



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE
TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA E
TERRITÓRIO (ILATIT)**

ENGENHARIA CIVIL DE INFRAESTRUTURA

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE TRELIÇAS COM O USO DA RIGIDEZ TANGENTE E SECANTE

OMAR MOHAMAD ISMAIL MATAR

Foz do Iguaçu
2022

ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE TRELIÇAS COM O USO DA RIGIDEZ TANGENTE E SECANTE

OMAR MOHAMAD ISMAIL MATAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil de Infraestrutura.

Orientador: Prof. Dr. André Jacomel Torii

Foz do Iguaçu
2022

OMAR MOAHAMAD ISMAIL MATAR

**ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE TRELIÇAS COM O USO DA RIGIDEZ
TANGENTE E SECANTE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil de Infraestrutura.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. André Jacomel Torii
UNILA

Prof. Dr. Aref Kalilo Lima Kzam
UNILA

Prof. Dr. Leandro Fleck Fadel Miguel
UFSC

Foz do Iguaçu, 29 de junho de 2022.

TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor(a): Omar Mohamad Ismail Matar

Curso: Engenharia Civil de Infraestrutura

Tipo de Documento	
(X) graduação	(.....) artigo
(.....) especialização	(X) trabalho de conclusão de curso
(.....) mestrado	(.....) monografia
(.....) doutorado	(.....) dissertação
	(.....) tese
	(.....) CD/DVD – obras audiovisuais
	(.....) _____

Título do trabalho acadêmico: Análise não linear geométrica de treliças com o uso da rigidez tangente e secante.

Nome do orientador(a): André Jacomel Torii

Data da Defesa: 29/06/2022

Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor(a):

a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons Licença 3.0 Unported*.

Foz do Iguaçu, 29 de junho de 2022.



Assinatura do Responsável

Dedico este trabalho aos que me ajudaram,
de alguma forma, nesta jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por ter me dado forças e me abençoado durante toda esta jornada.

À minha família como um todo, em especial ao meu pai, Mohamad, à minha mãe Rosani, e aos meus irmãos Fadile, Jassem, Aminah e Amira, por todo amor e suporte, e por sempre me incentivarem.

À minha namorada Debora, por sempre se fazer presente e paciente, ajudando sempre nos mais diversos pontos da minha vida, e por ser meu pilar por todo este tempo.

Ao professor André, por sempre ter me orientado, compartilhado conhecimento, incentivado e acreditado em mim durante a graduação.

Aos professores com quem tive o prazer de aprender, por terem dividido seus conhecimentos comigo, e ajudarem a me tornar quem eu sou.

Aos amigos com quem pude dividir momentos de alegria e tristeza.

Aos colegas da UNILA, pelas incontáveis horas divididas dentro de sala de aula, sempre nos ajudando a perseverar durante esta jornada.

RESUMO

A análise estrutural é uma grande área da engenharia, onde dentro desta estão a análise linear e não linear. Os efeitos da não linearidade podem alterar significativamente os esforços e deslocamentos na estrutura, quando comparados à um cenário de linearidade. No presente trabalho, foram desenvolvidas rotinas computacionais para a análise não linear de treliças planas, considerando a não linearidade geométrica. O método empregado para realizar a análise é o incremental puro. Trabalhos recentes apresentam vantagens no uso de matrizes de rigidez secante, portanto, foram implementadas nas rotinas as matrizes de rigidez secante e tangente, as quais são baseadas e derivadas a partir do conceito de energia potencial total. Foram confeccionadas estruturas de exemplo para realizar a validação das rotinas com os resultados de referência. Da análise dos resultados, foi possível observar que as rotinas obtiveram resultados muito próximos com a referência, com diferenças percentuais abaixo de 1% para as aplicações demonstradas. No que concerne sobre as rigidezes tangente e secante, não foi possível observar de maneira clara alguma vantagem que uma teria sobre o outra nos moldes do presente trabalho, necessitando maiores estudos.

Palavras-chave: análise não linear; estruturas treliçadas; rigidez secante; rigidez tangente, análise matricial.

ABSTRACT

Structural analysis is a large area of engineering, which includes linear and non-linear analysis. The effects of nonlinearity can significantly change the forces and displacements in the structure, when compared to a linear scenario. In the present work, computational routines were developed for the nonlinear analysis of plane trusses, considering the geometric nonlinearity. The method used to perform the analysis is the pure incremental. Recent Works show advantages in the use of secant stiffness matrices, therefore, the secant and tangent stiffness matrices were implemented in the routines, which are based on and derived from the concept of total potential energy. Sample structures were developed to validate the computational routines with the reference results. From the analysis of the results, it was possible to observe that the computational routines obtain results very close to the reference, with percentage differences below 1% for the demonstrated applications. Regarding the tangent and secant stiffness, it was not possible to clearly observe any advantage that one would have over the other in the molds of the present work, requiring further studies.

Key words: non-linear analysis; truss structures; secant stiffness; tangent stiffness; matrix analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Representação da rigidez secante.	18
Figura 2 - Representação da rigidez tangente.....	19
Figura 3 - Esquema para atualização de coordenadas.	20
Figura 4 - Elemento de treliça antes e depois de sofrer deformações e rotações de corpo rígido.	21
Figura 5 - Elemento de treliça plana.....	24
Figura 6 - Treliça de duas barras.....	43
Figura 7 - Gráfico de força x deslocamento, treliça de duas barras.	44
Figura 8 - Gráfico diferença percentual x incrementos de carga, treliça de duas barras.	45
Figura 9 - Gráfico de deslocamento x incrementos de carga, treliça de duas barras.	46
Figura 10 - Configuração deformada, treliça de duas barras.....	46
Figura 11 - Torre treliçada.....	47
Figura 12 - Gráfico força x deslocamento, torre treliçada.	48
Figura 13 - Gráfico diferença percentual x incrementos de carga, torre treliçada. ...	49
Figura 14 - Gráfico de deslocamento x incrementos de carga, torre treliçada.....	49
Figura 15 - Configuração deformada, torre treliçada.	50
Figura 16 - Viga biapoiada.....	51
Figura 17 - Gráfico força x deslocamento, viga biapoiada.....	52
Figura 18 - Gráfico diferença percentual x incrementos de carga, viga biapoiada. ..	52
Figura 19 - Gráfico de deslocamento x incrementos de carga, viga biapoiada.	53
Figura 20 - Configuração deformada, viga biapoiada.....	53

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 OBJETIVOS GERAIS	12
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	13
2 GENERALIDADES E BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	14
3 DESENVOLVIMENTO	16
3.1 CONCEITOS BÁSICOS.....	16
3.2 DESRIÇÃO CINEMÁTICA E ATUALIZAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO DEFORMADA	19
3.3 PARTICULARIZAÇÃO PARA TRELIÇA PLANA	21
3.3.1 Relação Deformação-Deslocamento	21
3.3.2 Funções de Forma.....	23
3.3.3 Energia de Deformação	25
3.3.4 Matriz de Rigidez Secante	26
3.3.5 Matriz de Rigidez Tangente	30
3.3.6 Transformação de Coordenadas	33
3.4 CASO INCREMENTAL	34
3.4.1 Matriz de Rigidez Secante Incremental	36
3.4.2 Matriz de Rigidez Tangente Incremental.....	40
3.5 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES	41
3.6 ASPECTOS COMPUTACIONAIS	42
4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS	43
4.1 APLICAÇÃO 1: TRELIÇA DE DUAS BARRAS	43
4.2 APLICAÇÃO 2: TORRE TRELIÇADA	46
4.3 APLICAÇÃO 3: VIGA BIAPOIADA.....	50
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
REFERÊNCIAS	56
APÊNDICE A – CÓDIGO FONTE	59

1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural é um dos pilares da engenharia de estruturas, pois a partir dela são obtidos os campos de tensões e deformações para um carregamento imposto, o que é imprescindível para o dimensionamento e avaliação do comportamento das estruturas. O surgimento de novas tecnologias e materiais permitem a construção de estruturas cada vez mais arrojadas e complexas, de forma que seja exigido métodos de análise mais rebuscados (MELO, 2019).

Dentro da análise estrutural, têm-se várias ramificações, sendo uma delas a análise linear (ou de primeira ordem), e outra conhecida como análise não linear (comumente conhecida como análise de segunda ordem). A análise linear é a mais utilizada nas estruturas correntes para a obtenção dos esforços e deslocamentos, devido sua simplicidade e aplicabilidade. Porém, na medida que as estruturas se tornam mais complexas e arrojadas, fenômenos de não linearidade na relação entre carga e deslocamento da estrutura começam a atuar.

As estruturas treliçadas possuem vasta aplicação na engenharia de estruturas, sendo elas utilizadas para se vencer grandes vãos, como em coberturas e pontes, além de serem amplamente empregadas na construção de torres de transmissão de energia elétrica (MARTINELLI; ALVES, 2017). Uma treliça é uma estrutura formada por barras interconectadas em seus extremos. Estas conexões de extremidade são chamadas de nós da treliça, e conectam as barras de forma que não possa ser transmitido momento por esta ligação.

O presente trabalho é focado na análise não linear de estruturas treliçadas planas, utilizando o método dos elementos finitos. Trabalhos recentes mostraram vantagens no uso da rigidez secante na análise de vigas de concreto armado (GRACITE, 2021; MELO, 2019; MELO; GRACITE; TORII, 2020), o que motiva o estudo e comportamento das rigidezes secante e tangente para diferentes estruturas. Diante do exposto, busca-se propor rotinas computacionais para a análise de estruturas, utilizando de matrizes de rigidez secantes e tangentes.

1.1 OBJETIVOS GERAIS

O presente trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de rotinas

computacionais para a análise não linear geométrica de estruturas treliçadas planas via método dos elementos finitos, aplicando os conceitos de rigidez tangente e secante.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Abaixo estão listados os objetivos específicos do presente trabalho.

- a) Desenvolver rotinas computacionais para a análise linear e não linear geométrica de estruturas treliçadas planas;
- b) Aplicar as formulações para rigidez tangente e secante;
- c) Avaliar os resultados obtidos com o uso da rigidez tangente e secante.

2 GENERALIDADES E BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Sobre o método dos elementos finitos (MEF), existe extensa literatura já escrita, tratando desde aspectos históricos à aspectos técnicos, retratando a evolução e novas formulações e métodos desenvolvidos para a aplicação do MEF. O presente trabalho se limita a citar trabalhos onde estes aspectos são tratados de forma aprofundada. Trabalhos como o de Fish e Belytschko (2009), Bathe (2014) e o de McGuire, Gallagher e Ziemian (2014) expõem a história e metodologia por trás do MEF e a análise matricial de estruturas. Já para a análise não linear de estruturas com a utilização do MEF, são poucos os trabalhos que tratam do tema de forma aprofundada. Crisfield (1991) é uma referência no que fiz respeito a análise não linear.

A análise linear considera que o comportamento dos materiais que constitui a estrutura é linear, obedecendo a lei de Hooke. Além disso, a estrutura é analisada tomando como referencial a sua geometria na configuração indeformada, ou seja, antes de sofrer deslocamentos gerados pelas cargas aplicadas. A maioria das obras civis se enquadra neste tipo de análise quando estão sob ações de serviço, sendo necessário, em alguns casos, recorrer a algumas simplificações quando não se é possível realizar uma análise não linear (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2014).

Já para a análise não linear, as relações entre carga e deslocamento são não lineares. Inicialmente, pode-se considerar a não linearidade geométrica da estrutura, ou seja, o carregamento imposto gera deslocamentos, que alteram a geometria inicial da estrutura, o que implica em uma alteração das condições de contorno. De forma resumida, para a não linearidade geométrica, se elabora as equações de equilíbrio da estrutura na sua configuração deformada.

Outra opção é considerar a não linearidade no comportamento dos materiais, utilizando de modelos conhecidos para se obter o comportamento mais próximo da realidade que o material apresenta sob carregamento. Ainda é possível realizar ensaios, de forma a estabelecer o comportamento do material.

Normalmente, a análise que leva em conta a não linearidade do material é chamada de análise inelástica (ou plástica), e a que leva em conta a alteração da geometria é chamada de análise de segunda ordem (ou geométrica). Em resumo, uma análise não linear implica em relações não lineares entre força e deslocamento, e uma análise linear implica em uma relação linear.

Além das fontes de não linearidades já citadas, existem outras fontes, como

a alteração das condições de contorno durante o deslocamento da estrutura (LACERDA, 2014). Existem vários processos geram a não linearidade, como podem ser vistos em (AN; WU; JIANG, 2019; GAN; DENG; LI, 2021; SOUZA et al., 2020). No presente trabalho se adota a não linearidade geométrica. Da análise não linear é gerado um sistema de equações não lineares. A solução desses sistemas de equações é realizada utilizando métodos numéricos, sejam eles métodos incrementais, iterativos ou mistos.

Nem sempre o modelo mais completo é o mais vantajoso, visto que se pode aumentar grandemente o esforço na análise para se obter pequenos ganhos. Raramente é possível modelar e implementar todas as fontes de não linearidade em uma estrutura para fins práticos de dimensionamento (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2014).

No que concerne sobre as rigidezes consideradas, o trabalho de Silva e Oñate (1997) ressaltam que o conceito de rigidez secante recebeu pouca atenção pela comunidade, não explorando todas as possibilidades, ou derivando matrizes secantes a partir de métodos numéricos, como o métodos Quasi-Newton e algoritmos de Broyden, e não de uma forma “pura”. Corrêa (1991) e Rodrigues (1997) apresentam deduções das matrizes de rigidez secante e tangente a partir do conceito de energia potencial total.

Como já citado anteriormente, recentemente Melo, Gracite e Torii (2020) apresentaram avanços utilizando a rigidez secante para a análise de vigas de concreto armado, utilizando de métodos puramente iterativos, sendo apresentado também por Melo (2019).

3 DESENVOLVIMENTO

Na presente seção, apresenta-se os conceitos e equacionamentos utilizados, além de esclarecer pontos pertinentes sobre o desenvolvimento do presente trabalho.

3.1 CONCEITOS BÁSICOS

Admite-se que a estrutura a ser analisada se encontra em regime elástico, constituída, de forma discreta, por barras conectadas em seus extremos, sendo estas conexões chamadas de nós. As forças externas à estrutura são aplicadas nos nós (CORRÊA, 1991). Agora, faz-se o uso do método da energia potencial para descrever o equacionamento.

Segundo Timoshenko e Gere (1984), a energia potencial de uma estrutura define-se como o trabalho realizado pelas forças que nela atuam. As forças atuantes na estrutura são as forças internas e externas, portanto, pode-se dividir a energia potencial total em duas parcelas.

Uma das parcelas é a energia de deformação, que se armazena na estrutura após seu deslocamento devido às forças externas. A outra parcela é a do trabalho realizado pelas forças externas durante o deslocamento da estrutura. Expressando algebricamente, tem-se

$$\Pi = U - F^T u, \quad (1)$$

sendo Π – energia potencial total; U – energia de deformação; F^T – vetor de forças nodais e u – vetor de deslocamentos nodais.

Salienta-se que a energia potencial das forças externas é negativa, pois as cargas externas realizam trabalho negativo caso a estrutura retome a sua configuração original (TIMOSHENKO; GERE, 1984). A energia de deformação pode ser escrita como

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma \, dV, \quad (2)$$

onde ε^T – vetor de deformações; σ – vetor de tensões e V – volume da estrutura.

Utilizando da Lei de Hooke, pode-se reescrever a Equação (2) em função do módulo de elasticidade do material (E) e das deformações, ficando como

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T E \varepsilon dV. \quad (3)$$

De acordo com o princípio da energia potencial mínima (TIMOSHENKO; GERE, 1984), o estado de equilíbrio da estrutura é atingido quando a energia potencial assume um valor estacionário. Portanto, tomando-se as derivadas parciais da energia potencial total em relação a cada um dos deslocamentos u_i , e fazendo com estas derivadas sejam iguais a zero, obtém-se um sistema de equações, cuja solução é o estado de equilíbrio da estrutura. O sistema de equações é gerado a partir da expressão:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = \frac{\partial U}{\partial u_i} - F_i = 0. \quad (4)$$

Uma maneira de lidar com as equações resultantes é organizando-as na forma de matrizes, chegando-se a seguinte expressão

$$K_s u = F, \quad (5)$$

onde matriz K_s é chamada de matriz de rigidez secante. Caso o comportamento da estrutura seja linear, a matriz K_s independe dos deslocamentos, já quando o comportamento é não linear, a matriz se torna dependente dos deslocamentos, visto que as relações deformação-deslocamento são não lineares (CORRÊA, 1991). Uma representação simbólica dos dois casos é apresentada na Figura 1.

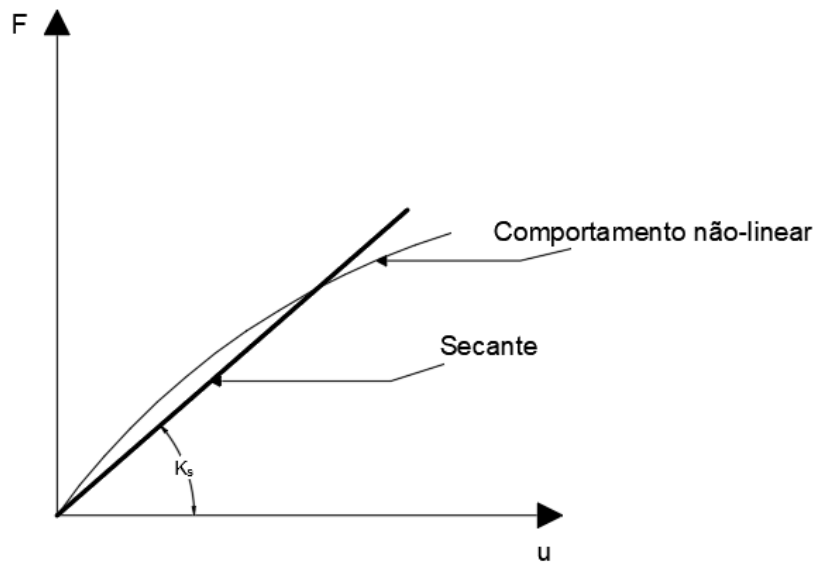
A Equação (5) pode ser reescrita como

$$\Psi(u_i) = F. \quad (6)$$

Aplicando-se uma variação finita “ Δu_i ” aos deslocamentos na configuração deformada, e expandindo a Equação (6) em série de Taylor, negligenciando os termos de ordem maior, tem-se (RODRIGUES, 1997):

$$\Psi(u_i + \Delta u_i) = \Psi(u_i) + \frac{\partial \Psi(u_i)}{\partial u_i} \Delta u_i. \quad (7)$$

Figura 1 - Representação da rigidez secante.



Fonte: adaptado de Corrêa, 1991.

De forma equivalente, juntando as Equações (6) e (7) obtém-se

$$\frac{\partial^2 U(u_i)}{\partial u_i \partial u_j} \Delta u_i = \Delta F, \quad (8)$$

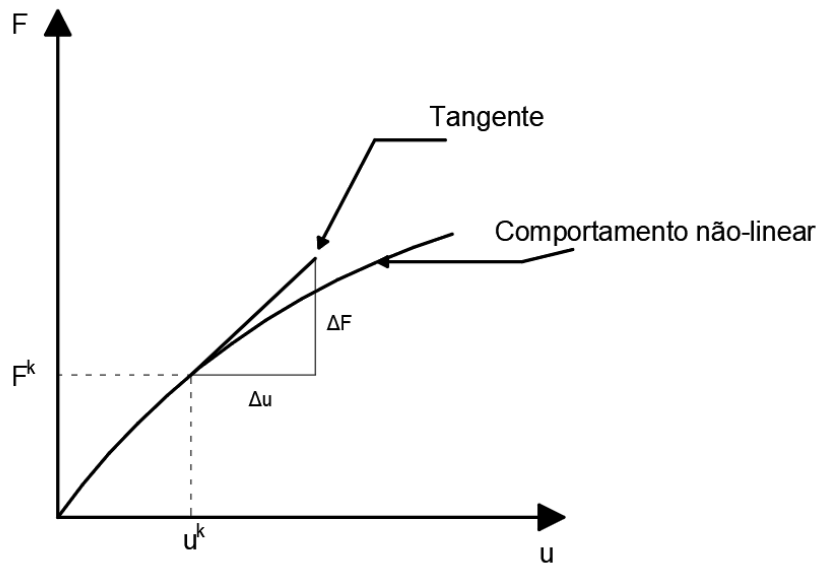
Onde, analogamente à Equação (5), pode-se organizar as equações resultantes de forma matricial, resultando em

$$K_t \Delta u = \Delta F, \quad (9)$$

onde K_t é a conhecida matriz de rigidez tangente da estrutura.

Portanto, diante do exposto, as matrizes de rigidez secante e tangente da estrutura podem ser obtidas a partir da primeira e segunda derivação da energia potencial total da estrutura. Uma representação da rigidez tangente é apresentada na Figura 2.

Figura 2 - Representação da rigidez tangente.



Fonte: adaptado de Corrêa, 1991.

3.2 DESRIÇÃO CINEMÁTICA E ATUALIZAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO DEFORMADA

No presente trabalho, optou-se pelo uso da formulação lagrangeana atualizada, utilizada para descrever a posição de equilíbrio durante a integração numérica. Segundo Corrêa (1991), pode-se usar uma formulação lagrangeana total, o que simplifica de certa forma a formulação exposta, visto que faz-se o uso de somente uma matriz de transformação de coordenadas por elemento para se ir da referência local à global. Porém, na medida que as rotações se tornam significativas entre a configuração inicial e final, as matrizes de transformação de coordenadas perdem sua representatividade.

Portanto, transformando o problema em um processo incremental, a energia de deformação pode ser representada da seguinte forma (RODRIGUES, 1997):

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \left({}^{m+1}\varepsilon \right)^2 dV, \quad (10)$$

onde ${}^{m+1}\varepsilon$ é a deformação total do elemento até a configuração “m+1”.

A variação de deformação ocorrida até uma configuração de equilíbrio “n” pode ser escrita como

$$\Delta^n \varepsilon = {}^{m+1}\varepsilon - {}^m\varepsilon. \quad (11)$$

Isolando a deformação ocorrida até a configuração “m+1” na Equação (11) e substituindo na Equação (10), obtém-se

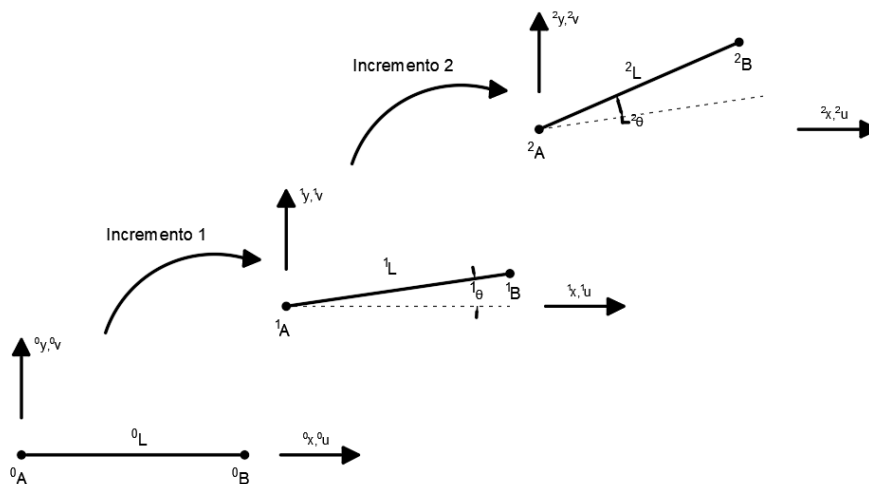
$$U = \frac{1}{2} \int_V E (\Delta^n \varepsilon^2 + 2\Delta^n \varepsilon {}^m\varepsilon + {}^m\varepsilon^2) dV. \quad (12)$$

Segundo Corrêa (1991), a deformação ${}^m\varepsilon$ é uma deformação passada, que independe dos deslocamentos do estágio atual de carregamento, e portanto a variação em relação aos deslocamentos do presente estágio é nula. Logo, a última parcela quadrática da energia de deformação na Equação (12) se anula, pois depende unicamente da deformação ${}^m\varepsilon$. Dito isto, reescrevendo a equação, tem-se que

$$U = \frac{1}{2} \int_V E (\Delta^n \varepsilon)^2 dV + {}^m\varepsilon \int_V E (\Delta^n \varepsilon) dV. \quad (13)$$

Em resumo, a primeira expressão à direita da igualdade na Equação (13) fornece o acréscimo de energia ocorrido durante o incremento “n”, e o restante da equação fornece a energia acumulada até o incremento anterior ao atual (RODRIGUES, 1997).

Figura 3 - Esquema para atualização de coordenadas.



Fonte: adaptado de Rodrigues, 1997.

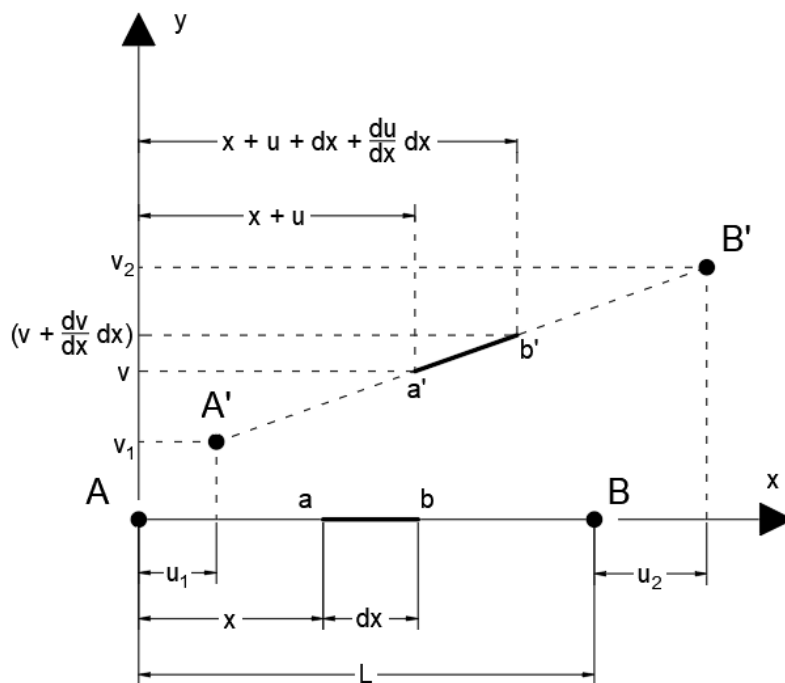
3.3 PARTICULARIZAÇÃO PARA TRELIÇA PLANA

A presente seção tem por objetivo particularizar a formulação apresentada anteriormente para o elemento finito de treliça plana. Para isso, inicialmente descreve-se a relação deformação-deslocamento para um elemento treliça, seguindo para obtenção das funções de forma dos deslocamentos e, finalmente, obtendo a energia de deformação e as matrizes de rigidez dos elementos.

3.3.1 Relação Deformação-Deslocamento

Considerando o elemento de treliça apresentado na Figura 4, pode-se escrever a relação entre a deformação e o deslocamento do elemento.

Figura 4 - Elemento de treliça antes e depois de sofrer deformações e rotações de corpo rígido.



Fonte: adaptado de McGuire, Gallagher e Ziemian, 2014.

O elemento AB da Figura 4, de comprimento L , após sofrer um estiramento e rotação no eixo do corpo rígido, aumenta seu comprimento. Tomando uma parte

infinitesimal “dx” do elemento na configuração indeformada, representada pelos pontos ab, e escrevendo o comprimento desta parte após sofrer deformações, tem-se (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2014)

$$a'b' = \left[1 + 2 \frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx. \quad (14)$$

Escrevendo os últimos três termos dentro dos colchetes como o incremento d_{ab} e realizando a expansão binomial da expressão, tem-se

$$d_{ab} = 2 \frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2, \quad (15)$$

$$\frac{a'b'}{dx} = [1 + d_{ab}]^{1/2}, \quad (16)$$

$$[1 + d_{ab}]^{1/2} = \sum_k \binom{1/2}{k} d_{ab}^k = \binom{1/2}{0} d_{ab}^0 + \binom{1/2}{1} d_{ab}^1 + \binom{1/2}{2} d_{ab}^2 \dots \quad (17)$$

Negligenciando os termos de ordem maior na Equação (17) e reescrevendo a Equação (16), obtém-se

$$\frac{a'b'}{dx} = 1 + \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]. \quad (18)$$

Agora, definindo a deformação finita ε_x como a extensão por unidade de comprimento $(a'b' - ab)/dx$, obtém-se a relação entre a deformação axial e o deslocamento da estrutura (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2014):

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

Note que, para um comportamento linear, a Equação (19) se resume ao

primeiro termo a direita da equação, que é a deformação infinitesimal ou seja,

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (20)$$

Já os dois termos quadráticos da Equação (19) são os que conferem a não linearidade da relação entre deformação e deslocamento. Corrêa (1991) ressalta que o primeiro termo quadrático pode ser negligenciado, sendo comum essa prática na literatura. Porém, a eliminação do segundo termo quadrático pode eliminar a não linearidade da relação, devendo ser mantido. No presente trabalho, faz-se o uso da equação completa.

3.3.2 Funções de Forma

Assumindo uma variação linear para os deslocamentos, as funções de forma a serem utilizadas são da forma

$$\begin{cases} u(x) = \alpha_u + \beta_u x \\ v(x) = \alpha_v + \beta_v x \end{cases} \quad (21)$$

A Figura 5 expõe o elemento finito de treliça plana e seus deslocamentos, a partir dos quais se escreve as funções de forma.

Para o caso dos deslocamentos horizontais “u”, as condições de contorno são

$$\begin{cases} u(0) = u_1 \\ u(L) = u_2 \end{cases}, \quad (22)$$

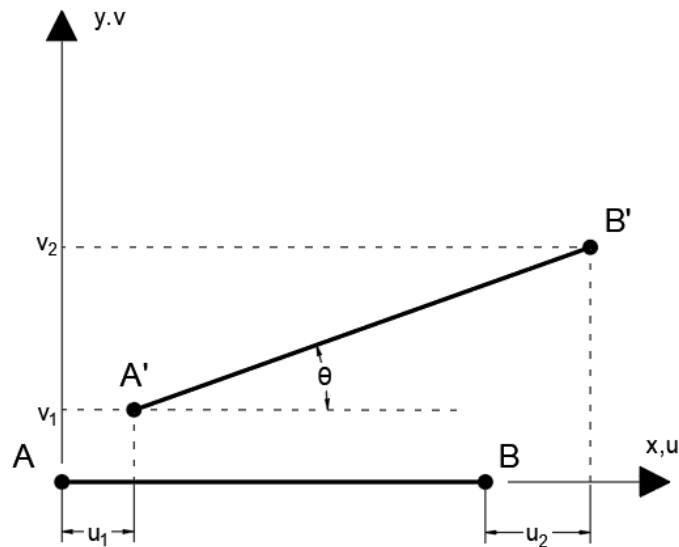
sendo L o comprimento do elemento. Com as condições de contorno, chega-se a seguinte expressão para a função de forma dos deslocamentos horizontais (RODRIGUES, 1997):

$$u(x) = u_1 + \varphi x, \quad (23)$$

onde

$$\varphi = \frac{(u_2 - u_1)}{L}. \quad (24)$$

Figura 5 - Elemento de treliça plana.



Fonte: adaptado de Corrêa, 1991.

De forma análoga à função de forma para deslocamentos horizontais, a função de forma para os deslocamentos verticais é dada por:

$$v(x) = v_1 + \theta_0 x, \quad (25)$$

onde θ_0

$$\theta_0 = \frac{(v_2 - v_1)}{L}. \quad (26)$$

Analisando a rotação do elemento, sabe-se que na equação reduzida da reta, o coeficiente angular da equação é igual à tangente do ângulo formado entre o eixo horizontal e a reta. Ou seja:

$$\theta = \arctan \left(\frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1 + L} \right) = \arctan \left(\frac{\frac{v_2 - v_1}{L}}{\frac{u_2 - u_1}{L} + 1} \right). \quad (27)$$

Segundo Novozhilov (1953, *apud* Corrêa, 1991), admitindo-se pequenas rotações, da ordem de 0,045 rad, pode-se assumir que $\sin(\theta) = \tan(\theta) = \theta$, e desprezando $\frac{u_2 - u_1}{L}$ na presença da unidade.

3.3.3 Energia de Deformação

Com o uso das Equações (3) e (19), e assumindo que a área de seção transversal “A” e o módulo de elasticidade “E” são constantes ao longo do elemento, escreve-se a energia de deformação para o elemento de treliça plana como

$$U = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left\{ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \right\} dx. \quad (28)$$

Da derivação das funções de forma, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \varphi \\ \frac{dv}{dx} &= \theta_0 \end{aligned} \quad (29)$$

Substituindo as derivadas da Equação (29) na Equação (28) e adotando a área de seção transversal “A” e módulo de elasticidade “E” constante ao longo do comprimento, além de também transformar o domínio de integração para o comprimento do elemento, tem-se

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left\{ \varphi + \frac{1}{2} [\varphi^2 + \theta_0^2] \right\}^2 dx. \quad (30)$$

Efetuada-se a integração, obtém-se

$$U = \frac{EAL}{2} \left(\varphi^2 + \varphi^3 + \frac{1}{4} \varphi^4 + \varphi \theta_0^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 \theta_0^2 + \frac{1}{4} \theta_0^4 \right). \quad (31)$$

De maneira a facilitar o entendimento, pode-se subdividir a energia de deformação em parcelas, como:

$$U = \sum_{i=0}^5 U_i, \quad (32)$$

sendo

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{EAL}{2} (\varphi^2); \\ U_1 &= \frac{EAL}{2} (\varphi^3); \\ U_2 &= \frac{EAL}{2} \left(\frac{1}{4} \varphi^4 \right); \\ U_3 &= \frac{EAL}{2} (\varphi \theta_0^2); \\ U_4 &= \frac{EAL}{2} \left(\frac{1}{2} \varphi^2 \theta_0^2 \right); \text{ e} \\ U_5 &= \frac{EAL}{2} \left(\frac{1}{4} \theta_0^4 \right). \end{aligned} \quad (33)$$

3.3.4 Matriz de Rigidez Secante

Agora, para a obtenção da matriz de rigidez secante, deriva-se a energia de deformação em relação aos deslocamentos e substitui a expressão na Equação (4). Portanto, realizando as derivadas para U_0 :

$$\frac{\partial U_0}{\partial u_1} = -EA\varphi;$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial v_1} = 0;$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial u_2} = EA\varphi;$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial v_2} = 0.$$

(34)

Para U_1 :

$$\frac{\partial U_1}{\partial u_1} = -\frac{3}{2}EA\varphi^2;$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial v_1} = 0;$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial u_2} = \frac{3}{2}EA\varphi^2;$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial v_2} = 0.$$

(35)

Para U_2 :

$$\frac{\partial U_2}{\partial u_1} = -\frac{1}{2}EA\varphi^3;$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial v_1} = 0;$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial u_2} = \frac{1}{2}EA\varphi^3;$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial v_2} = 0.$$

(36)

Para U_3 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_3}{\partial u_1} &= -\frac{1}{2}EA\theta_0^2; \\
\frac{\partial U_3}{\partial v_1} &= -EA\varphi\theta_0; \\
\frac{\partial U_3}{\partial u_2} &= \frac{1}{2}EA\theta_0^2; \\
\frac{\partial U_3}{\partial v_2} &= EA\varphi\theta_0.
\end{aligned}
\tag{37}$$

Para U_4 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_4}{\partial u_1} &= -\frac{1}{2}EA\varphi\theta_0^2; \\
\frac{\partial U_4}{\partial v_1} &= -\frac{1}{2}EA\varphi^2\theta_0; \\
\frac{\partial U_4}{\partial u_2} &= \frac{1}{2}EA\varphi\theta_0^2; \\
\frac{\partial U_4}{\partial v_2} &= \frac{1}{2}EA\varphi^2\theta_0.
\end{aligned}
\tag{38}$$

Finalmente, para U_5 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_5}{\partial u_1} &= 0; \\
\frac{\partial U_5}{\partial v_1} &= -\frac{1}{2}EA\theta_0^3; \\
\frac{\partial U_5}{\partial u_2} &= 0; \\
\frac{\partial U_5}{\partial v_2} &= \frac{1}{2}EA\theta_0^3.
\end{aligned}
\tag{39}$$

Agora, realiza-se a organização das equações acima de acordo com a Equação (4), isto é:

$$k_s u = F, \text{ sendo } u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}. \quad (40)$$

Para facilitar o entendimento, escreve-se a matriz secante no elemento como

$$k_s = k_0^s + k_1^s + k_2^s + k_3^s + k_4^s + k_5^s, \quad (41)$$

sendo

$$\begin{aligned} k_0^s &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ k_1^s &= \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3\varphi & 0 & -3\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3\varphi & 0 & 3\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ k_2^s &= \frac{1}{3} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\varphi^2 & 0 & -\frac{3}{2}\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\varphi^2 & 0 & \frac{3}{2}\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ k_3^s &= \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & \theta_0 & 0 & -\theta_0 \\ \theta_0 & \varphi & -\theta_0 & -\varphi \\ 0 & -\theta_0 & 0 & \theta_0 \\ -\theta_0 & -\varphi & \theta_0 & \varphi \end{bmatrix}, \\ k_4^s &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{\theta_0^2}{4} & \frac{\theta_0\varphi}{4} & -\frac{\theta_0^2}{4} & -\frac{\theta_0\varphi}{4} \\ \frac{\theta_0\varphi}{4} & \frac{\varphi^2}{4} & -\frac{\theta_0\varphi}{4} & -\frac{\varphi^2}{4} \\ -\frac{\theta_0^2}{4} & -\frac{\theta_0\varphi}{4} & \frac{\theta_0^2}{4} & \frac{\theta_0\varphi}{4} \\ -\frac{\theta_0\varphi}{4} & -\frac{\varphi^2}{4} & \frac{\theta_0\varphi}{4} & \frac{\varphi^2}{4} \end{bmatrix}, e \end{aligned} \quad (42)$$

$$k_5^s = \frac{1}{3} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \theta_0^2 & 0 & -\frac{3}{2} \theta_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \theta_0^2 & 0 & \frac{3}{2} \theta_0^2 \end{bmatrix}.$$

Note que, para simbolizar que as submatrizes constituem a matriz secante, utiliza-se o sobrescrito “s”.

3.3.5 Matriz de Rigidez Tangente

Como já explicitado na Equação (8), a obtenção da matriz de rigidez tangente envolve a as segundas derivadas da energia de deformação em relação a cada um dos deslocamentos. Portanto, derivando-se novamente as expressões e as organizando matricialmente, obtém-se a matriz de rigidez tangente do elemento. Logo, realizando a derivação para U_0 :

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 U_0}{\partial u_2^2} = \frac{EA}{L};$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial u_1 \partial u_2} = -\frac{EA}{L};$$

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial v_i \partial u_j} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial v_i \partial v_j} = 0.$$

(43)

Para U_1 :

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial u_2^2} = \frac{3EA\varphi}{L};$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial u_1 \partial u_2} = -\frac{3EA\varphi}{L};$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial v_i \partial v_j} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial v_i \partial u_j} = 0.$$

(44)

Para U_2 :

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial u_2^2} = \frac{3EA\varphi^2}{2L};$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial u_1 \partial u_2} = -\frac{3EA\varphi^2}{2L};$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial v_i \partial v_j} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial v_i \partial u_j} = 0.$$

(45)

Para U_3 :

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial u_1^2} = \frac{\partial^2 U_3}{\partial u_2^2} = \frac{\partial^2 U_3}{\partial u_1 \partial u_2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1^2} = \frac{\partial^2 U_3}{\partial v_2^2} = \frac{EA\varphi}{L};$$

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1 \partial v_2} = -\frac{EA\varphi}{L};$$

(46)

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1 \partial u_1} = \frac{\partial^2 U_3}{\partial v_2 \partial u_2} = \frac{EA\theta_0}{L};$$

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial v_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 U_3}{\partial v_2 \partial u_1} = -\frac{EA\theta_0}{L}.$$

Para U_4 :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U_4}{\partial u_1^2} &= \frac{\partial^2 U_4}{\partial u_2^2} = -\frac{\partial^2 U_4}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{EA\theta_0^2}{2L}; \\
 \frac{\partial^2 U_4}{\partial v_1^2} &= \frac{\partial^2 U_4}{\partial v_2^2} = -\frac{\partial^2 U_4}{\partial v_1 \partial v_2} = \frac{EA\varphi^2}{2L}; \\
 \frac{\partial^2 U_4}{\partial u_1 \partial v_1} &= \frac{\partial^2 U_4}{\partial u_2 \partial v_2} = \frac{EA\varphi\theta_0}{L}; \\
 \frac{\partial^2 U_4}{\partial v_1 \partial u_2} &= \frac{\partial^2 U_4}{\partial v_2 \partial u_1} = -\frac{EA\varphi\theta_0}{L}.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Para U_5 :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U_5}{\partial u_i^2} &= \frac{\partial^2 U_5}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 U_5}{\partial u_i \partial v_j} = 0; \\
 \frac{\partial^2 U_5}{\partial v_1^2} &= \frac{\partial^2 U_5}{\partial v_2^2} = -\frac{\partial^2 U_5}{\partial v_1 \partial v_2} = \frac{3EA\theta_0^2}{2L}.
 \end{aligned} \tag{48}$$

De forma análoga à matriz de rigidez secante, organiza-se as equações, de forma a obter a matriz de rigidez do elemento na forma

$$k_t = k_0^t + k_1^t + k_2^t + k_3^t + k_4^t + k_5^t, \tag{49}$$

onde

$$\begin{aligned}
 k_0^t &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 k_1^t &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3\varphi & 0 & -3\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3\varphi & 0 & 3\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
k_2^t &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{3\varphi^2}{2} & 0 & -\frac{3\varphi^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3\varphi^2}{2} & 0 & \frac{3\varphi^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
k_3^t &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & \theta_0 & 0 & -\theta_0 \\ \theta_0 & \varphi & -\theta_0 & -\varphi \\ 0 & -\theta_0 & 0 & \theta_0 \\ -\theta_0 & -\varphi & \theta_0 & \varphi \end{bmatrix}, \\
k_4^t &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{\theta_0^2}{2} & \varphi\theta_0 & -\frac{\theta_0^2}{2} & -\varphi\theta_0 \\ \varphi\theta_0 & \frac{\varphi^2}{2} & -\varphi\theta_0 & -\frac{\varphi^2}{2} \\ -\frac{\theta_0^2}{2} & -\varphi\theta_0 & \frac{\theta_0^2}{2} & \varphi\theta_0 \\ -\varphi\theta_0 & -\frac{\varphi^2}{2} & \varphi\theta_0 & \frac{\varphi^2}{2} \end{bmatrix}, e \\
k_5^t &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\theta_0^2}{2} & 0 & -\frac{3\theta_0^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3\theta_0^2}{2} & 0 & \frac{3\theta_0^2}{2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

É possível observar que algumas das submatrizes em (50) possuem semelhança às submatrizes em (42), multiplicadas por coeficientes diferentes (e.g. $k_1^t = 2k_1^s$; $k_2^t = 3k_2^s$).

3.3.6 Transformação de Coordenadas

Observe que todo o desenvolvimento das matrizes de rigidez foi realizado baseando-se em um referencial local. Após a obtenção da matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais, faz-se a transformação de coordenadas desta matriz para que esta faça referência a um sistema de coordenadas globais. Para realizar a transformação, usa-se a conhecida matriz de rotação de eixos, encontrada em Kassimali (2011) e McGuire, Gallagher e Ziemian (2014), de forma que

$$K = R k R^T, \quad (51)$$

onde R a matriz de transformação de coordenadas, K e k as matrizes de rigidez em coordenadas globais e locais, respectivamente. A matriz de rotação é da forma

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (52)$$

sendo “ α ” o ângulo formado entre o sistema de coordenadas globais e locais.

3.4 CASO INCREMENTAL

O caso incremental segue o que foi descrito pelas Equações (10) - (13), cabendo aqui apenas a particularização para a treliça plana. Pode-se escrever a variação da deformação durante um incremento “ n ” baseado na Equações (11), (19) e (29), obtendo-se (RODRIGUES, 1997)

$$\Delta^n \varepsilon_x = \left(\frac{\Delta^n u_2 - \Delta^n u_1}{m_L} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^n u_2 - \Delta^n u_1}{m_L} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^n v_2 - \Delta^n v_1}{m_L} \right)^2, \quad (53)$$

onde $\Delta^n u_i$ representa a variação do deslocamento “ i ” entre o incremento “ m ” e “ n ”. Substituindo a Equação (53) na Equação (13) obtém-se a energia de deformação, expressa como

$$\begin{aligned} {}^n U = & \frac{1}{2} \int_V E \left(\Delta \varphi^2 + \Delta \varphi^3 + \frac{1}{4} \Delta \varphi^4 + \Delta \varphi \Delta \theta_0^2 + \frac{1}{2} \Delta \varphi^2 \Delta \theta_0^2 + \frac{1}{4} \Delta \theta_0^4 \right) dV \\ & + {}^m \varepsilon_x \int_V E \left(\Delta \varphi + \frac{1}{2} \Delta \varphi^2 + \frac{1}{2} \Delta \theta_0^2 \right) dV, \end{aligned} \quad (54)$$

sendo

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta^n u_2 - \Delta^n u_1}{m_L}, e$$

$$\Delta\theta_0 = \frac{\Delta^n v_2 - \Delta^n v_1}{m_L}. \quad (55)$$

Para realizar a integração da Equação (54), admite-se que o módulo de elasticidade “E” e que a área de seção transversal “A” seja constante e não mude ao passar de um incremento “m” para “n”. Logo, realizando a integração, obtém-se que

$${}^nU = \frac{1}{2} EA^m L \left(\Delta\varphi^2 + \Delta\varphi^3 + \frac{1}{4} \Delta\varphi^4 + \Delta\varphi \Delta\theta_0^2 + \frac{1}{2} \Delta\varphi^2 \Delta\theta_0^2 + \frac{1}{4} \Delta\theta_0^4 \right) \\ + {}^m\varepsilon_x EA^m L \left(\Delta\varphi + \frac{1}{2} \Delta\varphi^2 + \frac{1}{2} \Delta\theta_0^2 \right). \quad (56)$$

Na expressão anterior, note que é possível interpretar o termo “ ${}^m\varepsilon_x EA$ ” como sendo a força axial atuante na barra “ mN ”, acumulada até o incremento “m”. Portanto, reescrevendo a expressão, tem-se

$${}^nU = \frac{1}{2} EA^m L \left(\Delta\varphi^2 + \Delta\varphi^3 + \frac{1}{4} \Delta\varphi^4 + \Delta\varphi \Delta\theta_0^2 + \frac{1}{2} \Delta\varphi^2 \Delta\theta_0^2 + \frac{1}{4} \Delta\theta_0^4 \right) \\ + {}^mN^m L \left(\Delta\varphi + \frac{1}{2} \Delta\varphi^2 + \frac{1}{2} \Delta\theta_0^2 \right). \quad (57)$$

Note que a primeira parte entre parênteses da Equação (57) é idêntica a Equação (31), bastando substituir u_i por Δu_i e v_i por Δv_i , etc. Já a segunda parcela da energia de deformação requer o desenvolvimento das equações. Analogamente à Equação (32), pode-se subdividir a energia de deformação de forma que

$${}^nU = \sum_{i=0}^8 {}^nU_i, \quad (58)$$

sendo

$${}^nU_0 = \frac{1}{2} EA^m L (\Delta\varphi^2); \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
{}^nU_1 &= \frac{1}{2}EA^mL(\Delta\varphi^3); \\
{}^nU_2 &= \frac{1}{2}EA^mL\left(\frac{1}{4}\Delta\varphi^4\right); \\
{}^nU_3 &= \frac{1}{2}EA^mL(\Delta\varphi\Delta\theta_0^2); \\
{}^nU_4 &= \frac{1}{2}EA^mL\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi^2\Delta\theta_0^2\right); \\
{}^nU_5 &= \frac{1}{2}EA^mL\left(\frac{1}{4}\Delta\theta_0^4\right); \\
{}^nU_6 &= {}^mN^mL(\Delta\varphi); \\
{}^nU_7 &= {}^mN^mL\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi^2\right); \text{ e} \\
{}^nU_8 &= {}^mN^mL\left(\frac{1}{2}\Delta\theta_0^2\right).
\end{aligned}$$

Novamente, como já citado acima, note que as parcelas de energia de deformação de variando de 0 até 5, são as mesmas parcelas de energia já desenvolvida nos itens anteriores, cabendo somente a substituição de variáveis já citada. Agora, realiza-se o desenvolvimento das parcelas de energia que ainda não foram tratadas anteriormente.

3.4.1 Matriz de Rigidez Secante Incremental

Derivando as parcelas da energia de deformação em (59) ainda não tratadas, temos para nU_6 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial {}^nU_6}{\partial \Delta^n u_1} &= -\frac{\partial {}^nU_6}{\partial \Delta^n u_2} = -{}^mN; \\
\frac{\partial {}^nU_6}{\partial \Delta^n v_1} &= \frac{\partial {}^nU_6}{\partial \Delta^n v_2} = 0.
\end{aligned} \tag{60}$$

Para nU_7 :

$$\frac{\partial {}^nU_7}{\partial \Delta^n u_1} = -\frac{\partial {}^nU_7}{\partial \Delta^n u_2} = -{}^mN\Delta\varphi;$$

$$\frac{\partial {}^nU_7}{\partial \Delta^n v_1} = \frac{\partial {}^nU_7}{\partial \Delta^n v_2} = 0. \quad (61)$$

Para nU_8 :

$$\frac{\partial {}^nU_8}{\partial \Delta^n u_1} = \frac{\partial {}^nU_8}{\partial \Delta^n u_2} = 0;$$

$$\frac{\partial {}^nU_8}{\partial \Delta^n v_1} = -\frac{\partial {}^nU_8}{\partial \Delta^n v_2} = -{}^mN\Delta\theta. \quad (62)$$

Pode-se organizar matricialmente a derivação de cada uma das parcelas da energia de deformação na forma

$${}^n k_s \Delta^n u + {}^m f = {}^n f, \quad (63)$$

onde ${}^n k_s$ é a matriz de rigidez secante do elemento, $\Delta^n u$ é o vetor de variação dos deslocamentos, ${}^n f$ é o vetor e forças aplicadas ao elemento até o incremento “n”. A equação acima pode ser transformada em

$${}^n k_s \Delta^n u = \Delta^n f, \quad (64)$$

onde $\Delta^n f$ representa o incremento de carga ocorrido entre o passo “n-1” e “n”. Portanto, montando-se as matrizes, tem-se que (RODRIGUES, 1997)

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{EA}{m_L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{EA}{m_L} \begin{bmatrix} 3\Delta\varphi & 0 & -3\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3\Delta\varphi & 0 & 3\Delta\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{3} \frac{EA}{m_L} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\Delta\varphi^2 & 0 & -\frac{3}{2}\Delta\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\Delta\varphi^2 & 0 & \frac{3}{2}\Delta\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{2} \frac{EA}{m_L} \begin{bmatrix} 0 & \Delta\theta_0 & 0 & -\Delta\theta_0 \\ \Delta\theta_0 & \Delta\varphi & -\Delta\theta_0 & -\Delta\varphi \\ 0 & -\Delta\theta_0 & 0 & \Delta\theta_0 \\ -\Delta\theta_0 & -\Delta\varphi & \Delta\theta_0 & \Delta\varphi \end{bmatrix} \\ & + \frac{EA}{m_L} \begin{bmatrix} \frac{\Delta\theta_0^2}{4} & \frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & -\frac{\Delta\theta_0^2}{4} & -\frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} \\ \frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & \frac{\Delta\varphi^2}{4} & -\frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & -\frac{\Delta\varphi^2}{4} \\ -\frac{\Delta\theta_0^2}{4} & -\frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & \frac{\Delta\theta_0^2}{4} & \frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} \\ -\frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & -\frac{\Delta\varphi^2}{4} & \frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & \frac{\Delta\varphi^2}{4} \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{3} \frac{EA}{m_L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\Delta\theta_0^2 & 0 & -\frac{3}{2}\Delta\theta_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\Delta\theta_0^2 & 0 & \frac{3}{2}\Delta\theta_0^2 \end{bmatrix} + \frac{m_N}{m_L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \frac{m_N}{m_L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \Delta^n u_1 \\ \Delta^n v_1 \\ \Delta^n u_2 \\ \Delta^n v_2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} -m_N \\ 0 \\ m_N \\ 0 \end{matrix} \right\} = n_f. \end{aligned} \right. \quad (65)$$

O vetor de forças axiais apresentado em (65), obtido de (60), pode ser passado ao outro lado da igualdade, representando assim, um incremento de força na barra, ou seja $\Delta^n f = n_f - m_f$. De forma que a matriz de rigidez secante fique com o mesmo

simbolismo apresentado por Corrêa (1991) e Rodrigues (1997), tem-se que

$$^n k_s = ^n k_0 + \frac{1}{2} ^n k_1 + \frac{1}{3} ^n k_2 + ^n k_{SEC} + ^n k_G, \quad (66)$$

onde

$$\begin{aligned} ^n k_0 &= \frac{EA}{m_L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ ^n k_1 &= \frac{EA}{m_L} \begin{bmatrix} 3\Delta\varphi & \Delta\theta_0 & -3\Delta\varphi & -\Delta\theta_0 \\ \Delta\theta_0 & \Delta\varphi & -\Delta\theta_0 & -\Delta\varphi \\ -3\Delta\varphi & -\Delta\theta_0 & 3\Delta\varphi & \Delta\theta_0 \\ -\Delta\theta_0 & -\Delta\varphi & \Delta\theta_0 & \Delta\varphi \end{bmatrix}; \\ ^n k_2 &= \frac{EA}{m_L} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\Delta\varphi^2 & 0 & -\frac{3}{2}\Delta\varphi^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\Delta\theta_0^2 & 0 & -\frac{3}{2}\Delta\theta_0^2 \\ -\frac{3}{2}\Delta\varphi^2 & 0 & \frac{3}{2}\Delta\varphi^2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\Delta\theta_0^2 & 0 & \frac{3}{2}\Delta\theta_0^2 \end{bmatrix}; \\ ^n k_{SEC} &= \frac{EA}{m_L} \begin{bmatrix} \frac{\Delta\theta_0^2}{4} & \frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & -\frac{\Delta\theta_0^2}{4} & -\frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} \\ \frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & \frac{\Delta\varphi^2}{4} & -\frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & -\frac{\Delta\varphi^2}{4} \\ -\frac{\Delta\theta_0^2}{4} & -\frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & \frac{\Delta\theta_0^2}{4} & \frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} \\ -\frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & -\frac{\Delta\varphi^2}{4} & \frac{\Delta\theta_0\Delta\varphi}{4} & \frac{\Delta\varphi^2}{4} \end{bmatrix}; \\ ^n k_G &= \frac{m_N}{m_L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (67)$$

Note que $^n k_0$ é a conhecida matriz de rigidez elástica utilizada em análise linear. As matrizes $^n k_1$ e $^n k_2$ são obtidas através da soma das matrizes que são multiplicadas em (65) por $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, respectivamente. Já a matriz $^n k_G$ é a também conhecida matriz de rigidez geométrica, obtida da soma das duas últimas matrizes de (65).

3.4.2 Matriz de Rigidez Tangente Incremental

Conforme já exposto, deriva-se duas vezes a energia de deformação do elemento de treliça para a obtenção da matriz de rigidez tangente. De forma análoga à matriz secante, aqui desenvolver-se-á apenas as parcelas de energia de deformação que ainda não foram tratadas anteriormente. Portanto, derivando-se duas vezes nU_6 obtém-se:

$$\frac{\partial^2 U_6}{\partial \Delta^n u_i \partial \Delta^n u_j} = \frac{\partial^2 U_6}{\partial \Delta^n u_i \partial \Delta^n v_j} = \frac{\partial^2 U_6}{\partial \Delta^n v_i \partial \Delta^n v_j} = 0. \quad (68)$$

Para nU_7 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_7}{\partial \Delta^n u_1^2} &= \frac{\partial^2 U_7}{\partial \Delta^n u_2^2} = -\frac{\partial^2 U_7}{\partial \Delta^n u_1 \partial \Delta^n u_2} = \frac{{}^mN}{{}^mL}; \\ \frac{\partial^2 U_7}{\partial \Delta^n u_i \partial \Delta^n v_j} &= \frac{\partial^2 U_7}{\partial \Delta^n v_i \partial \Delta^n v_j} = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Para nU_8 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_8}{\partial \Delta^n u_i \partial \Delta^n u_j} &= \frac{\partial^2 U_8}{\partial \Delta^n u_i \partial \Delta^n v_j} = 0; \\ \frac{\partial^2 U_8}{\partial \Delta^n v_1^2} &= \frac{\partial^2 U_8}{\partial \Delta^n v_2^2} = -\frac{\partial^2 U_8}{\partial \Delta^n v_1 \partial \Delta^n v_2} = \frac{{}^mN}{{}^mL}. \end{aligned} \quad (70)$$

Realizando a organização das equações de forma matricial, e adotando o mesmo simbolismo apresentado para a matriz secante incremental, obtém-se que

$${}^n k_t = {}^n k_0 + {}^n k_1 + {}^n k_2 + {}^n k_{TAN} + {}^n k_G, \quad (71)$$

onde todas as matrizes do lado esquerdo da igualdade são as mesmas matrizes de (67), com exceção de ${}^n k_{TAN}$, que é dada por

$${}^n\mathbf{k}_{\text{TAN}} = \frac{EA}{mL} \begin{bmatrix} \frac{\Delta\theta_0^2}{2} & \Delta\theta_0\Delta\varphi & -\frac{\Delta\theta_0^2}{2} & -\Delta\theta_0\Delta\varphi \\ \Delta\theta_0\Delta\varphi & \frac{\Delta\varphi^2}{2} & -\Delta\theta_0\Delta\varphi & -\frac{\Delta\varphi^2}{2} \\ -\frac{\Delta\theta_0^2}{2} & -\Delta\theta_0\Delta\varphi & \frac{\Delta\theta_0^2}{2} & \Delta\theta_0\Delta\varphi \\ -\Delta\theta_0\Delta\varphi & -\frac{\Delta\varphi^2}{2} & \Delta\theta_0\Delta\varphi & \frac{\Delta\varphi^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Note que as matrizes de rigidez secante e tangente se relacionam de forma que a rigidez secante é obtida da integração da rigidez tangente, sendo isto evidenciado pelos coeficientes que multiplicam as matrizes ${}^n\mathbf{k}_1$ e ${}^n\mathbf{k}_2$ para a rigidez secante.

A matriz de rigidez tangente também pode ser escrita como simplesmente a soma da matriz elástica e da matriz geométrica apresentada em (71), sendo encontrada desta forma em McGuire, Gallagher e Ziemian (2014). No presente trabalho, esta forma mais conhecida da matriz de rigidez tangente é chama de matriz tangente convencional.

3.5 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Conforme apresentado nos capítulos anteriores, e como o próprio nome já sugere, a análise não linear de estruturas gera um sistema de equações não lineares. Quanto maior a quantidade de elementos constituintes da estrutura, proporcionalmente maior se torna o sistema de equações. Para a solução do sistema de equações não lineares, utiliza-se de métodos e técnicas numéricas.

Existem diversos métodos para se solucionar as equações de equilíbrio geradas pela análise. Valentim (2019) mostra uma interessante revisão e detalha os métodos e estratégias para solução das equações não lineares oriundas da análise estrutural. McGuire, Gallagher e Ziemian (2014) também expõem alguns dos métodos de solução mais conhecidos, em especial o método de Euler, ou *single-step method*, que é um dos métodos mais simples existentes, puramente incremental.

O método de Euler é o escolhido para o presente trabalho, pois o intuito é investigar a influência do uso das matrizes de rigidez secante e tangente, portanto, tomou-se o método mais simplista possível, de forma que o método escolhido não possua influência significativa sobre o resultado obtido.

McGuire, Gallagher e Ziemian (2014) expõe em detalhes o método de

Euler. Ciloni (1993) também mostra uma boa explicação do método que é intitulado como incremental puro. Recomenda-se a leitura dos trabalhos já citados para melhor entendimento do método de solução adotado.

3.6 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Para o presente trabalho, foram desenvolvidas rotinas computacionais via *software* MATLAB. As rotinas e sub-rotinas desenvolvidas podem ser visualizadas no apêndice do presente trabalho. Além disso, utiliza-se também do *software* de análise estrutural MASTAN2 para obtenção dos resultados de referência.

Escolheu-se desenvolver as rotinas em MATLAB devido a maior facilidade de tratamento de matrizes, além de o programa já contar com diversas funções implementadas, como para a solvência de sistemas de equações lineares, etc. Já o MASTAN2 é muito utilizado no campo acadêmico, onde os conceitos e formulações utilizadas no *software* são desenvolvidas em McGuire, Gallagher e Ziemian (2014).

As rotinas computacionais são de simples utilização, bastando se escrever o arquivo de entrada, onde se descreve as características da estrutura a ser analisada, e selecionar na rotina principal qual tipo de matriz de rigidez se deseja para realizar a análise.

4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

A presente seção apresenta os exemplos desenvolvidos para validação das rotinas computacionais, sendo utilizado para isso as rigidezes secante e tangente. É realizado a comparação entre os resultados obtido via MASTAN2, tomado como referência, e o das rotinas computacionais desenvolvidas, utilizando as matrizes de rigidez apresentadas anteriormente.

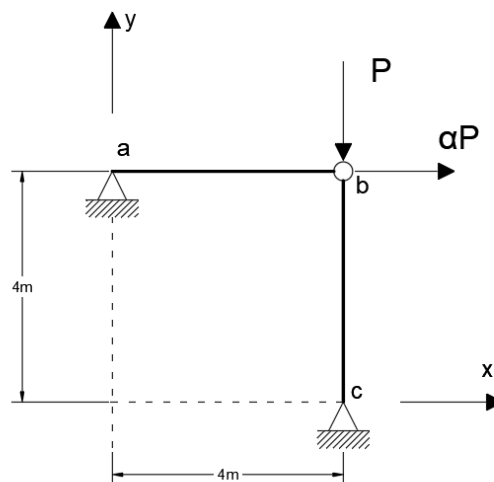
4.1 APLICAÇÃO 1: TRELIÇA DE DUAS BARRAS

A treliça apresentada neste exemplo foi retirada de (MCGUIRE; GALLAGHER; ZIEMIAN, 2014) e pode ser observada na Figura 6. As propriedades e características da estrutura são:

$$\begin{aligned} A_{ab} &= 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2, & E &= 2 \cdot 10^8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \\ A_{bc} &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2, & P &= 320 \text{ kN}, \\ \alpha &= 0,5, \end{aligned}$$

onde A_{ab} e A_{bc} são as áreas de seção transversal das barras, E é o módulo de elasticidade do material, e P é a força externa aplicada.

Figura 6 - Treliza de duas barras.



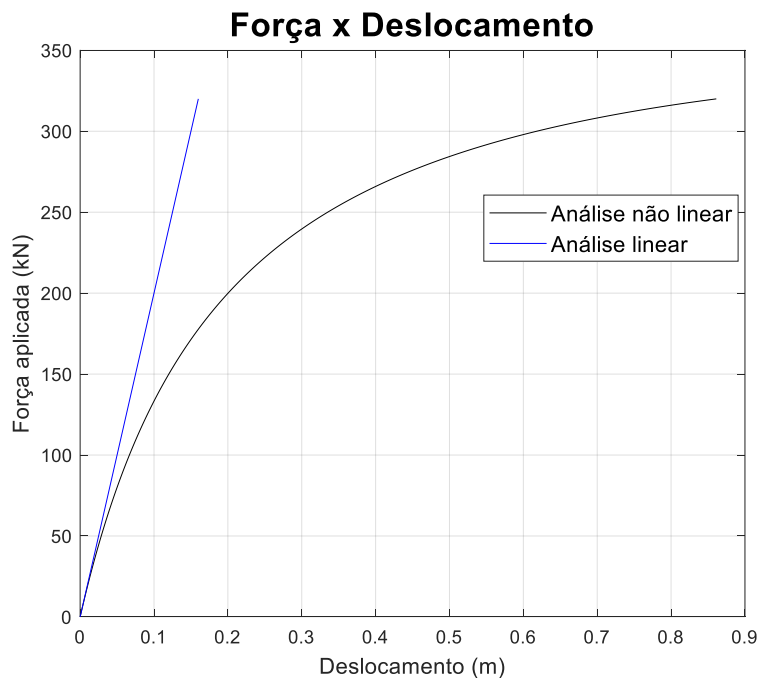
Fonte: adaptado de McGuire, Gallagher e Ziemian, 2014.

No presente exemplo, foi monitorado o deslocamento horizontal do nó “b”. As análises foram realizadas para uma quantidade de incrementos de carga partindo de 5 à 40960 incrementos. O valor de referência do deslocamento, utilizado para comparação, foi obtido via *software* MASTAN2, utilizando o método preditor-corretor para dez mil iterações.

É possível observar o comportamento não linear da estrutura na Figura 7, já na Figura 8 é apresentado o gráfico, em escala logarítmica, que relaciona a diferença percentual entre o resultado obtido pelas rotinas e o resultado obtido da referência. No eixo vertical é apresentada a diferença percentual e no eixo horizontal a quantidade de incrementos de carga.

Na Tabela 1 é mostrado alguns dos resultados de diferença percentual obtido. Já na Figura 9, é possível observar o gráfico, em escala semi-logarítmica, do deslocamento obtido para cada quantia de incrementos de carga. Por fim, a Figura 10 apresenta a configuração deformada da estrutura, com os deslocamentos obtidos via análise não linear.

Figura 7 - Gráfico de força x deslocamento, treliça de duas barras.

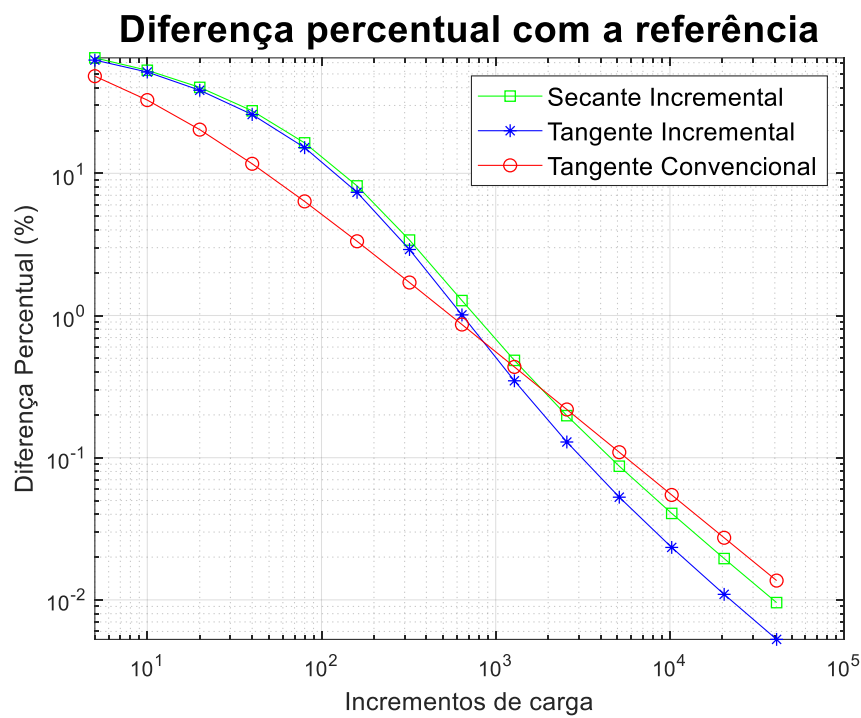


Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 1 - Diferença percentual com a referência, treliça de duas barras.

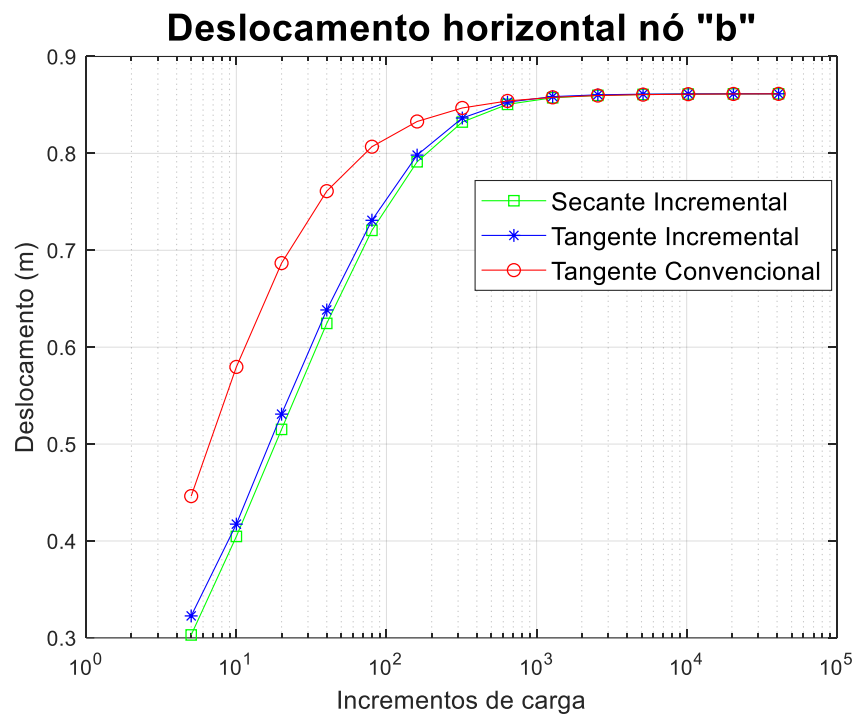
Diferença Percentual (%)				
Matriz de rigidez adotada	Incrementos de carga			
	10	100	1000	10000
Secante Incremental	53,03	13,35	0,68	0,04
Tangente Incremental	51,55	12,28	0,50	0,02
Tangente Convencional	32,72	5,17	0,55	0,06

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 8 - Gráfico diferença percentual x incrementos de carga, treliça de duas barras.

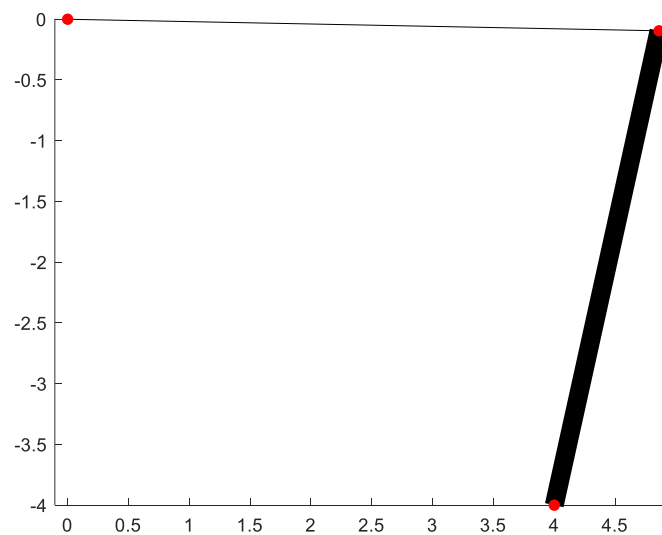
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 9 - Gráfico de deslocamento x incrementos de carga, treliça de duas barras.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 10 - Configuração deformada, treliça de duas barras.



Fonte: elaborado pelo autor.

4.2 APLICAÇÃO 2: TORRE TRELIÇADA

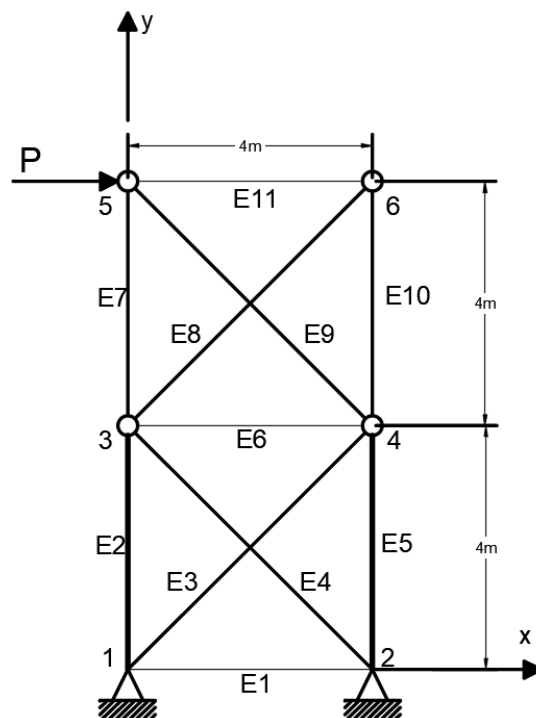
Este exemplo foi desenvolvido pelo autor, de forma a simular uma torre de transmissão de energia, possuindo 8 metros de altura por 4 metros de largura, a estrutura

é apresentada na Figura 11. As áreas de seção transversal das barras foram escolhidas de forma que o deslocamento horizontal no topo da estrutura seja igual a 10% de sua altura, i.e., 80cm. Para isso, utilizou-se de análises lineares e a majoração do carregamento aplicado por um fator igual a 1,4 para a determinação das áreas das barras. Os dados da presente aplicação são:

$$\begin{aligned} A_{v1} &= 5,27 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, & A_{d1} &= 2,79 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, \\ A_{v2} &= 2,17 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, & E &= 2 \cdot 10^8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \\ A_h &= 1,55 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, & P &= 200 \text{ kN}, \\ A_{d2} &= 2,48 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, \end{aligned}$$

onde A_{v1} é a área das barras verticais do primeiro nível (E2 e E5); A_{v2} é a área das barras verticais do segundo nível (E7 e E10); A_h é a área das barras horizontais; A_{d1} é a área das barras diagonais do primeiro nível (E3 e E4); A_{d2} é a área das barras diagonais do segundo nível (E8 e E9); E o módulo de elasticidade adotado e P é a força aplicada.

Figura 11 - Torre treliçada.



Fonte: elaborado pelo autor.

De forma análoga ao exemplo anterior, buscou-se monitorar o deslocamento característico da estrutura, sendo este o deslocamento horizontal do nó 6. O deslocamento de referência é obtido via MASTAN2 para 10 mil incrementos de carga, utilizando o método preditor-corretor. Na Tabela 2 é possível observar alguns resultados de diferença percentual com a referência e, logo abaixo, o gráfico log-log de diferença percentual em relação a quantidade de incrementos é apresentado na Figura 13.

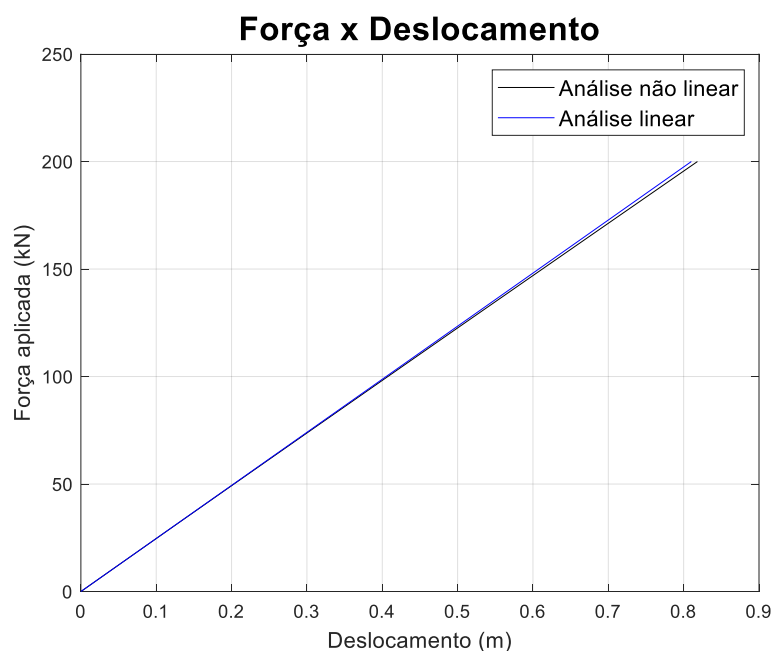
Já o gráfico semi-log que relaciona o deslocamento com a quantidade de incrementos de carga é apresentado na Figura 14 e, por fim, a configuração deformada é apresentada na Figura 15

Tabela 2 - Diferença percentual com a referência, torre treliçada.

Diferença Percentual (%)				
Matriz de rigidez adotada	Incrementos de carga			
	10	100	1000	10000
Secante Incremental	0,09	0,01	0,00	0,00
Tangente Incremental	0,14	0,01	0,00	0,00
Tangente Convencional	0,02	0,00	0,00	0,00

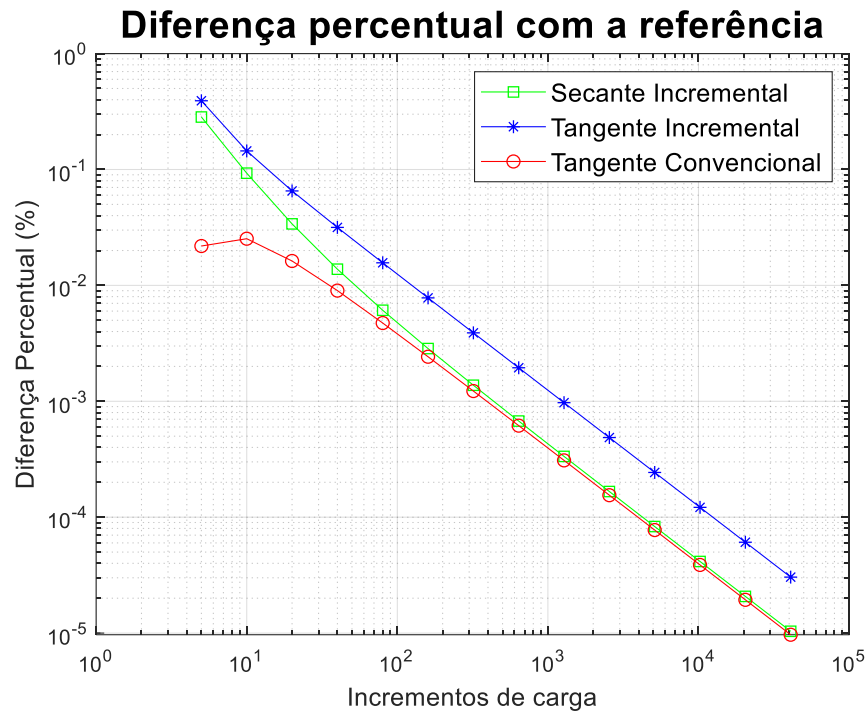
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 12 - Gráfico força x deslocamento, torre treliçada.



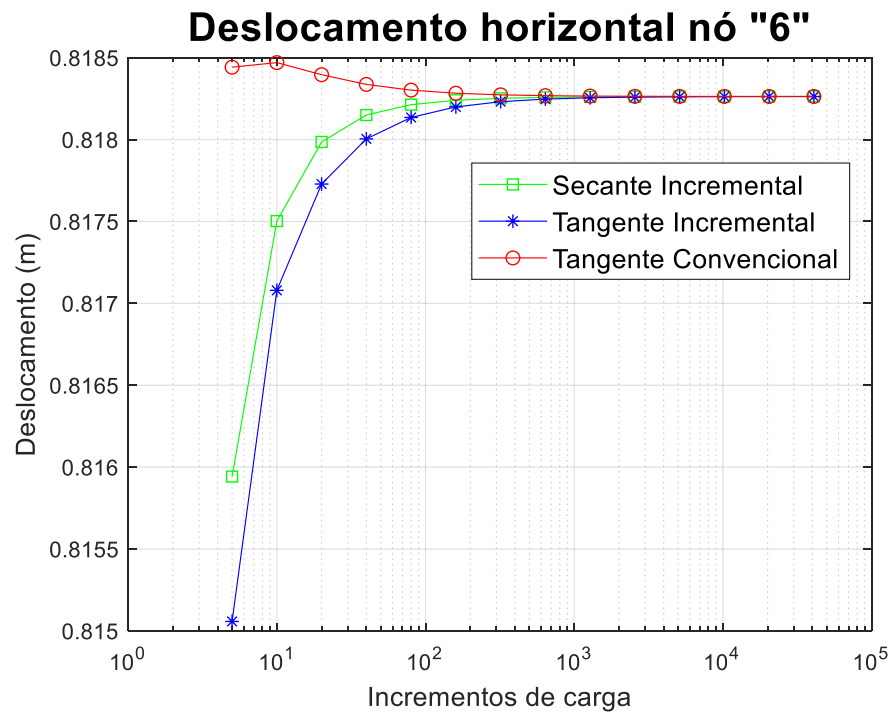
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 13 - Gráfico diferença percentual x incrementos de carga, torre treliçada.



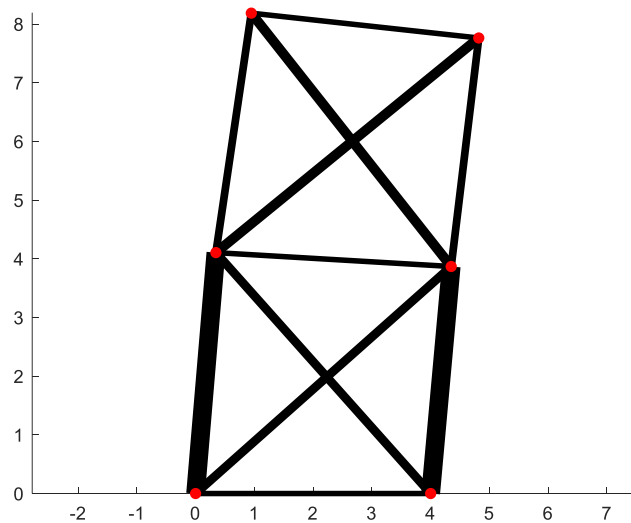
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 14 - Gráfico de deslocamento x incrementos de carga, torre treliçada.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 15 - Configuração deformada, torre treliçada.



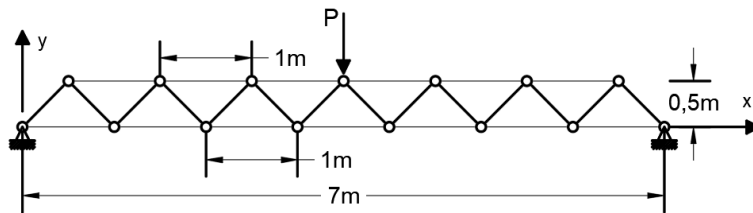
Fonte: elaborado pelo autor.

4.3 APLICAÇÃO 3: VIGA BIAPOIADA

Na terceira e última aplicação, tem-se uma viga treliçada biapoiada. Esta estrutura elaborada pelo autor possui 7 metros de vão e 0,5 metros de altura. O espaçamento entre nós na direção horizontal é de 1 metro. É possível observar a estrutura na Figura 16. Os dados da estrutura são

$$\begin{aligned} A_B &= 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2, & E &= 2 \cdot 10^8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \\ A_D &= 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, & P &= 5 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Onde A_B e A_D são as áreas de seção transversal dos banzos e diagonais, respectivamente, E é o módulo de elasticidade e P é a carga aplicada no meio do vão. Nesta aplicação, monitorou-se o deslocamento do nó que se encontra no meio do vão, onde se aplica a carga. Para obter o deslocamento de referência, novamente utiliza-se do *software* MASTAN2, com o método preditor corretor para 10000 incrementos de carga.

Figura 16 - Viga biapoada.

Fonte: elaborado pelo autor.

Na Tabela 3 está exposta as diferenças percentuais das rotinas em relação a referência, para as quantidades de incrementos de carga indicadas. Na Figura 17 apresenta-se a curva que relaciona a carga aplicada e o deslocamento obtido, tanto para a análise linear como para a não linear.

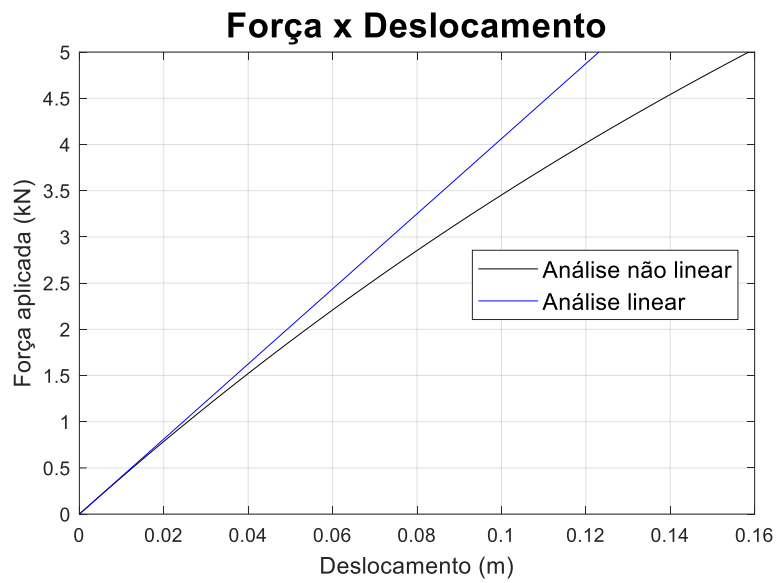
Na Figura 18 é apresentado o gráfico log-log da diferença percentual com a referência em relação a quantidade de incrementos. Na sequência, a Figura 19 apresenta o gráfico que relaciona o deslocamento obtido em relação a quantidade de incrementos de carga e, por fim, a Figura 20 apresenta a configuração deformada da estrutura.

Tabela 3 - Diferença percentual com a referência, viga biapoada.

Diferença Percentual (%)				
Matriz de rigidez adotada	Incrementos de carga			
	10	100	1000	10000
Secante Incremental	0,43	0,01	0,00	0,00
Tangente Incremental	2,50	0,33	0,03	0,00
Tangente Convencional	3,03	0,31	0,03	0,00

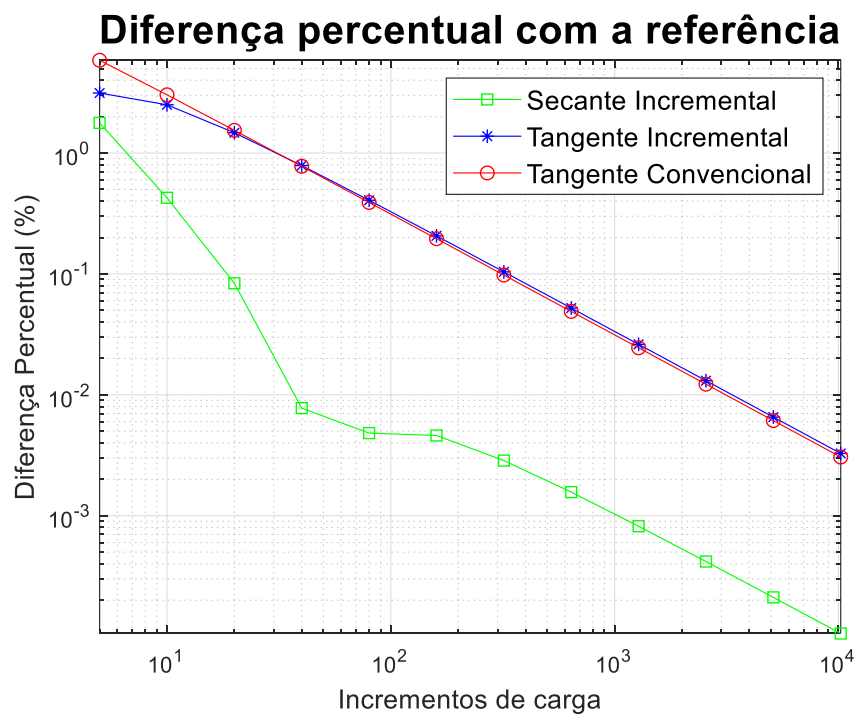
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 17 - Gráfico força x deslocamento, viga biapoiada.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 18 - Gráfico diferença percentual x incrementos de carga, viga biapoiada.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 19 - Gráfico de deslocamento x incrementos de carga, viga biapoiada.

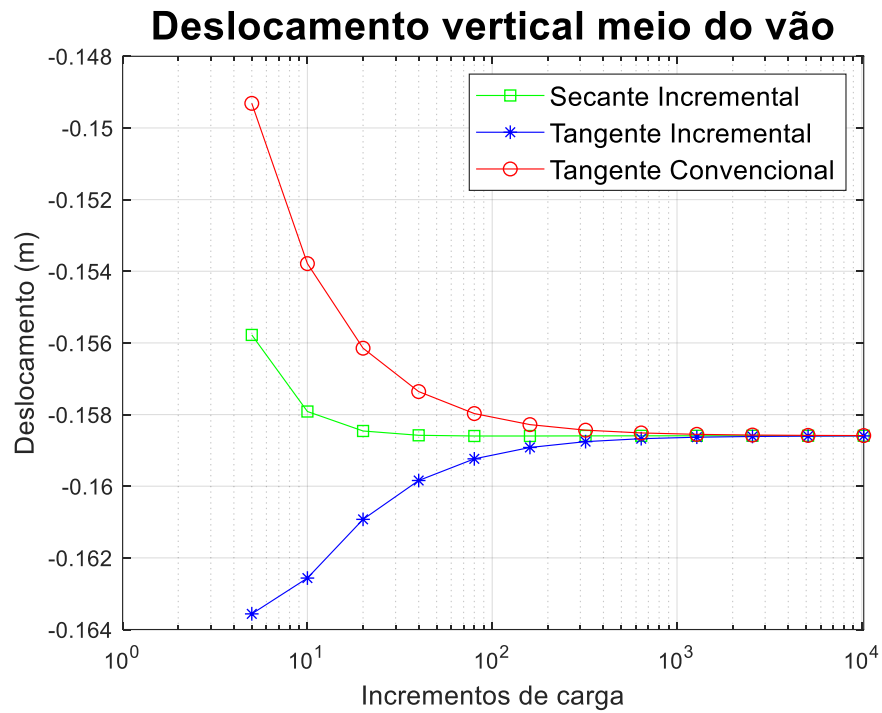
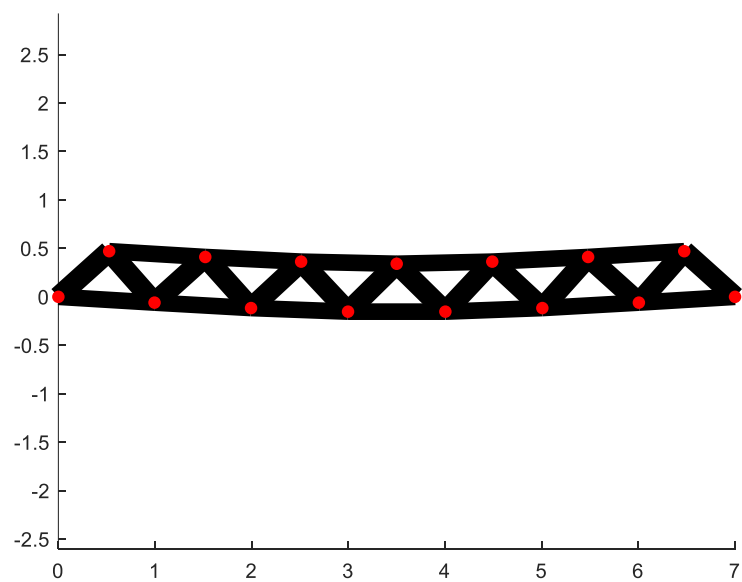


Figura 20 - Configuração deformada, viga biapoiada.



5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, procurou-se desenvolver rotinas computacionais para a análise não linear de estruturas treliçadas planas. As rotinas contemplam a análise linear e não linear, além de também ser possível obter a carga crítica para instabilidade global da estrutura.

Além do desenvolvimento das rotinas, foram apresentadas diferentes formulações para as matrizes de rigidez da estrutura, realizando um comparativo entre os resultados obtidos para cada formulação. Inicialmente, o presente trabalho faz uma breve explicação sobre a análise não linear de estruturas, elencando as fontes de não linearidade que são amplamente conhecidas. Na sequência, mostra-se a possibilidades da consideração da rigidez tangente e secante.

São apresentados conceitos chave para a obtenção das matrizes de rigidez, como o da energia potencial total da estrutura, da qual deriva-se as rigidezes secante e tangente da estrutura. Além disso, a conceituação é estendida para o caso incremental, usando a formulação lagrangeana atualizada. Por fim, particularizou-se os conceitos para o elemento de treliça plana.

Os exemplos apresentados mostram a influência da não linearidade no comportamento das estruturas, alterando os deslocamentos nodais e os esforços nos elementos. Portanto, caso uma estrutura que tenha um comportamento não linear for, erroneamente, analisada linearmente, fará com que o calculista esteja projetando uma estrutura para esforços e condições diferentes das que realmente a estrutura esteja submetida.

Nas aplicações numéricas, foi possível notar que as rotinas funcionam de forma correta, obtendo resultados com devida proximidade aos resultados de referência. O primeiro exemplo apresentado mostra um comportamento altamente não linear, já o segundo e terceiro apresentam comportamento fracamente não linear. Nota-se que, para o mesmo número de incrementos de carga da referência, obteve-se diferenças percentuais menores que 1% para todos os casos.

Não é possível afirmar qual das matrizes apresentadas possui melhor desempenho. Todavia, as matrizes incrementais apresentadas no presente trabalho possuem a devida precisão, tal qual a matriz convencional, apresentada em outros trabalhos. As rotinas mostraram a devida funcionalidade, obtendo-se resultados satisfatórios e esperados das mesmas.

Para trabalhos futuros, recomenda-se implementação para outros elementos, como os de treliças espaciais e elementos de pórtico. Além disso, é possível explorar outros métodos para a solução das equações não lineares, oriundas do problema, de forma que se possa obter alguma vantagem mais aparente no uso da rigidez secante ou tangente. Silva e Oñate (1997) salienta que as matrizes secantes podem ter comportamento melhor próximo à carga de colapso quando se usa procedimentos iterativos, visto que a matriz de rigidez secante tende a ser não singular próximo colapso, diferentemente da matriz de rigidez tangente.

REFERÊNCIAS

- AN, L.; WU, J.; JIANG, W. Experimental and numerical study of the axial stiffness of bolted joints in steel lattice transmission tower legs. **Engineering Structures**, v. 187, p. 490–503, 2019.
- BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. 2. ed. Watertown, Massachusetts, EUA: K.J. Bathe, 2014.
- CILONI, A. D. **SOBRE O COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DE ESTRUTURAS PLANAS DE CONCRETO ARMADO**. Universidade de São Paulo, 1993.
- CORRÊA, M. R. S. **Aperfeiçoamento dos modelos usualmente empregados em projeto de sistemas estruturais de edifícios**. Universidade de São Paulo, 1991.
- CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 1: Essentials**. 1. ed. Chichester, Reino Unido: John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **Um Primeiro Curso em Elementos Finitos**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- GAN, Y.; DENG, H.; LI, C. Simplified joint-slippage model of bolted joint in lattice transmission tower. **Structures**, v. 32, n. Março, p. 1192–1206, 2021.
- GRACITE, P. M. A. **REFINAMENTO ADAPTATIVO NA ANÁLISE NÃO LINEAR VIA MÉTODO SECANTE PARA VIGAS DE CONCRETO ARMADO**. Universidade Federal da Integração Latino-Americana, 2021.
- KASSIMALI, A. **MATRIX ANALYSIS of STRUCTURES**. 2. ed. Cenage Learning, 2011.
- LACERDA, E. G. M. DE. **ANÁLISE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL**. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014.
- MARTINELLI, L. B.; ALVES, E. C. Programa computacional para análise não-linear de treliças espaciais. **Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2017.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **MATRIX STRUCTURAL ANALYSIS**. 2° ed. 2014.
- MELO, G. F. DE. Análise não linear de vigas de concreto armado com método secante. p. 81, 2019.
- MELO, G. F. DE; GRACITE, P. M. A.; TORII, A. J. **Nonlinear analysis of reinforced concrete beams with secant method**. CILAMCE XLI. **Anais**. 2020.
- RODRIGUES, R. DE O. **Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado**. Universidade de São Paulo, 1997.

SILVA, W. T. M.; OÑATE, E. **El Método de Desplazamiento Crítico para la Predicción de Puntos Límite y de Bifurcación en Estructuras**. 1. ed. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1997.

SOUZA, R. R. DE et al. Optimization of transmission towers considering the bolt slippage effect. **Engineering Structures**, v. 211, 2020.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica Dos Sólidos**. 1° ed. Rio de Janeiro: LTC, 1984.

VALENTIM, V. T. **Estratégias Numéricas para Solução de Equações Não lineares na Análise Estrutural**. Universidade Federal de Ouro Preto, 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CÓDIGO FONTE

Este apêndice apresenta as rotinas computacionais desenvolvidas. É apresentado o arquivo de entrada de dados utilizado na primeira aplicação apresentada. Salienta-se que, a entrada de dados deve ser feita de modo que as unidades correspondam entre si. Por exemplo, caso se use metros para definir as coordenadas dos nós, e kN para descrever a carga aplicada, o módulo de elasticidade deverá ser em kN/m² e a área de seção transversal das barras deverá ser em m².

No vetor de carregamentos nodais, deve-se informar primeiramente o nó ao qual está se aplicando a carga, e em seguida o carregamento horizontal e vertical. Já no vetor de restrições, indica-se o grau de liberdade que está restrito. Por exemplo, caso se restrinja o movimento vertical do nó 7, o grau de liberdade responsável por isso é $(2*N)=(2*7)=14$. De maneira análoga, caso se deseje restringir o grau de liberdade horizontal deste mesmo nó, o grau de liberdade seria $(2*N-1)=(2*7-1)=17$.

```

1 %% Início - ENTRADA DE DADOS
2 % // Arquivo: exemplo_9_1.m
3 % // Exemplo de entrada de dados
4
5 function dados=exemplo_9_1
6
7 % Cada linha representa um nó, com coordenadas x e y respectivamente.
8 nodes = [0 0;      %Nó 1
9           4 0;      %Nó 2
10          4 -4]; %Nó 3
11
12 % Número de nós
13 NN = size(nodes,1);
14
15 % Cada linha é um elemento, indicando nó inicial e final nas colunas.
16 conec = [1 2;      %Barra 1
17           2 3]; %Barra 2
18
19 % Número de elementos.
20 NE = size(conec,1);
21
22 % Força externa aplicada
23 loads = [2 16 -320]; % Nó 2 aplicado 16 kN em X e -320 kN em Y
24
25 % Módulo de elasticidade (aço = 200 GPa).
26 E = 2e8;
27
28 % Área de seção transversal cada barra.
29 Area = [2e-6;      %Área barra 1

```

```

30         0.005]; %Área barra 2
31
32 % Condições de contorno
33 rests = [1 2 5 6]; %Graus de liberdade restritos
34
35 n = 10000; %Quantidade de incrementos de carga
36
37 dados.nodes = nodes;
38 dados.NN     = NN;
39 dados.conec  = conec;
40 dados.NE     = NE;
41 dados.loads  = loads;
42 dados.E      = E;
43 dados.Area   = Area;
44 dados.rests  = rests;
45 dados.n      = n;
46 end
47 %% Fim - ENTRADA DE DADOS

1  %% Início - ROTINA ANÁLISE ESTRUTURAL
2  % // Arquivo: rotina_analise_V5.m
3  clear all;
4  close all;
5  clc
6
7  % ENTRADA DE DADOS
8  dados = exemplo_9_1; %Escreva o nome do arquivo de entrada de dados
9
10 nodes = dados.nodes;
11 NN     = dados.NN;
12 conec  = dados.conec;
13 NE     = dados.NE;
14 loads  = dados.loads;
15 E      = dados.E;
16 Area   = dados.Area;
17 rests  = dados.rests;
18 n      = dados.n;
19
20 figure(1)
21 draw(conec,nodes,Area)
22
23 %% Análise Linear
24
25 % Parâmetros de geometria
26 [L,R,dof] = geometria(conec,nodes,NN,NE);
27
28 % Matriz de rigidez local e global
29 [kloc,K]  = matriz_global(conec,nodes,L,R,dof,E,Area,NN,NE,rests);
30
31 % Vetor de forças aplicadas
32 F          = zeros(2*NN,1);
33 F(loads(:,1)*2-1) = loads(:,2);
34 F(loads(:,1)*2)   = loads(:,3);
35 F(rests)          = 0;

```

```

36
37 % Vetor de deslocamentos nodais
38 U = K \ F;
39
40 % Deslocamentos e forças em coord. locais
41 [ug,u,f,Fx] = forca_desloc(NE,U,dof,kloc,R);
42
43 %% Carga crítica de flambagem
44
45 % Matriz de rigidez geométrica
46 [klocg,Kg] = matriz_geo(NN,NE,Fx,L,dof,R,rests);
47
48 % Load Scale Factor
49 lambda=eig(K,-Kg);
50
51 %% Análise não linear incremental pelo método de Euler
52
53 %NOTA: São criados novos vetores e matrizes para
54 %não se confundirem com os da análise linear.
55
56 dP      = F/n;           %Incremento de carga
57 P       = zeros(2*NN,n+1); %Vetor de forças globais iniciais
58 A       = zeros(2*NN,n+1); %Vetor de deslocamentos globais iniciais
59 K       = 0;             %Matriz geométrica global
60 kloc    = 0;             %Matriz geométrica local
61 dA(4,NE) = 0;           %Incremento de deslocamento
62 Px      = zeros(1,NE);   %Matriz de forças nos elementos
63 dPx     = zeros(1,NE);   %Incremento de força nos elementos
64
65 for i=1:n
66
67     %Selecione a matriz desejada
68
69     %Matriz secante incremental
70     [kloc,K] = matriz_sec_inc(conec,nodes,L,R,dof,E,Area,NN,NE,rests,Px,dA);
71     %Matriz tangente incremental
72     %[kloc,K] = matriz_tan_inc(conec,nodes,L,R,dof,E,Area,NN,NE,rests,Px,dA);
73     %Matriz tangente convencional
74     %[kloc,K] = matriz_tan_conv(L,R,dof,E,Area,NN,NE,rests,Px);
75
76     Kglob(:, :, i) = K;
77
78     dA = Kglob(:, :, i) \ dP;
79
80     [ug,u,f,dPx] = forca_desloc(NE,dA,dof,kloc,R);
81
82     Px = Px + dPx;
83
84     A(:,i+1) = A(:,i) + dA;
85     P(:,i+1) = P(:,i) + dP;
86
87     %Atualização das coordenadas
88     [nodes] = att_dados(conec,nodes,NN,NE,ug,dA,n);
89
90     %Atualização dos parâmetros de geometria
91     [L,R,dof] = geometria(conec,nodes,NN,NE);
92

```

```

93 end
94 figure(2)
95 draw(conec,nodes,Area)
96 %% Fim - ROTINA ANÁLISE ESTRUTURAL

1 %% Início - Função para cálculo da matriz tangente incremental
2 % // Arquivo: matriz_tan_inc.m
3 function [kloc,K] =
4 matriz_tan_inc(conec,nodes,L,R,dof,E,Area,NN,NE,rests,Fx,dA)
5
6 K = zeros(2*NN,2*NN);
7
8 for i=1:1:NE
9
10     ug(:,i) = dA(dof(i,:));      % Deslocamentos do elemento em coord. global
11     u  = R(:, :, i)'*ug(:,i);    % Deslocamentos do elemento em coord. local
12
13     N1 = conec(i,1);
14     N2 = conec(i,2);
15
16     deltau1 = u(1);
17     deltau2 = u(3);
18     deltav1 = u(2);
19     deltav2 = u(4);
20
21     dp = (deltau2 - deltau1)/L(i);
22     dt = (deltav2 - deltav1)/L(i);
23
24     % Matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais.
25     kloc0(:, :, i) = E*Area(i)/L(i) * [1 0 -1 0;
26                                         0 0 0 0;
27                                         -1 0 1 0;
28                                         0 0 0 0];
29
30     kloc1(:, :, i) = E*Area(i)/(L(i)) * [3*dp dt -3*dp -dt;
31                                           dt dp -dt -dp;
32                                           -3*dp -dt 3*dp dt;
33                                           -dt -dp dt dp];
34
35     kloc2(:, :, i) = E*Area(i)/L(i) * [3*dp^2/2 0 -3*dp^2/2 0;
36                                         0 3*dt^2/2 0 -3*dt^2/2;
37                                         -3*dp^2/2 0 3*dp^2/2 0;
38                                         0 -3*dt^2/2 0 3*dt^2/2];
39
40     kloctn(:, :, i) = E*Area(i)/L(i) * [dt^2/2 dp*dt -dt^2/2 -dp*dt;
41                                           dp*dt dp^2/2 -dp*dt -dp^2/2;
42                                           -dt^2/2 -dp*dt dt^2/2 dp*dt;
43                                           -dp*dt -dp^2/2 dp*dt dp^2/2];
44
45     klocg(:, :, i) = Fx(i)/L(i) * [ 1 0 -1 0;
46                                     0 1 0 -1;
47                                     -1 0 1 0;
48                                     0 -1 0 1];
49

```

```

50     kloc(:, :, i) =
51 kloc0(:, :, i) + kloc1(:, :, i) + kloc2(:, :, i) + kloctn(:, :, i) + klocg(:, :, i);
52
53     % Matriz de rigidez global
54     K(dof(i, :), dof(i, :)) = K(dof(i, :), dof(i, :)) +
55 R(:, :, i) * kloc(:, :, i) * R(:, :, i)';
56
57 end
58 % Condições de contorno
59 K(rests, :) = 0;
60 K(:, rests) = 0;
61 K(rests, rests) = diag(ones(size(rests)));
62 %% Fim - Função para cálculo da matriz tangente incremental

```



```

1  %% Início - Função para cálculo da matriz tangente convencional
2  % // Arquivo: matriz_tan_conv.m
3  function [kloc, K] = matriz_tan_conv(L, R, dof, E, Area, NN, NE, rests, Fx)
4
5  K = zeros(2*NN, 2*NN);
6
7  for i=1:1:NE
8
9      % Matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais.
10     kloce(:, :, i) = E*Area(i)/L(i) * [1 0 -1 0;
11                                         0 0 0 0;
12                                         -1 0 1 0;
13                                         0 0 0 0];
14
15     % Matriz de rigidez geométrica do elemento em coordenadas locais.
16     klocg(:, :, i) = Fx(i)/L(i) * [1 0 -1 0; 0 1 0 -1; -1 0 1 0; 0 -1 0 1];
17
18     kloc(:, :, i) = klocg(:, :, i) + kloce(:, :, i);
19
20     % Matriz de rigidez global
21     K(dof(i, :), dof(i, :)) = K(dof(i, :), dof(i, :)) +
22 R(:, :, i) * kloc(:, :, i) * R(:, :, i)';
23
24 end
25 % Condições de contorno
26 K(rests, :) = 0;
27 K(:, rests) = 0;
28 K(rests, rests) = diag(ones(size(rests)));
29 %% Fim - Função para cálculo da matriz tangente convencional

```



```

%% Início - Função para cálculo da matriz secante incremental
% // Arquivo: matriz_sec_inc.m
function [klocsec, Ksec] =
matriz_sec_inc(conec, nodes, L, R, dof, E, Area, NN, NE, rests, Fx, dA)

Ksec = zeros(2*NN, 2*NN);

```

```

for i=1:1:NE

    ug(:,i) = dA(dof(i,:));           % Deslocamentos do elemento em coord. global
    u  = R(:, :, i)'*ug(:,i);         % Deslocamentos do elemento em coord. local

    N1 = conec(i,1);
    N2 = conec(i,2);

    deltau1 = u(1);
    deltau2 = u(3);
    deltav1 = u(2);
    deltav2 = u(4);

    dp = (deltau2 - deltau1)/L(i);
    dt = (deltav2 - deltav1)/L(i);

    % Matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais.
    kloc0(:, :, i) = E*Area(i)/L(i) * [1 0 -1 0;
                                         0 0 0 0;
                                         -1 0 1 0;
                                         0 0 0 0];

    kloc1(:, :, i) = E*Area(i)/(L(i)) * [3*dp dt -3*dp -dt;
                                         dt dp -dt -dp;
                                         -3*dp -dt 3*dp dt;
                                         -dt -dp dt dp];

    kloc2(:, :, i) = E*Area(i)/L(i) * [3*dp^2/2 0 -3*dp^2/2 0;
                                         0 3*dt^2/2 0 -3*dt^2/2;
                                         -3*dp^2/2 0 3*dp^2/2 0;
                                         0 -3*dt^2/2 0 3*dt^2/2];

    klocsn(:, :, i) = E*Area(i)/L(i) * [dt^2/4 dp*dt/4 -dt^2/4 -dp*dt/4;
                                         dp*dt/4 dp^2/4 -dp*dt/4 -dp^2/4;
                                         -dt^2/4 -dp*dt/4 dt^2/4 dp*dt/4;
                                         -dp*dt/4 -dp^2/4 dp*dt/4 dp^2/4];

    klocg(:, :, i) = Fx(i)/L(i) * [ 1  0 -1  0;
                                    0  1  0 -1;
                                    -1 0  1  0;
                                    0 -1  0  1];

    klocsec(:, :, i) =
kloc0(:, :, i)+(1/2)*kloc1(:, :, i)+(1/3)*kloc2(:, :, i)+klocsn(:, :, i)+klocg(:, :, i);

    % Matriz de rigidez global
    Ksec(dof(i,:),dof(i,:)) = Ksec(dof(i,:),dof(i,:)) +
R(:, :, i)*klocsec(:, :, i)*R(:, :, i)';

end

% Condições de contorno
Ksec(rests,:) = 0;
Ksec(:,rests) = 0;
Ksec(rests,rests) = diag(ones(size(rests)));
%% Fim - Função para cálculo da matriz secante incremental

```

```

1  %% Início - Função para cálculo da matriz elástica
2  % // Arquivo: matriz_global.m
3  function [kloc,K] = matriz_global(conec,nodes,L,R,dof,E,Area,NN,NE,rests)
4
5  K = zeros(2*NN,2*NN);
6
7  for i=1:1:NE
8
9      % Matriz de rigidez do elemento em coordenadas locais.
10     kloc(:, :, i) = E*Area(i)/L(i) * [1 0 -1 0;
11                                         0 0 0 0;
12                                         -1 0 1 0;
13                                         0 0 0 0];
14
15     % Matriz de rigidez global
16     K(dof(i,:),dof(i,:)) = K(dof(i,:),dof(i,:)) +
17     R(:, :, i)*kloc(:, :, i)*R(:, :, i)';
18
19 end
20 % Condições de contorno
21 K(rests,:) = 0;
22 K(:,rests) = 0;
23 K(rests,rests) = diag(ones(size(rests)));
24 %% Fim - Função para cálculo da matriz elástica

```

```

1  %% Início - Função para cálculo da matriz geométrica
2  % // Arquivo: matriz_geo.m
3  function [klocg,Kg] = matriz_geo(NN,NE,Fx,L,dof,R,rests)
4
5  Kg = zeros(2*NN,2*NN);
6
7  for i=1:1:NE
8
9      % Matriz de rigidez geométrica do elemento em coordenadas locais.
10     klocg(:, :, i) = Fx(i)/L(i) * [1 0 -1 0; 0 1 0 -1; -1 0 1 0; 0 -1 0 1];
11
12     % Matriz de rigidez geométrica global.
13     Kg(dof(i,:),dof(i,:)) = Kg(dof(i,:),dof(i,:)) +
14     R(:, :, i)*klocg(:, :, i)*R(:, :, i)';
15
16 end
17 %Condições de contorno
18 Kg(rests,:) = 0;
19 Kg(:,rests) = 0;
20 Kg(rests,rests) = diag(ones(size(rests)));
21 %% Fim - Função para cálculo da matriz geométrica

```

```

1  %% Início - Função para cálculo de parâmetros geométricos
2  % // Arquivo: geometria.m
3  function [L,R,dof] = geometria(conec,nodes,NN,NE)

```

```

4
5 for i=1:1:NE
6
7     N1 = conec(i,1);
8     N2 = conec(i,2);
9
10    x1 = nodes(N1,1);
11    y1 = nodes(N1,2);
12    x2 = nodes(N2,1);
13    y2 = nodes(N2,2);
14
15    % Comprimento da barra
16    L(i) = sqrt ( (x2-x1)^2 + (y2-y1)^2 );
17
18    % Senos e cossenos da inclinação das barras.
19    cosseno(i) = (x2-x1)/L(i); % cosseno da barra "i"
20    seno(i)    = (y2-y1)/L(i); % seno da barra "i"
21
22 % Matriz de transformação de coordenadas.
23    R(:, :, i) = [cosseno(i) -seno(i) 0 0;
24                  seno(i) cosseno(i) 0 0;
25                  0 0 cosseno(i) -seno(i);
26                  0 0 seno(i) cosseno(i)];
27
28    % Graus de liberdade dos elementos
29    dof(i, :) = [N1*2-1 N1*2 N2*2-1 N2*2];
30 end
31 %% Fim - Função para cálculo de parâmetros geométricos

%% Início - Função para cálculo de forças nas barras e deslocamentos nodais
% // Arquivo: forca_desloc.m
function [ug,u,f,Fx] = forca_desloc (NE,U,dof,kloc,R)
for i=1:NE
    ug(:,i) = U(dof(i,:)); % Deslocamentos do elemento em coord. global
    u = R(:, :, i)'*ug(:,i); % Deslocamentos do elemento em coord. local
    f = kloc(:, :, i)*u; % Forças internas do elemento
    Fx(i) = f(3);
end
%% Fim - Função para cálculo de forças nas barras e deslocamentos nodais

```