



**INSTITUTO DE TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA
E TERRITÓRIO**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA CIVIL (PPGECI)**

**ESTIMATIVA DAS PERDAS DE PROTENSÃO EM VIGAS UTILIZANDO PARÂMETROS
DINÂMICOS: SIMULAÇÃO NUMÉRICA**

ANDRESSA BIANCO ESTRUZANI

Orientador: Prof. Dr. Ivan Dario Gomez Araujo

Coorientador: Prof. Dr. Aref Kalilo Lima Kzam

Foz do Iguaçu
2020

**INSTITUTO DE TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA
E TERRITÓRIO**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA CIVIL (PPGECI)**

**ESTIMATIVA DAS PERDAS DE PROTENSÃO EM VIGAS UTILIZANDO PARÂMETROS
DINÂMICOS: SIMULAÇÃO NUMÉRICA**

ANDRESSA BIANCO ESTRUZANI

Dissertação apresentada ao Instituto de Tecnologia, Infraestrutura e Território da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Ivan Dario Gomez Araujo

Coorientador: Prof. Dr. Aref Kalilo Lima Kzam

Foz do Iguaçu
2020

ANDRESSA BIANCO ESTRUZANI

**ESTIMATIVA DAS PERDAS DE PROTENSÃO EM VIGAS UTILIZANDO PARÂMETROS
DINÂMICOS: SIMULAÇÃO NUMÉRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Ivan Dario Gomez Araújo
UNILA

Coorientador: Prof. Dr. Aref Kalilo Lima Kzam
UNILA

Prof. Dr. Andre Jacomel Torii
(UNILA)

Prof. Dr(a). Orieta Soto Izquierdo
(UFT)

Foz do Iguaçu, 04 de setembro de 2020.

Catálogo elaborado pelo Setor de Tratamento da Informação
Catálogo de Publicação na Fonte. UNILA - BIBLIOTECA LATINO-AMERICANA - PTI

E82e

Estruzani, Andressa Bianco.

Estimativa das perdas de protensão em vigas utilizando parâmetros dinâmicos: simulação numérica / Andressa Bianco Estruzani. - Foz do Iguaçu, 2021.

112 f.: il.

Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Instituto de Tecnologia, Infraestrutura e Território, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Ivan Dario Gomez Araujo.

1. Concreto protendido - perda de protensão. 2. Frequência natural. 3. Método dos Elementos Finitos. 4. Construções - concreto protendido. I. Araujo, Ivan Dario Gomez Orient. II. Título.

CDU: 624.012.46

Dedico este trabalho aos meus pais, pela força, carinho e incentivo que me deram para que eu obtivesse êxito na realização desta etapa tão importante da minha vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por conduzir o meu caminho, dar sabedoria, força e coragem para concluir esta etapa e enfrentar todas as dificuldades.

Aos meus pais, Alfredo e Luciana, meus irmãos e meus avós que sempre acreditaram nos meus objetivos, me incentivaram em todos os momentos e que sempre foram a base de todas as minhas conquistas

Ao meu orientador Dr. Ivan Gomez, pelos valiosos ensinamentos, pela confiança depositada, pela constante, paciente e excelente orientação, além do apoio, aprendizado e compreensão durante todo o período do mestrado. Ao meu coorientador, Dr. Aref Kzam pela orientação e contribuições para a pesquisa.

Aos meus colegas de curso de mestrado, Marcio e Eduardo, pela convivência, cooperação e amizade, compartilhando conhecimentos e experiência.

À Fundação Araucária e à Edna Possan pela Bolsa Técnica concedida que me auxiliou financeiramente durante o período do mestrado.

A todos os familiares e amigos que, de alguma forma, foram importantes na minha trajetória profissional e pessoal.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer

RESUMO

Estruturas de concreto protendido são utilizadas com frequência nas obras de engenharia civil e um dos parâmetros que podem afetar o seu desempenho e colocar em risco sua segurança é a perda da força de protensão. Nesse contexto, a análise dinâmica poderia ajudar na estimação do estado da protensão e a integridade estrutural. O objetivo deste trabalho é avaliar a influência da força de protensão nas frequências naturais de vigas biapoiadas e de forma inversa estimar as perdas de protensão a partir dos parâmetros dinâmicos. No entanto, a literatura mostra que a influência da força de protensão no comportamento dinâmico das estruturas é um assunto que ainda não mostra um consenso entre os pesquisadores. Alguns estudos teóricos, mostraram que a frequência natural diminui ou não é influenciada pelo aumento da força de protensão. Por outro lado, experimentos realizados em laboratório indicam uma tendência crescente das frequências naturais com a força de protensão. Tomando em conta unicamente as conclusões de trabalhos experimentais da literatura, neste trabalho é proposto um modelo numérico, levando em consideração um efeito combinado da influência dos cabos protendidos na dinâmica do sistema, relacionada à força axial (produto da força de protensão) e à presença do cabo. Resultados de experimentos realizados em laboratório, encontrados na literatura, são utilizados para a validação do modelo numérico. As comparações realizadas mostram resultados próximos entre os resultados numéricos e os experimentais, principalmente para a primeira frequência natural. Após verificar o modelo numérico proposto, uma viga com a força inicial de protensão projetada foi utilizada para construir uma curva que poderia estimar as perdas de protensão a partir da relação entre a porcentagem de perdas de protensão com as frequências naturais. Nesse exemplo, mostra-se que a taxa de variação das frequências naturais depende no nível de força inicial aplicado na protensão.

Palavras-chave: Perda de protensão. Frequência natural. Método dos Elementos Finitos.

ESTRUZANI, Andressa Bianco. **Estimation of prestress loss on beams using dynamic parameters:** numerical simulation. 2020. 106f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2020.

ABSTRACT

Prestressed concrete structures are often used in civil engineering works and one of the parameters that can affect their performance and put their safety at risk is the loss of prestressing force. In this context, dynamic analysis could help in estimating prestressing status and structural integrity. The objective of this work is to evaluate the influence of prestressing force on the natural frequencies of simply supported beams and an inverse way to estimate prestressing losses from the dynamic parameters. However, the literature shows that the influence of the prestressing force on the dynamic behavior of structures is a subject that still does not show a consensus among researchers. Some theoretical studies have shown that the natural frequency decreases or is not influenced by the increase in prestressing force. On the other hand, laboratory experiments indicate an increasing trend in natural frequencies with prestressing force. Taking into account only the conclusions of experimental works from the literature, in this work a numerical model is proposed, taking into account a combined effect of the influence of prestressed cables on the dynamics of the system, related to the axial force (product of the prestressing force) and the presence of the cable. Results of experiments performed in the laboratory, found in the literature, are used to validate the numerical model. The comparisons made show close results between numerical and experimental results, mainly for the first natural frequency. After verifying the proposed numerical model, a beam with the projected initial prestressing force was used to build a curve that could estimate prestressing losses from the relation between the percentage of prestressing losses with the natural frequencies. In this example, it is shown that the rate of variation of natural frequencies depends on the initial force level applied in prestressing.

Keywords: Prestress Loss. Natural frequency. Vibration modes. Finite Element Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Diagrama de corpo livre.....	20
Figura 3 - Viga protendida e cabo de protensão separados	24
Figura 4 - Esquema de esforços aplicados em uma viga biapoiada através da protensão com fia	24
Figura 5 - Aplicação da protensão e injeção da calda de cimento na pós-tração com aderência posterior	26
Figura 6 - Diagrama de forças após perdas por atrito e acomodação da ancoragem	27
Figura 7 – Tipos de perdas de protensão.....	28
Figura 8 - Diagrama de forças de um cabo genérico com indicação das perdas de protensão (pós-tração).	29
Figura 9 - Modelo de Viga de Euler-Bernoulli	30
Figura 10 – Viga biapoiada com carregamento axial e transversal.....	40
Figura 11 – Elemento de viga	40
Figura 12 – Elemento finito de viga com seus graus de liberdade	45
Figura 13 - Força gerada pelo cabo de protensão	51
Figura 14 - Variação linear da força de protensão	52
Figura 15 - Efeito da protensão / obtenção da neutralização.....	55
Figura 16 - Viga biapoiada retangular utilizada na análise experimental	65
Figura 17 - Relação entre as frequências naturais e os seis níveis de força de protensão aplicados para o primeiro modo, obtidos experimentalmente e pelo modelo proposto	68
Figura 18 - Viga biapoiada retangular utilizada na análise experimental	73
Figura 19 - Viga biapoiada retangular com cabo excêntrico utilizada na análise experimental	75
Figura 20 - Relação entre as frequências naturais e força de protensão.....	79
Figura 21 - Viga biapoiada protendida, seções transversais e detalhe	80
Figura 22 - Diagrama do cabo Tipo 1	81
Figura 23 - Diagrama do cabo Tipo 2.....	82
Figura 24 - Gráfico da 1ª Frequência natural versus porcentagem de perda de protensão	83
Figura 25 - Gráfico 2ª Frequência Natural segundo a porcentagem de perdas	83
Figura 26 - Gráfico da 1ª Frequência natural versus porcentagem de perda para diferentes níveis de protensão inicial.....	84
Figura 27 - Gráfico da 2ª Frequência natural versus porcentagem de perda para diferentes	

níveis de protensão inicial.....	85
Figura 28 - Matriz de rigidez elástica no sistema local contida no método <i>matriz2</i>	97
Figura 29 - Matrizes que compõem a matriz de rigidez geométrica.....	97
Figura 30 - Matriz de transformação	98
Figura 31 - Vetor de forças totais	99
Figura 32 - Matriz de massa	99
Figura 33 - Solução de autovalores e autovetores.....	100
Figura 34 - Etapas do programa de elementos finitos	101
Figura 35 - Viga de exemplo para análise modal teórica	102
Figura 36 - Dados de entrada no modelo.....	103
Figura 37 - Dados de entrada para configuração do cabo de protensão	103
Figura 38 - Inserção das informações dos nós	104
Figura 39 - Mariz “Nodes”	104
Figura 40 - Inserção das matrizes de seções e materiais	105
Figura 41 - Resultados para as matrizes “Sections” e “Materials”	105
Figura 42 - Comandos para a construção da matriz “Elements”	106
Figura 43 - Matriz “Elements” para o exemplo em questão	106
Figura 44 - Método para inserir os cabos de protensão.....	107
Figura 45 - Matriz “Cables”	107
Figura 46 - Inserção da matriz de representação dos apoios	108
Figura 47 - Matriz “Fix”	108
Figura 48 - Matriz dos carregamentos aplicados	108
Figura 49 - Matriz para a força distribuída transversal	109
Figura 50 - Análise estática.....	109
Figura 51 - Gráfico resultante da análise estática.....	110
Figura 52 - Método para análise dinâmica	110
Figura 53 - Frequências naturais para o primeiro modo para cabo com perfil parabólico	111

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados de entrada do modelo	59
Tabela 2 - Comparação entre as frequências naturais obtidas experimentalmente por Saiidi et al. (1994) e pelo modelo proposto para os dois primeiros modos	60
Tabela 3 - Avaliação do efeito da excentricidade nas frequências naturais.....	61
Tabela 4 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica	62
Tabela 5 - Variáveis a serem inseridas no modelo	63
Tabela 6 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Zhang e Li (2007 apud BRECCOLOTTI, 2018), e numéricas para diferentes forças de protensão	63
Tabela 7 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica	64
Tabela 8 - Dimensões e características das vigas experimentais a serem inseridas no modelo.....	66
Tabela 9 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Zhang et al. (2011) e numéricas para diferentes forças de protensão para a viga YL1	66
Tabela 10 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Zhang et al. (2011) e as numéricas para diferentes forças de protensão para a viga YL2	67
Tabela 11 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica para as vigas YL1 e YL2 de Zhang et al. (2011) e suas respectivas variações percentuais	69
Tabela 12 - Valores de entrada do modelo.....	70
Tabela 13 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Jang et al. (2011) e as numéricas para diferentes forças de protensão	70
Tabela 14 - Comparação entre as frequências naturais obtidas no trabalho de Jang et al. (2011) e as numéricas para o terceiro e quarto modos de vibração	71
Tabela 15 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica.....	72
Tabela 16 - Parâmetros da viga experimental a serem inseridos no modelo de viga com cabo reto e concêntrico.....	73
Tabela 17 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Noh et al. (2015) e as numéricas para diferentes forças de protensão	74
Tabela 18 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica	74
Tabela 19 - Dados da segunda amostra para o modelo.....	75
Tabela 20 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Noh et al. (2015) e as numéricas para diferentes forças de protensão	76
Tabela 21 - Variáveis a serem inseridas no modelo de elementos finitos proposto considerando a curvatura do cabo de protensão.....	77

Tabela 22 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Noh et al. (2015) e as numéricas para diferentes forças de protensão considerando a curvatura do cabo de protensão.....	77
Tabela 23 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica para cabo curvo.....	78
Tabela 24 - Resumo da variação da frequência natural quando a força aplicada for igual à carga crítica	78

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVAS	15
1.1	OBJETIVO GERAL	17
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
1.3	ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
2.1	ANÁLISE DINÂMICA	19
2.2	PROTENSÃO	23
2.2.1	Sistema Construtivo	25
2.2.2	Perdas de Protensão	27
2.3	ESTADO DA ARTE	29
2.3.1	Investigações Teóricas	30
2.3.2	Testes Experimentais	33
3	MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA VIGAS COM PROTENSÃO	39
3.1	ANÁLISE INCLUINDO O EFEITO DA CARGA AXIAL	39
3.2	ANÁLISE INCLUINDO O EFEITO DA PRESENÇA DOS CABOS	51
3.3	ESTADO NEUTRALIZADO DE TENSÕES NOS CABOS	55
3.4	ANÁLISE MODAL DO MODELO NUMÉRICO COM CABO	56
4	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE MODELOS TESTADOS EM EXPERIMENTOS DA LITERATURA	58
4.1	COMPARAÇÃO COM TESTES DE SAIIDI ET AL (1994)	59
4.2	COMPARAÇÃO COM TESTES DE ZHANG E LI (2007 apud BRECCOLOTTI, 2018)	63
4.3	COMPARAÇÃO COM TESTES DE ZHANG ET AL. (2011)	65
4.4	COMPARAÇÃO COM TESTES DE JANG ET AL. (2011)	69
4.5	COMPARAÇÃO COM TESTES DE NOH ET AL. (2015)	72
4.6	PERDAS DE PROTENSÃO	80
5	CONCLUSÕES	86

ANEXO A - IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA.....	95
ANEXO B - EXEMPLO DE USO DE PROGRAMA PARA ANÁLISE MODAL.....	102

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVAS

Desde 1930 estruturas de concreto protendido têm sido amplamente utilizadas na engenharia civil (ZHAO; FANG, 2012). Segundo Breccolotti (2018), a protensão tem seu uso aumentado continuamente com aplicações em estruturas modernas que vão desde pequenos elementos até grandes construções como pontes de longo alcance.

A força de protensão é usada principalmente com o intuito de controlar a formação de fissuras no concreto, para reduzir as deformações e adicionar resistência aos elementos pré-tensionados (LUNING et al., 2014). Também confere maior durabilidade, deformabilidade, leveza e esbeltez à estrutura (CHOLFE; BONILHA, 2013). Além disso, a protensão induz uma tensão interna contrária ao carregamento externo aplicado, aumentando a rigidez do conjunto e permitindo a redução da seção transversal e do consumo de materiais. Essas vantagens, aliadas ao projeto arquitetônico e à evolução dos sistemas construtivos, resultam em construções modernas esteticamente, com alto desempenho, seções mais esbeltas e projetos de alta confiabilidade e eficiência (FERREIRA, 2007; COSTA, 2016).

Entretanto, como exposto em Luning et al. (2014), a força de protensão diminui ao longo do tempo devido a diversos fatores como: fluência do concreto, relaxamento ou corrosão do aço, temperatura ambiente e variação de carregamento. Uma perda substancial pode causar graves problemas para a manutenção e a segurança das estruturas e comprometer o desempenho dos seus elementos (BRECCOLOTTI, 2018).

Portanto, para garantir a eficácia do estado de funcionamento e da capacidade de suporte estrutural, é muito importante a estimativa dessas perdas que podem ocorrer de forma imediata ou de forma progressiva (LUNING et al., 2014).

A menos que o elemento estrutural tenha sido instrumentado no momento de sua construção, a força de protensão não pode ser obtida diretamente. Uma das possíveis opções para calcular as perdas de protensão de forma indireta e não destrutiva é pelo uso de propriedades dinâmicas, sendo a frequência natural, um parâmetro crucial na definição do comportamento dinâmico (BONOPERA et al., 2019).

Uma alternativa é a realização do monitoramento do sistema utilizando técnicas de identificação dinâmica, que podem identificar as frequências naturais e serem relacionadas com as perdas de protensão (SAIIDI et al., 1994). Um exemplo, é o trabalho de Kovalovs (2017), que propõe um método usando o monitoramento dinâmico da vibração cuja aplicação é realizada por análise de elementos finitos e com resultados que podem ser

comparados com dados experimentais.

Entretanto, é importante observar que o efeito da força de protensão no comportamento dinâmico e, portanto, nas frequências naturais de vigas protendidas é um tópico que apresenta discordância entre os diferentes autores encontrados na literatura (NOBLE et al., 2014).

Nos estudos teóricos, fundamentados pela mecânica clássica, o estudo de vibrações de vigas submetidas a cargas axiais é uma temática bastante difundida em publicações técnicas. Vários autores (SHAKER, 1975; BOKAIAN, 1988; MAMANDI et al. 2012), assumiram que a força de protensão no cabo equivale a um carregamento axial de compressão. Nesta abordagem, as frequências naturais tendem a diminuir com o aumento da força de compressão devido ao efeito de “suavização da compressão” já previsto em vigas de Euler-Bernoulli (BONOPERA et al., 2019).

Já Hamed e Frostig (2006) defendem que a frequência natural não é afetada pela força de protensão. Este argumento é fundamentado por um modelo de cinemática não-linear que conclui que a equação final do movimento dinâmico para uma viga protendida é independente da magnitude da força de protensão.

Devido às discordâncias nas teorias anteriores, uma metodologia que tem sido utilizada é a construção de modelos físicos em laboratório. Diferentes estudos experimentais como de Saiidi et al. (1994), Noh et al. (2015), Zhang e Li (2007 apud BRECCOLOTTI, 2018), Zhang et al. (2011) e Jang et al. (2011), conduzidos com vigas de concreto protendido mostraram uma tendência crescente das frequências naturais com o aumento da força de protensão, contradizendo os estudos teóricos que afirmam o contrário. Dessa forma, neste trabalho será tido em conta exclusivamente as conclusões extraídas de estudos que integram os experimentos para definir a influência da força de protensão na dinâmica do sistema.

Cabe salientar, que o monitoramento de parâmetros dinâmicos também tem sido utilizado como uma ferramenta para a verificação da segurança e integridade em estruturas, uma vez que estes parâmetros estão diretamente relacionados com a rigidez, massa, condições de contorno e, portanto, com sua deterioração e/ou fissuração (FUGANTI, 2012).

Assim, podemos entender que tanto uma redução da rigidez como uma redução de força de protensão podem provocar mudanças nas frequências naturais. Tendo em conta os estudos experimentais realizados sobre vigas protendidas, entende-se que nos dois casos ocorrerá uma redução das frequências naturais devido a uma diminuição da rigidez ou uma perda de protensão. É por isto que é importante considerar que uma possível

identificação de perdas de protensão, através de parâmetros dinâmicos, deve prever a ausência de fissuras devido à redução de rigidez, seja em ensaios dinâmicos realizados ao nível de laboratório e/ou estruturas reais. No caso de estruturas reais o estudo de Saiidi et al. (1994), indica que os ensaios dinâmicos devem ser acompanhados com inspeções visuais da estrutura para verificar e avaliar a condição existente e a presença de fissuras.

Portanto, neste trabalho pretende-se usar parâmetros dinâmicos (frequência natural) para detectar, de forma não destrutiva, a perda da força de protensão em vigas biapoiadas de concreto protendido. Para isto, um modelo numérico será formulado para identificar a relação entre as mudanças na frequência natural pelo incremento da força de protensão. É importante ressaltar, que não foram encontrados trabalhos que fizessem simulações ou análises numéricas de vigas considerando a curvatura dos cabos e que ao mesmo tempo incluam o problema dinâmico com a força de protensão, por conseguinte, o modelo pretende incorporar essa característica, que é muito comum nas vigas de concreto protendido em pontes. A viabilidade do modelo proposto será validada com simulações sendo comparadas com os resultados experimentais encontrados na literatura.

1.1 OBJETIVO GERAL

Definir e validar um modelo numérico que possa estimar as perdas de protensão em uma viga biapoiada a partir do uso de parâmetros dinâmicos (frequências naturais) e que considere a curvatura dos cabos.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Definir um modelo de elementos finitos dinâmico que inclua a força de protensão e a possível curvatura dos cabos;
- Validar o modelo através de diferentes simulações considerando os resultados de experimentos realizados na literatura;
- Incluir um perfil variável das perdas de protensão ao longo da viga e analisar sua influência nas frequências naturais.

1.3 ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A presente dissertação encontra-se dividida, além deste capítulo introdutório, em mais cinco capítulos descritos, de forma resumida, a seguir:

No Capítulo 2 é realizada a revisão bibliográfica dos trabalhos mais relevantes sobre o tema até o momento, bem como seus aspectos mais importantes que servirão de embasamento aos tópicos abordados nessa dissertação. Apresenta as discussões existentes entre as diferentes teorias defendidas pelos pesquisadores e é complementada com um resumo das principais técnicas construtivas de protensão, bem como as possíveis perdas que podem ocorrer.

No Capítulo 3 será definido o modelo de elementos finitos para uma viga protendida, considerando o efeito combinado da compressão axial devido à protensão e das forças resultantes da presença interna do cabo.

No Capítulo 4 será realizada a comparação entre resultados experimentais da literatura e valores obtidos pelo modelo e, após a validação do modelo proposto, será feita uma análise da porcentagem de perda de protensão com a frequência natural.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões construídas e as sugestões para trabalhos futuros.

No Anexo A são apresentados os principais conceitos da fase de elaboração do algoritmo utilizado no cálculo dos autovalores e autovetores e as informações necessárias para a correta utilização e interpretação do programa; e no Anexo B tem-se um exemplo de utilização do programa.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Uma estrutura é constituída por diversos elementos que devem ser capazes de transmitir cargas do topo às fundações até sua completa dissipação no solo, durante toda a sua vida útil e satisfazendo as condições de segurança e conforto aos seus usuários (FIGUEIREDO, 2016).

Entre as técnicas utilizadas em estruturas, a da protensão tem se tornado cada vez mais popular, devido a possibilidade de diminuir a seção transversal dos elementos e de otimizar projetos. Contudo, ao longo do tempo, ocorrem perdas dessa força de protensão aplicada inicialmente, acarretando fatores destrutivos significantes que alteram a resposta dinâmica dos elementos protendidos (RASHETNIA et al., 2018).

Quando sensores são inseridos no momento da construção, é possível monitorar parâmetros dinâmicos que podem ser relacionado às forças de protensão, todavia, esse procedimento apresenta um alto custo e não pode ser implementado em todas as estruturas. À vista disso, existem técnicas de investigação dinâmica que permitem monitorar as mudanças na força de protensão de forma indireta e não destrutiva (BABAKHANI; RAHAMI, 2020).

É por essa razão, que a análise dinâmica é consolidada como uma ferramenta capaz de analisar o comportamento estrutural de modelos cada vez mais precisos e detalhados de forma que, desenvolver métodos de análise modal concomitantemente aos modelos numéricos baseados no Método dos Elementos Finitos, constituiu-se uma excelente metodologia para avaliação de propriedades dinâmicas de estruturas (SOUZA JUNIOR, 2019).

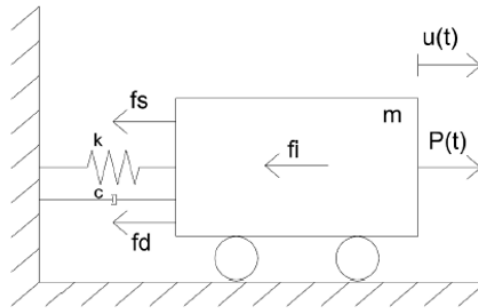
2.1 ANÁLISE DINÂMICA

Teoricamente a finalidade de uma análise dinâmica consiste na avaliação histórica dos deslocamentos decorrentes de uma carga que varia com o tempo, resultando em uma solução matemática denominada equação do movimento, comumente solucionada, de forma aproximada, segundo os graus de liberdade determinados e com base no diagrama de corpo livre do sistema (FUGANTI, 2012). O número de graus de liberdade está associado ao número de coordenadas independentes imprescindíveis para a definição da posição de cada massa em um instante t (LIMA; SANTOS, 2008).

Segundo o princípio de *d'Alembert*, ao adicionar uma força de inércia, fictícia equivalente ao valor da aceleração, com sentido inverso ao movimento e cuja

constante de proporcionalidade seja condizente com a massa do sistema, tem-se o equilíbrio diferencial dinâmico (FUGANTI, 2012).

Figura 1- Diagrama de corpo livre



Fonte: FUGANTI, 2012

onde fi é a força de inércia atuante na massa do sistema, fd a força do amortecedor, fs a força elástica da mola e $P(t)$ a força externa que atua no sistema. A partir do diagrama de corpo livre (DCL) da Figura 1 e fazendo o equilíbrio das forças na direção x , tem-se:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = P(t) \quad (1)$$

Quando a vibração do sistema ocorre exclusivamente pela imposição das condições iniciais, ou seja, quando não há aplicação de uma carga dinâmica externa, o movimento é denominado vibração livre ($P(t) = 0$) e considerando-se uma estrutura sem amortecimento, a equação diferencial pode ser simplificada para:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0 \quad (2)$$

As condições iniciais fazem com que a estrutura sofra um movimento harmônico, composto por funções seno e cosseno e que, ao ser iniciado, permanecerá por tempo indefinido que, neste caso, pode ser expresso pela chamada frequência circular:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

dado em radianos por segundo, onde a amplitude de vibração é constante e se repete em intervalos regulares:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (4)$$

chamado de período natural de vibração.

Portanto, para uma análise com vários graus de liberdade é possível representar a equação do movimento por um conjunto de matrizes do sistema em função da massa, amortecimento e rigidez (FUGANTI, 2012).

Segundo Rego Filho (2017), a matriz de rigidez tem a função de discretizar o comportamento contínuo estrutural por meio da superposição das soluções cinemáticas determinadas, sendo o sistema de equações de equilíbrio do elemento dado pela equação abaixo:

$$\begin{pmatrix} f_{s1} \\ f_{s2} \\ \vdots \\ f_{sN} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{Nj} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \quad (5)$$

sendo que o “termo genérico k_{ij} [...] representa a força que aparece na direção do grau de liberdade i quando é imposto um deslocamento unitário na direção do grau de liberdade j , mantendo todos os demais deslocamentos nulos” (LIMA; SANTOS, 2008, p.57).

A matriz de massa para um elemento de viga é nomeada consistente, pois o campo das acelerações é obtido pela segunda derivada do campo de deslocamento (VAZ; 2011), de forma que:

$$\begin{pmatrix} f_{i1} \\ f_{i2} \\ \vdots \\ f_{in} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{Nj} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Sendo que o termo genérico da matriz de massa m_{ij} “representa a força na direção do grau de liberdade i quando é imposta uma aceleração unitária na direção do grau de liberdade j ” (LIMA; SANTOS, 2008, p.57). Substituindo-se as matrizes na equação (2) resulta para encontrar os modos e frequências naturais, considerando momento livre:

$$[M].\{\ddot{\delta}(t)\} + [K].\{\delta(t)\} = \{0\} \quad (7)$$

em que $[K]$ é a matriz de rigidez e $[M]$ a matriz de inércia. O vetor de deslocamentos nodais é dado por:

$$\{\delta(t)\} = \{\delta\} \text{sen}(w.t + \phi) \quad (8)$$

sendo $\{\delta\}$ as amplitudes dos deslocamentos e w a frequência natural, tem-se:

$$\{\ddot{\delta}(t)\} = -w^2\{\delta\} \text{sen}(w.t + \phi) \quad (9)$$

Substituindo a Equação (8) e (9) na Equação (7):

$$-[M].w^2\{\delta\} \text{sen}(w.t + \phi) + [K].\{\delta\} \text{sen}(w.t + \phi) = \{0\} \quad (10)$$

resultando em um problema de autovalor e autovetor (FIGUEIREDO, 2016):

$$([K] - \lambda[M])\{\delta\} = \{0\} \quad (11)$$

A equação acima é denominada problema de autovalor e autovetor. “O menor autovalor calculado é o fator de carga crítica e o autovetor associado ao menor autovalor é o modo de flambagem que representa o modo ou a forma de flambagem da estrutura” (VAZ, 2011, p.210). Para cada autovalor λ , cuja análise determina as frequências naturais, existe um autovetor $\{\delta\}$ chamado de modo de vibração.

A Equação (11) pode ter soluções triviais $\{\delta\} = 0$ (que não é interessante neste caso, pois implica em ausência de movimento) e não triviais, ou seja, que satisfaçam a seguinte condição:

$$\det([K] - \lambda[M]) = 0 \quad (12)$$

É importante ressaltar que o autovetor é normalizado em relação à matriz de massa e que a partir da combinação linear dos modos de vibração é possível obter os deslocamentos do sistema pelo procedimento denominada análise modal.

A análise modal consiste na representação analítica ou experimental,

geralmente feita por modelos que utilizam o Método dos Elementos Finitos, com o intuito de encontrar os parâmetros modais do comportamento dinâmico de uma estrutura em análise (SOUZA JUNIOR, 2019).

2.2 PROTENSÃO

A protensão pode ser definida como a aplicação de uma carga prévia em uma estrutura com o intuito de melhorar a resistência e a capacidade de suporte da mesma (FARIA; 2004).

Com aço e concreto de resistências mais elevadas, o concreto protendido, quando comparado ao concreto armado, tem suas seções transversais com menores dimensões, diminuindo o consumo de materiais e tendo a capacidade de vencer grandes vãos. Além disso, apresentam menores custos de manutenção e resultam em projetos mais bonitos esteticamente (BASTOS, 2019).

Segundo Cholfe e Bonilha (2013), em estruturas de concreto protendido a força de protensão é o item principal e tem como objetivo introduzir esforços, através da armadura ativa, que devem atuar ao longo de toda a peça e durante sua vida útil. Essa força está relacionada aos dispositivos que compõem o elemento estrutural como a ancoragem, bainhas, aparelhos de tensão, e às propriedades do aço e do concreto que o compõem.

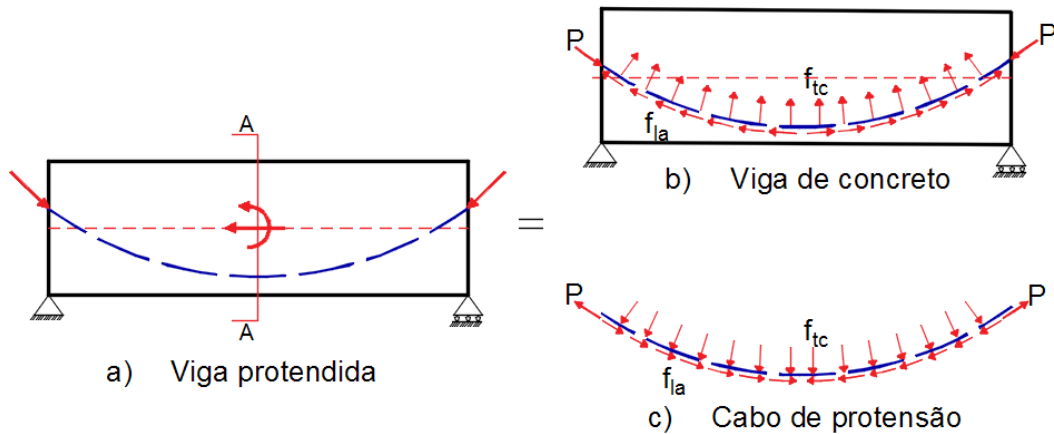
A protensão insere esforços de compressão no concreto, de modo a equilibrar as tensões de tração, eliminar ou reduzir a fissuração além de possibilitar o emprego de aços mais resistentes e de concreto com alta resistência à compressão (MACHADO, 2002).

Segundo Menegatti (2004), a protensão pode ter as seguintes alternativas de representações: esforços solicitantes iniciais equivalentes (ESIE) e carregamento externo uniformemente distribuído.

- Esforços Solicitantes Iniciais Equivalentes (ESIE)

No sistema de pós-tração, quando o cabo é esticado no interior da bainha ocorre um atrito entre as paredes e o cabo. Esse atrito será representado pela força transversal de curvatura (f_{tc}) e pela força longitudinal de atrito (f_{la}). Na Figura 2, é possível observar a separação entre a viga de concreto e o cabo de protensão submetido a força de protensão ($P(x)$) (SKAF; STUCCHI, 1995).

Figura 2 - Viga protendida e cabo de protensão separados



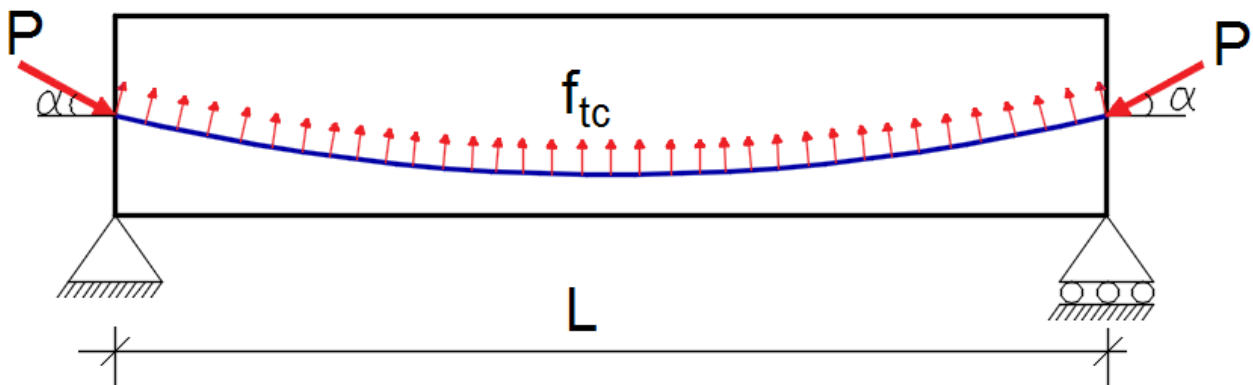
Fonte: adaptado de MENEGATTI, 2004

Apesar da viga de concreto estar submetida a um esforço de flexo-compressão e o cabo de protensão estar sujeito à tração, quando unidos os esforços de ação e reação se anulam nos apoios (MENEGATTI, 2004).

- Carregamento Externo Uniformemente Distribuído

Esse método parte do pressuposto de que, o cabo de protensão pode ser substituído por um conjunto de forças dadas por um carregamento vertical distribuído e uma força axial compressiva, conforme a Figura 3, sendo este conjunto, um sistema em equilíbrio cujas reações se anulam nos apoios (FARIA, 2004).

Figura 3 - Esquema de esforços aplicados em uma viga biapoiada através da protensão com f_{ia}



Fonte: adaptado de MENEGATTI, 2004

Segundo Faria (2004), ao tratar a força de protensão como um carregamento, torna-se mais fácil incorporá-la aos modelos computacionais baseados no Método dos Elementos Finitos. Assim, a força de protensão, projetada como carga

equivalente, permite que sejam avaliados simultaneamente os efeitos da protensão, deslocamentos e forças nodais.

2.2.1 Sistema Construtivo

A protensão dos cabos de aço, antes ou após o endurecimento do concreto, é realizada por um cilindro hidráulico e dependendo do processo construtivo pode ser classificada em: pré-tração ou pós tração (BASTOS, 2019).

No sistema de pré-tração, o alongamento da armadura ativa é feito antes da concretagem da peça e são utilizados apoios autônomos em relação a peça estrutural (MACHADO, 2002).

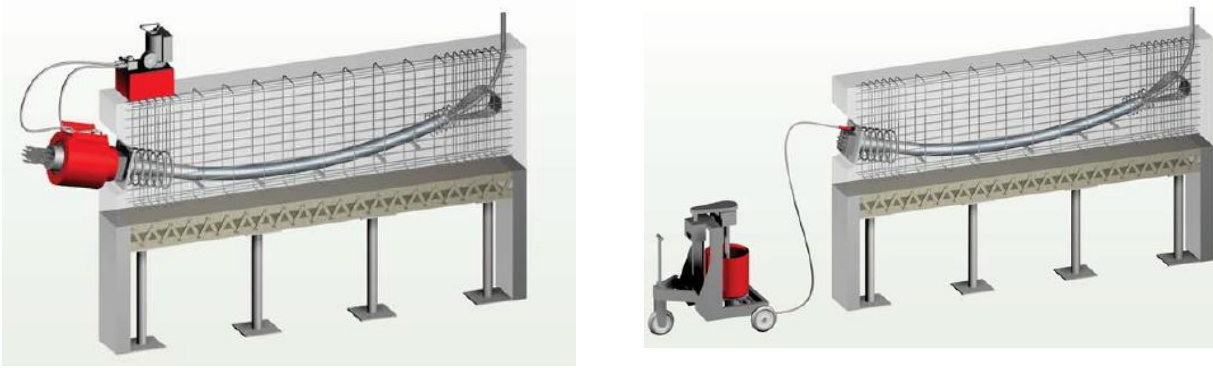
Com estiramento antes da concretagem, a pré-tensão (ou pré-tração) é predominantemente aplicada na fabricação de pré-moldados. A execução é realizada em pistas de protensão onde, após o posicionamento e fixação dos fios, é feito o alongamento dos fios um a um por meio de um cilindro hidráulico na extremidade de ancoragem ativa. Após o completo estiramento da armadura de protensão, é feito o lançamento do concreto. Quando o concreto adquirir resistência, os fios são soltos das ancoragens, ocorrendo a transferência da protensão para a estrutura, por meio da aderência inicial entre o aço e o concreto, que passam a trabalhar de forma integrada. Por fim, a armadura pode ser cortada, a peça desmoldada e transferida para o lugar onde será armazenada. Sua utilização predominante em pré-moldados é justificada pela possibilidade de industrialização e controle do processo de fabricação e produção em massa (BASTOS, 2019).

Segundo Kassab (2009), entre as vantagens do sistema com aderência inicial pode-se ressaltar um melhor comportamento do elemento no Estado Limite Último.

Já na pós-tração, metodologia considerada nas análises deste trabalho, os cabos são revestidos por bainhas e são esticados após o concreto atingir a resistência necessária para resistir aos esforços de compressão decorrentes da protensão, sendo a transferência da força realizada pela ancoragem de partes da própria seção. Após a protensão, injeta-se uma calda de cimento nas bainhas (pós-tensão com aderência) e liberam-se os cabos (CHOLFE; BONILHA, 2013).

Neste caso, a injeção da nata de cimento é aplicada por bombas injetoras e o tensionamento dos cabos é auxiliado por macacos hidráulicos, que se apoiam no concreto já endurecido (KASSAB, 2009), como pode ser visto na Figura 4.

Figura 4 - Aplicação da protensão e injeção da calda de cimento na pós-tração com aderência posterior



Fonte: RUDLOFF, 2015

De acordo com Bastos (2019), esse tipo de protensão é recomendável para pequenas quantidades que não exijam produções de alta repetitividade. O autor também ressalta que, a solução de protensão com aderência posterior resulta em peças com melhor distribuição de fissuras e maior segurança a carregamentos excepcionais.

A pós-tensão também pode ser executada sem aderência, no qual a cordoalha é revestida por uma bainha engraxada metálica ou de plástico, para impedir o contato entre o concreto e o aço. Dessa forma, as forças de compressão provenientes da protensão ocorrem nas ancoragens ou em pontos localizados. O mesmo ocorre na protensão externa, no qual a armadura fica posicionada externamente ao concreto e é utilizada principalmente como reforço de estruturas existentes (KASSAB, 2009).

Segundo Bastos (2019), quando a estrutura for locada em um ambiente não agressivo, onde o surgimento de fissuras não precisa ser evitado, pode-se economizar na intensidade da força de protensão aplicada. Assim, é permitido o surgimento de fissuras cuja abertura varia conforme a solicitação dos carregamentos variáveis, o que é definido como protensão parcial. Desde que não prejudique a durabilidade e estética e que seja feito um controle do limite aceitável (0,2mm), a estrutura pode trabalhar fissurada quando submetida ao carregamento total. Por outro lado, em condições agressivas (ambientes marítimos, reservatórios de líquidos, etc.), o concreto protendido pode ser projetado para permanecer livre da abertura de fissuras durante sua vida útil, aplicando-se a chamada protensão completa.

Entretanto, sabe-se que a força de protensão aplicada pelo aparelho tensor sofre uma redução, denominada perda de protensão e que essas perdas devem ter seus valores previstos em projeto.

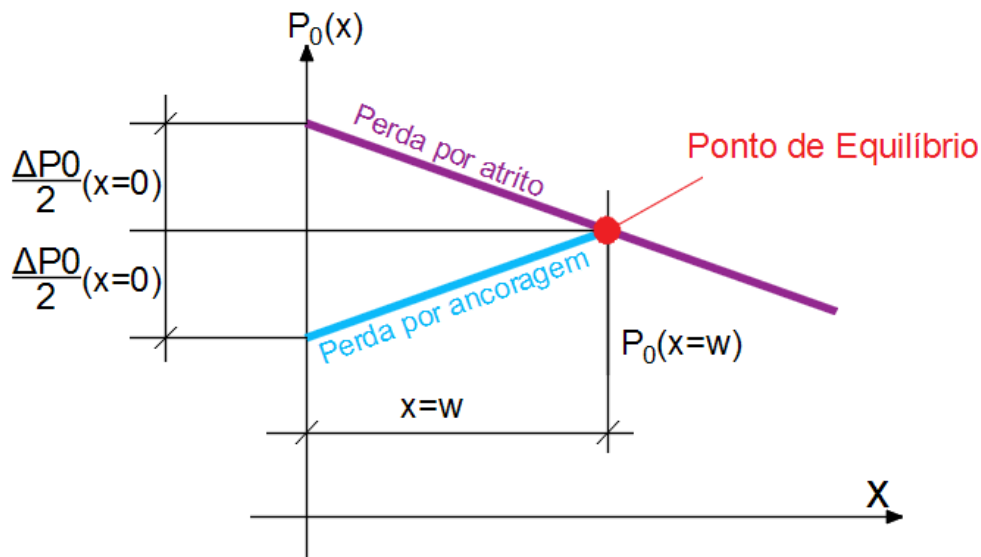
2.2.2 Perdas de Protensão

As perdas de protensão ocorrem por diversas causas e podem ser classificadas como: perdas iniciais, perdas imediatas e perdas progressivas.

As perdas iniciais acontecem na pré-tração antes da liberação da força de protensão e devido ao escorregamento da armadura nos dispositivos de ancoragem, à relaxação do aço em função do tempo entre o alongamento, endurecimento do concreto e a liberação da força, e pela retração, ou diminuição do volume do concreto (BASTOS, 2019).

Já as perdas imediatas ocorrem no momento da transferência da protensão para o elemento estrutural. Uma delas, ocorre devido ao atrito entre o cabo e a bainha durante o estiramento do aço (MACHADO, 2002). Ao finalizar o alongamento da armadura ocorre uma perda em consequência da acomodação da ancoragem (Δw), com resistência atuando no sentido contrário ao atrito. Logo, a perda se inicia na ancoragem e se estende até um determinado trecho do cabo onde encontra um ponto de equilíbrio, ou seja, um ponto onde se encerra a perda da acomodação da ancoragem tal como é mostrado na Figura 5 abaixo (CHOLFE; BONILHA, 2013):

Figura 5 - Diagrama de forças após perdas por atrito e acomodação da ancoragem



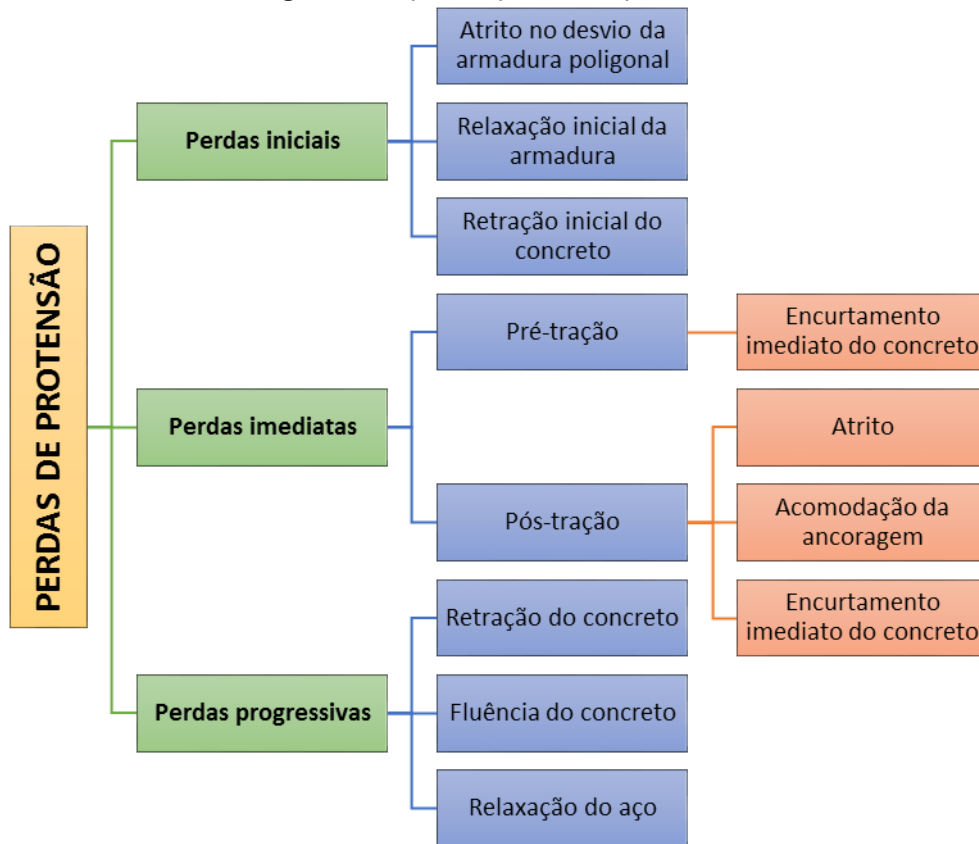
Fonte: adaptado de CHOLFE; BONILHA, 2013

Ainda segundo Cholfe e Bonilha (2013), quando os cabos são protendidos um após o outro, ocorre uma perda por encurtamento imediato do concreto e, como consequência, os primeiros cabos protendidos sofrem um afrouxamento.

Após a força ser completamente transferida para a peça surgem as perdas

progressivas, que são aquelas que ocorrem ao longo da vida útil da estrutura e estão relacionadas às propriedades dos materiais constituintes (MENEGATTI, 2004). Em relação ao concreto, tem-se sua retração (variação do volume em função da umidade) e a fluência que trata do quanto o concreto se deforma quando submetido à uma tensão constante. Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), aços protendidos sujeitos à tensões superiores a $0,5f_{ptk}$ perdem parte de sua tensão, que consiste na perda progressiva por relaxação do aço (CHOLFE; BONILHA, 2013). O esquema da Figura 6 apresenta um resumo das principais perdas de protensão que podem ocorrer em uma estrutura de concreto protendido.

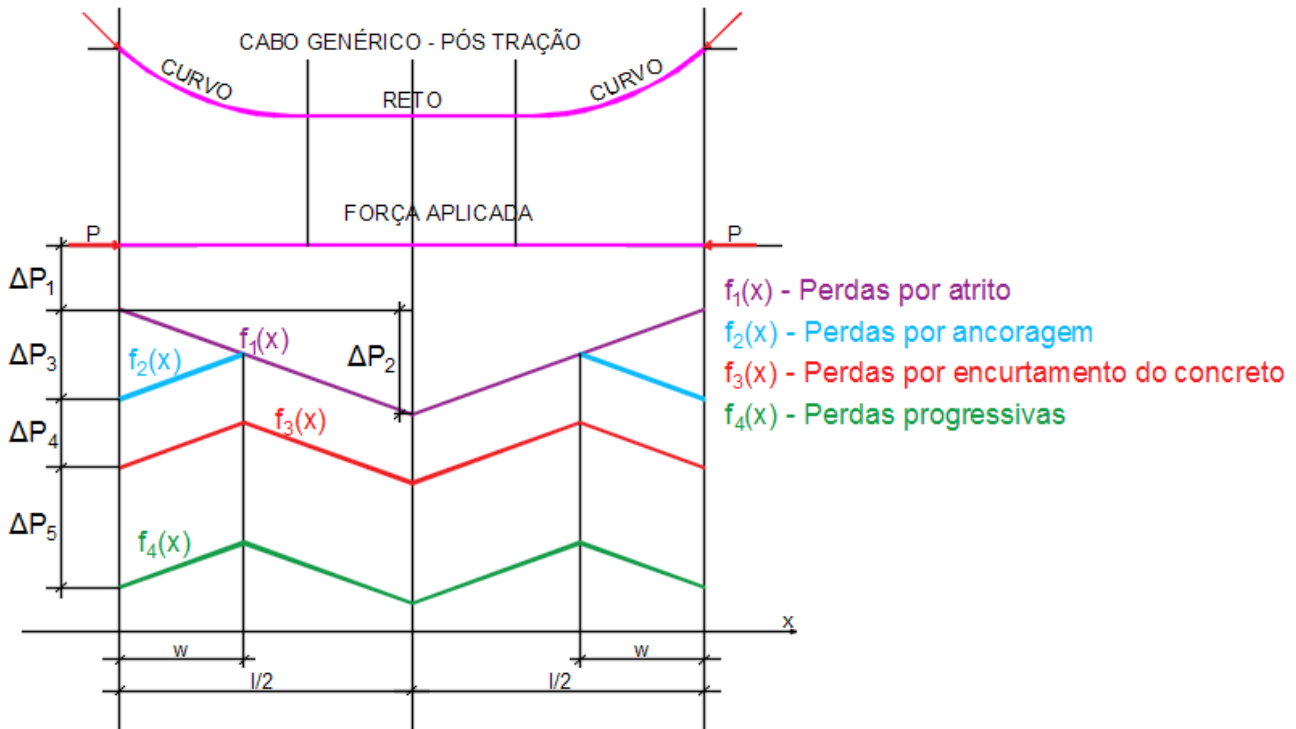
Figura 6 – Tipos de perdas de protensão



Fonte: A autora, 2020

Assim, é possível apresentar o diagrama de forças (Figura 7) proposto por Cholfe e Bonilha (2013) para um cabo genérico, considerando o sistema de pós-tração:

Figura 7 - Diagrama de forças de um cabo genérico com indicação das perdas de protensão (pós-tração).



Fonte: Adaptado de CHOLFE; BONILHA, 2013

O triângulo formado no diagrama acima é isósceles, visto que, a reta inclinada superior e a inferior possuem a mesma inclinação, sendo a superior correspondente à perda por atrito entre o cabo e bainha e a reta inferior pelo efeito da acomodação das ancoragens (SANTOS, 2015).

Cabe ressaltar que o perfil de perdas é diferente entre os casos em que apenas uma extremidade é protendida e os que tem ambas as extremidades protendidas. Além disso, se a protensão não for realizada simultaneamente, o perfil de tensões também será diferente, sendo o diagrama dependente também dessas escolhas.

2.3 ESTADO DA ARTE

Atualmente, existem muitas divergências entre as pesquisas que tratam da relação entre a força de protensão e a frequência natural de vigas ao passo que, relações quantitativas e explicações teóricas conclusivas ainda não são definitivas. Grande parte dos trabalhos são derivados de teorias e fórmulas independentes baseadas em estudos analíticos, experimentais ou pelo Método dos Elementos Finitos (LI; ZHANG, 2016).

Além dos trabalhos analíticos, muitos pesquisadores têm se dedicado à investigação do efeito da protensão no comportamento dinâmico de vigas biapoiadas no âmbito experimental para diferentes materiais, tipos de protensão e dimensões. Uma breve

revisão das principais contribuições sobre este assunto é apresentada a seguir, incluindo investigações teóricas e testes experimentais.

2.3.1 Investigações Teóricas

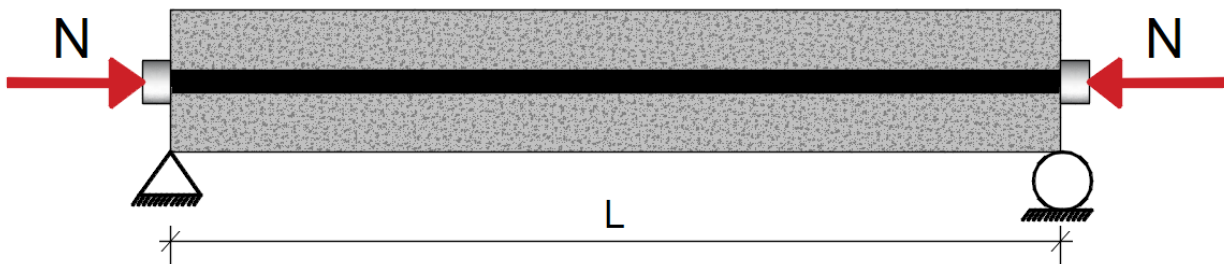
Teoricamente, a presença de uma força axial em uma viga homogênea altera suas frequências de vibração. Isso acontece devido ao efeito conhecido como “suavização da compressão”, que surge do modelo clássico de Euler-Bernoulli (NOH et al., 2015).

Assim, para uma viga prismática biapoada (Figura 8), a solução dada pelo autor para a equação de equilíbrio, após a aplicação das condições de contorno, leva à seguinte equação para a frequência natural:

$$\omega_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{N}{m} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{EI}{m} \quad (13)$$

onde ω_n é a frequência natural, n é o número do modo, L é o comprimento da viga, N a força axial de compressão, E o módulo de elasticidade, I o momento de inércia e m a massa dada pela multiplicação entre a densidade (ρ) e a área da seção (A_c).

Figura 8 - Modelo de Viga de Euler-Bernoulli



Fonte: adaptado de NOH et al., 2015

Ainda de acordo com o autor citado, nessa teoria, a força de protensão é considerada como uma força externa e a frequência de vibração natural mostra uma tendência decrescente com o aumento do valor da força de protensão. Ou seja, ao aumentar a força de protensão externamente, ocorre uma diminuição no endurecimento e na rigidez da viga fazendo com que a frequência natural também diminua. Isso acontece porque uma força axial aplicada externamente suaviza a viga lateralmente, aumentando as deflexões laterais.

Entretanto, essa consideração não pode ser feita na situação em que a força axial é decorrente da força de protensão pois, a presença física do cabo protendido gera esforços internos que aumentam a rigidez à flexão da viga, resultando em uma tendência contrária ao previsto pela Equação (13).

Shaker (1975) e Bokaian (1988), apresentaram uma investigação do efeito da carga axial (viga submetida a um estado de protensão) nas frequências naturais de vigas com vários tipos de condições de contorno. Essas investigações resultaram em equações características para os diferentes casos considerados. As equações encontradas foram resolvidas numericamente e os resultados mostraram que com o aumento da carga axial a frequência natural diminui para todas as condições de contorno. Além disso, concluíram que este efeito é maior no modo fundamental e tende a diminuir rapidamente à medida que o número do modo aumenta.

Raju e Rao (1986), mostraram que o aumento da força de protensão reduz a frequência natural dos modos mais baixos, com base em uma formulação de Rayleigh-Ritz, que descreve a força de protensão como uma força de compressão axial externa.

Já Miyamoto et al. (2000) abordaram a manutenção, reabilitação e reforço de pontes utilizando protensão externa, justificada pela redução do tempo de interrupção do tráfego para ser efetuada. Fizeram análises analíticas para avaliar o efeito deste método de reforço sobre as características de vibração. Ao considerar a mudança na força de protensão externa, todas as frequências naturais apresentaram tendência decrescente à medida que a força era incrementada.

Mais tarde, Kim et al. (2003) utilizou o modelo de Euler Bernoulli para uma viga retangular biapoiada sujeita a forças axiais de compressão e, assumindo que a força de compressão é uniforme ao longo do comprimento e não varia com o tempo, obteve uma equação em que o aumento da compressão axial reduz a frequência natural e vice-versa. Entretanto, esse resultado contradiz testes experimentais, como o de Saiidi et al. (1994). Diante disso, propôs um modelo alternativo a partir da derivada da equação da frequência natural e ao utilizá-lo verificou que a contribuição da força de protensão para a frequência só é relevante nos primeiros modos e que a frequência tem seus valores crescentes com o aumento da força de protensão.

A mudança relativa da força de protensão em relação à força de protensão total é identificada medindo a mudança relativa da n -ésima frequência natural com referência ao estado de protensão total e o estado sem carregamento. A previsão das perdas de protensão é dada pela equação (14), (KIM et al., 2003):

$$\frac{\delta N}{N_f} = \frac{\delta \omega_n^2}{\omega_{nf}^2 - \omega_n^2} = \frac{\omega_{nf}^2 - \omega_{nd}^2}{\omega_{nf}^2 - \omega_n^2} \quad (14)$$

onde o subscrito f denota o estado de protensão total e o subscrito d o estado em que houve a perda.

Após comparar as perdas de protensão do modelo com os valores experimentais de Saiidi et al. (1994), o autor encontrou uma alta correlação entre os dois conjuntos, confirmando a possibilidade de detectar a perda da força de protensão pelo monitoramento das frequências naturais.

Law e Lu (2005), estudaram a resposta no domínio do tempo baseada na superposição modal de uma viga de concreto protendido de Euler-Bernoulli, submetida a um esforço de compressão axial. Como conclusão, as frequências modais inferiores foram as mais afetadas pela compressão axial. Além disso, devido ao efeito da suavização da compressão, a frequência natural diminuiu com o aumento da força de protensão.

Também com o objetivo de avaliar o efeito da força de protensão nas frequências naturais, Hamed e Frostig (2006), formularam um modelo analítico não-linear geométrico para uma viga de concreto protendido biapoiada para cabos aderentes e não aderentes e com perfil curvo. Após o desenvolvimento da formulação matemática concluiu-se que para ambos os casos, a força de protensão não afeta a frequência natural. Essa hipótese é justificada pela representação de uma condição ideal, onde o cabo protendido se move juntamente com a estrutura principal, não introduzindo o chamado “efeito de amolecimento da compressão”. No entanto, nenhum teste experimental foi realizado para verificar o seu modelo analítico.

Jaiswal (2008), utilizou o Método dos Elementos Finitos para modelar um cabo e estudar o efeito da força de protensão na primeira frequência natural de vigas. Dependendo do tipo de aderência do cabo ao concreto e da excentricidade, os resultados encontrados foram diferentes. Para cabos aderentes ao concreto, a força de protensão não teve efeito na primeira frequência, no entanto, para cabos que não estão ligados ao concreto e com excentricidade pequena, a frequência natural diminuiu com o aumento da força de protensão. Se a excentricidade for grande, então a primeira frequência natural aumenta com a força de protensão.

Vibhute et al. (2016), realizaram uma análise dinâmica do efeito da força de protensão na frequência natural de uma viga de aço protendido utilizando o software de elementos finitos ANSYS 15.0 e comparou seus resultados com a solução analítica. Analisando os valores encontrados analiticamente, verificou-se que o aumento da força de

protensão reduz significativamente a frequência natural.

O trabalho de Bai-Jian et al. (2018), investigou como a força de protensão em cabos protendidos externos retos influenciavam na frequência natural de uma viga biapoiada de aço, levando em conta o efeito da força de protensão, a excentricidade e a área transversal. Após resolução analítica e confirmação dos resultados pelo Método dos Elementos Finitos, concluíram que a protensão não tem influência nas frequências de ordem par, que as frequências de ordem ímpar diminuem gradualmente com o aumento da força de protensão, e que as frequências aumentam com o aumento da excentricidade e seção transversal.

Tendo em vista as discrepâncias entre as diferentes teorias, Gan et al. (2019), teve como objetivo fornecer uma explicação sistemática sobre as investigações para previsão das frequências naturais a partir da força de protensão. Realizou simulações numéricas usando o Método dos Elementos Finitos para verificar a influência da força de protensão nas frequências naturais com a existência de microfissuras pelo encolhimento do concreto. Os resultados demonstraram que a força de protensão aplicada tende a fechar tais fissuras e por sua vez, aumentar a rigidez de flexão e a frequência natural.

É notável que muitos estudos analíticos concordam que a força de protensão (quando considerada como um carregamento axial externo) tende a diminuir as frequências naturais, enquanto algumas discussões relatam que a protensão não tem efeito significativo sobre as frequências naturais de vigas protendidas, por isso, faz-se necessária uma investigação mais próxima no campo experimental (HAMED; FROSTIG,2006).

2.3.2 Testes Experimentais

Estudos experimentais, como o de Hop (1991) e Saiidi et al. (1994), para vigas de concreto protendido com cabo concêntrico reto, mostraram que a frequência natural aumentou com o aumento da força de protensão, contradizendo a previsão teórica dada por aqueles modelos teóricos que consideram a força de protensão como uma força de compressão axial. Kim et al. (2003), não realizou experimentos, mas propôs um modelo analítico, comparou com os resultados experimentais de Saiidi et al.(1994), e obteve a mesma tendência crescente, para o caso de cabos retos centralizados.

Desde então, tem sido estudado um modelo de fortalecimento de tensão, em que, muitos pesquisadores, apresentaram novas teorias e métodos para explicar este problema (NOBLE et al., 2016). Por exemplo, Saiidi et al. (1994), Li e Zhang (2016) propuseram uma fórmula empírica que explica o efeito da força de protensão na rigidez do

elemento.

Uma justificativa proposta por Saiidi et al. (1994), é que as diferenças entre valores medidos em campo ou em laboratório e o valor calculado pelas teorias clássicas ocorre devido à presença de microfissuras. Em estruturas de concreto, surgem microfissuras decorrentes do encolhimento do concreto e ao aplicar uma força de protensão, haverá um fechamento dessas microfissuras abertas, resultando em um aumento da rigidez e conseqüentemente da frequência natural. Entretanto, a fórmula tradicional, Equação (13), usada para a frequência natural não leva em consideração esse efeito. Da mesma forma, quando a força de protensão diminui, mais microfissuras são abertas, diminuindo a rigidez e a frequência natural.

A Equação (15) foi sugerida pelo autor e resulta no ganho de rigidez devido ao aumento de uma força axial.

$$(EI)_e = \left(1 + 1,75 \frac{N}{f'_c}\right) EI_g \quad (15)$$

onde N é a força axial aplicada; f'_c a resistência à compressão padrão do concreto aos 28 dias; EI_g a rigidez da viga sem protensão. Logo o valor da rigidez efetiva $(EI)_e$ pode ser utilizada na equação da frequência natural. Entretanto, esta equação deve ser usada com ressalvas, pois ainda é baseada em fórmulas empíricas e sem suporte teórico completo (BAI-JIAN et al., 2018).

Saiidi et al. (1994), realizaram testes de campo e em laboratório para uma viga de concreto protendido biapoiada com cabo reto concêntrico. Os pesquisadores consideraram apenas o efeito da protensão sobre as características dinâmicas. Após a realização de testes em campo a tendência da força de protensão era contrária à equação da frequência. Os resultados indicaram que um aumento na força de protensão aumentaria as frequências naturais. Devido a essa diferença, foram realizados testes em laboratório e os resultados assemelharam-se aos encontrados em campo. O trabalho de Saiidi et al. (1994), foi seguido por outros autores tal como Dall'Asta e Dezi (1996), Deak (1996) e Jain e Goel (1996).

Dall'Asta e Dezi (1996), realizaram trabalhos em campo e em laboratório e concluíram que as frequências naturais não são notadamente afetadas pela força de protensão. Ressalta ainda que a Equação (13), utilizada para frequência, fornece uma boa previsão para vigas submetidas a uma força axial externa de compressão, mas não se aplica à vigas protendidas.

Já na discussão de Deak (1996), o autor atribuiu a redução da frequência natural com a redução da força de protensão à formação inicial de microfissuras nos membros, principalmente devido ao encolhimento do concreto antes da protensão e ao peso da viga. Com o aumento da força de protensão essas fissuras são gradualmente fechadas, aumentando rigidez dos membros e conseqüentemente da frequência natural. No entanto, no caso de não considerar um estado inicial com as microfissuras, a força de protensão não pode ser inferida pela frequência natural.

Na terceira discussão, Jain e Goel (1996), apontaram que, uma vez que o cabo se torna parte integrante do sistema, a tensão no cabo não pode ser tratada como uma força externa e, portanto, a força de protensão não afeta as frequências naturais da viga.

Miyamoto et al. (2000), experimentalmente, testou em laboratório uma viga com protensão externa e encontrou que a frequência natural diminuiu à medida que a força de protensão aumentava. Por outro lado, observou uma tendência de crescimento da frequência com a força nos modelos com cabos mais excêntricos.

Lu e Law (2006), apresentaram um método para identificação da força de protensão por parâmetros dinâmicos de uma ponte de concreto protendido. Um modelo de elemento finito baseado na teoria de Euler-Bernoulli foi usado modelando a força de protensão como uma força de compressão axial em cada elemento. Ensaio experimental em laboratório de uma viga de concreto protendido também foram realizados e como resultado, observou-se que as três primeiras frequências naturais aumentaram com aumento da força de protensão, contradizendo a previsão da fórmula teórica apresentada. Zhang e Li (2007 apud BRECCOLOTTI, 2018), observaram a mesma tendência em seus experimentos.

Jang et al. (2011) testaram 6 vigas de concreto protendido (pós-tração) numericamente e experimentalmente. Cabe ressaltar, que no modelo de análise numérica foi utilizada a equação da rigidez efetiva, Equação (15), para calcular a frequência natural e os resultados mostraram confiabilidade entre os valores medidos e calculados. Em ambos os casos observaram um aumento progressivo da frequência com o aumento da força de protensão aplicada.

Zhang et al. (2011), testaram em laboratório duas vigas biapoiadas protendidas, de igual comprimento e diferentes seções e os resultados da análise experimental mostraram que as frequências do primeiro modo aumentam com a força de protensão.

Wang et al. (2013), utilizaram o método de Rayleigh para derivar a equação

da frequência natural. Além disso, desenvolveram um modelo matemático e ensaios experimentais para o estudo da frequência natural de uma viga de concreto protendido. A partir do modelo teórico e experimental, concluiu-se que para cabos parabólicos a frequência natural diminuirá com o aumento da força de protensão, já em vigas com cabos retos a frequência natural não é afetada pela força de protensão. Ao comparar os resultados analíticos com os experimentais, o método de Rayleigh foi considerado um método simples e útil para calcular o primeiro modo das frequências naturais.

Luning et al. (2014), baseando-se no trabalho de Miyamoto et al. (2000), determinou a função exata da equação em vibração livre para protensão externa utilizando um algoritmo de solução inversa para encontrar a força de protensão a partir da frequência natural de uma viga bipoada de concreto protendido externamente. Foram feitos testes analíticos e experimentais. No laboratório utilizaram duas vigas com comprimentos diferentes cujas respostas dinâmicas são coletadas por sensores de aceleração. Ao analisar os resultados, concluíram que frequências de ordem mais baixas são mais precisas, e que tendem a aumentar com o incremento da força de protensão, resultado também encontrado por Saiidi et al. (1994).

No ano seguinte, Noble et al. (2016), realizaram uma análise modal experimental em uma viga de concreto protendido e foram feitas medições em três pontos, seguidas de uma análise de regressão linear, na tentativa de identificar alguma tendência. Nenhum aumento claro ou tendência decrescente na frequência natural com força de protensão variável foi observada.

Sabendo que influência da força de protensão sobre a frequência natural tem resultados analíticos e experimentais muitas vezes inconsistentes Noh et al. (2015), realizaram ensaios experimentais com três modelos de viga: cabo reto sem excentricidade, cabo reto com excentricidade e cabo com perfil parabólico. Nenhuma relação significativa entre frequência natural e força de protensão foi encontrada para o modelo com cabo reto e concêntrico, já para os modelos 2 e 3 houve um aumento na frequência na medida que a força aumentava. Noh et al. (2015), também ressaltaram que a variação da frequência diminui à medida que o modo é aumentado.

Na pesquisa de Li e Zhang (2016), foram medidos os sinais de aceleração no meio do vão de uma viga biapoada de concreto protendido, que foi submetida ao método de martelamento para estudar a relação entre a frequência natural e os valores de força de protensão. Além do ensaio experimental, também foi realizada simulação numérica e, de acordo com os resultados encontrados, concluiu-se que a relação entre as variáveis não pode ser explicada pela teoria tradicional de protensão como carga axial. O objetivo do

trabalho foi analisar as frequências naturais da viga sob diferentes forças de protensão e excentricidade. Utilizando o método analítico das teorias tradicionais obteve-se que a frequência natural diminuirá com o aumento da força de protensão. Já no ensaio experimental, a frequência natural refletiu uma tendência de aumento com o aumento da protensão, resultado também encontrado ao utilizar o Método dos Elementos Finitos no software Abaqus.

Assim, segundo o autor, o método experimental aplicando martelagem e um modelo numérico, pode ser a metodologia mais precisa para determinar o comportamento dinâmico de uma viga de concreto protendido sob diferentes valores de protensão. Após validar o modelo com um ensaio experimental, foi possível ainda utilizar o mesmo modelo para avaliar a influência da excentricidade na frequência natural. O resultado encontrado foi que o aumento da distância excêntrica do cabo aumenta a rigidez de flexão da viga e conseqüentemente a frequência natural (LI; ZHANG, 2016).

Bonopera et al. (2019), realizaram testes em laboratório em uma viga de concreto protendido de alta resistência com perfil de cabo parabólico não aderente. Ao submeter a viga de teste às vibrações transversais livres, com diferentes forças de protensão, demonstrou-se que a frequência natural não foi afetada por tal força.

De modo geral, pode-se concluir que não existe, atualmente, um acordo sobre como a excentricidade, a força de protensão e o perfil do cabo afetam as frequências naturais das estruturas de concreto protendido (NOBLE et al., 2016). No entanto, a maioria dos estudos experimentais revisados neste trabalho indicam que existe um aumento da frequência natural devido ao aumento da força de protensão. Isto, pode ser explicado devido ao fato de que a presença de um cabo protendido tem duplo efeito sobre a frequência da viga, ou seja, o próprio cabo protendido aumenta a rigidez à flexão e, conseqüentemente, a frequência da viga, enquanto o peso próprio e a força de compressão axial, do qual ela está submetida, reduz a frequência natural. Se o efeito do enrijecimento for maior que a suavização da compressão, então a frequência natural aumenta com a força de protensão, tal como é obtido em resultados experimentais (LU; LAW, 2006).

Ao utilizar a teoria que considera a força de protensão como uma força axial de compressão para o cálculo da frequência natural de uma viga, a frequência natural diminuirá com o aumento da força de protensão devido ao efeito da suavização da compressão (LI; ZHANG, 2016). Uma força axial de compressão aplicada externamente, suaviza lateralmente a viga, ou seja, ocorre um aumento nas deflexões laterais e as frequências naturais de vibração diminuem. Entretanto, esta análise não pode ser aplicada na situação em que a força axial é aplicada pela protensão com cabos internos, pois estes,

são responsáveis pelo surgimento de forças internas no sistema (DALL'ASTA; DEZI, 1996; JAIN; GOEL, 1996).

Cabe ressaltar, que todos os testes mencionados acima foram realizados em vigas biapoiadas de concreto protendido, no entanto, a maioria dos pesquisadores não mencionam a existência de fissuras (GAN et al.,2019). Um exemplo é Noble et al. (2016), que afirmaram não haver nenhuma fissura visível em suas amostras.

Apesar da possibilidade de existirem microfissuras internas, devido a contração do concreto, principalmente próximo às barras, como exposto por Gan et al. (2019), e considerando que poucos detalhes sobre a cura do concreto foram mencionados nas pesquisas, presume-se que as vigas a serem simuladas neste trabalho foram curadas com o processo regular de laboratório.

3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA VIGAS COM PROTENSÃO

Neste capítulo, será definido um modelo de elementos finitos para vigas com protensão. O modelo considera o efeito conjunto da compressão axial devido à protensão dos cabos e à presença interna dos cabos, que gera forças resistentes aumentando a rigidez à flexão. Do ponto de vista dinâmico, ambos os fenômenos são contrários, por um lado a compressão axial gera diminuição nas frequências naturais da viga e por outro lado a presença do cabo gera um aumento.

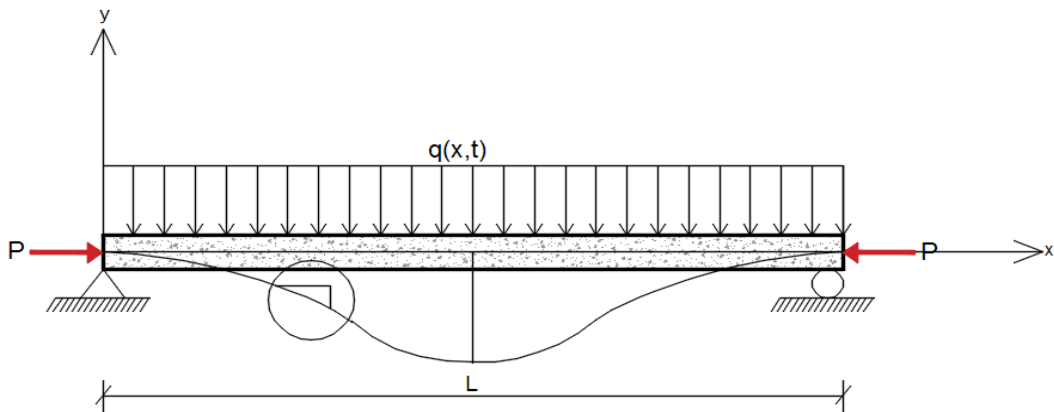
Inicialmente será analisado o efeito da compressão axial pela força de protensão considerando que a força interna axial tem uma variação linear. Para isto, temos que definir uma equação de equilíbrio de uma viga submetida à carga axial e aplicar nessa equação de equilíbrio uma solução numérica utilizando o Método de Galerkin. Logo, será considerada a presença do cabo como uma carga distribuída equivalente devido ao momento resistente que gera a força de protensão na seção. A definição da matriz de rigidez será realizada através do Método de Energia.

3.1 ANÁLISE INCLUINDO O EFEITO DA CARGA AXIAL

Será deduzido um modelo matemático para investigar a resposta dinâmica de uma viga sob a influência de uma força axial constante nas frequências naturais, levando em consideração que a seção transversal será sempre plana e perpendicular ao eixo longitudinal da viga durante a deformação. A dedução da equação que governa o movimento vibratório de vigas uniformes sob o efeito de carga axial é também apresentada em numerosos textos de teoria de vibrações, como em Machado et al. (2002), Abreu (2003), Andrade (2009) e Shaker (1975). No entanto, nessas deduções a carga axial interna é considerada constante. Neste item, será deduzida uma equação de equilíbrio, considerando que existe uma variação da carga axial ao longo do elemento.

A viga em estudo, biapoiada, de comprimento L e rigidez EI , é submetida a uma força axial P (de mesma intensidade e direção) considerada positiva em compressão e a um carregamento distribuído transversalmente por toda a viga, de cargas contínuas e positivas quando agirem para baixo. Na Figura 9, está representada a viga proposta, paralela ao eixo x e com as condições de carregamentos citadas anteriormente.

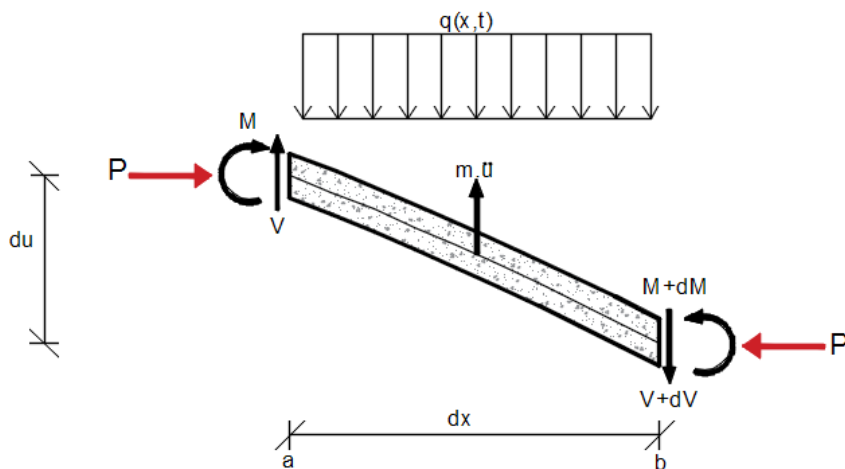
Figura 9 – Viga biapoada com carregamento axial e transversal



Fonte: A autora, 2020

Dessa viga, será utilizado para extrair as equações de equilíbrio, um elemento da viga, de comprimento dx , sob uma carga axial constante P e carregamento distribuído, com cisalhamento interno de V e $V + dV$ e momento M e $M + dM$, bem como suas forças inerciais ($m \cdot \partial x \cdot \ddot{u}$), como é mostrado na Figura 10.

Figura 10 – Elemento de viga



Fonte: A autora, 2020

Neste caso, $u(x, t)$ consiste no deslocamento de um ponto ao longo da linha neutra e a soma de momentos em B produzem a seguinte equação de equilíbrio.

$$\sum M_b = 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 -M(x, t) - V(x, t) \cdot \partial x - P(x) \cdot \partial u(x, t) + M(x, t) + \partial M(x, t) + q(x, t) \cdot \partial x \cdot \frac{dx}{2} \\
 - m \cdot \partial x \cdot \ddot{u}(x, t) \frac{dx}{2} = 0
 \end{aligned} \tag{17}$$

Como $dx \ll 0$ então $q(x, t) \cdot \partial x \cdot \frac{dx}{2}$ e a força de inércia $m \cdot \partial x \cdot \ddot{u} \frac{dx}{2}$ se anulam ficando:

$$\partial M(x, t) = V(x, t) \cdot \partial x + P(x) \cdot \partial u(x, t) \tag{18}$$

Dividindo por dx e isolando a variável $V(x, t)$.

$$V(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - P(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \tag{19}$$

E derivando em relação a x e aplicando a regra do produto para o último termo tem-se:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} - P(x) \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial P(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \tag{20}$$

Da teoria das vigas, a equação que relaciona o momento fletor com o deslocamento segundo a convenção de sinais adotada nas figuras anteriores é dada por (BEER; JOHNSTON, 2012):

$$M(x, t) = -\frac{EI \partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \tag{21}$$

onde E é o módulo de Elasticidade e I o momento de inércia da seção transversal. Logo, a força de cisalhamento $V(x, t)$ pode ser expressa como:

$$V(x, t) = -\frac{EI \partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} - P(x) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \tag{22}$$

Já para o equilíbrio de forças no eixo y , a equação do momento e da massa

m pode ser representada pela Segunda Lei de Newton que diz:

$$\sum F_y = m \cdot a \quad (23)$$

Assim:

$$V(x, t) - (V(x, t) + \partial V(x, t)) - q(x, t) \partial x = -m \cdot \partial x \cdot \ddot{u} \quad (24)$$

Que ao simplificar e derivar com relação a x , chega-se à expressão:

$$-q(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} - m \cdot \ddot{u} \quad (1)$$

Substituindo a equação (20) e a equação (21) na equação (1) e após algumas operações aritméticas decorre que:

$$\frac{EI \partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + P(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial P(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (25)$$

A equação (25) consiste em uma equação diferencial parcial de quarta ordem no espaço e de segunda ordem no tempo, descrita pela Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli e influenciada pela existência de uma carga axial, m é representado por $\rho x A$ sendo ρ a massa por comprimento da linha elástica e A a área da seção transversal (MACHADO et al., 2002; OLIVEIRA, 2015).

Assim obtém-se a equação de movimento para uma viga submetida à carga axial.

$$EIu^{IV} + Pu'' + P'u' + m\ddot{u} = q(x, t) \quad (26)$$

Até aqui, foi apresentada a equação de movimento para uma viga submetida à carga axial. Na sequência, será realizada uma solução numérica para a equação diferencial utilizando o Método de Galerkin. Ao utilizar o Método de Galerkin buscase uma solução de aproximação $\tilde{u}(x)$ da solução exata $u(x)$ cuja expansão de funções com

coeficientes gera um resíduo. Esses resíduos devem ser ponderados e o objetivo é fazer com que sejam o menor possível, utilizando a integral abaixo (KIM; SANKAR, 2011).

$$\int_0^L R(x) \phi_i(x) dx = 0, i = 1, \dots, N \quad (27)$$

Aplicando a equação (27) na equação (25), tem-se:

$$\int_0^L [EIu^{IV} + Pu'' + P'u' + m\ddot{u} - q(x, t)] \phi_i(x) dx = 0 \quad (28)$$

Realizando a multiplicação de cada parte da integral:

$$\begin{aligned} \int_0^L EI \frac{\partial^4 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^4} \phi_i(x) dx + \int_0^L P(x) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^2} \phi_i(x) dx \\ + \int_0^L \frac{dP(x)}{dx} \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} \phi_i(x) dx \\ + \int_0^L m \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial t^2} \phi_i(x) dx - \int_0^L q(x, t) \phi_i(x) dx \end{aligned} \quad (29)$$

Na sequência será resolvida cada integral da equação (29) individualmente.

$$\mathbf{a)} \int_0^L EI \partial^4 \tilde{u}(x, t) \phi_i(x) dx \quad (30)$$

Utilizando integração por partes fica:

$$\int_0^L (EI \tilde{u}^{IV}) \phi_i(x) dx = \phi_i(x) \left(EI \frac{\partial^3 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^3} \right) \Big|_0^L - \int_0^L \left(EI \frac{\partial^3 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^3} \right) \frac{d\phi_i(x)}{dx} dx = 0 \quad (31)$$

Aplicando novamente a integração por partes para a segunda parte da equação (31):

$$\phi_i(x) \cdot EI \frac{\partial^3 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^3} \Big|_0^L - \frac{d\phi_i(x)}{dx} EI \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^2} \Big|_0^L + \int_0^L EI \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^2} \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} dx = 0 \quad (32)$$

Da equação acima podemos destacar as seguintes equações: $EI \frac{\partial^3 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^3}$ e $EI \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^2}$ que estão contidas nas equações (21) e (22), respectivamente, e fazer a substituição que segue:

$$\begin{aligned} \phi_i(x) \left[-V(x, t) - P(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} \right] \Big|_0^L - M(x, t) \frac{d\phi_i(x)}{dx} \Big|_0^L \\ + \int_0^L EI \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^2} \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} dx = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

que ao ser desenvolvida fica:

$$\begin{aligned} -[V(L)\phi_i(L) + V(0)\phi_i(0)] - P(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} \phi_i(x) \Big|_0^L \\ - \left[M(L) \frac{d\phi_i(L)}{dx} - M(0) \frac{d\phi_i(0)}{dx} \right] + \int_0^L EI \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^2} \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} dx = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Segue a resolução da segunda parte da Equação (29):

$$b) \int_0^L P(x) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^2} \phi_i(x) dx \quad (35)$$

Após realizar a integração por partes a Equação (35) resulta em:

$$\left[P(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} \phi_i(x) \right]_0^L - \int_0^L \frac{dP(x)}{dx} \phi_i(x) \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} dx - \int_0^L P(x) \frac{d\phi_i(x)}{dx} \frac{d\tilde{u}(x, t)}{dx} dx \quad (36)$$

Da mesma forma, para a terceira integral da Equação (29):

$$c) \int_0^L \frac{dP(x)}{dx} \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} \phi_i(x) dx \quad (37)$$

e com a utilização da integração por partes, tem-se como resultado:

$$\left[\frac{dP(x)}{dx} \tilde{u}(x,t) \phi_i(x) \right]_0^L - \int_0^L \frac{dP(x)}{dx} \frac{d\phi_i(x)}{dx} \tilde{u}(x,t) dx - \int_0^L \frac{dP^2(x)}{dx^2} \phi_i(x) \tilde{u}(x,t) dx \quad (38)$$

Para a viga a ser analisada, é necessário encontrar uma função que possa descrever a configuração deformada de um elemento, submetido a um deslocamento nodal, simples e unitário. Na Figura 11, é demonstrado um elemento finito de viga sujeito às condições citadas. Para o trecho de viga de comprimento L , ilustrado na Figura 11, inicialmente, é apresentada uma função aproximadora de terceiro grau que está em função dos parâmetros A, B, C e D.

Figura 11 – Elemento finito de viga com seus graus de liberdade



Fonte: A autora, 2020

A função aproximadora é dada a seguir:

$$\tilde{u}(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \quad (39)$$

cuja derivada é dada por:

$$\tilde{u}'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 \quad (40)$$

Com as seguintes condições de contorno, segundo os graus de liberdade apresentados na Figura 11:

$$\begin{cases} \tilde{u}(0) = \mu_i & \tilde{u}'(0) = \mu_i' \\ \tilde{u}(L) = \mu_j & \tilde{u}'(L) = \mu_j' \end{cases} \quad (41)$$

Após a aplicação das condições de contorno, a função de forma será escrita em função dos deslocamentos nodais ficando da seguinte forma:

$$\tilde{u}(x) = \mu_i \phi_1(x) + \mu_i' \phi_2(x) + \mu_j \phi_3(x) + \mu_j' \phi_4(x) \quad (42)$$

sendo as funções de forma:

$$\begin{cases} \phi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \phi_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \phi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \phi_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{cases} \quad (43)$$

Além disso, considera-se que o carregamento varia linearmente no elemento, de acordo com a seguinte equação:

$$P(x) = b_0 + b_1 x \quad (44)$$

sendo o coeficiente linear, o carregamento correspondente ao nó i .

$$b_0 = p_i \quad (45)$$

e o coeficiente angular dado pela diferença dos carregamentos entre o nó final e inicial ao longo do comprimento L .

$$b_1 = \frac{p_j - p_i}{L} \quad (46)$$

A fim de interpolar os deslocamentos e rotações, será feita a montagem

das matrizes a partir das funções de forma e levando em consideração que o carregamento varia linearmente.

Da integral da Equação (30) formar-se-á a matriz elástica do elemento:

$$K_e = \int_0^L EI \phi_j''(x) \phi_i''(x) dx = 0 \quad (47)$$

Que matricialmente, após aplicar as funções de forma, pode ser representada:

$$[K_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Além disso, da primeira parte da equação (34), é possível definir o vetor de forças nodais.

$$\{f_n\} = \begin{bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{bmatrix} \quad (49)$$

Da última integração da Equação (36) é possível retirar a matriz de rigidez geométrica, conforme segue:

$$\int_0^L P(x) \phi_i' \phi_j' dx \quad (50)$$

$$K_{ge} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5.L} \cdot (p_j + p_i) & \frac{1}{10} \cdot p_j & -\frac{3}{5.L} \cdot (p_j + p_i) & \frac{1}{10} \cdot p_i \\ \frac{1}{10} \cdot p_j & \frac{1}{30} \cdot L \cdot p_j + \frac{1}{10} \cdot p_i \cdot L & -\frac{1}{10} \cdot p_j & -\frac{1}{60} \cdot L \cdot p_j - \frac{1}{60} \cdot p_i \cdot L \\ -\frac{3}{5.L} \cdot (p_j + p_i) & -\frac{1}{10} \cdot p_j & \frac{3}{5.L} \cdot (p_j + p_i) & -\frac{1}{10} \cdot p_i \\ \frac{1}{10} \cdot p_i & -\frac{1}{60} \cdot L \cdot p_j - \frac{1}{60} \cdot p_i \cdot L & -\frac{1}{10} \cdot p_i & \frac{1}{10} \cdot L \cdot p_j + \frac{1}{30} \cdot p_i \cdot L \end{bmatrix} \quad (51)$$

Já para a seguinte integral da equação (36).

$$\int_0^L P'(x) \phi_i \phi_j' dx \quad (52)$$

tem-se a seguinte matriz:

$$K_{ge1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \frac{p_j - p_i}{L} & \frac{1}{10} \cdot p_j - \frac{1}{10} \cdot p_i & \frac{1}{2} \cdot \frac{p_j - p_i}{L} & -\frac{1}{10} \cdot p_j + \frac{1}{10} \cdot p_i \\ -\frac{1}{10} \cdot p_j + \frac{1}{10} \cdot p_i & 0 & \frac{1}{10} \cdot p_j - \frac{1}{10} \cdot p_i & -\frac{1}{60} \cdot L \cdot p_j + \frac{1}{60} \cdot p_i \cdot L \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{p_j - p_i}{L} & -\frac{1}{10} \cdot p_j + \frac{1}{10} \cdot p_i & \frac{1}{2} \cdot \frac{p_j - p_i}{L} & \frac{1}{10} \cdot p_j - \frac{1}{10} \cdot p_i \\ \frac{1}{10} \cdot p_j - \frac{1}{10} \cdot p_i & \frac{1}{60} \cdot L \cdot p_j - \frac{1}{60} \cdot p_i \cdot L & -\frac{1}{10} \cdot p_j + \frac{1}{10} \cdot p_i & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

O mesmo foi realizado para a equação (38).

$$\int_0^L P'(x) \phi_i' \phi_j dx \quad (54)$$

resultando em:

$$K_{ge2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \frac{p_j - p_i}{L} & -\frac{1}{10} \cdot p_j + \frac{1}{10} \cdot p_i & -\frac{1}{2} \cdot \frac{p_j - p_i}{L} & \frac{1}{10} \cdot p_j - \frac{1}{10} \cdot p_i \\ \frac{1}{10} \cdot p_j - \frac{1}{10} \cdot p_i & 0 & -\frac{1}{10} \cdot p_j + \frac{1}{10} \cdot p_i & \frac{1}{60} \cdot L \cdot p_j - \frac{1}{60} \cdot p_i \cdot L \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{p_j - p_i}{L} & \frac{1}{10} \cdot p_j - \frac{1}{10} \cdot p_i & \frac{1}{2} \cdot \frac{p_j - p_i}{L} & -\frac{1}{10} \cdot p_j + \frac{1}{10} \cdot p_i \\ -\frac{1}{10} \cdot p_j + \frac{1}{10} \cdot p_i & -\frac{1}{60} \cdot L \cdot p_j + \frac{1}{60} \cdot p_i \cdot L & \frac{1}{10} \cdot p_j - \frac{1}{10} \cdot p_i & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

O último termo da equação (38), dado pela integral abaixo irá gerar uma matriz nula, pois, ao considerar o carregamento linear, a, segunda derivada da função é igual a zero devido a força axial dentro de elemento ser considerada linear.

$$\int_0^L P''(x) \phi_i \phi_j dx \quad (56)$$

A soma das três matrizes acima resulta em uma matriz geométrica:

$$K_{t1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \cdot \frac{p_j - 4p_i}{L} & \frac{1}{10} \cdot p_j & -\frac{3}{5} L \cdot (p_j + p_i) & \frac{1}{10} \cdot p_i \\ \frac{1}{10} \cdot p_j & \frac{1}{30} \cdot L \cdot p_j + \frac{1}{10} \cdot p_i \cdot L & -\frac{1}{10} \cdot p_j & -\frac{1}{60} \cdot L \cdot p_j - \frac{1}{60} \cdot p_i \cdot L \\ -\frac{3}{5} L \cdot (p_j + p_i) & -\frac{1}{10} \cdot p_j & \frac{2}{5} \cdot \frac{4p_j - p_i}{L} & -\frac{1}{10} \cdot p_i \\ \frac{1}{10} \cdot p_i & -\frac{1}{60} \cdot L \cdot p_j - \frac{1}{60} \cdot p_i \cdot L & -\frac{1}{10} \cdot p_i & \frac{1}{10} \cdot L \cdot p_j + \frac{1}{30} \cdot p_i \cdot L \end{bmatrix} \quad (57)$$

A matriz dada acima, é usada quando se considera que a força não é constante ao longo do elemento, ou seja, quando as forças nos nós i e j são diferentes. Entretanto, se as cargas forem iguais e a variação constante dentro do elemento, tem-se:

$$K_t = \begin{bmatrix} \frac{6}{5 \cdot L} \cdot p_i & \frac{1}{10} \cdot p_i & -\frac{6}{5 \cdot L} \cdot p_i & \frac{1}{10} \cdot p_i \\ \frac{1}{10} \cdot p_i & \frac{2}{15} \cdot p_i \cdot L & -\frac{1}{10} \cdot p_i & -\frac{1}{30} \cdot p_i \cdot L \\ -\frac{6}{5 \cdot L} \cdot p_i & -\frac{1}{10} \cdot p_i & \frac{6}{5 \cdot L} \cdot p_i & -\frac{1}{10} \cdot p_i \\ \frac{1}{10} \cdot p_i & -\frac{1}{30} \cdot p_i \cdot L & -\frac{1}{10} \cdot p_i & \frac{2}{15} \cdot p_i \cdot L \end{bmatrix} \quad (58)$$

Dos primeiros termos das equações (36) e (38), podem ser obtidos dois vetores de cortante. Estes vetores terão seus valores anulados no interior do elemento, mas surgem nos apoios. Esses cortantes devem ser considerados no caso de análise estática, no caso da análise dinâmica para obter parâmetros modais eles não teriam influência.

Da equação (36):

$$\int_0^L P(x) \phi_i \phi_j' dx \quad (59)$$

cujo vetor da cortante é dado por:

$$\begin{aligned} P(L) \cdot (du(L)) \cdot \phi(L)_{0,0} - P(0) \cdot (du(0)) \cdot \phi(0)_{0,0} &\rightarrow (-p_i) \cdot u_2 \\ P(L) \cdot (du(L)) \cdot \phi(L)_{1,0} - P(0) \cdot (du(0)) \cdot \phi(0)_{1,0} &\rightarrow 0 \\ P(L) \cdot (du(L)) \cdot \phi(L)_{2,0} - P(0) \cdot (du(0)) \cdot \phi(0)_{2,0} &\rightarrow p_j \cdot u_4 \\ P(L) \cdot (du(L)) \cdot \phi(L)_{3,0} - P(0) \cdot (du(0)) \cdot \phi(0)_{3,0} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Para o seguinte termo da equação (38):

$$\left[\frac{dP(x)}{dx} \tilde{u}(x, t) \phi_i(x) \right]_0^L \quad (61)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} dP(L) \cdot (u(L)) \cdot \phi(L)_{0,0} - dP(0) \cdot (u(0)) \cdot \phi(0)_{0,0} &\rightarrow -\frac{(p_j - p_i)}{L} \cdot u_1 \\ dP(L) \cdot (u(L)) \cdot \phi(L)_{1,0} - dP(0) \cdot (u(0)) \cdot \phi(0)_{1,0} &\rightarrow 0 \\ dP(L) \cdot (u(L)) \cdot \phi(L)_{2,0} - dP(0) \cdot (u(0)) \cdot \phi(0)_{2,0} &\rightarrow \frac{p_j - p_i}{L} \cdot u_3 \\ dP(L) \cdot (u(L)) \cdot \phi(L)_{3,0} - dP(0) \cdot (u(0)) \cdot \phi(0)_{3,0} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (62)$$

Continuando a resolução da equação (29):

$$d) M_{ij} = \int_0^L m \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, t)}{\partial t^2} \phi_i dx = 0 \quad (63)$$

Essa equação origina a matriz de massa.

$$M_{ij} = \int_0^L m \phi_i(x) dx = 0 \quad (64)$$

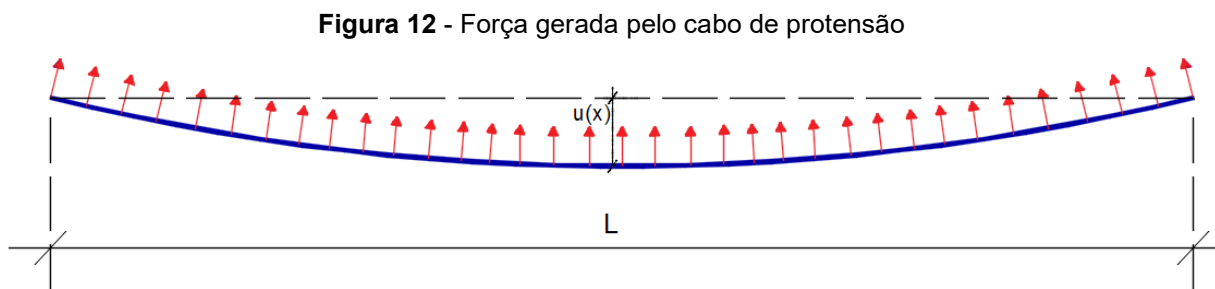
A matriz de massa é dada por:

$$[M_{ij}] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Definida a matriz de massa dos elementos e utilizando a mesma metodologia utilizada na montagem da matriz de rigidez global, é possível obter a matriz de massa da estrutura (VAZ, 2011).

3.2 ANÁLISE INCLUINDO O EFEITO DA PRESENÇA DOS CABOS

Para definir a possível contribuição do aumento de rigidez devido à presença do cabo, será considerado o trabalho que gera uma força distribuída equivalente transversal à viga, devido ao momento do cabo, quando a viga está na condição deformada. Inicialmente, podemos considerar um cabo concêntrico com uma restrição axial e vertical nos extremos e que eventualmente será deformado transversalmente pela deformação da viga, como mostrado na Figura 12.



Fonte: A autora, 2020

O momento do cabo, dado quando a viga estaria na condição deformada, é:

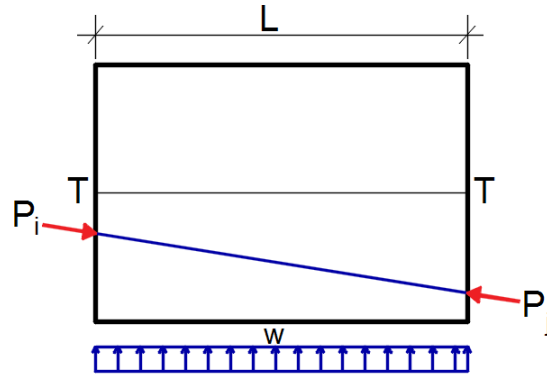
$$M(x) = P(x)u(x) \quad (66)$$

Em que, $P(x)$ é a força do cabo variando ao longo da viga e $u(x)$ é o deslocamento transversal da viga. É notável que a componente que realmente aplica o momento é a componente horizontal da força $P(x)$, portanto, deveria ser $P(x)\cos(\alpha)$, sendo alfa o ângulo de inclinação do cabo, no entanto, será considerado alfa como um ângulo pequeno, aproximando $P(x)\cos(\alpha) \approx P(x)$. Dessa forma, a segunda derivada do momento define uma carga distribuída equivalente transversal $w(x)$ igual a:

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = w(x) = \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} u(x) + \frac{2\delta P(x)}{\delta x} \frac{\delta u(x)}{\delta x} + P(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial u^2} \quad (67)$$

Considerando uma seção da viga e uma variação linear da força de protensão com mostrado na Figura 13.

Figura 13 - Variação linear da força de protensão



Fonte: A autora, 2020

a carga equivalente $w(x)$ fica:

$$w(x) = 2 \frac{\delta P(x)}{\delta x} \frac{\delta u(x)}{\delta x} + P(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \quad (68)$$

Assim, o trabalho devido à carga transversalmente equivalente $w(x)$ é dado por:

$$\pi = \int_0^L w(x)u(x)dx = \int_0^L (2P'(x)u'(x) + P(x)u''(x)).u(x)dx \quad (69)$$

Utilizando a aproximação da deformada e os parâmetros nodais de um elemento, bem como as funções de forma, tem-se:

$$u(x) = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4] \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u_j \\ u'_j \end{bmatrix} = [\phi]\{\delta\} \quad (70)$$

Dessa forma, o trabalho é dado por:

$$\pi = \int_0^L (2P'(x)[\phi']\{\delta\} + P(x)[\phi'']\{\delta\})[\phi]\{\delta\}dx \quad (71)$$

Minimizando o trabalho, podemos encontrar uma expressão que define a

matriz de rigidez da presença do cabo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta \pi}{\delta u_i} \\ \frac{\delta \pi}{\delta u'_i} \\ \frac{\delta \pi}{\delta u_j} \\ \frac{\delta \pi}{\delta u'_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u_j \\ u'_j \end{bmatrix} = [K_{t2}] \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u_j \\ u'_j \end{bmatrix} \quad (72)$$

Cada um dos termos da matriz de rigidez K_{t2} são iguais a:

$$k_{11} = \int_0^{Li} 2\phi_1(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\phi_1(x)) + 2 \frac{d}{dx}(P(x)) \cdot \frac{d}{dx}(\phi_1(x)) \right] dx \quad (73)$$

$$\begin{aligned} k_{12} = \int_0^{Li} & \left[\phi_2(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\phi_1(x)) + 2 \frac{d}{dx}(P(x)) \cdot \frac{d}{dx}(\phi_1(x)) \right] \right. \\ & \left. + \phi_1(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\phi_2(x)) + 2 \frac{d}{dx}(P(x)) \cdot \frac{d}{dx}(\phi_2(x)) \right] \right] dx \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} k_{13} = \int_0^{Li} & \left[\phi_3(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\phi_1(x)) + 2 \frac{d}{dx}(P(x)) \cdot \frac{d}{dx}(\phi_1(x)) \right] \right. \\ & \left. + \phi_1(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\phi_3(x)) + 2 \frac{d}{dx}(P(x)) \cdot \frac{d}{dx}(\phi_3(x)) \right] \right] dx \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} k_{14} = \int_0^{Li} & \left[\phi_4(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\phi_1(x)) + 2 \frac{d}{dx}(P(x)) \cdot \frac{d}{dx}(\phi_1(x)) \right] \right. \\ & \left. + \phi_1(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\phi_4(x)) + 2 \frac{d}{dx}(P(x)) \cdot \frac{d}{dx}(\phi_4(x)) \right] \right] dx \end{aligned} \quad (76)$$

$$k_{22} = \int_0^{Li} 2\phi_2(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\phi_2(x)) + 2 \frac{d}{dx}(P(x)) \cdot \frac{d}{dx}(\phi_2(x)) \right] dx \quad (77)$$

$$k_{23} = \int_0^{Li} \left[\phi_2(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} (\phi_3(x)) + 2 \frac{d}{dx} (P(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\phi_3(x)) \right] \right. \\ \left. + \phi_3(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} (\phi_2(x)) + 2 \frac{d}{dx} (P(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\phi_2(x)) \right] \right] dx \quad (78)$$

$$k_{24} = \int_0^{Li} \left[\phi_2(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} (\phi_4(x)) + 2 \frac{d}{dx} (P(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\phi_4(x)) \right] \right. \\ \left. + \phi_4(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} (\phi_2(x)) + 2 \frac{d}{dx} (P(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\phi_2(x)) \right] \right] dx \quad (79)$$

$$k_{33} = \int_0^{Li} 2\phi_3(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} (\phi_3(x)) + 2 \frac{d}{dx} (P(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\phi_3(x)) \right] dx \quad (80)$$

$$k_{34} = \int_0^{Li} \left[\phi_4(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} (\phi_3(x)) + 2 \frac{d}{dx} (P(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\phi_3(x)) \right] \right. \\ \left. + \phi_3(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} (\phi_4(x)) + 2 \frac{d}{dx} (P(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\phi_4(x)) \right] \right] dx \quad (81)$$

$$k_{44} = \int_0^{Li} 2\phi_4(x) \cdot \left[P(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} (\phi_4(x)) + 2 \frac{d}{dx} (P(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\phi_4(x)) \right] dx \quad (82)$$

Resolvendo essas integrais obtemos a seguinte matriz de rigidez para o cabo:

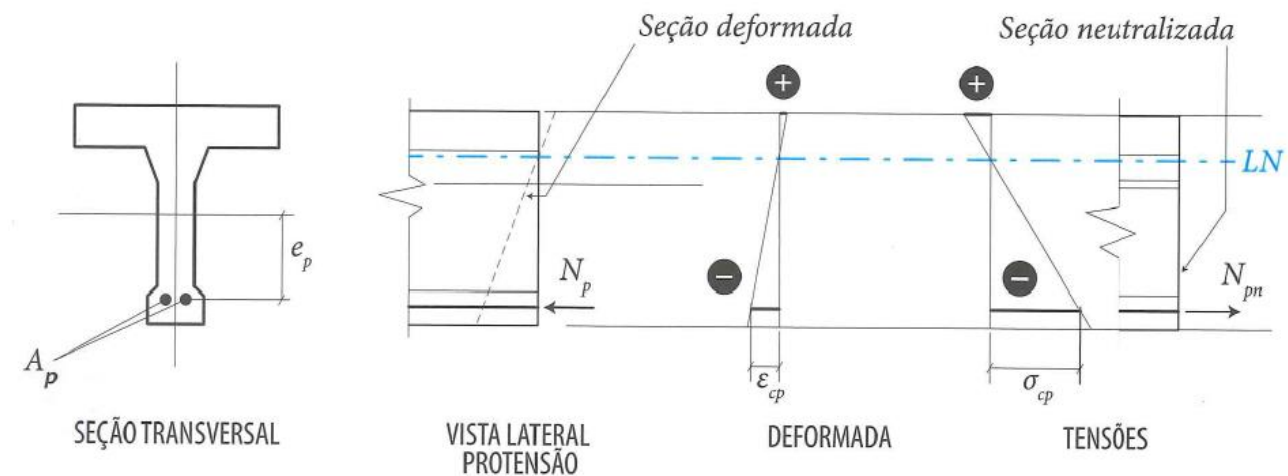
$$[K_{t2}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \cdot \frac{11 \cdot pj + pi}{Li} & -\frac{1}{5} \cdot pj - pi & \frac{6}{5 \cdot Li} \cdot (pj + pi) & -\frac{1}{5} \cdot pi \\ -\frac{1}{5} \cdot pj - pi & -\frac{1}{15} \cdot Li \cdot pj - \frac{1}{5} \cdot Li \cdot pi & \frac{1}{5} \cdot pj & \frac{1}{30} \cdot Li \cdot pj + \frac{1}{30} \cdot Li \cdot Pi \\ \frac{6}{5 \cdot Li} \cdot (pj + pi) & \frac{1}{5} \cdot pj & -\frac{1}{5 \cdot Li} \cdot (pj + 11 \cdot pi) & pj + \frac{1}{5} \cdot pi \\ -\frac{1}{5} \cdot pi & \frac{1}{30} \cdot Li \cdot pj + \frac{1}{30} \cdot Li \cdot Pi & pj + \frac{1}{5} \cdot pi & -\frac{1}{5} \cdot Li \cdot pj - \frac{1}{15} \cdot Li \cdot pi \end{bmatrix} \quad (83)$$

Sendo esta matriz de rigidez definida pela relação entre a força proveniente do cabo de protensão e seus deslocamentos correspondentes.

3.3 ESTADO NEUTRALIZADO DE TENSÕES NOS CABOS

Quando a viga é submetida às cargas de protensão, estas geram tensões internas que, por sua vez, sofrem o efeito das perdas imediatas (no instante da protensão) e das perdas progressivas (que acontecem ao longo da vida útil da estrutura). Portanto, para estabelecer um valor real das perdas de protensão deve ser estabelecido uma hipótese de um estado neutralizado da seção protendida (sem tensões), que não deve incluir perdas, representado pela tensão normal nula na seção de concreto na posição correspondente ao centro de gravidade dos cabos de protensão, conforme a Figura 14.

Figura 14 - Efeito da protensão / obtenção da neutralização



Fonte: CHOLFE; BONILHA, 2013.

Dessa forma temos que definir uma força que anula a tensão no centro de gravidade dos cabos, N_{pn} .

$$P_n = P_p + \Delta P_p \quad (84)$$

Em que P_p é a força de protensão aplicada, ΔP_p é a parcela de força que recupera a deformação no centro de gravidade do cabo. Para um elemento discreto do modelo de elementos finitos temos, o força inicial i e final j , dadas como:

$$\begin{aligned}(P_n)_i &= (P_p)_i + (\Delta P_p)_i \\ (P_n)_j &= (P_p)_j + (\Delta P_p)_j\end{aligned}\tag{85}$$

A parcela de força $(\Delta N_p)_i$ e $(\Delta N_p)_j$ são definidas como (CHOLFE; BONILHA, 2013):

$$\begin{aligned}(\Delta P_p)_i &= \frac{(P_p)_i}{A_c} + \frac{(P_p)_i e_i^2}{I_c} + \frac{M_i e_i}{I_c} \\ (\Delta P_p)_j &= \frac{(P_p)_j}{A_c} + \frac{(P_p)_j e_j^2}{I_c} + \frac{M_j e_j}{I_c}\end{aligned}\tag{86}$$

Em que, A_c é área da seção, I_c é o momento de inercia, M_i, M_j, e_i, e_j são momento devido a peso próprio da viga e excentricidades dos cabos, iniciais e finais do elemento, respetivamente. Dessa forma, as forças de protensão aplicadas nos cabos são modificadas nas matrizes de rigidez $[K_{t1}]$ e $[K_{t2}]$ utilizando estas formulações com o intuito de obter um estado nulo de tensões no centro de gravidade dos cabos sem a inclusão de perdas.

3.4 ANÁLISE MODAL DO MODELO NUMÉRICO COM CABO

Finalmente, a equação matricial do equilíbrio dinâmico é dada por:

$$[M_e]\{u(\ddot{t})\} + [[K_e] + [K_{t1}] + [K_{t2}]]\{u(t)\} = \{F_e(t)\}\tag{87}$$

Em que $[M_e]$ é matriz de massa, $[K_e]$ é matriz elástica, $[K_{t1}]$ é a matriz devido ao efeito de carga axial do cabo, $[K_{t2}]$ é matriz que introduz o efeito da presença do cabo. Para estudar a vibração natural da estrutura o vetor de cargas $\{F_e(t)\}$ aplicado na estrutura deve ser nulo e é suposto que o vetor de deslocamentos nodais pode expressar-se da forma:

$$\{u(t)\} = \{A\}\sin(\omega t + \phi)\tag{88}$$

Ao substituir a equação (88) na equação (87) é obtido:

$$([K_e] + [K_{t1}] + [K_{t2}] - \omega_{pn}^2[M_e])\{\phi_{pn}\} = 0 \quad (89)$$

A equação (89) representa um sistema de equações homogêneo que pode ser representado como um problema de autovalores. Os autovalores ω_{pn} representam as frequências naturais e ϕ_{pn} representam os modos de vibração para a viga considerando o efeito conjunto da carga de protensão e presença do cabo.

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DE MODELOS TESTADOS EM EXPERIMENTOS DA LITERATURA

Neste capítulo, analisam-se os resultados experimentais encontrados na literatura para vigas biapoiadas de concreto protendido. Os exemplos apresentados, têm como objetivo a validação do modelo de elementos finitos proposto, cuja formulação encontra-se no Capítulo 3.

Com o intuito de encontrar as frequências naturais, realiza-se uma análise modal definida por seus autovalores (frequência natural) e autovetores (modos de vibração) de vigas biapoiadas de seção retangular. A viga foi discretizada em vinte elementos, com três graus de liberdade por nó.

A fim de padronizar todos os exemplos para as variáveis desconhecidas, para efeito de cálculo, foram adotadas as recomendações da NBR 6118 (ABNT, 2014). Para o aço da armadura, na falta de dados específicos, considera-se para a massa específica o valor de 7860 kg/m³ e 210 GPa para o módulo de elasticidade. Para o concreto, a massa específica adotada é de 2500 kg/m³.

Na posse desses dados, é calculada a densidade do material combinada entre o concreto e os cabos, por meio do somatório da multiplicação da densidade de cada um dos materiais pelo seu volume, divididos pelo volume total da viga, conforme a equação (90).

$$rot = \frac{roc.A.L + Ncabos.rop.Ap.L}{A.L} \quad (90)$$

sendo rot a densidade combinada, roc a massa específica do concreto, A área da viga dada pela multiplicação da base pela altura, L o comprimento da viga, $Ncabos$ o número de cabos utilizados na protensão, rop a massa específica do aço e Ap a área do aço dos cabos, calculada pela equação (91).

$$Ap = \frac{\pi.phip^2}{4} \quad (91)$$

onde $phip$ é o diâmetro nominal do cabo de protensão.

A calibração do modelo é feita por meio de uma formulação dada pela NBR 6118 (ABNT, 2014) que, na ausência de ensaios experimentais, relaciona o módulo de

elasticidade (E_{ci}) e a resistência à compressão do concreto aos 28 dias (f_{ck}). O valor estimado para o módulo de elasticidade inicial é dado pela expressão a seguir:

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (92)$$

sendo α_E um parâmetro que depende da natureza do agregado do concreto. Para o modelo utilizado neste trabalho, adotou-se o valor de 1,0 indicado para granito e gnaiss. A calibração do módulo de elasticidade no modelo de elementos finitos foi realizada ajustando a primeira frequência natural do modelo ao valor estimado no ensaio experimental.

Na análise dos dados experimentais, leva-se em conta que a força de protensão reportada é transmitida de forma uniforme ao longo do cabo e que não são tidas em conta as possíveis perdas imediatas por atrito, ancoragem e encurtamento do concreto. Assim, a comparação entre frequências naturais experimentais e numéricas para diferentes níveis de força de protensão é apresentada e discutida a seguir.

4.1 COMPARAÇÃO COM TESTES DE SAIIDI ET AL (1994)

Para o teste de vibração livre realizado por Saiidi et al. (1994), uma viga de concreto protendido foi instrumentada com sete acelerômetros equidistantes para medir a resposta ao impacto dinâmico realizado após a aplicação da força de protensão desejada. O concreto foi feito com cimento Portland tipo II com agregados de no máximo 12,7mm. Sua resistência a compressão aos 28 dias foi de 20,3 MPa

A viga com 3,66 m de comprimento, seção transversal de 0,102 m de base e 0,127 m de altura é protendida por um cabo reto de 12,7 mm de diâmetro, posicionado no centroide da seção. Os dados de entrada para o modelo estão na Tabela 1.

Tabela 1 - Dados de entrada do modelo

Variável	Valor
Diâmetro - ϕ_{hip} (mm)	12,7
Base - b (m)	0,102
Altura - h (m)	0,127
Comprimento - L	3,66
Nº de cabos	1,00
Excentricidade (m)	0,00
fck (MPa)	10,51

Fonte: A autora, 2020

Para cada valor de força de protensão aplicada em kN, foram medidas as frequências naturais correspondentes para o primeiro (f1) e segundo modos (f2), dadas em hertz, sendo que a calibração do módulo de elasticidade é realizada apenas para a primeira frequência.

Além disso, para fins de comparação entre os diferentes trabalhos experimentais que serão discutidos e analisados na sequência e objetivando parametrizar a influência da força de protensão aplicada na frequência natural, será também contabilizada e apresentada em tabela o quanto a força de protensão aplicada equivale, em porcentagem, em relação à carga crítica.

Também será calculado o erro percentual entre o valor da frequência natural obtido experimentalmente e apresentado no artigo citado e o valor encontrado pelo modelo proposto, segundo a equação:

$$erro(\%) = \frac{f_{modelo} - f_{artigo}}{f_{artigo}} \cdot 100 \quad (93)$$

A Tabela 2 mostra a comparação entre os valores encontrados por Saiidi et al. (1994) e os valores obtidos pelo modelo proposto.

Tabela 2 - Comparação entre as frequências naturais obtidas experimentalmente por Saiidi et al. (1994) e pelo modelo proposto para os dois primeiros modos

% em relação a Pcr	Força de Protensão (kN)	1° Modo			2° Modo		
		f1 (Hz) Artigo	f1 (Hz) Modelo	Erro1 (%)	f2 (Hz) Artigo	f2 (Hz) Modelo	Erro2 (%)
0,00	0,000	11,410	11,4109	0,01	43,99	45,35234	3,10
11,48	26,732	13,470	12,1180	10,04	44,89	46,10227	2,70
24,29	56,579	14,150	12,8616	9,11	45,71	46,92542	2,66
34,72	80,864	14,490	13,4363	7,27	45,57	47,58468	4,42
51,55	120,051	14,720	14,3150	2,75	45,86	48,62964	6,04
55,56	129,392	14,970	14,5167	3,03	46,10	48,87542	6,02
56,36	131,261	15,070	14,5567	3,41	45,87	48,92445	6,66

Fonte: adaptado de SAIIDI et al., 1994

Pela Tabela 2, é possível perceber claramente que a frequência natural aumentou à medida que houve um aumento da força de protensão aplicada, sendo este incremento, mais significativo para os primeiros níveis de carregamento. O carregamento

total aplicado em laboratório foi equivalente a 56,36% da carga crítica à compressão axial da viga, que resultou em um aumento de 32,08% na frequência natural para o primeiro modo e de 4,27% para o segundo modo. Para os resultados do modelo proposto, um carregamento equivalente a 56,36% da carga crítica decorreu-se um aumento de 27,57% e 7,88% da frequência natural para o primeiro e segundo modos, respectivamente.

A partir da Tabela 2 pode-se notar que utilizando os ensaios de Saiidi et al. (1994), os valores obtidos pelo modelo proposto são próximos aos medidos experimentalmente tanto na primeira frequência natural como na segunda, conseguindo um erro médio de 5,09% e 4,51%, respectivamente.

O autor descreveu que, durante o manuseio da viga, houve a formação de uma fissura devido ao peso próprio na seção central. Diante disso, cabe ressaltar que ao realizar a calibração do modelo, estão sendo inclusas as possíveis perdas de rigidez que possam ocorrer por fissuras, ou seja, o processo de calibração do módulo de elasticidade na primeira frequência distribui a diminuição da rigidez ao longo da viga. Isto, entretanto, não seria exatamente o fenômeno que está acontecendo já que a perda de rigidez é localizada no meio do vão.

O modelo proposto tem a possibilidade de incluir o efeito da excentricidade do cabo de protensão na frequência natural de uma viga de concreto protendido submetida a diferentes valores de força de protensão. Estudos como o de Noble et al. (2015), avaliaram o efeito da magnitude da força de protensão e a excentricidade do cabo sobre a frequência natural de nove vigas de concreto protendido e verificaram que à medida que a excentricidade foi aumentada, a frequência natural também aumentou.

Similiarmente ao trabalho citado e, com o objetivo de avaliar o efeito da excentricidade do cabo de protensão na viga do ensaio de Saiidi et al. (1994), fez-se a simulação considerando uma excentricidade de 2 cm em relação ao centroide e o resultado é apresentado na **Tabela 3**.

Tabela 3 - Avaliação do efeito da excentricidade nas frequências naturais

Força (kN)	f1 (artigo)	f1 (modelo)	e=2cm/h=4.35
0,00	11,410	11,4109	11,4108
26,73	13,470	12,1180	12,1386
56,58	14,150	12,8616	12,9028
80,86	14,490	13,4363	13,4927
120,05	14,720	14,3150	14,3937
129,39	14,970	14,5167	14,6003
131,26	15,070	14,5567	14,6412

Fonte: A autora, 2020

Como é possível observar na Tabela 3, sob as mesmas condições de operação da força de protensão, ao aumentar a excentricidade do cabo de protensão, a frequência natural também aumentou. A tendência de aumento da frequência natural com a excentricidade do cabo de protensão, também foi encontrada no trabalho de Li e Zhang (2016). Desafortunadamente, não existem experimentos em que, com a mesma viga possam se realizar teste com e sem excentricidades.

Para este exemplo, a força de protensão aplicada foi equivalente a 56,36% da carga crítica, visto que, testar em laboratório carregamentos próximos ao carregamento crítico poderia gerar instabilidade na estrutura. Logo, com o objetivo de ver a mudança na frequência natural para carregamentos maiores, fez-se uma simulação com a força de protensão variando de 0% até 99,9% da carga crítica, e as respectivas frequências naturais estão na Tabela 4.

Tabela 4 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica

% em relação ao Pcr	Pcr	f1 (Hz) Modelo	Varição Percentual da Frequência Natural
0	0	11,4109	-
11,1	25851,16	12,0953	5,66%
22,2	51702,32	12,7430	5,08%
33,3	77553,48	13,3594	4,61%
44,4	103404,6	13,9485	4,22%
55,5	129255,8	14,5137	3,89%
66,6	155107	15,0578	3,61%
77,7	180958,1	15,5828	3,37%
88,8	206809,3	16,0908	3,16%
99,9	232660,4	16,5832	2,97%

Fonte: A autora, 2020

Se a força de protensão aplicada fosse equivalente a 99,9% da carga crítica (232,660 kN) a frequência natural sofreria uma variação de 45,33% quando comparada à viga sem a aplicação da força de protensão.

Para as primeiras forças de protensão, a variação da frequência foi maior que 5%, entretanto, à medida que o carregamento é aumentado, o incremento na frequência natural vai diminuindo. Ou seja, em uma situação hipotética, ainda que aumentasse significativamente o valor da protensão, pouca variação seria observada na frequência natural para estes valores mais altos.

4.2 COMPARAÇÃO COM TESTES DE ZHANG E LI (2007 APUD BRECCOLOTTI, 2018)

Zhang e Li (2007 apud BRECCOLOTTI, 2018), testaram uma viga retangular com cabo de protensão não aderente e linear. A viga possuía apoio simples, com seção transversal de 0,12 m de base e 0,24 m de altura, com um comprimento total de 3,9 m. A protensão foi feita por um cabo reto de 15,2 mm de diâmetro, enquanto a armadura de reforço foi formada por duas barras de 8 mm de diâmetro na parte superior, duas barras de 12 mm na parte inferior e estribos de 6 mm de diâmetro espaçados a cada 15 cm ao longo da viga. Os valores das variáveis inseridas no modelo proposto são dados na Tabela 5.

Tabela 5 - Variáveis a serem inseridas no modelo

Variável	Valor
Diâmetro - ϕ_{hip} (mm)	0,0152
Base - b (m)	0,12
Altura - h (m)	0,24
Comprimento - L	3,90
N° de cabos	1,00
Excentricidade (m)	0,00
fck (MPa)	51,16

Fonte: A autora, 2020

Como na seção anterior, para obter as frequências naturais sob vários valores de força de protensão, com base no modelo de elementos finitos proposto, inicialmente é feita a comparação com os valores experimentais da literatura. Os resultados são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Zhang e Li (2007 apud BRECCOLOTTI, 2018), e numéricas para diferentes forças de protensão

% em relação a P_{cr}	Força de Protensão (kN)	1° Modo			2° Modo		
		f1 (Hz) Artigo	f1 (Hz) Modelo	Erro1 (%)	f2 (Hz) Artigo	f2(Hz) Modelo	Erro2 (%)
0,00	0,00	28,360	28,3602	0,00	100,71	113,4413	12,64
0,56	20,00	28,360	28,4416	0,29	102,67	113,5229	10,57
1,11	40,00	28,830	28,5228	1,07	103,09	113,6043	10,20
1,67	60,00	29,320	28,6037	2,44	104,07	113,6857	9,24
2,23	80,00	29,480	28,6845	2,70	105,05	113,767	8,30
2,78	100,00	29,690	28,7650	3,12	105,05	113,8483	8,38
3,34	120,00	29,800	28,8452	3,20	105,53	113,9295	7,96

Fonte: adaptado de ZHANG E LI, 2007, apud BRECCOLOTTI, 2018

Neste caso, também é possível notar que a frequência natural aumenta à medida que a força de protensão aumenta. Entretanto, o carregamento aplicado em laboratório corresponde à apenas 3,34% da carga crítica e a frequência teve um incremento de 5,077% no ensaio experimental e de 1,71% no modelo para o primeiro modo. Neste caso, foram obtidos erros médios do modelo de 1,83% e 9,61% para primeira frequência natural e a segunda, respectivamente.

É possível notar, que o carregamento utilizado no experimento é pequeno, em comparação à carga crítica para que se pudesse identificar uma mudança significativa na frequência natural. As frequências naturais experimentais podem conter erros na estimação e/ou ruídos de forma que, ao aplicar carregamentos tão baixos não se consiga identificar a influência do carregamento.

Assim, realizou-se uma simulação para investigar o comportamento da frequência natural para forças de protensão próximas à carga crítica, e os resultados estão dispostos na Tabela 7.

Tabela 7 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica

% em relação ao Pcr	Pcr	f1 (Hz) Modelo	Varição Percentual da Frequência Natural
0	0	28,3602	-
11,1	398823,3069	29,9420	5,28%
22,2	797646,6138	31,4444	4,78%
33,3	1196469,921	32,8782	4,36%
44,4	1595293,228	34,2521	4,01%
55,5	1994116,534	35,5729	3,71%
66,6	2392939,841	36,8464	3,46%
77,7	2791763,148	38,0773	3,23%
88,8	3190586,455	39,2697	3,04%
99,9	3589409,762	40,4269	2,86%

Fonte: A autora, 2020

Para o carregamento correspondente a 99,9% da carga crítica, o aumento na frequência natural é de 42,55% em relação ao carregamento nulo, muito maior que o encontrado para forças de protensão aplicadas no ensaio experimental.

Logo, no caso deste ensaio experimental, poderiam ter sido aplicadas forças de protensão maiores a fim de conseguir identificar o perfil de mudança da frequência natural. É por essa razão, que a nível experimental, não foi possível diferenciar de forma significativa a mudança de frequência para os diferentes níveis de carga.

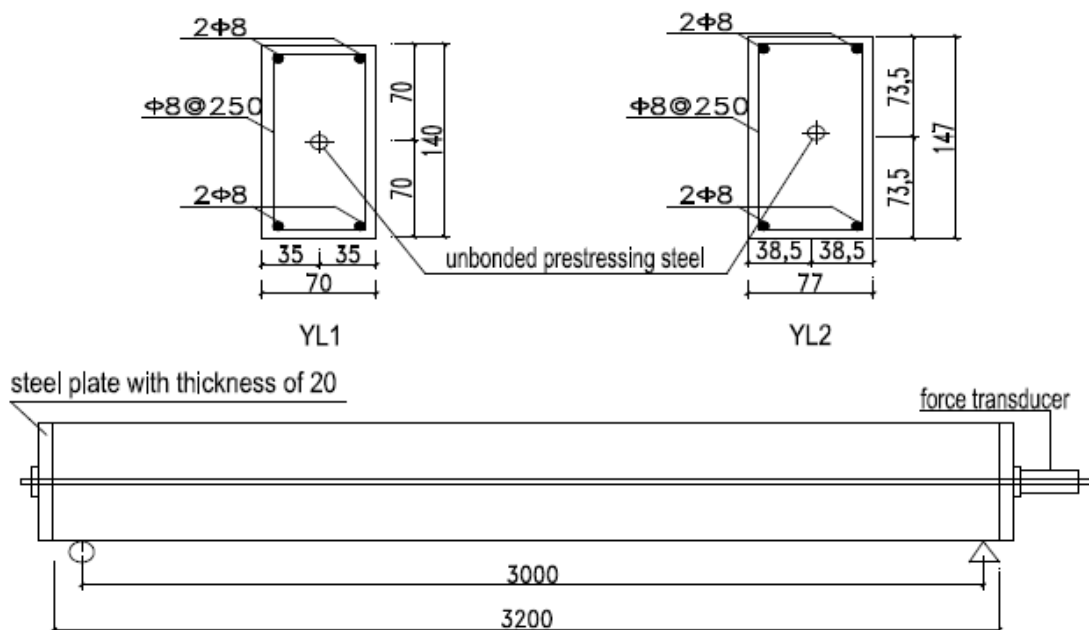
Observa-se também que a maior variação percentual da frequência natural ocorre assim que a viga recebe o primeiro carregamento, contudo, após sucessivos incrementos na força de protensão, a taxa de aumento da frequência diminui.

4.3 COMPARAÇÃO COM TESTES DE ZHANG ET AL. (2011)

Para o ensaio experimental de Zhang et al. (2011), foram utilizadas duas vigas biapoiadas retangulares de concreto protendido, com comprimento de 3,2 m. As dimensões para viga YL1 eram de 70mm x 140 mm e para a viga YL2 de 77mm x 147 mm e para a protensão utilizou-se um cabo reto concêntrico formado por uma cordoalha de 7 fios com diâmetro nominal de 5 mm. A resistência à compressão do concreto aos 28 dias foi de 29,1 MPa e não foram identificadas falhas ou fissuras durante a realização do experimento.

Um esboço das vigas construídas para o ensaio experimental é apresentado na Figura 15.

Figura 15 - Viga biapoiada retangular utilizada na análise experimental



Fonte: ZHANG ET AL., 2011

As dimensões da viga utilizada bem como as informações do cabo de protensão necessárias ao modelo encontram-se na Tabela 8.

Tabela 8 - Dimensões e características das vigas experimentais a serem inseridas no modelo

Variável	YL1	YL2
Diâmetro - ϕ (mm)	5,00	5,00
Base - b (m)	0,070	0,077
Altura - h (m)	0,140	0,147
Comprimento - L (m)	3,20	3,20
N° de cabos	1,00	1,00
Excentricidade (m)	0,00	0,00
fck (MPa)	0,00	0,00

Fonte: A autora, 2020

As forças de protensão aplicadas, o percentual de cada uma delas em relação a carga crítica e as frequências naturais medidas até o terceiro modo, bem como os valores obtidos no modelo de elementos finitos para análise modal para a viga YL1 são apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Zhang et al. (2011) e numéricas para diferentes forças de protensão para a viga YL1

		YL1								
% em relação ao Pcr	Força de protensão (kN)	f1 (Hz) Artigo	f1 (Hz) Modelo	Erro1 (%)	f2 (Hz) Artigo	f2(Hz) Modelo	Erro2 (%)	f3 (Hz) Artigo	f3(Hz) Modelo	Erro3 (%)
0,00	0,00	19,141	19,1411	0,00	76,660	76,565	0,12	167,969	172,276	2,56
2,14	7,90	19,305	19,3480	0,22	78,707	76,773	2,46	168,574	172,484	2,32
8,92	33,00	19,922	19,9909	0,35	84,961	77,429	8,87	174,316	173,142	0,67
13,65	50,50	20,313	20,4271	0,56	87,402	77,883	10,89	173,340	173,600	0,15
19,46	72,00	20,508	20,9507	2,16	85,449	78,437	8,21	160,645	174,161	8,41
22,08	81,70	20,313	21,1827	4,28	81,055	78,686	2,92	156,738	174,413	11,28

Fonte: adaptado de ZHANG ET AL., 2011

Para a aplicação de uma força de protensão de até 22,08% da carga crítica, houve um incremento na frequência natural do primeiro modo de 6,12% no ensaio experimental e de 10,66% no modelo proposto. Já para os segundo e terceiro modos a resposta da taxa de aumento da frequência pelo modelo foi de 2,77% e 1,24%. O erro entre o resultado experimental e numérico é menor que 5% para o primeiro modo e de no máximo 11,28% para os modos subsequentes. É importante destacar que, o modelo proposto tem dado respostas aproximadas, não só para o primeiro modo, mas também para os modos maiores.

A tendência crescente da frequência natural com a força de protensão

também pode ser vista na Tabela 10 com os resultados para a viga YL2.

Tabela 10 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Zhang et al. (2011) e as numéricas para diferentes forças de protensão para a viga YL2

YL2										
% em relação ao Pcr	Força de protensão (kN)	f1 (Hz) Artigo	f1 (Hz) Modelo	Erro1 (%)	f2 (Hz) Artigo	f2 (Hz) Modelo	Erro2 (%)	f3 (Hz) Artigo	f3 (Hz) Modelo	Erro3 (%)
0,00	0,00	22,070	22,0695	0,00	83,008	88,27841	6,35	150,391	198,6318	32,08
3,52	20,00	22,656	22,4597	0,87	83,496	88,67125	6,20	151,367	199,0252	31,49
7,05	40,00	22,852	22,8433	0,04	85,449	89,06235	4,23	148,438	199,4177	34,34
10,57	60,00	23,633	23,2206	1,75	86,914	89,45174	2,92	152,462	199,8094	31,06
14,09	80,00	24,023	23,5918	1,79	87,891	89,83945	2,22	154,297	200,2004	29,75
15,50	88,00	24,219	23,7387	1,98	87,402	89,99406	2,97	148,438	200,3566	34,98

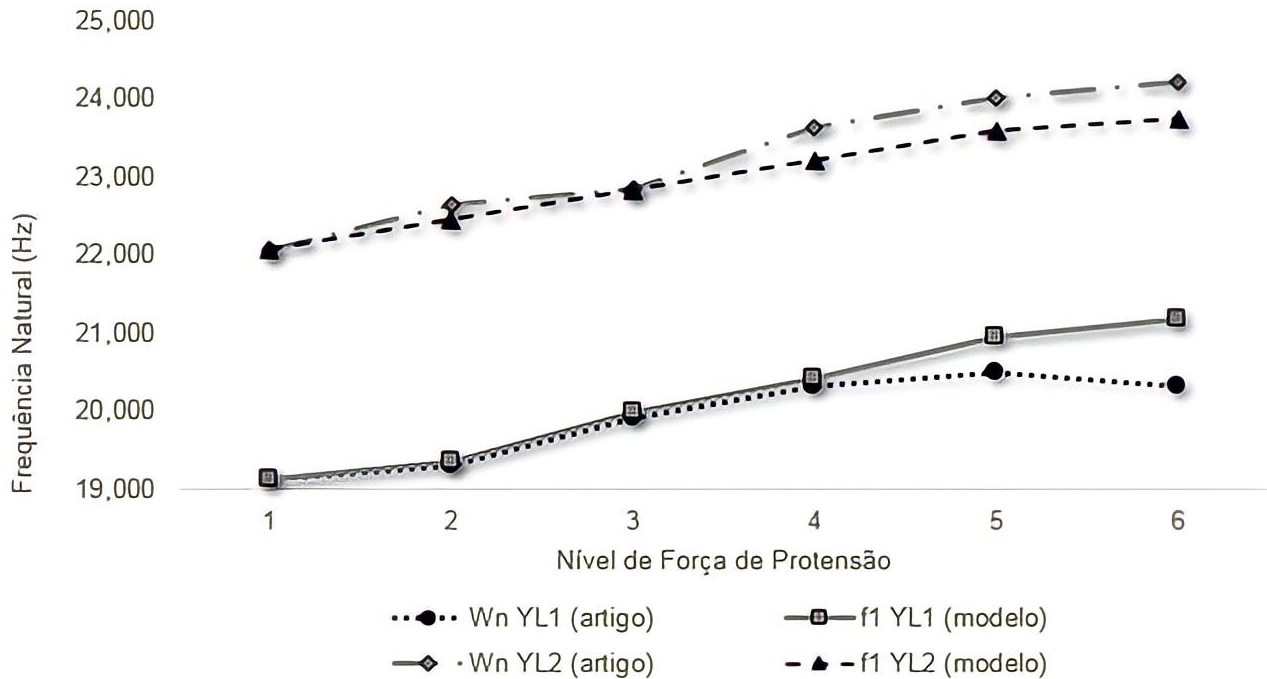
Fonte: adaptado de ZHANG ET AL., 2011

Com erros menores que 2% entre os resultados para o primeiro modo, e com aplicação de forças de protensão que variaram de 0% a 15,50% da carga crítica, experimentalmente, houve um incremento de 9,74% na frequência natural e segundo o modelo de elementos finitos o aumento foi de 7,56%. Para os modos seguintes, a taxa de aumento da frequência com a força de protensão foi bem inferior, sendo de 1,94% e 0,86% respectivamente.

Para as duas vigas testadas, as frequências naturais tenderam a aumentar com o aumento da força de protensão aplicada e as respostas dadas pelo modelo proposto concordam com os valores obtidos experimentalmente, com erros menores que 5% para o primeiro modo, mostrando mais uma vez, o bom ajuste do modelo proposto aos dados experimentais. Além disso, as frequências naturais de ordens mais baixas tiveram maior precisão que as frequências naturais de ordens mais altas, tendência também observada no trabalho de Shi et al. (2014).

Em suma, as duas vigas (YL1 e YL2), testadas em laboratório, foram submetidas a 6 níveis de força de protensão, conforme as Tabela 9 e Tabela 10, e com o gráfico da Figura 16, fica mais fácil a visualização da tendência de aumento da frequência do primeiro modo a cada nível de carregamento.

Figura 16 - Relação entre as frequências naturais e os seis níveis de força de protensão aplicados para o primeiro modo, obtidos experimentalmente e pelo modelo proposto



Fonte: A autora, 2020

Ao observar o gráfico da Figura 16, percebe-se uma tendência anormal na frequência natural para o último carregamento aplicado para a viga YL1, que diminuiu em relação a força aplicada anteriormente. Esta redução da frequência não pode ser explicada pelo modelo proposto e não é possível afirmar se este valor é resultado de um erro experimental ou de alguma anomalia.

Na sequência, como os carregamentos aplicados no ensaio experimental foram na ordem de no máximo 22,08% da carga crítica e com o intuito de verificar o comportamento da frequência em relação à maiores forças de protensão aplicadas, realizou-se a simulação com a força de protensão variando de 0% a 99,9% da carga crítica. O resultado é apresentado na Tabela 11.

Tabela 11 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica para as vigas YL1 e YL2 de Zhang et al. (2011) e suas respectivas variações percentuais

% em relação ao Pcr	f1 (Hz) YL1	Varição Percentual da YL1	f1 (Hz) YL2	Varição Percentual da YL2
0	19,1411	-	22,0695	-
11,1	20,1932	5,50%	23,2767	5,47%
22,2	21,1931	4,95%	24,4244	4,93%
33,3	22,1479	4,51%	25,5205	4,49%
44,4	23,0632	4,13%	26,5715	4,12%
55,5	23,9435	3,82%	27,5824	3,80%
66,6	24,7926	3,55%	28,5575	3,54%
77,7	25,6136	3,31%	29,5005	3,30%
88,8	26,4091	3,11%	30,4142	3,10%
99,9	27,1813	2,92%	31,3013	2,92%

Fonte: A autora, 2020

Para uma força de protensão de até 99,9% da carga crítica, o incremento da frequência natural foi de 42,00% e de 41,83% para as vigas YL1 e YL2, respectivamente. Além disso, para ambas as vigas testadas a taxa de aumento das frequências naturais tendem a diminuir para valores mais elevados da força de protensão.

4.4 COMPARAÇÃO COM TESTES DE JANG ET AL. (2011)

Jang et al. (2011), testaram experimentalmente um total de seis vigas de concreto com pós-tração, sendo cada uma delas submetida a um valor de força de protensão diferente. As vigas possuíam seção transversal retangular de 0,3 m x 0,3 m, 8 m comprimento e resistência a compressão aos 28 dias do concreto de 37 MPa. Para a armadura longitudinal, foram utilizadas quatro barras de 16 mm de diâmetro e estribos de 10 mm de diâmetro com espaçamento de 100 a 150 mm. Foram utilizados três cabos retos concêntricos de 15,2 mm de diâmetro para a protensão. Os valores de entrada no modelo são dispostos na Tabela 12.

Tabela 12 - Valores de entrada do modelo

Variável	Valor
Diâmetro - ϕ_{hip} (mm)	15,20
Base - b (m)	0,300
Altura - h (m)	0,300
Comprimento - L (m)	8,00
Nº de cabos	3,00
Excentricidade (m)	0,00
fck (MPa)	31,51

Fonte: A autora, 2020

A Tabela 13 indica as frequências naturais correspondentes a cada número modal e força de protensão a fim de examinar a similaridade das frequências naturais obtidas por testes experimentais e pelo modelo de elementos finitos proposto.

Tabela 13 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Jang et al. (2011) e as numéricas para diferentes forças de protensão

% em relação ao Pcr	Força de Protensão (kN)	f1 (Hz) Artigo	f1 (Hz) Modelo	Erro1 (%)	f2 (Hz) Artigo	f2 (Hz) Modelo	Erro2 (%)
0,00	0,00	7,513	7,5134	0,00	28,183	30,05366	6,64
4,46	146,00	8,216	8,0068	2,55	29,399	30,55904	3,95
8,07	264,00	8,539	8,3844	1,81	30,976	30,96147	0,05
10,88	356,00	8,724	8,6674	0,65	29,997	31,27163	4,25
14,21	465,00	8,697	8,9912	3,38	30,126	31,63517	5,01
15,99	523,00	8,794	9,1588	4,15	29,85	31,82692	6,62

Fonte: adaptado de JANG et al., 2011

Assim, como observado nos trabalhos anteriores, à medida que a força de protensão aumenta, as frequências naturais também tendem a aumentar. Neste exemplo, para incrementos de força de protensão de até 15,99% da carga crítica, obteve-se 17,05% e 21,90% de aumento para a frequência natural experimental e pelo modelo, respectivamente, para o primeiro modo. Para o segundo modo, o aumento experimental da frequência foi de 5,91%.

Na sequência, comparou-se a razão da diferença da frequência natural correspondente ao último carregamento aplicado com a primeira frequência natural modal. O resultado mais semelhante para o primeiro modo, apresentou diferença de 0,65% e para o segundo modo, a diferença máxima foi de 6,64%. Contudo, ao comparar os modos subsequentes, os resultados não tiveram tanta precisão, como pode ser visto na Tabela 14.

Tabela 14 - Comparação entre as frequências naturais obtidas no trabalho de Jang et al. (2011) e as numéricas para o terceiro e quarto modos de vibração

% em relação ao Pcr	f3 (Hz) Artigo	f3 (Hz) Modelo	Erro3 (%)	f4 (Hz) Artigo	f4 (Hz) Modelo	Erro4 (%)
0,00	94,876	67,6226	28,73	132,399	120,2267	9,19
4,46	95,052	68,1303	28,32	140,023	120,7352	13,77
8,07	97,334	68,5379	29,58	145,087	121,1446	16,50
10,88	99,418	68,854	30,74	147,913	121,4629	17,88
14,21	98,812	69,2266	29,94	147,48	121,8389	17,39
15,99	99,466	69,4241	30,20	148,334	122,0385	17,73

Fonte: adaptado de JANG et al., 2011

Assim, o modelo de análise numérica proposto mostrou boa concordância com a frequência natural segundo a força de protensão para os dois primeiros modos, indicando razões e diferenças entre análise numérica e experimental muito pequenas. Além disso, o erro percentual se torna maior em proporção à força de protensão, sendo a taxa máxima para os dois primeiros modos menor que 6,64%, para o intervalo de força de protensão inferior a 523 kN.

Como os autores forneceram poucos detalhes sobre a cura do concreto das vigas, presumiu-se que elas foram curadas por um processo regular no laboratório.

Além disso, é essencial ser capaz de simular razoavelmente o estado inicial das vigas de concreto, entretanto, a metodologia utilizada pelos autores consistiu em aplicar uma única e diferente força de protensão para cada viga sem medir a frequência natural antes do carregamento. Então, apesar dos autores não terem mostrado a frequência retificada sem carga de protensão para cada viga, ao aplicarmos os dados no modelo, admitiu-se que as vigas eram iguais.

Análogo aos exemplos já citados e com o objetivo de avaliar a relação da frequência natural com forças de protensão maiores que as testadas em laboratório, a frequência natural foi obtida com a carga variando de 0% até 99,9% da carga crítica, conforme Tabela 15.

Tabela 15 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica

% em relação ao Pcr	Pcrit	f1 (Hz) Modelo	Variação Percentual da f1
0	0	7,5134	-
11,1	363210,8	8,6892	15,65%
22,2	726421,6	9,7238	11,91%
33,3	1089632	10,6585	9,61%
44,4	1452843	11,5176	8,06%
55,5	1816054	12,3169	6,94%
66,6	2179265	13,0675	6,09%
77,7	2542476	13,7771	5,43%
88,8	2905686	14,4520	4,90%
99,9	3268897	15,0968	4,46%

Fonte: A autora, 2020

Diante do exposto na Tabela 15, diferente dos outros autores já citados, cujo incremento da frequência natural foi em torno de 42,92%, o aumento percentual da frequência natural foi de 100,93%. Essa diferença pode ter ocorrido porque, para este ensaio experimental e numérico, foram utilizados três cabos de protensão, o que se difere dos demais trabalhos citados, no qual a protensão foi feita por um único cabo.

Quando a força de protensão aumenta de 0kN para 363,21 kN, ou seja, 11,1% da carga crítica, a frequência natural aumenta 1,1758 Hz, que corresponde à uma variação percentual de 15,65%. Mas, quando a força de protensão continua subindo a frequência natural tende a se estabilizar.

4.5 COMPARAÇÃO COM TESTES DE NOH ET AL. (2015)

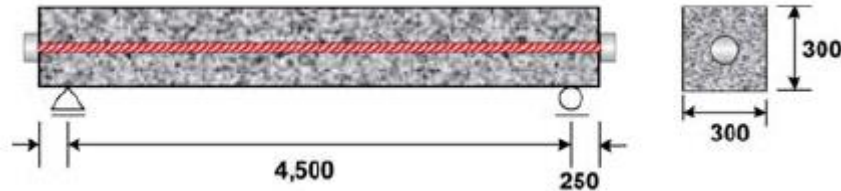
Segundo Noh et al. (2015), muitos parâmetros afetam a frequência natural de vigas de concreto protendido, como a força de protensão, localização e perfil do cabo, condições de contorno, encolhimento do concreto, etc. Entretanto, não é possível avaliar todas estas variáveis simultaneamente em um ensaio experimental. Então, para o experimento realizado pelos autores, será considerado o nível de protensão, a localização e o perfil do cabo de protensão.

No estudo experimental, foram construídas, em laboratório, três vigas distintas: cabo reto sem excentricidade, cabo reto com excentricidade e cabo com perfil parabólico. Os cabos, com diâmetro nominal de 15,2 mm, foram tensionados com quatro níveis de força de protensão: 0 kN, 272 kN, 544 kN, 816 kN e 1088 kN, sendo utilizados

quatro acelerômetros para extrair a frequência natural.

A primeira viga, mostrada na Figura 17, possui seção transversal de 30x30 cm, 5 m de comprimento e um cabo reto concêntrico.

Figura 17 - Viga biapoiada retangular utilizada na análise experimental



Fonte: NOH et al., 2015

As variáveis a serem inseridas no modelo para a primeira viga testada, seguem na Tabela 16.

Tabela 16 - Parâmetros da viga experimental a serem inseridos no modelo de viga com cabo reto e concêntrico

Variável	Valor
Diâmetro - ϕ_{hip} (mm)	15,20
Base - b (m)	0,30
Altura - h (m)	0,30
Comprimento - L	5,00
Nº de cabos	1,00
Excentricidade (m)	0,00
fck (MPa)	40,74

Fonte: A autora, 2020

A Tabela 17 contém as forças de protensão utilizadas em laboratório, suas respectivas frequências naturais provenientes do experimento e do modelo e o erro percentual entre as diferentes metodologias para os dois primeiros modos.

Tabela 17 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Noh et al. (2015) e as numéricas para diferentes forças de protensão

% em relação ao Pcr	Força de protensão (kN)	f1 (Hz) Artigo	f1 (Hz) Modelo	Erro1 (%)	f2 (Hz) Artigo	f2(Hz) Modelo	Erro2 (%)
0,00	0	20,51	20,5101	0,00	77,76	82,04092	5,51
2,86	272	20,39	20,8043	2,03	79,1	82,33671	4,09
5,71	544	20,51	21,0944	2,85	77,45	82,63143	6,69
8,57	816	20,51	21,3806	4,24	79,53	82,92511	4,27
11,42	1088	20,57	21,6630	5,31	77,82	83,21775	6,94

Fonte: adaptado de NOH et al., 2015

Conforme mostrado na Tabela 17, a primeira frequência tende a aumentar à medida que a força de protensão é aumentada. Para um incremento de 11,42% no carregamento em relação a carga crítica, obteve-se um aumento de 0,29% para o resultado experimental e de 5,62% na frequência natural simulada.

Mais uma vez, a variação da força de protensão é insuficiente para analisar a mudança de frequência natural e, apesar do erro máximo percentual entre os dois modos ser de 6,69%, faz-se necessário uma investigação do comportamento da frequência natural quando a viga for submetida a carregamentos maiores.

Assim, considerando-se que, a maior força de protensão utilizada experimentalmente correspondeu a apenas 11,42% da carga crítica, foi feito um teste do comportamento da frequência natural com o carregamento variando de 0 kN até 99,9% da carga crítica, cujo resultado é mostrado na Tabela 18.

Tabela 18 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica

% em relação ao Pcr	Pcrit	f1 (Hz) Modelo	Varição Percentual
0	0	20,5101	-
11,1	1057267,854	21,6313	5,47%
22,2	2114535,707	22,6971	4,93%
33,3	3171803,561	23,7151	4,49%
44,4	4229071,415	24,6911	4,12%
55,5	5286339,269	25,6300	3,80%
66,6	6343607,122	26,5357	3,53%
77,7	7400874,976	27,4115	3,30%
88,8	8458142,83	28,2602	3,10%
99,9	9515410,684	29,0841	2,92%

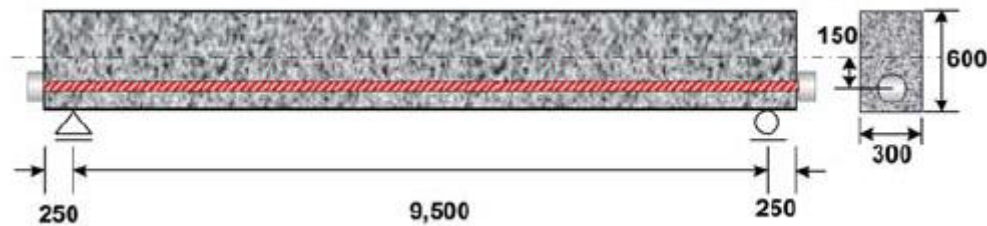
Fonte: A autora, 2020

Similarmente ao valor encontrado por Saiidi et al. (1994), Zhang e Li (2007

apud BRECCOLOTTI, 2018) e Zhang et al. (2011), a frequência natural teve um aumento de 41,94% para 99,9% da carga crítica, confirmando a tendência de crescimento da frequência natural com a força de protensão. Apesar de Noh et al. (2015), terem afirmado não haver relação significativa entre as variáveis para o corpo de prova sem excentricidade, observa-se que para carregamentos maiores, a tendência é visivelmente identificada.

Já a amostra 2, apresentada na Figura 18, possui 0,30 m de base, 0,60 m de altura, 10 m de comprimento e um cabo reto com excentricidade de 150 mm do centroide.

Figura 18 - Viga biapoiada retangular com cabo excêntrico utilizada na análise experimental



Fonte: NOH et al., 2015

Com atenção ao fato de que a seção transversal é diferente do primeiro modelo testado, os dados para a segunda amostra de viga de concreto protendido constam na Tabela 19.

Tabela 19 - Dados da segunda amostra para o modelo

Variável	Valor
Diâmetro - ϕ_{hip} (mm)	15,20
Base - b (m)	0,30
Altura - h (m)	0,60
Comprimento - L	10,00
N° de cabos	1,00
Excentricidade (m)	0,15
f_{ck} (MPa)	25,77

Fonte: A autora, 2020

Segundo o autor citado, a excentricidade existente na segunda amostra contribuiu para o aumento da rigidez a flexão da viga e, conseqüentemente, da frequência natural, como pode ser visto na Tabela 20.

Tabela 20 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Noh et al. (2015) e as numéricas para diferentes forças de protensão

% em relação ao Pcr	Força de protensão (kN)	f1 (Hz) Artigo	f1 (Hz) Modelo	Erro1 (%)	f2 (Hz) Artigo	f2(Hz) Modelo	Erro2 (%)
0,00	0	9,16	9,16001	0,00	30,76	36,64029	19,12
1,80	272	9,22	9,24293	0,25	30,82	36,72349	19,15
3,59	544	9,28	9,32511	0,49	31,25	36,8065	17,78
5,39	816	9,28	9,40658	1,36	31,25	36,88932	18,05
7,18	1088	9,28	9,48734	2,23	31,31	36,97196	18,08

Fonte: adaptado de NOH et al., 2015

Apesar do objetivo consistir em fazer uma comparação entre as vigas com diferentes perfis de cabo, os testes foram feitos em vigas com dimensões distintas. Dessa forma, não é possível comparar proporcionalmente o efeito da excentricidade na frequência natural da viga. Em contrapartida, as tendências observadas são similares aos trabalhos anteriormente citados: aumento das frequências naturais com a força de protensão, taxa de crescimento mais significativa para os primeiros modos e baixos valores de força de protensão aplicados experimentalmente, dificultando a visualização do real impacto na frequência natural.

A terceira amostra experimental consistiu em uma viga com cabo de perfil parabólico, com seção transversal de 60 mm x 90 mm e 15 m de comprimento. Nas duas extremidades o cabo está posicionado no centroide da seção enquanto, no meio do vão, e devido ao seu perfil parabólico, o cabo se encontra à 10 cm da base.

Para o perfil parabólico, é necessário observar duas variáveis importantes para os valores de entrada do modelo: altura inicial e final dos cabos (e_1) e a altura no meio do vão (e_m), sendo estes valores considerados sempre em relação à base e não ao centroide. Os valores de entrada do modelo para a viga com cabo curvo estão na Tabela 21.

Tabela 21 - Variáveis a serem inseridas no modelo de elementos finitos proposto considerando a curvatura do cabo de protensão

Variável	Valor
Diâmetro - ϕ_{hip} (mm)	15,20
Base - b (m)	0,60
Altura - h (m)	0,90
Comprimento - L	15,00
Nº de cabos	7,00
em (m)	0,45
Altura meio (m)	0,10
fck (MPa)	21,76

Fonte: A autora, 2020

Os valores das frequências naturais obtidas experimentalmente e pelo modelo de elementos finitos para os dois primeiros modos, encontram-se na Tabela 22.

Tabela 22 - Comparação entre as frequências naturais experimentais de Noh et al. (2015) e as numéricas para diferentes forças de protensão considerando a curvatura do cabo de protensão

% em relação ao Pcr	Força de protensão (kN)	f1 (Hz) Artigo	f1 (Hz) Modelo	Erro1 (%)	f2 (Hz) Artigo	f2 (Hz) Modelo	Erro2 (%)
0,00	0	20,51	20,5101	0,00	22,22	23,44021	5,49
2,86	272	20,39	20,8043	2,03	22,22	23,5741	6,09
5,71	544	20,51	21,0944	2,85	23,19	23,70724	2,23
8,57	816	20,51	21,3806	4,24	23,68	23,83963	0,67
11,42	1088	20,57	21,6630	5,31	23,68	23,97129	1,23

Fonte: adaptado de NOH et al., 2015

Mesmo com carregamento na ordem de 2,6% da carga crítica, já foi detectada uma alteração na frequência natural de 8,36% e 8,81% para os resultados do artigo e do modelo para o primeiro modo e erro percentual máximo de 6,09% para o segundo modo.

Logo, é possível afirmar que o modelo de elementos finitos proposto, ao ter seus resultados comparados aos da literatura, funcionou de maneira adequada com mínimos erros em relação aos dados experimentais para os diferentes perfis do cabo de protensão e principalmente para o cabo curvo.

Objetivando analisar a variação percentual da frequência natural para forças de protensão superiores às testadas experimentalmente, a Tabela 23 mostra os resultados obtidos a partir do modelo proposto.

Tabela 23 - Frequências naturais para carregamento próximo à carga crítica para cabo curvo

% em relação ao Pcr	Pcrit	f1 (Hz) Modelo	Variação Percentual
0	0	5,8600	-
11,1	4636125,793	7,8268	33,56%
22,2	9272251,586	9,3904	19,98%
33,3	13908377,38	10,7284	14,25%
44,4	18544503,17	11,9171	11,08%
55,5	23180628,96	12,9976	9,07%
66,6	27816754,76	13,9949	7,67%
77,7	32452880,55	14,9257	6,65%
88,8	37089006,34	15,8018	5,87%
99,9	41725132,14	16,6318	5,25%

Fonte: A autora, 2020

Analisando a Tabela 23, o aumento da frequência natural foi de 183,81% para a força variando até 99,9% da carga crítica, mostrando que a curvatura do cabo de protensão impacta de forma substancial a frequência natural.

Em suma, o aumento percentual para as vigas biapoiadas retangulares para cabos retos e concêntricos, com variação da força de protensão de 0% a 99,9% da carga crítica, é dado por (Tabela 24):

Tabela 24 - Resumo da variação da frequência natural quando a força aplicada for igual à carga crítica

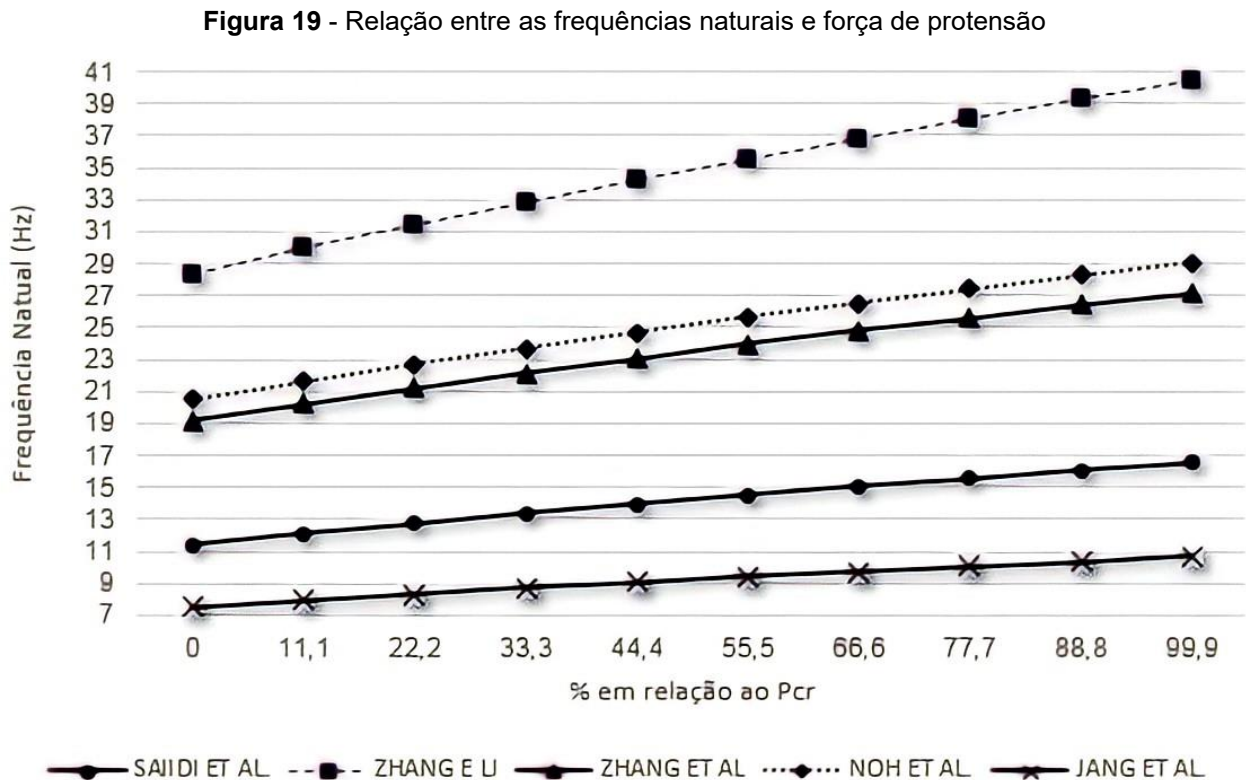
Autor	Máxima variação da frequência
Saiidi et al. (1994)	45,33%
Zhang e Li (2007)	42,55%
Zhang et al. (2011)	42,00%
Jang et al. (2011)	41,83%
Jang et al. (2011)	100,93%
Noh et al. (2015)	41,94%

Fonte: A autora, 2020

Com exceção do trabalho de Jang et al. (2011), que utilizou uma metodologia distinta dos demais, a média do aumento percentual da frequência para uma variação de 0% a 99,9% da carga crítica foi de 42,73%.

Cabe salientar, que neste trabalho, não foi realizado nenhum teste experimental, em vez disso, foram usados os dados experimentais encontrados na literatura

a fim de validar a concordância entre os dados experimentais e numéricos. Em todos os casos, observou-se uma tendência crescente da frequência natural com a força de protensão, como pode ser visto no gráfico da Figura 19, que mostra os resultados das simulações feitas a partir da variação da força de protensão de 0% a 99,9% da carga crítica para os exemplos com cabos retos e concêntricos.



Assim, livre de interferências externas e de vários fatores acidentais que podem ocorrer em um experimento prático e após os testes e comparações realizadas, é possível concluir que o modelo de elementos finitos proposto neste trabalho é viável para estimar a frequência natural a partir das forças de protensão. Cabe mencionar que, na calibração dos modelos numéricos poderiam ser realizadas melhoras para adequar os resultados do modelo aos resultados experimentais, principalmente nos modos superiores que obtiveram maiores erros nas simulações. Essas melhoras podem ser definidas como a modificação das condições de contorno de apoios fixos para apoios com molas e variação do módulo de elasticidade ao longo da viga em vários elementos. No entanto, estas melhoras têm maior custo computacional devido a calibração de várias variáveis.

Por fim, e segundo Noh et al. (2015) a relação buscada pode ser explicada pelo duplo efeito do cabo de protensão na frequência natural da viga, isto é, os efeitos de

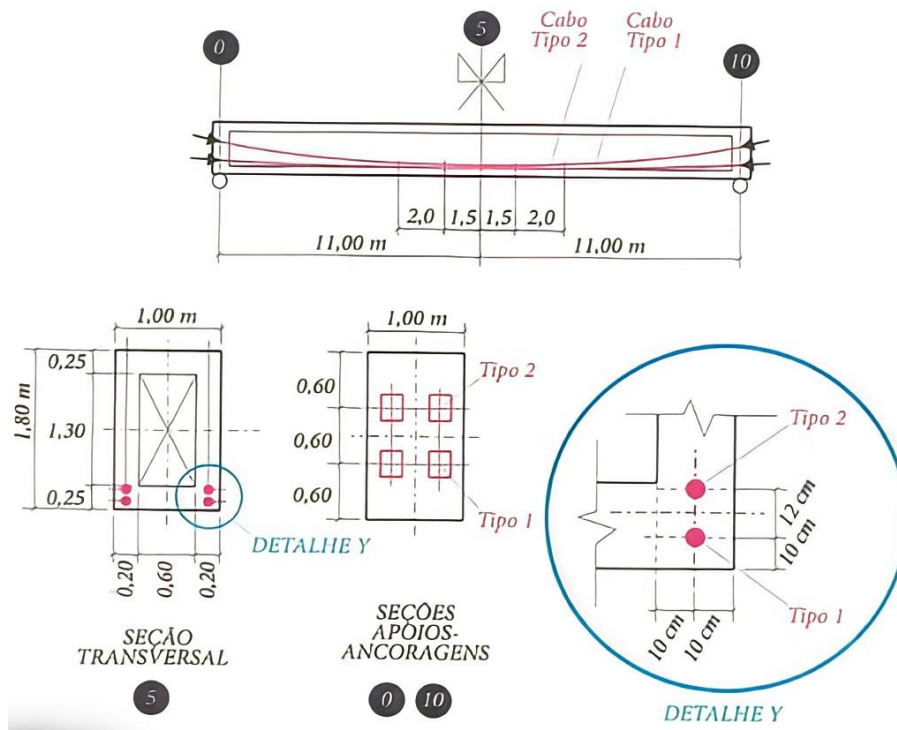
enrijecimento e amolecimento simultaneamente. Por essa razão, é importante considerar não apenas a força de protensão, mas também outros parâmetros como a rigidez do concreto, perfil e curvatura do cabo, condições de contorno, etc.

4.6 PERDAS DE PROTENSÃO

Na seção anterior, foi verificada a viabilidade do modelo proposto realizando vários testes com resultados experimentais encontrados na literatura. Os valores obtidos, a partir do modelo de elementos finitos para a primeira frequência natural, ficaram muito próximos aos valores medidos experimentalmente. Na sequência, será analisada uma viga isostática bipoiada de seção vazada, proposta por Cholfe e Bonilha (2013), cuja força de protensão já foi projetada, a fim de criar uma curva que relacione a porcentagem de perda de protensão com a frequência natural.

A viga, contida na Figura 20, possui seção de 1,00m x 1,80m, comprimento de 22,00 m entre os apoios e apresenta seção vazada ($A_c = 1,02m^2$), com momento de inércia de $I_c = 0,37615 m^4$, conforme esquematizado na figura abaixo.

Figura 20 - Viga biapoiada protendida, seções transversais e detalhe

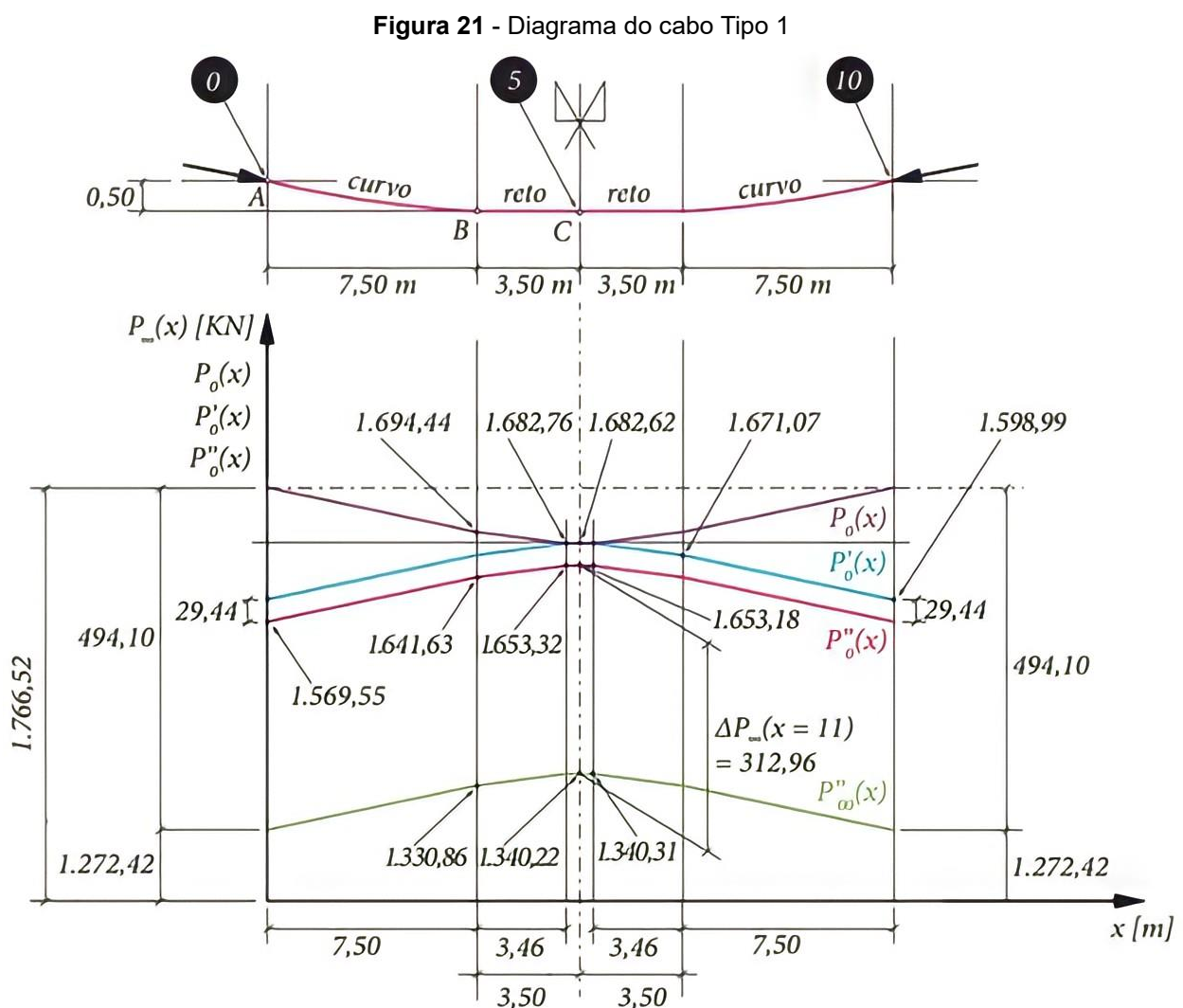


Fonte: CHOLFE; BONILHA, 2013

A armadura de protensão foi distribuída em 4 cabos de $9\phi 15,2mm$, perfil parabólico e reto, aço CP 190-RB revestido por bainhas metálicas, com valor característico

da resistência à tração de $f_{ptk} = 1.900\text{MPa}$ e $f_{pyk} = 1.710\text{Mpa}$, módulo de elasticidade de $E_p = 200\text{GPa}$, com área de $A_p = 1,40\text{ cm}^2/\text{cordoalha}$, totalizando em $A_p = 0,00126\text{m}^2$ por cabo. O concreto, de cimento CIII e $f_{ck} = 30\text{Mpa}$, foi curado à uma temperatura média de 25°C e com umidade relativa de 70%, com abatimento de 8 cm.

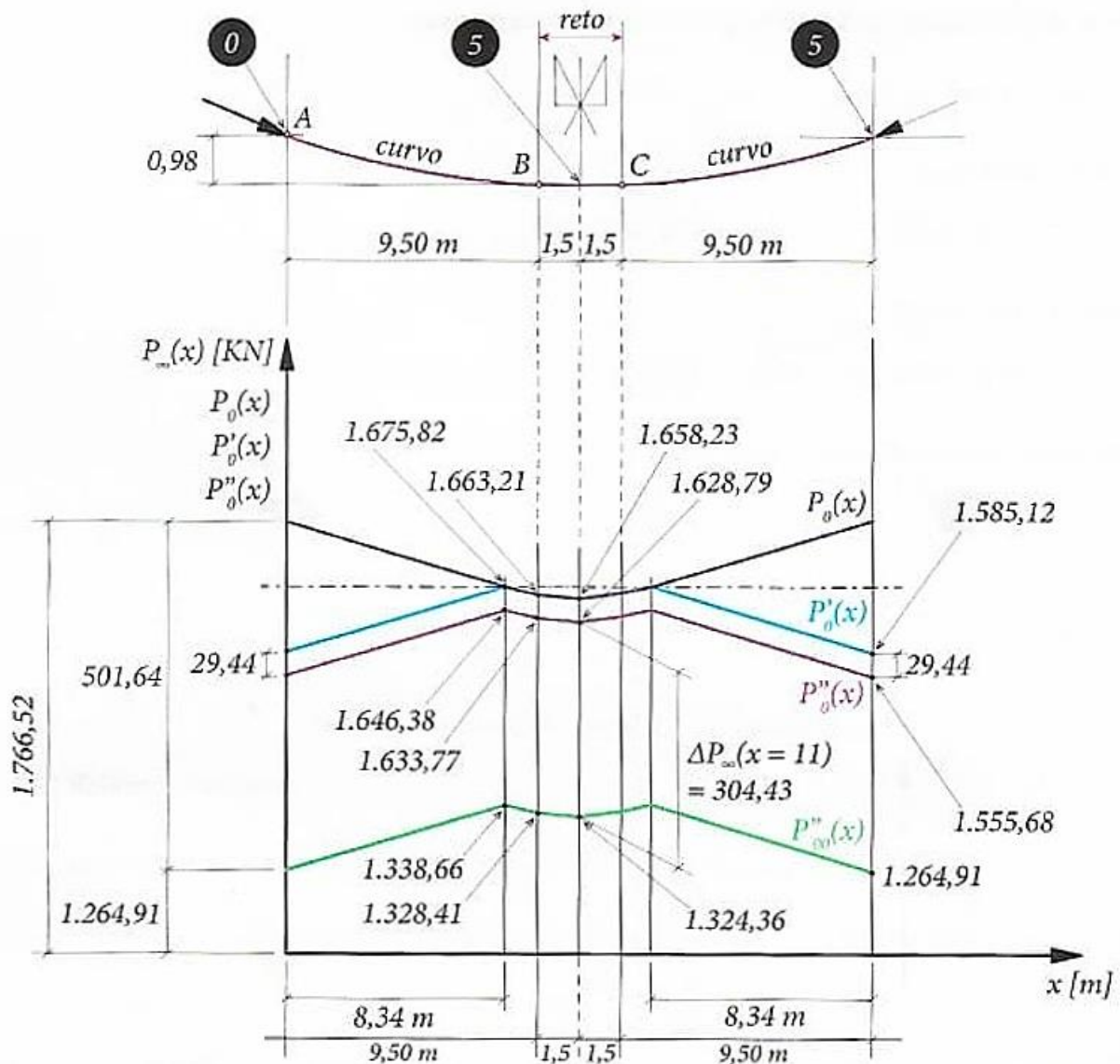
A partir dos parâmetros iniciais, foi calculada a força de protensão necessária para cumprir os requisitos para o Estado Limite Último (ELU) e para o Estado Limite de Serviço (ELS). O valor da força de protensão inicial P_i , aplicada pelo aparelho tensor foi de 1.766,52 kN/cabo. Os diagramas finais de $P_\infty(x) \cdot x$, após todas as perdas de protensão são mostrados Figura 21, para o cabo Tipo 1.



Fonte: CHOLFE; BONILHA, 2013

E na Figura 22, para o cabo Tipo 2.

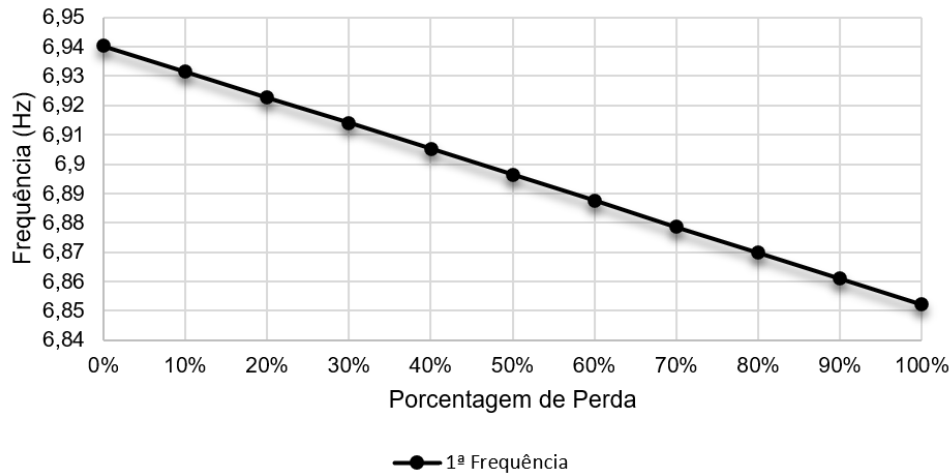
Figura 22 - Diagrama do cabo Tipo 2



Fonte: CHOLFE; BONILHA, 2013

Com os valores calculados por Cholfe e Bonilha (2013) para a força de protensão, após as perdas imediatas e progressivas, será utilizado o modelo numérico para calcular, a partir dessas forças, as frequências naturais correspondentes.

Para a primeira simulação, não serão consideradas as perdas totais de protensão e sim, as perdas imediatas calculadas até o encurtamento imediato do concreto. Na sequência, essas perdas serão reduzidas gradativamente até 100% do seu valor inicial, que consiste em um valor maximizado apenas para simulação, visto que, conforme apresentado em Giffhorn e Lazzari (2018), as perdas totais podem variar entre 25% e 30% para cabos de relaxação baixa. Assim, para a primeira frequência natural, tem-se o seguinte gráfico (Figura 23):

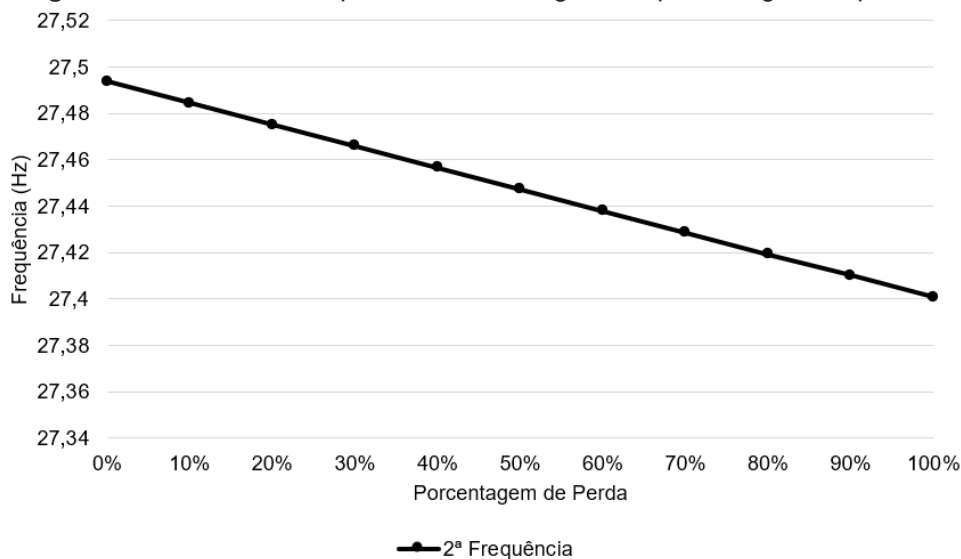
Figura 23 - Gráfico da 1ª Frequência natural versus porcentagem de perda de protensão

Fonte: A autora, 2020

A força de protensão inicial utilizada pelo autor, foi equivalente à apenas 0,66% da carga crítica de flambagem da viga e para uma perda de 100% da força de protensão inicial, constatou-se uma variação de 1,27% para a primeira frequência. Como já foi constatado nos resultados experimentais na seção anterior, baixos valores de força de protensão inicial resultam em pequenas variações na frequência natural, de forma que, tais nuances, sejam difíceis de identificar experimentalmente quando a força de protensão aplicada for muito pequena em relação à carga crítica de flambagem.

Para a segunda frequência natural, a simulação resultou no gráfico da **Erro!**

Fonte de referência não encontrada..

Figura 24 - Gráfico 2ª Frequência Natural segundo a porcentagem de perdas

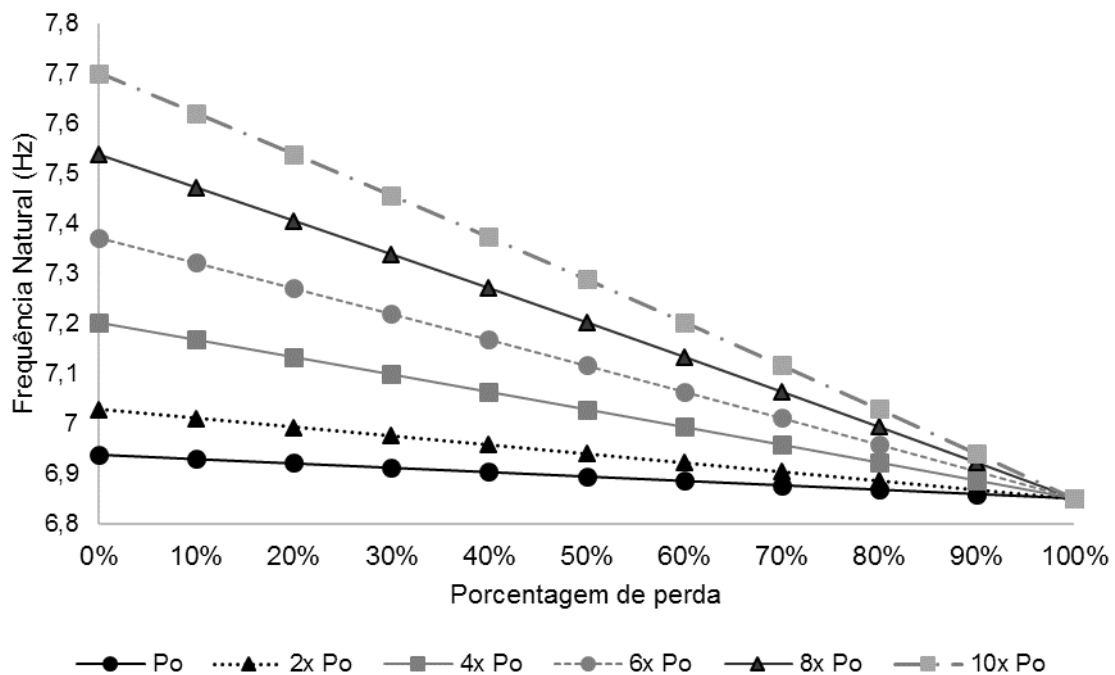
Fonte: A autora, 2020

Para a segunda frequência natural, apresentada na Figura 24, a variação encontrada para a frequência foi ainda menor, sendo apenas 0,33%.

Diante disso, supõe-se hipoteticamente que a força de protensão inicial

aplicada na viga seja maior, assumindo um projeto com uma viga que tem maiores solicitações de carga. As frequências naturais obtidas, para cada aumento da força de protensão inicial, em relação a porcentagem de perda, são mostradas no gráfico da Figura 25.

Figura 25 - Gráfico da 1ª Frequência natural versus porcentagem de perda para diferentes níveis de protensão inicial



Fonte: A autora, 2020

A partir da análise do gráfico da Figura 25, é importante ressaltar que, à medida que a força de protensão inicial é aumentada, a variação da frequência natural é maior. Visualmente, é simples identificar a mudança de inclinação das linhas, conforme ocorre o aumento da força de protensão inicial.

Ao aumentar a força de protensão em dez vezes o valor proposto por Cholfe e Bonilha (2013), tem-se um carregamento de cerca de 7% da carga crítica e uma variação de 11,03% na frequência natural. Portanto, na proporção em que é aplicada uma força de protensão inicial maior, poderia ser mais fácil a detecção da variação na frequência natural.

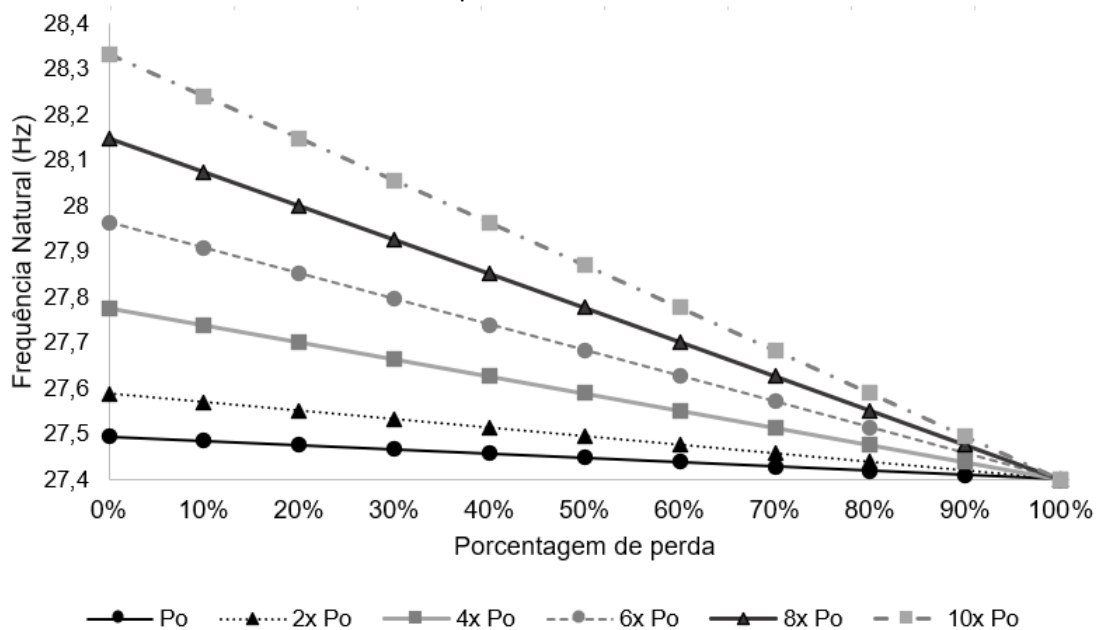
Cabe ressaltar ainda que, no modelo, já estão sendo consideradas as perdas imediatas, que ocorrem quando o carregamento está sendo aplicado (representado no gráfico como 0% de perda), visto que, não se conhece o comportamento do perfil de perda antes deste ponto.

Logo, para fazer a medição das perdas progressivas ao longo do tempo, é necessário fazer uma calibração do modelo após a aplicação da carga, momento do qual

já estão inclusas as perdas imediatas, ou seja, para o monitoramento das perdas progressivas, a primeira frequência deve ser calibrada no modelo de elementos finitos já incluindo o perfil das perdas imediatas.

Além disso, observa-se que todas as linhas do gráfico convergem para um único ponto. Este ponto, consiste na frequência natural para a viga sem carga de protensão e deve ser igual para todos os casos analisados. As mesmas tendências são observadas para a segunda frequência natural, contudo, em menor proporção, do qual encontrou-se uma variação de 3,28% na frequência natural para uma força de protensão inicial equivalente a dez vezes a força apresentada no exemplo dos autores citados, conforme pode ser visto no gráfico da Figura 26 a seguir:

Figura 26 - Gráfico da 2ª Frequência natural versus porcentagem de perda para diferentes níveis de protensão inicial



Fonte: A autora, 2020

Assim, conclui-se que, se a força de protensão inicial for baixa em relação à carga crítica de flambagem, experimentalmente, torna-se desafiador identificar uma variação significativa da frequência natural, visto que, existem variáveis como ruídos ou erros de medição e leitura que interferem nos resultados experimentais e raramente tem-se condições perfeitas de um ambiente controlado. Contudo, aplicar carregamentos maiores em laboratório muitas vezes não é viável, principalmente devido às limitações dos equipamentos utilizados na protensão. Dessa forma, o modelo proposto poderia facilitar o processo de calibração da força de protensão inicial que deve ser aplicada para se obter valores consideráveis de mudança na frequência natural.

5 CONCLUSÕES

O efeito da força de protensão sobre o comportamento dinâmico de vigas de concreto protendido, bem como a influência do posicionamento e perfil da armadura de protensão sobre a frequência natural, ainda é uma temática que apresenta divergência entre os resultados encontrados na literatura.

Nos estudos teóricos, em sua maioria, a protensão aplicada foi considerada como uma força axial externa de compressão ou como protensão externa que, ao ser aplicada, provoca uma suavização lateral da viga e conseqüentemente, a frequência natural diminui. Uma confirmação experimental dessa afirmação, foi o trabalho desenvolvido por Miyamoto et al. (2000), que mediu em laboratório a frequência natural de uma viga com protensão externa e concluiu que houve uma redução da frequência natural com o aumento da força de protensão aplicada. Contudo, essa teoria não pode ser utilizada de forma exclusiva para estruturas com protensão interna, visto que, a presença física do cabo, tem duplo efeito sobre a frequência natural do sistema.

Diante disso, foram analisados os trabalhos experimentais encontrados na literatura do qual, a maior parte, encontrou uma tendência crescente da frequência natural com a força de protensão.

Dessa forma, o modelo proposto nesta dissertação, descreveu o comportamento de uma viga de concreto protendido como a combinação de duas subestruturas interconectadas, isto é, uma viga sujeita a cargas axiais de compressão e ao efeito de uma força distribuída equivalente transversal devido à presença do cabo, que é definida como uma contribuição do aumento de rigidez.

A relação entre a força de protensão e a frequência natural obtida pelo modelo é bem aproximada dos valores encontrados experimentalmente, ou seja, os resultados obtidos confirmam que a força de protensão afeta o comportamento dinâmico das vigas protendidas, podendo a técnica de identificação dinâmica, por conseguinte, ser potencialmente utilizada para identificar o nível existente da força de protensão.

Assim, o modelo de elementos finitos apresentado pode ser considerado como um complemento para os limitados testes laboratoriais suscetíveis às interferências externas, erros e falhas. Ademais, o modelo incluiu a possibilidade de alteração da excentricidade e do perfil do cabo de protensão.

Em todos os trabalhos analisados, ao comparar as frequências naturais do modelo às experimentais, foi encontrado um erro médio de 2,25%, para o primeiro modo, e de 6,92% para o segundo modo, confirmando o bom ajuste do modelo. Além disso, também

foi possível observar que o efeito da força de protensão na frequência natural é maior para o primeiro modo e tende a diminuir nos modos subsequentes.

Ao avaliar o efeito da excentricidade da armadura ativa, concluiu-se que à medida que a excentricidade aumenta, a frequência natural também será aumentada. Similarmente, uma viga com mais de um cabo, também gerou um aumento proporcional na frequência natural.

Além do mais, notou-se que, em alguns casos, os carregamentos experimentais utilizados representavam porcentagens baixas em relação ao carregamento crítico, de forma que, não fosse possível obter mudanças significativas na frequência natural para os níveis de carga aplicados. Então, após simular os valores de frequência para forças de protensão que correspondessem até 99,9% da carga crítica, observou-se que o efeito da força de protensão na frequência é maior para os primeiros carregamentos, sendo que, na proporção em que são aumentados, o incremento percentual na frequência natural é diminuído, mostrando uma tendência de estabilização para valores mais elevados.

Como não foram testadas em laboratório vigas com as mesmas dimensões geométricas, variando apenas o posicionamento do cabo, não foi possível realizar uma comparação direta do efeito da variação da excentricidade e do perfil do cabo. Entretanto, é possível comparar a taxa de aumento da frequência em relação à porcentagem da força de protensão comparada à carga crítica. Assim, enquanto a média do aumento percentual da frequência natural foi de 42,73% para vigas com cabo reto e concêntrico, que tiveram sua força de protensão simuladas em 99,9% da carga crítica, para a viga com cabo curvo foi de 183,82%. Isto mostra que um cabo com perfil parabólico acarreta um aumento de rigidez da viga e, conseqüentemente, da sua frequência natural.

Concomitantemente, se experimentalmente a frequência é aumentada devido ao aumento da força de protensão, é porque o aumento da rigidez resultante da presença do cabo, é maior que o efeito da força axial de compressão, responsável pela redução da frequência. É por este motivo, que devem ser levados em conta não apenas a força de protensão aplicada pelo aparelho de tensão, mas também a influência das condições de contorno, seções transversais e a curvatura e perfil dos cabos.

Depois, com a finalidade de correlacionar a frequência natural com a porcentagem de perda da força de protensão, foi analisada uma viga, do qual, já era conhecido o valor da força de protensão inicial, projetada para os requisitos de ELU e ELS. Similarmente ao observado nos resultados experimentais, concluiu-se que para baixos valores de força de protensão inicial, ocorrerá pouca variação na frequência natural, fato que, dificulta a visualização de tendências em ensaios realizados em laboratório. Diante

disso, o modelo proposto pode ser utilizado de forma a facilitar a calibração da força de protensão inicial aplicada experimentalmente, para que sejam detectadas variações significativas da frequência natural.

Sendo assim, uma sugestão para trabalhos futuros seria a realização de experimentos em laboratório com vigas que apresentem as mesmas dimensões e que estejam sujeitas aos mesmos carregamentos, mas com diferentes perfis e posicionamento dos cabos.

Para os trabalhos numéricos, sugere-se que sejam feitas melhorias na calibração do modelo para os modos maiores, adicionando mais variáveis ao processo de calibração.

Outra consideração, diz respeito às lacunas existentes na bibliografia, ainda restrita a poucos países, além da notória carência de trabalhos com modelos que levem em conta a curvatura do cabo, excentricidade e variação linear da força dentro do elemento de protensão incorporado ao problema dinâmico.

Por fim, pode-se concluir que o programa apresentado pode ser utilizado como uma medida relativa de análise dinâmica de estruturas existentes, realizada por meio de um monitoramento periódico após as perdas das forças de protensão. Este monitoramento, aliado à inspeção visual pode ser conclusivo na avaliação da condição existente da estrutura em análise. Igualmente, o modelo proposto poderia ser utilizado para corroborar ou comparar os cálculos estimados de perdas de protensão nos projetos de engenharia com o intuito de melhorar as aproximações teóricas-empíricas nas quais são baseados esses procedimentos.

REFERÊNCIAS

- ABREU, Gustavo Luiz Chagas Manhães de. **Projeto Robusto H^∞ Aplicado no Controle de Vibrações em Estruturas Flexíveis com Materiais Piezelétricos Incorporados**. 2003. 290 f. Tese (Doutorado) - Curso de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2003.
- ANDRADE, Vinícius Santos. **Análise Dinâmica de uma Viga Engastada Excitada por uma Fonte Não Ideal**. 2009. 128 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**, NBR 6118. Rio de Janeiro, ABNT, 2014.
- AZEVEDO, Álvaro F. M.. **Método dos Elementos Finitos**. Portugal: [s.n], 2003.
- BABAKHANI, Behrouz; RAHAMI, Hossein. Influence of changes in the prestress force on dynamic specificationsof the prestressed concrete beam. **Numerical Methods In Civil Engineering**, Tehran, Irã, v. 5, 2020.
- BAI-JIAN, Tang; FEI, Wang; SONG, Chen. Effect of Prestress Force on Natural Bending Frequency of External Prestressed Steel Beams. **The Open Civil Engineering Journal**, China, v. 12, n. 1, p.62-70, 26 abr. 2018. Bentham Science Publishers Ltd.. <http://dx.doi.org/10.2174/1874149501812010062>.
- BASTOS, Paulo Sérgio. **Concreto Protendido**. 2019. 237 f. Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2019. Disponível em: <www.feb.unesp.br/pbastos>. Acesso em: 12 mar. 2019.
- BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON, Elwood Russeell.
BOKAIAN, A.. Natural frequencies of beams under compressive axial loads. **Journal Of Sound And Vibrafion**, Warrington, v. 1, n. 126, p.49-65, fev. 1988.
- BOLINA, Cecília.C.; PALECHOR, Erwin Ulises Lopez; VÁSQUEZ, M. P. R.; **Vibrações: As Frequências Naturais Estimada e Experimental de uma Estrutura**, p. 186-194 . In: Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria [= Blucher Mathematical Proceedings, v.1, n.1]. São Paulo: Blucher, 2015. DOI 10.5151/mathpro-cnmai-0038.
- BONOPERA, M., Chang,K.C., Chen,C.C., Sung,Y.C., Tullini,N. Experimental study on the fundamental frequency of prestressed concrete bridge beams with parabolic unbonded tendons, **Journal of Sound and Vibration** (2019), doi: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.04.038>.
- BORGES, Rafael de Assis; SILVA, Sebastião Simão da; BEZERRA, Alysso Aldrin Barreto. Estudo de treliças planas e espaciais utilizando a linguagem de programação Python e o software VTK. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia - Ripe**, Brasília, v. 2, n. 27, p.1-20, nov. 2016.
- BRECCOLOTTI, Marco. On the Evaluation of Prestress Loss in PRC Beams. **International Journal of Concrete Structures and Materials**, Perugia, 12, Dezembro 2018.
- CAETANO, Elsa; CUNHA, Álvaro; MAGALHÃES, Filipe. Novas perspectivas na análise do

comportamento dinâmico de estruturas. **Revista da Associação Portuguesa de Análise Experimental de Tensões**, Lisboa, v. 18, p. 23-34, 2010.

CHOLFE, Luiz; BONILHA, Luciana. **Concreto Protendido: Teoria e Prática**. São Paulo: Pini, 2013. (ISBN: 978-85-7266-285-7).

COSTA, Tatiane Nunes da. **Avaliação numérica e computacional do efeito de incertezas inerentes a sistemas mecânicos**. 2016. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Modelagem e Otimização, Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2016.

DALL'ASTA, A.; DEZI, L.. Discussion of "Prestress Force Effect on Vibration Frequency of Concrete Bridges" by M. Saiidi, B. Douglas, and S. Feng. **Journal Of Structural Engineering**, [s.l.], v. 122, n. 4, p.458-458, abr. 1996. American Society of Civil Engineers (ASCE). [http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1996\)122:4\(458\)](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1996)122:4(458)).

DEAK, G. Discussion of "Prestress Force Effect on Vibration Frequency of Concrete Bridges" by M. Saiidi, B. Douglas, and S. Feng. **Journal Of Structural Engineering**, [s.l.], v. 122, n. 4, p.458-459, abr. 1996. American Society of Civil Engineers (ASCE). [http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1996\)122:4\(458\)](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1996)122:4(458))

FARIA, Elves Lincoln. **Projeto de Lajes Planas Protendidas Via Método dos Elementos Finitos e Pórticos Equivalentes**. 2004. 289 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2004.

FERREIRA, Aline Caires. **Vigas metálicas protendidas: Análise estática, modal e de ruptura do cabo de protensão e aplicativo computacional para projetos**. 2007. 252 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

FIGUEIREDO, Filipe Bittencourt. **Análise dinâmica da frequência natural de uma viga em concreto armado**. 2016. 109 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.

FUGANTI, Paloma Toledo. **Análise dinâmica de uma ponte com protensão no extradorso**. 2012. 121 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

GAN, Bing-zheng; CHIEW, Sing-ping; LU, Yong; FUNG, Tat-ching. The effect of prestressing force on natural frequencies of concrete beams – A numerical validation of existing experiments by modelling shrinkage crack closure. **Journal Of Sound And Vibration**, [s.l.], v. 455, p. 20-31, set. 2019. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2019.04.030>.

GIFFHORN, Gabriel Cavichioli; LAZZARI, Paula Manica. Estudo comparativo entre viga de concreto armado e concreto protendido. **Revista de Engenharias da Faculdade Salesiana**, Macaé, n. 1, p. 2-14, 2018.

HAMED, Ehab; FROSTIG, Y.. Natural frequencies of bonded and unbonded prestressed beams—prestress force effects. **Journal Of Sound And Vibration**, Haifa, v. 295, n. 1-2, p. 28-39, ago. 2006. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2005.11.032>.

HOP, Tong. The effect of degree of prestressing and age of concrete beams on frequency and damping of their free vibration. **Materials And Structures**, [s.l.], v. 24, n. 3, p.210-220,

maio 1991. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/bf02472987>.

JAIN, S.k.; GOEL, S.c.. Discussion of "Prestress Force Effect on Vibration Frequency of Concrete Bridges" by M. Saiidi, B. Douglas, and S. Feng. **Journal Of Structural Engineering**, [s.l.], v. 122, n. 4, p.459-460, abr. 1996. American Society of Civil Engineers (ASCE). [http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1996\)122:4\(458\)](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1996)122:4(458)).

JAISWAL, Omprakash. Effect of prestressing on the first flexural natural frequency of beams. **Structural Engineering And Mechanics**, [s.l.], v. 28, n. 5, p.515-524, 30 mar. 2008. Techno-Press. <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2008.28.5.515>.

JANG, Jung-bum; LEE, Hong-pyo; HWANG, Kyeong-min; SONG, Young-chul. Prediction of Prestress Force on Grouted Tendon by Experimental Modal Analysis. **Dynamics Of Civil Structures, Volume 4**, Flórida, p. 33-39, 2011. Springer New York. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-9831-6_5.

KASHANI, Mir Tahmaseb; JAYASINGHE, Supun; HASHEMI, Seyed M.. Dynamic Finite Element Analysis of Bending-Torsion Coupled Beams Subjected to Combined Axial Load and End Moment. **Shock And Vibration**, [S.L.], v. 2015, p. 1-12, 2015. Hindawi Limited. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/471270>.

KASSAB, Munir Mohamed. **Localização de modos de vibração em painéis modulados de lajes protendidas**. 2009. 158 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Engenharia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

KIM, Jeong-Tae; RYU, Yeon-sun; YUN, Chung-bang. Vibration-based method to detect prestress loss in beam-type bridges. **Smart Structures And Materials 2003: Smart Systems and Nondestructive Evaluation for Civil Infrastructures**, [s.l.], p.559-568, 19 ago. 2003. SPIE. <http://dx.doi.org/10.1117/12.484638>.

KIM, Nam-Ho.; SANKAR, Bhavani V. **Introdução à Análise e ao Projeto em Elementos Finitos**. LTC, São Paulo, 2011.

KOVALOVŠ, Andrejs; RUČEVSKIS, Sandris; AKISHIN, Pavel; KOLUPAJEVŠ J. Numerical Investigation on Detection of Prestress Losses in a Prestressed Concrete Slab by Modal Analysis. **3RD international conference on innovative materials, structures and technologies (IMST 2017)**, Letónia, 251, Setembro 2017.

LAW, S.s.; LU, Z.r.. Time domain responses of a prestressed beam and prestress identification. **Journal Of Sound And Vibration**, Hong Kong, v. 288, n. 4-5, p.1011-1025, dez. 2005. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2005.01.045>.

LI, Jie; ZHANG, Feng. Experimental research and numerical simulation of influence of prestress values on the natural vibration frequency of concrete simply supported beams. **Journal Of Vibroengineering**, [s.l.], v. 18, n. 7, p. 4592-4604, 15 nov. 2016. JVE International Ltd.. <http://dx.doi.org/10.21595/jve.2016.17196>.

LIMA, Silvio de Souza; SANTOS, Sergio Hampshire de Carvalho. **Análise Dinâmica das Estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2008.

LU, Z.r.; LAW, S.s.. Identification of prestress force from measured structural

responses. **Mechanical Systems And Signal Processing**, China, v. 20, n. 8, p.2186-2199, nov. 2006. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ymssp.2005.09.001>.

LUNING, Shi; HAOXIANG., He; WEIMING, Yan. Prestress Force Identification for Externally Prestressed Concrete Beam Based on Frequency Equation and Measured Frequencies. **Hindawi Publishing Corporation**, China, 2014.

MACHADO, Celiane C.; GOMES, Sebastião C. P.; PEREIRA, Adriana E. L.; BORTOLI Álvaro L. de. Um novo algoritmo para a modelagem dinâmica de manipuladores flexíveis. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, [s.l.], v. 13, n. 2, p.134-140, ago. 2002. FapUNIFESP (SciELO). <http://dx.doi.org/10.1590/s0103-17592002000200005>.

MACHADO, Marcelo Augusto da Silva. **Aplicação do método dos elementos finitos para a análise elasto-viscoplástica de peças de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão**. 2002. 178 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

MALAGUTI, Ana Kelle. **Análise Dinâmica de Estruturas de Barras Empregando o Método dos Elementos Finitos com Funções de Forma B-Splines não Uniformes**. 2013. 75 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Departamento Acadêmico de Construção Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Pato Branco, 2013.

MAMANDI, Ahmad; KARGARNOVIN, Mohammad H.; FARSI, Salman. Dynamic analysis of a simply supported beam resting on a nonlinear elastic foundation under compressive axial load using nonlinear normal modes techniques under three-to-one internal resonance condition. **Nonlinear Dynamics**, [s.l.], v. 70, n. 2, p.1147-1172, 21 jul. 2012. Springer Nature. <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-012-0520-1>.

MENEGATTI, Marcelo. **A protensão como um conjunto de cargas concentradas equivalentes**. 2004. 126 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Engenharia, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

MIYAMOTO, Ayaho; TEI, Katsuji; NAKAMURA, Hideaki; BULL, John W.. Behavior of Prestressed Beam Strengthened with External Tendons. **Journal Of Structural Engineering**, [s.l.], v. 126, n. 9, p. 1033-1044, set. 2000. American Society of Civil Engineers (ASCE). [http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(2000\)126:9\(1033\)](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(2000)126:9(1033)).

MOREIRA, Sílvio Abrantes; ROLO, Marta. **Aplicações de MATLAB em Engenharia**. Porto, 2018.

NOBLE, Darragh; NOGAL, María; O'CONNOR, Alan; PAKRASHI, Vikram. The effect of post-tensioning force magnitude and eccentricity on the natural bending frequency of cracked post-tensioned concrete beams. **Journal Of Physics: Conference Series**, [S.L.], v. 628, p. 012047, 9 jul. 2015. IOP Publishing. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/628/1/012047>.

NOBLE, Darragh; NOGAL, Maria; O'CONNOR, Alan; PAKRASHI, Vikram. The effect of prestress force magnitude and eccentricity on the natural bending frequencies of uncracked

prestressed concrete beams. **Journal Of Sound And Vibration**, [s.l.], v. 365, p.22-44, mar. 2016. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2015.11.047>.

NOBLE, Darragh; O'CONNOR, Alan; NOGAL, María; PAKRASHI, Vikram. The effect of prestress force magnitude on the natural bending frequencies of prestressed concrete structures. **23rd Australasian Conference on the Mechanics of Structures and Materials (ACMSM23)**, Byron Bay, v. 1, p. 333-338, 2014. ISBN: 9780994152008.

NOH, Myung-Hyu; SEONG, Taek-Ryong; LEE, Jungwhae; PARK, Kyu-Sik. Experimental Investigation of Dynamic Behavior of Prestressed Girders with Internal Tendons. **International Journal of Steel Structures**, Korea, v. 15, ed. 2, p. 401-414, 30 jun. 2015.

OLIVEIRA, Fernanda Almeida Leite de. **Estudo numérico-analítico dos efeitos de cargas axiais sobre o comportamento vibratório de pás eólicas**. 2015. 125 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Integridade de Materiais da Engenharia., Universidade de Brasília. Faculdade Unb Gama., Brasília, 2015.

RAJU, K. Kanaka; RAO, G. Venkateswara. Free Vibration Behavior of Prestressed Beams. **Journal Of Structural Engineering**, [s.l.], v. 112, n. 2, p. 433-437, fev. 1986. American Society of Civil Engineers (ASCE). [http://dx.doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1986\)112:2\(433\)](http://dx.doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1986)112:2(433)).

RASHETNIA, Reza; GHASEMZADEH, Farnam; HALLAJI, Milad; POUR-GHAZ, Mohammad. Quantifying prestressing force loss due to corrosion from dynamic structural response. **Journal Of Sound And Vibration**, [S.L.], v. 433, p. 129-137, out. 2018. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2018.07.012>.

REGO FILHO, Murilo Felix Duailibe Barros. **Extensão de Programa Gráfico para Análise de Treliças e Pórticos Espaciais via MATLAB e GUI**. 2017. 110 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

ROSSETTO, Diego Rizzotto. **Análise estrutural pelo método dos elementos finitos de mastro de sonda de perfuração/produção de poços de petróleo**. 2013. 137 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

RUDLOFF. **Concreto Protendido**. Catálogo. Rev. 6, 11/2015. Disponível em (01/02/2019): http://www.rudloff.com.br/downloads/catalogo_concreto_protendido_rev-06.pdf.

SAIID, Mehdi Saiid; DOUGLAS, Bruce M.; FENG, Shaoshuai. Prestress Force Effect on Vibration Frequency of Concrete Bridges. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 120, p. 2233-2241, (1994). DOI 10.1061/(ASCE)0733-9445(1994)120:7(2233).

SANTOS, Mateus Berwaldt. **Utilização de Concreto Protendido em Pavimentos Portuários**. 2015. 163 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande – Furg, Rio Grande, 2015.

SARAH, J.; HEJAZI, F.; RASHID, Raizal S.M.; OSTOVAR, Nima. A Review of Dynamic Analysis in Frequency Domain for Structural Health Monitoring. In: IOP CONFERENCE SERIES: EARTH AND ENVIRONMENTAL SCIENCE, 1., 2019, Malaysia. **IOP Conference**

Series: Earth and Environmental Science. Orlando: IOP Publishing, 2019.

SHAKER, Francis J.. Effect of axial load on mode shapes and frequencies of beams. **Nasa Lewis Research Centre Report**, Washington, v. 8109, p.1-25, dez. 1975.

SHI, Luning; HE, Haoxiang; YAN, Weiming. Prestress Force Identification for Externally Prestressed Concrete Beam Based on Frequency Equation and Measured Frequencies. **Mathematical Problems In Engineering**, [S.L.], v. 2014, p. 1-13, 2014. Hindawi Limited. <http://dx.doi.org/10.1155/2014/840937>.

SKAF, Kalil José; STUCCHI, Fernando Reboças. **Alternativas de Representação da Protensão no Projeto de Estruturas de Concreto**. São Paulo: EPUSP, 1995.

SOUSA, André Filipe Martins de. **Desenvolvimento de um programa de elementos finitos versátil**. 2014. 150 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 2014.

SOUZA JUNIOR, Jorge Luiz de. **Análise Experimentalestática e Dinâmica de Viga de Concreto Armado Reforçada com Barras Externas Protendidas**. 2019. 58 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, 2019.

VAZ, Luiz Eloy. **Método dos elementos finitos em análises de estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

VERÍSSIMO, João Paulo dos Santos. **Efeitos da Protensão na Frequência Natural de Vigas de Concreto**. 2018. 72 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Centro de Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018.

VIBHUTE, Aditi S.; KOTULKAR, Poonam; KSHIRSAGAR, Trupti; JANRAO, Prachity. Analysis of Natural Frequency of Prestressed Steel Beam With Triangular Tendon Profile. **International Research Journal Of Engineering And Technology (irjet)**. India, p. 701-706. dez. 2016.

WANG, Ta-heng; HUANG, Ran; WANG, Tz-wei. The Variation of Flexural Rigidity for Post-Tensioned Prestressed Concrete Beams. **Journal Of Marine Science And Technology**. [s.l.], p. 300-308. jun. 2013.

ZHANG, Yao Ting; ZHENG, Yi; LI, Hong Jian. A Dynamic Test of Fully Prestressed Concrete Beams. **Advanced Materials Research**, Switzerland, v. 368-373, p. 2483-2490, out. 2011. Trans Tech Publications, Ltd.. <http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.368-373.2483>.

ZHAO, Xiao; FANG, Hongqiang. Analysis of cable force loss of prestressing structure during tension construction. **Progress in structure, pts 1-4**, China, v. 166-169, p. 809-814, 2012. Issn: 1660-9336.

ANEXO A - IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA

Após apresentar a base teórica do modelo de elementos finitos proposto para vigas com protensão no Capítulo 3, apresenta-se, nesse anexo, a forma em que foi feita a implementação do programa computacional para análise modal do modelo de elementos finitos, com o intuito de realizar as simulações apresentadas no Capítulo 4.

Neste trabalho, foi desenvolvido o programa baseado no ambiente MATLAB, no qual é possível realizar análise estática e dinâmica.

Segundo Borges et al. (2016), a linguagem de programação MATLAB é interpretada, acessível e vantajosa por conter uma vasta biblioteca de funções predefinidas que facilitam a execução de programas escritos. Adicionalmente, as ferramentas contidas nessa linguagem possibilitam a construção de interfaces gráficas interativas, o que torna um dos programas mais utilizados cientificamente para elaboração de códigos para análises com MEF.

Uma das principais características do MATLAB é que seu elemento básico de informação consiste em uma matriz, permitindo a rápida resolução de problemas numéricos, cujas soluções são escritas de forma muito similar à que é expressa matematicamente (KASSAB, 2009).

Este anexo, constitui-se de um guia introdutório do programa apresentado, sendo expressa uma parte das ferramentas desenvolvidas e será capaz de auxiliar o seu funcionamento. As descrições serão acompanhadas de um exemplo prático (Anexo B) e serão mostradas as partes mais importantes do código utilizado.

Um programa de análise estrutural apresenta três etapas essenciais: pré-processamento, processamento e pós processamento. No pré-processamento, o usuário fornece ao software os dados de entrada que, na sequência, serão lidos pelo programa. No processamento é feita a resolução numérica do problema (processamento de dados), dos quais terão seus resultados armazenados. Por fim, no estágio de pós-processamento os dados de saída são exibidos (REGO FILHO, 2017).

- Pré-processamento

A fase inicial, pré-processo, é imprescindível para que as demais etapas do programa forneçam resultados coerentes, visto que, é onde são lançados os dados que definem a estrutura, criando um conjunto de tabelas padrões que serão descritas a seguir.

Para obter a informação das características dos materiais, geometria da

estrutura e os carregamentos atuantes no modelo estrutural, são dispostos os seguintes métodos: *AddNodes* para a informação de localização dos nós, *AddSections* para as propriedades das seções, *AddMaterials* para as propriedades dos materiais, *AddElements* para a conexão entre os elementos e propriedades, *AddCables* para as propriedades do cabo de protensão, *AddFix* para definir as condições de contorno, *AddLoadN* para os carregamentos externos.

As variáveis especificadas, serão armazenadas como dados tabulares, pelo método " $T=array2table(A)$ ", ou seja, são apresentadas como tabelas onde cada coluna se torna uma variável, cujas variáveis são nomeadas a partir da nomenclatura da matriz de entrada anexa ao número da coluna. Na sequência cria-se uma variável "*FEM*" que contém todas as informações da estrutura e que resgata os valores das matrizes de entrada para a matriz de elementos finitos.

- Processamento

É na etapa de processamento que são realizados os cálculos para solução do problema e armazenamento dos resultados obtidos. Nesta fase, é importante identificar o número de graus de liberdade por nó. Aqui, serão consideradas duas direções relacionadas à posição (deslocamento) e uma rotação, totalizando em 3 graus de liberdade por nó.

Uma das primeiras instruções do processamento é a criação da variável "*FEM*" que possui os métodos para avaliação da matriz de rigidez, de massa e do vetor de forças nodais necessários à análise estática e modal.

De forma geral, o objetivo do processo é a obtenção da matriz global da estrutura "*KG*" a partir da montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças totais "*FT*".

A montagem da matriz de rigidez global é resultante da soma da matriz de rigidez elástica (*matriz2*) e a matriz de rigidez geométrica (*matriz4*). Na Figura 27, está representada a matriz de rigidez elástica no sistema local do elemento.

Aqui, cabe ressaltar que cada elemento tem um sistema de coordenadas locais que podem ser transformados para o sistema de coordenadas globais. Neste trabalho a matriz de rigidez elástica local do elemento é dada por:

Figura 27 - Matriz de rigidez elástica no sistema local contida no método *matriz2*

```

a1=E*A/L;
a2=E*I/L^3;

K=[a1 0 0 -a1 0 0;
  0 12*a2 6*L*a2 0 -12*a2 6*L*a2;
  0 6*L*a2 4*(L^2)*a2 0 -6*L*a2 2*(L^2)*a2;
 -a1 0 0 a1 0 0;
  0 -12*a2 -6*L*a2 0 12*a2 -6*L*a2;
  0 6*L*a2 2*(L^2)*a2 0 -6*L*a2 4*(L^2)*a2];%%Matriz de rigidez local
do elemento

```

Fonte: A autora, 2020

Como pode ser visto, a matriz fornecida deve ser multiplicada pelo módulo de elasticidade (E), pela área da seção transversal ($A = b.h$) e pelo momento de inércia ($I = b.h^3/12$), divididos pelo comprimento do elemento dado por:

$$L = \sqrt{((x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2)} \quad (94)$$

Sendo x e y valores correspondentes aos pontos (nó inicial e nó final) no plano cartesiano.

Já a matriz de rigidez geométrica “ kGg ” é dada pelo somatório de duas matrizes de rigidez geométricas “ $kgg1$ ”, “ $kgg22$ ” (Figura 28) que consideram a protensão variando linearmente ao longo do elemento e o efeito da carga axial e da presença do cabo de protensão.

Figura 28 - Matrizes que compõem a matriz de rigidez geométrica

```

kgg1=kgg1+[0 0 0 0 0 0;
  0 -2*(Pj-4*Pi)/(5*L) Pj/10 0 -3*(Pj+Pi)/(5*L) Pi/10;
  0 Pj/10 Pj*L/30+Pi*L/10 0 -Pj/10 -Pj*L/60-Pi*L/60;
  0 0 0 0 0 0;
  0 -3*(Pj+Pi)/(5*L) -Pj/10 0 3*(Pj+Pi)/(5*L) -Pi/10;
  0 Pi/10 -Pj*L/60-Pi*L/60 0 -Pi/10 Pj*L/10+Pi*L/30];
%
kgg22=kgg22+[0 0 0 0 0 0;
  0 -(Pi+11*Pj)/(5*L) -Pj/5-Pi 0 6*(Pj+Pi)/(5*L) -Pi/5;
  0 -Pj/5-Pi -Pj*L/15-Pi*L/5 0 Pj/5 Pj*L/30+Pi*L/30 ;
  0 0 0 0 0 0;
  0 6*(Pj+Pi)/(5*L) Pj/5 0 -(11*Pi+Pj)/(5*L) Pj+Pi/5
  0 -Pi/5 Pj*L/30+Pi*L/30 0 Pj+Pi/5 -Pj*L/5-Pi*L/15];

kGg=T'*kgg1*T+T'*kgg22*T;

```

Fonte: A autora, 2020

Após a montagem, essas matrizes devem ser transformadas para o sistema global, por meio da rotação do elemento pela matriz de transformação, dada na Figura 29.

Figura 29 - Matriz de transformação

```
function T=Transf(Angle)

T = [cos(Angle) sin(Angle) 0 0 0 0;
     -sin(Angle) cos(Angle) 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 0;
     0 0 0 cos(Angle) sin(Angle) 0;
     0 0 0 -sin(Angle) cos(Angle) 0;
     0 0 0 0 0 1];
```

Fonte: A autora, 2020

Na função da figura acima, o ângulo de inclinação para cada elemento é dado por:

$$\arctg = \left(\frac{y_f - y_i}{x_f - x_i} \right) \quad (95)$$

No entanto, no caso de uma viga, essa transformação não é efetuada. Tendo a matriz de rigidez elástica e a matriz de rigidez geométrica da viga, faz-se a retirada de linhas e colunas nulas e com grau de liberdade fixos, respectivamente.

Após a montagem de todas as matrizes de rigidez global dos elementos, é realizada a montagem da matriz de rigidez global da estrutura por meio da função “assembly”, que combina as parcelas correspondentes ao número de elementos em uma estrutura na íntegra.

Já o vetor de forças nodais equivalentes é definido quando são inseridos os carregamentos aplicados no elemento finito, cuja dimensão é dada pelo número de nós pelo número de graus de liberdade por nó.

Este vetor, é dado pela soma do vetor de forças nodais “FG” com os vetores de forças equivalentes para carregamentos axiais “FEA” e transversais “FET”, conforme Figura 30. No vetor de forças nodais globais são armazenadas as forças atuantes nos nós, na direção de cada um dos seus graus de liberdade no sistema global, e as reações nos apoios. O cálculo deste vetor é feito de forma análoga à estrutura apresentada para a matriz de rigidez.

Figura 30 - Vetor de forças totais

```
FT=FG+FEA+FET; %Vetor de forças totais
```

Fonte: A autora, 2020

Para a análise modal (frequência natural e modo de vibração) da viga, será utilizado o Método dos Elementos Finitos considerando um sistema em vibração livre, que ocorre quando o sistema vibra exclusivamente pela imposição das condições iniciais, sem que haja uma força externa aplicada (LIMA; SANTOS, 2008).

Assim, para a equação do equilíbrio dinâmico de um sistema sem amortecimento, será necessário calcular a matriz de massa do elemento (Figura 31).

Figura 31 - Matriz de massa

```
Mn=[mxi 0 0 0 0 0;
     0 myi 0 0 0 0;
     0 0 mzi 0 0 0;
     0 0 0 mxj 0 0;
     0 0 0 0 myj 0;
     0 0 0 0 0 mzj];%%Matriz de massa nodais local do
elemento

a3=ro*A*L;
a4=ro*A*L/420;

mm=[ 1*a3/3 0 0 1*a3/6 0 0;
     0 a4*156 a4*22*L 0 a4*54 -13*L*a4;
     0 22*L*a4 4*a4*L^2 0 13*a4*L -3*a4*L^2;
     1*a3/6 0 0 1*a3/3 0 0;
     0 54*a4 13*L*a4 0 156*a4 -22*L*a4;
     0 -13*L*a4 -3*a4*L^2 0 -22*L*a4 4*a4*L^2];

Mm1=T'*mm*T;

Mm2=T'*Mn*T;

Mm=Mm1+Mm2;
```

Fonte: A autora, 2020

Sendo ro a massa específica do material. Resultando em um problema de autovalores e autovetores. No MATLAB a solução para esse problema é feita pelo comando abaixo (Figura 32).

Figura 32 - Solução de autovalores e autovetores

$$[MVibr, W] = eig(KT, MGg);$$

Fonte: A autora, 2020

O comando “*eig*”, é utilizado para resolver automaticamente este tipo de problema, retornando uma matriz diagonal “*W*” de autovalores e uma matriz completa de “*Mvibr*” cujas colunas sejam autovetores.

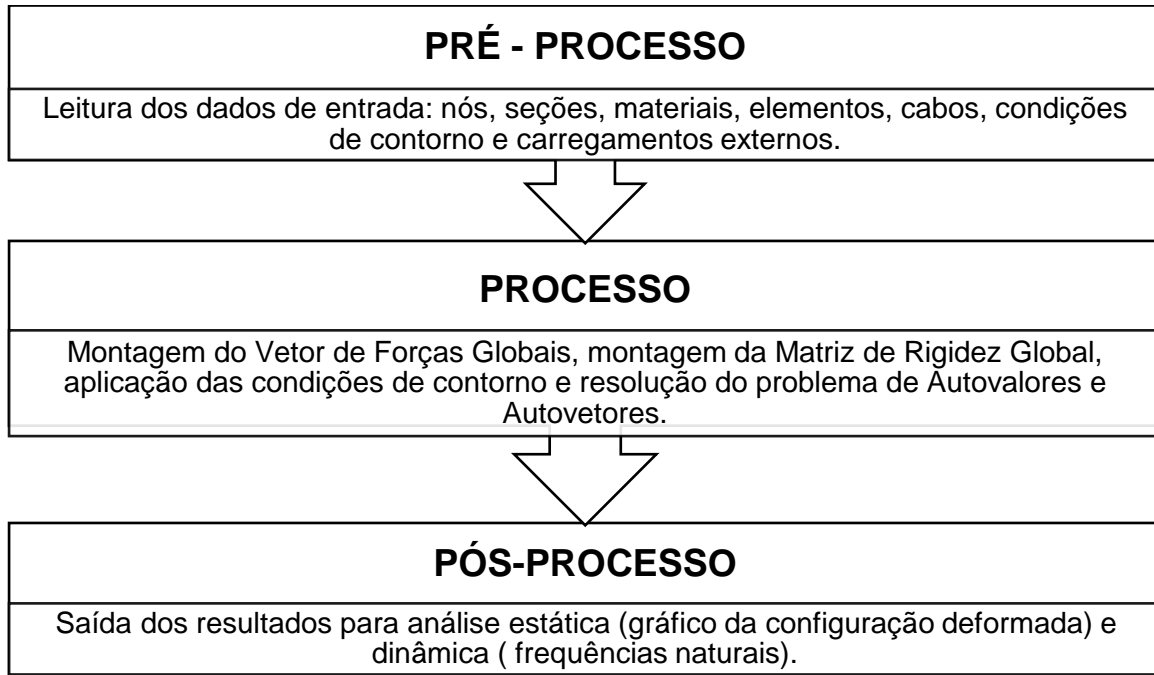
Em suma, são processadas as variáveis de entrada, depois é feita a montagem e resolução do problema estático e dinâmico de autovalores e autovetores, além da transformação das matrizes e vetores do sistema local do elemento para o sistema global da estrutura.

Portanto, na fase de processamento da resolução do problema pelo Método dos Elementos Finitos, há uma série de etapas que precisam ser processadas. As etapas fundamentais descritas foram: definir o número de discretização do domínio, gerar a matriz de rigidez local do elemento, gerar a matriz de rigidez global, a matriz de massa local do elemento e, posteriormente, a matriz de massa global da estrutura e o vetor de forças nodais. Após a inserção de todas as matrizes e suas propriedades, foram introduzidas as condições de contorno para então ser realizada a análise estática e modal. Por último, são resolvidos os problemas de autovalores e autovetores para então iniciar a fase de pós-processamento, saída dos resultados (KASSAB, 2009).

- Pós-processamento

O estágio de pós-processamento é responsável pela apresentação dos dados de saída, sejam eles em formato de texto ou gráficos. A saída para a análise estática consiste em uma representação gráfica da configuração deformada ao longo do comprimento da viga proposta. Já para os resultados da análise modal, tem-se as frequências naturais correspondentes a cada força de protensão aplicada.

A seguir, na Figura 33 é apresentado um fluxograma que sintetiza as etapas do modelo descritas acima.

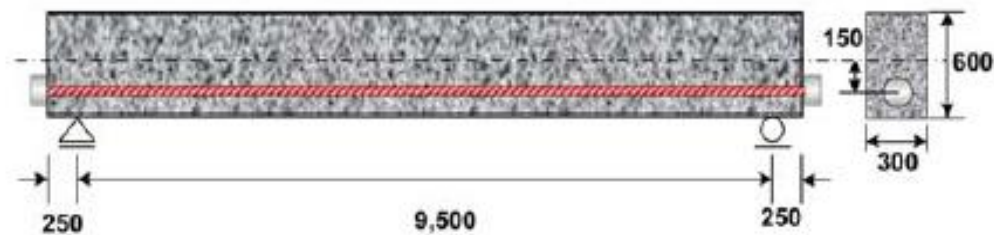
Figura 33 - Etapas do programa de elementos finitos

Fonte: A autora, 2020

ANEXO B - EXEMPLO DE USO DE PROGRAMA PARA ANÁLISE MODAL

Com o objetivo de instruir quanto ao uso do programa proposto, é apresentado um exemplo de viga que consta no trabalho de Noh et al. (2015). A viga biapoiada, apresentada na Figura 34, tem 10 metros de comprimento, seção transversal de 0,30 x 0,60 m, foi protendida por um cabo reto posicionado a 15 cm do centroide da seção, diâmetro de 15,20 mm. O modelo de elementos finitos é discretizado em 20 elementos. As forças de protensão aplicadas experimentalmente foram: 0, 272, 544, 816 e 1088 kN.

Figura 34 - Viga de exemplo para análise modal teórica



Fonte: NOH et al., 2015

A frequência natural encontrada pelo autor antes da aplicação da protensão foi de 9,16 Hz. Assim, para este modelo, o f_{ck} calibrado em relação a primeira frequência foi de 25,77 Mpa.

O primeiro procedimento consiste em fornecer ao programa as informações que devem ser lidas e que servirão para a análise do problema. Os dados fornecidos correspondem à geometria e às propriedades do sistema estrutural, bem como os carregamentos atuantes e suas condições de contorno. As variáveis que não foram citadas, são fixas e comum a todos os exemplos. Assim, os dados de entrada para este exemplo foram (Figura 35):

Figura 35 - Dados de entrada no modelo

```

%%PRE-PROCESSO%%
fck=25.77; %MPa Resistência do concreto
alfa=1;
Ec=alfa*5600*sqrt(fck)*1e6; %Módulo de elasticidade do concreto

phip=15.2/1000; %m %Diâmetro do cabo
Ap=pi*phip^2/4; %m^2 %área dos aços dos cabos
Ip=pi*phip^4/2; %Inércia dos cabos
Ep=210e9; %N/m^2 %módulo de elasticidade dos cabos
h=0.6; %m %Altura da viga
Yc_inf= h/2; %Centroide da seção.
b=0.3; %largura da viga
A=b*h; %A
I=(b*h^3)/12;%m^4
L=10; %comprimento da viga
rop=7860;%kg/m^3
roc=2500;%kg/m^3
rot=(roc*A*L+Ncabos*rop*Ap*L)/(A*L);
n=1;
Pcr= n^2*(pi^2*Ec*I)/(L^2); %Pcritico
W=rop*A; %Carregamento produto do peso proprio.
%Pi=linspace(0,0.999*Pcr,10);
Pi=1000*[0 272 544 816 1088];
Por=100*Pi/Pcr;
Ncabos=1; %Número de cabos

Nel=20; %numero de elementos
Nn=Nel+1; %Numero de nós
Al=L/Nel; %Comprimento de cada elementos

```

Fonte: A autora, 2020

A seguir, Figura 36, deve ser definido o posicionamento e perfil do cabo. A primeira variável para definição da posição “*e1*” consiste na altura inicial e final dos cabos. Já a variável “*em*” é a altura no ponto médio, lembrando que, esta altura é sempre em relação à base. Em ambos os casos, o número de colunas depende do número de cabos de protensão.

Figura 36 - Dados de entrada para configuração do cabo de protensão

```

%Posição dos cabos com curvatura parabólica
e1=[0.15]; %Altura inicial e final dos cabos
em=[0.15]; %Altura no médio

```

Fonte: A autora, 2020

O próximo passo é a definição das características dos nós, seção, material, elementos, cabos de protensão, deslocamentos, força de protensão, força distribuída transversal. A seguir, são apresentadas as instruções para que se possa definir as propriedades do modelo.

O pré-processo foi moldado com o objetivo de organizar e melhorar o lançamento dos dados de entrada no programa. Para isso, pelo método “*Model = initial ()*” criou-se um conjunto de tabelas padrão com todas as informações necessárias para o processo de análise posterior.

A primeira inserção de dados, consiste na matriz de nós (*Nodes*) composta de três colunas das quais indicam o número do nó (*id*), sua posição em x e em y, já o número de linhas depende da quantidade de nós, conforme mostrado na Figura 37, que apresenta a matriz “*Nodes*”.

Figura 37 - Inserção das informações dos nós

```
for j=0:Nn-1
Nodes (j+1, 1)=j+1;
Nodes (j+1, 2)=Al*j;
Nodes (j+1, 3)=0;
end
Model=AddNodes (Model, Nodes) ;
```

Fonte: A autora, 2020

Logo, a matriz “*Nodes*”, é dada pela Figura 38:

Figura 38 - Mariz “*Nodes*”

Nodes =		
1.0000	0	0
2.0000	0.5000	0
3.0000	1.0000	0
4.0000	1.5000	0
5.0000	2.0000	0
6.0000	2.5000	0
7.0000	3.0000	0
8.0000	3.5000	0
9.0000	4.0000	0
10.0000	4.5000	0
11.0000	5.0000	0
12.0000	5.5000	0
13.0000	6.0000	0
14.0000	6.5000	0
15.0000	7.0000	0
16.0000	7.5000	0
17.0000	8.0000	0
18.0000	8.5000	0
19.0000	9.0000	0
20.0000	9.5000	0
21.0000	10.0000	0

Fonte: A autora, 2020

Essa primeira informação foi salva numa tabela padrão, dentro de

“*Model=Initial()*”, com nome de “*FEM.Nodes*” com a identificação dos componentes de cada coluna (“*id*”, “*x*”, “*y*”).

A seção transversal bem como o material utilizado, são os mesmos para todos os elementos. Assim, as matrizes “*Sections*” e “*Materials*” serão salvas no “*Model=Initial()*” como “*FEM.Sections*” e “*FEM.Materials*”. Ambas as matrizes são constituídas por duas linhas, sendo a primeira linha referente ao concreto e a segunda ao aço usado na protensão, tal como segue na Figura 39 a seguir:

Figura 39 - Inserção das matrizes de seções e materiais

```
Sections=[1 A I; 2 Ap Ip];
Model=AddSections(Model,Sections);

Materials=[1 Ec rot;2 Ep rop];
Model=AddMaterials(Model,Materials);
```

Fonte: A autora, 2020

Que resultam em (Figura 40):

Figura 40 - Resultados para as matrizes “*Sections*” e “*Materials*”

Sections =		
1.0000	0.1800	0.0054
2.0000	0.0002	0.0000
Materials =		
1.0e+11 *		
0.0000	0.2843	0.0000
0.0000	2.1000	0.0000

Fonte: A autora, 2020

Os elementos da viga foram lançados segundo a matriz “*Elements*”, com o número de linhas equivalente ao número de elementos e cinco colunas. A primeira coluna faz referência aos números dos indicadores dos elementos (*id*), a segunda refere-se aos valores do nó inicial (*noi*) de cada elemento, a terceira dos valores do nó final (*nof*) de cada elemento, a quarta dos identificadores do valor da seção transversal de cada elemento e a quinta dos identificadores do valor do módulo de elasticidade de cada elemento (Figura 41).

Figura 41 - Comandos para a construção da matriz “*Elements*”

```

for j=1:Nel
%'id','Noi','Nof','Sec','Mat'
Elements(j,:)= [j,j,j+1,1,1];
end

Model=AddElements(Model,Elements);

```

Fonte: A autora, 2020

A matriz “*Elements*” pode ser verificada na Figura 42 logo a seguir.

Figura 42 - Matriz “*Elements*” para o exemplo em questão

Elements =				
1	1	2	1	1
2	2	3	1	1
3	3	4	1	1
4	4	5	1	1
5	5	6	1	1
6	6	7	1	1
7	7	8	1	1
8	8	9	1	1
9	9	10	1	1
10	10	11	1	1
11	11	12	1	1
12	12	13	1	1
13	13	14	1	1
14	14	15	1	1
15	15	16	1	1
16	16	17	1	1
17	17	18	1	1
18	18	19	1	1
19	19	20	1	1
20	20	21	1	1

Fonte: A autora, 2020

Essa informação foi salva na tabela padrão com o nome de “*FEM.Elements*”, com a identificação dos componentes de cada coluna (“*id*”, “*Noi*”, “*Nof*”, “*Sec*”, “*Mat*”).

A matriz “*Cables*” é constituída de 20 linhas (número de elementos) e oito colunas sendo a primeira o identificador do cabo “*id*”, o identificador do elemento “*ide*”, força aplicada no nó inicial “*Pi*”, força aplicada no nó final “*Pf*”, excentricidade no nó inicial do elemento “*exci*”, excentricidade no nó final do elemento “*excf*”, número correspondente à seção e ao material, tal como segue (Figura 43).

Figura 43 - Método para inserir os cabos de protensão

```

for z=1:Ncabos
for j=1:Nel
    con1=con1+1;
    %'id','ide','Pi','Pf','exci','excf','Sec','Mat'
    Cables(con1,:)=[z,j,-k,-k,Exc(j,z),Exc(j,z),2,2];

end
end

Model=AddCables(Model,Cables);

```

Fonte: A autora, 2020

que resulta na seguinte matriz (Figura 44):

Figura 44 - Matriz "Cables"

Cables =							
1.0000	1.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	2.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	3.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	4.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	5.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	6.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	7.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	8.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	9.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	10.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	11.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	12.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	13.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	14.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	15.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	16.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	17.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	18.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	19.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000
1.0000	20.0000	0	0	0.1500	0.1500	2.0000	2.0000

Fonte: A autora, 2020

A matriz "Fix", Figura 45, representa os apoios utilizados para a modelação da estrutura, sendo que a primeira coluna representa a identificação dos nós "id" que apresentam algum tipo de apoio (em uma viga biapoiada será sempre o primeiro e o último), a segunda dos valores de deslocamento para a translação no eixo "x" de cada nó, a terceira dos valores de deslocamento para a translação no eixo "y" e a quarta dos valores de deslocamento para a rotação ao redor do eixo "z".

Figura 45 - Inserção da matriz de representação dos apoios

```

Fix=[1 NaN 0 NaN;Nn 0 0 NaN];

%valor de deslocamento (x, y e Rz).
Model=AddFix(Model,Fix);

```

Fonte: A autora, 2020

Nesta matriz, o valor “0” significa que o grau de liberdade de translação ou rotação no respectivo eixo foi fixado (deslocamento zero), e *NaN* significa que o grau de liberdade no respectivo eixo é livre. A matriz “Fix” pode ser verificada logo a seguir (Figura 46).

Figura 46 - Matriz “Fix”

Fix =			
1	NaN	0	NaN
21	0	0	NaN

Fonte: A autora, 2020

Essa informação foi salva na tabela padrão com o nome de “*Fem.Fix*”, com a identificação dos componentes de cada coluna (“*id*”, “*x*”, “*y*”, “*theta*”).

Sequencialmente, serão inseridas as matrizes dos carregamentos aplicados (Figura 47). A matriz “*LoadN*” é onde são inseridos os valores das forças e momentos concentrados nos nós. Possui uma linha e quatro colunas. A primeira coluna faz referência ao número do indicador do nó onde está aplicado os carregamentos externos (*id*), a segunda dos valores da força externa no eixo *x* (*Fx*) no nó, a terceira do valor da força externa no eixo *y* (*Fy*) e a quarta do valor do momento fletor externo ao redor do eixo *z* (*M*).

Figura 47 - Matriz dos carregamentos aplicados

```

LoadN=[1 0 0 0];
Model=AddLoadN(Model,LoadN);

```

Fonte: A autora, 2020

Para este exemplo, nenhuma força externa foi considerada.

A força distribuída transversal, dada pela matriz “*LoadDT*”, em que a primeira coluna representa o identificador do elemento submetido a esse esforço sendo as próximas colunas os valores dos carregamentos distribuídos nos nós inicial e final do

elemento em questão é dada por (Figura 48):

Figura 48 - Matriz para a força distribuída transversal

```
for j=1:Ne1
LoadDT = [j -W -W];
Model=AddLoadDT (Model, LoadDT); %Força distribuída transversal
end
```

Fonte: A autora, 2020

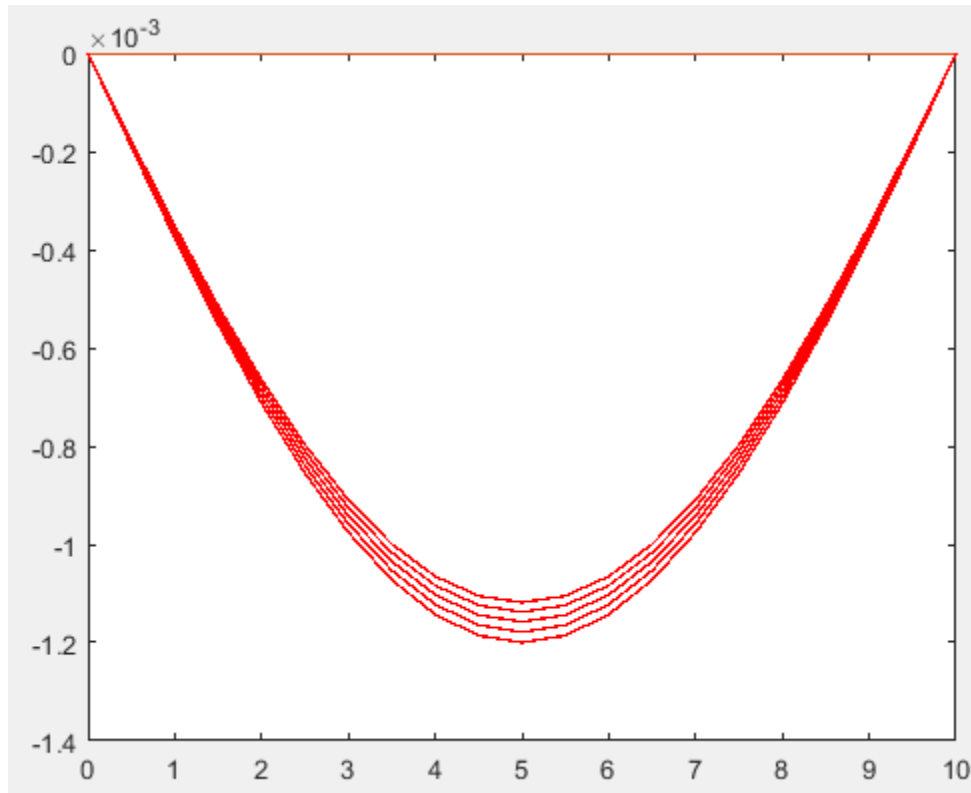
Essas informações serão salvas na tabela padrão “*Model=Initial()*” e então finaliza-se o pré-processo. Após a determinação de todas as características da estrutura e a criação dos elementos finitos, iniciam-se os métodos para obter a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais. A análise estática é feita pelo método “*Analysis7*”, como mostra a Figura 49.

Figura 49 - Análise estática

```
Model=Analysis7 (Model, 2);
con=con+1;
PlotEst (Model, 1, 2)
hold on
```

Fonte: A autora, 2020

Do qual resulta em um gráfico, contendo os deslocamentos de cada ponto nodal do problema estático para cada força de protensão aplicada. Ou seja, a saída de dados para a análise estática é dada por um gráfico da configuração deformada para cada nó da viga (Figura 50).

Figura 50 - Gráfico resultante da análise estática

Fonte: A autora, 2020

Após a análise estática, é realizada a análise dinâmica do modelo, os quais avaliam as frequências naturais e os modos de vibração (Figura 51).

Figura 51 - Método para análise dinâmica

```

%OBTENÇÃO DA MATRIZ GEOMÉTRICA GLOBAL

Model2=Analysis2(Model);
% PlotModal(Model2,1,1);
% hold on

for j=0:Nn-1
Uesti=RecordNode(Model,j+1,2);
Uest(j+1,con)=Uesti(2);
end

%
Wni=Model2.Cal{10,1}{1};
Fn1(con,1)=Wni(1)/(2*pi);

Fn1

```

Fonte: A autora, 2020

O resultado apresentado pelo programa consiste na frequência natural correspondente a cada força de protensão aplicada (Figura 52).

Figura 52 - Frequências naturais para o primeiro modo para cabo com perfil parabólico

$F_{n1} =$
9.1600
9.2429
9.3251
9.4066
9.4873

Fonte: A autora, 2020