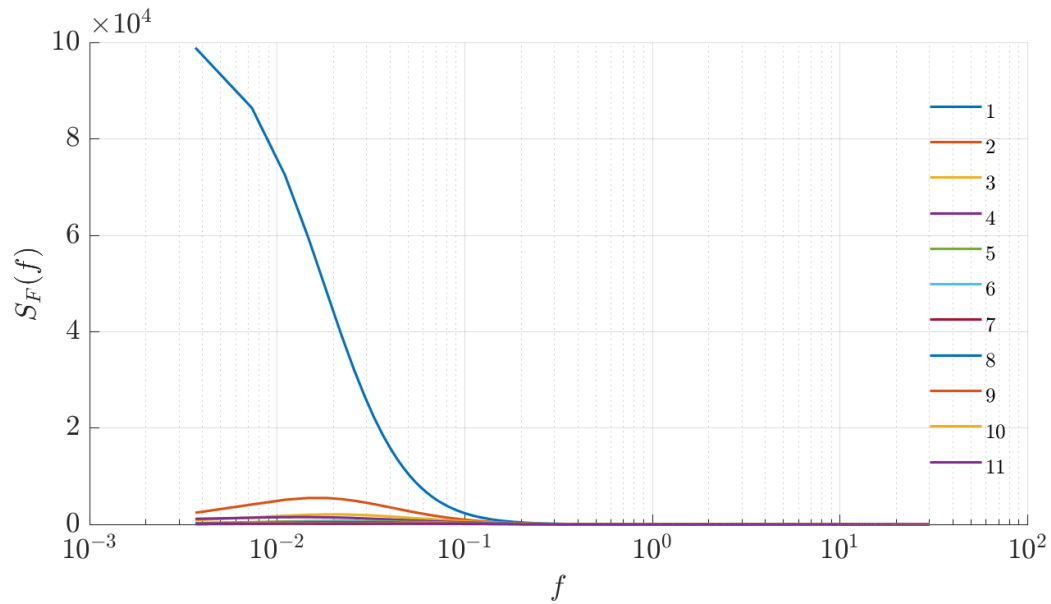
**Figura 22** – Admitancia aerodinámica



Fuente: Código MATLAB®

En la **Figura 23** se presenta los espectros de las fuerzas, se puede ver las contribuciones de los 11 modos de vibraciones. Es obtenida a través de la ecuación ( 3. 67 )

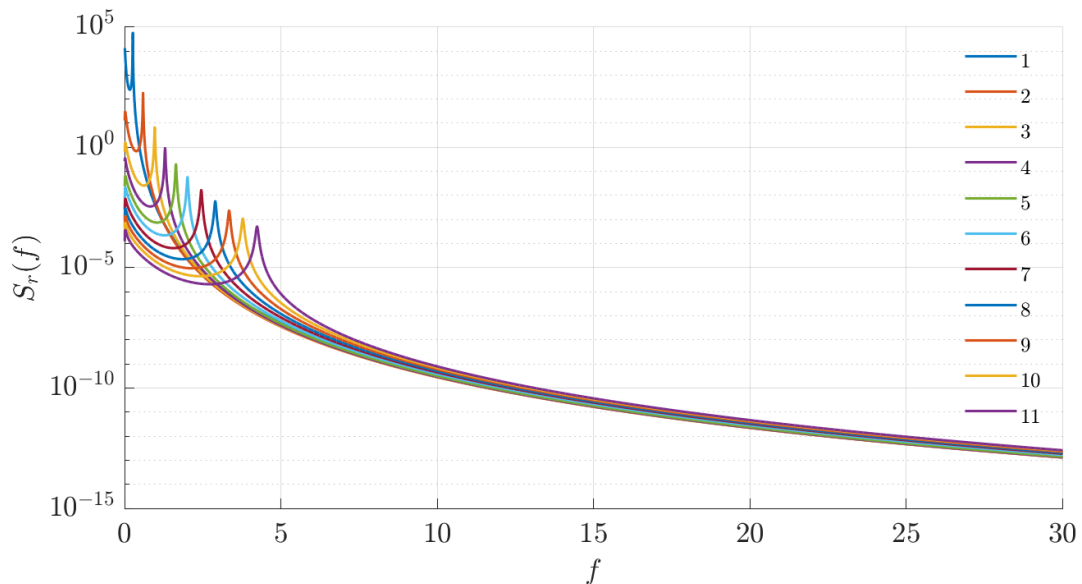
**Figura 23** – Espectro de la fuerza de los modos



Fuente: Código MATLAB®

En la **Figura 24** se muestra los espectros de respuestas, para los 11 modos de vibración respectivamente. Se obtiene a través de la ecuación (3.46).

**Figura 24** – Espectro de respuesta de los modos



Fuente: Código MATLAB®

Es importante recordar que en la **Figura 14** se mostró el enfoque a seguir recomendado por Davenport, por lo que es necesario mostrar algunos de los aspectos

mostrados en la figura citada, en este caso, ajustados al modelo mostrado en la **Figura 20**. Por lo tanto: en la **Figura 22** se muestra la admitancia aerodinámica, en la **Figura 23** se muestra los espectros de las fuerzas modales y en la **Figura 24** se muestra el espectro de la respuesta. Dentro de este contexto es importante analizar detenidamente la **Figura 23**, donde se muestra la contribución de fuerzas asociadas a las frecuencias naturales y modos de vibración correspondientes. Dicho esto, el primer modo de vibración es el modo que contribuye con mayor fuerza modal con relación a los 10 restantes, hecho que se puede mostrar numéricamente en la **Tabla 12** presentada a continuación.

**Tabla 12 – Resultado de las fuerzas modales**

zi	F $\phi_1$	F $\phi_2$	F $\phi_3$	F $\phi_4$	F $\phi_5$	F $\phi_6$	F $\phi_7$	F $\phi_8$	F $\phi_9$	F $\phi_{10}$	F $\phi_{11}$
[m]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
180	19.08	-0.27	0.63	1.39	-0.25	0.07	0.08	-0.01	-0.05	0.03	0.00
165	39.06	-0.54	1.18	2.37	-0.38	0.08	0.06	0.00	0.02	-0.03	0.00
150	40.16	-0.51	0.86	1.08	-0.01	-0.05	-0.12	0.03	0.10	-0.04	0.00
135	41.00	-0.43	0.32	-0.79	0.40	-0.15	-0.15	0.01	-0.07	0.09	0.00
120	41.39	-0.30	-0.36	-2.57	0.60	-0.11	0.05	-0.03	-0.06	-0.09	0.00
105	42.73	-0.14	-1.10	-3.58	0.40	0.06	0.20	0.00	0.15	0.06	0.00
90	45.70	0.10	-1.79	-3.07	-0.21	0.20	0.01	0.04	-0.12	-0.03	0.00
75	49.56	0.43	-2.15	-0.16	-0.89	0.07	-0.30	-0.04	0.06	0.01	0.00
60	63.68	1.07	-1.90	5.79	-0.77	-0.37	0.26	0.02	-0.02	0.00	0.00
40	74.05	1.96	1.31	8.52	2.05	0.27	-0.09	0.00	0.00	0.00	0.00
20	66.08	2.40	7.29	-13.32	-1.17	-0.08	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00

**Tabla 13 - Resultado de las combinaciones de las contribuciones modales**

zi	F $\phi_1$	F $\phi_2$	F $\phi_3$	F $\phi_4$	F $\phi_5$	F $\phi_6$	F $\phi_7$	F $\phi_8$	F $\phi_9$	F $\phi_{10}$	F $\phi_{11}$
[m]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
180	19.08	19.08	19.09	19.14	19.14	19.14	19.14	19.14	19.14	19.14	19.14
165	39.06	39.06	39.08	39.15	39.15	39.15	39.15	39.15	39.15	39.15	39.15
150	40.16	40.16	40.17	40.19	40.19	40.19	40.19	40.19	40.19	40.19	40.19
135	41.00	41.00	41.00	41.01	41.01	41.01	41.01	41.01	41.01	41.01	41.01
120	41.39	41.39	41.39	41.47	41.48	41.48	41.48	41.48	41.48	41.48	41.48
105	42.73	42.73	42.74	42.89	42.89	42.89	42.89	42.89	42.89	42.89	42.89
90	45.70	45.70	45.74	45.84	45.84	45.84	45.84	45.84	45.84	45.84	45.84
75	49.56	49.56	49.61	49.61	49.62	49.62	49.62	49.62	49.62	49.62	49.62
60	63.68	63.69	63.71	63.98	63.98	63.98	63.98	63.98	63.98	63.98	63.98
40	74.05	74.07	74.08	74.57	74.60	74.60	74.60	74.60	74.60	74.60	74.60
20	66.08	66.13	66.53	67.85	67.86	67.86	67.86	67.86	67.86	67.86	67.86

#### 4.2.1 Solución modelo discreto completo

En las tablas: **Tabla 14** y **Tabla 15** se presentan las fuerzas modales y los resultados de todas las contribuciones modales.

**Tabla 14** – Resultado de las fuerzas modales

zi	F $\Phi_1$	F $\Phi_2$	F $\Phi_3$	F $\Phi_4$	F $\Phi_5$	F $\Phi_6$	F $\Phi_7$	F $\Phi_8$	F $\Phi_9$	F $\Phi_{10}$	F $\Phi_{11}$
[m]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
180	19.93	-7.65	5.09	4.17	-3.50	3.53	3.45	-3.27	-3.34	3.44	4.94
165	40.81	-15.20	9.48	7.10	-5.20	4.23	2.68	-0.87	1.09	-3.41	-8.76
150	41.96	-14.20	6.94	3.23	-0.21	-2.60	-5.47	6.91	6.80	-3.67	6.20
135	42.84	-12.00	2.61	-2.36	5.50	-7.73	-6.76	1.78	-4.91	8.53	-3.60
120	43.24	-8.49	-2.91	-7.71	8.22	-5.61	2.10	-7.84	-4.23	-8.67	1.73
105	44.64	-3.81	-8.86	-10.73	5.50	3.15	9.19	-0.88	9.88	5.74	-0.67
90	47.75	2.70	-14.45	-9.21	-2.87	10.67	0.33	10.87	-8.34	-2.62	0.21
75	51.78	12.09	-17.35	-0.48	-12.17	3.67	-13.80	-10.41	4.04	0.83	-0.05
60	66.53	30.13	-15.29	17.38	-10.65	-19.70	11.81	4.64	-1.17	-0.17	0.01
40	77.36	54.97	10.57	25.56	28.19	14.18	-4.26	-1.05	0.19	0.02	0.00
20	69.04	67.39	58.72	-39.98	-16.06	-4.38	0.79	0.13	-0.02	0.00	0.00

Fuente: Código MATLAB®

**Tabla 15** – Resultado de las combinaciones de las contribuciones modales

zi	F $\Phi_1$	F $\Phi_2$	F $\Phi_3$	F $\Phi_4$	F $\Phi_5$	F $\Phi_6$	F $\Phi_7$	F $\Phi_8$	F $\Phi_9$	F $\Phi_{10}$	F $\Phi_{11}$
[m]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
180	19.93	21.35	21.95	22.34	22.61	22.88	23.14	23.37	23.61	23.86	24.37
165	40.81	43.55	44.57	45.13	45.43	45.62	45.70	45.71	45.72	45.85	46.68
150	41.96	44.30	44.84	44.95	44.95	45.03	45.36	45.88	46.38	46.53	46.94
135	42.84	44.49	44.56	44.62	44.96	45.62	46.12	46.15	46.41	47.19	47.33
120	43.24	44.07	44.17	44.83	45.58	45.92	45.97	46.64	46.83	47.62	47.66
105	44.64	44.80	45.67	46.91	47.23	47.34	48.22	48.23	49.23	49.56	49.57
90	47.75	47.83	49.96	50.80	50.88	51.99	51.99	53.12	53.77	53.83	53.83
75	51.78	53.17	55.93	55.93	57.24	57.36	58.99	59.91	60.04	60.05	60.05
60	66.53	73.03	74.61	76.61	77.35	79.82	80.69	80.82	80.83	80.83	80.83
40	77.36	94.90	95.49	98.85	102.79	103.76	103.85	103.86	103.86	103.86	103.86
20	69.04	96.48	112.94	119.81	120.88	120.96	120.96	120.96	120.96	120.96	120.96

Fuente: Código MATLAB®

Sobre los resultados mostrados en la tabla: **Tabla 13** y **Tabla 15**, se puede apreciar la importancia de tener en cuenta las contribuciones de más de un modo, como también el tener en cuenta la diferencia de resultados entre las soluciones del modelo discreto simplificado y el modelo discreto completo, tal es el caso mostrado en la solución por el método discreto completo **Tabla 15**, se puede observar aparente convergencia a partir de la contribución del modo 8, y, muestra diferencias

significativas al comparar solamente con la contribución del modo 1, como fue el caso realizado para el ejemplo 1.

Por otro lado para la modelo simplificado **Tabla 14** no se aprecia diferencias significativas en relación a las contribuciones de los demás modos, sin embargo se puede observar la convergencia en el cuarto modo, seguidamente comparando la contribución del primer modo con el cuarto modo se puede apreciar pequeñas diferencias, por lo que una vez más muestra real importancia de un abordaje a través del método del modelo discreto completo, cuyas dudas dieron inicio al planteamiento del presente trabajo de TCC, partiendo del principio de que antiguamente para realizar un proyecto por el método discreto completo implicaba tener acceso a un computador con alta capacidad computacional; por lo que tornaba un proceso inviable desde el punto de vista económico. Ya en la actualidad ése no es el caso, el acceso a computadores es cotidiano, como también muchos softwares son accesibles y están disponible en el mercado, tal es caso de MATLAB® cuya herramienta goza de altísima capacidad en la ejecución de cálculos complejos.

## 5 CONSIDERACIONES FINALES

A partir del presente trabajo, a continuación, se realiza las siguientes consideraciones:

- a) En relación al método del modelo discreto: completo y simplificado.
  - Se ejecutó correctamente el enfoque de la metodología propuesta por Davenport para la determinación de la respuesta inducida por el viento en edificios y estructuras.
  - Se verificó de la importante contribución del primer modo de vibración en el análisis dinámico, lo cual ayudo a esclarecer el funcionamiento de los dos métodos.
  - Se verifico que el proceso de ajuste de curvas, a partir de las gráficas presentados en la norma, son coherentes; pudiendo esta ser utilizado para tener una noción general dentro del proceso de análisis de estructuras a partir de datos fornecidos: la frecuencia fundamental, el primer modo de vibración y la categoría; siempre y cuando el análisis sea para la norma brasilera.
  - A partir de los resultados obtenidos, se muestra la importancia de realizar la metodología del análisis del modelo discreto, teniendo en cuenta de la facilidad de hoy en día para a través de softwares como MATLAB® resolver problemas matemáticos complejos.
- b) En relación al código de MATLAB®
  - Se realizó el código para los dos métodos, importante mencionar que el presente trabajo se anexa el código para el método simplificado, mientras que código del modelo discreto completo se pretende publican en próximos trabajos. El código anexado es limitado exclusivamente para la norma brasileña.
- c) Relación a trabajos futuros en esta línea de investigación se sugiere lo siguiente:
  - Agregar al código, funciones de admitancia aerodinámica ajustados a la geometría de la edificación requerida, dado que en el presente trabajo se adoptó por una función de admitancia genérica.

- Agregar al código, funciones de coeficientes de arrastre para distintas geometrías de edificaciones, en el presente trabajo se consideró un valor constante.
- Estas sugerencias contribuirían a soluciones optimizadas y realistas, visando así un análisis estructural enfocado sobre todo en: economía, seguridad y confort para los usuarios de dicha infraestructura. Cualquier interés en la temática, escribir al correo personal del profesor Iván Darío Gómez [igomez19@gmail.com](mailto:igomez19@gmail.com)

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT NBR 6123. **Forças devidas ao vento em edificações**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2013.

BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G. **Random data: analysis and measurement procedures**. 4. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010.

BRIGHAM, E. O. **The fast Fourier transform and its applications**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1988.

CHOPRA, A. K. **Dinâmica de estruturas**. 4. ed. México: Pearson Educación de México, S.A., 2014.

CIB REPORT. **Actions on Structures Wind Loads**. Rotterdam: International Council for Building Research Studies and Documentation, 1996. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2034804>>. Acesso em: 2 jun. 2023

COHEN, L. The generalization of the Wiener-Khinchin theorem. **ieeexplore.ieee.org**, p. 1–4, 1998.

DAVENPORT, A. G. The spectrum of horizontal gustiness near the ground in high winds. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, v. 87, n. 372, p. 194–211, 1961.

DAVENPORT, A. G. Note on the distribution of the largest value of a random function with application to gust loading. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 28, n. 2, p. 187–196, jun. 1964.

DAVENPORT, A. G. Gust Loading Factors. **Journal of the Structural Division**, v. 93, n. 3, p. 11–34, mar. 1967.

DAVIES, F S.; GÓMEZ ARAÚJO, I. D. **Determinação das equações para o Coeficiente de amplificação dinâmica  $\xi$** . Apostilla Aulas—Foz do Iguaçu: UNILA, 2020.

GALINDEZ, E. E. **Resposta dinâmica de estruturas na direção da velocidade média do vento**. Tese de Mestrado—Porto Alegre: UFRGS, 1979.



GÓMEZ, I. D. **Introdução à Análise Modal Operacional: Teoria e Métodos de Identificação**. Tese de Doutorado—São Carlos: USP, 2015.

HARRIS, R. I. **Measurements of wind structure at heights up to 598 ft above ground level**. , 1968.

HARRIS, R. I. **The nature of the wind**. Seminar on the Modern Design of Wind-Sensitive Structures, London, June 1978. **Anais...**1970.

ISYUMOV, N. Alan G. Davenport's mark on wind engineering. **Elsevier**, p. 1–13, 2012.

KAIMAL, J. C. et al. Spectral characteristics of surface-layer turbulence. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, v. 98, n. 417, p. 563–589, 1972.

KRENK, S. Wind field coherence and dynamic wind forces. **Springer**, p. 269–278, 1996.

MIGUEL, L. F. F. **Estudo teórico e experimental de um edifício alto submetido à ação dinâmica do vento**. Dissertação de Mestrado—Porto Alegre: UFRGS, 2003.

NEWLAND, D. E. **An introduction to random vibrations, spectral & wavelet analysis**. Third Edition. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 2012.

PORTER, P. W. Putting the isopleth in its place. **digitalcommons.morris.umn.edu**, v. 25, n. 1, p. 372–384, 1957.

SOLARI, G. Wind Response Spectrum. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 115, n. 9, p. 2057–2073, set. 1989.

TERRÉS-NÍCOLI, JM; MANS, C. Estudio comparativo de aplicación de la norma EN1991-1-4 para el cálculo de la acción del viento en estructuras singulares. **Elsevier**, v. 65, p. 151–161, 2014.

VICKERY, B. J. **A Model of Atmospheric Turbulence for Studies of Wind Loads in Buildings**. Auckland, N.Z.: Mech., Conf. on Hyd & Fluid, 1965a.

VICKERY, B. J. On the flow behind a coarse grid and its use as a model of atmospheric turbulence in studies related to wind loads on buildings. **cir.nii.ac.jp**, 1965b.

## ANEXO A: Código MATLAB®

%Código MATLAB® para el cálculo del modelo discreto simplificado para la frecuencia fundamental del primer modo de vibración%

```
clear all
clc
close all
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%|DATOS DE ENTRADA|
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Amort=0.01;      %Amortiguamiento      [-]
Fn = 0.26;      %Frecuencia Natural   [Hz]
h=180;          %Altura da edificación [m]
Vo=39.4;        %Velocidad básica      [m/s]
S1=1;          %Factor Topográfico     [-]
S3=1;          %Fatos estadístico      [-]
L1=5;          %Base de la estructura  [Hz]

%Masa del predio en el nodo [kg]
mi=[70900 146200 153700 163100 174400 195000 232500 292500 463800 750000
1254000]';

zi=[180 165 150 135 120 105 90 75 60 40 20]';
%Modo de vibración 1 [-]
ModosN=[1 0.83 0.68 0.56 0.46 0.36 0.28 0.2 0.14 0.07 0.03]';
%Área de incidencia del viento [m^2]
Ai=[36.3 76.4 81.6 86.9 93 99.9 107.2 114 141.4 173.2 282.5]';
Cai=ones(11,1)*0.6; %Vector coeficiente de arrastro [-]
z10=10;             %Altura de referencia 10m [m]
Ao=sum(Ai);         %Área Total [m^2]
mo=1e6;             %Massa arbitraria [kg]
Cat=3;              %Categoria [-]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%|DATOS DE ENTRADA|
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%

phi=mi/mo; %Vector relación: masa predio / masa arbitraria [-]
[p,b,Fr]=ParamPB(Cat); %Definición de par? Metros meteorológicos[-]
Vp=Fr*S1*S3*Vo; %Velocidad característica o de proyecto [m/s]
Bi=Cai.*(Ai/Ao).*(zi/z10).^p; % Calculo parámetro B1 [-]

L=1800; %Dimensión característica para la determinación del
%Coeficiente de amplitud mecánica[m]
qo=0.613*Vp^2; %Calculo de la presión media [kg/m^2]
Fim=qo*b^2.*Cai.*Ai.*(zi/z10).^(2*p)/1000; %Fuerza estática [kN]

for j=1:size(ModosN,2)

f1=Fn(j,1); %Primera frecuencia natural Hz
modoi=ModosN(:,j); %Modo en la posición i

x=Vp/(f1*L); %Punto del dominio para la figura de coeficiente de
% amplificación dinámica [-]
```

---

```

campl(j,1)=FactorAmpl(Cat,h,x,L1,Amort); %Factor de amplificación
                                         %Dianámica [-]
FH=qo*b.^2*Ao*(sum(Bi.*modoi)/sum(phi.*modoi.^2))*campl(j,1);

Fip(:,j)=FH*phi.*modoi/1000; %Fuerza dinámica

end

for j=1:size(ModosN,2)
Fpipt(:,j)=sqrt(sum(Fip(:,1:j).^2,2));
end

Ft=Fim+Fpipt;%Fuerza total [kN]

%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%[INICIO]%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%|||||FUNCIÓN CÁLCULO S2|||||
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function S2=FactorS2(b,Fr,p,z)
S2=b*Fr*(z/10).^p;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%|||||FUNCIÓN CÁLCULO S2|||||
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%[FIN]%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%[INICIO]%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%|||||FUNCIÓN PAR?METROS METEREOL?GICO DE ACUERDO A LA CATEGORÍA ||||
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [p,b,Fr]=ParamPB(Cat)

Fr=0.69;

switch Cat
case 1
    b=1.23;
    p=0.095;
case 2
    b=1;
    p=0.15;
case 3
    b=0.86;
    p=0.185;
case 4
    b=0.71;
    p=.23;
case 5
    b=0.5;
    p=0.31;
end

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%[INICIO]%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%|||||FUNCIÓN PAR?METROS METEREOL?GICO DE ACUERDO A LA CATEGORIA ||||
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%[FIN]%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%[INICIO]%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%|||||FUNCIÓN CALCULO DEL COEFICIENTE DE AMPLIFICACIÓN DINÁMICA ||||

```

---

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function campl=FactorAmpl(Ca,h,x,L1,amort)

switch Ca
    case 1
        %L1/h=0 (Amort=0.01);
        if amort==0.01
            ampl1_h0(1,1) = 452.15*x^3 - 172.40*x^2 + 24.304*x + 1.245; %25m
            ampl1_h0(2,1) = 588.20*x^3 - 188.67*x^2 + 23.657*x + 0.8584; %200m
            ampl1_h0(3,1) = 337.98*x^3 - 108.51*x^2 + 14.311*x + 0.4935; %300m
        elseif amort==0.02
            ampl1_h0(1,1) = 179.72*x^3 - 111.72*x^2 + 18.824*x + 1.2337; %25m
            ampl1_h0(2,1) = 391.54*x^3 - 113.98*x^2 + 16.201*x + 0.8513; %200m
            ampl1_h0(3,1) = 210.87*x^3 - 71.445*x^2 + 9.5571*x + 0.4807; %300m
        end

        %L1/h>=0.2 (Amort=0.01);
        if amort==0.01
            ampl1_h02(1,1) = 496.92*x^3 - 137.91*x^2 + 19.883*x + 1.124; %25
            ampl1_h02(2,1) = 522.90*x^3 - 153.76*x^2 + 18.311*x + 0.6483; %200m
            ampl1_h02(3,1) = -39.845*x^2 + 9.3837*x + 0.3631; %300m
        elseif amort==0.02
            ampl1_h02(1,1) = 219.40*x^3 - 77.713*x^2 + 13.855*x + 1.1237; %25
            ampl1_h02(2,1) = 186.75*x^3 - 62.129*x^2 + 10.445*x + 0.6504; %200m
            ampl1_h02(3,1) = 209.98*x^3 - 48.258*x^2 + 5.6153*x + 0.3499; %300m
        end

        if L1/h>=0.2
            poly = polyfit([25 100 300]',ampl1_h02,2);
            campl = polyval(poly,h);
            %0<L1/h<0.2 para resultados dentro del intervalo
        else
            poly = polyfit([25 100 300]',ampl1_h0,2);
            ampl1 = polyval(poly,h);

            poly = polyfit([25 100 300]',ampl1_h02,2);
            ampl2 = polyval(poly,h);

            poly = polyfit([0 0.2]',[ampl1 ampl2]',1);
            campl = polyval(poly,L1/h);
        end
    case 2
        %L1/h=0 (Amort=0.01);
        if amort==0.01
            ampl1_h0(1,1) = 613.81*x^3 - 229.26*x^2 + 28.533*x + 1.2804; %25m
            ampl1_h0(2,1) = 481.23*x^3 - 178.59*x^2 + 23.956*x + 0.8911; %200m
            ampl1_h0(3,1) = -78.677*x^3 - 81.298*x^2 + 14.246*x + 0.4917; %300m
        elseif amort==0.02
            ampl1_h0(1,1) = 182.00*x^3 - 112.46*x^2 + 19.102*x + 1.2627; %25m
            ampl1_h0(2,1) = 54.18*x^3 - 75.113*x^2 + 15.66*x + 0.876; %200m
            ampl1_h0(3,1) = -53.388*x^3 - 29.77*x^2 + 8.5985*x + 0.4825; %300m
        end

        %L1/h>=0.2 (Amort=0.01);
        if amort==0.01
            ampl1_h02(1,1) = -161.92*x^3 - 43.52*x^2 + 17.04*x + 1.1949; %25
            ampl1_h02(2,1) = 437.50*x^3 - 134.59*x^2 + 17.356*x + 0.7157; %200m
            ampl1_h02(3,1) = -48.478*x^2 + 10.224*x + 0.3774; %300m
        elseif amort==0.02
            ampl1_h02(1,1) = -168.17*x^3 - 23.171*x^2 + 11.408*x + 1.1771; %25

```

```

ampl1_h02(2,1) = -121.42*x^3 - 26.721*x^2 + 10.097*x + 0.6941; %200m
ampl1_h02(3,1) = -74.37*x^3 - 8.6497*x^2 + 4.2465*x + 0.3609 ; %300m
end

if L1/h>=0.2
poly = polyfit([25 100 300]', ampl1_h02,2);
camp1 = polyval(poly,h);
%0<L1/h<0.2 para resultados dentro del intervalo
else
poly = polyfit([25 100 300]', ampl1_h0,2);
ampl1 = polyval(poly,h);

poly = polyfit([25 100 300]', ampl1_h02,2);
ampl2 = polyval(poly,h);

poly = polyfit([0 0.2]', [ampl1 ampl2]',1);
camp1 = polyval(poly,L1/h);
end
    case 3
%L1/h=0 (Amort=0.01);
if amort==0.01
ampl1_h0(1,1) = 668.36*x^3 - 199.77*x^2 + 27.149*x + 1.4153; %25m
ampl1_h0(2,1) = 471.62*x^3 - 180.57*x^2 + 24.979*x + 0.9581; %200m
ampl1_h0(3,1) = -33.675*x^3 - 63.407*x^2 + 14.606*x + 0.5396; %300m
elseif amort==0.02
ampl1_h0(1,1) = 356.04*x^3 - 118.21*x^2 + 18.602*x + 1.3995; %25m
ampl1_h0(2,1) = 434.35*x^3 - 142.62*x^2 + 19.121*x + 0.9555; %200m
ampl1_h0(3,1) = 32.32*x^3 - 57.198*x^2 + 10.652*x + 0.5321; %300m
end

%L1/h>=0.2 (Amort=0.01);
if amort==0.01
ampl1_h02(1,1) = -248.99*x^3 - 27.925*x^2 + 17.101*x + 1.2888; %25
ampl1_h02(2,1) = 77.542*x^3 - 85.179*x^2 + 16.707*x + 0.779; %200m
ampl1_h02(3,1) = -35.609*x^2 + 9.5929*x + 0.4036 ; %300m
elseif amort==0.02
ampl1_h02(1,1) = -146.58*x^3 - 19.319*x^2 + 10.60*x + 1.2871; %25
ampl1_h02(2,1) = -219.11*x^3 - 6.9045*x^2 + 9.468*x + 0.7703; %200m
ampl1_h02(3,1) = -134.73*x^3 - 0.4679*x^2 + 4.2174*x + 0.4075 ; %300m
end

if L1/h>=0.2
poly = polyfit([25 100 300]', ampl1_h02,2);
camp1 = polyval(poly,h);
%0<L1/h<0.2 para resultados dentro del intervalo
else
poly = polyfit([25 100 300]', ampl1_h0,2);
ampl1 = polyval(poly,h);

poly = polyfit([25 100 300]', ampl1_h02,2);
ampl2 = polyval(poly,h);

poly = polyfit([0 0.2]', [ampl1 ampl2]',1);
camp1 = polyval(poly,L1/h);
end
    case 4
%L1/h=0 (Amort=0.01);
if amort==0.01
ampl1_h0(1,1) = 697.99*x^3 - 172.77*x^2 + 26.179*x + 1.4921; %25m
ampl1_h0(2,1) = 458.29*x^3 - 156.58*x^2 + 23.226*x + 1.016; %200m

```

```

ampll_h0(3,1) = 391.93*x^3 - 125.59*x^2 + 15.587*x + 0.4957; %300m
elseif amort==0.02
ampll_h0(1,1) = 117.05*x^3 - 77.656*x^2 + 16.708*x + 1.4832; %25m
ampll_h0(2,1) = 183.50*x^3 - 68.819*x^2 + 14.881*x + 1.005; %200m
ampll_h0(3,1) = 279.34*x^3 - 88.215*x^2 + 11.044*x + 0.4899; %300m
end

%L1/h>=0.2 (Amort=0.01);
if amort==0.01
ampll_h02(1,1) = -167.06*x^3 - 45.758*x^2 + 17.883*x + 1.3614; %25
ampll_h02(2,1) = 480.95*x^3 - 146.24*x^2 + 19.148*x + 0.8612; %200m
ampll_h02(3,1) = -57.991*x^2 + 11.814*x + 0.4462 ; %300m
elseif amort==0.02
ampll_h02(1,1) = 158.98*x^3 - 55.74*x^2 + 11.101*x + 1.3688; %25
ampll_h02(2,1) = 178.75*x^3 - 65.906*x^2 + 11.614*x + 0.847; %200m
ampll_h02(3,1) = 212.93*x^3 - 55.157*x^2 + 7.0709*x + 0.4419 ; %300m
end

if L1/h>=0.2
poly = polyfit([25 100 300]', ampll_h02, 2);
campl = polyval(poly, h);
%0<L1/h<0.2 para resultados dentro del intervalo
else
poly = polyfit([25 100 300]', ampll_h0, 2);
ampll = polyval(poly, h);

poly = polyfit([25 100 300]', ampll_h02, 2);
ampll2 = polyval(poly, h);

poly = polyfit([0 0.2]', [ampll ampll2]', 1);
campl = polyval(poly, L1/h);
end
case 5
%L1/h=0 (Amort=0.01);
if amort==0.01
ampll_h0(1,1) = 570.67*x^3 - 134.0877*x^2 + 24.527*x + 1.6266; %25m
ampll_h0(2,1) = 320.08*x^3 - 160.83*x^2 + 26.179*x + 1.0663; %200m
ampll_h0(3,1) = 561.17*x^3 - 162.54*x^2 + 20.301*x + 0.5721; %300m
elseif amort==0.02
ampll_h0(1,1) = 178.22*x^3 - 66.733*x^2 + 15.40*x + 1.6101; %25m
ampll_h0(2,1) = -180.65*x^3 - 30.079*x^2 + 14.579*x + 1.0693; %200m
ampll_h0(3,1) = 386.78*x^3 - 118.63*x^2 + 14.913*x + 0.5543; %300m
end

%L1/h>=0.2 (Amort=0.01);
if amort==0.01
ampll_h02(1,1) = 29.146*x^3 - 72.96*x^2 + 18.986*x + 1.496; %25
ampll_h02(2,1) = -14.758*x^3 - 78.784*x^2 + 18.762*x + 0.9154; %200m
ampll_h02(3,1) = -50.934*x^2 + 11.094*x + 0.509 ; %300m
elseif amort==0.02
ampll_h02(1,1) = 126.73*x^3 - 57.419*x^2 + 11.143*x + 1.5016; %25
ampll_h02(2,1) = 238.94*x^3 - 82.147*x^2 + 13.031*x + 0.9122; %200m
ampll_h02(3,1) = 122.97*x^3 - 50.085*x^2 + 7.5672*x + 0.4877 ; %300m
end

if L1/h>=0.2
poly = polyfit([25 100 300]', ampll_h02, 2);
campl = polyval(poly, h);
%0<L1/h<0.2 para resultados dentro del intervalo
else

```

```
poly = polyfit([25 100 300]', ampl1_h0, 2);  
ampl1 = polyval(poly, h);  
  
poly = polyfit([25 100 300]', ampl1_h02, 2);  
ampl2 = polyval(poly, h);  
  
poly = polyfit([0 0.2]', [ampl1 ampl2]', 1);  
campl = polyval(poly, L1/h);  
end  
end  
  
end  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%|||FUNCIÓN CALCULO DEL COEFICIENTE DE AMPLIFICACIÓN DINÁMICA ||||  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%[FIN]%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```