



**INSTITUTO LATINO-
AMERICANO DE TECNOLOGIA,
INFRAESTRUTURA E TERRITÓRIO (ILATIT)**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA CIVIL (PPG ECI)**

**OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS DE
METAMATERIAL COM O USO DE ALGORITMOS GENÉTICOS**

CECÍLIA MARIA SCHNEIDER

Foz do Iguaçu,
2024



**INSTITUTO LATINO-
AMERICANO DE TECNOLOGIA,
INFRAESTRUTURA E TERRITÓRIO (ILATIT)**

**PROGRAMA DE PÓS-
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL (PPG ECI)**

**OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS DE METAMATERIAL
COM O USO DE ALGORITMOS GENÉTICOS**

CECÍLIA MARIA SCHNEIDER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Iván Dario Gomez Araujo

Foz do Iguaçu

2024

CECILIA MARIA SCHNEIDER

**OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS DE METAMATERIAL COM O USO DE
ALGORITMOS GENÉTICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Iván Dario Gomez Araujo
UNILA

Prof. (Titulação) (Nome do Professor)
(Sigla da Instituição)

Prof. (Titulação) (Nome do Professor)
(Sigla da Instituição)

Foz do Iguaçu, ____ de _____ de _____.

Catálogo elaborado pelo Setor de Tratamento da Informação
Catálogo de Publicação na Fonte. UNILA - BIBLIOTECA LATINO-AMERICANA - PTI

S358

Schneider, Cecília Maria.

Otimização de estruturas treliçadas de Metamaterial com o uso de algoritmos genéticos / Cecília Maria Schneider. - Foz do Iguaçu-PR, 2024.

91 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana. Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Foz do Iguaçu-PR, 2024.

Orientador: Iván Dario Gomez Araujo.

1. Metamaterial. 2. Bandas de parada. 3. Método dos Elementos Espectrais (MEE). 4. Método dos Elementos Finitos (MEF). 5. Estrutura - Otimização. I. Gomez Araujo, Iván Dario. II. Título.

CDU 620.1:004.421

RESUMO

Estruturas de metamaterial são denominadas dessa maneira por seu comportamento inusitado, modificações em sua geometria são responsáveis por essas características singulares, ausentes do material em seu estado natural. Um dos comportamentos atípicos dessas estruturas é a formação de bandas de atenuação, que são faixas de frequência onde a transmissão de onda não ocorre ou é muito reduzida. A determinação do comportamento destas novas estruturas por métodos de cálculo é fundamental para a evolução das soluções estruturais e a otimização do projeto destas estruturas é crucial para expandir sua aplicabilidade. Para tanto, a formação de bandas de atenuação em vigas treliçadas de metamaterial foi avaliada pelo método do elemento espectral e otimizada por algoritmos genéticos. O método do elemento espectral foi comparado ao método dos elementos finitos, ambos desenvolvidos no software MATLAB, o método do elemento espectral se mostrou mais preciso e mais rápido para uma viga engastada de concreto. Ao avaliar a resposta da viga treliçada de metamaterial com ressonadores, o diâmetro dos ressonadores, variado entre 3 e 8 cm, promove bandas de atenuação mais profundas se usado no maior diâmetro, a comparação de 5 materiais para o ressonador mostrou o alumínio como melhor material para formação de bandas de atenuação mais profundas, enquanto o uso do epóxi promove bandas de atenuação em frequências mais baixas, ao avaliar a rotação do ressonador sua efetividade para geração de bandas de atenuação é maior entre 0 e 15°. A viga de metamaterial também teve sua resposta analisada ao variar a relação de comprimento e altura da célula unitária, as bandas de atenuação serão maiores em frequências de 400 a 2000 Hz se ela for igual a 1, a influência do tamanho do ressonador, foi avaliada por sua relação com o comprimento da célula unitária quando o tamanho do ressonador é 60% do comprimento as bandas de atenuação são mais profundas. A otimização por algoritmos genéticos se mostrou eficaz ao produzir bandas de parada sempre mais largas e mais profundas ao comparar a mesma estrutura com o uso de outro material.

Palavras-chave: Metamaterial. Bandas de parada. MEE. MEF. Otimização.

ABSTRACT

Metamaterial structures are called this way due to their unusual behavior, modifications in their geometry are responsible for these unique characteristics, absent from the material in its natural state. One of the atypical behaviors of these structures is the formation of attenuation bands, which are frequency bands where wave transmission does not occur or is very reduced. Determining the behavior of these new structures using calculation methods is fundamental for the evolution of structural solutions and the optimization of the design of these structures is crucial to expand their applicability. To this end, the formation of attenuation bands in metamaterial lattice beams was evaluated by the spectral element method and optimized by genetic algorithms. The spectral element method was compared to the finite element method, both developed in MATLAB software, the spectral element method proved to be more accurate and faster for a beam embedded in concrete. When evaluating the response of the metamaterial lattice beam with resonators, the diameter of the resonators, varied between 3 and 8 cm, promotes deeper attenuation bands if used in the largest diameter, the comparison of 5 materials for the resonator showed aluminum as the best material for the formation of deeper attenuation bands, while the use of epoxy promotes attenuation bands at lower frequencies, when evaluating the rotation of the resonator its effectiveness for generating attenuation bands is greatest between 0 and 15°. The metamaterial beam also had its response analyzed when varying the length and height ratio of the unit cell, the attenuation bands will be greater at frequencies from 400 to 2000 Hz if it is equal to 1, the influence of the resonator size was evaluated Due to its relationship with the length of the unit cell, when the resonator size is 60% of the length, the attenuation bands are deeper. Optimization by genetic algorithms proved to be effective in producing always wider and deeper stop bands when comparing the same structure with the use of another material.

Key words: *Metamaterial. Bandagaps. SEM. FEM. Optimization*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Treliça de metamaterial utilizada no trabalho de Gao et al., (2022)	18
Figura 2- Treliça de metamaterial utilizada no trabalho de An; Fan; Zhang,(2020) .	18
Figura 3- Viga engastada e seção transversal	46
Figura 4- Viga de metamaterial composta por 10 células unitárias	47
Figura 5- Gráfico de convergência obtido para otimização de 0 a 500 Hz	75
Figura 6- Gráfico de convergência obtido para otimização de 0 a 1000 Hz	79
Figura 7- Gráfico de convergência obtido para otimização de 100 a 300 Hz	82

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1- Funções de transferência flexionais: comparação entre o método dos elementos finitos com 60 e 120 elementos e o método do elemento espectral com 1 elemento para uma viga de 3 metros	55
Gráfico 2-Funções de transferência longitudinais: comparação entre o método dos elementos finitos com 60 e 120 elementos e o método do elemento espectral com 1 elemento para uma viga de 3 metros	56
Gráfico 3- Funções de transferência flexionais: comparação entre método do elemento espectral com 111 elementos e método dos elementos finitos com 444 elementos e 666 elementos para uma viga de metamaterial	58
Gráfico 4- Variação do Raio do Ressonador de 0 a 1000 Hz.....	60
Gráfico 5-Variação do raio do ressonador de 1000 a 2000 Hz	62
Gráfico 6- Variação do raio do ressonador de 2000 a 3000 Hz	63
Gráfico 7- Variação do material do ressonador de 0 a 1000 Hz	64
Gráfico 8- Variação do material do ressonador de 1000 a 2000 Hz	65
Gráfico 9- Variação do material do ressonador de 2000 a 3000 Hz	66
Gráfico 10- Variação do tamanho do ressonador de 0 a 1000 Hz.....	67
Gráfico 11- Variação do tamanho do ressonador de 1000 Hz a 2000 Hz.....	68
Gráfico 12- Variação do tamanho do ressonador de 2000 a 3000 Hz	69
Gráfico 13- Variação da relação a/b para a faixa de 0 a 1000 Hz	70
Gráfico 14- Variação da relação a/b para a faixa de 1000 a 2000 Hz.....	71
Gráfico 15- Variação da relação a/b para a faixa de 2000 a 3000 Hz.....	72
Gráfico 16- Variação da rotação do ressonador para a faixa de 0 a 1000 Hz	73
Gráfico 17- Variação da rotação do ressonador para a faixa de 1000 a 2000 Hz	73
Gráfico 18- Variação da rotação do ressonador para a faixa de 2000 a 3000 Hz	74
Gráfico 19-Resposta da estrutura otimizada para a faixa de 0 a 500 Hz.....	76
Gráfico 20-Comparação na faixa de 0 a 500 Hz entre estrutura otimizada e com variação do material	77
Gráfico 21-Resposta da estrutura otimizada para a faixa de 0 a 1000 Hz.....	80
Gráfico 22- Comparação na faixa de 0 a 1000 Hz entre estrutura otimizada e com variação do material	81

Gráfico 23-Resposta da estrutura otimizada para a faixa de 100 a 300 Hz.....	83
Gráfico 24- Comparação na faixa de 100 a 300 Hz entre estrutura otimizada e com variação do material	84

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVAS	12
1.1 OBJETIVOS	13
2 METAMATERIAIS E ESTRUTURAS DE METAMATERIAIS	15
3 MÉTODOS DE CÁLCULO.....	19
3.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	20
3.2 MÉTODO DO ELEMENTO ESPECTRAL	22
3.3 ALGORITMO GENÉTICO	42
4 MATERIAIS E MÉTODOS	45
4.1. VIGA SEÇÃO QUADRADA	45
4.2 VIGA DE METAMATERIAL.....	46
4.3 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO RAIO DO RESSONADOR..	47
4.4 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO MATERIAL DO RESSONADOR.....	48
4.5 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO TAMANHO DO RESSONADOR (RL).....	49
4.6 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DA RELAÇÃO A/B	50
4.7 VIGA DE METAMATERIAL COM ROTAÇÃO DO RESSONADOR	51
4.8 VIGA DE METAMATERIAL OTIMIZAÇÃO.....	52
5 RESULTADOS	55
5.1 VIGA SEÇÃO QUADRADA	55
5.2 VIGA DE METAMATERIAL: MEE X MEF	58
5.3 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO RAIO	60
5.4 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO MATERIAL DO RESSONADOR.....	63
5.5 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO TAMANHO DO RESSONADOR (RL).....	66
5.6 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DA RELAÇÃO A/B	69
5.7 VIGA DE METAMATERIAL COM ROTAÇÃO DO RESSONADOR	72
5.8 OTIMIZAÇÕES VIGA DE METAMATERIAL	74
6 CONCLUSÕES	86

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVAS

O uso de modelos matemáticos para representação de fenômenos reais é de fundamental importância para engenharia, haja visto que estes simplificam e possibilitam um melhor dimensionamento e previsão do comportamento da estrutura frente a determinado esforço. A fim de uma fiel representação do desempenho de determinado sistema, é necessário que os métodos de cálculo utilizados sejam capazes de descrever o seu comportamento, bem como considerar as variáveis correlatas envolvidas. Para verificar como uma estrutura irá se comportar frente a diversas solicitações utiliza-se a análise estrutural, que utiliza quatro níveis de abstração: estrutura real, modelo estrutural, modelo discreto e modelo computacional. O primeiro consiste na estrutura como ela é construída, o segundo é o modelo analítico ou matemático onde ocorre a idealização do comportamento da estrutura, no terceiro nível ocorre a discretização da estrutura é a concepção da estrutura através dos métodos de cálculo e pôr fim a utilização ou a criação de programas computacionais para análise de estruturas (MARTHA, 2010).

O método de cálculo é determinado pelos parâmetros selecionados para calcular a estrutura, sendo que esses parâmetros podem ser forças, frequências ou deslocamentos. A partir de cada parâmetro é possível realizar a análise da estrutura com base nos sistemas lineares que delimitaram o comportamento da estrutura. O uso do método dos elementos finitos (MEF) para análise de estruturas é comum e utilizado em diversos programas disponíveis no mercado atualmente, sua utilização é comum com base nos parâmetros de força ou deslocamento. Por outro lado, o uso do método dos elementos espectrais (MEE) tem aumentado devido a não apresentar problemas corriqueiros do MEF e o parâmetro utilizado como base desse método é a frequência. O método dos elementos finitos tem precisão variável, ela é proporcional ao refinamento da malha, desta maneira quanto maior o número de elementos maior será a precisão dos resultados, o que não ocorre no MEE já que a solução apresentada é exata. Além desta situação, outra situação corriqueira no MEF são os problemas de travamento, que consistem em uma lenta convergência (ZHANG, 1997), essa situação pode ocorrer pela matriz de rigidez da estrutura ficar dominante frente a matriz de massa e dessa forma a solução perde precisão (VAZ, 2011).

O desenvolvimento de novos materiais, novas estruturas, a necessidade de maior precisão e agilidade impulsionam o avanço e criação de metodologias de cálculo, para que elas consigam descrever com exatidão o comportamento destes componentes. O

desenvolvimento e aplicação de mecanismos de otimização é de fundamental importância para determinação dos parâmetros ótimos para cada objetivo de uma estrutura. Possibilitando que a estrutura atenda de eficientemente as solicitações a ela impostas.

O desenvolvimento de estruturas baseadas em metamateriais tem crescido expressivamente, isso porque essas estruturas são capazes de ter comportamentos não convencionais ou não esperados para aquele material, como por exemplo coeficiente de refração negativo ou coeficiente de Poisson negativo. Os metamateriais apresentam modificações em sua geometria que possibilitam esse comportamento inusitado. Os estudos teóricos para o desenvolvimento de metamateriais se iniciaram a cerca de 65 anos atrás para o desenvolvimento de uma estrutura com refração negativa eletromagnética (VESELAGO,1967). No entanto a busca por outras propriedades inusitadas dos materiais só teve um maior desenvolvimento há aproximadamente 20 anos atrás.

Um desses comportamentos inusitados é a formação de *bandgaps* ou bandas de parada onde não ocorre a transmissão de ondas em uma determinada faixa de frequência, ou ela é reduzida. Essa atenuação ocorre por dois mecanismos principalmente, que são ressonância local e espalhamento de Bragg. O primeiro mecanismo promove a absorção da energia enquanto o segundo utiliza a interferência destrutiva da onda incidente e refletida para criar as bandas de atenuação.

Contudo a aplicação de mecanismos de otimização não foi utilizada para a determinação de parâmetros ótimos para estruturas de metamaterial com a finalidade de aprimorar as bandas de atenuação, além disso o uso do método do elemento espectral é um ótimo mecanismo

1.1 OBJETIVOS

Objetivo geral: Estudar as propriedades de bandas de paradas de vibração de uma estrutura de treliçada baseada em metamateriais usando métodos de elementos espectrais e algoritmos de otimização global.

Objetivos específicos:

1-Comparar o método do elemento espectral com o método dos elementos finitos aplicado a estruturas de treliça baseado metamateriais.

2-Verificar e estudar a formação de *bandgaps* em uma estrutura de treliça baseada de metamaterial

3- Implementar uma metodologia para determinar as bandas de atenuação em uma faixa de frequência específica de uma estrutura treliçada baseada em metamateriais utilizando algoritmos genéticos.

2 METAMATERIAIS E ESTRUTURAS DE METAMATERIAIS

O conceito de metamaterial foi desenvolvido no campo da eletrodinâmica, consistia na previsão teórica de refração negativa de ondas eletromagnéticas, esse meio foi denominado “*left-handed*” (VESELAGO, 1967). A evolução dos materiais “*left-handed*” ocorreu no final da década de 1990 e início dos anos 2000, quando Smith et al., (2000) desenvolveram um meio de refração atípica. A partir da organização de matrizes periódicas de pequenos fios metálicos e ressonadores de anel esse meio foi desenvolvido, o que resulta na refração negativa do meio. Já o termo metamaterial foi cunhado por Walser (2001), o autor acrescentou o prefixo ‘meta’ a palavra materiais, do grego, que quer dizer “além de”, enfatizando que as propriedades desses materiais vão além das propriedades dos materiais existentes na natureza. Estes estudos iniciais foram precursores do grande interesse atual em metamateriais, isso porque, ao alterar o arranjo físico, determinado material pode apresentar propriedades incomuns como coeficiente de Poisson negativo (FLAMOURAKIS et al., 2020; MIZZI et al., 2015) e refração negativa (MENG et al., 2008).

Os metamateriais podem ser classificados de acordo com as propriedades modificadas que apresentam como por exemplo térmicas, acústicas, eletromagnéticas e mecânicas. Os metamateriais podem apresentar densidade negativa, massa anisotrópica e módulo de elasticidade negativo. O desenvolvimento dos metamateriais acústicos passou a ser estudado quando uma laje fabricada afetou a transmissão de ondas em uma faixa estreita de frequência em torno de 400 Hz (LIU et al., 2000). Com a evolução e o desenvolvimento dos metamateriais acústicos, eles passaram ser classificados em estruturas ressonantes, cristais fonônicos e estruturas de enrolamento espacial de acordo com Kumar et al. (2022). Estruturas ressoantes utilizam controle de som e filtragem acústica (XINJING et al., 2020), já os cristais fonônicos apresentam periodicidade na estrutura, contém locais de ressonância no interior de sua estrutura (KUMAR et al., 2022), no entanto apresentam uma limitação de tamanho, que exige que o tamanho da sua estrutura seja da mesma ordem de grandeza que o comprimento de onda na direção de propagação (LIU; GUO; WANG, 2020). Já as estruturas de enrolamento espacial apresentam ressonâncias do tipo Fabry-Perot (CHEN et al., 2018). Com a evolução das pesquisas os metamateriais acústicos passaram a ser utilizados para detecção de umidade (CHEEKE; TASHTOUSH; EDDY, 1996), diagnóstico e tratamento médico (ZHANG et al., 2021), detecção de gás (CHEEKE; WANG, 1999), detecção de temperatura (WOLD et al., 1999) , massa (BOWERS; CHUAN; DUONG, 1991) e sismômetros (FILIPAK; MARĆ, 2021), redução de

vibração mecânica (AN et al., 2019; MONKOVA et al., 2021). Metamateriais acústicos apresentam a característica de modular a propagação de ondas acústicas que não se tratam apenas de sons que percebemos com o ouvido, sua faixa espectral é bem maior que as ondas audíveis e suas aplicações são diversas.

Os metamateriais acústicos através da modulação das ondas podem focar ou dispersar as ondas e ainda promover a camuflagem acústica. Uma de suas principais aplicações é a redução da vibração, que ocorre pela criação de bandas de atenuação ou *bandgaps*, que são faixas de frequência onde não ocorre a transmissão de onda ou ela é reduzida. Os principais agentes para promoção de *bandgaps* são o espalhamento de Bragg e a ressonância local, mas não são os únicos. O primeiro mecanismo promove a interferência destrutiva de ondas em um meio periódico, isso ocorre quando a estrutura tem incompatibilidade de impedância, que pode ser gerada por diferenças geométricas ou de materiais. As ondas são espalhadas nas células unitárias (parte da estrutura que é repetida periodicamente), o que promove a interação destrutiva das ondas transmitidas e as refletidas (ELMADIH et al., 2019a, 2019b). Essa interação só ocorre se o comprimento da onda refletida e da onda incidente forem semelhantes, o que pela lei de Bragg limita o tamanho das células unitárias. O espalhamento de Bragg ocorre quando o comprimento de onda é aproximadamente o dobro do tamanho da célula unitária (MALDOVAN, 2015; ZHU et al., 2014), o que no caso de baixas frequências torna impraticável a execução de células unitárias tão pequenas.

Já o segundo mecanismo, a ressonância local, a energia das ondas quando próxima da frequência natural dos ressonadores locais é absorvida por eles. Diversas formas e tipos de ressonadores são estudados para aumentar o tamanho e a quantidade de *bandgaps*, no trabalho de WU et al. (2019) ressonadores em forma de X são utilizados para ajustar o gap de ressonância local, o uso de ressonadores com diferentes frequências naturais e mesma massa é investigado no trabalho de HU et al. (2021), os pesquisadores ANIGBOGU; NGUYEN; BARDAWEEL (2021), estudaram estruturas de feixe em camadas com ressonadores para atenuar a vibração. A utilização de ressonadores dentro de um metamaterial pode aumentar a banda de parada ou atenuação dependendo da distribuição dos mesmos, mas pode causar o efeito contrário também (BANERJEE; DAS; CALIUS, 2019). O uso de três ressonadores locais idênticos incorporados a uma metaestrutura sanduíche de núcleo treliçado multiescala promoveu uma redução da vibração dentro de uma faixa de frequência baixa e ampla, a razão de massa dos ressonadores adicionados é

de 64% e a largura da banda de redução é 3 x maior que de uma metaestrutura projetada com a mesma razão de massa do ressonador (GUO et al., 2022).

Ao projetar estruturas é importante considerar o peso das mesmas, pois caso a estrutura se torne pesada demais, mesmo apresentando uma considerável redução de vibração seu uso se torna inviável. É possível usar ressonadores para absorver as vibrações sem adicionar massa a estrutura, para uma barra de 45 cm e a massa de 597 g, a largura da seção foi reduzida para que os ressonadores pudessem ser introduzidos sem promover um aumento na massa da metaestrutura, para essa estrutura específica a massa dos ressonadores deve ser em torno de 30 % da massa da estrutura em que eles serão acoplados e que o número de ressonadores deve ser de no máximo 20, desta forma a redução de vibrações será mais significativa (REICHL; INMAN, 2017).

Em placas de material laminado compósito a introdução de compósito de macrofibra ao longo de uma direção, aumenta as bandas de parada ou atenuação em baixas e médias frequências (REN et al., 2020). Uma viga de metaestrutura sanduíche funcionalmente graduada, a metaestrutura promove a redução da vibração em faixas de baixa e média frequência, além disso com o uso de compósitos de macrofibra piezoelétricos a largura e localização dos bandgaps podem ser alterados (LU; LIU; WANG, 2022). Numa viga o uso de duas barras rígidas com uma massa unindo as duas em um vértice e as outras extremidades presas a viga por meio de dobradiças promove uma banda de parada que se inicia em frequências baixas e abrange uma banda muito ampla (MI; YU, 2021).

No metamaterial em estrutura de treliça proposto por Gao et al., (2022) apresentado na Figura 1, a conclusão dos autores é que a diminuição do raio do ressonador promove bandas de parada em frequências mais baixas e em intervalos menores, a estrutura denominada FBCCZ, consiste na abreviação para o termo *Face and body centered cubic with vertical struts* que é um cubo centrado na face e no corpo com escoras verticais como mostra a Figura 1. No trabalho desenvolvido por An; Fan; Zhang (2020) é proposta metaestrutura de treliça periódica apresentada na Figura 2, formada por células unitárias com um núcleo cruzado com uma mudança de raio dos ressonadores, surgem 3 bandas de paradas, a primeira é influenciada pelo raio do ressonador, quanto maior o raio do ressonador mais larga será a banda de parada, dessa maneira maior será a faixa de frequência em que se tem atenuação da vibração, no entanto ela diminui a altura da banda de parada, sendo assim menor é atenuação promovida, as outras suas bandas de parada são determinadas pela geometria da rede. A combinação de materiais na treliça consegue

promover bandas de parada tanto em frequências mais baixas quanto em frequências mais altas devido a combinação das propriedades do material.

Figura 1- Treliça de metamaterial utilizada no trabalho de Gao et al., (2022)

Parameters	Value
Length of the unit cell, a	5 mm
Radius of the lattice, R	0.5mm
Length of the unit cell, L	30 mm
Height of the unit cell, h	10 mm
Height of the oscillator, e	20 mm

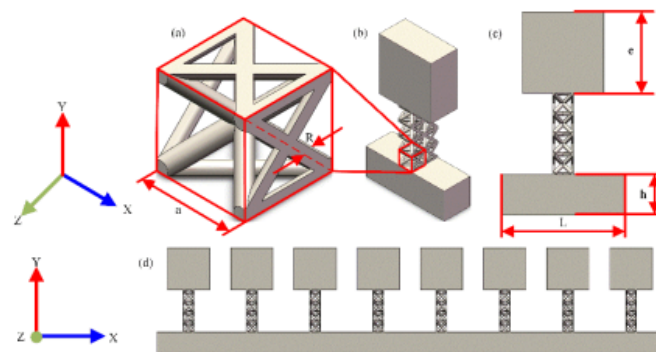


Figure 1. Metamaterial design (a) FBCCZ lattice. (b) the model of the unit cell, FBCCZ lattice is shown by the red cube. (c) front view of the AM, the oscillator is connected by the lattice beam. (d) the AM consists of unit cells arrayed in the x- direction.

Fonte: GAO et al., 2022, p. 7

Figura 2- Treliça de metamaterial utilizada no trabalho de An; Fan; Zhang,(2020)

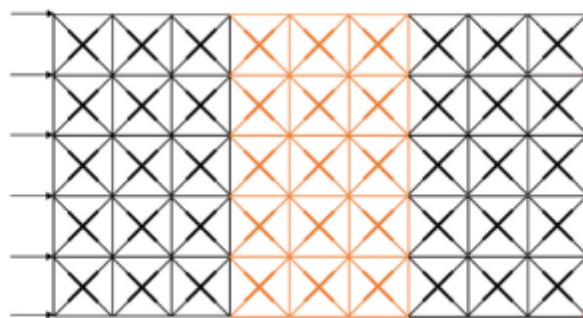


Fig. 18. 2D AM-based lattice structure composed of two materials with 9×5 unit-cells.

Fonte An; Fan; Zhang, 2020, p. 13

3 MÉTODOS DE CÁLCULO

Diversos métodos de cálculo são utilizados para solução e cálculo dos modelos matemáticos das estruturas de metamaterial, de grande relevância pode-se citar o método das diferenças finitas (ANIGBOGU; NGUYEN; BARDAWEEL, 2021; BIAN et al., 2014; HOSSAIN et al., 2015), o método dos elementos finitos (LI et al., 2022; REN; WANG; LIU, 2021; XU et al., 2021) e o método do elemento espectral (HAO et al., 2019; WEN et al., 2020; YU et al., 2023). O método das diferenças finitas advém da técnica das diferenças centrais (YANG; LEE, 1974), este método foi utilizado no domínio do tempo pelos pesquisadores JIANG et al. (2021) para simular um metamaterial de grafeno que apresentou quatro picos de absorção perfeitos, são quatro bandas de paradas. O método dos elementos finitos no domínio do tempo comparado ao método das diferenças finitas no domínio do tempo para análise de cristais fonônicos se mostrou mais preciso, mas com menor eficiência computacional (CEBRECOS et al., 2019). Ao avaliar uma viga isotrópica periódica de Timoshenko pelo método dos elementos finitos espectrais no domínio do tempo o uso do teorema de Bloch e da redução de Bloch promove uma redução do tempo de cálculo e do tamanho dos modelos numéricos (ŽAK et al., 2017).

O uso do MEF com o conceito de condensação de Guyan no cálculo de dispersão de Bloch-Floquet para elementos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, se mostra efetivo, no entanto isso reduz ligeiramente a precisão, este método consiste em eliminar graus de liberdade que contribuem menos para o conjunto (TALLARICO et al., 2020).

O estudo de ondas em metamateriais anisotrópicos, demonstra que o MEE tem menor custo computacional ao ser comparado ao software FEM COMSOL, uma das comparações feitas é a célula periódica unitária de Bloch, verificou-se que para uma mesma precisão o MEF requer mais graus de liberdade, bem como tempo e memória do CPU. E se usado o mesmo número de elementos e graus de liberdade o MEF é menos preciso que o MEE e apresenta da mesma forma um custo computacional maior (QI GE et al., 2021). A comparação entre MEE e MEF para análise de placas evidenciou uma maior precisão do primeiro e um menor número de graus de liberdade necessários, o erro relativo máximo do MEE foi 0,12% enquanto do MEF de 3,96%, já o número de elementos necessários foi de 2 e 64, respectivamente (LIANG et al., 2019). Ao analisar uma viga a comparação entre o MEF e o MEE evidenciou a diferença entre o número de elementos necessários para cada modelagem, sendo de 480 para o MEF e de 6 para o MEE (HU et al., 2021).

Ao combinar os métodos tradicionais MEF e MEE com o teorema de Bloch-Floquet tem-se o método dos elementos finitos de onda e dos elementos espectrais de onda, ambos apresentam boa concordância, mas o primeiro necessita de 50 graus de liberdade internos para que seu resultado se aproxime do segundo (NOBREGA et al., 2016). O uso do MEF com operador de Bloch para redução do tempo de cálculo de estruturas complexas de banda, a redução é feita a partir do problema de autovalor elastodinâmico em uma direção e também com o problema de autovalor elastodinâmico em várias direções, o que reduz o tempo de cálculo da estrutura de aproximadamente 40 minutos, para 4 e 7 minutos respectivamente, e o erro relativo máximo é de 0,044% (PALERMO; MARZANI, 2020).

O método dos elementos finitos no domínio do tempo (FETD) e o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) permite o cálculo de estruturas que não podem ser calculados pelos métodos tradicionais, estruturas que necessitam da formulação de um autovalor (CEBRECOS et al., 2019). O uso do MEE e do método de expansão de onda plana (PWE) são comparados ao método dos elementos finitos para derivar as estruturas de banda e apresentam uma excelente concordância para uma viga sanduíche fonônica (CHEN et al., 2022).

Percebe-se que para análise de estruturas de metamateriais o método dos elementos finitos é usado a muito tempo e por ser um método já amplamente utilizado e implementado por vários softwares serve como parâmetro para validação de outros métodos, por outro lado o método do elemento espectral tem sido testado e mostrou-se ser igualmente preciso e mais eficaz em diversos casos, desta forma são apresentadas as formulações para cálculo dos mesmos.

Para ambos os métodos, MEE e MEF, o processo geral de análise é a formulação das equações do elemento finito ou do elemento espectral, formulação da matriz de elementos e a imposição das condições de contorno, solução do sistema global de equações e análise dos resultados pós processamento. Inicialmente, é necessário dividir a estrutura em elementos finitos, definir os graus de liberdade e as forças atuantes em cada um.

3.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O conceito do método dos elementos finitos foi utilizado pela primeira vez em 1956 por Turner (TURNER et al., 1956), para calcular estruturas de aeronaves. O MEF objetiva determinar os estados de tensão e deformação de um corpo em um número finito de pontos no domínio do corpo. Para isso utiliza os chamados elementos finitos, que são partes da estrutura de tamanho definido, com as mesmas características de massa e carga aplicada.

As equações diferenciais que descrevem o comportamento de uma estrutura, são de difícil solução ao considerar toda a estrutura, mas ao dividi-la em subdomínios, são criados os elementos finitos. O campo de deslocamento de cada um desses elementos é aproximado por polinômios, que são as funções de interpolação, para determinar os valores não conhecidos são utilizados métodos residuais ponderados ou variacionais.

Neste método, formula-se o vetor de deslocamentos e a matriz de rigidez do elemento a partir do teorema dos trabalhos virtuais, em seguida a matriz de rigidez da estrutura é definida a partir das matrizes dos elementos, da mesma forma é realizado com a matriz de massa e então definido o vetor de forças nodais equivalentes. A equação global para um problema dinâmico de valor de contorno utilizando o método dos elementos finitos é definida na equação (0.1) :

$$KD + M\ddot{D} = F$$

(0.1)

$$F = f_b + f_s \quad (0.2)$$

Onde K é a matriz de rigidez global, M é a matriz de massa global, D é o vetor de deslocamento de todos os nós da estrutura e em todas as direções e F o vetor das forças nodais equivalentes.

A equação (0.2) define o vetor das forças nodais equivalentes como a soma do vetor das forças de internas (f_b) e das forças de superfície (f_s).

O vetor deslocamento é definido pelo deslocamento dos nós, expresso pelas funções de forma que são definidas pelos elementos, ao definirmos a função de forma é possível obter a matriz de massa do elemento pela equação (0.3).

$$m_e = \int_{V_e} \rho N^T N dV \quad (0.3)$$

Sendo m_e a matriz de massa do elemento, N é a matriz das funções de forma, N^T é a transposta da matriz das funções de forma, ρ é a densidade do material e V

é o volume do elemento. Enquanto a equação (0.4) é utilizada para o cálculo da matriz de rigidez:

$$k_e = \int_{V_e} B^T c B dV \quad (0.4)$$

Onde k_e é a matriz de rigidez, B e B^T são as matrizes de deformação e sua transposta, respectivamente e c são as equações constitutivas do material, dão a relação entre tensão e deformação, mais conhecida como Lei de *Hooke*.

A formulação, bem como a aplicação para análise de diversos tipos de estrutura pode ser encontrada nos livros *The finite element method: a practical course* (LIU; QUEK, 2005) e *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics* (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005).

3.2 MÉTODO DO ELEMENTO ESPECTRAL

O método do elemento espectral também é conhecido como método do elemento finito espectral ou método do contínuo. Da mesma forma que o MEF, o Método do Elemento Espectral (MEE) utiliza um elemento de comprimento finito de mesma geometria e material, com a mesma atuação de força, que neste caso recebe o nome de elemento espectral. Outra similaridade é que a malha de análise da estrutura pode ser refinada onde existirem alterações na estrutura sejam elas geométricas, de material ou mudança nas forças aplicadas.

A matriz de rigidez dinâmica exata formulada espectralmente é conhecida como a matriz do elemento espectral, matriz de elementos finitos espectrais ou matriz de rigidez dinâmica espectral. Com o uso das mesmas técnicas de montagem do MEF convencional os elementos espectrais podem ser montados para formar uma equação de matriz de sistema global para todo o domínio do problema, que é então resolvida para os DOFs nodais espectrais globais para todas as frequências discretas.

No MEE, com base na teoria da transformada discreta de Fourier (TFD), as respostas dinâmicas são assumidas como superposição de um número finito de modos de onda de diferentes frequências discretas, sendo assim o cálculo da matriz de rigidez dinâmica exata deve ser repetido em todas as frequências discretas de interesse e como esta é utilizada como matriz de rigidez do elemento, o cálculo dela é repetido para cada frequência e cada elemento.

O método do elemento espectral apresenta características positivas como elevada precisão e baixo custo computacional. Isso ocorre devido a fornecer soluções exatas no domínio da frequência e a possível transformação dessas soluções para o domínio do tempo e também a característica de os elementos deste método poderem representar qualquer parte da estrutura com qualquer tamanho, desde que ela não apresente descontinuidades materiais ou estruturais. A descoberta das autofrequências é a parte que utiliza maior tempo de cálculo.

Outra vantagem está relacionada ao uso das soluções de onda exatas das equações governantes como funções de forma dinâmicas o que evita travamentos. Ser efetivo em problemas no domínio da frequência é outro ponto positivo deste método. E ainda a possibilidade de lidar com dados experimentais medidos através de conversores analógico-digitais ou valores numéricos em intervalos regulares de tempo com o uso da transformada rápida de Fourier (TRF).

Por outro lado, este método apresenta limitações no caso de problemas em que as soluções de onda exatas não estão disponíveis como é o caso de problemas multimencionais mais complexos, neste caso é necessário utilizar funções de forma aproximadas utilizando o método de dispersão mais adequado. Este método não pode ser utilizado para sistemas não lineares variantes no tempo onde o princípio da superposição não se aplica, como por exemplo escoamento de fluídos.

Cabe ainda ressaltar que é possível obter as soluções no domínio do tempo através da transformada rápida de Fourier inversa, mas devido a erros de *aliasing* ou vazamento, que podem ser reduzidos com o uso de condições mais adequadas para transformada, podem ocorrer imprecisões para resultados no domínio do tempo.

3.2.1 Transformada de Fourier

O primeiro uso da transformada de Fourier foi em 1822 no trabalho do autor Joseph Fourier, em que foi utilizada a transformada contínua de Fourier, ela tem a desvantagem de envolver a integração de um sinal (função) especificado analiticamente ao longo do período de tempo, o que nem sempre é fácil de realizar. Isso é especialmente verdadeiro quando o sinal é medido experimentalmente em uma forma de dados digitalizada.

A versão discreta da transformada contínua de Fourier é a TDF e é um meio muito eficaz para transformar um sinal periódico amostrado no domínio do tempo em

uma expressão dos dados no domínio da frequência e vice-versa, no entanto no uso da TDF é exigido de um extenso tempo de computação. A vantagem importante da teoria TDF é que ela nos permite usar a transformada rápida de Fourier (TRF), que é um algoritmo extremamente eficiente para calcular a TDF. Para formular modelos de elementos espectrais, as soluções exatas para as equações governantes são geralmente representadas nas formas espectrais usando a TDF.

Se $x(t)$ é uma função periódica contínua de tempo t , com período T , podemos sempre representá-la na forma de uma série de Fourier como:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (0.5)$$

Onde os coeficientes constantes de Fourier são:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos \omega_n t dt \\ b_n &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \sin \omega_n t dt \end{aligned} \quad (0.6)$$

Nas equações acima $\omega_n = n\Delta\omega$ é a n ésima frequência harmônica enquanto $\Delta\omega$ é o espaçamento da frequência sendo definido por:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (0.7)$$

A funções seno e cosseno são decompostas pelas identidades de Euler, e ao serem substituídas na equação (0.5) tem-se que:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{i\omega_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-i\omega_n t} \quad (0.8)$$

Ao definir:

$$X_n = a_n - ib_n \quad (0.9)$$

a equação (0.8) pode ser reescrita:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i\omega_n t} \quad (0.10)$$

Onde X_n é o n ésimo coeficiente de Fourier para a função periódica contínua $x(t)$. Ao substituir a equação (0.6) na equação (0.10) e utilizar as identidades de Euler tem-se que:

$$X_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty) \quad (0.11)$$

Em resumo, a transformada de Fourier decompõe uma função periódica em um espectro discreto no domínio frequência realizada pela equação (0.11), e a transformada inversa sintetiza uma função do seu espectro de componentes de frequência, equação (0.10).

3.2.2 Transformada discreta de Fourier

Embora $x(t)$ seja uma função periódica contínua do tempo, com período T , é comum que apenas valores amostrados da função estejam disponíveis. Isso ocorre quando os dados são obtidos em intervalos de tempo igualmente espaçados, por exemplo.

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (0.12)$$

As N amostras são expressas em uma série temporal discreta $\{x_r\}$, onde $\{x_r\} = x(t_r)$, $t_r = r\Delta t$ e $r = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Usando a série temporal discreta $\{x_r\}$, a integral da equação (0.11) pode ser substituída de forma aproximada por:

$$X_n = \frac{1}{T} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i\omega_n t_r} \Delta t \quad (0.13)$$

Ao utilizar a equação (0.12) a equação (0.13) pode ser reescrita como:

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i\omega_n t_r} \quad (0.14)$$

O processo de conversão de séries temporais discretas $\{x_r\}$ em dados de frequência, equação (0.14), é chamado de transformada discreta de Fourier (TDF). Os dados de frequência X_n são chamados de coeficientes TDF.

Como as séries temporais discretas $x(t_r)$ são reais, é possível verificar, partir da equação (0.14) que:

$$\begin{aligned} X_0 &= \text{real} \\ X_{N/2} &= X_{-N/2} = \text{real} \\ X_{-n} &= X_n^* \\ X_{N/2+n} &= X_{-N/2+n} = X_{N/2-n}^* \\ X_{N-n} &= X_n^* = X_{n-N} \\ X_{N+n} &= X_n \end{aligned} \quad (0.15)$$

Utilizando as seguintes correlações:

$$\begin{aligned}
 e^{\pm i\omega_{p+q}t_r} &= e^{\pm i\omega_p t_r} e^{\pm i\omega_q t_r} \\
 e^{\pm i\omega_{-p}t_r} &= e^{\mp i\omega_p t_r} \\
 e^{\pm i\omega_{N/2}t_r} &= (-1)^r \\
 e^{\pm i\omega_N t_r} &= 1
 \end{aligned} \tag{0.16}$$

O * é utilizado para denotar o conjugado complexo de um número complexo.

A síntese da equação (0.10) também pode ser aproximada ao utilizar o índice n como:

$$x_r \cong \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X_n e^{i\omega_n t_r} \tag{0.17}$$

A equação (0.17) pode ser reescrita como:

$$x_r \cong \sum_{n=-N/2}^{-1} X_n e^{i\omega_n t_r} + \sum_{n=0}^{N/2-1} X_n e^{i\omega_n t_r} \tag{0.18}$$

Ao utilizar as equações (0.15) e (0.16) na primeira parte da equação (0.18) ela pode ser reescrita como :

$$x_r \cong \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{i\omega_n t_r} \tag{0.19}$$

Esta é a transformada de Fourier discreta inversa (TDFI), que é o processo de conversão de coeficientes DFT em dados de séries temporais discretas.

As equações (0.14) e (0.19) constituem um par TDF. A faixa dos coeficientes de Fourier X_n é limitada de $n=0$ a $N-1$ para manter a simetria do par TDF. Embora sejam o par TDF, as equações (0.14) e (0.19), são as aproximações das equações (0.11) e (0.10), respectivamente, ele permite que todas as séries temporais discretas $\{x(t_r)\}$ sejam recuperadas exatamente. Em outras palavras, o processamento TDF é realmente exato. Esse fato importante pode ser prontamente verificado mostrando que as séries temporais discretas $\{x(t_r)\}$ são exatamente recuperadas simplesmente substituindo X_n da equação (0.14) no lado direito da equação (0.19).

O fator $1/N$ antes da integral na equação (0.14) pode ser colocado antes da soma na equação (0.19), ação que garante que não haja mudança na amplitude quando se transforma de um domínio para o outro e vice-versa. Assim, também podemos usar uma forma alternativa do par TDF:

$$X_n = \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i\omega_n t_r} \quad (0.20)$$

$$x_r \cong \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{i\omega_n t_r} \quad (0.21)$$

Devido às propriedades da equação (0.15), a TDF replica periodicamente no eixo de frequência com um período de $2\pi/\Delta t$ rad/s (ou $f_{N/2} = 1/\Delta t$ Hz) se os dados de tempo discreto constituem um conjunto de N valores amostrados em um intervalo de tempo uniforme Δt (segundos). A parte real é simétrica em relação à frequência média, $\omega_{N/2} = \pi/\Delta t$ rad/s (ou $f_{N/2} = 1/2\Delta t$ Hz), enquanto a parte imaginária é anti-simétrica, porque os coeficientes TDF na faixa de frequência $\omega_{N/2} \leq \omega \leq \omega_N$ são conjugados complexos daqueles na faixa de frequência de $0 \leq \omega \leq \omega_{N/2}$. Assim, apenas os coeficientes TDF nas frequências abaixo de $\omega_{N/2}$ são únicos, enquanto aqueles nas frequências acima de $\omega_{N/2}$ são espúrios. Isso significa que os dados de tempo discreto N real são transformados em dados de frequência complexos $N/2$ sem ganhar ou perder qualquer informação de um sinal. Consequentemente, a frequência mais alta com a qual podemos lidar pelo uso de TDF é $\omega_{N/2} = \pi/\Delta t$ rad/s (ou $f_{N/2} = 1/2\Delta t$ Hz), que é chamada de frequência de *Nyquist frequency* ω_{Nq} rad/s ou f_{Nq} (Hz):

$$\omega_{Nq} = \frac{\pi}{\Delta t} \text{ (rad / s) ou } f_{Nq} = \frac{1}{2\Delta t} \text{ (Hz)} \quad (0.22)$$

3.2.3 Transformada rápida de Fourier

A transformada rápida de Fourier (TRF) é um algoritmo de computador altamente eficiente para calcular a TDF e sua inversa, TDFI, não é uma transformação diferente da transformada TDF, mas apenas um meio de calcular a TDF com uma redução considerável no tempo computacional. O algoritmo torna a TRF extremamente eficiente reduzindo as operações aritméticas (multiplicações e adições) de algo da ordem de N^2 para $N/\log_2 N$. Esta é uma redução drástica no tempo de computação para grandes valores de N . Vale ressaltar que, embora a TRF use um computador, não é um método numérico no sentido usual, porque as descrições analíticas de TDF e TDFI, equações (0.21) e (0.20), ainda são mantidas.

Como regra, os dados a serem transformados pela TRF consistem em N séries temporais discretas uniformemente espaçadas. Para a eficiência máxima da computação, o N ideal deve ser uma potência inteira de 2: isto é, $N = 2^p$ onde p é inteiro. Embora alguns algoritmos TRF não exijam que N seja uma potência inteira de 2, $N = 2^p$ é ideal para a velocidade máxima de execução do algoritmo TRF. Na maioria das situações práticas, é improvável que o número de dados amostrados usando um intervalo de tempo de amostragem fixo Δt para uma janela de tempo de amostragem fixa T_s seja uma potência inteira de 2. Nesse caso, o preenchimento com zeros pode fornecer um meio para tornar N uma potência inteira de 2 sem perder nenhuma informação.

3.2.4 Métodos de formulação de elementos espectrais

A formulação do elemento espectral começa com a transformação das equações diferenciais parciais governantes do movimento do domínio do tempo para o domínio da frequência usando a TDF. Para problemas unidimensionais, como resultado do processamento TDF, a variável de tempo desaparece e a frequência torna-se um parâmetro para transformar as equações diferenciais parciais originais no domínio do tempo nas equações diferenciais ordinárias no domínio da frequência. As equações diferenciais ordinárias no domínio da frequência são então resolvidas exatamente e as soluções de onda exatas são usadas para derivar funções de forma dinâmica dependentes da frequência. A matriz de rigidez dinâmica exata, denominada matriz de elemento espectral, é formulada usando as funções de forma dinâmica de maneira análoga àquela comumente usada no MEF convencional.

3.2.4.1 Método de Relação Força- deslocamento

Neste método, a relação direta entre forças nodais e deslocamentos nodais, é utilizada para formular o modelo de elemento espectral para uma estrutura. As equações governantes de movimento de uma estrutura submetida a vibração forçada podem ser representadas simbolicamente como:

$$\nu u(x,t) + M\ddot{u}(x,t) = p(x,t) \quad (0.23)$$

Onde ν é o operador estrutural diferencial linear nos domínios do tempo t e da coordenada espacial x e M é o operador inercial. Os pontos (..) denotam as derivadas com relação ao tempo t . $u(x,t)$ e $p(x,t)$ são os vetores dos campos de deslocamento e o

vetor das forças externas, respectivamente. Ao assumir que as forças externas podem ser representadas na forma espectral por:

$$p(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (0.24)$$

Onde $P_n(x; \omega)$ são os componentes espectrais (ou coeficientes de Fourier) das forças externas $p(x, t)$. A solução para a equação (0.23) pode então ser assumida como:

$$u(x, t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (0.25)$$

Onde $U_n(x; \omega)$ são as componentes espectrais dos campos de deslocamento $u(x, t)$. Ao substituir as equações (0.25) e (0.24) na equação (0.23) e assumir que os componentes espectrais U_n e P_n satisfazem a (0.23) em cada frequência discreta ω_n pode-se obter:

$$L U_n(x; \omega_n) - \omega_n^2 M U_n(x; \omega_n) = P_n(x; \omega_n) \quad (0.26)$$

Onde L é o operador estrutural diferencial linear no domínio x da coordenada espacial.

As funções de forma dependentes da frequência, denominadas funções de forma dinâmicas e usadas para formular a matriz do elemento espectral, são obtidas a partir da equação homogênea (0.27). Para abreviar, os subscritos n que apareceram na equação (0.26) serão omitidos a seguir:

$$L U(x) - \omega^2 M U(x) = 0 \quad (0.27)$$

A mesma forma que a equação (0.27) pode ser derivada ao assumir soluções harmônicas para a equação homogênea, que tem sido popular na literatura associada ao método de rigidez dinâmica.

A solução geral para a equação (0.27) pode ser assumida na forma:

$$U(x) = c e^{-ikx} \quad (0.28)$$

onde c é um vetor constante e k é o número de onda. A substituição da equação (0.28) na equação (0.27) produz um problema de autovalor como:

$$A(k, \omega) c = 0 \quad (0.29)$$

As condições para a existência da solução não trivial c da equação (0.29) requerem que o determinante de $A(k, \omega)$ seja zero como:

$$\det A(k; \omega) = 0 \quad (0.30)$$

que produz uma equação característica para o número de onda k na forma:

$$k^p + \alpha_{(p-1)}(\omega)k^{(p-1)} + \alpha_{(p-2)}(\omega)k^{(p-2)} + \dots + \alpha_{(1)}(\omega)k + \alpha_{(0)}(\omega) = 0 \quad (0.31)$$

A equação (0.31) é chamada de relação de dispersão ou relação de espectro. Ao assumir que k_1, k_2, \dots, k_p são as raízes distintas da equação (0.31) em uma frequência discreta ω . O autovetor associado c_i pode ser calculado a partir da equação (0.29) como:

$$U(x) = \sum_{i=1}^p \phi_i e^{-ik(\omega)x} a_i \equiv E(x; \omega)a \quad (0.32)$$

Onde:

$$\begin{aligned} E(x; \omega) &= [\phi_1 \phi_2 \phi_3 \dots \phi_p] \Lambda(x; \omega) \\ \Lambda(x; \omega) &= \text{diag}[e^{-ik_1(\omega)x}] \\ a &= \{a_1 a_2 a_3 \dots a_p\}^T \end{aligned} \quad (0.33)$$

Para um elemento finito de comprimento L , a equação (0.32) deve satisfazer as condições de contorno geométricas e naturais em dois nós finais $x=0$ e $x=L$: os deslocamentos e inclinações nodais espectrais (simplesmente, graus de liberdade nodais, DOFs) vetor d e as forças nodais espectrais (simplesmente, forças nodais) vetor f .

O deslocamento e a inclinação são geralmente chamados de variáveis primárias e sua especificação nos contornos constitui as condições geométricas de contorno. As variáveis primárias podem ser relacionadas aos campos de deslocamento da seguinte maneira:

$$D(x) = L_{GB} U(x) \quad (0.34)$$

Onde L_{GB} é o operador diferencial linear para as condições de contorno geométricas. Ao substituir a equação (0.32) na equação (0.34) e, em seguida, considerar os DOFs nodais d especificados nos dois nós finais do elemento finito obtêm-se:

$$d = \begin{Bmatrix} D(0) \\ D(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{GB} E(x; \omega) |_{x=0} \\ L_{GB} E(x; \omega) |_{x=L} \end{bmatrix} a = H(\omega)a \quad (0.35)$$

É possível eliminar o vetor constante a da equação (0.32) com o uso da equação (0.35), as soluções gerais podem ser reescritas em termos do vetor nodal DOFs como

$$U(x) = N(x; \omega)d \quad (0.36)$$

Onde $N(x; \omega)$ é a função dinâmica definida por:

$$N(x; \omega) = E(x; \omega)H^{-1}(\omega) \quad (0.37)$$

As forças internas e o momento são chamados de variáveis secundárias e sua especificação no contorno constitui as condições naturais de contorno. A resistência dos materiais fornece a relação entre as variáveis secundárias e os campos de deslocamento na forma de:

$$F(x) = L_{NB}U(x) \quad (0.38)$$

Onde L_{NB} é o operador diferencial linear para as condições de contorno natural. Com a substituição da equação (0.36) na equação (0.38) e, em seguida, considerar as forças nodais f_c , que são as cargas concentradas especificadas em dois nós finais do elemento finito, obtém-se a equação do elemento espectral

$$f_c \equiv \begin{Bmatrix} -F(0) \\ +F(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_{NB}N(x; \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB}N(x; \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} d \equiv S(\omega)d \quad (0.39)$$

Onde:

$$S(\omega)d_c = \begin{bmatrix} -L_{NB}N(x; \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB}N(x; \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} d \equiv G(\omega)H^{-1}(\omega) \quad (0.40)$$

e

$$G(\omega) = \begin{bmatrix} -L_{NB}E(x; \omega)|_{x=0} \\ +L_{NB}E(x; \omega)|_{x=L} \end{bmatrix} \quad (0.41)$$

A matriz $S(\omega)$ é a matriz de rigidez dinâmica exata dependente da frequência, que é chamada de matriz de elemento espectral. Na equação (0.39), os sinais de mais (+) e menos (-) refletem a diferença entre as convenções de sinais utilizadas na teoria da resistência dos materiais e as comumente adotadas nos métodos dos elementos, como o MEF convencional e o MEE.

3.2.4.1.1 MATRIZ DO ELEMENTO ESPECTRAL PARA UMA HASTE:

A vibração longitudinal livre de uma haste uniforme é representada por:

$$EAu'' - \rho A\ddot{u} = 0 \quad (0.42)$$

Onde $u(x,t)$ é o deslocamento longitudinal, E é o módulo de Young, A é a área da seção transversal e ρ é a densidade por volume. O símbolo (') denota as derivadas com relação à coordenada espacial x . A força axial interna é dada por:

$$N_t(x,t) = EAu'(x,t) \quad (0.43)$$

Onde o t subscrito é utilizado para representar quantidade no domínio do tempo.

A solução da equação (0.42) na forma espectral é assumida:

$$u(x,t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (0.44)$$

Pela substituição da equação (0.44) na equação (0.42) tem-se um problema de autovalor para uma frequência discreta específica como:

$$EAU'' + \omega^2 \rho AU = 0 \quad (0.45)$$

A solução geral da equação (0.45) é assumida como:

$$U(x) = ae^{-ik(\omega)x} \quad (0.46)$$

Ao substituir a equação (0.46) na equação (0.45), a relação de dispersão pode ser obtida por:

$$k^2 + k_L^2 = 0 \quad (0.47)$$

Onde k_L é o número de onda para o modo de onda longitudinal puro e é definido por:

$$k_L = \omega \sqrt{\frac{\rho A}{EA}} \quad (0.48)$$

A equação (0.47) tem duas raízes reais:

$$k_1 = -k_2 = k_L \quad (0.49)$$

Para uma haste finita de comprimento L , a solução geral da equação (0.45) pode ser obtida da seguinte maneira:

$$U(x) = a_1 e^{-ik_L x} + a_2 e^{+ik_L x} = e(x; \omega) a \quad (0.50)$$

Onde:

$$e(x; \omega) = \begin{bmatrix} e^{-ik_L x} & e^{+ik_L x} \end{bmatrix} \quad (0.51)$$

$$a = \{a_1 a_2\}^T$$

Os deslocamentos nodais espectrais do elemento de haste finita podem ser relacionados ao campo de deslocamento como:

$$d = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(0) \\ U(L) \end{Bmatrix} \quad (0.52)$$

Ao substituir a equação (0.50) no lado direito da equação (0.52) tem-se que:

$$d = \begin{bmatrix} e(0; \omega) \\ e(L; \omega) \end{bmatrix} a = H_R(\omega) a \quad (0.53)$$

Onde:

$$(0.54)$$

$$H_R(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ik_L L} & e^{ik_L L} \end{bmatrix} \quad (0.55)$$

Ao eliminar o vetor constante a da equação (0.50) pelo uso da equação (0.53), é possível representar o campo de deslocamento na haste finita em termos dos DOFs nodais como:

$$U(x) = N_R(x; \omega) d \quad (0.56)$$

Onde:

$$\begin{aligned} N_R(x; \omega) &= e(x; \omega) H_R^{-1}(\omega) = [N_{R1} \quad N_{R2}] \\ N_{R1}(x; \omega) &= \csc(k_L L) \sin[k_L(L-x)] \\ N_{R2}(x; \omega) &= \csc(k_L L) \sin(k_L x) \end{aligned} \quad (0.57)$$

Da equação (0.43), os componentes espectrais da força nodal são relacionados à $U(x)$ por:

$$N(x) = EAU'(x) \quad (0.58)$$

As forças axiais nodais espectrais definidas para o elemento de haste finito podem ser relacionadas às forças definidas pela resistência dos materiais por:

$$f_c(\omega) = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N(0) \\ +N(L) \end{Bmatrix} \quad (0.59)$$

Pela substituição das equações (0.56) e (0.58) no lado direito da equação (0.59) tem-se que:

$$S_R(\omega) d = f_c(\omega) \quad (0.60)$$

Onde $S_R(\omega) d$ é a matriz do elemento espectral para haste finita dada por:

$$S_R(\omega) = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} S_{R11} & S_{R12} \\ S_{R12} & S_{R22} \end{bmatrix} = S_R(\omega)^T \quad (0.61)$$

Onde:

$$\begin{aligned} S_{R11} &= S_{R22} = (k_L L) \cot(k_L L) \\ S_{R12} &= -(k_L L) \csc(k_L L) \end{aligned} \quad (0.62)$$

3.2.4.1.2 MATRIZ DO ELEMENTO ESPECTRAL PARA UMA VIGA DE BERNOULLI:

A vibração de flexão livre (flexão) de uma viga Bernoulli-Euler é representada por:

$$EIw'''' + \rho A \ddot{w} = 0 \quad (0.63)$$

onde $w(x,t)$ é o deslocamento transversal, E é o módulo de Young, A é a área da seção transversal, I é o momento de inércia da área em torno do eixo neutro e ρ é a densidade de massa por volume. A força de cisalhamento transversal interna e o momento fletor são dados por:

$$M_t(x,t) = EIw'' \quad Q_t(x,t) = -EIw'''(x,t) \quad (0.64)$$

A solução da equação (0.63) na forma espectral é:

$$w(x,t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (0.65)$$

Pela substituição da equação (0.65) na equação (0.63) obtém-se um problema de autovalor para uma frequência discreta específica como:

$$EIW'''' - \omega^2 \rho A W = 0 \quad (0.66)$$

Ao assumir que a solução geral para a equação (0.66) é:

$$W(x) = ae^{-ik(\omega)x} \quad (0.67)$$

Pela substituição da equação (0.67) na equação (0.66) tem-se a seguinte relação de dispersão:

$$k^4 - k_F^4 = 0 \quad (0.68)$$

Onde k_F é o número de onda para o modo de onda de flexão pura definido por:

$$k_F = \sqrt{\omega} \left(\frac{\rho A}{EI} \right)^{1/4} \quad (0.69)$$

A equação (0.68) tem duas raízes imaginárias e duas raízes reais:

$$k_1 = k_{-2} = k_F, \quad k_3 = k_{-4} = ik_F \quad (0.70)$$

Para o elemento de viga de Bernoulli-Euler finito de comprimento L , a solução geral da equação (0.66) pode ser obtida na forma:

$$W(x; \omega) = a_1 e^{-ik_F x} + a_2 e^{-k_F x} + a_3 e^{+ik_F x} + a_4 e^{+k_F x} = e(x; \omega) a \quad (0.71)$$

Onde:

$$e(x; \omega) = [e^{-ik_F x} \quad e^{-k_F x} \quad e^{+ik_F x} \quad e^{+k_F x}] \quad (0.72)$$

$$a = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4\}^T$$

Os deslocamentos nodais espectrais e as inclinações do elemento finito de viga Bernoulli-Euler podem ser relacionados ao campo de deslocamento por:

$$d = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \Theta_1 \\ W_2 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W(0) \\ W'(0) \\ W(L) \\ W'(L) \end{Bmatrix} \quad (0.73)$$

Ao substituir a equação (0.71) no lado direito da equação (0.73) têm-se que:

$$d = \begin{bmatrix} e(0; \omega) \\ e'(0; \omega) \\ e(L; \omega) \\ e'(L; \omega) \end{bmatrix} a = H_B(\omega) a \quad (0.74)$$

Onde:

$$H_B(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -ik_F & -k_F & ik_F & k_F \\ e^{-ik_F L} & e^{-k_F L} & e^{ik_F L} & e^{k_F L} \\ -ik_F e^{-ik_F L} & -k_F e^{-k_F L} & ik_F e^{ik_F L} & k_F e^{k_F L} \end{bmatrix} \quad (0.75)$$

O campo de deslocamento dentro da viga de Bernoulli-Euler finita pode ser representado em termos do vetor nodal DOFs d , pela eliminação o vetor constante a da equação (0.71) usando a equação (0.74), sendo assim:

$$W(x) = N_B(x; \omega) d \quad (0.76)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
N_B(x; \omega) &= e(x; \omega) H_B^{-1}(\omega) = [N_{B1} \quad N_{B2} \quad N_{B3} \quad N_{B4}] \\
N_{B1}(x) &= \eta^{-1} k_F [\cos \bar{x} - \cos(\bar{L} - \bar{x}) \cosh \bar{L} - \cos \bar{L} \cosh(\bar{L} - \bar{x}) + \cosh \bar{x} + \sin(\bar{L} - \bar{x}) \sinh \bar{L} - \sin \bar{L} \sinh(\bar{L} - \bar{x})] \\
N_{B2}(x) &= \eta^{-1} [-\cosh(\bar{L} - \bar{x}) \sin \bar{L} + \cosh \bar{L} \sin(\bar{L} - \bar{x}) + \sin \bar{x} - \cos(\bar{L} - \bar{x}) \sinh \bar{L} + \cos \bar{L} \sinh(\bar{L} - \bar{x}) + \sinh \bar{x}] \\
N_{B3}(x) &= \eta^{-1} k_F [\cos(\bar{L} - \bar{x}) - \cos \bar{x} \cosh \bar{L} - \cos \bar{L} \cosh \bar{x} + \cosh(\bar{L} - \bar{x}) + \sin \bar{x} \sinh \bar{L} - \sinh \bar{x} \sin \bar{L}] \\
N_{B4}(x) &= -\eta^{-1} [-\cosh \bar{x} \sin \bar{L} + \cosh \bar{L} \sin \bar{x} + \sin(\bar{L} - \bar{x}) - \cos \bar{x} \sinh \bar{L} + \cos \bar{L} \sinh \bar{x} + \sinh(\bar{L} - \bar{x})] \\
\eta &= 2k_F (1 - \cos \bar{L} \cosh \bar{L}) \\
\bar{x} &= k_F x, L = k_F \bar{L}
\end{aligned} \tag{0.77}$$

Na equação (0.64), os componentes espectrais do momento e da força de cisalhamento transversal podem estar relacionados a $W(x)$ da seguinte maneira:

$$Q(x) = -EIW'''(x), \quad M(x) = EIW''(x) \tag{0.78}$$

As forças de cisalhamento transversais nodais espectrais e momentos de flexão definidos para o elemento podem ser relacionados às forças e momentos correspondentes definidos pela força dos materiais por:

$$f_c = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q(0) \\ -M(0) \\ +Q(L) \\ +M(L) \end{Bmatrix} \tag{0.79}$$

Ao substituir a equação (0.76) na equação (0.78) e os resultados na equação (0.79) tem-se que:

$$S_B(\omega)d = f_c(\omega) \tag{0.80}$$

Onde $S_B(\omega)$ é a matriz espectral para viga de Bernoulli-Euler dada por:

$$S_B(\omega) = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} S_{B11} & S_{B21} & S_{B31} & S_{B41} \\ S_{B12} & S_{B22} & S_{B32} & S_{B42} \\ S_{B13} & S_{B23} & S_{B33} & S_{B43} \\ S_{B14} & S_{B24} & S_{B34} & S_{B44} \end{bmatrix} = S_B(\omega)^T \tag{0.81}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
S_{B11} &= S_{B33} = \Delta_B \bar{L}^3 (\cos \bar{L} \sinh \bar{L} + \sin \bar{L} \cosh \bar{L}) \\
S_{B22} &= S_{B44} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-2} (-\cos \bar{L} \sinh \bar{L} + \sin \bar{L} \cosh \bar{L}) \\
S_{B12} &= -S_{B34} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-1} \sin \bar{L} \sinh \bar{L} \\
S_{B13} &= -\Delta_B \bar{L}^3 (\sin \bar{L} + \sinh \bar{L}) \\
S_{B14} &= -S_{B23} = \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-1} (-\cos \bar{L} + \cosh \bar{L}) \\
S_{B24} &= \Delta_B \bar{L}^3 k_F^{-2} (-\sin \bar{L} + \sinh \bar{L})
\end{aligned} \tag{0.82}$$

$$\Delta_B = \frac{1}{1 - \cos \bar{L} \cosh \bar{L}}$$

$$\bar{L} = k_f L$$

3.2.4.2 Método Variacional

Nesta seção, o método variacional no domínio da frequência é introduzido para formular a matriz de elementos espectrais e as forças nodais equivalentes para forças dinâmicas distribuídas. Com o uso da DFT, o tempo não aparece mais explicitamente nas equações governantes e nas condições de contorno associadas. Assim, o problema dinâmico original pode ser considerado como um problema pseudo-estático com a frequência como parâmetro. No domínio da frequência, o método variacional pode ser aplicado de maneira semelhante à aplicada na formulação convencional de elementos finitos no domínio do tempo. Como o método variacional pode ser prontamente estendido para problemas multidimensionais, a discussão nesta seção será confinada aos problemas 1-D.

As equações governantes de movimento no domínio da frequência são dadas pela equação (0.26), que é:

$$LU(x) - \omega^2 MU(x) = P(x) \tag{0.83}$$

A relação entre os campos de deslocamento U e as variáveis primárias D (isto é, deslocamentos e inclinações) e a relação entre os campos de deslocamento U e as variáveis secundárias F (isto é, forças internas e momentos) são dadas pelas equações (0.34) e (0.38):

$$\begin{aligned}
D(x) &= L_{GB} U(x) \\
F(x) &= L_{NB} U(x)
\end{aligned} \tag{0.84}$$

onde L_{GB} e L_{NB} são os operadores diferenciais lineares para as condições de contorno geométricas e naturais, respectivamente.

A forma fraca da equação governante pode ser construída a partir da declaração de integral ponderada dada por:

$$\int_0^L \delta U^T \{LU(x) - \omega^2 MU(x) - P(x)\} dx = 0 \quad (0.85)$$

onde δU são as funções de peso, que são as mudanças virtuais de U . Ao integrar o primeiro termo da equação (0.85) por partes para distribuir a diferenciação igualmente entre variáveis dependentes e funções ponderadas e então aplicando a equação (0.84), pode-se obter:

$$\int_0^L \delta U^T LU(x) dx = \int_0^L A(\delta U, U) dx - (L_{GB} \delta U)^T (L_{NB} U) \Big|_{x=0}^{x=L} \quad (0.86)$$

Ou

$$\int_0^L \delta U^T LU(x) dx = \int_0^L A(\delta U, U) dx - \delta D^T F \Big|_{x=0}^{x=L} \quad (0.87)$$

Ao substituir a equação (0.87) na equação (0.85) tem-se que:

$$\int_0^L A(\delta U, U) dx - \omega^2 \int_0^L \delta U^T MU dx - \int_0^L \delta U^T P(x) dx - \delta D^T F \Big|_{x=0}^{x=L} = 0 \quad (0.88)$$

Para um sistema conservativo, a função $A(\delta U, U)$ será simétrico em δU e U , isto é $A(\delta U, U) = A(U, \delta U)$.

As soluções gerais para as equações governantes homogêneas são dadas pela equação:

$$U(x) = N(x, \omega) d \quad (0.89)$$

Onde d é o vetor de DOFs definido por:

$$d = \begin{Bmatrix} D(0) \\ D(L) \end{Bmatrix} \quad (0.90)$$

Pela substituição da equação (0.89) na equação (0.88) e com o uso da equação (0.90) obtêm-se:

$$\delta d^T \left(\left[\int_0^L A(N, N) dx - \omega^2 \int_0^L N^T M N dx \right] d - \int_0^L N^T P(x) dx - f_c \right) = 0 \quad (0.91)$$

Em que f_c é a força nodal definida por:

$$f_c(\omega) \equiv \begin{Bmatrix} -F(0) \\ +F(L) \end{Bmatrix} \quad (0.92)$$

Como δd é arbitrário por definição, a equação (0.91) gera a equação do elemento espectral:

$$S(\omega)d = f_c(\omega) + f_d(\omega) \quad (0.93)$$

Onde:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_0^L A(N, N) dx - \omega^2 \int_0^L N^T M N dx \\ f_d(\omega) &= \int_0^L N^T P(x) dx \end{aligned} \quad (0.94)$$

A matriz $S(\omega)$ é a matriz de elementos espectrais dependentes da frequência, f_c é o vetor de forças nodais associado às forças dinâmicas concentradas aplicadas nos nós e f_d é o vetor de forças nodais equivalentes associado às forças dinâmicas distribuídas.

As vantagens do método variacional sobre as outras são: (i) as condições de contorno podem ser aplicadas consistentemente durante a formulação da forma fraca, conforme mostrado na equação (0.88), (ii) as forças dinâmicas distribuídas podem ser automaticamente transformadas na forças nodais e momentos equivalentes mostrados pela segunda linha da equação (0.94), (iii) a simetria ou assimetria da matriz do elemento espectral pode ser facilmente inferida a partir de $A(N, N)$ antes do cálculo da matriz do elemento espectral, e (iv) como a formulação do elemento espectral da declaração de forma fraca no domínio da frequência é semelhante àquela da formulação do elemento finito convencional no domínio do tempo. Devido às aparentes vantagens do método variacional, pode-se preferir usar o método variacional para formular modelos de elementos espectrais.

3.2.4.2.1 BARRA:

A vibração longitudinal forçada de uma haste uniforme é representada por:

$$EAu'' - \rho A\ddot{u} + p(x, t) = 0 \quad (0.95)$$

Onde $p(x, t)$ é a força dinâmica distribuída. A força axial é definida por:

$$N_t(x, t) = EAu'(x, t) \quad (0.96)$$

A equação diferencial ordinária no domínio da frequência é:

$$EAU'' + \omega^2 \rho AU + P(x) = 0 \quad (0.97)$$

Com a relação força-deslocamento relevante sendo:

$$N = EAU' \quad (0.98)$$

A forma fraca da equação (0.97) pode ser derivada da integral dada por:

$$\int_0^L (EAU'' + \omega^2 \rho AU + P) \delta U dx \quad (0.99)$$

Onde $P(x)$ representa os componentes espectrais de $p(x,t)$ e δU é a variação arbitrária em U .

A integração o primeiro termo da equação (0.99) por partes e aplicando a equação (0.98) dá:

$$\int_0^L EAU'' \delta U dx = - \int_0^L EAU' \delta U' dx - N \delta U|_0 + N \delta U|_L \quad (0.100)$$

A equação (0.100) pode ser reescrita em termos de forças nodais e deslocamentos:

$$\int_0^L EAU'' \delta U dx = - \int_0^L EAU' \delta U dx + \delta d^T f_c \quad (0.101)$$

Em que:

$$\begin{aligned} d &= \{U_1 \quad U_2\}^T \\ f_c &= \{N_1 \quad N_2\}^T \end{aligned} \quad (0.102)$$

Pela substituição da equação (0.101) na equação (0.99) obtêm-se a forma fraca da equação (0.97) que é:

$$\int_0^L EAU' \delta U' dx - \int_0^L \omega^2 \rho AU \delta U dx - \int_0^L P \delta U dx - \delta d^T f_c = 0 \quad (0.103)$$

Ao substituir a equação (0.56) na equação (0.103) têm-se a equação:

$$\delta d^T \left[\left(\int_0^L EAN_R'^T N_R' dx - \omega^2 \int_0^L \rho AN_R^T N_R dx \right) d \right] - \int_0^L PN_R^T dx - f_c = 0 \quad (0.104)$$

Como δd é arbitrário, a equação (0.104) a equação do elemento espectral é:

$$S_R(\omega) d = f_c(\omega) + f_d(\omega) \quad (0.105)$$

Onde:

$$S_R(\omega) = \int_0^L EAN_R'^T N_R' dx - \omega^2 \int_0^L \rho AN_R^T N_R dx \quad (0.106)$$

e

$$f_d(\omega) = \int_0^L P(x; \omega) N_R^T(x; \omega) dx \quad (0.107)$$

Na equação (0.105), f_c e f_c são as forças nodais espectrais associadas às forças dinâmicas concentradas aplicadas nos nós e à força dinâmica distribuída $p(x,t)$, respectivamente.

3.2.4.2.2 VIGA DE EULER-BERNOULLI

O movimento de vibração forçada em uma viga de Bernoulli é representado por:

$$EIw'''' + \rho A \ddot{w} = f(x,t) \quad (0.108)$$

Onde $f(x,t)$ é a força dinâmica distribuída. O momento e a força de cisalhamento transversal são dados pelas equações:

$$\begin{aligned} M_t(x,t) &= EIw''(x,t) \\ Q_t(x,t) &= -EIw'''(x,t) \end{aligned} \quad (0.109)$$

Com o uso da transformada discreta de Fourier as equações (0.108) e (0.109) são transformadas para o domínio da frequência:

$$EIW'''' - \rho A \omega^2 W - F(x) = 0 \quad (0.110)$$

E

$$\begin{aligned} M &= EIW'' \\ Q &= -EIW''' \end{aligned} \quad (0.111)$$

Onde $F(x)$ representa os componentes espectrais de $f(x,t)$.

A forma fraca da equação (0.110) pode ser derivada da integral ponderada:

$$\int_0^L (EIW'''' - \omega^2 \rho A W - F) \delta W dx \quad (0.112)$$

Onde δW é a variação arbitrária em W . Ao integrar o primeiro termo da equação (0.112) por partes e aplicar a equação (0.111) obtêm-se:

$$\int_0^L EIW'' \delta W'' dx = \int_0^L EIW'' \delta W'' dx - Q \delta W \Big|_{x=0}^{x=L} - M \delta W \Big|_{x=0}^{x=L} \quad (0.113)$$

A equação pode ser reescrita como:

$$\int_0^L EI W'''' \delta W dx = \int_0^L EI W'' \delta W'' dx - \delta d^T f_c \quad (0.114)$$

Onde:

$$\begin{aligned} d &= \{W_1 \quad \Theta_1 \quad W_2 \quad \Theta_2\}^T \\ f_c &= \{Q_1 \quad M_1 \quad Q_2 \quad M_2\}^T \end{aligned} \quad (0.115)$$

Pela substituição da equação (0.114) na equação (0.112) obtêm-se a forma fraca da equação (0.110) que é:

$$\int_0^L EI W'' \delta W'' dx - \omega^2 \int_0^L \rho A W \delta W dx - \int_0^L F \delta W dx - \delta d^T f_c = 0 \quad (0.116)$$

Ao substituir a equação (0.76) na equação acima:

$$\delta d^T \left[\left(\int_0^L EI N_B''^T N_B'' dx - \omega^2 \int_0^L \rho A N_B^T N_B dx \right) d - (f_c + f_d) \right] = 0 \quad (0.117)$$

Onde:

$$f_d(\omega) = \int_0^L F(x; \omega) N_B^T(x; \omega) dx \quad (0.118)$$

Como δd é arbitrário por definição, o elemento espectral da equação pode ser derivado da equação (0.117) como:

$$S_B(\omega) d = f_c(\omega) + f_d(\omega) \quad (0.119)$$

Onde:

$$S_B(\omega) = \int_0^L [EI N_B''^T N_B'' - \omega^2 \rho A N_B^T N_B] dx \quad (0.120)$$

A matriz $S_B(\omega)$ é a matriz do elemento espectral para a viga de Euler-Bernoulli. O vetor de forças nodais f_c está associado às forças dinâmicas concentradas aplicadas nos nós e f_d à força dinâmica distribuída $f(x, t)$.

A formulação apresentada para o método do elemento espectral, bem como a derivação da mesma podem ser consultadas no livro *Spectral element method in structural dynamics* (LEE, 2009).

3.3 ALGORITMO GENÉTICO

A otimização de uma função consiste na minimização ou na maximização de uma ou mais variáveis que geralmente apresentam alguma ou algumas restrições. Existem diversos métodos de otimização sendo que eles são divididos em determinísticos e estocásticos (ou heurísticos). Os métodos determinísticos se baseiam no cálculo das derivadas, eles possuem bons resultados para funções contínuas, convexas e unimodais, alguns dos métodos a serem destacados são o Método de Newton, Método de Levenberg-Marquadt, método do gradiente conjugado, etc. Já os métodos estocásticos trabalham de maneira aleatória orientada e os métodos podem ser o Busca Tabu, Algoritmos genéticos e recozimento simulado. Ainda existem combinações entre ambos os métodos o que produz os métodos híbridos.

Os algoritmos genéticos fazem parte dos métodos de otimização heurísticos e foram desenvolvidos com inspiração no princípio Darwiniano da evolução das espécies (MICHALEWICZ, 1996). As primeiras pesquisas com grande aplicação no tema de algoritmos genéticos foram desenvolvidas por John Holland que publicou um livro chamado "*Adaptation in Natural and Artificial Systems*", quando se iniciou efetivamente a aplicação dos algoritmos genéticos. Este algoritmo não utiliza derivada ou jacobiano das funções, que é o comum para métodos determinísticos. Ele é utilizado em funções complexas em que a derivada é difícil de definir, pois este algoritmo consegue procurar mínimos globais mais facilmente, sem ficar preso aos mínimos locais. São algoritmos interativos e a cada nova interação a população analisada é modificada, dessa forma os dados de entrada são outros (KATOCH; CHAUHAN; KUMAR, 2021). Este algoritmo altera dinamicamente o processo de busca por cruzamento e mutações para chegar a uma solução ótima.

O procedimento do algoritmo consiste em encontrar a solução mais eficiente para o problema, as soluções, que são chamadas de indivíduos, evoluem simultaneamente e o conjunto delas é chamado de população. Essa população evolui, a cada iteração do algoritmo, até atingir o critério de finalização e determina a melhor solução encontrada para o problema. O processo se inicia pela seleção dos indivíduos, o processo deve levar em conta a aptidão dos indivíduos: os indivíduos mais aptos devem ter maior probabilidade de serem selecionados. Há vários procedimentos de seleção, os mais usuais são seleção por roleta e seleção por torneio. A seleção por roleta quanto mais alta a aptidão do indivíduo maior a probabilidade de ele ser selecionado no sorteio para próxima iteração, enquanto a seleção por torneio dois indivíduos são selecionados e o mais apto entre eles é selecionado.

Existem alguns parâmetros principais que influenciam no desempenho da otimização por algoritmo genético que são taxa de cruzamento, tamanho da população, número de gerações e taxa de mutação. A taxa de cruzamento influencia na velocidade do algoritmo se está taxa for muito baixa o algoritmo será lento, no entanto se ela for muito alta, indivíduos com boas aptidões serão retirados rapidamente. O tamanho da população afeta o desempenho e eficiência do algoritmo genético, quanto maior melhor a eficiência, no entanto, quanto maior for a população maior será o custo computacional e de tempo. O número de gerações também está ligado ao tempo computacional e o tamanho da população, caso seja selecionado uma população pequena é necessário que se opte por um número maior de gerações para garantir a eficiência do algoritmo. Por fim, a taxa de mutação, fator que previne a estagnação da busca, no entanto se está taxa for muito alta a busca pode se tornar aleatória.

Um operador que pode ser utilizado nos algoritmos genéticos é o elitismo que consiste em replicar o melhor indivíduo de uma geração na próxima sem nenhuma alteração. Outro operador é o "*niching*" que é evitar determinada solução ou região de soluções, fazendo com que indivíduos próximos a esta região tenham uma menor probabilidade de serem selecionados. Mais informações sobre algoritmos genéticos e seus operadores podem ser consultadas nas referências a seguir (BANZHAF et al., 1998; DRÉO JOHANN et al., 2006)

4 MATERIAIS E MÉTODOS

Inicialmente foi desenvolvido, no Software MATLAB, um programa para cálculo da resposta da estrutura com base no método dos elementos finitos e no método do elemento espectral. Para isso, no caso do método dos elementos finitos utilizou-se a formulação da viga de Bernoulli. No método do elemento espectral foram utilizadas as equações apresentadas para o método de relação força deslocamento e da mesma forma que o método dos elementos finitos a formulação utilizada é para a viga de Bernoulli.

A partir da programação desenvolvida foi possível calcular a resposta de diferentes estruturas e aplicar em diferentes situações de cálculo para verificação e validação do programa, bem como para comparação entre os métodos. O programa elaborado permite a alteração do número de elementos para o cálculo no método dos elementos finitos e calcula o tempo de cálculo necessário para cada um dos métodos considerando o número de elementos escolhido.

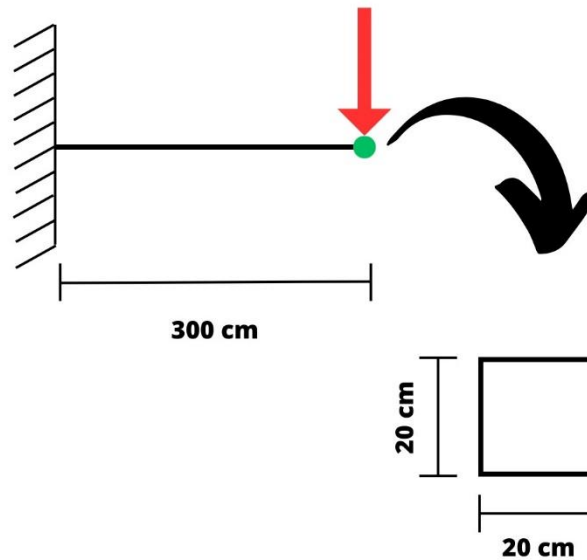
4.1. VIGA SEÇÃO QUADRADA

A primeira estrutura avaliada é uma viga de seção quadrada, apresentada na Figura 3, neste modelo as características geométricas utilizadas na viga são a seção transversal de base e altura iguais a 20 cm e o comprimento de 3 m. A viga foi considerada engastada em uma extremidade e livre na outra, as características do material são o módulo de Young $E = 2e7 \text{ N} / \text{m}^2$ e densidade $\rho = 2500 \text{ kg} / \text{m}^3$.

A força é uma excitação harmônica $F(t) = 10e^{-i\omega t}$, o local de aplicação da força é o nó final da viga, representado na Figura 3, o sentido de aplicação da força está indicado por uma seta vermelha no desenho. A função de transferência foi avaliada no mesmo ponto, indicado pelo ponto verde na figura, tanto verticalmente como longitudinalmente.

A frequência de amostragem (F_s) utilizada para este caso foi de 3000 Hz, então o espectro da resposta é de 1500 Hz, já a transformada de Fourier tem tamanho de $Nfft = 2^{14}$, destas informações é possível obter a resolução do espectro de resposta 0,1831 Hz, sendo assim a cada 0,1831 Hz a função de transferência foi definida para viga.

Figura 3-Viga engastada e seção transversal.



Fonte: Autora

4.2 VIGA DE METAMATERIAL

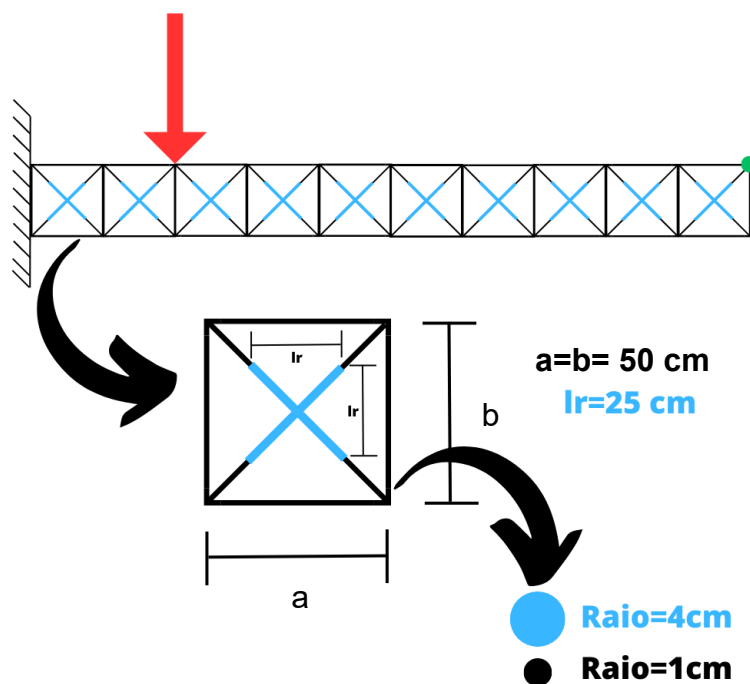
A próxima estrutura avaliada é uma de metamaterial, que promove a formação de bandas de atenuação na estrutura. A estrutura de metamaterial é a mesma utilizada no trabalho dos autores AN; FAN; ZHANG, (2020), uma treliça quadrada plana formada por células unitárias com ressonadores para formação de *bandgaps*. Neste modelo apresentado na Figura 4 a célula unitária é repetida 10 vezes, que consiste em uma estrutura quadrada com barras nas diagonais, e o centro dessas diagonais é utilizado um ressonador. A célula tem laterais de 50 cm e a medida do ressonador é de 25 cm, o raio das vigas é de 1 cm e do ressonador de 4 cm. A viga foi considerada engastada em uma extremidade e livre na outra, as características do material são o módulo de Young $E = 2,06e11 \text{ N/m}^2$ e densidade $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$.

A força é uma excitação harmônica $F(t) = 10e^{-i\omega t}$, o local de aplicação da força e o sentido está indicado por uma seta vermelha, representado na Figura 4,. A função

de transferência flexional foi avaliada no ponto final da estrutura na extremidade superior da mesma, indicado pelo ponto verde na figura.

A frequência de amostragem (F_s) utilizada para este caso foi de 6000 Hz, então o espectro da resposta é de 3000 Hz, já a transformada de Fourier tem tamanho de $Nfft = 2^{11}$, destas informações é possível obter a resolução do espectro de resposta 2,9197 Hz, sendo assim a cada 2,9197 Hz a função de transferência foi definida para a metaestrutura.

Figura 4- Viga de metamaterial composta por 10 células unitárias.



Fonte: Autora

A estrutura é formada por 111 elementos, a quantidade usada para fazer as análises da estrutura pelo método do elemento espectral, no caso da análise pelo método dos elementos finitos, cada elemento que forma a estrutura foi dividido em 4 novos elementos e em 6 novos elementos, totalizando uma análise com 444 elementos e 666 elementos.

4.3 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO RAI DO RESSONADOR

Para averiguar a influência do raio do ressonador na promoção das bandas de atenuação, a estrutura anterior foi testada com a variação de 1 cm no raio, iniciando com um raio de 3 cm até 8 cm. Os demais parâmetros da estrutura foram mantidos iguais, sendo

assim o material utilizado continua sendo aço tanto para estrutura quanto para o ressonador ($E = 2,06e11 N/m^2$ e $\rho = 7850 kg/m^3$), a viga tem 5 metros, sendo engastada em uma extremidade e livre na outra, a célula unitária é quadrada de lado $l=50$ cm, a medida do ressonador é 25 cm. A excitação harmônica é $F(t) = 10e^{-i\omega t}$, sua entrada é perpendicular a barra, entre a segunda e a terceira célula, enquanto a saída é na última célula unitária no topo. Da mesma forma o F_s e o tamanho da transformada de Fourier foram mantidos ($F_s = 6000$ Hz, $Nfft = 2^{11}$). Abaixo é apresentada a tabela Tabela 1 para apresentar quais são os parâmetros variáveis e fixos. E também quais são os valores utilizados quando o parâmetro apresenta variação.

Tabela 1-Parâmetros utilizados, variação do raio

Parâmetro	Variabilidade	Valores					
Raio do ressonador	Variável	0.04	0.03	0.05	0.06	0.07	0.08
Material estrutura	Fixo	Aço	$E=2.06e11$	$\rho=7850$			
Nº de células	Fixo	10					
Tamanho do Ressonador (RL)	Fixo	0.25					
Relação a/b	Fixo	1	a=0.5m	b=0.5m			
Rotação do Ressonador	Fixo	0					

Fonte: Autora

4.4 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO MATERIAL DO RESSONADOR

Para averiguar a influência do material do ressonador na promoção das bandas de atenuação, para essa apuração os materiais utilizados para o ressonador foram ferro ($E = 1,00e11 N/m^2$ e $\rho = 7870 kg/m^3$), alumínio ($E = 7,17e10 N/m^2$ e $\rho = 2700 kg/m^3$), epóxi ($E = 4,35e10 N/m^2$ e $\rho = 1180 kg/m^3$) e o material M ($E = 1,03e11 N/m^2$ e $\rho = 3925 kg/m^3$). Os demais parâmetros da estrutura foram mantidos iguais, o material utilizado continua sendo aço para estrutura ($E = 2,06e11 N/m^2$ e $\rho = 7850 kg/m^3$), a viga tem 5 metros, sendo engastada em uma extremidade e livre na outra, a célula unitária é quadrada de lado $l=50$ cm, a medida do ressonador é 25 cm e o raio de 8 cm. A excitação

harmônica é $F(t) = 10e^{-i\omega t}$, sua entrada é perpendicular a barra, entre a segunda e a terceira célula, enquanto a saída é na última célula unitária no topo. Da mesma forma o F_s e o tamanho da transformada de Fourier foram mantidos ($F_s = 6000$ Hz, $Nfft = 2^{11}$). Para comparação é apresentado o resultado de toda a estrutura em aço. Abaixo é apresentada a tabela que resume os parâmetros utilizados.

Tabela 2-Parâmetros utilizados, variação do material

Parâmetro	Variabilidade	Valores			
Raio do ressonador	Fixo	0.08			
Material ressonador	Variável	Aço	E=2.06e11	p=7850	Ferro E=1e11 p=7870
		M	E=1.03e11	p=3925	Epóxi E=4.35e9 p=1180
		Alumínio	E=7.17e10	p=2700	
Nº de células	Fixo	10			
Tamanho do Ressonador (RL)	Fixo	0.25			
Relação a/b	Fixo	1	a=0.5m	b=0.5m	
Rotação do Ressonador	Fixo	0			

Fonte: Autora

4.5 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO TAMANHO DO RESSONADOR (RL)

Afim de analisar a influência do tamanho do ressonador realizou-se a variação do tamanho do mesmo, considerando que ele teria 50% do tamanho de a, 40 % do tamanho de a e 60 % do tamanho de a, enquanto os demais parâmetros da estrutura permaneceram constantes, o material do ressonador e da estrutura foi considerado como sendo aço ($E = 2,06e11$ N / m² e $\rho = 7850$ kg / m³), o diâmetro do ressonador é 8 cm, a e b tem a mesma medida de 50 cm, enquanto a viga formada pelas células unitárias tem 5 m.

A excitação harmônica é $F(t) = 10e^{-i\omega t}$, sua entrada é perpendicular a barra, entre a segunda e a terceira célula, enquanto a saída é na última célula unitária no topo.

Da mesma forma o F_s e o tamanho da transformada de Fourier foram mantidos ($F_s = 6000$ Hz, $Nfft = 2^{11}$). Para comparação é apresentado o resultado de toda a estrutura em aço. Abaixo é apresentada a tabela que resume os parâmetros utilizados.

Tabela 3- Parâmetros utilizados variação do tamanho do ressonador

Parâmetro	Variabilidade	Valores			
Raio do ressonador	Fixo	0.08			
Material estrutura e ressonador	Fixo	Aço	$E=2.06e11$	$\rho=7850$	
Nº de células	Fixo	10			
Tamanho do Ressonador (RL)	Variável	0.25	$RL=0.5*a$	$RL=0.4*a$	$RL=0.6*a$
Relação a/b	Fixo	1	$a=0.5m$	$b=0.5m$	
Rotação do Ressonador	Fixo	0			

Fonte: Autora

4.6 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DA RELAÇÃO A/B

Para avaliar a influência dos parâmetros geométricos da estrutura na formação de bandas de atenuação foi alterada os valores da relação a/b os valores utilizados foram 2, 1 e 0,5, o valor de a foi mantido constante e igual a 0,5 m para manter o tamanho da viga de metamaterial. Sendo assim, ela continuou a ter 5 m e ser formada por 10 células unitárias e desta forma o valor de b variou de 0,25 a 1. As demais características adotadas pela viga foram raio do ressonador 8 cm, material do ressonador e estrutura aço ($E = 2,06e11 N/m^2$ e $\rho = 7850 kg/m^3$), o tamanho do ressonador de 25 cm. Da mesma forma que anteriormente a excitação harmônica é $F(t) = 10e^{-i\omega t}$, sua entrada é perpendicular a barra, entre a segunda e a terceira célula, enquanto a saída é na última célula unitária no topo. Da mesma forma a frequência de amostragem e o tamanho da transformada de Fourier foram mantidos ($F_s = 6000$ Hz, $Nfft = 2^{11}$). Abaixo é apresentada a tabela com os parâmetros da célula unitária:

Tabela 4- Parâmetros utilizados para variação do ressonador

Parâmetro	Variabilidade	Valores		
Raio do ressonador	Fixo	0.08		
Material estrutura	Fixo	Aço	E=2.06e11	p=7850
Nº de células	Fixo	10		
Tamanho do Ressonador (RL)	Fixo	0.25		
Relação a/b	Variável	a=0.5m	a/b=1/2	b=1
		a=0.5m	a/b=1	b=0.5
		a=0.5m	a/b=2	b=0.25
Rotação do Ressonador	Fixo	0		

Fonte: Autora

4.7 VIGA DE METAMATERIAL COM ROTAÇÃO DO RESSONADOR

Para avaliar a influência da posição do ressonador o mesmo foi rotacionado e a resposta de estrutura foi avaliada para os valores de ângulo de 0°, 15°, 30° e 45°. Os demais parâmetros da estrutura foram mantidos fixos e adotados da seguinte maneira, raio do ressonador de 8 cm, tamanho do ressonador 25 cm, material da estrutura e do ressonador aço ($E = 2,06e11 \text{ N/m}^2$ e $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$), relação a/b igual a 1. Da mesma forma que anteriormente a excitação harmônica é $F(t) = 10e^{-i\omega t}$, sua entrada é perpendicular a barra, entre a segunda e a terceira célula, enquanto a saída é na última célula unitária no topo. Da mesma forma a frequência de amostragem e o tamanho da transformada de Fourier foram mantidos ($F_s = 6000 \text{ Hz}$, $Nfft = 2^{11}$). Um resumo dos parâmetros utilizados é apresentado na Tabela 5.

Tabela 5- Parâmetros utilizados para rotação do ressonador

Parâmetro	Variabilidade	Valores			
Raio do ressonador	Fixo	0.08			
Material estrutura	Fixo	Aço	E=2.06e11	p=7850	
Nº de células	Fixo	10			
Tamanho do Ressonador (RL)	Fixo	0.25			
Relação a/b	Fixo	1	a=0.5m	b=0.5m	
Rotação do Ressonador	Variável	0	15	30	45

Fonte: Autora

4.8 VIGA DE METAMATERIAL OTIMIZAÇÃO

Para determinar as melhores estruturas para atenuação de determinada faixa de frequência foi utilizado no Matlab um algoritmo genético. Inicialmente foram definidos os intervalos de cada um dos parâmetros a serem considerados (raio do ressonador, material, tamanho do ressonador, relação a/b, rotação do ressonador) os valores máximos e mínimos estão apresentados na Tabela 6. Os valores do material variam de 1 a 5 para implementação do algoritmo genético, mas eles correspondem a materiais utilizado no ressonador (aço, ferro, alumínio, epóxi e M), suas correspondências e valores utilizados para densidade e módulo de elasticidades estão apresentados na Tabela 7.

O parâmetro de crossover utilizado foi o heurístico, a fração de crossover é de 0,85, a função foi definida para ter como resposta apenas a melhor combinação de fatores, o elitismo é 1, o tamanho da população inicial é 8, por ser um problema de minimização restrita a mutação é adaptação de mutação viável, o critério de seleção é roleta e a tolerância definida é 1e-6.

Tabela 6- Valores máximos e mínimos dos parâmetros para otimização

Parâmetro	Mínimo	Máximo
Raio do ressonador	0,03	0,08
Material	1	5
Tamanho do ressonador	0,4*a	0,7*a
Relação a/b	0,5	2
Rotação do ressonador	0°	45°

Fonte: Autora

Tabela 7- Parâmetros e números de identificação dos materiais do ressonador

Material do ressonador	Número de identificação	Módulo de elasticidade (E) N / m^2	Densidade (ρ) kg / m^3
Aço	1	2.06e11	7850
Ferro	2	1e11	7870
Alumínio	3	7.17e10	2700
Epóxi	4	4.35e9	1180
M	5	1.03e11	3925

Fonte: Autora

Os parâmetros utilizados para parada são 50 tentativas para definir a melhor combinação para essa quantidade de gerações, ao atingir esse número de combinações o próprio programa encerra as combinações e retorna o valor dos parâmetros da estrutura que apresentam melhor atenuação. A maior atenuação é calculada com base na função objetivo calculada pela equação (121)

$$\frac{1}{abs(\min(F) + rms(F))}$$

Em que :

$$F=10*\log(abs(H1')); \quad (121)$$

onde:

H1 é a amplitude de resposta da estrutura

RMS é a média quadrática da amplitude da função

Então definiu-se faixas de frequência para que o programa desenvolvido retornasse a melhor combinação de fatores estruturais para gerar atenuação naquela faixa de frequência. As faixas definidas estão apresentadas na Tabela 8:

Tabela 8-Faixas de frequência utilizadas para otimização

Faixa	Intervalo (Hz)
1	0 a 1000
2	0 a 500
3	100 a 300

Fonte: Autora

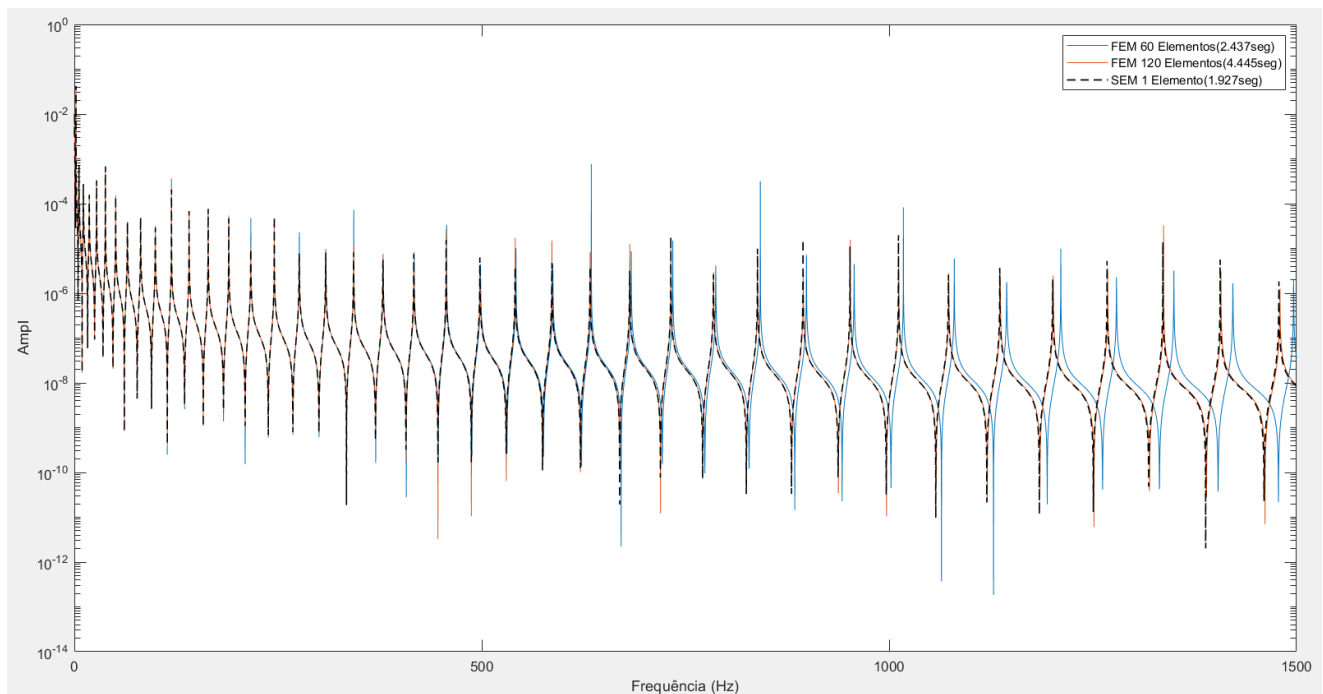
O algoritmo retorna valores fracionados de reposta para cada um dos parâmetros. Todos os valores podem ser utilizados com valores parciais para o cálculo da estrutura, exceto o valor do parâmetro do material, para isso deve ser sempre considerado o valor da dezena inteira para definição do material, sendo assim se o programa retornar 3,5 deve ser usado 3 e então o material será o alumínio. Para avaliar a efetividade da otimização um dos parâmetros apresentados foi alterado o material, o que possibilita também analisar a influência da alteração do material na resposta da estrutura.

5 RESULTADOS

5.1 VIGA SEÇÃO QUADRADA

Para verificar o comportamento da viga de seção quadrada primeiramente foram geradas as respostas flexionais da estrutura, o refinamento da malha de elementos finitos foi de 60 elementos, 120 elementos e foi comparada a resposta flexional calculada por um único elemento espectral, esta comparação é apresentada no Gráfico 1:

Gráfico 1- Funções de transferência flexionais: comparação entre o método dos elementos finitos com 60 e 120 elementos e o método do elemento espectral com 1 elemento para uma viga de 3 metros



Fonte: Autora

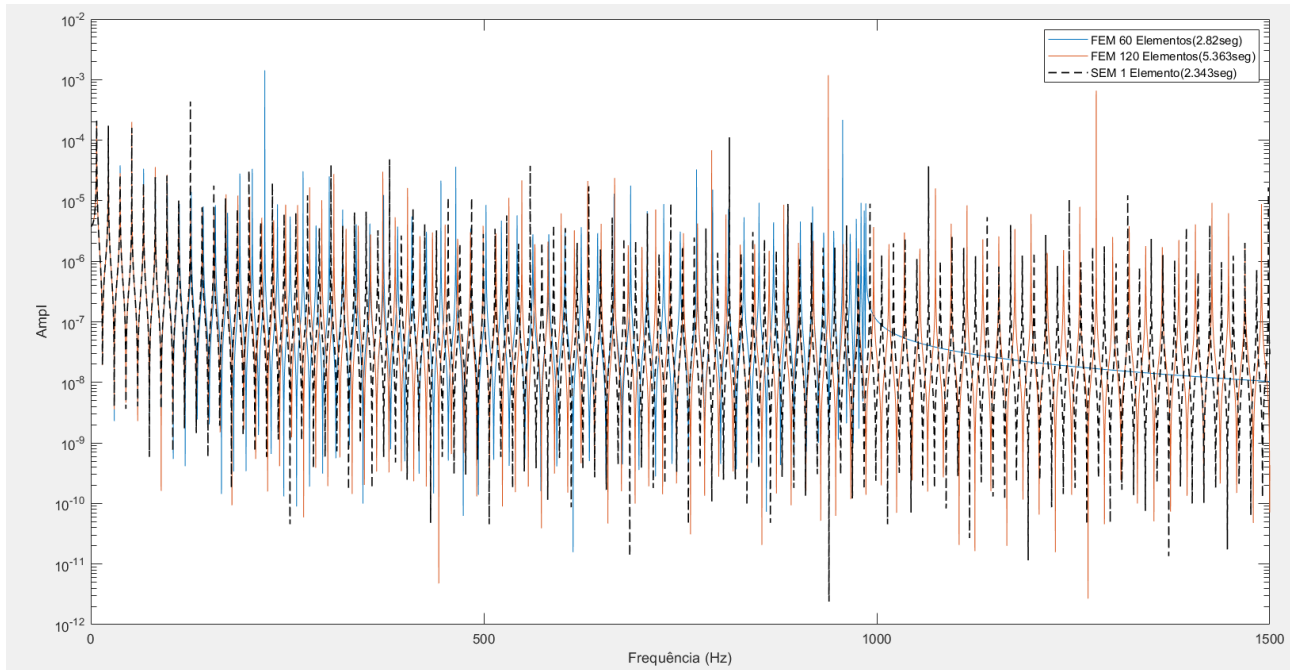
A partir do Gráfico 1 é possível perceber que o refinamento da malha de elementos finitos o cálculo da resposta da estrutura se aproxima dos resultados obtidos pelo método do elemento espectral. Nas frequências mais baixas é possível perceber uma boa concordância na resposta calculada, mesmo com um número pequeno de elementos o método dos elementos finitos teve resultado próximo ao método do elemento espectral. Por outro lado, ao avaliar a resposta da estrutura nas frequências mais altas é necessário um maior número de elementos para o método dos elementos finitos, um refinamento da malha para que a resposta se aproxime do método do elemento espectral.

Ao analisar o gráfico 1 a resposta da viga em frequências até 250 Hz percebe-se que os resultados apresentam boa concordância entre si, a partir dessa frequência a amplitude passa a ter picos mais acentuados para o cálculo com 60 elementos. Em frequências próximas a 450 Hz a resposta da estrutura calculada pelo método dos elementos finitos com 120 elementos também apresenta incompatibilidade da amplitude da resposta da estrutura. Por fim os gráficos passam a apresentar diferenças nas frequências de formação de picos e vales, o que demonstra que o maior refinamento da malha aproxima a resposta do MEF a resposta calculada pelo MEE, se o número de elementos finitos aumentasse a resposta seria mais próxima da calculada pelo método do elemento espectral para as frequências mais altas também.

Cabe destacar a diferença no tempo de cálculo da estrutura, o cálculo da resposta da estrutura com 120 elementos pelo método dos elementos finitos é aproximadamente 80 % maior do que o cálculo com 60 elementos. Já a comparação do método do elemento espectral com o método dos elementos finitos com malha de 60 elementos, o tempo de cálculo é 21 % menor para o MEE. Por fim, a comparação do MEF com 120 elementos e o MEE o tempo de cálculo é quase 2,5 vezes maior para o método do elemento espectral. Desta maneira, ao aumentar o refinamento da malha obtêm-se respostas mais precisas, no entanto têm-se um aumento do tempo computacional.

Em seguida foram calculadas as respostas longitudinais da estrutura, o gráfico de resposta obtido está apresentado no Gráfico 2:

Gráfico 2-Funções de transferência longitudinais: comparação entre o método dos elementos finitos com 60 e 120 elementos e o método do elemento espectral com 1 elemento para uma viga de 3 metros



Fonte: Autora

Inicialmente é possível verificar que em frequências próximas a 1000 Hz, o método dos elementos finitos com 60 elementos não consegue mais calcular a resposta da estrutura. Essa situação iria se repetir para o cálculo com 120 elementos caso a análise do comportamento da estrutura fosse solicitada para frequências mais altas. Essa inexistência de resposta em frequências mais altas evidencia a dificuldade de utilizar o método dos elementos finitos para altas frequências, sendo necessário um maior número de elementos para determinação da resposta da estrutura.

A resposta da viga em frequências até 50 Hz apresenta boa concordância entre os métodos a partir dessa frequência a amplitude passa a ter picos mais acentuados para o cálculo com 60 elementos. Em frequências próximas a 200 Hz a resposta da estrutura calculada pelo método dos elementos finitos com 120 elementos também apresenta incompatibilidade da amplitude da resposta da estrutura. Por fim os gráficos passam a apresentar diferenças nas frequências, que passa a ser diferente nos picos e vales em frequências próximas a 300 Hz. Da mesma forma que na resposta flexional calculada o maior número de elementos na malha aproxima mais os resultados calculados pelo método dos elementos finitos aos calculados pelo método do elemento espectral.

O tempo de processamento para as respostas longitudinais é maior que para as respostas flexionais da estrutura. A comparação entre o tempo de cálculo entre o MEF com 60 elementos e o MEF com 120 elementos é de aproximadamente o dobro quando é utilizado o maior número de elementos. Já ao comparar o MEF com malha de 60

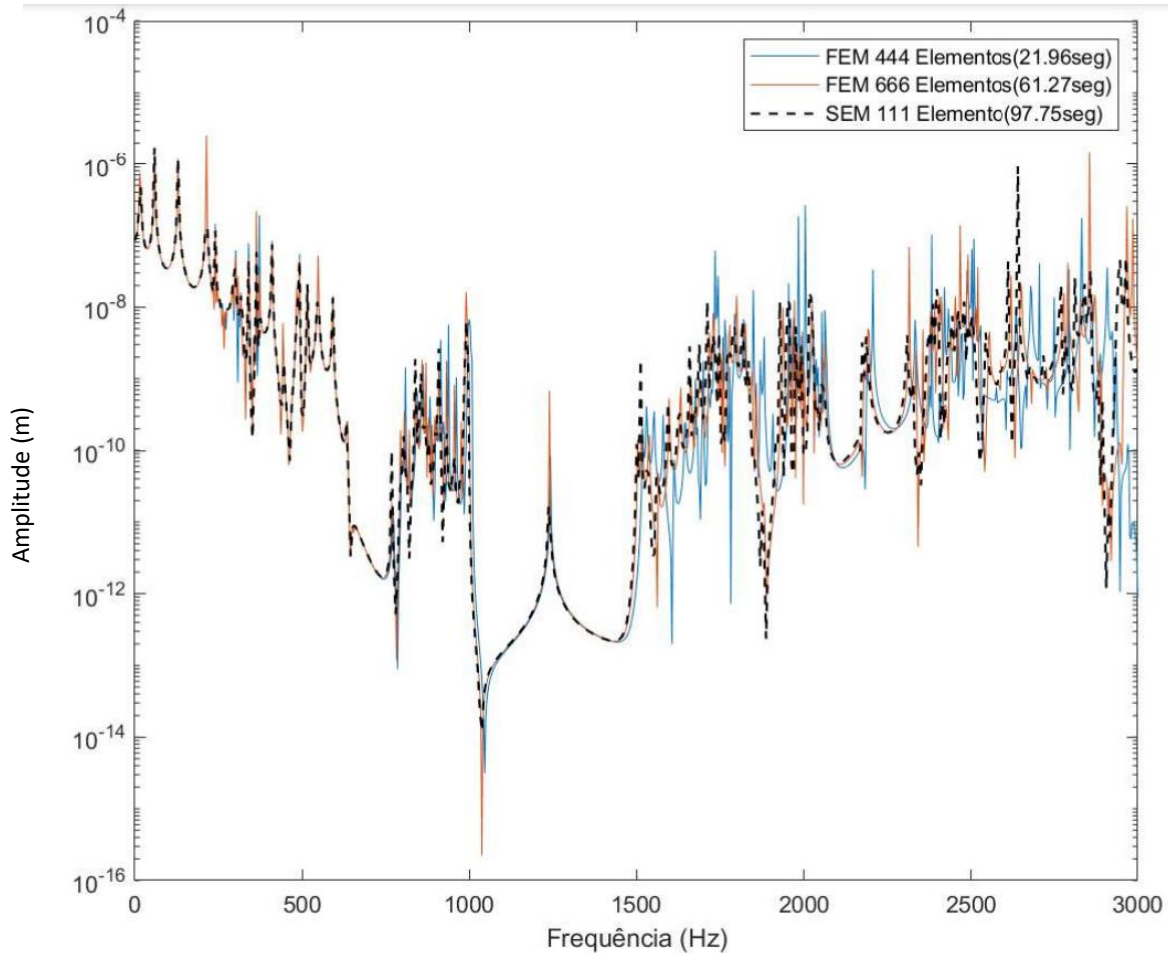
elementos com o método do elemento espectral, o tempo de cálculo é apenas 20 % maior para o método dos elementos finitos. No entanto ao comparar o tempo de cálculo do MEF com malha de 120 elementos e do MEE, têm-se que o método do elemento espectral calcula a resposta da estrutura em 2/5 do tempo.

Para as respostas longitudinais foi possível verificar a dificuldade de cálculo de resposta da estrutura para o método dos elementos finitos, sendo necessário um maior número de elementos para obtenção da resposta em frequências mais altas. Além disso, foi novamente verificado que o aumento da malha para obtenção de respostas mais precisas, promove o aumento do tempo computacional.

5.2 VIGA DE METAMATERIAL: MEE X MEF

Na avaliação da viga de metamaterial a comparação da resposta gerada pelos 111 elementos estruturais utilizados pelo método do elemento espectral, os 444 e posteriormente os 666 elementos do método dos elementos finitos resultou no Gráfico 3:

Gráfico 3- Funções de transferência flexionais: comparação entre método do elemento espectral com 111 elementos e método dos elementos finitos com 444 elementos e 666 elementos para uma viga de metamaterial



Fonte: Autora

A partir do gráfico é possível perceber que o refinamento da malha de elementos finitos o cálculo da resposta da estrutura se aproxima dos resultados obtidos pelo método do elemento espectral, que fica evidente em frequências próximas a 1500 Hz. A resposta da viga de metamaterial em frequências até 250 Hz tem boa concordância entre o método dos elementos finitos e o método do elemento espectral, a partir dessa frequência a amplitude passa a ter picos mais acentuados para o cálculo com a metodologia do método dos elementos finitos. A maior semelhança entre as respostas obtidas para estrutura pelo MEF com 666 elementos e o MEE evidencia que o refinamento da malha calcula com maior precisão a resposta da estrutura.

Ao avaliar o tempo de processamento o método dos elementos finitos com malha de 666 elementos demorou aproximadamente 3 vezes mais para obter as respostas da estrutura do que a malha com 444 elementos. Já ao comparar o tempo de cálculo de ambas as malhas do MEF com o método do elemento espectral, o tempo de cálculo é 4,5 vezes maior para o MEE em relação a malha de 444 elementos e 50 % maior que a malha com 666 elementos. Este aumento no tempo de processamento ocorre, pois o método do

elemento espectral calcula a matriz inversa, isso é influenciado pela resolução definida, neste caso ela é de 2,9297, o que indica que a cada 2,9297 Hz terá um ponto de cálculo da resposta da estrutura, sendo assim, o gráfico tem 1025 pontos e para cada um desses pontos é necessário calcular uma matriz inversa, o que aumenta consideravelmente o tempo de cálculo da estrutura. É possível reduzir esse tempo de cálculo diminuindo a resolução do espectro, no entanto isso diminui também a precisão do gráfico, então é necessário encontrar um ponto de equilíbrio entre a precisão desejada e o tempo de cálculo.

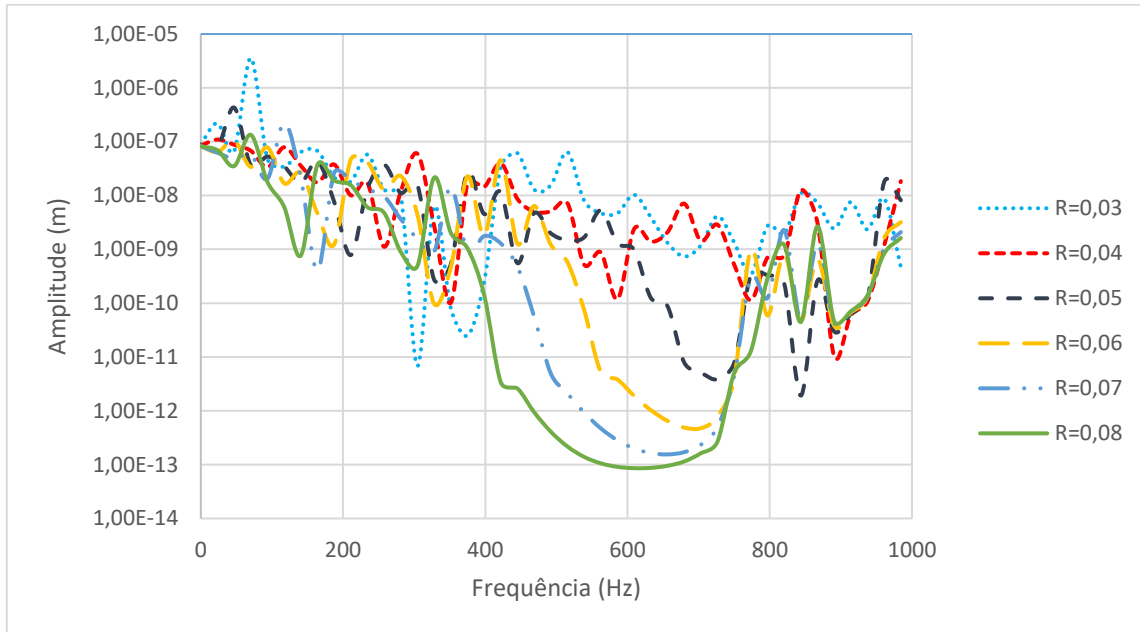
Cabe destacar que o tempo de cálculo desta estrutura é maior para o método do elemento espectral o que diverge do resultado obtido pela viga de seção retangular, no entanto o refinamento utilizado para viga de metamaterial também é menor, na viga retangular o número de elementos foi aumentado em 60 vezes e 120 vezes, já na viga de metamaterial o número de elementos foi aumentado 4 vezes e 6 vezes, desta maneira o tempo de cálculo maior é justificado.

Por este gráfico é possível observar primeiramente a formação de *bandgaps* em 5 faixas de frequência que são aproximadamente 770-860 Hz, 989-1200 Hz, 1210 Hz-1473 Hz e 1950-2050 Hz e 2070 Hz-2182 Hz, são locais em que a resposta da estrutura tem amplitude atenuada. Essa atenuação nesta estrutura acontece por dois mecanismos principalmente a ressonância local e espalhamento de Bragg.

5.3 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO RAIOS

A resposta da estrutura de metamaterial calculada pelo método do elemento espectral, que apresenta o resultado exato, foi utilizada para comparar as respostas da estrutura com a variação de seus parâmetros. Ao avaliar a estrutura de metamaterial com 6 raios diferentes é notável a influência deste parâmetro principalmente em frequências entre 400 e 750 Hz. Para melhor visualização o gráfico será apresentado em 3 faixas de frequência a primeira é de 0 a 1000 Hz e é apresentada no Gráfico 4.

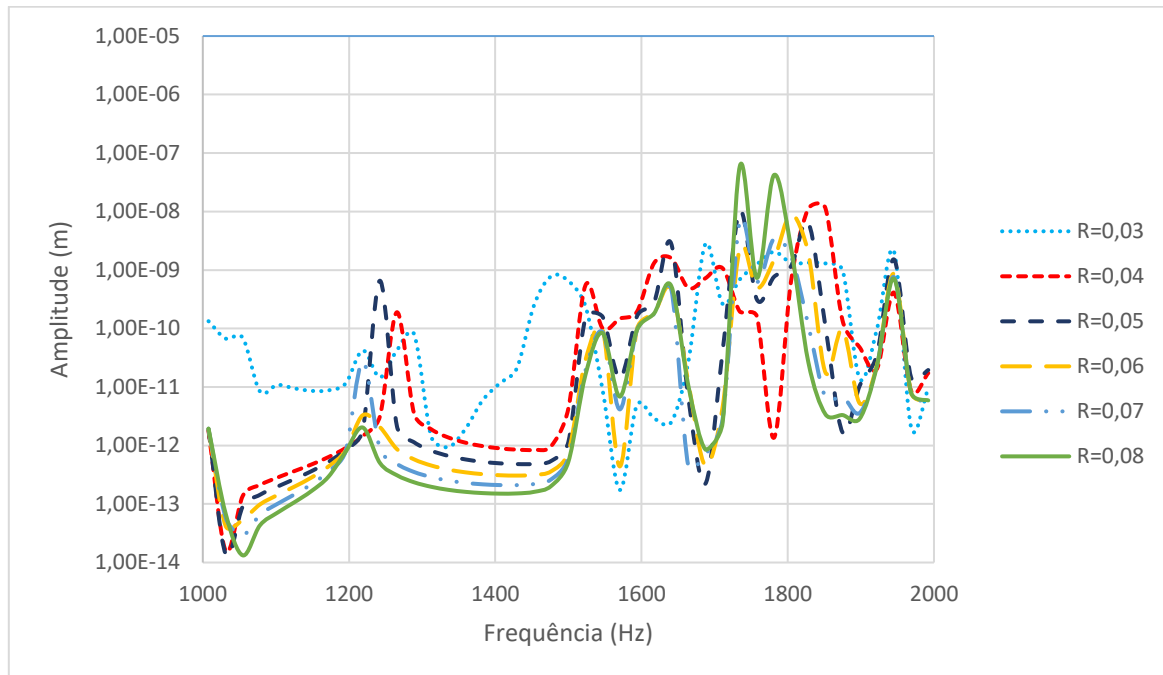
Gráfico 4- Variação do Raio do Ressonador de 0 a 1000 Hz



Fonte: Autora

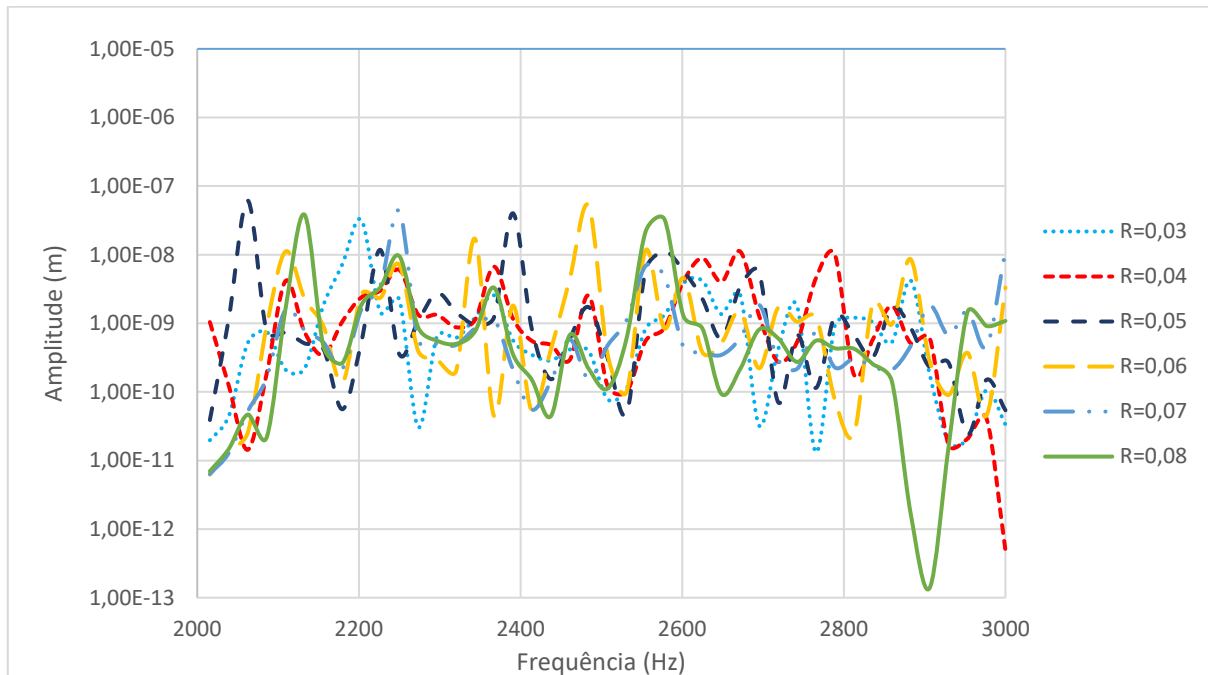
Verifica-se claramente que a maior e mais profunda banda de atenuação é gerada quando o raio do ressonador é 8 cm, localizada entre aproximadamente 425 Hz e 725 Hz. Seguindo o mesmo formato de curva, no entanto para uma menor faixa de frequência e menor atenuação os raios de 7 cm, 6 cm e 5 cm também apresentam atenuações. Além disso, é possível verificar atenuação consideráveis na frequência de 300 e 390 Hz para o raio de 3 cm, por outro lado em uma frequência próxima a 80 Hz a estrutura apresenta a maior amplitude de resposta do que todo os gráficos. Também ocorrem atenuações consideráveis na frequência de 825 Hz para o raio de 5 cm e 890 Hz para o raio de 4 cm. Em seguida é apresentado o Gráfico 5 para variação da amplitude para frequências entre 1000 e 2000 Hz.

Gráfico 5-Varição do raio do ressonador de 1000 a 2000 Hz



Fonte: Autora

É possível verificar claramente que a linha verde que corresponde a resposta da estrutura quando o raio do ressonador é 8 cm se localiza mais abaixo na maior parte dos trechos do gráfico, no entanto ela apresenta o pior comportamento entre 1720 Hz e 1800 Hz onde a atenuação é menor do que a produzida pelos outros raios. O raio de 3 cm apresenta o melhor comportamento ao ser comparado aos demais raios na faixa de 1560 a 1660 Hz, por outro lado nas faixas de 1000 a 1200 Hz e 1300 a 1500 Hz a estrutura apresenta o pior desempenho. O raio de 4 cm apresenta apenas um ponto de vale próximo a 1780 Hz, nas demais frequências ele apresenta um comportamento semelhante as demais estruturas. O raio de 5 cm apresenta um pico próximo a 1240 Hz e a melhor resposta nas frequências de 1690 Hz e 1890 Hz. Os raios de 6 e 7 cm permanecem sempre com uma resposta média, sem apresentar nenhum ponto com pico ou vale maior que os demais raios. Em seguida é apresentado o Gráfico 6 que corresponde a resposta da estrutura entre 2000 e 3000 Hz.

Gráfico 6- Variação do raio do ressonador de 2000 a 3000 Hz

Fonte: Autora

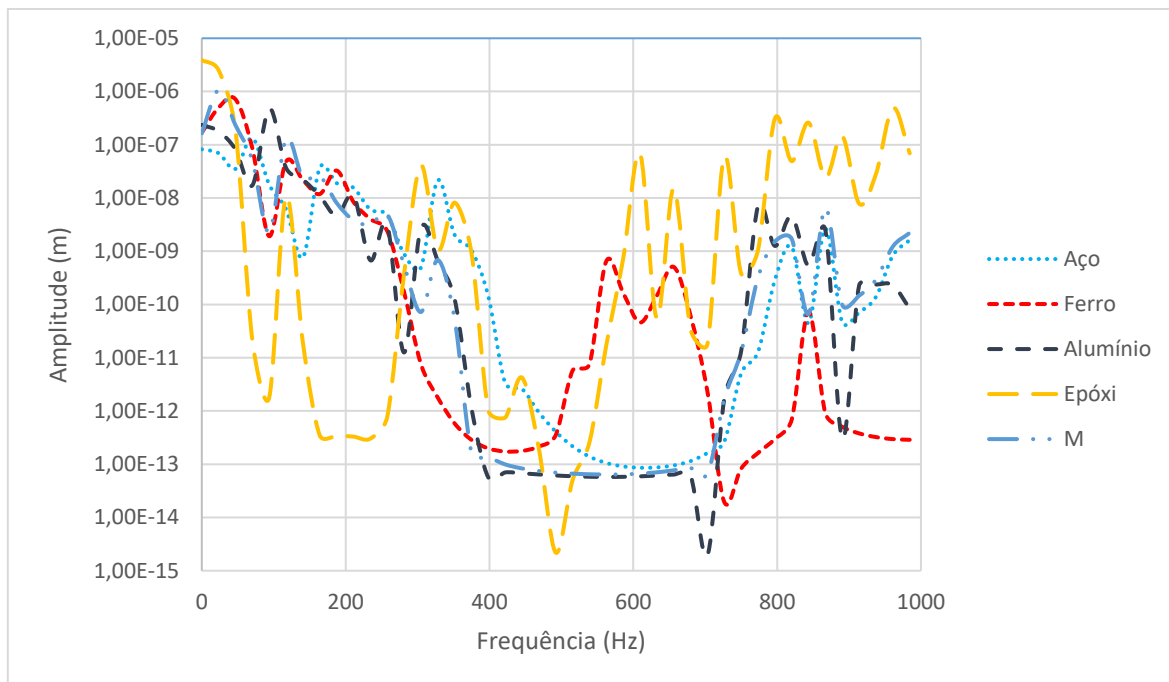
No último trecho do gráfico as linhas estão muito próximas umas às outras, e só apresentam duas reduções significativas uma próxima a 2900 Hz para o raio de 8 cm e uma próxima a 3000 Hz para o raio de 4 cm. O raio de 3 cm apresenta um pico na frequência de 2200 Hz, e 3 vales nas frequências de 2280, 2700 e 2780 Hz. O raio de 4 cm apresenta um pico de 2620 a 2660 Hz e na frequência de 2780 Hz. O raio de 5 cm apresenta 2 picos significativos em 2050 Hz e 2390 Hz e dois vales em 2190 e 2420 Hz. O raio de 6 cm tem picos nas frequências de 2100, 2350, 2480 e 2880 Hz e vales nas frequências de 2370 e 2800 Hz. O raio de 7 cm apresenta apenas um pico significativo na frequência de 2250 Hz. O raio de 8 cm apresenta 2 picos nas frequências de 2120 e 2580 Hz e um vale, o maior de todos na frequência de 2900 Hz.

É importante destacar que a partir da verificação do gráfico é possível definir o raio de 0,08 como o melhor para geração de bandas de atenuação na maior faixa de frequências, principalmente a partir de 400 Hz.

5.4 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO MATERIAL DO RESSONADOR

Para variação do material do ressonador que pode ser aço, alumínio, ferro, epóxi e M, a resposta da estrutura será apresentada em 3 faixas de frequência para melhor visualização a primeira é de 0 a 1000 Hz, apresentada no Gráfico 7.

Gráfico 7- Variação do material do ressonador de 0 a 1000 Hz

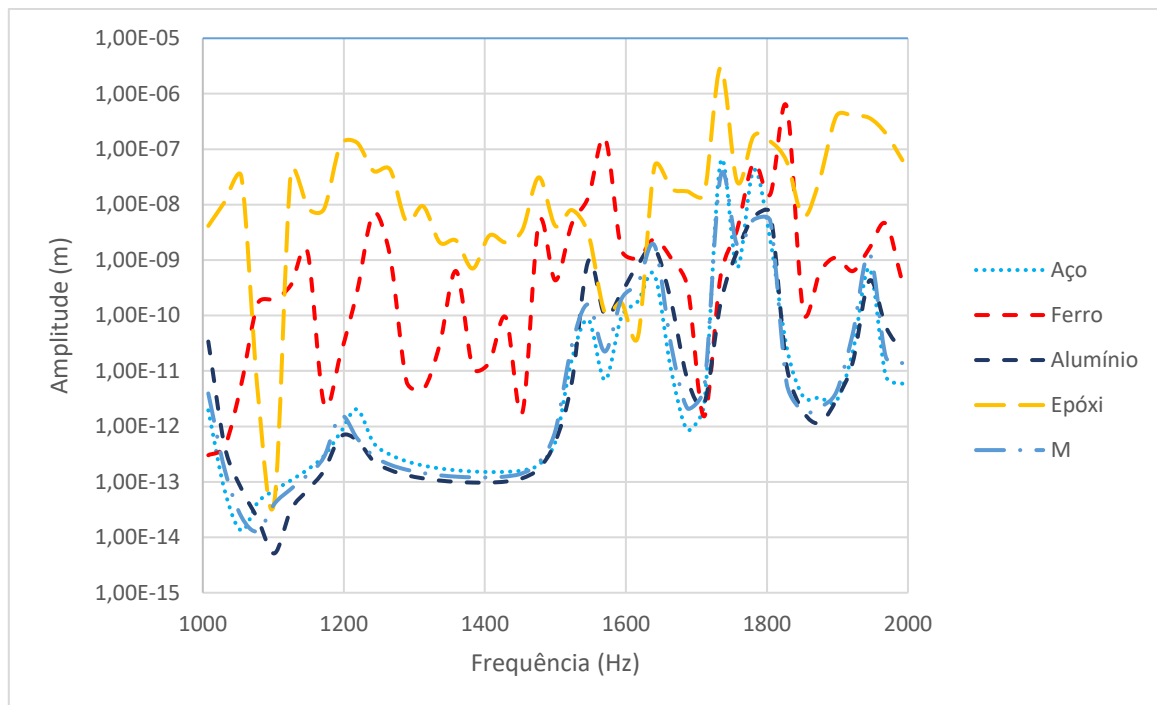


Fonte: Autora

Na figura é possível identificar para o material epóxi a formação de 3 bandas de atenuação em baixas faixas de frequência enquanto para frequências mais altas, acima de 450 Hz, essa atenuação não ocorre, sendo o pior entre os materiais estudados. Já quando comparado a curva do material M com o alumínio é possível verificar uma grande semelhança entre as duas principalmente na faixa entre 300 e 800 Hz, onde apresentam atenuação significativa entre 400 e 750 Hz. Também é possível verificar que o ferro se utilizado como material do ressonador não produzirá grande atenuação em frequências entre 500 e 700 Hz, mas apresenta uma boa redução entre 750 e 1000 Hz. O aço como material do ressonador não apresenta nenhum pico ou vale de destaque se mantendo sempre entre as demais curvas.

Para frequências entre 1000 e 2000 Hz a resposta das estruturas está apresentada no Gráfico 8 onde é possível verificar que o ressonador de aço, alumínio e de M, produz o mesmo comportamento com bandas de atenuação em frequências bem próximas e com amplitudes muito semelhantes. Enquanto o ressonador feito com epóxi não produz bandas de atenuação significativas, exceto em frequências próximas a 1100 Hz. Enquanto o ressonador de ferro tem uma resposta com grande variabilidade apresentando diversos pontos de atenuação, mas menos evidentes que do aço, alumínio e do material M.

Gráfico 8- Variação do material do ressonador de 1000 a 2000 Hz

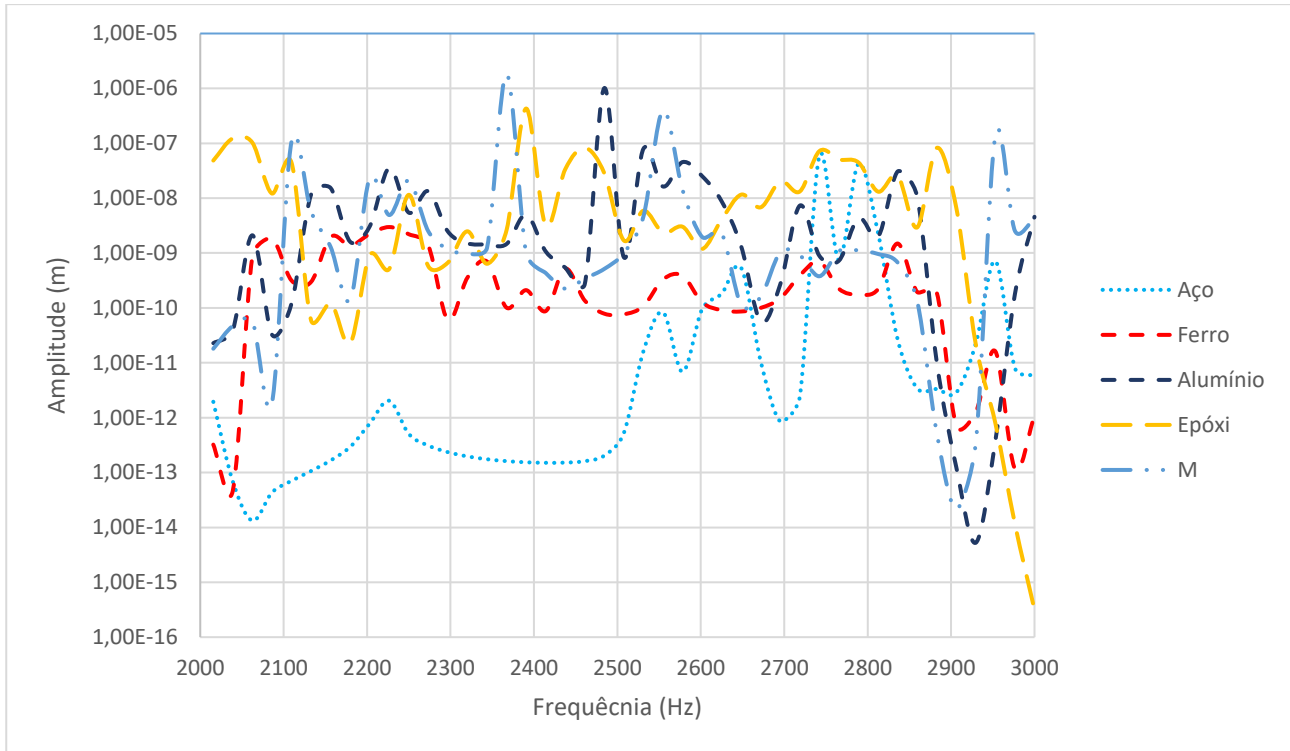


Fonte: Autora

Os materiais com menor atenuação são o epóxi e o ferro, enquanto aço, alumínio e o material M apresentam os melhores resultados de atenuação.

Em seguida no Gráfico 9, são apresentadas as respostas da estrutura para frequências entre 2000 e 3000 Hz. O material alumínio apresenta um pico e um vale significativo em 2480 Hz e 2930 Hz respectivamente. O epóxi apresenta um vale expressivo próximo a 3000 Hz. O material M apresenta 4 picos significativos nas frequências de 2120, 2360, 2550 e 2950 Hz. Em linhas gerais o aço apresenta melhor resultado para frequências acima de 2000 Hz até 2850 Hz. Enquanto os demais matérias nesta faixa de frequência apresentam grande alternância de picos e vales sendo difícil definir o pior comportamento.

Gráfico 9- Variação do material do ressonador de 2000 a 3000 Hz

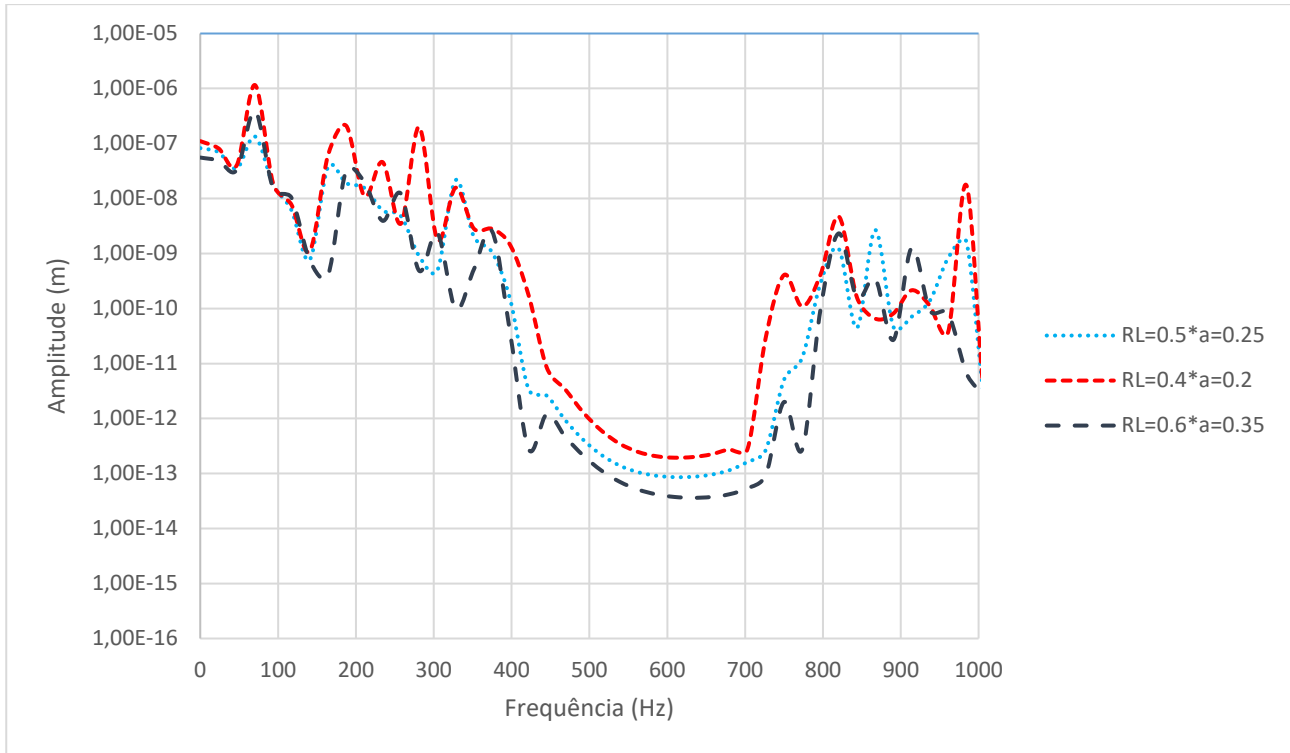


Fonte: Autora

5.5 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DO TAMANHO DO RESSONADOR (RL)

A fim de analisar a influência do tamanho do ressonador realizou-se a variação do tamanho do mesmo, a resposta da estrutura foi dividida em faixas de frequência para melhor visualização do comportamento da estrutura e o resultado para a primeira faixa compreendida entre 0 e 1000 Hz está apresentada no Gráfico 10.

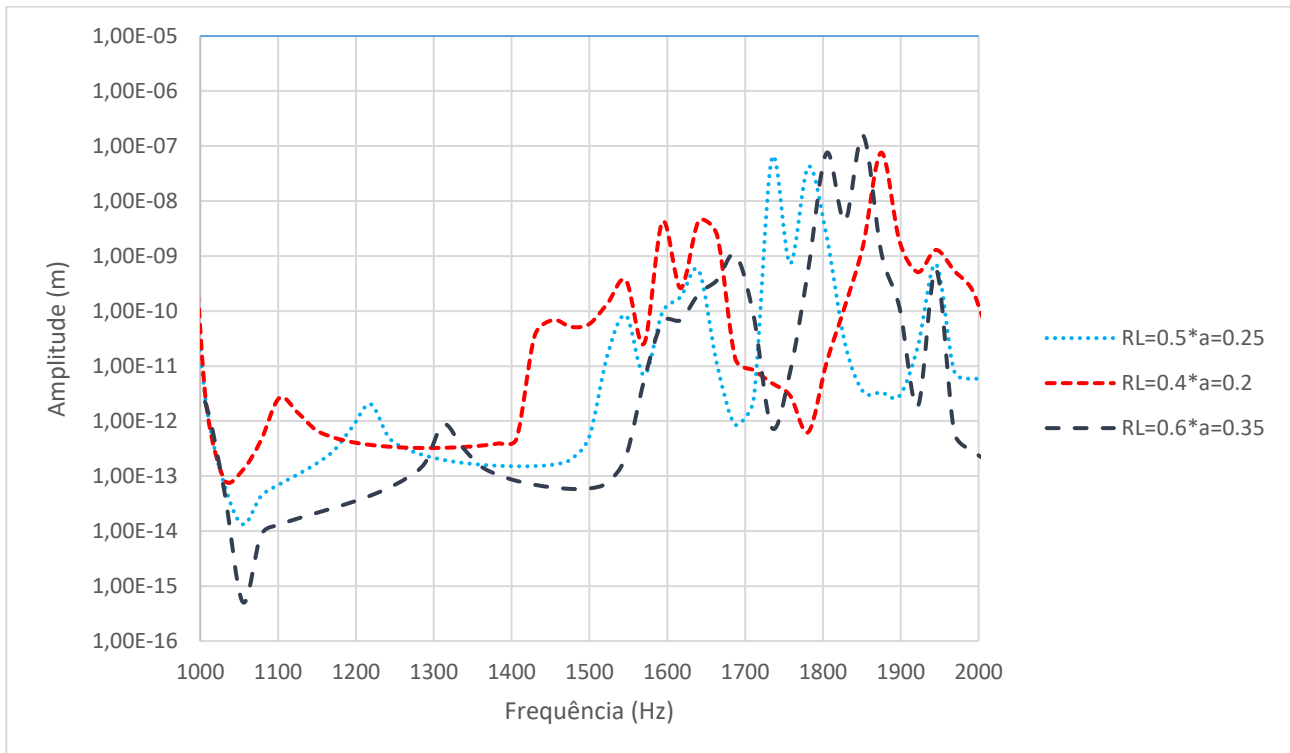
Gráfico 10- Variação do tamanho do ressonador de 0 a 1000 Hz



Fonte: Autora

O gráfico todo apresenta uma boa concordância, no entanto para essa faixa inicial, o RL com maior tamanho que é 35 cm apresentou maior atenuação para as frequências analisadas mesmo que esta atenuação seja apenas ligeiramente maior que a produzida pelos demais tamanhos de ressonador. A seguir a resposta da estrutura para frequências entre 1000 e 2000 Hz é apresentada no Gráfico 11.

Gráfico 11- Variação do tamanho do ressonador de 1000 Hz a 2000 Hz

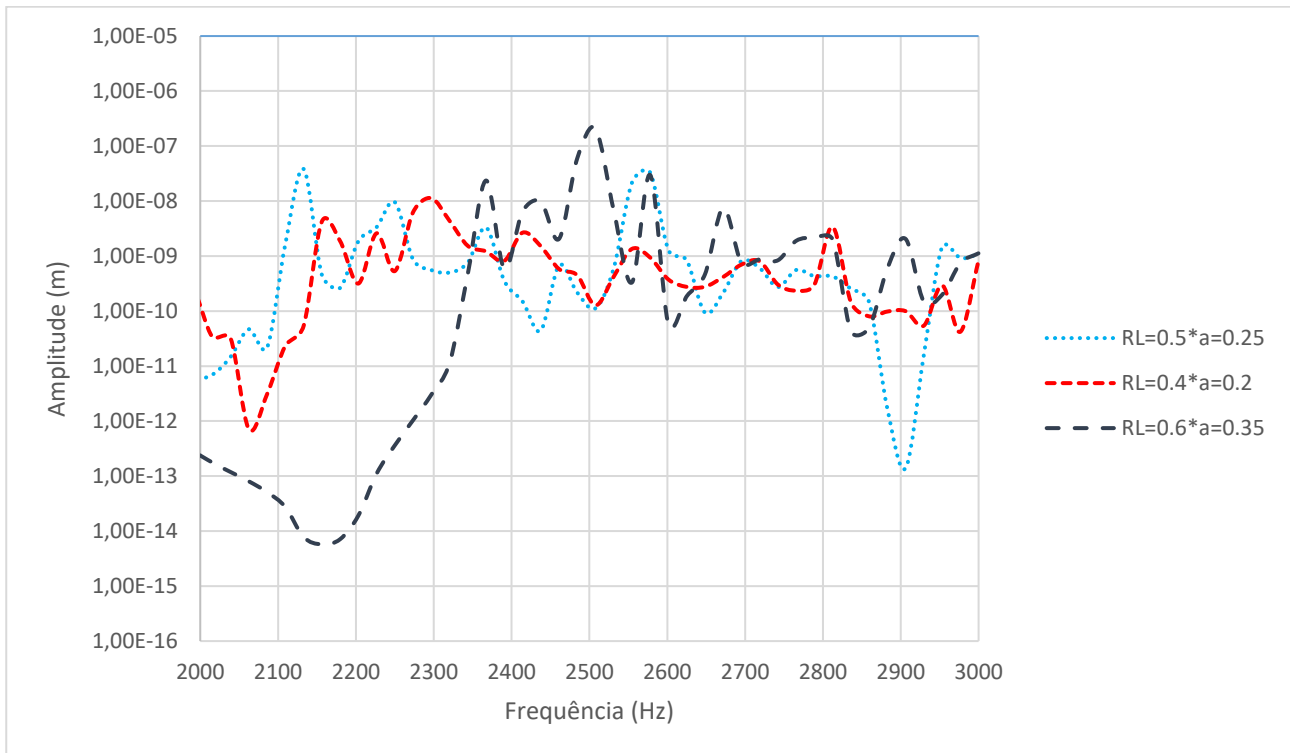


Fonte: Autora

Para esta faixa de frequências o gráfico apresenta maior intersecção entre as linhas para cada tamanho de ressonador, no entanto é possível perceber que o maior raio do ressonador se mantém com maior banda de atenuação na maior parte das frequências, cabe destacar que o menor ressonador apresenta maior atenuação apenas para frequências próximas a 1800 Hz. É perceptível que o formato do gráfico para o RL com tamanho de 40 % o valor a, para as frequências de 1580 a 1700 Hz se repete conforme o RL aumenta nas frequências de 1740 a 1850 e depois de 1810 a 1910 Hz.

Por fim para frequências entre 2000 e 3000 Hz, a resposta da estrutura é apresentada no Gráfico 12, onde é possível perceber uma grande atenuação para o tamanho de 35 cm até a frequência de aproximadamente 2325 Hz, após esta frequência a atenuação se torna menos significativa, cabe apenas ressaltar uma banda de parada mais profunda para o tamanho de 25 cm em faixas de frequência próximas a 2900 Hz.

Gráfico 12- Variação do tamanho do ressonador de 2000 a 3000 Hz



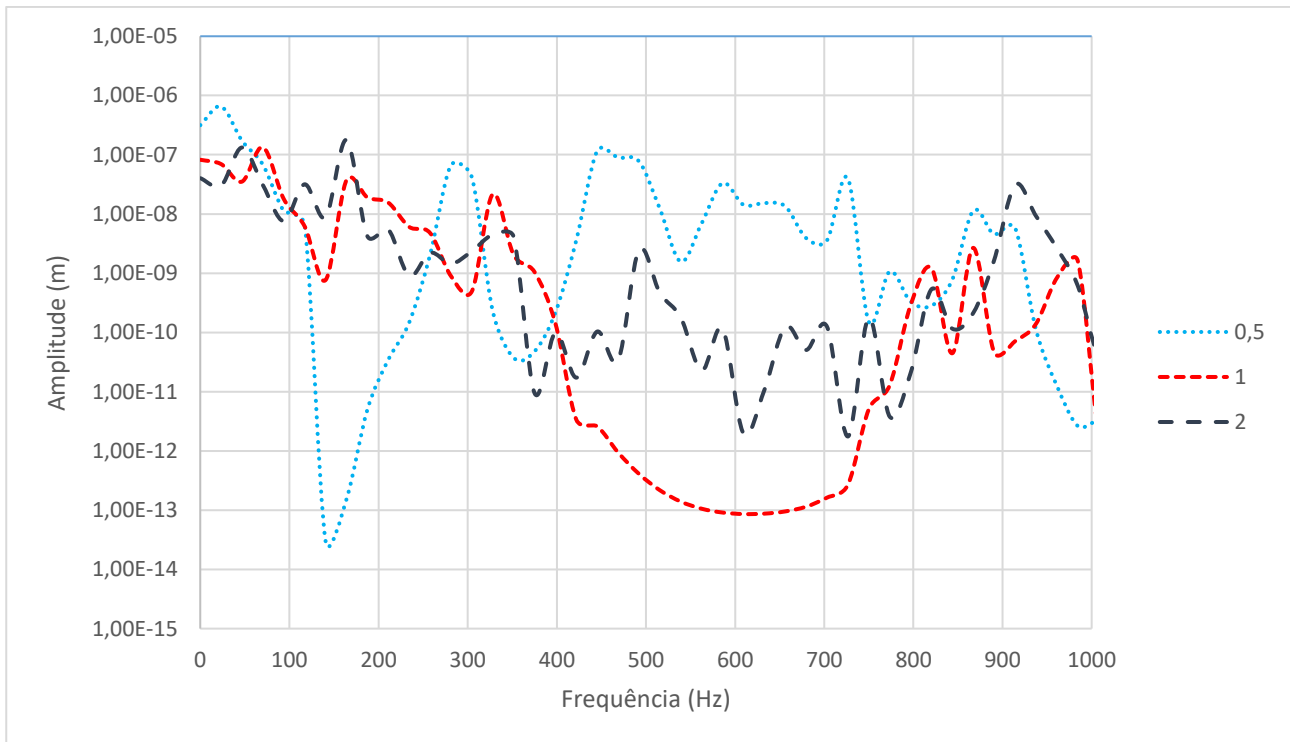
Fonte: Autora

A partir da frequência de 2350 Hz os gráficos se interceptam diversas vezes, no entanto é notável o pior comportamento da estrutura para o RL com tamanho de 60 % o valor de a.

5.6 VIGA DE METAMATERIAL COM ALTERAÇÃO DA RELAÇÃO A/B

Um dos parâmetros geométricos da estrutura que foi avaliado é a relação a/b da estrutura, que é a relação entre a altura e comprimento da célula unitária da viga. Os gráficos de resposta da estrutura de metamaterial gerados para as três faixas de frequência estão apresentados abaixo, o Gráfico 13 é para a faixa de 0 a 1000 Hz, o Gráfico 14 é para faixa de 1000 a 2000 Hz e por fim o Gráfico 15 é para o intervalo de 2000 a 3000 Hz.

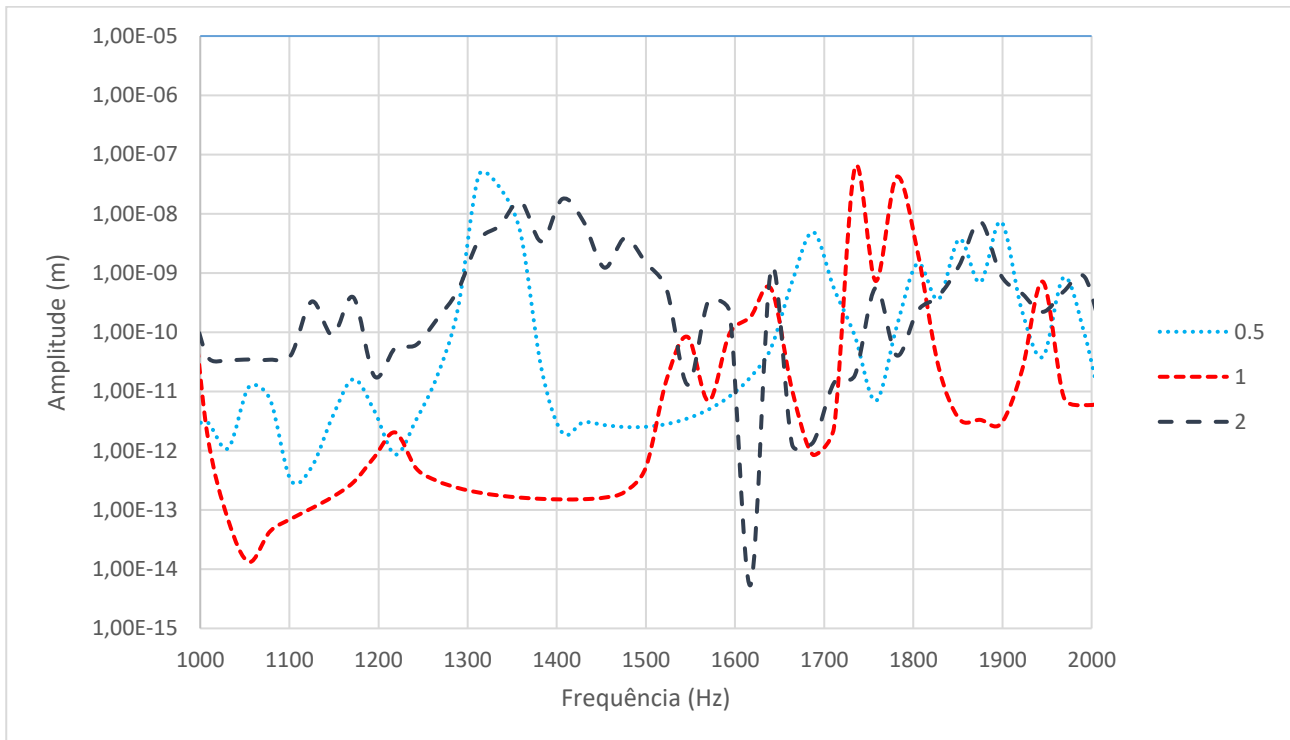
Gráfico 13- Variação da relação a/b para a faixa de 0 a 1000 Hz



Fonte: Autora

A relação $a/b = 0,5$ produz boa atenuação na faixa de 120 a 250 Hz, depois desta faixa apresenta menor atenuação até 930 Hz quando volta a apresentar boa atenuação. Já $a/b = 1$ apresenta boa resposta entre 400 e 750 Hz. Já a relação $a/b = 2$ apresenta comportamento médio.

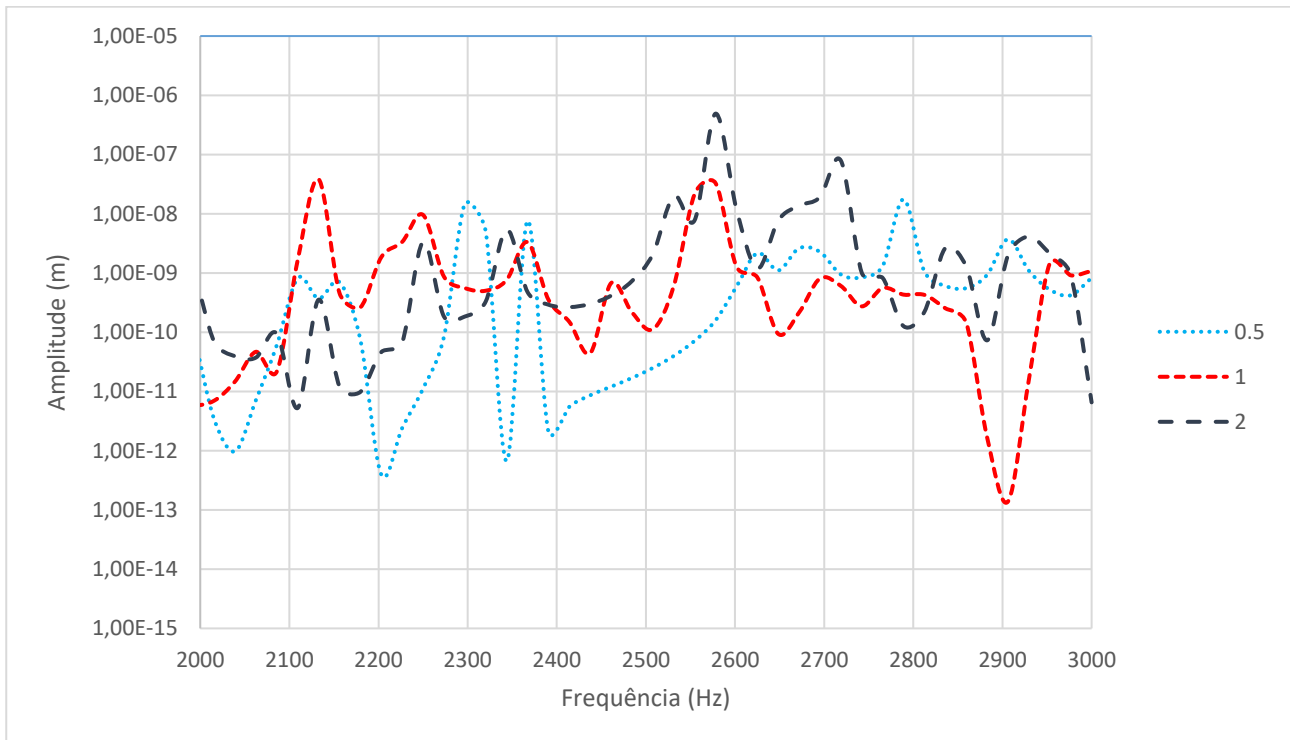
Gráfico 14- Variação da relação a/b para a faixa de 1000 a 2000 Hz



Fonte: Autora

A relação $a/b=0,5$ apresenta comportamento intermediário, sendo assim sempre entre os gráficos de 1 e 2. A relação $a/b=1$ apresenta boa atenuação entre 1000 e 1550 Hz e também entre 1820 e 2000 Hz. Já $a/b=2$ apresenta um vale significativo em frequências próximas a 1620 Hz.

Gráfico 15- Variação da relação a/b para a faixa de 2000 a 3000 Hz



Fonte: Autora

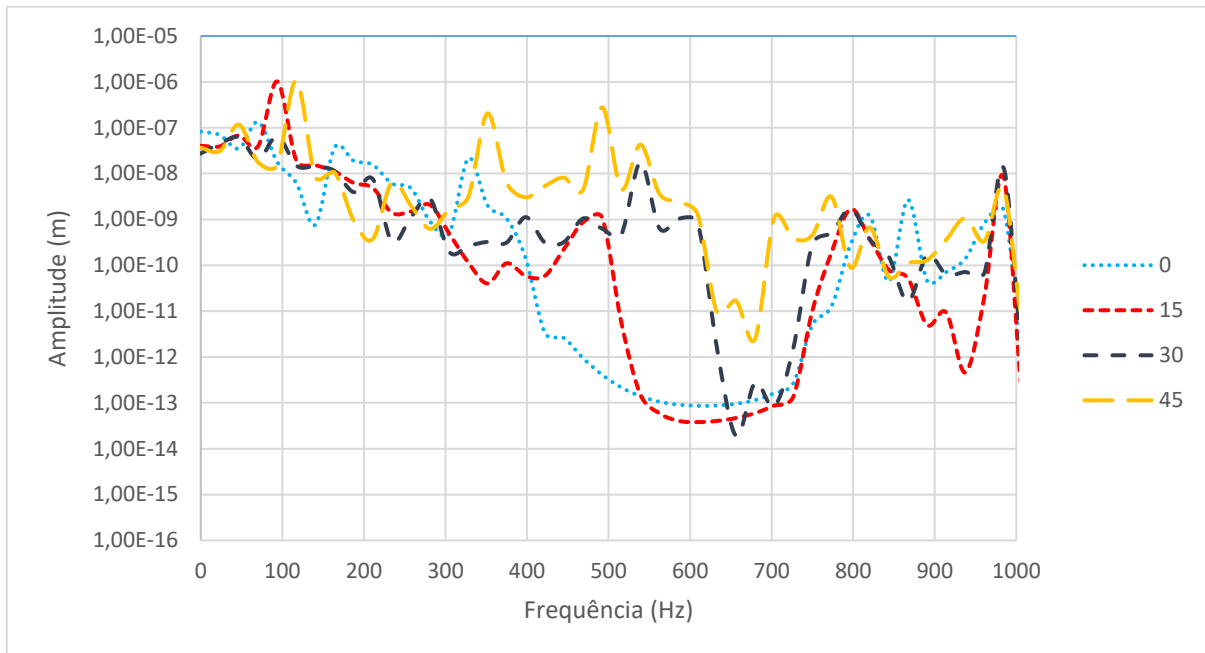
A relação $a/b=0,5$ apresenta uma boa atenuação de 2000 a 2600 Hz. Já a relação $a/b=1$ apresenta boa atenuação entre 1820 e 2930 Hz. Por outro $a/b= 2$ não apresenta grandes destaques de atenuação apresenta apenas dois picos em frequências de 2580 e 2720 Hz.

Ao considerar os três gráficos é perceptível que a resposta de estrutura é mais atenuada quando a é igual a b , com atenuações maiores e bem marcadas entre as frequências de 450 a 700 Hz aproximadamente e também na frequência de 2900 Hz. Para relação a/b de 0,5 também são identificadas atenuações importantes próximas as frequências de 150 Hz, 2200 Hz, 2350 Hz e 2400 Hz.

5.7 VIGA DE METAMATERIAL COM ROTAÇÃO DO RESSONADOR

Para avaliar a influência da posição do ressonador o mesmo foi rotacionado e a resposta de estrutura foi avaliada para os valores de ângulo de 0° , 15° , 30° e 45° . A resposta da estrutura para cada faixa de frequência está apresentada abaixo, o Gráfico 16 apresenta o comportamento da estrutura para a faixa de frequência de 0 a 1000 Hz.

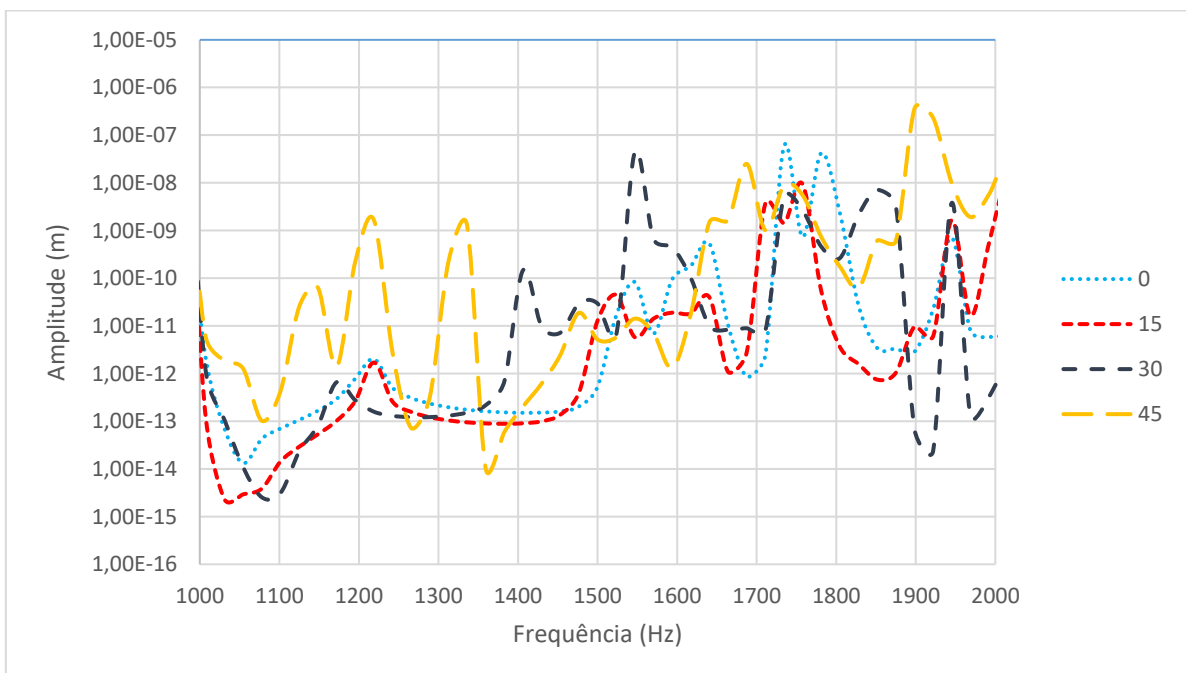
Gráfico 16- Variação da rotação do ressonador para a faixa de 0 a 1000 Hz



Fonte: Autora

A rotação em 15° deixa o *bandgap* mais profundo para as faixas de frequência de 550 a 725 Hz e 870 a 950 Hz, a rotação em 30° reduz essa faixa para 650 a 700 Hz, já ao não realizar rotação temos uma banda de atenuação ligeiramente menos profunda, mas mais larga que se estende de 425 Hz até 725 Hz. O Gráfico 17 apresenta o comportamento de cada estrutura para a faixa de frequência de 1000 a 2000 Hz.

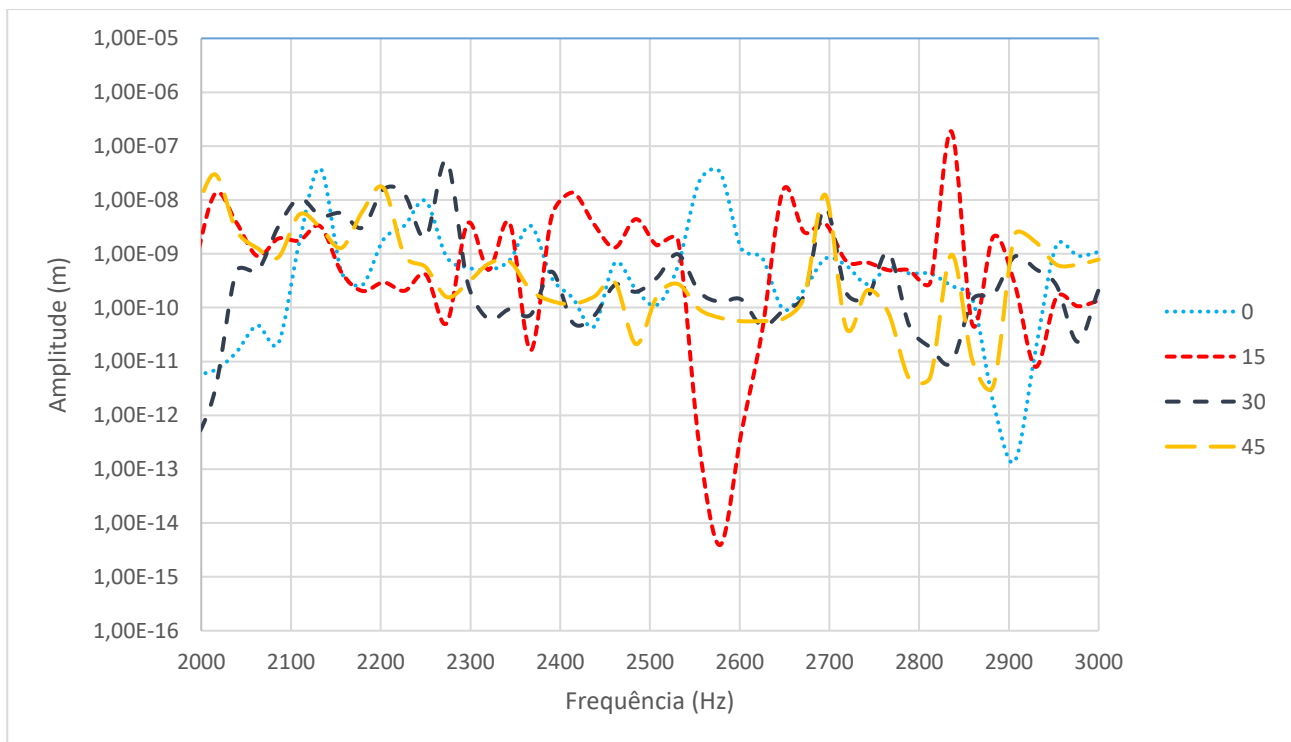
Gráfico 17- Variação da rotação do ressonador para a faixa de 1000 a 2000 Hz



Fonte: Autora

É difícil avaliar qual valor de rotação teve melhor desempenho nesta faixa de frequência haja vista a proximidade entre as linhas e quantidade de cruzamentos entre elas, é perceptível que nas faixas entre 1100 e 1340 Hz a rotação em 45° produziu a menor atenuação entre as 4 rotações do ressonador, enquanto para a torção de 30° a estrutura teve pior comportamento que as demais entre 1400 e 1500 Hz. A seguir o Gráfico 18 apresenta o comportamento da estrutura para faixas de frequência de 2000 a 3000 Hz.

Gráfico 18- Variação da rotação do ressonador para a faixa de 2000 a 3000 Hz



Fonte: Autora

Da mesma forma que anteriormente o comportamento da estrutura é muito próximo sendo difícil precisar qual a melhor rotação do ressonador para geração de bandas de atenuação. Cabe ressaltar a atenuação gerada pela rotação do ressonador em 15° nas frequências entre 2540 e 2620 Hz e para o ângulo de 0° em frequências próximas a 2900 Hz.

5.8 OTIMIZAÇÕES VIGA DE METAMATERIAL

Abaixo serão apresentados os resultados das otimizações elaboradas para maior atenuação entre 0 e 500 Hz, 0 e 1000 Hz e 100 a 300 Hz.

5.7.1 Viga de Metamaterial otimização para faixa de frequência de 0 a 500 Hz

A partir da otimização por algoritmo genético os valores obtidos para promover a maior atenuação da estrutura estão apresentados na tabela 7, cabe ressaltar que o valor parcial do material deve ser desconsiderado sendo utilizado o número inteiro que é 3, sendo assim o material da estrutura otimizada é o alumínio.

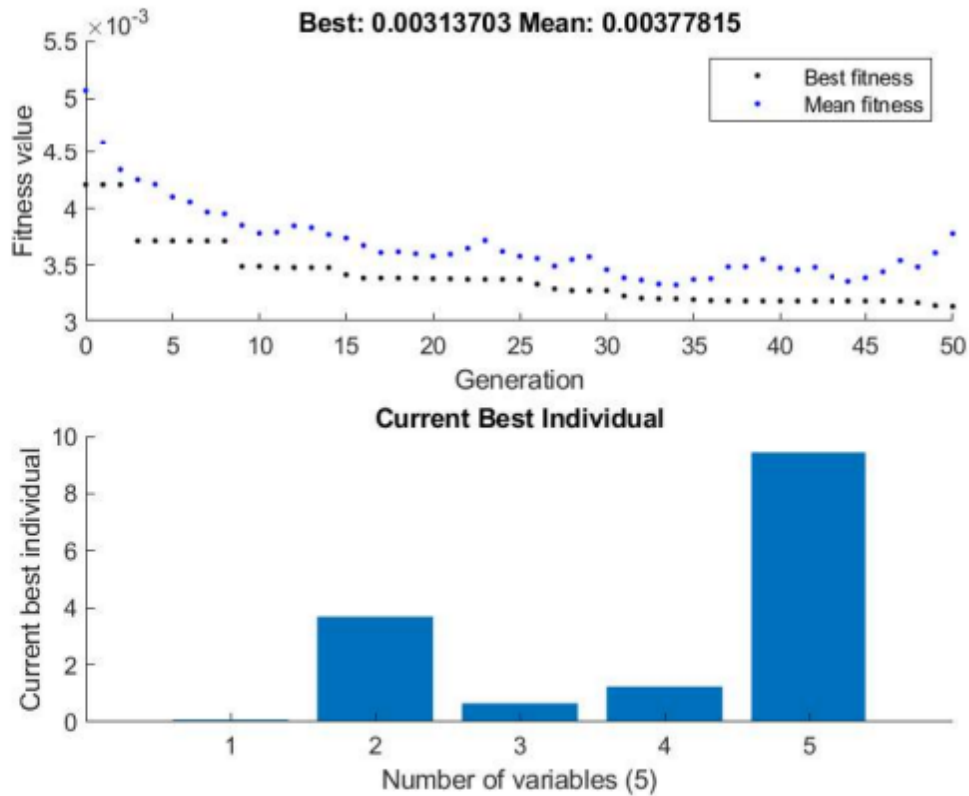
Tabela 9-Valores dos parâmetros otimizados para a faixa de 0 a 500 Hz

Parâmetro	Valor
Raio do Ressonador	0.076884667
Material do Ressonador	3.687900062
Tamanho do Ressonador (RL)	0.654150146
Relação a/b	0.654150146
Rotação do Ressonador	9.44010709

Fonte: Autora

A otimização retorna um gráfico de convergência que está apresentado na Figura 5, onde é possível verificar a aproximação dos valores

Figura 5- Gráfico de convergência obtido para otimização de 0 a 500 Hz

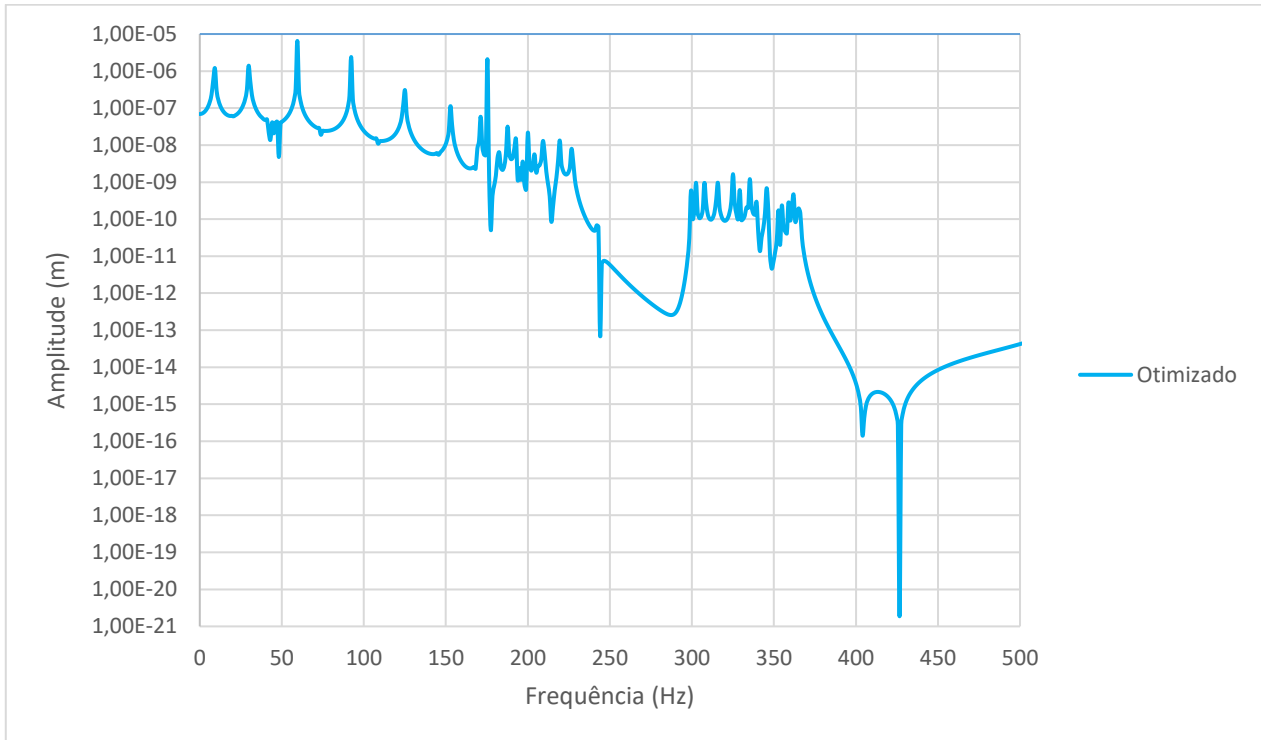


Fonte: Autora

Do gráfico de otimização é possível perceber uma boa proximidade entre o objetivo que seria o “*Best Fitness*” e os valores obtidos pela otimização.

Com os valores dos parâmetros o gráfico de comportamento da estrutura foi gerado e está apresentado no Gráfico 19.

Gráfico 19-Resposta da estrutura otimizada para a faixa de 0 a 500 Hz

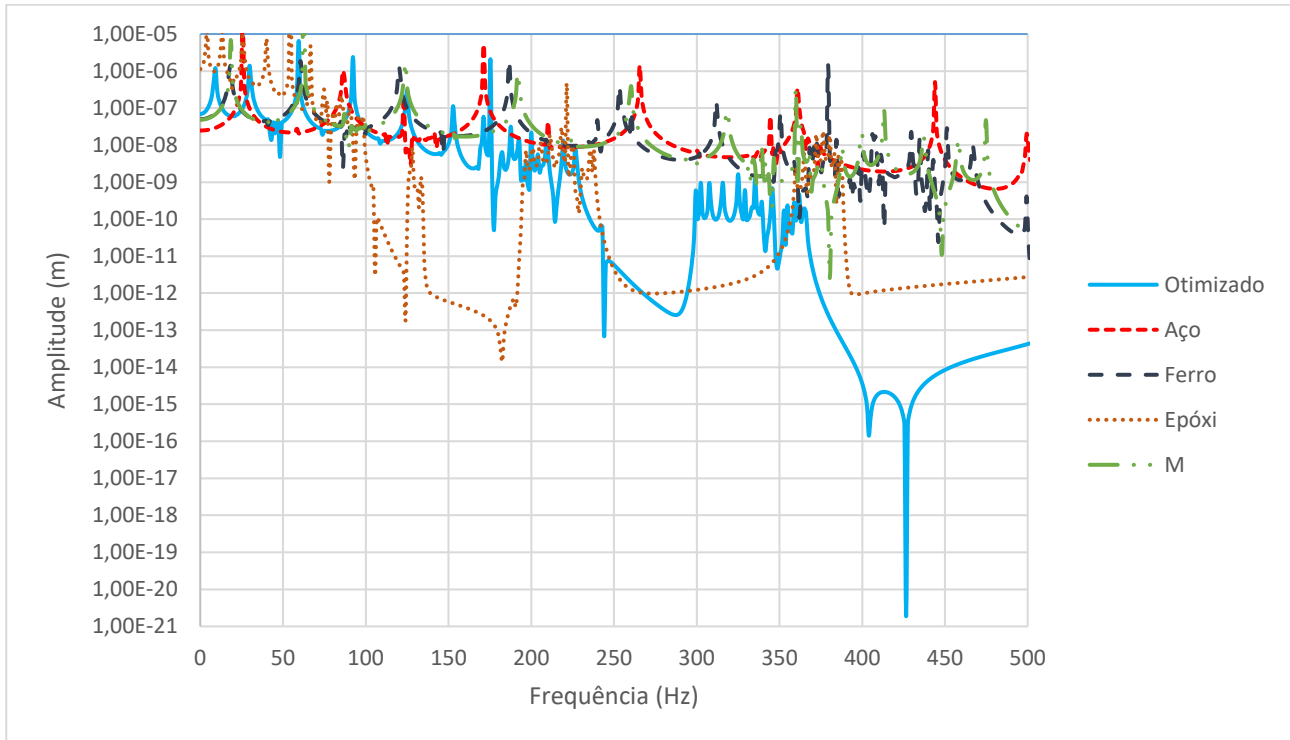


Fonte: Autora

É notável a formação de bandas de atenuação entre 230 e 300 Hz e também após 370 Hz, em especial a resposta da estrutura em 425 Hz apresentando uma pequena amplitude de resposta nesta frequência.

Para fins de comparação foram alterados o material do ressonador e a comparação entre a resposta das estruturas está apresentada no Gráfico 20. É notável a diferença de comportamento entre as estruturas, haja visto que as bandas de atenuação para estrutura otimizada são mais largas e maiores. Até a faixa de aproximadamente 100 Hz todas as estruturas tem atenuação baixa e nenhuma apresenta grande destaque, após esta frequência a estrutura com ressonador de epóxi tem boa atenuação sendo melhor que a estrutura otimizado, além disso apresenta mais duas bandas de atenuação entre 250 e 350 Hz e também de 390 a 500 Hz, mas só tem maior atenuação que a estrutura otimizada na faixa de 300 a 350 Hz. A resposta da estrutura otimizada apresenta bandas de atenuação entre 230 e 300 Hz e após 370 Hz até chegar ao final do gráfico.

Gráfico 20-Comparação na faixa de 0 a 500 Hz entre estrutura otimizada e com variação do material

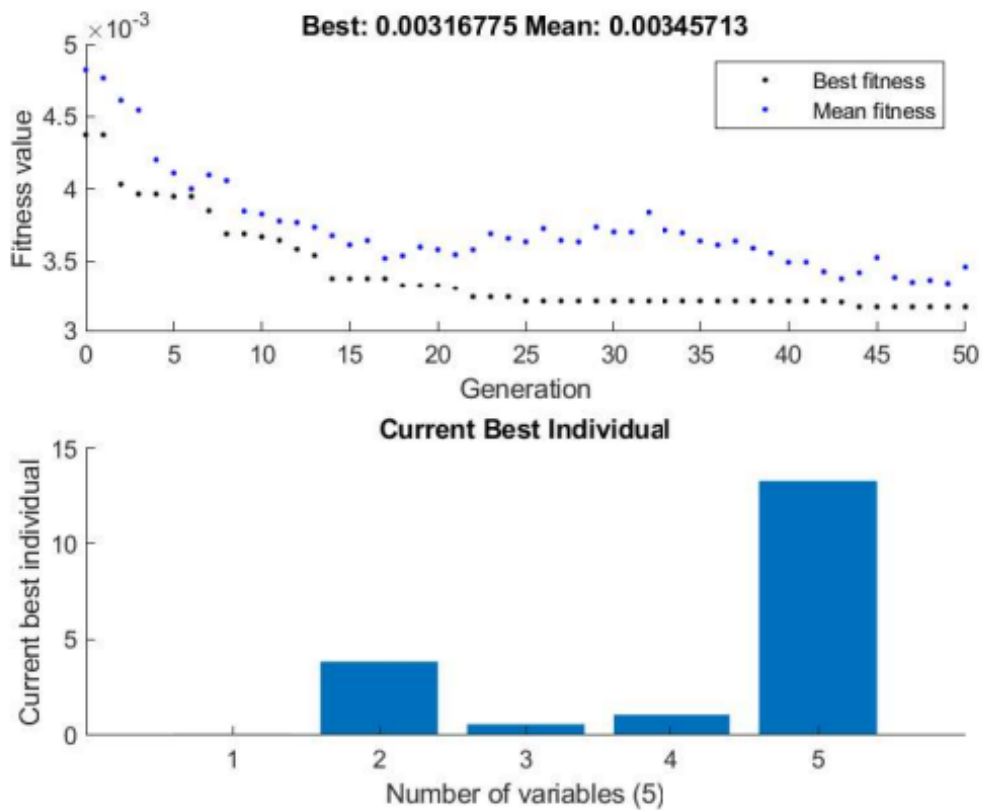


Fonte: Autora

5.7.2 Viga de Metamaterial otimização para faixa de frequência de 0 a 1000 Hz

A Figura 6 apresenta o gráfico de convergência fornecido pelo Matlab, cabe ressaltar que o valor parcial do material deve ser desconsiderado sendo utilizado o número inteiro que é 3, sendo assim o material da estrutura otimizada é o alumínio.

Figura 6- Gráfico de convergência obtido para otimização de 0 a 1000 Hz



Fonte: Autora

Do gráfico de otimização é possível perceber uma proximidade média entre o objetivo que seria o “*Best Fitness*” e os valores obtidos pela otimização.

A partir da otimização por algoritmo genético os valores obtidos para promover a maior atenuação da estrutura estão apresentados na Tabela 10:

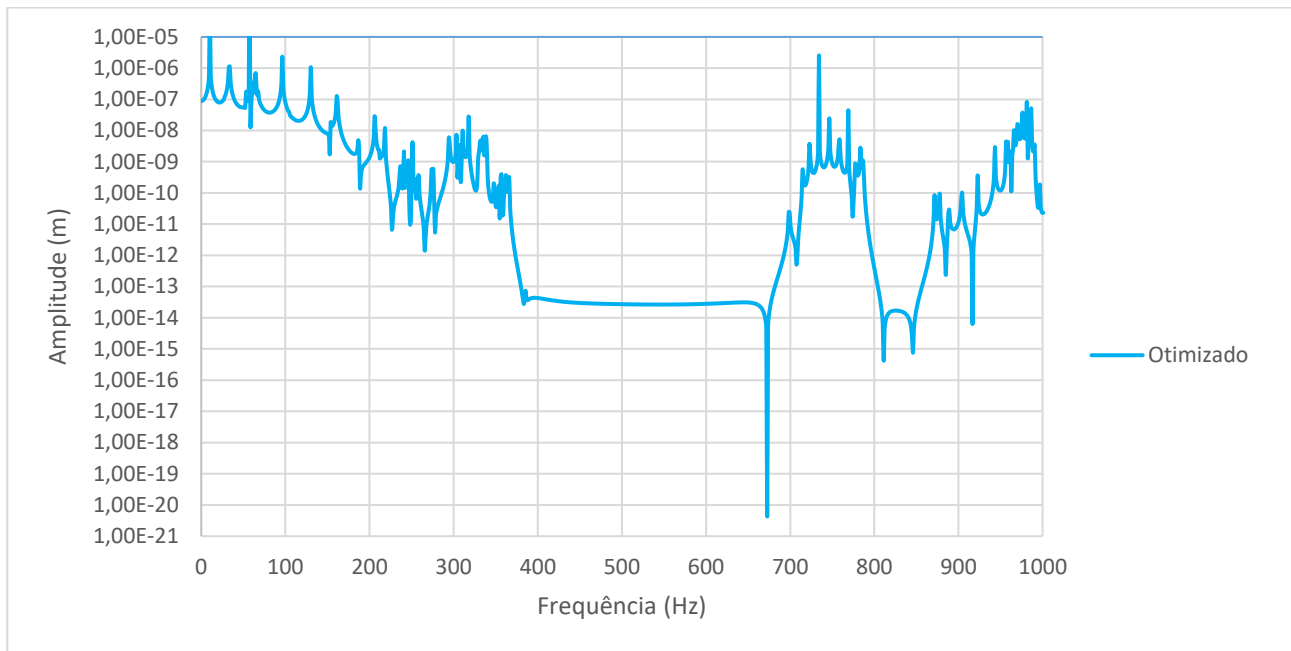
Tabela 10-Valores dos parâmetros otimizados para a faixa de 0 a 1000 Hz

Parâmetro	Valor
Raio do Ressonador	0.06477
Material do Ressonador	3.843244
Tamanho do Ressonador (RL)	0.570725
Relação a/b	1.060118
Rotação do Ressonador	13.28987

Fonte: Autora

É importante ressaltar que o material do ressonador otimizado é condizente com o alumínio. Com os valores dos parâmetros o gráfico de comportamento da estrutura foi gerado e está apresentado no Gráfico 21.

Gráfico 21-Resposta da estrutura otimizada para a faixa de 0 a 1000 Hz



Fonte: Autora

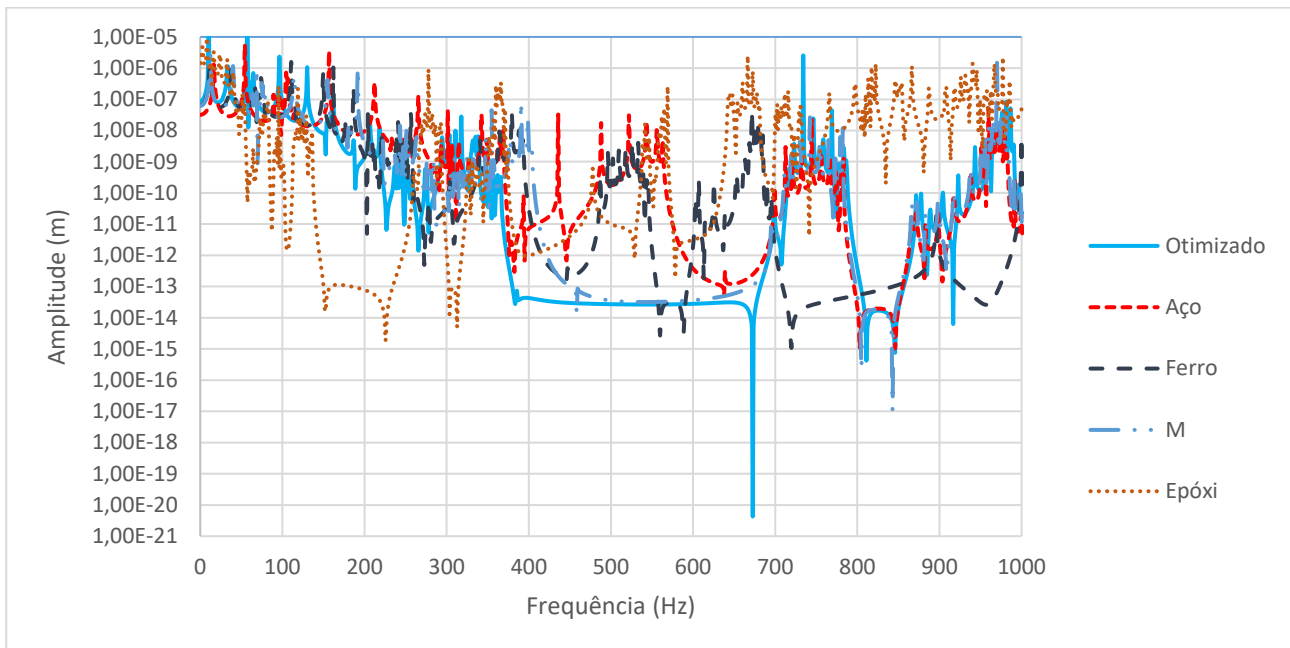
É notável a formação da banda de atenuação profunda entre 380 e 700 Hz, sendo que a maior atenuação é na faixa de 630 Hz. Além disso outras bandas de atenuação menos expressivas são formadas entre 800 e 900 Hz e 800 e 850 Hz.

Para fins de comparação a estrutura foi testada variando apenas o parâmetro do material e a comparação entre a resposta das duas estruturas está apresentada no Gráfico 22. É notável a influência deste parâmetro na criação de bandas de atenuação, sendo responsável por criar bandas de parada em frequências mais baixas ao alterar o alumínio da estrutura otimizado pelo epóxi, no entanto este material tem o pior desempenho em frequências mais próximas a 1000 Hz. Ao trocar o material por aço o comportamento até a faixa de 400 Hz é semelhante, após esta frequência até aproximadamente 700 Hz a estrutura otimizada apresenta maior e mais larga banda de atenuação, após esta faixa os gráficos voltam a se comportar de maneira semelhante.

A atenuação para estrutura testada com ferro se mantém com menor atenuação em praticamente todas as frequências e apresenta melhor comportamento entre

700 e 800 Hz e 920 e 1000 Hz. Já a reposta de estrutura ao substituir o alumínio pelo material M tem apenas uma pequena variação na faixa de frequência de 370 Hz a 470 Hz, quando apresenta uma atenuação menor que a estrutura otimizada.

Gráfico 22- Comparação na faixa de 0 a 1000 Hz entre estrutura otimizada e com variação do material



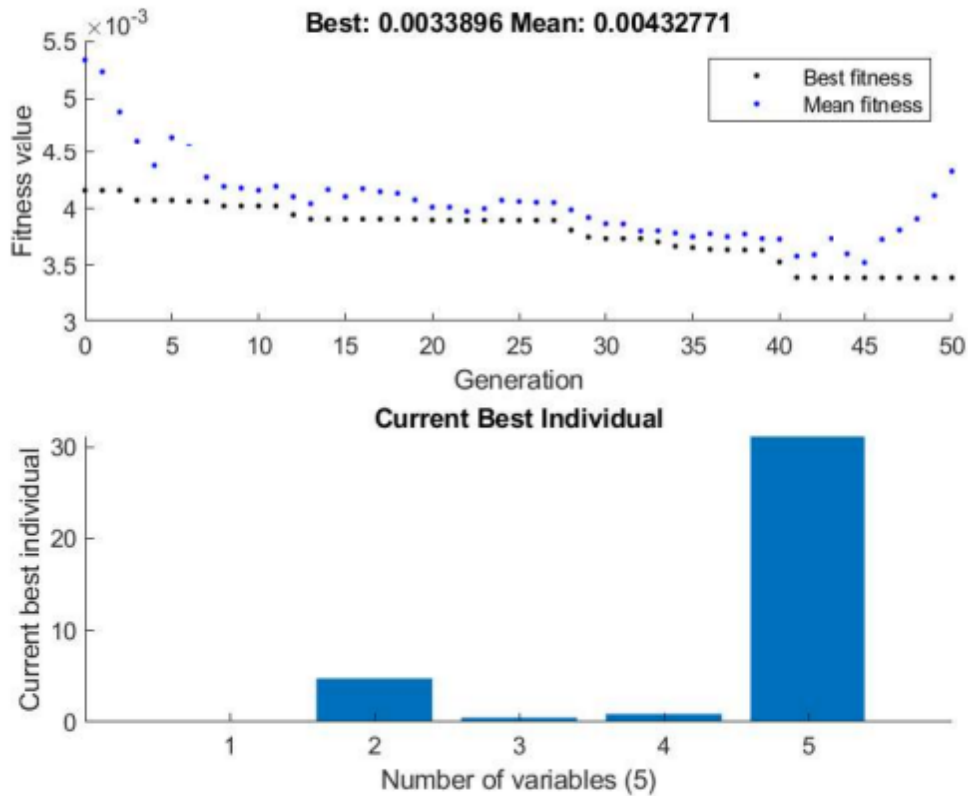
Fonte: Autora

É notável que a estrutura otimizada tem melhor comportamento geral, no entanto caso fosse necessário criar bandas de atenuação em frequências mais baixas, nesta estrutura seria melhor substituir o alumínio pelo epóxi, da mesma maneira para frequências mais altas seria substituir o alumínio por ferro. Ainda cabe ressaltar que o material M apresenta comportamento muito semelhante a estrutura otimizada de alumínio.

5.7.3 Viga de Metamaterial otimização para faixa de frequência de 100 a 300 Hz

O gráfico de convergência para a faixa entre 100 e 300 Hz está apresentado abaixo, cabe ressaltar que o valor parcial do material deve ser desconsiderado sendo utilizado o número inteiro que é 4, sendo assim o material da estrutura otimizada é o epóxi.

Figura 7- Gráfico de convergência obtido para otimização de 100 a 300 Hz



Fonte: Autora

Do gráfico de otimização é possível perceber uma boa proximidade entre o objetivo que seria o “*Best Fitness*” e os valores obtidos pela otimização.

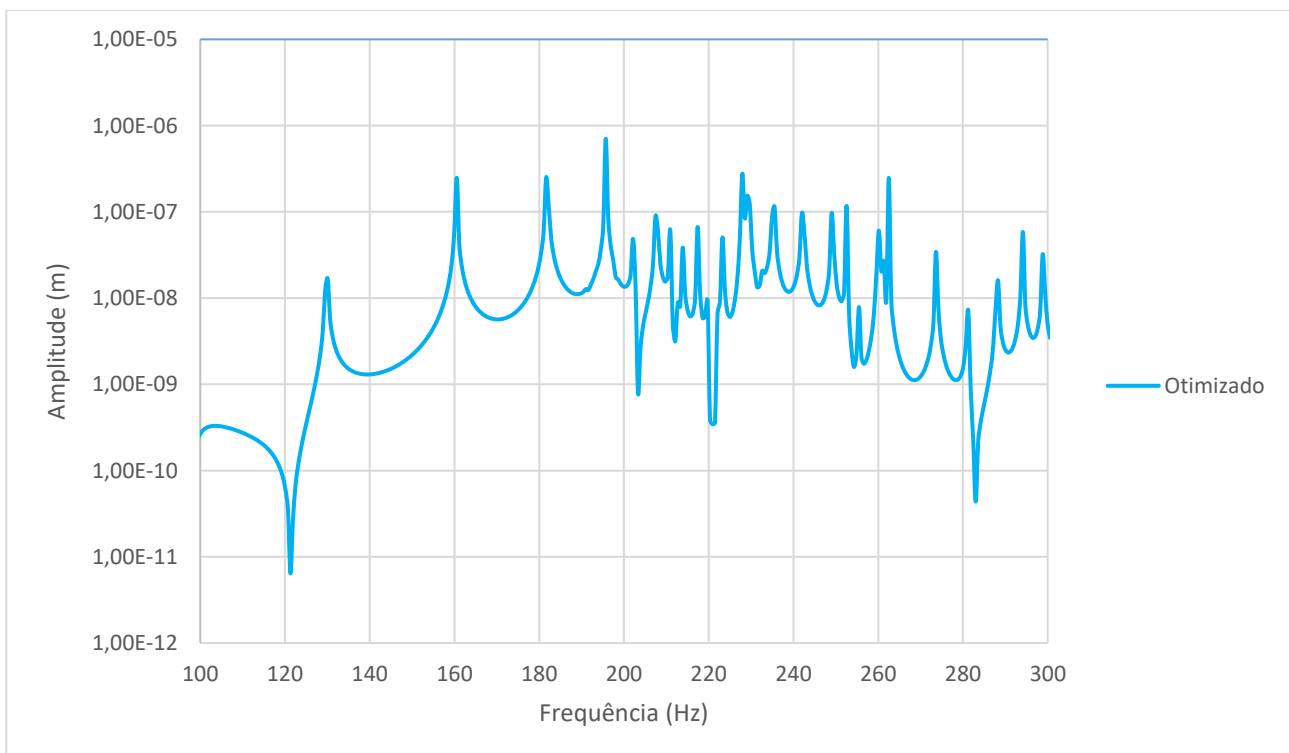
A partir da otimização por algoritmo genético os valores dos parâmetros obtidos para promover a maior atenuação da estrutura conforme a função objetivo, estão apresentados na Tabela 11 abaixo, cabe ressaltar que o material da estrutura otimizada é o epóxi:

Tabela 11- Valores dos parâmetros otimizados para a faixa de 100 a 300Hz

Parâmetro	Valor
Raio do Ressonador	0.074906
Material do Ressonador	4.758438
Tamanho do Ressonador (RL)	0.470606
Relação a/b	0.876833
Rotação do Ressonador	31.15502

Fonte: Autora

Com os valores dos parâmetros o gráfico de comportamento da estrutura foi gerado e está apresentado no Gráfico 23.

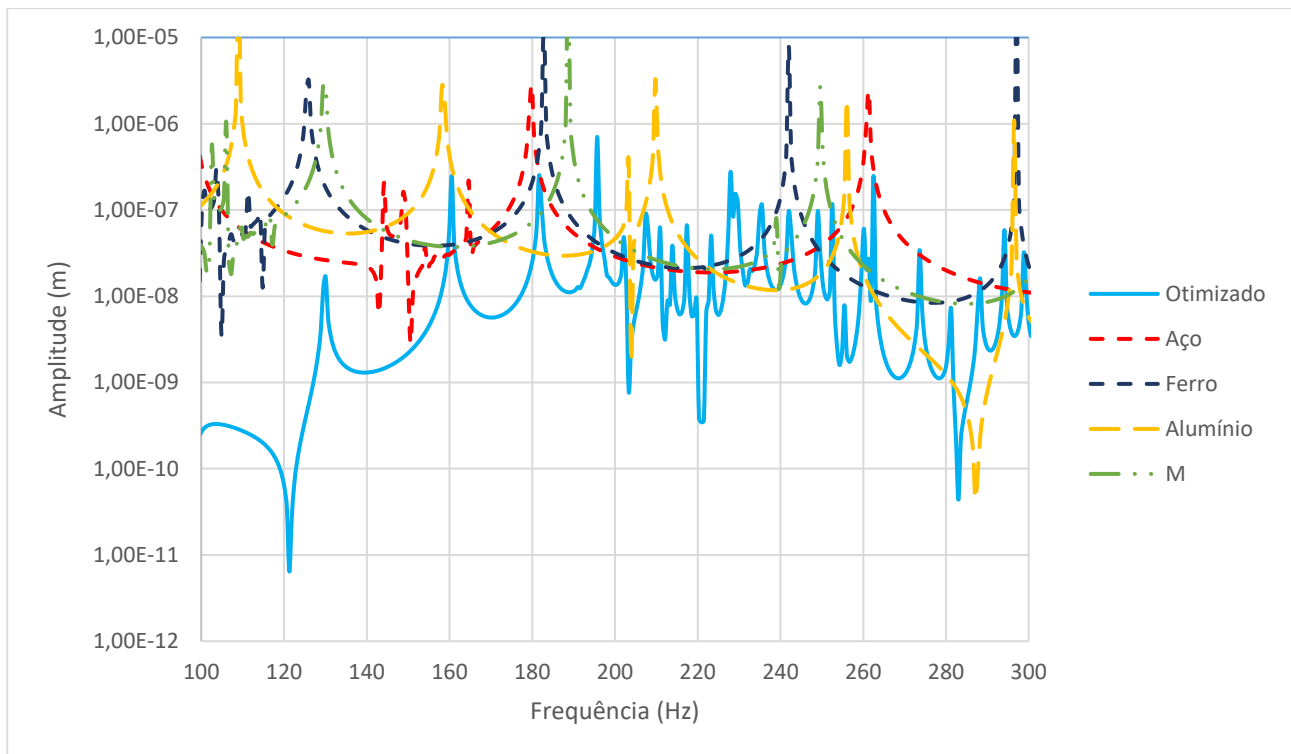
Gráfico 23-Resposta da estrutura otimizada para a faixa de 100 a 300 Hz

Fonte: Autora

É notável a formação da banda de atenuação profunda entre 160 e 280 Hz. Para fins de comparação foi alterado o material da estrutura e a comparação entre a resposta das duas estruturas está apresentada abaixo no Gráfico 24. É notável a diferença de comportamento entre as duas estruturas, haja visto que as bandas de atenuação para estrutura com o raio alterado foram muito menos expressivas e menores e fica em quase

sua totalidade localizado acima da estrutura evidenciando uma maior amplitude de resposta em relação a estrutura otimizada.

Gráfico 24- Comparação na faixa de 100 a 300 Hz entre estrutura otimizada e com variação do material



Fonte: Autora

É notável a discrepância entre os gráficos principalmente na faixa de frequência de 100 a 160 Hz, no entanto cabe ressaltar que a estrutura otimizada apesar de não apresentar picos elevados como as estruturas com outros materiais no ressonador elas apresentam comportamento semelhante. Nas frequências entorno de 282 Hz a estrutura de alumínio apresenta a mesma atenuação da resposta da estrutura otimizada. Tanto o ferro quanto o material M são os materiais menos indicados para formação de bandas de parada entre 100 e 300 Hz.

Por fim cabe destacar o aprimoramento visível do comportamento das estruturas a partir da otimização em relação à definição de claras bandas de paradas. A função objetivo proposta mostrou-se em todos os casos eficiente para definir a maior atenuação de amplitude nas faixas de frequências indicadas. Além disso, cabe destacar que o procedimento proposto calculou as respostas apenas para um mesmo local de entrada de excitação e de resposta, no entanto o procedimento proposto poderia ser levemente modificado para poder definir uma função objetivo que leve em conta várias

entradas e várias respostas. Igualmente, outro tipo de configuração estrutural ou estrutura pode ser analisado com o procedimento proposto.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho comparou o método dos elementos finitos, que é utilizado em diversos softwares e estudos de análise estrutural, com o método do elemento espectral, que é um método menos difundido, mas que tem como resultado do cálculo a solução exata. Ambos os métodos calcularam a resposta de estruturas de treliça baseado metamateriais.

O método dos elementos finitos apresentou grande dependência do número de elementos para atingir resultados precisos, desvantagem já bastante conhecida do método. Por outro lado, o método do elemento espectral tem boa precisão mesmo com o menor número de elementos possível, no entanto o método pode apresentar um processamento mais lento caso o tamanho da transformada de Fourier seja muito grande.

Para a estrutura de treliça em metamaterial estudada o raio do ressonador tem influência principalmente na criação do primeiro band gap, quanto maior o raio do ressonador maior e mais profundo será a banda de atenuação gerada. O material do ressonador influencia nas faixas frequências em que as bandas de atenuação serão criadas na estrutura, se feitos de epóxi as bandas de atenuação serão em faixas inferiores as geradas pelos outros materiais. Se feitas em aço as faixas de atenuação serão em frequências mais altas. Já em frequências de 400 a 2000 Hz o alumínio, o material M e o aço apresentam boa concordância, caso a estrutura seja toda feita em aço a atenuação será mais expressiva em frequências mais altas.

Na mesma estrutura de viga treliçada de metamaterial para a faixa de 0 a 1000 a variação do tamanho do ressonador não promove alterações expressivas no gráfico, para valores entre 1000 e 2500 Hz a resposta da estrutura tem maior atenuação caso o tamanho do ressonador for próximo a 60 % do comprimento da célula unitária. A relação entre comprimento e largura influencia na geração das bandas de atenuação e deve ser selecionada de acordo com a frequência em que é desejada a atenuação. Outro parâmetro analisado é a influência da rotação do ressonador que gera bandas de atenuação mais profundas entre 0 e 15 °.

O maior tamanho de ressonador apresentou a maior atenuação, mesmo os gráficos se comportando de maneira semelhante. A relação a/b na faixa de 0 a 2000 Hz tem maior atenuação para um valor igual a 1, enquanto de 2000 a 3000 Hz a estrutura tem melhor resposta para um valor igual 0,5. A rotação é o parâmetro que representa maior dificuldade para determinar qual o melhor grau de rotação para geração de bandas de

atenuação, ficando claro apenas que o ângulo de 45° é o que apresenta menor atenuação para faixas de 0 a 3000 Hz.

Ao otimizar os parâmetros da viga através do algoritmo genético os parâmetros para a frequência de 0 a 500 Hz são consistentes com os testes de variação de cada parâmetro, haja visto que o raio do ressonador se aproximou de 8 cm, o material do ressonador se aproximou do epóxi, o tamanho do ressonador (RL) também foi coerente com os gráficos apresentados. O mesmo ocorre para relação a/b que é próxima a 1. A otimização da estrutura para a faixa de frequência de 0 a 1000 Hz é consistente com os valores encontrados na alteração dos parâmetros, sendo que o tamanho do ressonador se aproximou de 0,6 o tamanho de a , a relação a/b ficou próxima a 1, a rotação do ressonador se aproximou de 15 enquanto o material definido pelo algoritmo foi o alumínio. A otimização de 100 a 300 Hz retornou com material o epóxi o que é consistente com o esperado para criação de bandas de atenuação mais baixas, bem como o tamanho de quase 0,08.

A partir desse trabalho buscou-se aumentar a viabilidade de uso de metamateriais treliçados para atenuação de ondas acústicas e demonstrar a importância do uso de metodologias de otimização da estrutura. Com a pesquisa iniciada neste trabalho é possível investigar outros métodos de cálculo para estruturas de viga treliçada de metamaterial, bem como a aplicação do método do elemento espectral em outros componentes como placas. Em trabalhos futuros é possível investigar a precisão e velocidade de cálculo frente a outras metodologias, bem como o uso da equação para viga baseada na metodologia de Timoshenko e ainda para outros elementos estruturais.

A viga treliçada de metamaterial pode ser testada com outros parâmetros como outros materiais, outros diâmetros do ressonador, outro material para estrutura da treliça buscando-se aumentar a largura e a profundidade das bandas de atenuação. A partir de pequenas modificações da programação efetuada é possível avaliar outras estruturas, bem como outros parâmetros. Também é possível avaliar a efetividade da otimização pelos algoritmos genéticos para outros problemas estruturais.

Desta maneira este trabalho contribuiu para ampliação do conhecimento em bandas de atenuação em treliças de metamaterial, por comparar dois métodos de cálculo para estas estruturas, por avaliar a influência do raio, material, tamanho e rotação do ressonador na atenuação da viga de metamaterial. Por fim, analisou a otimização realizada por algoritmo genético que se mostrou efetivo ao encontrar soluções para atenuação nas bandas de atenuação especificadas.

REFERÊNCIAS

- AN, X. et al. Three-dimensional meta-truss lattice composite structures with vibration isolation performance. **Extreme Mechanics Letters**, v. 33, 2019.
- AN, X.; FAN, H.; ZHANG, C. Elastic wave and vibration bandgaps in planar square metamaterial-based lattice structures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 475, p. 115292, 9 jun. 2020.
- ANIGBOGU, W.; NGUYEN, H.; BARDAWEEL, H. Layered Metamaterial Beam Structures With Local Resonators for Vibration Attenuation: Model and Experiment. **Frontiers in Mechanical Engineering**, v. 7, 2021.
- BANERJEE, A.; DAS, R.; CALIUS, E. P. Waves in Structured Mediums or Metamaterials: A Review. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 26, n. 4, p. 1029–1058, 1 set. 2019.
- BANZHAF, W. et al. **Genetic Programming. An Introduction On the Automatic Evolution of Computer Programs and Its Applications**. World, 1998.
- BIAN, Y. et al. A tunable metamaterial dependent on electric field at terahertz with barium strontium titanate thin film. **Applied Physics Letters**, v. 104, n. 4, 2014.
- BOWERS, W. D.; CHUAN, R. L.; DUONG, T. M. A 200 MHz surface acoustic wave resonator mass microbalance. **Review of Scientific Instruments**, v. 62, n. 6, 1991.
- CEBRECOS, A. et al. The finite-element time-domain method for elastic band-structure calculations. **Computer Physics Communications**, v. 238, p. 77–87, 1 maio 2019.
- CHEEKE, J. D. N.; TASHTOUSH, N.; EDDY, N. **Surface acoustic wave humidity sensor based on the changes in the viscoelastic properties of a polymer film**. Proceedings of the IEEE Ultrasonics Symposium. **Anais...**1996.
- CHEEKE, J. D. N.; WANG, Z. Acoustic wave gas sensors. **Sensors and Actuators, B: Chemical**, v. 59, n. 2, 1999.
- CHEN, H. et al. Perfect Undetectable Acoustic Device from Fabry-Pérot Resonances. **Physical Review Applied**, v. 9, n. 2, 14 fev. 2018.
- CHEN, Z. et al. Analytical modeling and numerical analysis for tunable topological phase transition of flexural waves in active sandwiched phononic beam systems. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 223, p. 107292, jun. 2022.
- DRÉO JOHANN et al. **Metaheuristics for Hard Optimization**. [s.l.: s.n.].
- ELMADIH, W. et al. Mechanical vibration bandgaps in surface-based lattices. **Additive Manufacturing**, v. 25, 2019a.

- ELMADIH, W. et al. Three-dimensional resonating metamaterials for low-frequency vibration attenuation. **Scientific Reports**, v. 9, n. 1, 2019b.
- FILIPIAK, J.; MARĆ, P. Surface acoustic wave vibration sensor as a seismometer. **Sensors and Actuators, A: Physical**, v. 323, 2021.
- FLAMOURAKIS, G. et al. Laser-made 3D Auxetic Metamaterial Scaffolds for Tissue Engineering Applications. **Macromolecular Materials and Engineering**, v. 305, n. 7, 1 jul. 2020.
- GAO, W. et al. **3D printed NiTi alloy lattice cantilever beam acoustic metamaterial**. Journal of Physics: Conference Series. **Anais...2022**.
- GUO, J. et al. Multiscale modeling and design of lattice truss core sandwich metastructures for broadband low-frequency vibration reduction. **Composite Structures**, v. 289, 1 jun. 2022.
- HAO, S. et al. Numerical and experimental investigations on the band-gap characteristics of metamaterial multi-span beams. **Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics**, v. 383, n. 36, 2019.
- HOSSAIN, M. I. et al. A new wide-band double-negative metamaterial for C- and S-band applications. **Materials**, v. 8, n. 1, 2015.
- HU, G. et al. Metamaterial beam with graded local resonators for broadband vibration suppression. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 146, 1 jan. 2021.
- JIANG, L. et al. Multi-band and high-sensitivity perfect absorber based on monolayer graphene metamaterial. **Diamond and Related Materials**, v. 111, 2021.
- KATOCH, S.; CHAUHAN, S. S.; KUMAR, V. A review on genetic algorithm: past, present, and future. **Multimedia Tools and Applications**, v. 80, n. 5, 2021.
- KUMAR, R. et al. Overview on metamaterial: History, types and applications. **Materials Today: Proceedings**, v. 56, 2022.
- LEE, USIK. **Spectral element method in structural dynamics**. [s.l.] J. Wiley & Sons Asia, 2009.
- LI, F. et al. A Modified Three-Dimensional Negative-Poisson-Ratio Metal Metamaterial Lattice Structure. **Materials**, v. 15, n. 11, 2022.
- LIANG, Y. et al. Investigation of wave propagation in piezoelectric helical waveguides with the spectral finite element method. **Composites Part B: Engineering**, v. 160, p. 205–216, 1 mar. 2019.
- LIU, G. R.; QUEK, S. S. **The Finite Element Method: A Practical Course**. [s.l.: s.n.].

- LIU, J.; GUO, H.; WANG, T. **A review of acoustic metamaterials and phononic crystals.** *Crystals* MDPI AG, , 1 abr. 2020.
- LIU, Z. et al. Locally Resonant Sonic Materials. *Science*, v. 289, n. 5485, p. 1734–1736, 8 set. 2000.
- LU, Q.; LIU, C.; WANG, P. Band gap enhancement and vibration reduction of functionally graded sandwich metastructure beam. *Composite Structures*, v. 292, p. 115650, jul. 2022.
- MALDOVAN, M. Phonon wave interference and thermal bandgap materials. *Nature Materials*, v. 14, n. 7, 2015.
- MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas. Conceitos e Métodos Básicos.** 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. v. 1
- MENG, F. Y. et al. Design and negative refraction investigation of a compact left-handed metamaterial. *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, v. 3, n. 6, p. 599–603, 2008.
- MI, Y.; YU, X. Sound transmission of acoustic metamaterial beams with periodic inertial amplification mechanisms. *Journal of Sound and Vibration*, v. 499, p. 116009, 12 maio 2021.
- MICHALEWICZ, Z. Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems. *Evolutionary Computation*, v. 4, n. 1, 1996.
- MIZZI, L. et al. Auxetic metamaterials exhibiting giant negative Poisson's ratios. *Physica Status Solidi - Rapid Research Letters*, v. 9, n. 7, p. 425–430, 1 jul. 2015.
- MONKOVA, K. et al. Mechanical vibration damping and compression properties of a lattice structure. *Materials*, v. 14, n. 6, 2021.
- NOBREGA, E. D. et al. Vibration band gaps for elastic metamaterial rods using wave finite element method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 79, p. 192–202, 15 out. 2016.
- PALERMO, A.; MARZANI, A. A reduced Bloch operator finite element method for fast calculation of elastic complex band structures. *International Journal of Solids and Structures*, v. 191–192, p. 601–613, 15 maio 2020.
- QI GE, A. N. et al. Spectral Element Method for the Elastic/Acoustic Waveguide Problem in Anisotropic Metamaterials. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*, v. 9, 2021.
- REICHL, K. K.; INMAN, D. J. Lumped mass model of a 1D metastructure for vibration suppression with no additional mass. *Journal of Sound and Vibration*, v. 403, p. 75–89, 1 set. 2017.

- REN, F.; WANG, L.; LIU, H. Low frequency and broadband vibration attenuation of a novel lightweight bidirectional re-entrant lattice metamaterial. **Materials Letters**, v. 299, 2021.
- REN, T. et al. Improvement of the band-gap characteristics of active composite laminate metamaterial plates. **Composite Structures**, v. 254, p. 112831, 15 dez. 2020.
- SMITH, D. R. et al. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. **Physical Review Letters**, v. 84, n. 18, 2000.
- TALLARICO, D. et al. Superelement modelling of elastic metamaterials: Complex dispersive properties of three-dimensional structured beams and plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 484, p. 115499, 13 out. 2020.
- TURNER, M. J. et al. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, 1956.
- VAZ, L. E. **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS EM ANÁLISE DE ESTRUTURAS**. [s.l.: s.n.]. Disponível em: <www.elsevier.com.br>.
- VESELAGO, V. G. Electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . **Usp. Fiz. Nauk**, v. 92, p. 517–526, 1967.
- WALSER, R. M. **Electromagnetic metamaterials**. (A. Lakhtakia, W. S. Weiglhofer, I. J. Hodgkinson, Eds.) 9 jul. 2001.
- WEN, S. et al. Enhanced band-gap properties of an acoustic metamaterial beam with periodically variable cross-sections. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 166, 2020.
- WOLD, C. E. et al. **Temperature measurement using surface skimming bulk waves**. Proceedings of the IEEE Ultrasonics Symposium. **Anais...**1999.
- WU, Z. et al. Band-gap property of a novel elastic metamaterial beam with X-shaped local resonators. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 134, 2019.
- XINJING, H. et al. An Acoustic Metamaterial-Based Sensor Capable of Multiband Filtering and Amplification. **IEEE Sensors Journal**, v. 20, n. 8, 2020.
- XU, W. et al. Multifunctional design of triangular lattice metamaterials with customizable thermal expansion and tunable bandgap properties. **Journal of Applied Physics**, v. 130, n. 8, 2021.
- YANG, W. H.; LEE, E. H. Modal analysis of floquet waves in composite materials. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 41, n. 2, 1974.
- YU, D. et al. Topological interface state formation in an hourglass lattice sandwich meta-structure. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 246, 2023.

- ŽAK, A. et al. High frequency dynamics of an isotropic Timoshenko periodic beam by the use of the Time-domain Spectral Finite Element Method. 2017.
- ZHANG, J. et al. **Recent advances in acoustic wave biosensors for the detection of disease-related biomarkers: A review.** *Analytica Chimica Acta*, 2021.
- ZHANG, Z. Analysis of some quadrilateral nonconforming elements for incompressible elasticity. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 34, n. 2, 1997.
- ZHU, R. et al. Negative refraction of elastic waves at the deep-subwavelength scale in a single-phase metamaterial. *Nature Communications*, v. 5, 2014.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics Sixth edition.** [s.l: s.n.].