UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Doutorado)

ADRIANA FLORES DE ALMEIDA

Controlabilidade Exata Interna e Estabilização Assintótica para Equações Dinâmicas de Elasticidade para Materiais Incompressíveis com um Termo de Pressão e Estabilização Assintótica para dois Sistemas Acoplados Semilineares da Onda

Maringá

2018

ADRIANA FLORES DE ALMEIDA

Controlabilidade Exata Interna e Estabilização Assintótica para Equações Dinâmicas de Elasticidade para Materiais Incompressíveis com um Termo de Pressão e Estabilização Assintótica para dois Sistemas Acoplados Semilineares da Onda

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti

Maringá

2018

Ficha catalográfica elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação da BIUNILA- Biblioteca Latino – Americana

A447c Almeida, Adriana Flores de.

Controlabilidade exata interna e estabilização assintótica para equações dinâmicas de elasticidade para materiais incompressíveis com um termo de pressão e estabilização assintótica para dois sistemas acoplados semilineares da onda / Adriana Flores de Almeida. - Maringá, 2018.

185 f. : il.

Orientador: Marcelo Moreira Cavalcanti.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática - - Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Universidade Estadual de Maringá.

1. Equações dinâmicas – elasticidade. 2. Sistemas acoplados semilineares. I. Cavalcanti, Marcelo Moreira, Orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU (2. ed.): 517.93

ADRIANA FLORES DE ALMEIDA

CONTROLABILIDADE EXATA INTERNA E ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA PARA EQUAÇÕES DINÂMICAS DE ELASTICIDADE PARA MATERIAIS INCOMPRESSÍVEIS COM UM TERMO DE PRESSÃO E ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA PARA DOIS SISTEMAS ACOPLADOS SEMILINEARES DA ONDA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Marcelo Moreira Cavalcanti

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Profa. Dra. María Rosario Astudillo Rojas
Universidade Federal do Paraná

Wellington José Corrêa

Prof. Dr. Wellington José Corrêa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campo Mourão

Juan Soriano

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino
Universidade Estadual de Maringá

Claudete Webler

Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins
Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 17 de dezembro de 2018.
Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a
meu marido e
companheiro Anísio.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por permitir a escolha e o trilhar dos meus caminhos, acompanhando-me e amparando-me;

Ao meu marido Anisio, por ter me ajudado em todos os sentidos para que este trabalho fosse realizado, pela confiança, carinho em todos os momentos;

A minha mãe, que sempre esteve ao meu lado me apoiando e me incentivando;

Ao professor Marcelo Moreira Cavalcanti, pela competente e dedicada orientação, pela seriedade e pela paciência com que conduziu este trabalho e pela confiança que em mim depositou;

Aos professores da banca examinadora pelas oportunas correções e sugestões;

Aos professores e técnicos da UEM que contribuíram com a minha formação e com seus exemplos como profissionais, em especial, à professora Valéria Cavalcanti.

Aos amigos que fiz nessa jornada até aqui e que nunca irei esquecer, em especial, Janaina, Gisele, Vanderléa, Cláudia, Luana, Maria, Victor, Emanuela e Alisson;

A UNILA, em especial, ao ILACVN diretores e suas equipes de 2013-2014 que viabilizou o meu afastamento total para cursar o doutorado;

A CAPES por apoiar o Programa de Pós-graduação em Matemática;

A todos que contribuíram, de forma direta, ou indiretamente, para concretizacão deste trabalho, meu muito obrigada!

E conhecereis a verdade e a verdade vos libertará.

João 8:32.

Resumo

Neste trabalho, analisamos a controlabilidade exata interna para o seguinte modelo de equações dinâmicas de elasticidade para materiais incompressíveis com um termo de pressão,

$$\phi'' - \Delta\phi = -\nabla p,$$

e também é dedicado ao estudo das taxas de decaimento uniforme da energia associada ao mesmo modelo, sujeito a uma dissipação não linear localmente distribuída

$$\phi'' - \Delta\phi + a(x)g(\phi') = -\nabla p.$$

Além disso, estudamos os seguintes sistemas acoplados semilineares da onda sujeitos a uma dissipação não linear localmente distribuída

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \mathrm{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(u_t) - \gamma(x)v_t = 0, \\ \rho(x)v_{tt} - \mathrm{div}[K(x)\nabla v] + h(v) + b(x)g(v_t) + \gamma(x)u_t = 0, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \mathrm{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(u_t) + \delta v = 0, \\ \rho(x)v_{tt} - \mathrm{div}[K(x)\nabla v] + h(v) + b(x)g(v_t) + \delta u = 0. \end{cases}$$

Mostramos a existência de taxas de decaimento uniforme para a solução global dos respectivos sistemas.

Palavras chave: controlabilidade exata interna, materiais incompressíveis, dissipação não linear, taxa de decaimento uniforme, sistema acoplado.

Abstract

In this work, we analyze the internal exact controllability of the following model of dynamical elasticity equations for incompressible materials with a pressure term,

$$\phi'' - \Delta\phi = -\nabla p,$$

and it is also devoted to the study of the uniform decay rates of the energy associated with the same model subject to a locally distributed nonlinear damping

$$\phi'' - \Delta\phi + a(x)g(\phi') = -\nabla p.$$

Furthermore, we study the following coupled semilinear wave systems subject to a locally distributed nonlinear damping

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \mathrm{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(u_t) - \gamma(x)v_t = 0, \\ \rho(x)v_{tt} - \mathrm{div}[K(x)\nabla v] + h(v) + b(x)g(v_t) + \gamma(x)u_t = 0, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \mathrm{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(u_t) + \delta v = 0, \\ \rho(x)v_{tt} - \mathrm{div}[K(x)\nabla v] + h(v) + b(x)g(v_t) + \delta u = 0. \end{cases}$$

We prove the existence of uniform decay rates for the global solution of the respective systems.

Key words: internal exact controllability, incompressible materials, non linear damping, uniform decay rates, coupled system.

Sumário

Introdução

O presente trabalho aborda equações dinâmicas de elasticidade para materiais incompressíveis com um termo de pressão e aborda dois sistemas acoplados semilineares de equações da onda postos em um meio não homogêneo e sujeitos a uma dissipação não linear localmente distribuída. No primeiro problema estudamos a controlabilidade exata interna e, além disso, estudamos a existência de solução e taxa de decaimento uniforme da energia associada ao mesmo problema sujeito a uma dissipação não linear localmente distribuída. No segundo problema, estudamos a existência de solução e taxa de decaimento uniforme da energia associada.

O primeiro problema considerado, é descrito por

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = -\nabla p \ \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \ \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ \phi = \psi \ \text{ sobre } \Gamma\times]0,T[, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

onde Ω é um subconjunto aberto, limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ com fronteira regular Γ. Além disso, $\phi = (\phi_1(x,t), \cdots, \phi_n(x,t))$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ são vetores de dimensão n, $p = p(x,t)$ é uma função numérica definida em $\Omega\times]0,T[$ e $\operatorname{div}\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi_i}{\partial x_i}$. Com Δ e ∇ denota-se o operador de Laplace e o gradiente, respectivamente nas, coordenadas espaciais x. Convenciona-se que $\Delta\phi = (\Delta\phi_1, \cdots, \Delta\phi_n)$, $\phi'' = (\phi_1'', \cdots, \phi_n'')$, onde o símbolo$'$ denota ∂_t.

O sistema (0.0.1) foi estudado por J.L. Lions em [43], motivado por equações dinâmicas de elasticidade para materiais incompressíveis. Assumindo que Ω é estritamente estrelado com respeito à origem, J.L. Lions em [43] provou que a derivada normal da solução

ϕ de (0.0.1) pertence a $(L^2(\Sigma))^n$ enquanto A. R. Santos em [51] estabeleceu a controlabilidade exata na fronteira para o problema (0.0.1). Nesta direção, mencionamos também o trabalho devido a Cavalcanti et al. em [20], cuja controlabilidade exata na fronteira da equação viscoelástica

$$\phi'' - \Delta\phi - \int_0^t g(t-s)\Delta\phi(s)\, ds = -\nabla p,$$

foi estudada.

O sistema (0.0.1) pode ser obtido da segunda lei de Newton considerando pequenas deflexões de Ω, onde Ω é um sólido composto de elástico, isotrópico e de material incompressível, (como algum tipo de borracha). Para mais informações sobre uma interpretação física para este modelo veja A.R. Santos em [51] e Cavalcanti et al. em [20].

Inspirados nos trabalhos mencionados acima, estudamos no **Capítulo** 2 a controlabilidade exata interna para o sistema

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = -\nabla p + h\chi_\omega \ \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \ \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \Gamma\times]0,T[, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \ \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{0.0.2}$$

onde $\omega \subset \Omega$ e χ_ω é a função característica de ω e ω é uma vizinhança da fronteira Γ satisfazendo a condição geométrica de controle.

Como formalizado por J. L. Lions em HUM (Hilbert Uniqueness Method) em [42], temos que a controlabilidade exata interna para o sistema (0.0.2), é obtida explorando a desigualdade de observabilidade, (veja (0.0.4)), para o seguinte sistema

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = -\nabla p \ \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \ \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \Gamma\times]0,T[, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \ \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{0.0.3}$$

Dessa forma, provamos que para todo $T > T_0$ existe $C > 0$ tal que

$$E_\phi(0) \le C \int_0^T \int_\omega |\phi'(x,t)|^2\, dxdt, \tag{0.0.4}$$

vale para toda solução fraca ϕ do problema associado (0.0.3), onde

$$E_\phi(t) = \frac{1}{2}\left\|\phi(t)\right\|_V^2 + \frac{1}{2}\left|\phi'(t)\right|_H^2$$

é a energia associada ao problema (0.0.3). Neste capítulo, combinamos multiplicadores adequados para estabelecer (0.0.4). Seguimos os mesmos passos de como é feito para a equação da onda em J.L. Lions [42].

Ainda no **Capítulo** 2, provamos a existência e unicidade de soluções fracas e investigamos a taxa de decaimento uniforme da energia associada ao problema (0.0.1) sujeito a uma dissipação não linear localmente distribuída como segue

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi + a(x)g(\phi') = -\nabla p \ \text{ em } \Omega\times]0,\infty[, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \ \text{ em } \Omega\times]0,\infty[, \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \Gamma\times]0,\infty[, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{0.0.5}$$

A saber, considerando a energia associada ao problema (0.0.5):

$$E_\phi(t) = \frac{1}{2}\left\|\phi(t)\right\|_V^2 + \frac{1}{2}\left|\phi'(t)\right|_H^2,$$

provamos que

$$E_\phi(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t > T_0, \tag{0.0.6}$$

com $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = 0$, onde o semigrupo de contração $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \tag{0.0.7}$$

e q é dado em (2.2.147) para toda solução fraca do problema (0.0.5).

Para obter este resultado, observamos que a solução ϕ do problema (0.0.5) pode ser reescrita como uma soma $\phi = v + w$ onde v e w são, respectivamente, soluções fracas dos seguintes problemas:

$$\begin{cases} v'' - \Delta v = -\nabla p \ \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ \operatorname{div} v = 0 \ \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ v = 0 \ \text{ sobre } \Gamma\times]0,T[, \\ v(0) = \phi^0, \quad v'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w'' - \Delta w = -a(x)g(\phi') \ \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ \operatorname{div} w = 0 \ \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ w = 0 \ \text{ sobre } \Gamma\times]0,T[, \\ w(0) = w'(0) = 0 \ \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Consequentemente, explorando a desigualdade de observabilidade (0.0.4) e a decomposição acima $\phi = v + w$ somos capazes de provar a seguinte desigualdade

$$E_\phi(T) \leq C \int_0^T \int_\Omega a(x) \left(|\phi'(x,t)|^2 + |g(\phi'(x,t))|^2 \right) dxdt, \quad \text{para todo } T > T_0, \qquad (0.0.8)$$

onde C é uma constante positiva. A desigualdade acima é o ponto chave para obter a taxa de decaimento uniforme dado em (0.0.6). Considerando o método desenvolvido primeiramente por Lasiecka e Tataru em [39], é possível derivar taxa de decaimento uniforme explícita da fórmula geral (0.0.6) (veja por exemplo, [1], [2], [21] e [25]).

No **Capítulo** 3, vamos generalizar os resultados obtidos no Capítulo 2. Neste capítulo, para provar a desigualdade de observabilidade (0.0.4), fazemos uso de argumentos de análise microlocal devido a N. Burq e P. Gérard em [17]. No presente trabalho, provamos que não há necessidade de considerar a hipótese do Ω ser estritamente estrelado quando considera controle interno em volta de uma vizinhança de ω da fronteira $\Gamma := \partial\Omega$ de Ω satisfazendo a condição geométrica de controle, no sentido a ser precisado adiante.

Para provar (0.0.4), argumentamos por contradição e encontramos uma sequência $\{v_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de soluções fracas para o problema (0.0.3) tal que

$$E_{v_m}(0) = 1, \quad \text{para todo } \; m \in \mathbb{N}.$$

Para obter uma contradição, precisamos provar que $E_{v_m}(0)$ converge para zero quando $m \to +\infty$. Devemos provar isso, usando uma equipartição adequada da energia e um princípio de continuação única, tal que

$$\int_0^T \int_\omega (\left|v'_{m_i}(x,t)\right|^2 + |\nabla v_{m_i}(x,t)|^2)\, dxdt \to 0, \ \forall i = 1, \cdots, n. \qquad (0.0.9)$$

quando $m \to +\infty$.

Nosso desejo é propagar a convergência (0.0.9) de $\omega\times]0,T[$ para todo o conjunto $\Omega\times]0,T[$. Para tal, fazemos uso de análise microlocal. Consideramos a medida de defeito microlocal μ_i, (m.d.m.), primeiramente introduzida por P. Gérard [32], associada a $\{v'_{m_i}\}$. Observamos uma vez que

$$\partial_t P v_{m_i} \to 0 \;\; \text{fortemente em} \;\; H^{-1}_{loc}(\Omega\times]0,T[),$$

onde $Pv_{m_i} =: v''_{m_i} - \Delta v_{m_i}$, então, usando propriedades associadas a μ_i somos capazes de provar que μ_i se propaga ao longo do fluxo bicaracterístico do operador de ondas $\partial_t P v_{m_i}$ provando a convergência desejada.

No **Capítulo 4**, voltamos nossa atenção para o próximo problema abordado, vamos investigar a estabilidade assintótica de dois sistemas acoplados semilineares da onda postos em um meio não homogêneo e sujeitos a uma dissipação não linear localmente distribuída. A saber,

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(u_t) - \gamma(x)v_t = 0 \text{ em } \Omega\times]0,\infty[, \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla v] + h(v) + b(x)g(v_t) + \gamma(x)u_t = 0 \text{ em } \Omega\times]0,\infty[, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times]0,\infty[, \\ u(0) = u^0,\ u_t(0) = u^1 \text{ em } \Omega, \\ v(0) = v^0,\ v_t(0) = v^1 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{0.0.10}$$

e

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(u_t) + \delta v = 0 \text{ em } \Omega\times]0,\infty[, \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla v] + h(v) + b(x)g(v_t) + \delta u = 0 \text{ em } \Omega\times]0,\infty[, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times]0,\infty[, \\ u(0) = u^0,\ u_t(0) = u^1 \text{ em } \Omega, \\ v(0) = v^0,\ v_t(0) = v^1 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{0.0.11}$$

onde Ω é um domínio do $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$, com fronteira suave $\partial\Omega$, $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $k_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq d$ são funções $C^\infty(\Omega)$ tais que para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2, \tag{0.0.12}$$

onde $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$ são constantes positivas e $K(x) = (k_{ij})_{i,j}$ é uma matriz simétrica positiva-definida. Vamos denotar por $\omega \subset \Omega$ um conjunto aberto dado pela interseção de uma vizinhança aberta da fronteira $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^n$ e que controla geometricamente a equação (0.0.10) e (0.0.11), em um sentido a ser precisado adiante.

O principal objetivo deste capítulo é provar a existência e unicidade de soluções fracas para os problemas (0.0.10) e (0.0.11) e, além disso, que estas soluções decaem uniformemente para zero, isto é, denotando $E(t) = E_{u,v}(t)$ a energia associada ao problema (0.0.10) ou (0.0.11) tem-se

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t > T_0, \tag{0.0.13}$$

com $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$, onde o semigrupo de contração $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \tag{0.0.14}$$

onde q é dado em (4.1.177) para toda solução fraca do problema (0.0.10) ou (0.0.11) desde que $\{u^0, v^0, u^1, v^1\}$ sejam tomados em conjuntos limitados de $(H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2$.

Onde

$$\begin{aligned} E(t) := \int_\Omega & \rho(x)|u_t(x,t)|^2 + \rho(x)|v_t(x,t)|^2 + \nabla u(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla u(x,t) \\ & + \nabla v(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x,t) + F(u(x,t)) + H(v(x,t))dx \end{aligned} \tag{0.0.15}$$

e

$$\begin{aligned} E(t) := \int_\Omega & \rho(x)|u_t(x,t)|^2 + \rho(x)|v_t(x,t)|^2 + \nabla u(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla u(x,t) \\ & + \nabla v(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x,t) + F(u(x,t)) + H(v(x,t))dx + \delta \int_\Omega u(x,t)v(x,t)dx \end{aligned} \tag{0.0.16}$$

são as energias associadas aos problemas (0.0.10) e (0.0.11), respectivamente.

Este resultado é um *resultado de estabilização local*. De fato, as taxas de decaimento dadas em (0.0.13) são uniformes sobre cada bola $(H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2$ com raio $R > 0$ no espaço da energia, mas este resultado não garante que a taxa decai globalmente, isto é, que (0.0.13) vale independente dos dados iniciais.

A fim de obter a taxa de decaimento dada em (0.0.13) é suficiente obter a desigualdade inversa para os problemas (0.0.10) ou (0.0.11), isto é, dado $T > T_0$ existe uma constante positiva C tal que

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_\Omega \Big(a(x)(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2) + b(x)(|g(v_t)|^2 + |v_t|^2) \Big) dxdt, \tag{0.0.17}$$

desde que os dados iniciais sejam tomados em conjuntos limitados de $(H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2$. Combinando a abordagem dada por Dehman, Gérard e Lebeau em [29] ou Dehman, G. Lebeau e Zuazua em [30] com o princípio de continuação única provado em [59], as imersões de Sobolev e as estimativas de Strichartz provadas [11] e [18] obtemos a prova da desigualdade inversa (0.0.17) para o sistema (0.0.10). No sistema (0.0.11) combinamos a abordagem dada

[29] ou [30] com o princípio de continuação única provado em [26] com as imersões de Sobolev para provar (0.0.17).

Consta também neste trabalho, um capítulo (**Capítulo** 1) com os principais resultados utilizados nas demonstrações feitas nos capítulos 2, 3 e 4 e, consta um capítulo (**Capítulo** 5), com as considerações finais e perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 ..., \alpha_n)$, n$-$uplas de números inteiros não negativos. Considerando $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 ... + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$ denotaremos o operador derivação em $\mathbb{R}^n$ por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Definimos o *suporte* da função φ em Ω e denotamos por $\text{supp}(\varphi)$ o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$. Quando $\text{supp}(\varphi)$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto em Ω. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto.

O *espaço das funções testes* de Ω, $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: Dada uma sucessão $\{\varphi_\nu\}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que

$$\varphi_\nu \to \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.1.1}$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

(i) $\text{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \forall \nu$ e $\text{supp}(\varphi) \subset K$;

(ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre $K, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Uma *distribuição* sobre Ω é uma forma linear sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência dada em (1.1.1). Chamaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o *espaço vetorial das distribuições* sobre Ω. Diremos que $\{T_\nu\}$, uma sucessão de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e escreveremos

$$T_\nu \to T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \, , \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a derivada distribucional de ordem α da distribuição T, denotada por $D^\alpha T$, é dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \, , \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada distribucional de todas as ordens e $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e além disso a aplicação

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua.

1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis u, definidas em Ω tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço de Banach.

Se define por $L^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leq C$ para quase todo $x \in \Omega$. Uma norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular, $L^2(\Omega)$, com o produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e a norma $|u|^2 = (u, u)$, é um espaço de Hilbert.

Seja $1 \leq p \leq \infty$. Diz-se que p' é o *índice conjugado* de p se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Proposição 1.1 ***(Desigualdade de Young)*** *Se a e b são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

sempre que $1 < q < \infty$ e $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

A desigualdade de Young também pode tomar a seguinte forma

$$ab \leq \varepsilon a^q + C(\varepsilon)b^{p'}.$$

Demonstração: Ver [14]. ■

Proposição 1.2 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |uv| \leq ||u||_{L^p(\Omega)}||v||_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [14]. ■

Proposição 1.3 ***(Desigualdade de Hölder Generalizada)*** *Se $f_1, f_2, \cdots, f_k$ são funções tais que $f_i \in L^{p_i}, 1 \leq i \leq k$ com $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 \cdots f_k \in L^p$ e*

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}}\|f_2\|_{L^{p_2}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

Demonstração: Ver [14]. ∎

Proposição 1.4 ***(Desigualdade de Interpolação)*** *Se* $u \in L^{q'}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq q' \leq q \leq \infty$ *então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $q' \leq r \leq q$ *e verifica a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^{q'}}^{\alpha} \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}$$

onde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha}{q'} + \dfrac{1-\alpha}{q}, \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$

Demonstração: Ver [14]. ∎

Proposição 1.5 ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Sejam* $u, v \in L^p(\Omega)$ *e* $1 \leq p < \infty$ *então*

$$||u+v||_{L^p(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [47]. ∎

Teorema 1.6 ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Se uma sequência* $\{f_k\}$ *de funções integráveis a Lebesgue num conjunto* Ω *converge quase sempre em* Ω *para um função f, e se* $|f_k| \leq \psi$, *quase sempre em* Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$, *para um certa função* $\psi \in L^1(\Omega)$, *então a integral* $\displaystyle\int_\Omega f$ *existe e*

$$\int_\Omega f dx = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega f_k \; dx$$

Demonstração: Ver [47]. ∎

Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|^p$ é lebesgue integrável sobre cada subconjunto compacto de Ω.

Proposição 1.7 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x) \; dx = 0, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

então $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração: Ver [22]. ∎

1.3 Espaços de Sobolev

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \geq 1$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções de $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo $\alpha \leq m$. Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$||u||^p_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } p = \infty,$$

a qual o torna um espaço de Banach. No caso $p = 2$, escreve-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) \, dx$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$||u||^p = \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx$$

é equivalente a norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e p' é o índice conjugado de p. Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 1.8 *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^m, com fronteira limitada e m um inteiro tal que $m \geq 1$, e $1 \leq p < \infty$. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

(i) *se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$;

(ii) *se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall\, q \in [p, +\infty[$;

(iii) *se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [14] ■

Teorema 1.9 ***(Teorema de Rellich-Kondrachov)*** *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) *se $p < n$ então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),\ \forall\, 1 \leq q < \frac{np}{n-p}$;

(ii) *se $p = n$ então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),\ \forall\, q\ \in [1, +\infty[$;

(iii) *se $p > n$ então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [14] ■

1.4 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis

Nesta seção temos algumas propriedades das topologias fraca e fraca $*$, assim como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços.

Considerando E um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.

Seja $\{x_n\}$ uma sucessão convergente para x na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Quando não houver possibilidade de confusão diremos apenas que $\{x_n\}$ converge fraco para x e denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.10 *Seja* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão em* E*, então*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *se, e somente se,* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle\,,\ \forall f \in E'$*;*

(ii) *Se* $x_n \to x$ *em* E*, então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E*;*

(iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E*, então* $||x||_E$ *é limitada e* $||x||_E \leq \liminf ||x_n||_E$*;*

(iv) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $f_n \to f$ *em* E'*, então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [14]. ■

Sejam E um espaço de Banach e $x \in E$ fixo. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} J_x : E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle \end{array}$$

que é linear e contínua e portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$. Deste modo, definamos a aplicação $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de E em E''.

A topologia fraca $*$, ou $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações J_x.

Seja $\{f_n\}$ uma sucessão convergente para f na topologia fraca $*$ $\sigma(E, E')$. Com vistas a simplificação das notações escreveremos apenas que $\{f_n\}$ converge fraco $*$ para f, ou simbolicamente

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'$$

quando não houver possibilidade de confusão.

Proposição 1.11 *Seja* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão em* E'*, então*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle\ \forall x \in E$*;*

(ii) *Se* $f_n \to f$ *forte, então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$*;*

(iii) *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* $\sigma(E', E'')$*, então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'*;*

(iv) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'*, então* $||f_n||_{E'}$ *é limitada e* $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$*;*

(v) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *e* $x_n \to x$ *em* E*, então* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$*.*

Demonstração: Ver [14]. ■

Dizemos que um espaço de Banach é *reflexivo* quando a injeção canônica $J : E \to E''$ é sobrejetora. Um espaço métrico E é dito *separável* quando existe um subconjunto $M \subset E$ enumerável e denso em E.

Teorema 1.12 *Seja* E *um espaço de Banach tal que* E' *é separável. Então* E *é separável.*

Demonstração: Ver [14]. ■

Teorema 1.13 *Seja* E *um espaço de Banach separável e seja* $\{f_n\}$ *uma sequência limitada em* E'*. Então existe uma subsequência* $\{f_{n_k}\}$ *que converge na topologia fraca* $*$ *(*$\sigma(E', E)$*).*

Demonstração: Ver [14]. ■

Teorema 1.14 *Seja* E *um espaço de Banach reflexivo e seja* $\{x_n\}$ *um sequência limitada em* E*. Então existe uma subsequência* $\{x_{n_k}\}$ *que converge na topologia fraca (*$\sigma(E, E')$*).*

Demonstração: Ver [14]. ■

1.5 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar espaços envolvendo as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido a problemas de evolução.

Para $t \in]0, T[$ fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x, t)$ como um elemento do espaço X. Denotaremos este elemento como $u(t) \in X$ com valores no espaço X.

Sejam X um espaço de Banach e $a, b \in \mathbb{R}$.

O espaço $L^p(a,b;X,)\ \ 1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, ou seja, as funções $u:(a,b)\to X$ tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a,b;X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, as funções $u:(a,b)\to X$ limitadas quase sempre em (a,b). A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup\operatorname{ess}\|u(t)\|_X\,.$$

O espaço $C^m(a,b;X), m = 0,1,\cdots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a,b]\to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a,b]$. A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} \left|u^{(i)}(t)\right|.$$

Proposição 1.15 *Sejam $m = 0,1,\cdots$, e $1 \leq p < +\infty, X$ e Y espaços de Banach.*

(a) *$C^m(a,b;X)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.*

(b) *$L^p(a,b;X), 1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(a,b;X)$ são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.*

(c) *$C(a,b;X)$ é denso $L^p(a,b;X)$ e a imersão $C(a,b;X) \hookrightarrow L^p(a,b;X)$ é contínua.*

(d) *Se X é um espaço de Hilbert com produto interno $(.,.)_X$ então $L^2(a,b;X)$ é também um espaço de Hilbert com produto interno*

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_\Omega (u(t),v(t))_X dt.$$

(e) *$L^p(a,b;X)$ é separável, se X for separável e $1 \leq p < +\infty$.*

(f) *O espaço $L^p(a;b;X)$ é reflexivo se $1 < p < \infty$.*

(g) *Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.*

Demonstração: Ver [63] ■

Proposição 1.16 *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq +\infty$. Se $f \in L^1(0,T;X)$ e $\|f\|_X \in L^p(0,T)$ então $f \in L^p(0,T;X)$ e $\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \|f\|_{L^p(0,T)}$.*

Demonstração: Ver [55]. ■

Proposição 1.17 *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq +\infty$. Se $g \in L^{s_0}(0,T;X)$ e $\varphi \in L^{s_1}(0,T), 1 \leq s_i \leq \infty$, então $g\varphi \in L^s(0,T;X)$ e*

$$\|g\varphi\|_{L^s(0,T;X)} \leq \|g\|_{L^{s_0}(0,T;X)}\|\varphi\|_{L^{s_1}}(0,T)$$

onde $\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1}$.
Particularmente, se $\varphi = 1$ e $g \in L^{s_0}(0,T;X), 1 \leq s_0 \leq \infty$ então $g \in L^s(0,t;X)$ e

$$\|g\|_{L^s(0,T;X)} \leq T^{\frac{1}{s}-\frac{1}{s_0}}\|g\|_{L^{s_0}(0,T;X)}$$

com $1 \leq s \leq s_0$.

Demonstração: Ver [55]. ■

O espaço dual de $L^p(a,b;X)$. Consideremos $Y = L^p(a,b;X)$. Temos a seguinte relação de dualidade $Y' = L^q(a,b;X')$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, devido ao seguinte teorema:

Teorema 1.18 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então cada função $v \in L^q(a,b,X')$ corresponde a um único funcional $\bar{v} \in Y'$ dada por*

$$\langle \bar{v}, u\rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t)\rangle_X \, dt \quad \forall u \in Y. \tag{1.5.2}$$

Reciprocamente, para cada $\bar{v} \in Y'$ corresponde exatamente uma função $v \in L^q(a,b;X')$ dada por (1.5.2). Além disso,

$$\|\bar{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a,b;X')}$$

Demonstração: Ver [63]. ■

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(a,b;X)$ o espaço localmente convexo e completo das funções vetoriais $\varphi : (a,b) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (a,b). Dizemos que uma sucessão

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(a,b;X)$$

se

(i) Existe um compacto K de (a,b) tal que supp(φ_ν) e supp(φ) estão contidos em K, para todo ν;

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \to \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi$ em X, uniformemente em $t \in (a,b)$.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(a,b) = \mathcal{D}(a,b;\mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(a,b;X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ se $S : \mathcal{D}(a,b) \to X$ é linear e se $\theta_\nu \to \theta$ em $\mathcal{D}(a,b)$ implicar que $\langle S, \theta_\nu\rangle \to \langle S, \theta\rangle$ em X. Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(a,b;X)$$

se

$$\langle S_\nu, \theta\rangle \to \langle S, \theta\rangle \text{ em }, \forall \theta \in \mathcal{D}(a,b).$$

O espaço $\mathcal{D}(a,b;X)$ munido da convergência acima é denominado espaço das *distruibuições vetoriais* de (a,b) com valores em X.

Denotaremos por $H_0^1(a,b;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a,b;X) := \{v \in L^2(a,b;X);\ v' \in L^2(a,b;X);\ v(a) = v(b) = 0\}$$

munido com o produto interno

$$((w,v)) = \int_a^b (w(t), v(t))_X dt + \int_a^b (w'(t), v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(a,b;X)$ com o seu dual $[L^2(a,b;X)]'$, via Teorema de Riez obtemos

$$\mathcal{D}(a,b;X) \hookrightarrow H_0^1(a,b;X) \hookrightarrow L^2(a,b;X) \hookrightarrow H^{-1}(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X),$$

onde $H^{-1}(a,b;X) = [H_0^1(a,b;X)]'$.

Proposição 1.19 *Seja* $u \in L^2(a,b;X)$*. Então existe um único* $f \in H^{-1}(a,b;X)$ *que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = \left(\langle u', \theta \rangle, \xi \right)_X \quad \forall \quad \theta \in \mathcal{D}(a,b); \quad \forall \quad \xi \in X.$$

Demonstração: Ver [48]. ∎

Observação 1.20 *Da proposição anterior podemos identificar* f *com* u'*, de posse disso, diremos que se* $u \in L^2(a,b;X)$ *então* $u' \in H^{-1}(a,b;X)$*.*

Demonstração: Ver [48]. ∎

Proposição 1.21 *A aplicação*

$$\begin{array}{rcccl} g & : & L^2(a,b;X) & \longrightarrow & H^{-1}(a,b;X) \\ & & u & \longmapsto & g(u) = u' \end{array}$$

onde X *é um espaço de Hilbert é linear e contínua.*

Demonstração: Ver [48]. ∎

1.6 Resultados Auxiliares

Teorema 1.22 ***(Fórmulas de Green)***

(1) *Se* $\gamma \in H^2(\Omega)$*, então*

$$\int_\Omega \nabla\gamma \cdot \nabla u dx = -\int_\Omega u \Delta\gamma dx + \int_\Gamma \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} u ds, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(2) *Se* $u, \gamma \in H^2(\Omega)$*, então*

$$\int_\Omega u\Delta\gamma - \gamma\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma\frac{\partial v}{\partial \nu} ds.$$

Demonstração: Ver [14] p.316. ∎

Teorema 1.23 ***(Teorema da Compacidade de Aubin-Lions)*** *Sejam* B_0, B *e* B_1 *espaços de Banach tais que* $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ *e*

(i) *B_0 e B_1 são reflexivos;*

(ii) *A imersão $B_0 \hookrightarrow B$ é compacta;*

(iii) *A imersão $B \hookrightarrow B_1$ é contínua.*

Definamos

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0); u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

onde $1 < p_0; p_1 < 1$. Consideremos W munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$$

a qual o torna um espaço de Banach. Então a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [41] p. 57. ■

Teorema 1.24 ***(Lema de Lions)*** *Seja (u_μ) uma sucessão de funções pertencentes a $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

(i) *$u_\mu \to u$ quase sempre em Q;*

(ii) $\|u_\mu\|_{L^q(Q)} \leq C, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}$;

então $u_\mu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver [41] p. 12. ■

Proposição 1.25 ***(Lema de Gronwall)*** *Sejam $z \in L^\infty(0,T)$ e $\varphi \in L^1(0,T)$ tais que $z(x) \geq 0$, $\varphi(t) \geq 0$ e seja $c \geq 0$ uma constante. Se*

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t z(s)\varphi(s)ds, \ \forall t \in]0,T[,$$

então

$$\varphi(t) \leq c.e^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall t \in]0,T[.$$

Demonstração: Ver [46]. ■

Proposição 1.26 *Sejam $m \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ tal que $m \geq 0$ quase sempre em $]0,T[$ e $b \geq 0$ constante real. Suponhamos $h \in L^\infty(0,T)$, $h \geq 0$ sobre $]0,T[$ verificando a desigualdade*

$$\frac{1}{2}h^2(t) \leq 2b^2 + 2\int_0^t m(s)h(s)ds$$

para todo $t \in]0,T[$. Então

$$h(t) \leq 2b + 2\int_0^t m(s)ds.$$

Demonstração: Ver [13]. ■

Definição 1.27 *Seja H um espaço de Hilbert. Se diz que uma forma bilinear $a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ é*

(i) contínua *se existe uma constante C tal que*

$$|a(u,v)| \leq C|u||v|, \ \forall u,v \in H \ \text{e}$$

(ii) coerciva *se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v,v) \geq \alpha|v|^2, \ \forall v \in H.$$

Teorema 1.28 ***(Lax-Milgram)*** *Seja $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle, \ \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica então u se caracteriza pela propriedade

$$u \in H \ \text{e} \ \frac{1}{2}a(u,v) - \langle \varphi, v\rangle = \min_{v \in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v\rangle\right\}.$$

Demonstração: Ver [14]. ■

Teorema 1.29 ***(Teorema de Holmgren).*** *Seja P um operador diferencial com coeficientes constantes em R^n. Seja u solução de $Pu = 0$ em Q_1, onde Q_1 é um aberto de R^n. Suponha $u = 0$ em Q_2, onde Q_2 é um subconjunto aberto e não vazio de Q_1. Então $u = 0$ em Q_3, onde Q_3 é um subconjunto aberto de Q_1 que contém Q_2 e tal que qualquer hiperplano característico do operador P que intersecta Q_3 também intersecta Q_2.*

Demonstração: Ver [42] p. 87. ■

Proposição 1.30 ***(Desigualdade de Jensen)*** *Seja B um hipercubo do $\mathbb{R}^n$, então para toda função côncava F e toda função integrável $g \in L^1(B)$, teremos*

$$F\left(\frac{1}{medB}\int_B g(x)dx\right) \geq \frac{1}{medB}\int_B F(g(x))dx.$$

Demonstração: Ver [50]. ■

Teorema 1.31 ***(Teorema da Projeção)*** *Um operador linear limitado $P : H \to H$ sobre um espaço de Hilbert H é uma projeção se, e somente se, P é autoadjunto e idempotente.*

Demonstração: Ver [38] p. 481. ■

1.7 Resultados Utilizados de Semigrupos

Seja X um espaço de Banach e X' o seu espaço dual.

Definição 1.32 *Um conjunto $A \subset X \times X'$ é chamado* ***monótono*** *se*

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geq 0 \quad \text{para cada} \quad [x_i, y_i] \in A, i = 1, 2.$$

Um subconjunto monótono de $X \times X'$ é dito ser ***maximal monótono*** *se ele não tem a propriedade de conter qualquer outro subconjunto monótono de $X \times X'$.*
Se A é um operador unívoco de X em X', então a condição de monotonia se transforma em

$$(x_1 - x_2, Ax_1 - Ax_2) \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in D(A).$$

Demonstração: Ver [8] p. 34. ■

Definição 1.33 *$H : X \to X$ é dito **hemicontínuo** se é unívoco e para todo $x, y \in X$ tem-se $H(x+ty) \overset{*}{\rightharpoonup} Hx$ quando $t \to 0$, isto é, $\lim_{t\to 0} \langle H(x+ty), z\rangle_{X,X'} = \langle Hx, z\rangle_{X,X'}$, para todo $z \in X'$.*

Demonstração: Ver [8] p. 34. ■

Definição 1.34 *O operador $R : X \to X'$ é chamado **coercivo** se*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(x_m, x'_m)}{\|x_m\|} = \infty \quad \forall \quad [x_m, x'_m] \in R \quad \text{tal que} \quad \lim_{m\to\infty} \|x_m\| = \infty.$$

Demonstração: Ver [8] p. 34. ■

Proposição 1.35 *Seja X um espaço reflexivo e seja R monótono, hemicontínuo e limitado de X em X'. Seja S um operador maximal monótono. Então $R+S$ é maximal monótono.*

Demonstração: Ver [8] p. 39. ■

Proposição 1.36 *Seja X um espaço reflexivo e seja R um operador de X em X' monótono e hemicontínuo. Seja S um operador maximal monótono de X em X'. Então $R+S$ é maximal monótono de X em X'. Além disso, se $R+S$ é coercivo, então $Im(R+S) = X'$.*

Demonstração: Ver [8] p. 48. ■

Teorema 1.37 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathbb{A}$ um operador maximal monótono de $\mathcal{H}$. Para todo $U_0 \in D(\mathbb{A})$, existe uma única função $U(t) : [0, \infty[\to \mathcal{H}$ tal que*

(i) *$U(t) \in D(\mathbb{A})$ $\forall t > 0$;*

(ii) *$U(t)$ é lispschitiziana em $[0, \infty[$, isto é, $\frac{dU}{dt} \in L^\infty(0, \infty; \mathcal{H})$;*

(iii) *$\frac{dU}{dt} + \mathbb{A}u(t) \ni 0$, isto é, $\frac{dU}{dt} \in \mathbb{A}U(t)$ q.t.p. $[0, \infty[$;*

(iv) $U(0) = U_0$.

Demonstração: Ver [13] p. 54. ■

Teorema 1.38 *Seja* $\mathbb{A}$ *um operador maximal monótono em* $\mathcal{H}$. *Para todo* $f \in L^1(0,T;\mathcal{H})$ *e todo* $U_0 \in \overline{D(\mathbb{A})}$, *existe uma única solução fraca da equação* $\frac{dU}{dt} + \mathbb{A}u \ni f$ *tal que* $U(0) = U_0$.

Demonstração: Ver [13] p. 85. ■

Seja $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + \mathbb{A}U + \mathbb{B}U \ni f \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{1.7.3}$$

onde $\mathbb{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é localmente lipschitz, isto é,

$$\|\mathbb{B}U - \mathbb{B}V\| \leq L(K)\|U - V\|, \text{ desde que } \|U\| \leq K, \|V\| \leq K. \tag{1.7.4}$$

Teorema 1.39 *Suponha que* $\mathbb{A}$ *é maximal monótono e que* $0 \in \mathbb{A}0$. *Se* $U_0 \in D(\mathbb{A}), f \in W_1^1(0,t,\mathcal{H})$ $\forall t > 0$ *e a aplicação localmente Lipschitz satisfaz* (1.7.4), *então existe* $t \leq +\infty$ *tal que a equação* (1.7.3) *tem uma única solução forte no intervalo* $[0, t_{max}[$. *Além disso, se* $U_0 \in \overline{D(\mathbb{A})}$ *e* $f \in L^1(0,t,\mathcal{H})$ $\forall t > 0$ *obtemos uma solução generalizada* $U \in C([0,t_{max}[;\mathcal{H})$ *para a equação* (1.7.3). *Em ambos os casos, se* $t_{max} < +\infty$, *então* $\lim_{t \nearrow t_{max}} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty$.

Demonstração: Ver [28] Teorema 7.2. ■

Teorema 1.40 *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo e* A *um subconjunto maximal monótono de* $X \times X'$. *Seja* $(u_n, v_n) \in A$ *tal que* $u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v$ *e, também,*

$$\limsup_{n,m\to\infty}(u_n - u_m, v_n - v_m) \leq 0$$

ou

$$\limsup_{n\to\infty}(u_n - u, v_n - v) \leq 0.$$

Então $(u,v) \in A$ *e* $(u_n, v_n) \to (u,v)$ *quando* $n \to \infty$.

Demonstração: Ver [9] Lema 2.3 p. 38. ■

1.8 Caracterização dos Espaços H e V

Esta seção é destinada à fixação da notação e da terminologia a serem utilizadas nos Capítulos 2 e 3. Além disso, demonstraremos alguns resultados relativos à caracterização dos espaços de Hilbert considerados e ao traço das funções nesses espaços.

Para maiores informações a respeito dos resultados enunciados, consulte Lions [40] e [41], Lions-Magènes [44], Tartar [61] e Teman [62].

Seja

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^n, \quad \operatorname{div} \varphi = 0\}. \tag{1.8.5}$$

Considere-se em $\mathcal{V}$ duas topologias definidas pelos produtos internos

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{n} ((u_i, v_i))_{H_0^1(\Omega)}, \tag{1.8.6}$$

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)}, \tag{1.8.7}$$

e respectivas normas

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \tag{1.8.8}$$

$$|u|^2 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.8.9}$$

Sejam V e H as aderências de $\mathcal{V}$ com as normas $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ respectivamente, isto é,

$$V = \overline{\mathcal{V}}^{(H_0^1(\Omega))^n}, \tag{1.8.10}$$

$$H = \overline{\mathcal{V}}^{(L^2(\Omega))^n}. \tag{1.8.11}$$

Note-se que V e H são espaços de Hilbert munidos com as topologias de $(H_0^1(\Omega))^n$ e $(L^2(\Omega))^n$, respectivamente.

Definição 1.41 *Seja Ω um conjunto aberto, limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$. Definimos o espaço quociente*

$$L_0^2(\Omega) = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$$

das classes de funções de $L^2(\Omega)$ que diferem por uma constante. Munimos este espaço quociente com a norma $\|u\|_{L_0^2} = \inf_{\alpha\in\mathbb{R}} \|u+\alpha\|_{L^2}$.

Ver [12] p. 239.

Lema 1.42 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado com fronteira regular. Se f é uma forma linear e contínua em $(H_0^1(\Omega))^n$ tal que $\langle f, \varphi\rangle_{H^{-1},H_0^1} = 0, \quad \forall \quad \varphi \in (H_0^1(\Omega))^n$ que satisfaz $\operatorname{div}\varphi = 0$, então existe $p \in L_0^2(\Omega)$ tal que $f = -\nabla p$.*

Demonstração: Ver [12] p. 242. ■

Lema 1.43 ***(de Rham)*** *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f \in (\mathcal{D}'(\Omega))^n$ tal que para todo $\varphi \in \mathcal{V}$ tem-se $\langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0$, então existe $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $f = -\nabla p$.*

Demonstração: Ver [12] p. 245. ■

Lema 1.44 *Existe uma função $p \in H^{-1}(0,T; L_0^2(\Omega))$ tal que o problema (2.1.1) é satisfeito em $\mathcal{D}'(Q)$. Além disso, existe $C > 0$ tal que*

$$\|p\|^2_{H^{-1}(0,T;L_0^2(\Omega))} \leq C(|\phi^1|_H^2 + \|\phi^0\|_V^2 + \|h\chi_\omega\|^2_{L^2(0,T;H)}). \tag{1.8.12}$$

Demonstração: Argumentando como no capítulo 2 de [62] ou capítulo 5 de [12]. ■

Lema 1.45 *Para todo domínio conexo e limitado do $\mathbb{R}^n$ existe $C > 0$ tal que para todo $p \in L_0^2(\Omega)$ temos*

$$\frac{1}{C}\|p\|_{L_0^2} \leq \|\nabla p\|_{H^{-1}} \leq C\|p\|_{L_0^2}.$$

Demonstração: Ver [12] p. 240. ■

Lema 1.46 ***(Caracterização do espaço V)***

$$V = \{u \mid u \in (H_0^1(\Omega))^n; \operatorname{div} u = 0\}. \tag{1.8.13}$$

Demonstração: Seja $\hat{V} = \{u \mid u \in (H_0^1(\Omega))^n; \operatorname{div} u = 0\}$. Vamos mostrar que $V = \hat{V}$.

$\vdash$: $V \subset \hat{V}$

Seja $v \in V$, então existe uma sequência de funções $\varphi_m \in (\mathcal{D}(\Omega))^n$ tal que

$$\varphi_m \to v \quad \text{em} \quad (H_0^1(\Omega))^n \quad \text{e} \quad \operatorname{div} \varphi_m = 0.$$

Dessa forma,

$$\operatorname{div} \varphi_m \to \operatorname{div} v \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Como $\operatorname{div} \varphi_m = 0, \forall m$, segue que

$$v \in (H_0^1(\Omega))^n \quad \text{e} \quad \operatorname{div} v = 0,$$

isto é, $v \in \hat{V}$.

$\vdash$: $\overline{V} = \hat{V}$

Observe que, como V é fechado, a afirmação implica que $V = \hat{V}$. Para demonstrar a afirmação acima, basta mostrar que se $f \in (\hat{V})'$, isto é, se f é uma forma linear e contínua de $\hat{V}$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$\langle f, v \rangle = 0, \quad \forall v \in V,$$

então tem-se que $f \equiv 0$.

De fato, seja $f \in (\hat{V})'$. Como $\hat{V}$ é um subespaço de $(H_0^1(\Omega))^n$, tem-se que toda forma linear e contínua em $\hat{V}$ pode ser estendida a $(H_0^1(\Omega))^n$. Seja $\widetilde{f}$ esta extensão. Logo, $\widetilde{f} \in (H^{-1}(\Omega))^n$, $\left\langle \widetilde{f}, v \right\rangle = 0, \forall v \in \mathcal{V} \subset V$.

Daí, pelo Lema 1.42, conclui-se que existe $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{f} = -\nabla p,$$

ou seja,

$$\widetilde{f}_i = \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

e daí

$$\left\langle \widetilde{f}_i, v_i \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial p}{\partial x_i}, v_i \right\rangle = \left(p, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right), \quad \forall \ \ v \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

Em particular, tomando-se v em $\hat{V}$, obtém-se

$$\langle f, v \rangle = 0 \ \ \forall \ \ v \in \hat{V},$$

o que implica que $f \equiv 0$. ■

Lema 1.47 ***(Caracterização do espaço*** H***)***

$$H = \{u \mid u \in (L^2(\Omega))^n; \operatorname{div} u = 0, u \cdot \nu = 0 \quad em \quad \Gamma\}. \tag{1.8.14}$$

Demonstração: Ver [61] p. 32. ■

Observação 1.48 *Se* $u \in (L^2(\Omega))^n$ *e* $\operatorname{div} u \in L^2(\Omega)$ *pode-se definir o traço da função* $u \cdot \nu$ *como um funcional de* $H^{-1/2}(\Gamma)$*, isto é,*

$$u \cdot \nu = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \nu_i \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Este resultado pode ser encontrado em [61] p. 25.

No que segue, por V' representa-se o dual topológico de V, munido com a norma

$$\|f\|_{V'} = \sup_{\substack{u \in V \\ \|u\|_V \leq 1}} \sum_i \langle f_i, u_i \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Lema 1.49 ***(Caracterização do espaço*** V'***)***

$$V' = \{(H^{-1}(\Omega))^n / \{\nabla p; p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}\}\}. \tag{1.8.15}$$

Demonstração: Seja $f \in V'$, isto é, $f : V \to \mathbb{R}$, linear e contínua e $V \subset (H_0^1(\Omega))^n$. Seja $\widetilde{f} : (H_0^1(\Omega))^n \to \mathbb{R}$ a extensão linear e contínua de f. Então existe $f_i \in H^{-1}(\Omega)$ tal que

$$\left\langle \widetilde{f}, v \right\rangle = \sum_i \langle f_i, v_i \rangle, \quad \forall \ \ v \in (H_0^1(\Omega))^n \ \text{ e } \ \widetilde{f}|_V = f.$$

Considere-se uma outra expressão para $\widetilde{f}$ dada por

$$\left\langle \widetilde{f}_1, v \right\rangle = \sum_i \langle g_i, v_i \rangle \, ; g_i \in H^{-1}(\Omega),$$

tem-se que

$$\widetilde{f}_1|_V = \widetilde{f}|_V = f \Leftrightarrow f_i - g_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad p \in L^2_0(\Omega),$$

isto é, $f - g = \nabla p, p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$.

De fato, tem-se que

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{f}, v \right\rangle = \sum_i \langle f_i, v_i \rangle &= \sum_i \left\langle g_i + \frac{\partial p}{\partial x_i}, v_i \right\rangle \\ &= \sum_i \langle g_i, v_i \rangle - \sum_i \left\langle p, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \sum_i \langle g_i, v_i \rangle \\ &= \sum_i \left\langle \widetilde{f}_1, v_i \right\rangle \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha

$$\sum_i \langle f_i, v_i \rangle = \sum_i \langle g_i, v_i \rangle \quad \forall v \in V.$$

Então tem-se

$$\sum_i \langle g_i - f_i, v_i \rangle = 0, \quad \forall v \in V, \text{ ou que } \langle g - f, v \rangle = 0, \quad \forall \ \ v \in V.$$

Em particular, $\langle g - f, v \rangle = 0, \quad \forall \ \ v \in \mathcal{V}$. Então pelo Lema 1.42 tem-se que

$$g - f = -\nabla p, \ p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}, \quad \text{isto é,}$$

$$f_i - g_i = \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

■

Prova-se ainda que V é denso em H e que a imersão de V em H é contínua e compacta, (ver [61] p. 34). Logo, identificando-se H ao seu dual, obtém-se

$$V \subset H \cong H' \subset V'. \tag{1.8.16}$$

Considere-se ainda o espaço

$$W = V \cap (H^2(\Omega))^n \tag{1.8.17}$$

munido da topologia de $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^n$. Note-se que como Γ é regular, pode-se considerar em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ a norma definida pelo operador Laplaciano, que é equivalente à norma usual daquele espaço.

Lema 1.50 ***(Cattabriga)***

$w \in D(\Delta)$, isto é, $w \in V$ e $\Delta w \in H$ se, e somente se, $w \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^n$ e $\operatorname{div} w = 0$.

Demonstração: Ver [61] p. 69. ■

Observação 1.51 *O Lema de Cattabriga diz que*

$$D(\Delta) = V \cap (H^2(\Omega))^n.$$

Este lema conjugado com o Lema 1.42 diz que se $u \in D(\Delta)$ então existe $p \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ tal que

$$-\Delta u_i = h_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \forall \quad h_i \quad \in L^2(\Omega).$$

Neste caso, $u_i \in H^2(\Omega)$ e $p \in H^1(\Omega)$, (ver [61] p. 71).

Lema 1.52 ***(Teorema do Traço)***

Seja Γ regular e $g \in (H^{m-1/2}(\Gamma))^n$, para $m \geq 1$ com $\int_\Gamma g \cdot \nu d\Gamma = 0$. Então existe u em $(H^m(\Omega))^n$ tal que $\operatorname{div} u = 0$ e $\gamma_0 u = g$.

Demonstração: Ver [62] ou [19]. ■

Observação 1.53 *Note-se que se $u \in (H^m(\Omega))^n$ com $\operatorname{div} u = 0$ então $u_i|_\Gamma \in H^{m-1/2}(\Gamma)$ e*

$$\int_\Omega \operatorname{div} u dx = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \int_\Gamma u_i \nu_i d\Gamma = 0.$$

O lema acima estabelece a recíproca deste resultado.

Observação 1.54 *Note-se também que se* $g \in (L^2(\Gamma))^n$, *tem-se que* $g \cdot \nu \in L^2(\Gamma)$ *e que a condição* $\int_\Gamma g \cdot \nu d\Gamma = 0$ *significa que* $(g \cdot \nu, 1)_{L^2(\Gamma)} = 0$.

Teorema 1.55 ***(Caracterização do espaço*** $H^\perp$***)***
O ortogonal de H *em* $(L^2(\Omega))^n$ *caracterizado em* (1.8.14) *satisfaz*

$$H^\perp = \{u \in (L^2(\Omega))^n; \exists\ p \in H^1(\Omega); u = \nabla p\}.$$

Demonstração: Ver [12] p. 249. ■

Definição 1.56 ***(Decomposição Leray)***
A decomposição

$$(L^2(\Omega))^n = H \oplus H^\perp,$$

é chamada Decomposição Leray do espaço $(L^2(\Omega))^n$. *A projeção ortogonal de* $(L^2(\Omega))^n$ *em* H *é conhecida como a projeção Leray e denotada por* $\mathcal{P}$.

Demonstração: Ver [12] p. 251. ■

1.9 O Operador de Stokes em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Considere a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u : \nabla v dx, \quad \forall \quad u, v \in V$$

(onde $A : B = \operatorname{tr}(A \cdot B^\top)$). Esta é uma forma bilinear, contínua e coerciva em V. (Pela desigualdade de Poincaré $v \mapsto a(u, v)$ é uma norma em $(H_0^1(\Omega))^n$.

Como a forma a definida acima é contínua em $V \times V$, podemos definir o operador A de V em V' por

$$\langle Au, v\rangle_{V', V} = \int_\Omega \nabla u : \nabla v dx, \quad \forall \quad u, v \in V. \tag{1.9.18}$$

O operador A é chamado Operador de Stokes.

Pelo Teorema de Lax-Milgran este operador é um isomorfismo de V em V'. Podemos considerar A como um operador não limitado em H com domínio $D(A) = \{u \in V, Au \in H\}$.

Observação 1.57 *Para $u \in V \cap (H^2(\Omega))^n$, tem-se*

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla v dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i dx = \sum_{i=1}^n \left[\int_\Omega -\Delta u_i v_i dx + \int_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} v_i d\Gamma \right],$$

entretanto $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} v_i d\Gamma = 0$, *pois* $v_i \in H_0^1(\Omega)$.

Portanto, para $u \in V \cap (H^2(\Omega))^n$, temos que

$$\langle Au, v\rangle_{V',V} = \int_\Omega \nabla u : \nabla v dx = \sum_{i=1}^n \langle -\Delta u_i, v_i\rangle_{H^{-1},H_0^1}. \tag{1.9.19}$$

Teorema 1.58 ***(Domínio do operador de Stokes)***
Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{1,1}$ então temos que

$$D(A) = V \cap (H^2(\Omega))^n.$$

Além disso,

$$Au = \mathcal{P}(-\Delta u) \quad \forall \quad u \in D(A),$$

onde $\mathcal{P}$ é a projeção ortogonal de $(L^2(\Omega))^n$ em H da Definição 1.56.

Demonstração: Ver [12] p. 281. ■

1.10 Resultados Utilizados nos Capítulos 2 e 3

Seja Ω um subconjunto aberto, limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ com fronteira regular Γ. Seja $Q = \Omega \times]0, T[$ um cilindro cuja fronteira lateral é dada por $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = f - \nabla p \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \ \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{1.10.20}$$

onde $\phi = (\phi_1(x,t), \cdots, \phi_n(x,t))$, $x = (x_1, \cdots, x_n)$ são vetores de dimensão n, $\operatorname{div}\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$ e $p(x,t)$ denota o termo de pressão.

Os Teoremas abaixo são de existência e unicidade de soluções regulares e fracas para o problema (1.10.20), a demonstração deles podem ser encontradas em Cavalcanti et al. em [20] ou A. Rocha em [51].

Teorema 1.59 *Dados $\phi^0 \in W = V \cap (H^2(\Omega))^n, \phi^1 \in V, f, f' \in L^1(0,T;H)$ existe uma única função $\phi : Q \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições:*

$$\phi \in L^\infty(0,T;W), \quad \phi' \in L^\infty(0,T;V) \quad e \quad \phi'' \in L^\infty(0,T;H)$$

$$\phi'' - \Delta\phi = f - \nabla p \text{ em } (\mathcal{D}'(Q))^n$$

$$\phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1.$$

Teorema 1.60 *A solução $\phi = \phi(x,t)$ tem a regularidade*

$$\phi \in C([0,T];W) \cap C^1([0,T];V).$$

Teorema 1.61 *Dados $\phi^0 \in V, \phi^1 \in H, f \in L^1(0,T;H)$ então*

(i) *Existe uma única solução ϕ do problema (1.10.20) tal que*

$$\phi \in C([0,T];V) \cap C^1([0,T];H).$$

(ii) *A aplicação linear*

$$\begin{array}{ccc} V \times H \times L^1(0,T;H) & \longrightarrow & C([0,T];V) \cap C^1([0,T];H) \\ \{\phi^0, \phi^1, f\} & \longmapsto & \phi \end{array}$$

é contínua, onde ϕ é a solução de (1.10.20) obtida em (i).

(iii) *A solução ϕ achada em (i) satisfaz*

$$\frac{1}{2}|\phi'(t)|_H^2 + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|_V^2 = \frac{1}{2}|\phi^1|_H^2 + \frac{1}{2}\|\phi^0\|_V^2 + \int_0^t (f(s), \phi'(s))ds$$

quase sempre em $[0,T]$.

(iv) *A solução ϕ achada em (i) é tal que*

$$\phi'' - \Delta\phi = f - \nabla p \quad em \quad (\mathcal{D}'(Q))^n$$

onde $p \in \mathcal{D}'(Q)$.

Observação 1.62 *Nas condições do Teorema 1.61, $\phi'' \in L^1(0,T;V')$.*

Corolário 1.63 *Se ϕ é solução do problema (1.10.20) obtida pelo Teorema 1.61, tem-se a desigualdade*

$$E_\phi(t) \leq C(E_\phi(0) + \|f\|^2_{L^1(0,T;H)}),$$

onde $C = C(T) > 0$ e

$$E_\phi(t) = \frac{1}{2}|\phi'(t)|^2_H + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2_V$$

é a energia associada ao problema (1.10.20).

Observação 1.64 *Do Corolário 1.63 obtém-se*

$$\|\phi'\|^2_{L^\infty(0,T;H)} + \|\phi\|^2_{L^\infty(0,T;V)} \leq C(|\phi^1|^2_H + \|\phi^0\|^2_V + \|f\|^2_{L^1(0,T;H)}).$$

$$\text{Sejam } x_0 \in \mathbb{R}^n, m(x) = x - x_0, x \in \mathbb{R}^n \text{ e } R_0 = \max\{\|m(x)\|; x \in \overline{\Omega}\}. \tag{1.10.21}$$

No Teorema a seguir, assume-se que Ω é **estritamente estrelado** com respeito à origem, isto é, escolhendo $x_0 = 0$ temos

$$m \cdot \nu \geq \gamma > 0, \ \forall \ x \text{ sobre } \Gamma, \ \Gamma(x_0) = \Gamma, \tag{1.10.22}$$

onde

$$\Gamma_0 \quad = \quad \Gamma(x_0) = \{x \in \Gamma; m(x) \cdot \nu(x) > 0\}. \tag{1.10.23}$$

(Ver J.L. Lions [42] p. 129).

Considerando-se a translação $\xi = x - x_0$ tem-se que se Ω é estritamente estrelado em relação a um ponto x_0, $x_0 \in \Omega$, então Ω é estritamente estrelado em relação à origem.

Neste sentido, qualquer conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ de interior não vazio satisfaz (1.10.22). Em particular as bolas do $\mathbb{R}^n$ são estritamente estreladas.

Teorema 1.65 ***(Desigualdade Inversa)*** *Suponha que $f = 0$. Seja E_ϕ a energia associada ao problema (1.10.20). Para todo $T > T_0$ e para toda solução fraca ϕ de (1.10.20) temos a seguinte desigualdade*

$$E_\phi(0) \leq \frac{R_0}{2(T - T_0)} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right| d\Sigma, \tag{1.10.24}$$

onde $T_0 = 2R_0$ e R_0 é definido em (1.10.21).

Na demostração do Teorema 1.65 usou-se a técnica de multiplicadores. A dificuldade neste caso, foi escolher um multiplicador h_k com a propriedade especial que

$$-\int_Q \frac{\partial p}{\partial x_i} h_k dx dt = 0. \tag{1.10.25}$$

A escolha especial do campo h_k verificando a propriedade (1.10.25) é que acarreta a necessidade do aberto Ω satisfazer (1.10.22).

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} z'' - \Delta z = -\nabla p \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div} z = 0 \ \text{ em } Q, \\ z = v \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\ z(0) = z^0, \quad z'(0) = z^1 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{1.10.26}$$

Definição 1.66 ***(Solução ultrafraca)*** *Sejam $z^0 \in H, z^1 \in V', v \in \overline{Z}$ onde $\overline{Z} = \{v \in (L^2(\Sigma))^n; \int_\Sigma v \cdot \nu = 0\}$. Chama-se solução ultrafraca do problema misto (1.10.26) à função $z \in L^\infty(0,T;H)$ que satisfaz à condição:*

$$\int_0^T (z, f) dt = -(z^0, \theta'(0)) + \langle z^{'}, \theta(0) \rangle - \int_0^T \left(\frac{\partial \theta}{\partial \nu}, v \right)_{(L^2(\Gamma))^n} dt \tag{1.10.27}$$

para todo $f \in L^1(0,T;H)$ com θ solução do problema retrógrado

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta \theta = f - \nabla p \ \textit{em } Q, \\ \operatorname{div} \theta = 0 \ \textit{em } Q, \\ \theta = 0 \ \textit{sobre } \Sigma, \\ \theta(T) = \theta'(T) = 0 \ \ \textit{em } \Omega. \end{cases} \tag{1.10.28}$$

Diz-se que a solução ultrafraca de (1.10.26) é definida por transposição.

Teorema 1.67 ***(Existência e Unicidade de Solução Ultrafraca)*** *Existe uma e só uma solução ultrafraca z para o problema (1.10.26). Além disso, z satisfaz*

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C(|z^0|_H + \|z^1\|_{V'} + \|v\|_{(L^2(\Sigma))^n}).$$

Teorema 1.68 ***(Regularidade da Solução Ultrafraca)*** *A solução ultrafraca z de (1.10.26) satisfaz*

$$z \in C([0,T];H) \cap C^1([0,T];V')$$

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|z'\|_{L^\infty(0,T;V')} \leq C(|z^0|_H + \|z^1\|_{V'} + \|v\|_{(L^2(\Sigma))^n})$$

onde $C > 0$ é uma constante que só depende de T.

As propriedades de solução ultrafraca para problemas lineares podem ser encontradas também em Lions [45] Cap. III seç. 9.

1.11 Análise Microlocal

Iniciamos esta seção anunciando alguns resultados devido a Burq e Gérard em [17] e Gérard em [32].

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.69 *Seja $m \in \mathbb{R}$. Definimos um* ***símbolo de ordem*** *m em Ω como uma função $a : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de classe C^∞, com suporte em $K \times \mathbb{R}^n$, onde K é um subconjunto compacto de Ω, que satisfaz a seguinte estimativa: para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N}^n$, exite uma constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tal que*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Denotamos por $S_c^m(\Omega)$ o espaço vetorial dos símbolos de ordem no máximo m em Ω.

Proposição 1.70 *Se $a \in S_c^m(\Omega)$, a fórmula*

$$Au(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x.\xi} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi, \tag{1.11.29}$$

define, para todo $u \in C_0^\infty(\Omega)$, um elemento Au de $C_0^\infty(\Omega)$.

A fórmula (1.11.29) define uma aplicação linear $A : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$, a qual chamaremos de **operador pseudodiferencial** de símbolo a. Dizemos que o operador pseudodiferencial A admite um símbolo principal, denotado por $\sigma_m(A)$, se existe uma função $a_m = \sigma_m(A) \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ com suporte, na primeira variável, compacto em $K \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e homogênea de ordem m, na segunda variável, tal que se $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ valendo 0 em uma vizinhança da origem e 1 fora de um compacto suficientemente grande, segue que,

$$a(x,\xi) = a_m(x,\xi)\chi(\xi) + r(x,\xi)$$

onde $r \in S_c^{m-1}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Nestas condições, $a_m = \sigma_m(A)$ é chamado de símbolo principal de A.

Observe que, no caso em que $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ a aplicação $a \mapsto A$ não é injetora, isto é, um operador pseudodiferencial não é definido unicamente por um símbolo, por outro lado é possível provar a unicidade do símbolo principal.

Apesar de termos definido operadores pseudodiferenciais sobre o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, é possível estender a ação de operadores pseudodiferenciais a espaços de Sobolev.

- Considerando K um subconjunto compacto contido em Ω e $s \in \mathbb{R}$, denotamos por $H_K^s(\Omega)$ o espaço das distribuições com suporte compacto em K, onde o prolongamento como 0 fora de Ω está em $H^s(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por $H_{comp}^s(\Omega) = \bigcup_K H_K^s(\Omega)$, onde K é tomado sobre todos os compactos de Ω.

- $H_{loc}^{-1}(\Omega)$ representa o dual topológico de $H_{comp}^1(\Omega)$.

Teorema 1.71 *Seja $a \in S_c^m(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ e seja K a projeção sobre Ω do suporte de a. Então, para todo real s, o operador definido em (1.11.29) se prolonga de forma única em uma aplicação linear e contínua de $H_{comp}^s(\Omega)$ em $H_K^{s-m}(\Omega)$.*

Vamos introduzir, agora, o conceito de medida microlocal de defeito, para tal, seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$, i.e.,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_K |u_k(x)|^2\, dx < +\infty,$$

para todo subconjunto compacto K contido em Ω.

Dizemos que u_k converge fracamente para $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ quando para todo $f \in L^2_{comp}(\Omega)$, tem-se

$$\int_\Omega u_k(x)\, f(x)\, dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u(x)\, f(x)\, dx.$$

Teorema 1.72 *Seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero em $L^2_{loc}(\Omega)$. Então existe uma subsequência $\{u_{\varphi(k)}\}$ e uma medida positiva de Radon μ sobre $T^1\Omega := \Omega \times S^{n-1}$ tal que para todo operador pseudodiferencial A de ordem 0 sobre Ω que admite um símbolo principal $\sigma_0(A)$ e para todo $\chi \in C^\infty_0(\Omega)$ tal que $\chi\sigma_0(A) = \sigma_0(A)$, tem-se*

$$\big(A(\chi u_{\varphi(k)}), \chi u_{\varphi_k}\big)_{L^2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega\times S^{n-1}} \sigma_0(A)(x,\xi)\, d\mu(x,\xi). \qquad (1.11.30)$$

Definição 1.73 *Sob as circunstâncias do Teorema 1.72, μ é chamada a* **<u>medida de defeito microlocal</u>** *(m.d.m.) da sequência $\{u_{\varphi(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$.*

Observação 1.74 *O Teorema 1.72 assegura, que para toda a sequência limitada $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero, a existência de uma subsequência admitindo uma medida de defeito microlocal. Observamos que de (1.11.30), em particular quando $A = f \in C^\infty_0(\Omega)$,*

$$\int_\Omega f(x) |u_{\varphi(k)}(x)|^2\, dx \to \int_{\Omega\times S^{d-1}} f(x)\, d\mu(x,\xi), \qquad (1.11.31)$$

assim $u_{\varphi(k)}$ converge fortemente para 0 se, e somente se, $\mu = 0$.

Observação 1.75 *Observe que dadas duas sequências (y^k) e (x^k) limitadas em $L^2_{loc}(\Omega)$ convergindo fraco para zero, podemos associar a estas sequências, mesmo passando a uma subsequência, medidas de defeito microlocais μ_y e μ_x, respectivamente. Afirmamos que, se $y^k - x^k \to 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$ então $\mu_y = \mu_x$.*

Demonstração: De fato, dado A um operador pseudodiferencial de ordem zero e $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função nas condições do Teorema 1.72 temos

$$(A(\chi x^k), \chi x^k) \to \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_x$$

$$(A(\chi y^k), \chi y^k) \to \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d\mu_y$$

com $\sigma_0(A)$ sendo o símbolo principal de A, isto nos leva a

$$(A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) \longrightarrow \int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d(\mu_x - \mu_y). \tag{1.11.32}$$

Por hipótese temos que $x^k - y^k \to 0$ em $L^2_{loc}(\Omega)$ e como $A\chi$ é um operador contínuo em $L^2_{loc}(\Omega)$ pelo Teorema 1.71 temos

$$A(\chi(x^k - y^k)) \to 0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Assim,

$$\begin{aligned} (A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) &= (A(\chi x^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi x^k) \\ &\quad + (A(\chi y^k), \chi x^k) - (A(\chi y^k), \chi y^k) \\ &= (A(\chi(x^k - y^k)), \chi x^k) + (A(\chi y^k), \chi(x^k - y^k)) \\ &\longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{1.11.33}$$

Assim, pela unicidade do limite, de (1.11.32) e (1.11.33) temos que

$$\int_{\Omega \times S^{d-1}} \sigma_0(A) d(\mu_x - \mu_y) = 0 \text{ para todo } A$$

o que nos leva a concluir que $\mu_x - \mu_y = 0$ e, portanto, $\mu_x = \mu_y$. ■

Teorema 1.76 *Seja P um operador diferencial de ordem m sobre Ω e seja $\{u_k\}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para 0 e admite uma m.d.m. μ. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $Pu_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *fortemente em* $H^{-m}_{loc}(\Omega)$ $(m > 0)$.

(ii) $\operatorname{supp}(\mu) \subset \{(x, \xi) \in \Omega \times S^{n-1} : \sigma_m(P)(x, \xi) = 0\}$.

Teorema 1.77 *Seja P um operador diferencial de ordem m sobre Ω, verificando $P^* = P$, e seja $\{u_k\}$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para 0 e admite uma m.d.m. μ. Vamos assumir que $Pu_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ fortemente em $H^{1-m}_{loc}(\Omega)$. Então, para toda função $a \in C^\infty(\Omega \times (\mathbb{R}^n)\backslash\{0\})$ de grau $1-m$ que é homogênia na segunda variável e com suporte compacto na primeira variável, tem-se*

$$\int_{\Omega\times s^{d-1}} \{a,p\}(x,\xi)\, d\mu(x,\xi) = 0. \tag{1.11.34}$$

A seguir, apresentaremos algumas ferramentas clássicas referentes ao campo vetorial hamiltoniano e suas curvas bicaracterísticas no $(x,\xi)-$espaço cotangente para funções reais $p(x,\xi)$.

Definição 1.78 *Seja $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ uma função real. Chamamos H_p um* ***campo Hamiltoniano*** *de p, o seguinte campo de vetores definido em $\Omega \times \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$:*

$$H_p(x,\xi) = \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_1}(x,\xi), \cdots, \frac{\partial p}{\partial \xi_n}(x,\xi); -\frac{\partial p}{\partial x_1}(x,\xi), \cdots, -\frac{\partial p}{\partial x_n}(x,\xi)\right).$$

A derivada de Lie de uma função f com respeito ao compo Hamiltoniano H_p é dado por $H_p(f) = \{p, f\}$, onde

$$\{p,f\}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right).$$

Uma ***curva Hamiltoniana*** *de p é uma curva integrável do campo de vetores H_p, isto é, é uma solução maximal $s \in I \mapsto (x(s),\ \xi(s))$ para equações Hamilton-Jacobi*

$$\left\{\dot{x} = p_\xi(x,\xi) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x,\xi), \quad \dot{\xi} = -p_x(x,\xi) = -\frac{\partial p}{\partial x}\right\} \tag{1.11.35}$$

onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

Observação 1.79 *Da identidade $H_p p = 0$ segue que a função p mantém um valor constante em cada uma de suas curvas Hamiltonianas. Dizemos que tal curva é* ***bicaracterística*** *de p se esse valor for nulo.*

Observação 1.80 *Seja λ uma função C^∞ em $T^0\Omega$ com valores reais diferentes de zero. Como*

$$H_{\lambda p} = \lambda H_p + pH_\lambda = \lambda H_p \quad se\ p = 0,$$

resulta que as bicaracterísticas de λp e p concidem (módulo uma reparametrização).

Podemos agora traduzir os Teoremas (1.76) e (1.77) em termos mais geométricos.

Teorema 1.81 *Seja P um operador diferencial autoadjunto de ordem m sobre Ω que admite um símbolo principal p. Seja $\{u_k\}_k$ uma sequência limitada em $L^2_{loc}(\Omega)$ que converge fracamente para zero, com uma m.d.m. μ. Vamos assumir que Pu_k converge para 0 em $H^{-(m-1)}_{loc}$. Então o suporte de μ, $\mathrm{supp}(\mu)$, é uma união de curvas do tipo $s \in I \mapsto \left(x(s), \frac{\xi(s)}{|\xi(s)|}\right)$, onde $s \in I \mapsto (x(s), \xi(s))$ é uma bicaracterística de p.*

Proposição 1.82 *A menos de uma mudança de variáveis, as bicaracterísticas do símbolo principal do operador de ondas*

$$p(t, x, \tau, \xi) = -\rho(x)\tau^2 + K(x)\,\xi \cdot \xi, \quad \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n), \tag{1.11.36}$$

são curvas da seguinte forma

$$t \mapsto \left(t, x(t), \tau, -\tau \left(\frac{K(x(t))}{\rho(x(t))}\right)^{-1} \dot{x}(t)\right),$$

onde $t \mapsto x(t)$ é uma geodésica de métrica $G = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{-1}$ sobre Ω, parametrizado pela abscissa curvilínea.

1.12 Resultados Básicos Acerca da Equação da Onda Não Linear

Nesta seção enunciamos alguns resultados com relação à equação da onda sobre variedades Riemannianas.

Teorema 1.83 (Estimativas de Strichartz) *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo de dimensão $n \geq 1$. Suponha que (p, q, λ) e $(r', s', 1-\lambda)$ satisfazem as condições*

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} - \lambda \tag{1.12.37}$$

tal que

$$\frac{3}{p} + \frac{n-1}{q} \leq \frac{n-1}{2}, \text{ se } n \leq 4 \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} \text{ se } n \geq 4, \tag{1.12.38}$$

então existe uma única solução $u \in L^p(0,T; L^q(\Omega)) \cap C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ para o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\boldsymbol{g}} u = G, \ \text{em } \Omega \times]0,T[, \\ u = 0 \ \text{sobre } \partial\Omega \times]0,T[, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1 \ \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{1.12.39}$$

com (r', s') sendo o expoente de Hölder dual a (r, s), além disso, temos a seguinte estimativa,

$$\|u\|_{L^p([-T,T];L^q(M))} \leq C\big(\|u_0\|_{H^\lambda} + \|u_1\|_{H^{\lambda-1}} + \|G\|_{L^r([-T,T];L^s(M))}\big) \tag{1.12.40}$$

com $C > 0$ uma constante dependendo de M e T e, onde H^λ denota o espaço de Sobolev L^2 sobre M de ordem λ.

Demonstração: Ver [11]. ■

No que segue, seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função a valores reais tal que

$$f(0) = 0, sf(s) \geq 0, |f(s)| \leq C(1+|s|)^p, |f'(s)| \leq C(1+|s|)^{p-1} \tag{1.12.41}$$

com $1 \leq p < 5$.

Considere o seguinte sistema da onda semilinear posto em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u + a(x)u_t + f(u) = 0, & \text{em } \Omega \times]0,\infty[, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times]0,\infty[, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = u_1 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{1.12.42}$$

No que concerne à boa colocação para o problema (1.12.42) observamos que, considerando $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ a existência e unicidade de soluções em $C([0,\infty[; H_0^1(\Omega)) \cap$

$C^1([0,\infty[;L^2(\Omega))$ segue combinando as estimativas de Strichartz no Teorema 1.83, assim como podemos encontrar em [34] e [35]. Observe que para o caso da equação da onda com a não linearidade crítica, isto é, $p=5$, o resultado provando a existência é devido a [18].

Associado ao problema (1.12.42) consideremos o funcional de energia

$$E_u(t)=\frac{1}{2}(\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|\nabla_{\mathbf{g}}u(t)\|^2_{L^2(\Omega)})+\int_\Omega V(u)dx \tag{1.12.43}$$

onde $V(u)=\int_0^u f(s)ds\geq 0$, assim é simples observar que E_u é não crescente.

Lema 1.84 *Dados $T>0,(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ e $F\in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ existe uma única solução para o problema*

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta_{\mathbf{g}}u+f(u)=F \ \text{em}\ \Omega\times]0,T[,\\ u=0 \ \text{sobre}\ \ \partial\Omega\times]0,T[,\\ u(0)=u_0,\quad u_t(0)=u_1 \ \text{em}\ \Omega \end{cases} \tag{1.12.44}$$

tal que $u\in L^q(0,T;L^r(\Omega))\cap C([0,T];H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$. Além disso, considerando $E_0,M_1>0$ duas constantes, para todo (u_0,u_1) e F tais que $E_u(0)\leq E_0$ e $\|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\leq M_1$, temos a seguinte estimativa

$$\|u\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))}\leq C\left(\|u_0\|_{H_0^1}+\|u_1\|_{L^2}+\|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right) \tag{1.12.45}$$

com $C=C(T,\Omega)>0, q\in\left[\frac{7}{2},\infty\right]$ e

$$\frac{1}{q}+\frac{3}{r}=\frac{1}{2}. \tag{1.12.46}$$

Demonstração: Primeiro, considere $(q,r)=(5,10)$ e defina

$$X_{T'}=\{v\in L^5(0,T';L^{10}(\Omega));\|v\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))}\leq C_{X_{T'}}\} \tag{1.12.47}$$

onde $C_{X_{T'}}=C\big(\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}+\|u_1\|_{L^2}+\|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}+1\big)>0$ e $T'>0$ suficientemente pequeno, a ser determinado. Considerando a topologia induzida por $L^5(0,T';L^{10}(\Omega))$, temos que $X_{T'}$ é um espaço métrico completo. Defina a seguinte aplicação $S:v\in X_{T'}\mapsto u=S(v)\in L^5(0,T';L^{10}(\Omega))$, onde u é a solução para o problema

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta_{\mathbf{g}}u=F-f(v) \ \text{em}\ \Omega\times]0,T'[,\\ u=0 \ \text{sobre}\ \ \partial\Omega\times]0,T'[,\\ u(0)=u_0,\quad u_t(0)=u_1 \ \ \text{em}\ \Omega. \end{cases} \tag{1.12.48}$$

Vamos provar que S está bem definida, $S : X_{T'} \to X_{T'}$ e, além disso, S é uma contração.

Observe que $v \in L^5(0,T';L^{10}(\Omega))$ garante que $f(v) \in L^1(0,T';L^2(\Omega))$ e, além disso,

$$\|f(v)\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))} \leq CT'^{\frac{4}{5}}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x} + CT'^{\frac{5}{5-p}}C^{p-1}_{X_{T'}}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x}. \tag{1.12.49}$$

De fato, por hipótese, $|f(v)| \leq C(1+|v|^{p-1})|v|$ assim, usando a desigualdade de Hölder e o fato que $\frac{p-1}{4} < 1$ temos,

$$\begin{aligned}
\|f(v)\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))} &\leq C\|v\|_{L^1_tL^2_x} + C\||v|^{p-1}v\|_{L^1_tL^2_x} \\
&\leq CT'^{\frac{4}{5}}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x} + C\int_0^{T'}\|v\|^{p-1}_{L^{10\frac{p-1}{4}}}\|v\|_{L^{10}}dt \\
&\leq CT'^{\frac{4}{5}}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x} + CT'^{\frac{5}{5-p}}\|v\|^{p-1}_{L^5_tL^{10}_x}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x} \\
&\leq CT'^{\frac{4}{5}}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x} + CT'^{\frac{5}{5-p}}C^{p-1}_{X_{T'}}\|v\|^{p-1}_{L^5_tL^{10}_x}
\end{aligned}$$

o que prova (1.12.49).

Da afirmação acima e tomando $T' < T$ temos que $F - f(v) \in L^1(0,T';L^2(\Omega))$ e, então, pelo Teorema 1.83 segue que $u \in L^5(0,T';L^{10}(\Omega))$ e, além disso,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} &\leq C\big(\|u_0\|_{H^1_0} + \|u^1\|_{L^2} + \|F - f(v)\|_{L^1_tL^2_x}\big) \\
&\leq C_{X_{T'}}
\end{aligned}$$

onde, esta última desigualdade é válida considerando $T' = T'(\|u_0\|_{H^1_0}, \|u^1\|_{L^2}\|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} > 0$ suficientemente pequeno. O que nos leva a concluir que $u \in X_{T'}$. Considerando $v, \widetilde{v} \in X_{T'}, u = S(v), \widetilde{u} = S(\widetilde{v})$ e pondo $U = u - \widetilde{u}$, temos que U é solução de

$$\begin{cases}
U_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}U = f(\widetilde{v}) - f(v) \text{ em } \Omega\times]0,T'[, \\
U = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times]0,T'[, \\
U(0) = 0, \quad U_t(0) = 0 \text{ em } \Omega.
\end{cases}$$

Aplicando o Teorema 1.83 junto com a desigualdade de Hölder e a hipótese assumida sobre f,

$$\begin{aligned}
\|S(v) - S(\widetilde{v})\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} &\leq C\|f(v) - f(\widetilde{v})\|_{L^1_tL^2_x} \\
&\leq C(T'^{\frac{4}{5}} + T'^{\frac{5}{5-p}}\|v\|_{L^5_tL^{10}_x} + T'^{\frac{5}{5-p}}\|\widetilde{v}\|_{L^5_tL^{10}_x})\|v - \widetilde{v}\|_{L^5_tL^{10}_x} \\
&\leq \frac{1}{2}\|v - \widetilde{v}\|_{L^5_tL^{10}_x}
\end{aligned}$$

para $T' > 0$ suficientemente pequeno. Portanto, podemos concluir que S é uma contração logo, possui um único ponto fixo $u \in L^5(0,T';L^{10}(\Omega))$ que é solução de (1.12.44), além disso,

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^5(0,T';L10(\Omega))} &\leq C\big\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L_t^1L_x^2} + \|f(u)\|_{L_t^1L_x^2}\big) \\ &\leq C\big\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L_t^1L_x^2}\big) \\ &+ C\big(T^{\frac{4}{5}}\|u\|_{L_t^5L_x^2} + C_{X_{T'}}^{p-1}T^{\frac{5}{5-p}}\|u\|_{L_t^1L_x^2}\big)\end{aligned} \tag{1.12.50}$$

como temos um limitante uniforme, em t, para as normas de u_0, u_1 e F em $H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)$ e $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, respectivamente, podemos tomar $T' > 0$ suficientemente pequeno, dependendo apenas de E_0 e M_1 de modo que os termos em (1.12.50) podem ser absorvidos no lado direito de (1.12.50) donde segue que:

$$\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} \leq C\big(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))}\big). \tag{1.12.51}$$

Agora, observe que, argumentando via desigualdade de Gronwall, podemos concluir que esta solução é única em $L^5(0,T';L^{10}(\Omega))$, além disso, para todo $t \in [0,T']$ temos

$$\|u_t(t)\|_{L^2} + \|u(t)\|_{H_0^1} \leq C\big(\|u_1\|_{L^2} + \|u_0\|_{H_0^1} + \|F\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\big),$$

isto é, a norma da solução não explode em tempo infinito, o que nos permite expandir a solução para $[0,T]$, além disso, supondo $F \in L^1(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ temos a solução pode ser definida globalmente e, ainda, iterando o processo para obtenção de (1.12.51) podemos obter esta estimativa para a norma L^5L^{10} no intervalo $[0,T]$.

Considerando agora $(q,r) \neq (5,10)$ tal que $q \in \left[\frac{7}{2}, \infty\right]$ e satisfazendo (1.12.46), observando primeiro que $u \in L^5(0,T;L^{10}(\Omega))$ garante que $f(u) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, podemos aplicar o Teorema 1.83 para obter que $u \in L^q(0,T;L^r(\Omega))$, além disso, para $T' < T$ temos que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))} &\leq C\big(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F - f(u)\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))}\big) \\ &\leq C\big(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))}\big) \\ &+ CT'^{\frac{4}{5}}\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} + CT'^{\frac{5}{5-p}}C_{X_{T'}}^{p-1}\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))}\end{aligned}$$

somando esta última desigualdade, com a desigualdade provada no caso $(5,10)$ obtemos, para uma constante $C > 0$, possivelmente maior, porém que dependa apenas de $f, E_0, M_1 > 0$ e Ω

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(0,T';L^r(\Omega))} + \|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} &\leq C\big(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))}\big)\\ &+ CT'^{\frac{4}{5}}\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))} + CT'^{\frac{5}{5-p}}C_{X_{T'}}^{p-1}\|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))}\end{aligned}$$

assim, tomando $T' > 0$ suficientemente pequeno, podemos absorver os termos envolvendo a norma $\|u\|_{L^5L^{10}}$ no lado esquerdo desta desigualdade no lado direito, obtendo assim

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(0,T';L^r(\Omega))} &\leq \|u\|_{L^q(0,T';L^r(\Omega))} + \|u\|_{L^5(0,T';L^{10}(\Omega))}\\ &\leq C\big(\|u_0\|_{H_0^1} + \|u_1\|_{L^2} + \|F\|_{L^1(0,T';L^2(\Omega))}\big)\end{aligned}$$

provando o resultado para $T' > 0$ suficientemente pequeno, porém dependendo somente de $f, M_1, E_0 > 0$ e Ω, podemos iterar este processo para obter (1.12.45) para $T > 0$. ■

Vamos ver agora o conceito de sequência linearizável introduzido por P. Gérard em [33]. Considere (u^m) uma sequência de soluções para o problema

$$\begin{cases} u^m_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u^m + f(u^m) = F^m \quad \text{em } \Omega\times]0,\infty[,\\ u^m = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times]0,\infty[,\\ u^m(0) = u_0^m, \quad u_t(0) = u_1^m, \quad \text{em } \in \Omega,\end{cases} \tag{1.12.52}$$

com $(\Omega, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana compacta com ou sem bordo e $F^m \in L^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$ tal que $\|F^m\|_{L^1(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega))} \leq C$, para algum $C > 0$, e supondo válido a limitação $E_{u^m}(t) \leq E_0$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Tal limitação implica que $(u^m_t), (\nabla_{\mathbf{g}} u^m)$ são uniformemente limitadas em $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$. Denote por w^m a solução da equação da onda linear com os mesmos dados iniciais, isto é,

$$\begin{cases} w^m_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} w^m = 0 \quad \text{em } \Omega\times]0,\infty[,\\ w^m = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times]0,\infty[,\\ w^m(0) = u_0^m, \quad w^m_t(0) = u_1^m, \quad \text{em } \Omega,\end{cases} \tag{1.12.53}$$

assim temos que $E_{w^m}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |w^m_t|^2 + |\nabla_{\mathbf{g}} w^m|^2 dx$ e satisfaz $E_{w^m} \leq E_0$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Consequentemente, (w^m_t) e $(\nabla_{\mathbf{g}} w_m)$ são limitadas em $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$.

Definição 1.85 *Sejam $(u^m), (w^m)$ sequências nas condições acima. Dizemos que (u^m) é linearizável sobre um intervalo compacto I se*

$$\sup_{t\in I}\left[\int_\Omega |\partial_t(u^m - w^m)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{g}}(u^m - w^m)|^2 dx\right] \to 0 \tag{1.12.54}$$

quando $m \to \infty$.

Observação 1.86 *Observe que podemos associar às sequências* $(u_t^m), (\nabla_{\mathbf{g}} u^m)$ *e* $(w_t^m), (\nabla_{\mathbf{g}} w^m)$ *medidas de defeito microlocal* μ_1, μ_2, *as quais chamamos de medida de defeito microlocal* H^1 *associadas à equação da onda semilinear e linear, respectivamente. De acordo com a Observação 1.75 temos que* $\mu_1 = \mu_2$.

Observação 1.87 *Nas condições acima, se*

$$G^m = F^m - f(u^m) \to 0 \text{ (forte) em } L^1(0,T;L^2(\Omega)) \tag{1.12.55}$$

para algum $T > 0$, *então a sequência* u^m *é linearizável no sentido da Definição 1.85.*

Demonstração: De fato, considere w^m uma sequência de soluções para a equação da onda linear com os mesmos dados iniciais, isto é,

$$\begin{cases} w_{tt}^m - \Delta_{\mathbf{g}} w^m = 0 \quad \text{ em } \Omega \times]0,T[, \\ w^m = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega \times]0,T[, \\ w^m(0) = u_0^m, \ \ w_t^m(0) = u_1^m, \ \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

assim

$$\begin{cases} (u^m - w^m)_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}(u^m - w^m) = G^m \quad \text{ em } \Omega \times]0,T[, \\ u^m - w^m = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega \times]0,T[, \\ (u^m - w^m)(0) = 0, \ \ (u^m - w^m)_t(0) = 0 \end{cases}$$

e, então, pela desigualdade de Gronwall obtemos que,

$$\|\partial_t(u^m - w^m)(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{\mathbf{g}}(u^m - w^m)(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \int_\Omega G^m(t)dt$$

para todo $t \in [0,T]$, assim, por (1.12.55), temos que

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \left(\|\partial_t(u^m - w^m)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(u^m - w^m)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ &\leq \ C \sup_{t\in[0,T]} \Big(\|\partial_t(u^m - w^m)\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \ \|\nabla_{\mathbf{g}}(u^m - w^m)\|_{L^2(\Omega)} \Big) \\ &= \ C \int_0^T G^m dt \to 0. \end{aligned}$$

Logo, a sequência (u^m) é linearizável no sentido da Definição 1.85. ∎

1.13 Princípio de Continuação Única

Defina

$$\mathfrak{C}^1(\mathbb{R}) = \{f \in C^1(\mathbb{R}); \exists C > 0 \text{ e } p \in [1,5[\text{ tal que (1.12.41) é verificado}\} \tag{1.13.56}$$

e induzimos neste espaço a topologia Whitney gerada pela seguinte família de vizinhanças

$$\mathcal{N}_{f,\delta} = \{l \in \mathfrak{C}^1(\mathbb{R}); \max\{|f(s) - l(s)|, |f'(s) - l'(s)|\} < \delta(s), \forall s \in \mathbb{R}\}$$

onde f é qualquer função em $\mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$ e δ é qualquer função positiva e contínua. Munido com essa topologia, $\mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$ é um espaço de Baire (veja [36] para a prova deste fato).

Proposição 1.88 *Dado $E_0 \geq 0$, existe $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}^1(\mathbb{R})$ um conjunto genérico tal que, se $\omega \subset \Omega$ é um aberto satisfazendo a condição geométrica de controle, então existe $T > 0$ tal que a única solução de*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_{\mathbf{g}} u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \times [0,T], \\ \partial_t u = 0 \text{ em } \omega \times [0,T], \end{cases} \tag{1.13.57}$$

com $E_u(0) \leq E_0$ é $u \equiv 0$.

Demonstração: Ver [36], Teorema 1.2 e Corolário 6.2. ■

A seguir, veremos um resultado de continuação única para sistemas hiperbólicos acoplados de segunda ordem com coeficientes e potenciais em $L^{\frac{n+1}{2}}$. Este resultado é devido a Cavalcanti et al. em [26].

Vamos lembrar alguns resultados de propriedade de continuação única para operadores diferenciais. Para tal, usamos as notações de Dos Santos Ferreira em [31] e Koch-Tataru em [59].

Seja $P(x,D)$ um operador diferencial de segunda ordem do tipo principal real com coeficientes C^∞ e u a solução da equação diferencial

$$P(x,D)u + V(x)u = 0, \; x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1.13.58}$$

onde $V \in L^{\frac{n}{2}}_{loc}$ e seja S uma hipersuperfície C^∞ em $\mathbb{R}^n$ localmente definida por

$$\begin{aligned} S_+ &= \{x \in \Omega : \psi(x) > \psi(x_0)\} \\ S_- &= \{x \in \Omega : \psi(x) < \psi(x_0)\}. \end{aligned} \tag{1.13.59}$$

Dizemos que a solução de (1.13.58) tem **continuação única** através da hipersuperfície S se quando u se anula sobre um lado S_- então u se anula em toda uma vizinhança de x_0.

Definição 1.89 *A hipersuperfície $S = \{x \in \Omega : \phi(x) = \phi(x_0)\}$ é dita ser (estritamente) pseudo-convexa em $x_0 \in \Omega$ com respeito ao operador diferencial do tipo principal real P de ordem 2 cujo símbolo principal real é p sempre que*

$$p(x_0, \xi) = H_p\phi(x_0, \xi) = 0 \Rightarrow H_p^2(x_0, \xi) < 0 \textit{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Usando $(L^p - L^{p'})$ estimativas de Carleman, o seguinte resultado é provado por Dos Santos Ferreira em [31].

Proposição 1.90 *Seja $P(x, D)$ um operador diferencial de ordem 2, definido em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Suponha que existe $M \geq 1$, uma vizinhança Ω_0 de x_0 e uma função $\phi \in C^\infty$ verificando $\{x \in \Omega_0 : x \neq x_0, \phi(x) \leq \phi(x_0)\} \subset S_-$ tal que a estimativa de Carleman*

$$\|e^{-\tau\phi} v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq C \|e^{-\tau\phi} P(x, D) v\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \tag{1.13.60}$$

vale para todo $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$ e $\tau \geq M$. Então, se $u \in H^1(\Omega)$ é a solução da equação (1.13.58) sobre Ω onde $V \in L^{\frac{n}{2}}_{loc}$ e u se anula sobre S_-, então existe uma vizinhança de x_0 na qual u se anula.

Inspirado nesta proposição, obtem-se o seguinte resultado:

Proposição 1.91 *Sejam $P_1(x, D)$ e $P_2(x, D)$ dois operadores diferenciais de ordem 2, definidos sobre um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Suponha que existe $M \geq 1$, uma vizinhança*

Ω_0 de x_0 e uma função $\phi \in C^\infty$ verificando $\{x \in \Omega_0 : x \neq x_0, \phi(x) \leq \phi(x_0)\} \subset S_-$ tal que as seguintes estimativas de Calerman

$$\|e^{-\tau\phi}u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq C\|e^{-\tau\phi}P_1(x,D)u\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \tag{1.13.61}$$

e

$$\|e^{-\tau\phi}v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leq C\|e^{-\tau\phi}P_2(x,D)v\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \tag{1.13.62}$$

valem para todo u, $v \in C_0^\infty(\Omega_0)$ e $\tau \geq M$. Então a propriedade de continuação única vale para a solução do sistema acoplado

$$\begin{cases} P_1(x,D)u + V_1u = V_3v \\ P_2(x,D)v + V_2v = V_3u, \end{cases} \tag{1.13.63}$$

onde V_1, V_2 e V_3 são elementos de $L^{\frac{n}{2}}_{loc}$.

Demonstração: Suponha que $x_0 = 0$ e $\psi(0) = 0$ e seja $\chi \in C_0^\infty(\Omega_0)$ igual a 1 sobre uma vizinhança Ω_1 de 0. Aplicando a desigualdade de Calerman para a função $w_1 = \chi u$, $w_2 = \chi v$ e observando que $L^{\frac{n}{2}} \cdot L^{\frac{2n}{n-2}} \subset L^{\frac{2n}{n+2}}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|e^{-\tau\phi}w_1\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} &\lesssim \|e^{-\tau\phi}P_1(x,D)w_1\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \\
&\lesssim \|e^{-\tau\phi}P_1(x,D)(\chi u)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \\
&\lesssim \|e^{-\tau\phi}(\chi P_1(x,D)u + [P_1,\chi]u)\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \\
&\lesssim \|V_3e^{-\tau\phi}\chi v - V_1e^{-\tau\phi}\chi u + e^{-\tau\phi}[P_1,\chi]u\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} \\
&\lesssim \|V_3\|_{L^{\frac{n}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + \|V_1\|_{L^{\frac{n}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \\
&\quad + \|e^{-\tau\phi}[P_1,\chi]u\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}.
\end{aligned}$$

onde $K = \operatorname{supp}(\chi)$ e $[P_1,\chi] = P_1\chi - \chi P_1$. Isto é,

$$\begin{aligned}
\|e^{-\tau\phi}w_1\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \lesssim{}& \|V_3\|_{L^{\frac{n}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + \|V_1\|_{L^{\frac{n}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \\
&+ \|e^{-\tau\phi}[P_1,\chi]u\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}.
\end{aligned} \tag{1.13.64}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\|e^{-\tau\phi}w_2\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \lesssim{}& \|V_3\|_{L^{\frac{n}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + \|V_2\|_{L^{\frac{n}{2}}(K)}\|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \\
&+ \|e^{-\tau\phi}[P_2,\chi]v\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}.
\end{aligned} \tag{1.13.65}$$

Somando as desigualdades (1.13.64) e (1.13.65) e organizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + \|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} &\lesssim (\|V_1\|_{L^{\frac{n}{2}}(K)} + \|V_3\|_{L^{\frac{n}{2}}(K)})\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \\ &+ (\|V_2\|_{L^{\frac{n}{2}}(K)} + \|V_3\|_{L^{\frac{n}{2}}(K)})\|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \\ &+ \|e^{-\tau\phi}[P_1,\chi]u\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} + \|e^{-\tau\phi}[P_2,\chi]v\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}.\end{aligned} \tag{1.13.66}$$

Então escolhemos χ com suporte suficientemente pequeno tal que os dois primeiros termos do lado direito de (1.13.66) podem ser absorvidos no lado esquerdo. Assim

$$\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + \|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \lesssim \|e^{-\tau\phi}[P_1,\chi]u\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} + \|e^{-\tau\phi}[P_2,\chi]v\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}. \tag{1.13.67}$$

Mas $[P_1(x,D),\chi]u$ e $[P_2(x,D),\chi]v$ são operadores diferenciais clássicos de ordem 1 suportados em $\operatorname{supp} u \cap \overline{\Omega_0 \setminus \Omega_1} \subset \{\phi > 0\}$ e $\operatorname{supp} v \cap \overline{\Omega_0 \setminus \Omega_1} \subset \{\phi > 0\}$ onde $\phi > c > 0$, que implica que

$$\begin{aligned}\|e^{-\tau\phi}\chi u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + \|e^{-\tau\phi}\chi v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} &\lesssim e^{-\tau c}(\|[P_1(x,D),\chi]u\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}} + \|[P_2(x,D),\chi]v\|_{L^{\frac{2n}{n+2}}}) \\ &\lesssim e^{-\tau c}(\|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1}).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|e^{-\tau(\phi-c)}\chi u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + \|e^{-\tau(\phi-c)}\chi v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \lesssim \|u\|_{H^1} + \|v\|_{H^1},$$

isto é, $\|e^{-\tau(\phi-c)}\chi u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} + \|e^{-\tau(\phi-c)}\chi v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}$ é limitado, que impossível, a menos que $u = v = 0$ quando $\phi < c$. Isto completa a prova da continuação única. ■

Argumentos análogos podem ser aplicados para provar a propriedade de continuação única para sistemas hiperbólicos acoplados de segunda ordem com coeficientes e potenciais em $L^{\frac{n+1}{2}}$. De fato, em Koch-Tataru em [59] encontramos o seguinte resultado:

Teorema 1.92 *Seja P um operador hiperbólico com coeficientes C^2. Seja ϕ uma função estritamente pseudo-convexa com respeito a P. Então para toda u compactamente suportada, temos*

$$\|e^{\tau\phi}u\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n-1}} \cap \tau^{-\frac{1}{4}} H_\tau^{\frac{1}{2}}} \lesssim \|e^{\tau\phi}P(x,D)u\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n+3}} + \tau^{\frac{1}{4}} H_\tau^{-\frac{1}{2}}}, \ \tau > \tau_0. \tag{1.13.68}$$

Seja $X = L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}$ e $Y = \tau^{-\frac{1}{4}} H_\tau^{\frac{1}{2}}$, então a desigualdade (1.13.68) pode ser reescrita como

$$\|e^{\tau\phi}u\|_{X\cap Y} \lesssim \|e^{\tau\phi}P(x,D)u\|_{X^*+Y^*}, \ \tau > \tau_0. \tag{1.13.69}$$

Note que $X \cap Y \hookrightarrow X$, que implica que $X^* \hookrightarrow X^* + Y^*$. Da desigualdade (1.13.69) deduzimos que,

$$\|e^{\tau\phi}u\|_{X} \lesssim \|e^{\tau\phi}P(x,D)u\|_{X^*}, \ \tau > \tau_0. \tag{1.13.70}$$

Então, notando que $L^{\frac{n+1}{2}} \cdot L^{\frac{2(n+1)}{n-1}} \subset L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}$, deduzimos o seguinte resultado:

Proposição 1.93 *Sejam $P_1(x,D)$ e $P_2(x,D)$ dois operadores hiperbólicos de segunda ordem com coeficientes C^2. Seja ϕ uma função estritamente pseudoconvexa com respeito a P_1 e P_2. Então a propriedade de continuação única vale para toda solução do sistema acoplado*

$$\begin{cases} P_1(x,D)u + V_1 u = V_3 v \\ P_2(x,D)v + V_2 v = V_3 u, \end{cases} \tag{1.13.71}$$

onde V_1, V_2 e V_3 são elementos de $L^{\frac{n+1}{2}}$.

Capítulo 2

Equações Dinâmicas de Elasticidade para Materiais Incompressíveis com um Termo de Pressão

Este capítulo, realizado em parceria com Maria Astudillo, Marcelo Moreira Cavalcanti e Janaina Pedroso Zanchetta foi publicado em [6].

2.1 Controlabilidade Exata Interna

Seja Ω um subconjunto aberto, limitado e conexo do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ com fronteira regular Γ. Seja $Q = \Omega \times]0,T[$ um cilindro cuja fronteira lateral é dada por $\Sigma = \Gamma \times]0,T[$. Neste capítulo vamos obter a controlabilidade exata interna para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = -\nabla p + h\chi_\omega \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

onde $\Delta\phi = (\Delta\phi_1, \cdots, \Delta\phi_n), \phi'' = (\phi_1'', \cdots, \phi_n''), \operatorname{div}\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}$ e $p = p(x,t)$ é o termo de pressão. Além disso, $\omega \subset \Omega$ e χ_ω é a função característica de ω onde ω é uma vizinhança da fronteira Γ satisfazendo a condição geométrica de controle.

Observação 2.1 *Neste capítulo vamos trabalhar com os espaços V e H caracterizados na Seção 1.8.*

Observação 2.2 *Repetidos índices indicam o somatório de 1 a n.*

Vamos assumir que ω é um subconjunto não vazio de Ω tal que existe um aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}$ sendo uma vizinhança de Γ e $\omega = \Omega \cap \mathcal{O}$.

Assumiremos também que Ω é estrelado com relação à origem, isto é, existe $\gamma > 0$ tal que escolhendo $x_0 = 0$ temos

$$m \cdot \nu \geq \gamma > 0, \ \forall \ x \text{ sobre } \Gamma, \ \Gamma(x_0) = \Gamma. \tag{2.1.2}$$

(Ver Seção 1.10 para mais detalhes).

Sabemos que para obter a controlabilidade exata interna para o problema (2.1.1) é suficiente obter as desigualdades direta e inversa para o problema

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = -\nabla p \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div} \phi = 0 \ \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \ \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Observação 2.3 *Como observado em Simon [56], para dados iniciais regulares o problema* (2.1.3) *é equivalente ao problema*

$$\begin{cases} \phi'' + A\phi = 0 \ \ \textit{em } Q, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \ \phi'(0) = \phi^1 \ \ \textit{em } \Omega, \end{cases} \tag{2.1.4}$$

onde A é o operador de Stokes definido em (1.9.18).

Demonstração: De fato, para $v \in V$, temos que

$$\langle \phi'', v \rangle_{V',V} + \langle A\phi, v \rangle_{V',V} = 0.$$

Como $v \in V \subset H$, obtemos como em (1.9.19),

$$\langle A\phi, v \rangle_{V',V} = \sum_{i=1}^{n} \langle -\Delta\phi_i, v_i \rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

Segue então que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \phi_i''(t) - \Delta\phi_i(t), v_i \right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

Seja

$$L_i = \phi_i''(t) - \Delta\phi_i(t),$$

então $L_i \in H^{-1}(\Omega)$.

Seja

$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle L_i, v_i \rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

então $L \in (H^{-1}(\Omega))^n$ e, além disso, $L(v) = 0, \quad \forall \quad v \in V$ q.s. em $]0,T[$. Assim, pelo Lema 1.42 existe $p(t) \in L_0^2(\Omega)$ tal que

$$L = \phi''(t) - \Delta\phi(t) = -\nabla p.$$

■

2.1.1 Desigualdades Direta e Inversa

Nesta subseção vamos obter as desigualdades direta e inversa para o problema (2.1.3) que é suficiente para aplicar o método HUM (Hilbert Uniqueness Method) a fim de obter a controlabilidade exata interna para o problema (2.1.1). Para isto, usaremos a técnica de multiplicadores.

Definição 2.4 *A energia associada ao problema* (2.1.3) *é definida por*

$$E(t) = \frac{1}{2}\left|\phi'(t)\right|_H^2 + \frac{1}{2}\left\|\phi(t)\right\|_V^2, \quad \forall \quad t \in [0,T]. \tag{2.1.5}$$

Teorema 2.5 *Sejam $\{\phi^0, \phi^1\} \in H \times V'$ e ϕ a solução ultra fraca do problema* (2.1.3)*. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dxdt \leq C\left[|\phi^0|_H^2 + \|\phi^1\|_{V'}^2\right]. \tag{2.1.6}$$

Demonstração: Como ϕ é a solução ultrafraca para o problema (2.1.3), então pelas propriedades de solução ultrafraca para problemas lineares, (veja Teorema 1.68), existe $C > 0$ tal que

$$\|\phi\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + \|\phi'\|_{L^\infty(0,T;V')}^2 \leq C\left[|\phi^0|_H^2 + \|\phi^1\|_{V'}^2\right]. \tag{2.1.7}$$

Pela imersão $L^\infty(0,T;H) \hookrightarrow L^2(0,T;H)$ e de (2.1.7) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\omega |\phi|^2 \, dxdt &\leq \int_0^T \int_\Omega |\phi|^2 \, dxdt \\
&= \|\phi\|^2_{L^2(0,T;H)} \\
&\leq C \|\phi\|^2_{L^\infty(0,T;H)} \\
&\leq C(\|\phi\|^2_{L^\infty(0,T;H)} + \|\phi'\|^2_{L^\infty(0,T;V')}) \\
&\leq C(\|\phi^0\|^2_H + \|\phi^1\|^2_{V'}).
\end{aligned}$$

■

Observação 2.6 *Como estabelecido em J.L.Lions [42], (Cap. I, Lema 3.7), se $\phi \in (H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega))^n$, então*

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} = \nu_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \nu} \quad \text{sobre } \Gamma; \quad \forall i, k \in \{1, \cdots, n\}. \tag{2.1.8}$$

Além disso, se $\operatorname{div} \phi = 0$ em Ω, então como em J.L.Lions [42] (Cap. II, seç. 5) temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \cdot \nu = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \tag{2.1.9}$$

e, consequentemente,

$$\nu_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} = \nu_i \nu_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \tag{2.1.10}$$

Teorema 2.7 *Sejam $\{\phi^0, \phi^1\} \in H \times V'$ e ϕ a solução ultra fraca do problema (2.1.3). Considere $T > T_0$, onde $T_0 = 2R_0$. Então, existe uma constante $C = C(T_0) > 0$ tal que*

$$|\phi^0|^2_H + \|\phi^1\|^2_{V'} \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dxdt. \tag{2.1.11}$$

Demonstração: Suponha que se tenha a seguinte estimativa

$$\|\theta^0\|^2_V + |\theta^1|^2_H \leq C \int_0^T \int_\omega |\theta'|^2 dxdt, \tag{2.1.12}$$

onde θ é a solução do problema (2.1.3) com dados iniciais $\{\theta^0, \theta^1\} \in V \times H$. Então temos o resultado desejado. De fato, tome $\{\phi^0, \phi^1\} \in H \times V'$. Desde que $-\phi^1 \in V'$ e o operador $-\Delta : V \longrightarrow V'$ é um isomorfismo isométrico, existe $\eta \in V$ tal que

$$-\Delta \eta = -\phi^1. \tag{2.1.13}$$

Defina

$$\psi(t) = \int_0^t \phi(s)ds + \eta, \tag{2.1.14}$$

onde η satisfaz (2.1.13) e ϕ é a solução do problema

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = -\nabla(\frac{\partial}{\partial t}p) \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \ \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \ \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.15}$$

Então temos que ψ é a solução para o problema

$$\begin{cases} \psi'' - \Delta\psi = -\nabla p \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\psi = 0 \ \text{ em } Q, \\ \psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \psi(0) = \eta, \ \ \psi'(0) = \phi^0 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.16}$$

De fato, integrando $(2.1.15)_1$ de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned} -\nabla p &= \int_0^t \phi''(s)ds - \int_0^t \Delta\phi(s)ds \qquad (2.1.17) \\ &= \phi'(t) - \phi'(0) - \Delta\int_0^t \phi(s)ds \\ &= \phi'(t) - \phi^1 - \Delta\int_0^t \phi(s)ds \\ &= \psi''(t) - \Delta\eta - \Delta\int_0^t \phi(s)ds \\ &= \psi''(t) - \Delta\left(\int_0^t \phi(s)ds + \eta\right) \\ &= \psi''(t) - \Delta\psi(t). \end{aligned}$$

As demais condições são verificadas trivialmente.

De (2.1.12) e (2.1.16) temos que

$$\|\eta\|_V^2 + |\phi^0|_H^2 \leq C\int_0^T \int_\omega |\psi'|^2 dxdt,$$

ou, equivalentemente,

$$\|\phi^1\|_{V'}^2 + |\phi^0|_H^2 \leq C\int_0^T \int_\omega |\phi|^2 dxdt.$$

Dessa forma, basta provar a estimativa (2.1.12). Faremos isso em vários passos. Seguiremos os mesmos passos de como é feito para a equação da onda em J.L. Lions [42], (Cap. I).

Lema 2.8 *Seja $m \in (C^1(\overline{\Omega}))^n$. Então, para toda solução regular de (2.1.3), a seguinte identidade é verificada*

$$\langle \nabla p, m \cdot \nabla \phi \rangle_{L^2(Q)^n} = \langle \nabla p, \phi \cdot \nabla m \rangle_{L^2(Q)^n} - \langle \nabla p, \phi (\operatorname{div} m) \rangle_{L^2(Q)^n}.$$

Demonstração: Considere

$$X = -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} m_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} dx dt.$$

Integrando por partes com respeito a x_k e usando o fato que $\phi = 0$ sobre Σ, obtemos

$$\begin{aligned} X &= \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \cdot m_k \right) \cdot \phi_i dx dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_k} m_k \phi_i dx dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial m_k}{\partial x_k} \phi_i dx dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes a primeira integral, com respeito a x_i, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_k} m_k \phi_i dx dt = -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial m_k}{\partial x_i} \phi_i dx dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_k} m_k \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} dx dt.$$

Como $\operatorname{div} \phi = 0$ sobre Q, concluímos que

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_k} m_k \phi_i dx dt = -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial m_k}{\partial x_i} \phi_i dx dt.$$

Portanto,

$$X = -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_k} \frac{\partial m_k}{\partial x_i} \phi_i dx dt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial m_k}{\partial x_k} \phi_i dx dt,$$

como queríamos. ■

Observação 2.9 *Para $T > T_0 = 2R_0$, pelo Teorema 1.65, existe uma constante $C = C(T_0) > 0$ tal que a seguinte desigualdade é verificada*

$$E_\theta(0) \leq C \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt, \tag{2.1.18}$$

onde θ é solução fraca do problema (2.1.3) sujeita aos dados iniciais $\{\theta^0, \theta^1\} \in V \times H$ e $\Gamma_0 = \Gamma(x_0)$ definido em (1.10.23).

Observamos ainda que no Teorema 1.65 é preciso ter a hipótese (2.1.2) que diz que Ω deve ser estritamente estrelado em relação à origem. Aqui é onde dependemos desta hipótese.

Lema 2.10 *Sejam $T > T_0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $T - 2\varepsilon > T_0$. Seja θ a solução do problema (2.1.3) sujeita aos dados iniciais $\{\theta^0, \theta^1\} \in V \times H$. Então, existe $C = C(T_0) > 0$ tal que*

$$E_\theta(0) \leq C \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt. \tag{2.1.19}$$

Demonstração: Como θ é a solução fraca do problema (2.1.3), $\theta \in C([0,T], V) \cap C^1([0,T], H) \cap C^2([0,T], V')$. Em particular,

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = -\nabla p \ \text{ em } C([0, T-2\varepsilon], V'), \\ \operatorname{div}\theta = 0 \ \text{ em } \Omega\times]0, T-2\varepsilon[, \\ \theta = 0 \ \text{ sobre } \Gamma\times]0, T-2\varepsilon[, \\ \theta(0) = \theta^0, \ \ \theta'(0) = \theta^1 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.20}$$

Pela Observação 2.9 e (2.1.20) temos que

$$E_\theta(0) \leq C \int_0^{T-2\varepsilon} \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt. \tag{2.1.21}$$

Seja $0 \leq t \leq T - 2\varepsilon$ então $\varepsilon \leq t + \varepsilon \leq T - \varepsilon < T$ e definamos $\eta(t) = \theta(t+\varepsilon)$ e $\nabla q = \nabla p(x, t+\varepsilon)$. Então,

$$\begin{cases} \eta'' - \Delta\eta = -\nabla q \ \text{ em } C([0, T-2\varepsilon], V'), \\ \operatorname{div}\eta = 0 \ \text{ em } \Omega\times]0, T-2\varepsilon[, \\ \eta = 0 \ \text{ sobre } \Gamma\times]0, T-2\varepsilon[, \\ \eta(0) = \theta(\varepsilon), \ \ \eta'(0) = \theta'(\varepsilon) \ \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{2.1.22}$$

assim, analogamente a (2.1.21), obtemos

$$E_\eta(0) \leq C \int_0^{T-2\varepsilon} \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt. \tag{2.1.23}$$

Como $E_\eta(0) = E_\theta(\varepsilon) = E_\theta(0)$ obtemos

$$E_\theta(0) \leq C \int_0^{T-2\varepsilon} \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \eta}{\partial \nu}(x,t) \right|^2 d\Gamma dt, \tag{2.1.24}$$

então fazendo mudança de variáveis $s = t + \varepsilon$ em (2.1.24),

$$E_\theta(0) \leq C \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \eta}{\partial \nu}(x,s-\varepsilon) \right|^2 d\Gamma ds.$$

Portanto,

$$E_\theta(0) \leq C \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu}(x,s) \right|^2 d\Gamma ds.$$

■

Fixe $T > T_0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $T - 2\varepsilon > T_0$. Considere $h \in (C^1(\overline{\Omega}))^n$ tal que

$$\begin{cases} h \cdot \nu \geq 0 \text{ para cada } x \in \Gamma, \\ h = \nu \text{ sobre } \Gamma_0, \\ h = 0 \text{ em } \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

Seja $\eta \in C^1(0,T)$ tal que $\eta(0) = \eta(T) = 0$ e $\eta(t) = 1$ em $]\varepsilon, T-\varepsilon[$.

Defina $r(x,t) = \eta(t)h(x)$ o qual pertence a $[W^{1,\infty}(Q)]^n$ e satisfaz

$$\begin{cases} r(x,t) = \nu(x), \text{ para cada } (x,t) \in \Gamma_0\times]\varepsilon, T-\varepsilon[, \\ r(x,t)\cdot \nu(x) \geq 0, \text{ para cada } (x,t) \in \Gamma\times]0,T[, \\ r(x,0) = r(x,T) = 0, \text{ para cada } x \in \Omega, \\ r(x,t) = 0, \text{ para cada } (x,t) \in (\Omega \setminus \omega)\times]0,T[. \end{cases} \tag{2.1.25}$$

Lema 2.11 *Sejam $T > T_0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $T - 2\varepsilon > T_0$. Seja θ a solução do problema (2.1.3) sujeita aos dados iniciais $\{\theta^0, \theta^1\} \in V \times H$. Então, existe $C = C(T_0) > 0$ tal que*

$$E_\theta(0) \leq C \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_\omega |\theta|^2 + |\theta'|^2 + |\nabla\theta|^2 dxdt, \tag{2.1.26}$$

onde $\nabla\theta$ significa

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \theta_n}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial \theta_n}{\partial x_1} \end{pmatrix}. \tag{2.1.27}$$

Demonstração: Inicialmente consideramos dados regulares, e obtemos o resultado geral usando argumentos de densidade. Compondo a equação $\theta'' - \Delta\theta = -\nabla p$ com $r \cdot \nabla\theta$ e integrando em $[0, T]$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma r\cdot\nu\left|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega(\operatorname{div} r)(|\theta'|^2 - |\nabla\theta|^2)dxdt + \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\frac{\partial r_k}{\partial x_j}\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}dxdt \\ &- \int_0^T\int_\Omega \theta_i' r_k'\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}dxdt + \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i}r_k\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}dxdt. \qquad (2.1.28)\end{aligned}$$

De fato, note que

$$\int_0^T(\theta'', r\cdot\nabla\theta)dt - \int_0^T(\Delta\theta, r\cdot\nabla\theta)dt = -\int_0^T(\nabla p, r\cdot\nabla\theta)dt. \qquad (2.1.29)$$

Denotando

$$J_1 := \int_0^T(\theta'', r\cdot\nabla\theta)dt.$$

$$J_2 := -\int_0^T(\Delta\theta, r\cdot\nabla\theta)dt.$$

$$J_3 := -\int_0^T(\nabla p, r\cdot\nabla\theta)dt.$$

A seguir, vamos estimar estes termos.

Usando integração por partes e as propriedades da função $r(x,t)$ definida em (2.1.25), deduzimos sobre J_1,

$$\begin{aligned}J_1 = \int_0^T(\theta'', r\cdot\nabla\theta)dt &= \underbrace{(\theta_i', r_k\nabla\theta_i)|_0^T}_{=0} - \int_0^T\int_\Omega\theta_i'\left(r_k\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}\right)'dxdt \\ &= -\int_0^T\int_\Omega\theta_i' r_k'\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}dxdt - \underbrace{\int_0^T\int_\Omega\theta_i' r_k\frac{\partial\theta_i'}{\partial x_k}dxdt}_{\widetilde{J_1}}.\end{aligned}$$

Pelo Lema de Gauss segue que

$$\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\theta_i'^2 r_k\right)dx = \int_\Gamma\theta_i'^2 r_k\nu_k d\Gamma.$$

Observe que $\theta_i'(x,t) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[\theta_i(x,t+h)-\theta_i(x,t)]$ e $\theta_i(x,t)=0$ sobre Σ. Assim, para $0<t+h<T$, tem-se que $\theta_i(x,t+h)=0$ o que implica que $\theta_i'(x,t)=0$ sobre Σ.

Portanto, deduzimos que

$$\widetilde{J}_1 := -\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \theta_i'^2\frac{\partial r_k}{\partial x_k}dxdt.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} J_1 &= -\int_0^T\int_\Omega r_k'\frac{\partial \theta_i}{\partial x_k}\theta_i' dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \theta_i'^2\frac{\partial r_k}{\partial x_k}dxdt \\ &= -\int_0^T(\theta', r'\cdot\nabla\theta)dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega |\theta'|^2 \operatorname{div} r \quad dxdt. \end{aligned} \tag{2.1.30}$$

Sobre o termo J_2, temos

$$J_2 = -\int_0^T(\Delta\theta, r\cdot\nabla\theta)dt = -\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial^2\theta_i}{\partial x_j^2}r_k\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}dxdt.$$

Do Lema de Gauss, tem-se

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}r_k\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}\right)dx = \int_\Gamma r_k\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\nu_j d\Gamma.$$

Dessa forma, usando (2.1.8), temos

$$J_2 = \underbrace{\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(r_k\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}\right)dxdt}_{\widetilde{J}_2} - \int_0^T\int_\Gamma r_k\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}\frac{\partial\theta_i}{\partial\nu}d\Gamma dt. \tag{2.1.31}$$

Observe que

$$\widetilde{J}_2 := \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\frac{\partial r_k}{\partial x_j}\frac{\partial\theta_i}{x_k}dxdt + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega r_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\right)^2\right]dxdt}_{\widetilde{\widetilde{J}}_2}. \tag{2.1.32}$$

Novamente pelo Lema de Gauss, tem-se

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\left(r_k\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\right)^2\right)dx = \int_\Gamma r_k\nu_k\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\right)^2 d\Gamma. \tag{2.1.33}$$

Por (2.1.8) e (2.1.33), deduzimos que

$$\widetilde{\widetilde{J}}_2 := \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma r_k\nu_k\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial\nu}\right)^2 d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial r_k}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_j}\right)^2 dxdt. \tag{2.1.34}$$

Portanto, de (2.1.31), (2.1.32), (2.1.34), temos que

$$\begin{aligned} J_2 = & \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_i}{x_k} dxdt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma r_k \nu_k \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial r_k}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \right)^2 dxdt - \int_0^T \int_\Gamma r_k \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta_i}{\partial \nu} d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

Note que por (2.1.8)

$$\int_\Gamma r_k \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta_i}{\partial \nu} d\Gamma dt = \int_\Gamma r_k \nu_k \frac{\partial \theta_i}{\partial \nu} \frac{\partial \theta_i}{\partial \nu} d\Gamma = \int_\Gamma r \cdot \nu \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J_2 = & \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_i}{x_k} dxdt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma r\nu \left| \frac{\partial \theta_i}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \operatorname{div} r \, |\nabla \theta|^2 \, dxdt. \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

Para o termo J_3, temos

$$J_3 = - \int_0^T (\nabla p, r \cdot \nabla \theta) dt = - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} r_k \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} dxdt. \tag{2.1.37}$$

Portanto, de (2.1.29), (2.1.30), (2.1.36) e (2.1.37) concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (r \cdot \nu) \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Gamma dt \;\; = & \;\; \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (\operatorname{div} r)(|\theta'|^2 - |\nabla \theta|^2) dxdt - \int_0^T (\theta', r' \cdot \nabla \theta) dt \\ + & \;\; \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} dxdt + \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} r_k \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.1.38}$$

Note que pelo Lema 2.8, temos que

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} r_k \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} dxdt = \langle \nabla p, \theta \cdot \nabla r - \theta (\operatorname{div} r) \rangle_{H^{-1}(Q)^n, H_0^1(Q)^n}. \tag{2.1.39}$$

Portanto, pelas propriedades de $r(x,t)$, majorações apropriadas e pela desigualdade de Young, obtemos

$$\left| \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} r_k \frac{\partial \theta_i}{\partial x_k} dxdt \right| \;\; \leq \;\; \delta \|\nabla p\|^2_{H^{-1}(Q)^n} + C_\delta \int_0^T \int_\omega |\theta|^2 + |\theta'|^2 + |\nabla \theta|^2 dxdt.$$

Da mesma forma, utilizando novamente as propriedades de $r(x,t)$, obtemos de (2.1.38)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma (r\cdot\nu)\left|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt \leq \Big[\delta\|\nabla p\|^2_{H^{-1}(Q)^n} \\ + C\int_0^T\int_\omega |\theta|^2+|\theta'|^2+|\nabla\theta|^2 dxdt\Big]. \end{aligned} \tag{2.1.40}$$

Portanto, pelo Lema 2.10 e (2.1.40) temos

$$\begin{aligned} E_\theta(0) \leq \frac{1}{2}\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt &= \frac{1}{2}\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_{\Gamma_0}(r\cdot\nu)\left|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma(r\cdot\nu)\left|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt \\ &\leq \delta\|\nabla p\|^2_{H^{-1}(Q)^n} + C\int_0^T\int_\omega |\theta|^2+|\theta'|^2+|\nabla\theta|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{2.1.41}$$

Usando o fato de que $\|\nabla p\|^2_{H^{-1}(Q)^n} \leq CE_\theta(0)$, por (2.1.41) e escolhendo δ suficientemente pequeno, temos

$$E_\theta(0) \leq C\int_0^T\int_\omega |\theta|^2+|\theta'|^2+|\nabla\theta|^2 dxdt.$$

Como a desigualdade acima é válida para todo $T > T_0$, em particular vale para $T-2\varepsilon$, procendendo como na demonstração do Lema 2.10, temos o resultado desejado. ■

Observação 2.12 *De acordo com o Lema 2.3 em J.L Lions [42], podemos construir uma vizinhança $\hat{\omega}$ de $\overline{\Gamma_0}$ tal que $\Omega\cap\overline{\hat{\omega}}\subset\omega$ e podemos construir um campo vetorial $\hat{r}$ para $\hat{w}$. Então, obtemos analogamente, que*

$$E_\theta(0) \leq C\int_\varepsilon^{T-\varepsilon}\int_{\hat{\omega}} |\theta|^2+|\theta'|^2+|\nabla\theta|^2 dxdt.$$

Consideremos agora, uma função $r = r(x,t) \in W^{1,\infty}(Q)$ que satisfaz

$$\begin{cases} r(x,t)\geq 0, \text{ para cada } (x,t)\in\Omega\times]0,T[, \\ r(x,t)=1, \quad \text{para cada } (x,t)\in\hat{\omega}\times]\varepsilon,T-\varepsilon[, \\ r(x,t)=0, \quad \text{para cada } (x,t)\in(\Omega\setminus\omega)\times]0,T[, \\ 0<r(x,t)<1, \quad \text{para cada } (x,t)\in(\omega\setminus\hat{\omega})\times]0,T[\text{ e } \hat{\omega}\times(]0,\varepsilon]\cup[T-\varepsilon,T[), \\ r(x,0)=r(x,T)=0, \quad \text{para cada } x\in\Omega, \\ \frac{|\nabla r|^2}{r}\in L^\infty(\omega\times]0,T[\,). \end{cases} \tag{2.1.42}$$

A função r pode ser escolhida como segue $r(x,t) = \rho^2(x)\eta(t)$ onde $\eta \in C^1(0,T)$ e satisfaz

$$\begin{cases} \eta(0) = \eta(T) = 0, \\ \eta(t) = 1, \quad \text{em} \quad]\varepsilon, T-\varepsilon[, \\ 0 < \eta(t) < 1, \quad \text{em} \quad]0,\varepsilon[\ \cup \ ]T-\varepsilon, T[, \end{cases}$$

e $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$ satisfaz

$$\begin{cases} \rho(x) = 1, \quad \text{para cada} \ \ x \in \hat{\omega}, \\ \rho(x) = 0, \quad \text{para cada} \ \ x \in \Omega \setminus \omega, \\ 0 < \rho(x) < 1, \quad \text{para cada} \ \ x \in \omega \setminus \hat{\omega}. \end{cases}$$

Proposição 2.13 *Considere $T > T_0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $T - 2\varepsilon > T_0$ e θ a solução do problema (2.1.3) sujeita aos dados iniciais $\{\theta^0, \theta^1\} \in V \times H$. Então, existe uma constante $C = C(T_0) > 0$ tal que*

$$E_\theta(0) \leq C \int_0^T \int_\omega |\theta'|^2 + |\theta|^2 dxdt. \tag{2.1.43}$$

Demonstração: Inicialmente consideramos dados iniciais regulares e obtemos o caso geral usando argumentos de densidade. Compondo a equação $\theta'' - \Delta\theta = -\nabla p$ com $r\theta$ e integrando por partes em $[0,T]$, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega \theta_i'' r\theta_i dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\theta_i r\theta_i dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} r\theta_i dxdt. \tag{2.1.44}$$

Denote por

$$I_1 := \int_0^T \int_\Omega \theta_i'' r\theta_i dxdt.$$

$$I_2 := -\int_0^T \int_\Omega \Delta\theta_i r\theta_i dxdt.$$

$$I_3 := -\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} r\theta_i dxdt.$$

Usando as propriedades da função $r(x,t)$ definida em (2.1.42) e fazendo uso da igualdade $(\theta_i', r\theta_i)' = (\theta_i'', r\theta_i) + (\theta_i', r'\theta_i) + (\theta_i', r\theta_i')$, temos que I_1 pode ser estimado como segue

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T \int_\Omega \theta_i'' r\theta_i dxdt \\
&= \underbrace{\int_0^T (\theta_i', r\theta_i)' dt}_{=0} - \int_0^T \int_\Omega \theta_i' r' \theta_i dxdt - \int_0^T \int_\Omega \theta_i' r \theta_i' dxdt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega \theta_i' r' \theta_i dxdt - \int_0^T \int_\Omega \theta_i' r \theta_i' dxdt. \qquad (2.1.45)
\end{aligned}$$

Observe que usando o Lema de Gauss tem-se

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\int_0^T \int_\Omega \Delta\theta_i r\theta_i dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \nabla\theta_i \nabla(r\theta_i) dxdt - \int_0^T \int_\Gamma r\frac{\partial\theta_i}{\partial\nu}\theta_i d\Gamma dt \qquad (2.1.46) \\
&= (*).
\end{aligned}$$

Mas

$$\int_0^T \int_\Gamma r\frac{\partial\theta_i}{\partial\nu}\theta_i d\Gamma dt = 0,$$

pois $\theta = 0$ em Σ assim,

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_0^T \int_\Omega \nabla\theta_i \nabla(r\theta_i) dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \nabla\theta_i [(\nabla r)\theta_i + r\nabla\theta_i] dxdt \qquad (2.1.47) \\
&= \int_0^T \int_\Omega \nabla\theta_i (\nabla r)\theta_i + r|\nabla\theta_i|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Dessa forma, por (2.1.46) e (2.1.47) concluímos que I_2 verifica

$$I_2 = \int_0^T \int_\Omega \nabla\theta_i (\nabla r)\theta_i + r|\nabla\theta_i|^2 dxdt. \qquad (2.1.48)$$

Substituindo (2.1.45), (2.1.48) em (2.1.44), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega r|\nabla\theta_i|^2 dxdt &= \int_0^T \int_\Omega r|\theta_i'|^2 dxdt + \int_0^T \int_\Omega r'\theta_i'\theta_i dxdt \qquad (2.1.49) \\
&- \int_0^T \int_\Omega \nabla\theta_i (\nabla r)\theta_i dxdt - \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} r\theta_i dxdt.
\end{aligned}$$

Vamos estimar cada um dos termos separadamente.

Pelas propriedades de $r(x,t)$, majorações apropriadas e pela desigualdade de Young, obtemos que

$$\int_0^T \int_\Omega r'\theta_i'\theta_i dxdt \ \leq \ C\int_0^T \int_\Omega (|\theta_i'|^2 + |\theta_i|^2)dxdt. \tag{2.1.50}$$

Fazendo uso da desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T \int_\Omega \nabla\theta_i(\nabla r)\theta_i dxdt\right| &= \left|\int_0^T \int_\Omega r^{\frac{1}{2}}\nabla\theta_i \frac{\nabla r}{r^{\frac{1}{2}}}\theta_i dxdt\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega r|\nabla\theta_i|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \frac{|\nabla r|^2}{r}|\theta_i|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{2.1.51}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela desigualdade de Young temos que

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i} r\theta_i dxdt \ \leq \ \delta\|p\|^2_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)^n)} + C_\delta\|r\theta\|^2_{H_0^1(0,T;L^2(\Omega)^n)} \tag{2.1.52}$$

para cada $\delta > 0$.

Combinando (2.1.50), (2.1.51) e (2.1.52), obtemos

$$\int_0^T \int_\omega r|\nabla\theta_i|^2 dxdt \leq C\int_0^T \int_\omega |\theta_i'|^2 + |\theta_i|^2 dxdt \ + \ \delta\|p\|^2_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)^n)}. \tag{2.1.53}$$

Entretanto,

$$\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\hat{\omega}} |\nabla\theta_i|^2 dxdt = \int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\hat{\omega}} r|\nabla\theta_i|^2 dxdt \leq \int_0^T \int_\omega r|\nabla\theta_i|^2 dxdt. \tag{2.1.54}$$

Dessa forma, de (2.1.53) e (2.1.54), obtemos

$$\int_\varepsilon^{T-\varepsilon} \int_{\hat{\omega}} |\nabla\theta_i|^2 dxdt \leq C\int_0^T \int_\omega |\theta_i'|^2 + |\theta_i|^2 dxdt + \delta\|p\|^2_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)^n)}. \tag{2.1.55}$$

Da Observação 2.12 e por (2.1.55), obtemos

$$E_\theta(0) \leq C\int_0^T \int_\omega |\theta'|^2 + |\theta|^2 dxdt + \delta\|p\|^2_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)^n)}. \tag{2.1.56}$$

Por (2.1.56) e escolhendo δ suficientemente pequeno temos

$$E_\theta(0) \leq C\int_0^T \int_\omega |\theta'|^2 + |\theta|^2 dxdt. \tag{2.1.57}$$

■

Nosso objetivo é estimar o último termo no lado direito de (2.1.43). A fim de obter isto, vamos considerar a seguinte Proposição:

Proposição 2.14 *Sejam $T > T_0$ e $\varepsilon > 0$ tais que $T - 2\varepsilon > T_0$, ω uma vizinhança de $\overline{\Gamma_0}$ citada anteriormente e θ a solução de (2.1.3) sujeita aos dados iniciais $\{\theta^0, \theta^1\} \in V \times H$. Então, existe uma constante $C = C(T_0) > 0$ tal que*

$$\int_0^T \int_\omega |\theta|^2 dxdt \leq C \int_0^T \int_\omega |\theta'|^2 dxdt. \tag{2.1.58}$$

Demonstração: Vamos argumentar por contradição. Suponha que (2.1.58) não seja verdadeira, então existe uma sequência $\{\theta_m\}$ de soluções fracas para o problema (2.1.3), tal que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\int_0^T \int_\omega |\theta_m|^2 dxdt}{\int_0^T \int_\omega |\theta'_m|^2 dxdt} = +\infty. \tag{2.1.59}$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\int_0^T \int_\omega |\theta'_m|^2 dxdt}{\int_0^T \int_\omega |\theta_m|^2 dxdt} = 0. \tag{2.1.60}$$

Considere a seguinte sequência de problemas

$$\begin{cases} \theta''_m - \Delta\theta_m = -\nabla p_m \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\theta_m = 0 \text{ em } Q, \\ \theta_m = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \theta_m(0) = \theta_m^0, \quad \theta'_m(0) = \theta_m^1 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.61}$$

Definindo

$$\alpha_m = \sqrt{\|\theta_m\|_{L^2(0,T;H_\omega)}} \quad \text{e} \quad \psi_m = \frac{\theta_m}{\alpha_m}, \tag{2.1.62}$$

onde $H_\omega = \{u; \ \ u \in (L^2(\omega))^n; \ \operatorname{div} u = 0 \ \text{ e } \ u \cdot \nu = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma\}$, então obtemos

$$\|\psi_m\|_{L^2(0,T;H_\omega)} = 1. \tag{2.1.63}$$

Considere agora, a seguinte sequência de problemas normalizados

$$\begin{cases} \psi_m'' - \Delta\psi_m = -\frac{1}{\alpha_m}\nabla p_m \quad \text{em } Q, \\ \operatorname{div}\psi_m = 0 \quad \text{em } Q, \\ \psi_m = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \psi_m(0) = \psi_m^0 = \frac{\theta_m^0}{\alpha_m}, \quad \psi_m'(0) = \psi_m^1 = \frac{\theta_m^1}{\alpha_m} \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.64}$$

Dessa forma, temos que

$$E_{\psi_m} = \frac{1}{\alpha_m^2} E_{\theta_m}. \tag{2.1.65}$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} E_{\psi_m}(t) &= \frac{1}{2}\|\psi_m(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}|\psi_m'(t)|_H^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \|\psi_{m_i}(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left\|\psi_{m_i}'(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{\theta_{m_i}(t)}{\alpha_m}\right)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\theta_{m_i}'(t)}{\alpha_m}\right|^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{1}{\alpha_m^2}\left(|\nabla\theta_{m_i}(t)|^2 + \left|\theta_{m_i}'(t)\right|^2\right) dx \\ &= \frac{1}{\alpha_m^2}\left(\frac{1}{2}\|\theta_m(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}|\theta_m'(t)|_H^2\right) \\ &= \frac{1}{\alpha_m^2} E_{\theta_m}(t). \end{aligned}$$

E, pela Proposição 2.13, temos que

$$E_{\psi_m}(0) \leq C\int_0^T \int_\omega |\psi_m'|^2 + |\psi_m|^2 dxdt,$$

então, por (2.1.60), (2.1.62) e (2.1.63)

$$E_{\psi_m}(0) \leq L. \tag{2.1.66}$$

Portanto, existem subsequências de $\{\psi_m^0\}, \{\psi_m^1\}$, denotadas do mesmo modo, tais que

$$\psi_m^0 \rightharpoonup \psi^0 \quad \text{(fraco) em} \quad V,$$

$$\psi_m^1 \rightharpoonup \psi^1 \quad \text{(fraco) em} \quad H.$$

Desde que ψ_m é solução do problema (2.1.64) associado aos dados iniciais $\{\psi_m^0, \psi_m^1\} \in V \times H$, temos que $E_{\psi_m}(t) = E_{\psi_m}(0) \leq L$. Portanto, temos que existe uma subsequência de $\{\psi_m\}$, denotada do mesmo modo, tal que

$$\{\psi_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V), \tag{2.1.67}$$

$$\{\psi_m'\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.1.68}$$

De (2.1.67) e (2.1.68), concluímos que existem subsequências, denotadas do mesmo modo, tais que

$$\psi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \text{ (fraco estrela) em } L^\infty(0,T;V), \tag{2.1.69}$$

$$\psi_m' \overset{*}{\rightharpoonup} \psi' \text{ (fraco estrela) em } L^\infty(0,T;H). \tag{2.1.70}$$

Como $V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow H$ e a imersão $V \hookrightarrow H$ é compacta, e pondo

$$W = \{u \in L^2(0,T;V), u' \in L^2(0,T;H)\}$$

munido da topologia

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H)},$$

resulta que ψ_m é limitada em W. Logo, pelo Teorema da Compacidade de Aubin-Lions, ver Teorema 1.23, temos que

$$\psi_m \to \psi \text{ (forte) em } L^2(0,T,H). \tag{2.1.71}$$

Além disso, por (2.1.60) e (2.1.62) temos

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\omega |\psi_m'(x,t)|^2 \, dxdt = 0. \tag{2.1.72}$$

Dessa forma, por (2.1.70) e (2.1.72) temos que

$$\psi'(x,t) = 0 \text{ em } \omega\times]0,T[\tag{2.1.73}$$

e ψ é independente de t em ω.

Das convergências acima, temos que ψ é solução do problema (2.1.4) sujeita aos dados iniciais $\{\psi^0, \psi^1\} \in V \times H$. Observe que a fim de obter uma contradição, é suficente provar que $E_\psi(0) = 0$. De fato, pois desde que $E_\psi(t) = E_\psi(0)$, temos que $|\psi'|_H^2 + \|\psi\|_V^2 = 0$ consequentemente, $\psi = 0$ em Q contradizendo (2.1.63) e (2.1.71). Sendo assim, considere o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi'' + A\xi = 0 \text{ em } Q, \\ \xi(0) = -\psi^1, \quad \xi'(0) = A\psi^0 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{2.1.74}$$

com $\{-\psi^1, A\psi^0\} \in H \times V'$, onde A é o operador de Stokes.

Tomando $v(x,t) = \psi^0(x) - \int_0^T \xi(x,s)ds$, então v é solução de (2.1.4) com dados iniciais $\{\psi^0, \psi^1\} \in V \times H$.

De fato, observe que

$$\begin{aligned} v''(x,t) + Av &= -\xi'(x,t) + A(\psi^0(x) - \int_0^t \xi(x,s)ds) \\ &= -\xi'(x,t) + A\psi^0(x) - \int_0^t A\xi(x,s)ds \\ &= -\xi'(x,t) + A\psi^0(x) + \int_0^t \xi''(x,s)ds \\ &= -\xi'(x,t) + \xi'(x,0) + \xi'(x,t) - \xi'(x,0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$v(x,0) = \psi^0 \text{ e } v'(x,0) = -\xi(0) = \psi^1.$$

Portanto, da unicidade de soluções de (2.1.4), temos que

$$v = \psi \tag{2.1.75}$$

e, por (2.1.73), segue que

$$\xi \equiv 0 \quad \text{em} \quad \omega \times]0,T[. \tag{2.1.76}$$

Vamos mostrar que $\xi \equiv 0$ em $\Omega \times]0,T[$. De fato, aplicando o operador rot em (2.1.74), temos que $u = \text{rot } \xi$ satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' - \Delta u = 0 \text{ em } Q, \\ u = 0 \text{ em } \omega \times]0,T[. \end{array} \right. \tag{2.1.77}$$

Então pelo Teorema de Holmgren (Teorema 1.29), deduzimos que $u = 0$ em $\Omega\times]0,T[$, isto é, rot $\xi = 0$, portanto existe um funcional $\varphi = \varphi(x,t)$ tal que

$$\xi = \nabla\varphi \ \text{ em } \ Q. \tag{2.1.78}$$

Por (2.1.74) temos que $\operatorname{div}\xi = 0$ donde, por (2.1.78),

$$\Delta\varphi = 0 \ \text{ em } \ Q. \tag{2.1.79}$$

Por (2.1.76) e (2.1.78), temos que

$$\varphi = f(t) \ \text{ em } \ \omega\times]0,T[. \tag{2.1.80}$$

Então, por (2.1.79), (2.1.80) e pelo princípio de continuação para o operador de Laplace, concluímos que

$$\varphi = f(t) \ \text{ em } \ Q.$$

Portanto,

$$\xi = \nabla\varphi = 0 \ \text{ em } \ Q.$$

Consequentemente, temos que $\psi^0 = \psi^1 = 0$. Assim, $E_\psi(0) = 0$ como desejado. ■

Observação 2.15 *Pela Proposição 2.13 e pela Proposição 2.14 obtemos a desigualdade*

$$E_\theta(0) \le C\int_0^T\int_\omega |\theta'|^2 dxdt$$

com $C = C(T_0) > 0$, *o que prova* (2.1.12).

Com isso, finalizamos a prova do Teorema 2.7. ■

2.1.2 O Método HUM - Hilbert Uniqueness Method

No que segue, mostraremos que o método H.U.M. é aplicável para resolver o problema de controlabilidade exata interna. Este método foi formalizado por J.L. Lions em [42]. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = -\nabla p + h\chi_\omega \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div} y = 0 \ \text{ em } Q, \\ y = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ y(0) = y^0, \ \ y'(0) = y^1 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.81}$$

O problema de controlabilidade exata para o sistema (2.1.81) consiste no seguinte: Encontrar $T_0 > 0$ e um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, convenientes, de modo que para todo $\{y_0, y_1\} \in \mathcal{H}$, exista um controle h tal que a solução de (2.1.81) satisfaça a condição

$$y(x,T) = y'(x,T) = 0 \quad \text{para algum } T > T_0. \tag{2.1.82}$$

Esse tipo de problema é chamado de *Controlabilidade Exata Interna* pois cada ação é realizada no cilindro $\omega \times]0,T[$.

Desenvolveremos o método por etapas.

Etapa 1: Dados $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, consideremos o problema

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = -\nabla p \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \ \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.83}$$

Pelos resultados dados na seção 1.10, o problema (2.1.83) admite solução ϕ na classe

$$C([0,T];W) \cap C^1([0,T];V). \tag{2.1.84}$$

Etapa 2: Com a solução ϕ do problem (2.1.83) resolvemos o problema retrógrado

$$\begin{cases} \psi'' - \Delta\psi = -\nabla p - \phi\chi_\omega \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\psi = 0 \ \text{ em } Q, \\ \psi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.85}$$

Pelos resultados dados na seção 1.10, o problema (2.1.85) admite uma única solução na classe

$$C([0,T];V) \cap C^1([0,T];H). \tag{2.1.86}$$

Etapa 3: Compondo-se a equação (2.1.83) com a solução ψ do problema (2.1.85) obtemos

$$\int_0^T (\phi'', \psi)dt + \int_0^T (-\Delta\phi, \psi)dt = \int_0^T (-\nabla p, \psi)dt, \tag{2.1.87}$$

ou ainda,

$$\int_0^T (\phi_i'', \psi_i)dt + \int_0^T (-\Delta\phi_i, \psi_i)dt = \int_0^T (-\frac{\partial p}{\partial x_i}, \psi_i)dt. \tag{2.1.88}$$

Como
$$\int_0^T (\phi_i', \psi_i)' dt = \int_0^T (\phi_i'', \psi_i) dt + \int_0^T (\phi_i', \psi_i') dt,$$
segue que
$$(\phi_i'(T), \underbrace{\psi_i(T)}_{=0}) - (\phi_i'(0), \psi_i(0)) = \int_0^T (\phi_i'', \psi_i) dt + \int_0^T (\phi_i', \psi_i') dt.$$
Então
$$\int_0^T (\phi_i'', \psi_i) dt = -(\phi_i'(0), \psi_i(0)) - \int_0^T (\phi_i', \psi_i') dt. \tag{2.1.89}$$
Também como
$$\int_0^T (\phi_i, \psi_i')' dt = \int_0^T (\phi_i', \psi_i') dt + \int_0^T (\phi_i, \psi_i'') dt,$$
segue que
$$(\phi_i(T), \underbrace{\psi_i'(T)}_{=0}) - (\phi_i(0), \psi_i'(0)) = \int_0^T (\phi_i', \psi_i') dt + \int_0^T (\phi_i, \psi_i'') dt.$$
Logo,
$$-\int_0^T (\phi_i', \psi_i') dt = (\phi_i(0), \psi_i'(0)) + \int_0^T (\phi_i, \psi_i'') dt. \tag{2.1.90}$$
Substituindo (2.1.90) em (2.1.89), temos que
$$\int_0^T (\phi_i'', \psi_i) dt = -(\phi_i'(0), \psi_i(0)) + (\phi_i(0), \psi_i'(0)) + \int_0^T (\phi_i, \psi_i'') dt.$$

Ou ainda,
$$\int_0^T (\phi_i'', \psi_i) dt = -\langle \psi_i(0), \phi_i'(0) \rangle + (\psi_i'(0), \phi_i(0)) + \int_0^T \langle \phi_i, \psi_i'' \rangle \, dt. \tag{2.1.91}$$

Segue também, pelo Teorema de Green, como $\psi \in V$
$$\int_0^T (-\Delta\phi_i, \psi_i) dt = \int_0^T (\nabla\phi_i, \nabla\psi_i) dt = \int_0^T \langle \phi_i, -\Delta\psi_i \rangle \, dt. \tag{2.1.92}$$

Além disso, pela Fórmula de Gauss, e como $\psi \in V$, temos que
$$\int_0^T (\frac{\partial p}{\partial x_i}, \psi_i) dt = -\int_0^T \int_\Omega p \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dx dt + \int_0^T \int_\Gamma p \psi_i \nu_i d\Gamma dt = 0. \tag{2.1.93}$$

Substituindo (2.1.91), (2.1.92) e (2.1.93) em (2.1.88), obtemos

$$-\left\langle \psi(0), \phi^1 \right\rangle + (\psi'(0), \phi^0) + \int_0^T \langle \phi, \psi'' - \Delta\psi \rangle \, dt = 0.$$

Como $\psi'' - \Delta\psi = -\nabla p - \phi\chi_\omega$ temos que

$$-\left\langle \psi(0), \phi^1 \right\rangle + (\psi'(0), \phi^0) + \int_0^T \langle \phi, -\phi\chi_\omega \rangle \, dt = 0. \tag{2.1.94}$$

Então,

$$\int_0^T \int_\omega \phi^2 dxdt = -\left\langle \psi(0), \phi^1 \right\rangle + (\psi'(0), \phi^0) \tag{2.1.95}$$

para cada $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Definamos

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & \mathcal{V} \times \mathcal{V} & \longrightarrow & H \times V' \\ & \{\phi^0, \phi^1\} & \longmapsto & \{\psi'(0), -\psi(0)\} \end{array} \tag{2.1.96}$$

onde ψ é solução de (2.1.85) e ϕ é solução de (2.1.83).

A seguir, vamos obter uma relação entre a aplicação Λ definida em (2.1.96) e a solução ϕ do problema (2.1.83).

Como $C(0, T; V)$ é denso em $C(0, T; H)$ e $-\phi(.)\chi_\omega \in C(0, T; H)$, então existe $(f_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C(0, T; V)$ tal que

$$f_m \to -\phi(.)\chi_\omega \quad \text{em} \quad C(0, T; H). \tag{2.1.97}$$

Consideremos a sequência de problemas

$$\begin{cases} \psi_m'' - \Delta\psi_m = -\nabla p_m + f_m \quad \text{em } Q, \\ \operatorname{div} \phi_m = 0 \quad \text{em } Q, \\ \psi_m = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \psi_m(T) = \psi_m'(T) = 0 \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.98}$$

Fazendo uma mudança de variáveis adequada, resulta que o problema (2.1.98) admite uma única solução na classe $C(0, T; W) \cap C^1(0, T; V)$.

Resulta daí que $(\psi_m - \psi)$ é a única solução na classe (2.1.86) de

$$\begin{cases} (\psi_m'' - \psi'') - \Delta(\psi_m - \psi) = -\nabla(p_m - p) + (f_m - (-\phi\chi_\omega)) \quad \text{em } Q, \\ \operatorname{div}(\psi_m - \psi) = 0 \quad \text{em } Q, \\ (\psi_m - \psi) = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ (\psi_m - \psi)(T) = (\psi_m - \psi)'(T) = 0 \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.99}$$

Como $f_m - (-\phi\chi_\omega) \in L^1(0,T;H)$ então pelo Corolário 1.63

$$|\psi_m'(t) - \psi'(t)|_H^2 + \|\psi_m(t) - \psi(t)\|_V^2 \leq C \|f_m - (-\phi\chi_\omega)\|_{L^1(0,T;H)}^2,$$

e, portanto,

$$\psi_m'(t) \to \psi'(t) \;\text{ em }\; H \tag{2.1.100}$$

$$\psi_m(t) \to \psi(t) \;\text{ em }\; V. \tag{2.1.101}$$

Por outro lado, dado $\{\zeta^0, \zeta^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ existe uma única solução ζ de (2.1.83) na classe (2.1.84) com dados iniciais $\{\zeta^0, \zeta^1\}$.

Compondo-se o problema

$$\begin{cases} \zeta'' - \Delta\zeta = -\nabla p \quad \text{em } Q, \\ \operatorname{div}\zeta = 0 \;\text{ em } Q, \\ \zeta = 0 \;\text{ sobre } \Sigma, \\ \zeta(0) = \zeta^0, \;\; \zeta'(0) = \zeta^1 \;\text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{2.1.102}$$

com a solução ψ_m do problema (2.1.98) e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T (\zeta'', \psi_m)dt + \int_0^T (-\Delta\zeta, \psi_m)dt = \int_0^T (-\nabla p, \psi_m)dt. \tag{2.1.103}$$

Similar ao que fizemos anteriormente para obter (2.1.94) e integrando-se por partes, obtemos que

$$\int_0^T \int_\Omega \zeta(t)(-f_m(t))dxdt = -\left\langle \psi_m(0), \zeta^1 \right\rangle + \left(\psi_m'(0), \zeta^0\right). \tag{2.1.104}$$

Pelas convergências (2.1.97), (2.1.100) e (2.1.101) obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega \zeta(t)\phi(t)\chi_\omega dxdt = -\left\langle \psi(0), \zeta^1 \right\rangle + \left(\psi'(0), \zeta^0\right),$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_\omega \zeta(t)\phi(t)dxdt = -\left\langle \psi(0), \zeta^1 \right\rangle + \left(\psi'(0), \zeta^0\right), \tag{2.1.105}$$

onde ζ é a única solução de (2.1.83) com dados $\{\zeta^0, \zeta^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ e ϕ é a única solução de (2.1.83) com dados $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Notemos que a expressão em (2.1.105) pode ser reescrita como

$$\int_0^T \int_\omega \zeta(t)\phi(t)dxdt = \left\langle \{\psi'(0), -\psi(0)\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \right\rangle,$$

ou ainda, de (2.1.96),

$$\int_0^T \int_\omega \zeta(t)\phi(t)dxdt = \left\langle \Lambda\{\phi^0, \phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \right\rangle. \tag{2.1.106}$$

Definamos

$$\begin{array}{rccc} (\cdot,\cdot)_* : & \mathcal{V}^2 \times \mathcal{V}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \{\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\}\} & \longmapsto & \int_0^T \int_\omega \phi \cdot \xi dxdt \end{array} \tag{2.1.107}$$

onde ϕ e ξ são soluções de (2.1.83) associados aos dados iniciais $\{\phi^0, \phi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Observe que a aplicação definida em (2.1.107) define um produto interno. É evidente que $(\cdot,\cdot)_*$ é uma aplicação bilinear positiva. Resta-nos provar que é uma aplicação estritamente positiva. Mais precisamente, provaremos que

$$(\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\})_* = 0 \Longleftrightarrow \phi^0 = \phi^1 = 0.$$

Pelo Teorema 2.5 a implicação ($\Leftarrow$) é trivial.

Provemos a outra implicação, para tal, suponhamos que

$$(\{\phi^0, \phi^1\}, \{\phi^0, \phi^1\})_* = \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 \, dxdt = 0. \tag{2.1.108}$$

Pelo Teorema 2.7 temos que para $T > T_0$, onde $T_0 = 2R_0$ é válida a seguinte desigualdade

$$0 \leq \{\left|\phi^0\right|_H^2 + \left\|\phi^1\right\|_{V'}^2\} \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi|^2 \, dxdt. \tag{2.1.109}$$

De (2.1.108) e (2.1.109) concluímos que $\phi^0 = \phi^1 = 0$, o que prova o desejado.

Dessa forma, temos que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot,\cdot\|_* : & \mathcal{V}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \{\phi^0, \phi^1\} & \longmapsto & \left(\int_0^T \int_\omega |\phi|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \tag{2.1.110}$$

define uma norma em $\mathcal{V}^2$.

Consideremos F o espaço de Hilbert obtido completando-se $\mathcal{V}^2$ com a norma $\|\cdot,\cdot\|_*$, isto é,

$$F = \overline{\mathcal{V} \times \mathcal{V}}^{\|\cdot,\cdot\|_*}. \tag{2.1.111}$$

Contudo, pelos Teoremas 2.5 e 2.7 existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$C_1 \left\|\{\phi^0, \phi^1\}\right\|_{H\times V'} \leq \left(\int_0^T \int_\omega |\phi|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 \left\|\{\phi^0, \phi^1\}\right\|_{H\times V'} \tag{2.1.112}$$

onde $\{\phi^0, \phi^1\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Resulta de (2.1.112) que a norma $\|\cdot,\cdot\|_*$ é equivalente à norma $\|\cdot,\cdot\|_{H\times V'}$ em $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$. Consequentemente, de (2.1.111) obtemos que

$$F = \overline{\mathcal{V} \times \mathcal{V}}^{\|\cdot,\cdot\|_*} = \overline{\mathcal{V} \times \mathcal{V}}^{\|\cdot,\cdot\|_{H\times V'}} = H \times V'. \tag{2.1.113}$$

Mostra-se facilmente que a aplicação Λ definida em (2.1.96) é contínua quando induzimos sobre $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ a topologia dada pela norma $\|\cdot,\cdot\|_*$. Além disso, tal aplicação se estende por continuidade a uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\Lambda} : & H \times V' & \longrightarrow & H \times V \\ & \{\phi^0, \phi^1\} & \longmapsto & \{\psi'(0), -\psi(0)\} \end{array} \tag{2.1.114}$$

onde ψ é solução de (2.1.85) e ϕ é solução ultrafraca de (2.1.83).

Analogamente, definindo

$$b(\{\phi^0, \phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\}) = \left\langle \widetilde{\Lambda}\{\phi^0, \phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \right\rangle \;\; \forall \; \{\phi^0, \phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \in H \times V' \tag{2.1.115}$$

segue que a aplicação $b(\cdot,\cdot)$ é bilinear, contínua e coerciva. Desta forma, pelo Teorema de Lax-Milgran, dado $\{Y^0, Y^1\} \in F' = (H \times V')' = H \times V$ existe um único $\{\phi^0, \phi^1\} \in H \times V'$ tal que

$$\left\langle \{Y^0, Y^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\} \right\rangle = b(\{\phi^0, \phi^1\}, \{\zeta^0, \zeta^1\}) \;\; \forall \; \{\zeta^0, \zeta^1\} \in F$$

o que implica, em função da definição de $b(\cdot,\cdot)$, que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dado } \{Y^0, Y^1\} \in F', \text{ existe um único } \; \{\phi^0, \phi^1\} \; \in F \; \text{ tal que} \\ \{Y^0, Y^1\} = \widetilde{\Lambda}\{\phi^0, \phi^1\}, \end{array} \right.$$

ou ainda, por (2.1.114), concluímos que

$$\begin{cases} \text{dado } \{Y^0, Y^1\} \in F', \text{ existe um único } \{\phi^0, \phi^1\} \in F \text{ tal que} \\ Y^0 = \psi'(0) \text{ e } Y^1 = -\psi(0), \end{cases} \tag{2.1.116}$$

onde ψ é a única solução de

$$\begin{cases} \psi'' - \Delta\psi = -\nabla p - \phi\chi_\omega \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\psi = 0 \text{ em } Q, \\ \psi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0 \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{2.1.117}$$

e ϕ é a única solução, por transposição, de

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = -\nabla p \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \text{ sobre } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1.118}$$

Lembremos que $F = H \times V'$ e $F' = H \times V$. Assim, elegendo-se $T_0 = 2R_0$, $\mathcal{H} = V \times H$, então dado

$$\{y^0, y^1\} \in \mathcal{H} \tag{2.1.119}$$

tem-se que o par $\{Y^0, Y^1\} = \{y^1, -y^0\} \in F'$ e de (2.1.116) existe um único $\{\phi^0, \phi^1\} \in F$ tal que

$$\psi(0) = y^0 \text{ e } \psi'(0) = y^1. \tag{2.1.120}$$

Considerando h a restrição de $-\phi$ a $\omega\times]0,T[$ a regularidade da solução fraca nos permite dizer que $h \in (L^2(\omega\times]0,T[))^n$ no problema (2.1.81) sujeita aos dados iniciais conforme (2.1.119), temos que tal problema possui única solução y. Observemos que de (2.1.117) e (2.1.120) resulta que ψ é solução do problema (2.1.81). Logo, pela unicidade de solução, vem que $y = \psi$ e, consequentemente, de $(2.1.117)_4$ concluímos que $y(T) = y'(T) = 0$ desde que $T > T_0$.

2.2 Resultado de Estabilidade

2.2.1 Boa Colocação

Nesta seção, vamos mostrar a existência e unicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + a(x)g(u') = -\nabla p \ \text{ em } \Omega\times]0,\infty[, \\ \operatorname{div} u = 0 \ \text{ em } \Omega\times]0,\infty[, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \Gamma\times]0,\infty[, \\ u(0) = u^0, \ \ u'(0) = u^1 \ \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{2.2.121}$$

onde $a \in L^\infty(\Omega)$ é uma função não negativa tal que

$$a(x) \geq a_0 > 0 \ \text{ em } \ \omega \subset \Omega \tag{2.2.122}$$

e

$$\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & s & \longmapsto & g(s) = [g_i(s_i)]_{i=1,\cdots,n} \end{array} \tag{2.2.123}$$

onde, para todo $i = 1, \cdots, n$, $g_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$\begin{cases} g_i \ \text{ é contínua, monótona crescente e } \ g_i(0) = 0, \\ g_i(s_i)s_i > 0 \ \ \forall \ \ s_i \neq 0, \\ k_i|s_i|^2 \leq g_i(s_i)s_i \leq K_i|s_i|^2 \quad \forall \quad |s_i| \geq 1, \\ \text{onde } k_i \text{ e } K_i \text{ são constantes positivas.} \end{cases} \tag{2.2.124}$$

Seja $\mathcal{P}$ a projeção ortogonal de $(L^2(\Omega))^n$ em H e considere o operador de Stokes, definido em (1.9.18), ou seja,

$$\begin{array}{rccl} A : & D(A) \subset V & \longrightarrow & V' \\ & u & \longmapsto & Au = \mathcal{P}(-\Delta u) \end{array} \tag{2.2.125}$$

que é definido por

$$\langle Au, v\rangle_{V',V} = \int_\Omega \nabla u : \nabla v dx, \ \ \forall \ \ v \in V.$$

Pelo Teorema 1.58 temos que $D(A) = V \cap (H^2(\Omega))^n$ e pela Observação 1.57, seque que

$$\langle Au, v\rangle_{V',V} = \int_\Omega \nabla u : \nabla v dx = \sum_{i=1}^n \langle -\Delta u_i, v_i\rangle_{H^{-1},H_0^1}. \tag{2.2.126}$$

Considere também, o operador B definido por

$$\begin{array}{rccl} B : & V & \longrightarrow & V' \\ & u & \longmapsto & Bu = \mathcal{P}(a(x)g(u(x))) \end{array} \tag{2.2.127}$$

Observação 2.16 *Para não sobrecarregar a notação, vamos denotar por* $\|u\|_V = \|u\|$ *e* $|u|_H = |u|$ *as normas de* V *e* H *respectivamente.*

Observação 2.17 *Se* $v \in (L^2(\Omega))^n$ *então* $ag(v) \in (L^2(\Omega))^n$. *De fato, dado* $v \in (L^2(\Omega))^n$, *então* $v_i \in L^2(\Omega)$. *Dessa forma,*

- *Se* $|v_i| \geq 1$ *então de* (2.2.124) *tem-se* $|g_i(v_i)| \leq K_i |v_i|$, *então como* $v_i \in L^2(\Omega)$, *tem-se*
$$\int_\Omega |g_i(v_i)|^2 \, dx \leq \widetilde{K} \int_\Omega |v_i|^2 \, dx < \infty.$$
Como $a \in L^\infty(\Omega)$, *tem-se* $\displaystyle\int_\Omega |ag_i(v_i)|^2 \, dx \leq \|a\|_\infty \widetilde{K} \int_\Omega |g_i(v_i)|^2 \, dx < \infty.$

- *Se* $|v_i| < 1$, *o resultado segue do fato de que* g_i *é contínua e* $a \in L^\infty(\Omega)$. *Portanto,* $ag(v) \in (L^2(\Omega))^n$.

Note que se $v \in V \subset H$, então $v \in (L^2(\Omega))^n$. Assim, pela Observação 2.17, $ag(v) \in (L^2(\Omega))^n$ donde $\mathcal{P}(ag(v)) \in H$ e, portanto, $D(B) = \{v \in V; Bv \in H\}$.

Além disso, como a projeção é autoadjunta (ver Teorema 1.31) e $v \in V \subset H$, temos que

$$\langle Bu, v\rangle_{V',V} = (Bu, v) = (\mathcal{P}(ag(u)), v) = (ag(u), \mathcal{P}(v)) = (ag(u), v) \tag{2.2.128}$$

e, portanto, o operador B está bem definido. Sobre os operadores A e B definidos acima, temos os seguintes resultados:

Proposição 2.18 *O operador* A *é linear e maximal monótono.*

Demonstração: De fato, a linearidade é trivial. Vamos ver que é maximal monótono.

Sejam $u, v \in D(A)$, então $u - v \in V \subset H$ e como $\mathcal{P}$ é linear e autoadjunta, temos que

$$
\begin{aligned}
(Au - Av, u - v) &= (\mathcal{P}(-\Delta u) - \mathcal{P}(-\Delta v), u - v) \\
&= (\mathcal{P}(-\Delta u - (-\Delta v)), u - v) \\
&= (-\Delta u - (-\Delta v), \mathcal{P}(u - v)) \\
&= (-\Delta u - (-\Delta v), u - v) \\
&= (-\Delta(u - v), u - v) \\
&= \int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 dx \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.2.129}
$$

Vamos mostrar que A é maximal, isto é, $Im(I + A) = V'$, onde I é o operador identidade. Observe que $Im(I + A) = V'$ se, e somente se, para todo $f \in V'$ o problema $u + Au = f$ é satisfeito para algum $u \in D(A)$.

Dessa forma, defina

$$
b(u, v) = \int_\Omega \nabla u : \nabla v + u \cdot v dx \quad \text{para todo} \quad u, v \in V.
$$

Temos que b é uma forma bilinear, contínua e coerciva em $V \times V$. De fato, novamente a bilinearidade é trivial.

$\vdash$: b é contínua

Para $u, v \in V$, usando a desigualdade de Hölder temos

$$
\begin{aligned}
|b(u, v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u : \nabla v + u \cdot v dx \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^n \int_\Omega \nabla u_i \nabla v_i + u_i v_i dx \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_\Omega |\nabla u_i| \, |\nabla v_i| \, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega |u_i| \, |v_i| \, dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^2(\Omega)} = (*)
\end{aligned}
$$

pela desigualdade de Hölder numérica, segue que

$$\begin{aligned}
(*) \quad &\leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \|\nabla u_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \|\nabla v_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \right. \\
&+ \left. \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \right] \\
&= |\nabla u|\, |\nabla v| + |u|\, |v| \\
&= \|u\|\, \|v\| + |u|\, |v| = (**)
\end{aligned}$$

e como $V \hookrightarrow H$ temos que

$$\begin{aligned}
(**) \quad &\leq \|u\|\, \|v\| + C\, \|u\|\, \|v\| \\
&= \tilde{C}\, \|u\|\, \|v\| .
\end{aligned}$$

Assim, $|b(u,v)| \leq \tilde{C}\, \|u\|\, \|v\|$ e, portanto, $b(u,v)$ é contínua.

$\vdash$: b é coerciva

Note que

$$\begin{aligned}
b(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_\Omega |u|^2\, dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\nabla u_i|^2\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|\nabla u_i\|^2_{L^2(\Omega)}\, dx \\
&= |\nabla u|^2 \\
&= \|u\|^2 .
\end{aligned}$$

Assim, $b(u,u) \geq \|u\|^2$ para todo $u \in V$ e, portanto, $b(u,v)$ é coerciva.

Dessa forma, sendo $b(u,v)$ bilinear, contínua e coerciva, sabendo que $V \hookrightarrow H$, V é denso em H, então $I + A : D(I+A) \subset V \to H$ é definido pela terna $\{V, H, b(u,v)\}$. Além disso, pelo Teorema de Lax- Milgran podemos estender $I + A : V \to V'$ e tal extensão é um isomorfismo de V em V'. Dessa forma, para todo $f \in V'$ existe um único $u \in V$ tal que

$(I + A)u = f$, ou seja, $u + Au = f$. Dessa forma, $Im(I + A) = V'$ e, portanto, A é maximal monótono. ■

Proposição 2.19 *O operador $I + A$ é maximal monótono em $V \times V'$.*

Demonstração: Como I é um operador contínuo e monótono e, pela Proposição 2.18, A é maximal monótono, então pela Proposição 1.36, $I + A$ é maximal monótono em $V \times V'$. ■

Proposição 2.20 *O operador B é monótono e hemicontínuo .*

Demonstração: Vamos provar primeiramente que B é monótono, para tal, sejam $u, v \in D(B)$. Como $\mathcal{P}$ é linear e autoadjunto, temos que

$$\begin{aligned}
\langle Bu - Bv, u - v\rangle_{V',V} &= (Bu - Bv, u - v) \\
&= (\mathcal{P}(ag(u)) - \mathcal{P}(ag(v)), u - v) \\
&= (\mathcal{P}(ag(u) - ag(v)), u - v) \\
&= (ag(u) - ag(v), \mathcal{P}(u - v)) \\
&= (ag(u) - ag(v), u - v) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a(x)(g_i(u_i(x)) - g_i(v_i(x)))(u_i(x) - v_i(x))dx \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.2.130}$$

pois a é não negativa e g_i é uma função monótona por hipótese. Portanto, B é monótono.

Provemos agora que B é hemicontínuo. De fato, sejam $u, v \in D(B)$, $t_m \subset \mathbb{R}$ uma sequência tal que $t_m \to 0$ quando $m \to \infty$. Note que para todo $w \in V \subset H$

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \langle B(u + t_m v), w\rangle_{V',V} &= \lim_{m\to\infty} (\mathcal{P}(ag(u + t_m v)), w) \\
&= \lim_{m\to\infty} (ag(u + t_m v)), \mathcal{P}(w)) \\
&= \lim_{m\to\infty} (ag(u + t_m v)), w) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lim_{m\to\infty} \int_\Omega a(x)(g_i(u_i(x) + t_m v_i(x))w_i(x)dx.
\end{aligned} \tag{2.2.131}$$

Seja $f_{m_i} = a(x)g_i(u_i(x) + t_m v_i(x))w_i(x)$.

Assim se $|u_i(x)+t_mv_i(x)|\geq 1$ temos por (2.2.124) que

$$\begin{aligned}
|f_{m_i}(x)| &= |a(x)g_i(u_i(x)+t_mv_i(x))||w_i(x)|\\
&\leq \|a\|_\infty|g_i(u_i(x)+t_mv_i(x))||u_i(x)+t_mv_i(x)||w_i(x)|\frac{1}{|u_i(x)+t_mv_i(x)|}\\
&\leq K_i\|a\|_\infty|u_i(x)+t_mv_i(x)|^2|w_i(x)|\frac{1}{|u_i(x)+t_mv_i(x)|}\\
&\leq \tilde{K}|u_i(x)+t_mv_i(x)||w_i(x)|\\
&\leq \tilde{K}[|u_i(x)||w_i(x)|+\tilde{\tilde{K}}|v_i(x)||w_i(x)|]\\
&\leq C|u_i(x)||w_i(x)|+\tilde{C}|v_i(x)||w_i(x)|
\end{aligned}$$

quase sempre em Ω, onde $\tilde{\tilde{K}}$ é tal que $|t_m|\leq\tilde{\tilde{K}}$. Como $u_i(x),v_i(x),w_i(x)\in L^2(\Omega)$, então $f_{m_i}\in L^1(\Omega)$, para todo $m\in\mathbb{N}$.

Além disso, definindo

$$h:=C|u_i(x)||w_i(x)|+\tilde{C}|v_i(x)||w_i(x)|$$

segue que $h\in L^1(\Omega)$ e $|f_{m_i}|\leq h(x)$ quase sempre em Ω.

Na sequênica, pela continuidade de g_i, temos que

$$\lim_{m\to\infty} g_i(u_i(x)+t_mv_i(x))w_i(x)=g_i(u_i(x))w_i(x).$$

Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega a(x)g_i(u_i(x)+t_mv_i(x))w_i(x)dx=\int_\Omega a(x)g_i(u_i(x))w_i(x)dx.$$

Portanto, desde que $w\in V\subset H$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n\lim_{m\to\infty}\int_\Omega a(x)g_i(u_i(x)+t_mv_i(x))w_i(x)dx &= \sum_{i=1}^n\int_\Omega a(x)g_i(u_i(x))w_i(x)dx\\
&= \sum_{i=1}^n(ag_i(u_i),w_i)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.2.132}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(ag_i(u_i), w_i)_{L^2(\Omega)} &= (ag(u), w)\\ &= (ag(u), \mathcal{P}(w))\\ &= (\mathcal{P}(ag(u)), w)\\ &= \langle Bu, w\rangle_{V',V}.\end{aligned} \tag{2.2.133}$$

Então por (2.2.131), (2.2.132) e (2.2.133) obtemos que

$$\lim_{m\to\infty}\langle B(u+t_m v), w\rangle_{V',V} = \langle Bu, w\rangle_{V',V}$$

e, portanto, B é hemicontínuo. ■

Proposição 2.21 *O operdor $I + A + B$ é coercivo.*

Demonstração: De fato, seja $u_m \in D(I + A + B)$. Temos que

$$\begin{aligned}\langle u_m + Au_m + Bu_m, u_m\rangle_{V',V} &= \langle u_m, u_m\rangle_{V',V} + \langle Au_m, u_m\rangle_{V',V} + \langle Bu_m, u_m\rangle_{V',V}\\ &\geq \langle u_m, u_m\rangle_{V',V} + \langle Au_m, u_m\rangle_{V',V}\\ &\geq (u_m, u_m) + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |\nabla u_{m_i}|^2 dx\\ &= |u_m|^2 + |\nabla u_m|^2\\ &= |u_m|^2 + \|u_m\|^2\\ &\geq \|u_m\|^2.\end{aligned}$$

Portanto, $I + A + B$ é coercivo. ■

Teorema 2.22 *(Existência e Unicidade de solução regular)*
Sejam $u^0 \in W = V \cap (H^2(\Omega))^n$, $u^1 \in V$ e suponha que as hipóteses (2.2.122), (2.2.123) *e* (2.2.124) *sejam satisfeitas. Então, existe uma única função $u : Q \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$u \in L^\infty(0,\infty; W), \quad u' \in L^\infty(0,\infty; V) \quad e \quad u'' \in L^\infty(0,\infty; H)$$

de modo que u resolve o seguinte problema

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = -\nabla p \quad em \quad (\mathcal{D}'(Q))^n;$$

$$\operatorname{div} u = 0;$$

$$u(0) = u^0, u'(0) = u^1 \quad em \quad \Omega.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{P}$ a projeção ortogonal de $(L^2(\Omega))^n$ em H e considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u'' + Au + Bu' = 0 \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1 \end{cases} \tag{2.2.134}$$

onde os operadores A e B são os operadores definidos acima em (2.2.125) e (2.2.127).

Vamos reformular o problema (2.2.134) para obter

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & B \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{em} \quad \begin{matrix} V \\ \times \\ H. \end{matrix} \tag{2.2.135}$$

Então temos o operador matriz $\mathbb{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, onde $\mathcal{H} = V \times H$, definido por

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ Av + Bh \end{pmatrix}$$

cujo domínio é $D(\mathbb{A}) = \{(v, h) \in \mathcal{H}; \quad h \in V \quad \text{e} \quad Av + Bh \in H\}$. Temos que $\mathbb{A}$ é maximal monótono em $\mathcal{H}$.

De fato, $\mathbb{A}$ é monótono pois

$$\begin{aligned} &\left(\mathbb{A}\begin{bmatrix} v_1 \\ h_1 \end{bmatrix} - \mathbb{A}\begin{bmatrix} v_2 \\ h_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ h_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_2 \\ h_2 \end{bmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \\ &= \left(\begin{bmatrix} -h_1 + h_2 \\ A(v_1 - v_2) + Bh_1 - Bh_2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ h_1 - h_2 \end{bmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \\ &= -((h_1 - h_2, v_1 - v_2))_V + (A(v_1 - v_2), h_1 - h_2)_H + (Bh_1 - Bh_2, h_1 - h_2)_H. \end{aligned}$$

Observe que por (2.2.126), temos

$$\begin{aligned}
\langle A(v_1-v_2),h_1-h_2\rangle_{V',V} &= \sum_{i=1}^{n}\langle -\Delta(v_{1_i}-v_{2_i}),h_{1_i}-h_{2_i}\rangle_{H^{-1},H_0^1}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(-\Delta(v_{1_i}-v_{2_i}),h_{1_i}-h_{2_i})_{L^2(\Omega)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\nabla(v_{1_i}-v_{2_i}),\nabla(h_{1_i}-h_{2_i}))_{L^2(\Omega)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}(v_{1_i}-v_{2_i},h_{1_i}-h_{2_i})_{H_0^1(\Omega)}\\
&= ((v_1-v_2,h_1-h_2))_V.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\left(\mathbb{A}\begin{bmatrix}v_1\\h_1\end{bmatrix}-\mathbb{A}\begin{bmatrix}v_2\\h_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}v_1\\h_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}v_2\\h_2\end{bmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = (Bh_1-Bh_2,h_1-h_2)_H \geq 0,$$

pois pela Proposição 2.20, B é monótono. Portanto, $\mathbb{A}$ é monótono.

A fim de obter a maximalidade de $\mathbb{A}$, é suficiente provar que $Im(I+\mathbb{A})=\mathcal{H}$, isto é, dado $(v_0,h_0)\in\mathcal{H}$, temos que mostrar que existe $(v,h)\in D(\mathbb{A})$ tal que

$$(I+\mathbb{A})\begin{bmatrix}v\\h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_0\\h_0\end{bmatrix}, \tag{2.2.136}$$

ou seja,

$$\begin{cases} v-h &= v_0,\\ h+Av+Bh &= h_0.\end{cases}$$

Combinando as identidades acima deduzimos que

$$h+Ah+Bh=h_0-Av_0. \tag{2.2.137}$$

Portanto, é suficiente provar que $I+A+B$ é maximal monótono em $V\times V'$, isto é, temos que mostrar que $Im(I+A+B)=V'$.

Note que pela Proposição 2.20 temos que B é monótono e hemicontínuo, pela Proposição 2.19 temos que $I+A$ é maximal monótono em $V\times V'$ e pela Proposição 2.21 temos que $I+A+B$ é coercivo assim, pela Proposição 1.36, temos que $(I+A)+B$ é maximal monótono.

Dessa forma, (2.2.137) possui uma única solução $h \in V$.

Como $v = v_0 + h$ e $Av + Bh = h_0 - h$, concluímos que $v \in V$ e $Av + Bh \in H$.

Consequentemente, o sistema (2.2.136) tem uma única solução $(v, h) \in D(\mathbb{A})$, e, portanto, $\mathbb{A}$ é maximal monótono em $\mathcal{H}$.

Finalmente, do que foi visto e fazendo uso do Teorema 1.37 e dados $\{u^0, u^1\} \in D(\mathbb{A}) = D(A) \times V$ existe uma única $u(t)$ solução regular do problema (2.2.134) na classe

$$u \in L^\infty(0, \infty; V \cap (H^2(\Omega))^n), u' \in L^\infty(0, \infty; V), u'' \in L^\infty(0, \infty; H). \tag{2.2.138}$$

Recuperação da Pressão

Seja $v \in V$. Para todo $t > 0$ temos

$$0 = (u''(t) + Au(t) + Bu'(t), v) = (u''(t), v) + \langle Au(t), v\rangle_{V',V} + \langle Bu'(t), v\rangle_{V',V}.$$

Como $v \in V \subset H$, obtemos como em (2.2.126)

$$\langle Au(t), v\rangle_{V',V} = \sum_{i=1}^{n} \langle -\Delta u_i, v_i\rangle_{H^{-1},H_0^1}$$

e por (2.2.128) temos que

$$\langle Bu'(t), v\rangle_{V',V} = \sum_{i=1}^{n} \langle a g_i(u_i'), v_i\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

Segue então que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left\langle u_i''(t) - \Delta u_i(t) + a g_i(u_i'(t)), v_i \right\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

Seja

$$L_i = u_i''(t) - \Delta u_i(t) + a g_i(u_i'(t)),$$

então $L_i \in H^{-1}(\Omega)$.

Seja

$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle L_i, v_i\rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

então $L \in (H^{-1}(\Omega))^n$ e além disso, $L(v) = 0 \ \forall \ v \in V$ q.s. em $]0,T[$. Assim, pelo Lema 1.42, existe $p(t) \in L^2_0(\Omega)$ tal que

$$L = u''(t) - \Delta u(t) + ag(u'(t)) = -\nabla p,$$

isto é,

$$L_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \ \text{ q.s. em } \ ]0,T[.$$

Portanto,

$$L_i(v_i) = \left\langle -\frac{\partial p}{\partial x_i}, v_i \right\rangle \ \text{ para todo } \ v_i \in H^1_0(\Omega) \ \text{ q.s. } \ ]0,T[,$$

então

$$\langle L_i(v_i), \theta_i \rangle = \left\langle \langle -\frac{\partial p}{\partial x_i}, v_i \rangle, \theta_i \right\rangle \ \text{ para todo } \ \theta_i \in \mathcal{D}(0,T), \ \text{ para todo } \ v_i \in H^1_0(\Omega).$$

Em particular,

$$\langle\langle u''_i(t) - \Delta u_i(t) + a(x) g_i(u'_i(t)), v_i \rangle, \theta_i \rangle = \left\langle \langle -\frac{\partial p}{\partial x_i}, v_i \rangle, \theta_i \right\rangle$$

para todo $\theta_i \in \mathcal{D}(0,T)$ e para todo $v_i \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Como $\psi_i = v_i \theta_i \in \mathcal{D}(\Omega)$; $\theta_i \in \mathcal{D}(0,T)$ é denso em $\mathcal{D}(Q)$ temos que

$$u''_i - \Delta u_i + a(x) g_i(u'_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(Q),$$

onde $p(t) \in L^2(\Omega)$ q.s. em $]0,T[$ e, portanto,

$$u'' - \Delta u + a(x) g(u') = -\nabla p \ \text{ em } \ (\mathcal{D}'(Q))^n.$$

Além disso, como $u(t) \in V \cap (H^2(\Omega))^n$ então $\Delta u(t) \in H \subset (L^2(\Omega))^n, ag(u') \in (L^2(\Omega))^n$ e $u''(t) \in H \subset (L^2(\Omega))^n$ então, pelo Lema 1.50 de Cattabriga, temos que $p(t) \in H^1(\Omega)$. ■

Teorema 2.23 *(Existência e Unicidade de Solução Fraca) Sejam $u^0 \in V$, $u^1 \in H$ e suponha que as hipóteses* (2.2.122), (2.2.123) *e* (2.2.124) *sejam satisfeitas. Então existe uma única solução fraca u do problema* (2.2.121) *tal que*

$$u \in C(0,\infty; V) \cap C^1(0,\infty; H).$$

Demonstração: Procedendo analogamente ao Teorema 2.22, provamos que $\mathbb{A}$ é maximal monótono em $\mathcal{H} = V \times H$. Então dado $\{u^0, u^1\} \in V \times H$, pelo Teorema 1.38 existe uma única solução fraca $u(t)$ do problema (2.2.134) na classe

$$u \in C(0,\infty; V) \cap C^1(0,\infty; H). \tag{2.2.139}$$

Para recuperar o termo de pressão da solução fraca, observe que $u'' \in L^1(0,T;V')$. Então

$$|\langle u''(t), v\rangle| \leq \|u''(t)\|_{V'}\|v\|_V.$$

Considere $\{\varphi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{V}$ tal que $\varphi_m \to 0$ em $(\mathcal{D}(\Omega))^n$. Então temos que $|\langle u''(t), \varphi_m\rangle| \to 0$.

Então, $u''(t)$ é uma forma linear e contínua em $\mathcal{V}$ com a norma de $(\mathcal{D}(\Omega))^n$. Então pelo Teorema de Hahn-Banach $u''(t)$ pode ser estendida continuamente a $(\mathcal{D}(\Omega))^n$, continuaremos a denotar por $u''(t)$. Neste sentido, $L = u''(t) - \Delta u(t) + a(x)g(u'(t))$ é uma forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$ q.s. em $[0,T]$. Analogamente ao feito anteriormente, temos que $L \in (\mathcal{D}'(Q))^n$ e $L(\varphi) = 0$ in $(\mathcal{D}'(0,T))^n$ $\forall \varphi \in \mathcal{V}$. Dessa forma, pelo Lema 1.43, temos que

$$L = -\nabla p, \quad p \in \mathcal{D}'(Q),$$

isto é,

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = -\nabla p, \quad p \in \mathcal{D}'(Q).$$

■

2.2.2 Taxa de Decaimento Uniforme

Definição 2.24 *A energia associada ao problema (2.2.121) é definida por*

$$E(t) = \frac{1}{2}\left|u'(t)\right|_H^2 + \frac{1}{2}\left\|u(t)\right\|_V^2, \quad \forall \ \ t \in [0,T]. \tag{2.2.140}$$

Multiplicando a solução regular da equação (2.2.121) por $u' \in V$ e integrando-se em Ω tem-se

$$\int_\Omega u_i''(t)u_i'dx - \int_\Omega \Delta u_i(t)u_i'dx + \int a(x)g_i(u_i'(t))u_i'dx = \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial x_i}u_i'dx.$$

$i = 1, \cdots n$. Note que pelo Lema de Gauss

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(pu_i')dx = \int_\Gamma pu_i'\nu_i$$

e esta última integral é nula pois $u_i' \in H_0^1(\Omega)$. Disto e pela Fórmula de Green segue que

$$\int_\Omega u_i''u_i'dx + \int_\Omega \nabla u_i \nabla u_i'dx + \int_\Omega a(x)g_i(u_i')u_i'dx = \int_\Omega p\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}dx.$$

Somando-se em i, tem-se

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega u_i''u_i'dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \nabla u_i \nabla u_i'dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega a(x)g_i(u_i')u_i'dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega p\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}dx. \tag{2.2.141}$$

Observe que

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega p\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}dx = \int_\Omega p \operatorname{div} u' = 0,$$

pois $u' \in V$. Observe também que

$$(a(x)g(u'), u') = \sum_{i=1}^n \int_\Omega a(x)g_i(u_i')u_i'dx \geq 0,$$

por (2.2.122)-(2.2.124). Sendo assim, em (2.2.141) temos

$$(u'', u') + (\nabla u, \nabla u') = -(a(x)g(u'), u').$$

Dessa forma,

$$(u'', u') + ((u, u')) = -(a(x)g(u'), u'),$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|u'(t)|^2 + \|u(t)\|^2) = -(a(x)g(u'), u').$$

Sendo assim,

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0$$

e, além disso, obtemos a seguinte identidade da energia

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega a(x)g(u') \cdot u' \, dxdt, \ 0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty. \tag{2.2.142}$$

Por argumentos de densidade, a identidade acima (2.2.142), permanece válida para toda solução fraca de (2.2.121).

Antes de iniciar nosso resultado de estabilidade, definiremos algumas funções necessárias. Para este propósito, vamos seguir as ideias introduzidas primeiramente por Lasiecka e Tataru em [39]. Defina uma função h por

$$\begin{cases} h(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i(x) \\ h_i(0) = 0 \end{cases} \tag{2.2.143}$$

onde $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções côncavas, estritamente crescentes tais que

$$h_i(s_i g_i(s_i)) \geq |s_i|^2 + |g_i(s_i)|^2 \;\text{ para }\; |s_i| < 1,, \; i = 1, \cdots, n. \tag{2.2.144}$$

Note que h_i pode ser construída diretamente, dadas as hipóteses de g_i em (2.2.123) e (2.2.124). A seguir, definimos

$$r(\cdot) = h\left(\frac{\cdot}{med(Q_T)}\right), Q_T = \Omega\times]0,T[\text{ associado com o problema (2.2.121).} \tag{2.2.145}$$

Observe que r é monótona crescente, então $cI + r$ é invertível para todo $c \geq 0$. Para L uma constante positiva, colocamos

$$z(x) = (cI + r)^{-1}(Lx), \quad L := (\widetilde{c}med(Q_T)(1 + \|a\|_\infty))^{-1}, \tag{2.2.146}$$

onde c é uma constante positiva que será estabelecida posteriormente.

Desta forma, a função z é positiva, contínua e estritamente crescente com $z(0) = 0$. Finalmente, seja

$$q(x) = x - (I + z)^{-1}(x). \tag{2.2.147}$$

Podemos agora enunciar nosso resultado de estabilidade.

Teorema 2.25 *(Taxa de Decaimento Uniforme) Suponha que as hipóteses* (2.2.122)-(2.2.124) *e* (2.2.144) *sejam satisfeitas. Seja u a solução fraca do problema* (2.2.121) *com a energia $E(t)$ definida como em* (2.2.140)*. Então existe um $T_0 > 0$ tal que*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right) \quad \forall \;\; t > T_0 \tag{2.2.148}$$

com $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$, *onde o semigrupo de contração* $S(t)$ *é a solução da equação diferencial*

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \tag{2.2.149}$$

onde q *é dado em* (2.2.147). *Aqui a constante* c *(da definição* (2.2.146)*) é* $c \equiv \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i^{-1} + K_i}{med(Q_T)(1+\|a\|_\infty)}$.

Demonstração: Observe que como $u' \in H$, então $a(x)g(u') \in L^1(0,T;H)$. Dessa forma, a solução u do problema (2.2.121) pode ser escrita como a soma $u = v + w$ onde v e w são, respectivamente, soluções fracas dos problemas

$$\begin{cases} v'' - \Delta v = -\nabla p \ \text{ em } Q_T, \\ \operatorname{div} v = 0 \ \text{ em } Q_T, \\ v = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ v(0) = u^0, \quad v'(0) = u^1 \ \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} w'' - \Delta w = -a(x)g(u') \ \text{ em } Q_T, \\ \operatorname{div} w = 0 \ \text{ em } Q_T, \\ w = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ w(0) = w'(0) = 0 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.2.150}$$

Pelo fato que E_u é decrescente e pela Observação 2.15 temos que

$$\begin{aligned} E(T) = E_u(T) &\leq E_u(0) = E_v(0) \leq c_1 \int_0^T \int_\omega |v'|^2 dxdt \\ &\leq c_2 \int_0^T \int_\omega |u'|^2 dxdt + c_3 \int_0^T \int_\omega |w'|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{2.2.151}$$

Observe que por (2.2.122) temos que

$$\int_0^T \int_\omega |u'|^2 dxdt \leq c_4 \int_0^T \int_\omega a(x)|u'|^2 dxdt. \tag{2.2.152}$$

Além disso, pela Observação 1.64 temos que

$$\int_0^T \int_\Omega |w'|^2 dxdt \leq c_5 \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u')|^2 dxdt. \tag{2.2.153}$$

Dessa forma, por (2.2.151), (2.2.152) e (2.2.153) temos que

$$\begin{aligned} E(T) &\leq c_6 \int_0^T \int_\Omega a(x)|u'|^2 dxdt + c_7 \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u')|^2 dxdt \\ &\leq \tilde{c} \int_0^T \int_\Omega a(x) \Big(|u'|^2 + |g(u')|^2 \Big) dxdt, \end{aligned} \tag{2.2.154}$$

onde $\tilde{c}$ depende de T.

Sejam

$$\begin{aligned}\Sigma_{\alpha_i} &= \{(t,x)\in Q_T; |u_i'|>1 \ \text{ q.s.}\},\\ \Sigma_{\beta_i} &= Q_T\setminus \Sigma_{\alpha_i}.\end{aligned}$$

Observe que

$$\int_{Q_T} a(x)(|u'|^2+|g(u')|^2)dQ_T = \sum_{i=1}^n \int_{Q_T} a(x)(|u_i'|^2+|g_i(u_i')|^2)dQ_T$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Sigma_{\alpha_i}} a(x)(|u_i'|^2+|g_i(u_i')|^2)d\Sigma_{\alpha_i} + \int_{\Sigma_{\beta_i}} a(x)(|u_i'|^2+|g_i(u_i')|^2)d\Sigma_{\beta_i}\right) \tag{2.2.155}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\Sigma_{\alpha_i}} a(x)(|u_i'|^2+|g_i(u_i')|^2)d\Sigma_{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n \int_{\Sigma_{\beta_i}} a(x)(|u_i'|^2+|g_i(u_i')|^2)d\Sigma_{\beta_i}.$$

Então, por (2.2.124), obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_{\alpha_i}} a(x)(|g_i(u_i')|^2+|u_i'|^2)d\Sigma_{\alpha_i} &\le \int_{\Sigma_{\alpha_i}} a(x)(K_i\,|g_i(u_i')u_i'| + k_i^{-1}\,|g_i(u_i')u_i'|)d\Sigma_{\alpha_i}\\ &\le (k_i^{-1}+K_i)\int_{\Sigma_{\alpha_i}} a(x)g_i(u_i')u_i'd\Sigma_{\alpha_i}\\ &= N_i\int_{\Sigma_{\alpha_i}} a(x)g_i(u_i')u_i'd\Sigma_{\alpha_i}\end{aligned} \tag{2.2.156}$$

onde $N_i = k_i^{-1}+K_i$.

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \int_{\Sigma_{\alpha_i}} a(x)(|g_i(u_i')|^2+|u_i'|^2)d\Sigma_{\alpha_i} &= \sum_{i=1}^n N_i\int_{\Sigma_{\alpha_i}} a(x)g_i(u_i')u_i'd\Sigma_{\alpha_i}\\ &\le N\sum_{i=1}^n \int_{\Sigma_{\alpha_i}} a(x)g_i(u_i')u_i'd\Sigma_{\alpha_i}\\ &\le N\sum_{i=1}^n \int_{Q_T} a(x)g_i(u_i')u_i'dQ_T\\ &= N\int_{Q_T} a(x)g(u')u'dQ_T\end{aligned} \tag{2.2.157}$$

onde $N = \sum_{i=1}^n (k_i^{-1}+K_i)$.

Além disso, de (2.2.144) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_{\beta_i}} a(x)(|g(u_i')|^2+|u_i'|^2)d\Sigma_{\beta_i} &\leq \int_{\Sigma_{\beta_i}} a(x)h_i(g_i(u_i')u_i')d\Sigma_{\beta_i}\\ &= (1+\|a\|_\infty)\int_{\Sigma_{\beta_i}} \frac{a(x)}{1+\|a\|_\infty}h_i(g_i(u_i')u_i')d\Sigma_{\beta_i}.\end{aligned} \tag{2.2.158}$$

Como h_i é côncava, $h_i(0)=0$ e $a(x)\leq(\|a\|_\infty+1)$ e como h_i é crescente e $\frac{a(x)}{1+\|a\|_\infty}<a(x)$ deduzimos, respectivamente, que

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_{\beta_i}} \frac{a(x)}{1+\|a\|_\infty}h_i(g_i(u_i')u_i')d\Sigma_{\beta_i} &\leq \int_{\Sigma_{\beta_i}} h_i\left(\frac{a(x)}{1+\|a\|_\infty}g_i(u_i')u_i'\right)d\Sigma_{\beta_i}\\ &\leq \int_{\Sigma_{\beta_i}} h_i(a(x)g_i(u_i')u_i')d\Sigma_{\beta_i}.\end{aligned} \tag{2.2.159}$$

Pela desigualdade de Jensen, temos que

$$\int_{\Sigma_{\beta_i}} h_i(a(x)g_i(u_i')u_i')d\Sigma_{\beta_i} \leq med(Q_T)h_i\left(\frac{1}{med(Q_T)}\int_{Q_T} a(x)g_i(u_i')u_i'dQ_T\right).$$

Além disso, como h_i é crescente, então

$$\begin{aligned}h_i\left(\frac{1}{med(Q_T)}\int_{Q_T} a(x)g_i(u_i')u_i'dQ_T\right) &\leq h_i\left(\frac{1}{med(Q_T)}\sum_{i=1}^n\int_{Q_T} a(x)g_i(u_i')u_i'dQ_T\right)\\ &= h_i\left(\frac{1}{med(Q_T)}\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T\right).\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\int_{\Sigma_{\beta_i}} a(x)(|g(u_i')|^2+|u_i'|^2)d\Sigma_{\beta_i} \leq (1+\|a\|_\infty)med(Q_T)h_i\left(\frac{1}{med(Q_T)}\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T\right).$$

Portanto, de (2.2.143) e (2.2.145) temos que

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n\int_{\Sigma_{\beta_i}} a(x)(|g_i(u_i')|^2+|u_i'|^2)d\Sigma_{\beta_i}\\ &\leq (1+\|a\|_\infty)med(Q_T)\sum_{i=1}^n h_i\left(\frac{1}{med(Q_T)}\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T\right)\\ &= (1+\|a\|_\infty)med(Q_T)h\left(\tfrac{1}{med(Q_T)}\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T\right)\\ &= (1+\|a\|_\infty)med(Q_T)r\left(\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T\right).\end{aligned} \tag{2.2.160}$$

Dessa forma, por (2.2.155), (2.2.157) e (2.2.160) temos que

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} a(x)\Big(|g(u')|^2+|u'|^2\Big)dQ_T\\&\leq N\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T+(1+\|a\|_\infty)med(Q_T)r\Big(\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T\Big).\end{aligned}\tag{2.2.161}$$

Por (2.2.154) e (2.2.161), temos que

$$\begin{aligned}E(T) &\leq \widetilde{c}(1+\|a\|_\infty)\Big[\frac{N}{(1+\|a\|_\infty)}\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T\\&+ med(Q_T)r\Big(\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T\Big)\Big].\end{aligned}\tag{2.2.162}$$

Definindo

$$L=\frac{1}{\widetilde{c}med(Q_T)(1+\|a\|_\infty)},$$

$$c=\frac{N}{med(Q_T)(1+\|a\|_\infty)},$$

obtemos que

$$z[E(T)]\leq\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T=E(0)-E(T),\tag{2.2.163}$$

onde a função z é definida em (2.2.146).

De fato, aplicando z em ambos lados de (2.2.162) temos que

$$\begin{aligned}z(E(T)) &\leq z\Big(\frac{1}{L}(cI+r)\Big(\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T\Big)\Big)\\&= (cI+r)^{-1}\Big[L\Big(\frac{1}{L}(cI+r)\Big)\Big(\int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T\Big)\Big]\\&= \int_{Q_T} a(x)g(u')\cdot u'dQ_T\\&= E(0)-E(T).\end{aligned}$$

Lembramos que a desigualdade acima é válida para T fixo suficientemente grande, isto é, para todo $T>T_0$, para algum $T_0>0$.

Para finalizar a prova do Teorema 2.25, vamos invocar o seguinte resultado devido a Lasiecka e Tataru [39].

Lema A *Seja z uma constante positiva e crescente tal que $z(0) = 0$. Como z é crescente, podemos definir uma função crescente $q, q(x) = x - (I + z)^{-1}(x)$. Considere a sequência s_m de números positivos que satisfaz*

$$s_{m+1} + z(s_{m+1}) \leq s_m.$$

Então $s_m \leq S(m)$, onde $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = s_0.$$

Além disso, se $z(x) > 0$ para $x > 0$, então $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$.

Com este resultado em mente, nós substituímos T (respectivamente 0) em (2.2.163) por $m(T+1)$ (respectivamente mT) para obter

$$E(m(T+1)) + z(E(m(T+1))) \leq E(mT) \quad \text{para} \quad m = 0, 1, ... \tag{2.2.164}$$

Aplicando o Lema A com $s_m = E(mT)$, resulta em

$$E(mT) \leq S(m), \quad \text{para} \quad m = 0, 1, ... \tag{2.2.165}$$

Finalmente, usando a dissipatividade de $E(t)$, temos para $t = mT + \tau, 0 \leq \tau \leq T$,

$$E(t) \leq E(mT) \leq S(m) = S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right) \quad \text{para} \quad t > T, \tag{2.2.166}$$

onde usamos acima o fato que $S(\cdot)$ é dissipativo. Com isto, está completa a prova do Teorema 2.25. ■

2.2.3 Exemplos

Daremos alguns exemplos da taxa de decaimento.

Exemplo 1 Assumindo que $k\,|s_i| \leq |g_i(s_i)| \leq K\,|s_i|$ para todo $s_i \in \mathbb{R}$, onde k e K são constantes positivas ou, se $g_i(s_i) = c\,s_i$, temos a taxa de decaimento exponencial. De fato, de (2.2.154) deduzimos que

$$E(T) \leq c\int_0^T \int_\Omega a(x)|u'|^2\,dxdt, \quad \text{para todo} \quad T > T_0. \tag{2.2.167}$$

Pela identidade da energia em (2.2.142) e de (2.2.167) temos que

$$E(T) - E(0) = -\int_0^T \int_\Omega a(x)|u'|^2 dxdt \leq -\frac{E(T)}{c} \tag{2.2.168}$$

logo,

$$E(T) \leq \left(\frac{c}{1+c}\right) E(0) \ \text{ para todo } \ T > T_0$$

e, portanto, como estamos com um sistema autônomo, $E(2T) \leq \left(\frac{c}{1+c}\right) E(T) \leq \left(\frac{c}{1+c}\right)^2 E(0)$ e, por iteração, $E(nT) \leq \left(\frac{c}{1+c}\right)^n E(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $T > T_0$.

Dessa forma, pelo algoritmo de Euclides temos que dado $t > 0$ existe $\delta \in [0, T]$ tal que $t = nT + \delta$ daí $nT \leq nT + \delta = t$.

Como a energia é decrescente, segue que

$$E(t) \leq E(nT) \leq \left(\frac{c}{1+c}\right)^n E(0).$$

Agora, como $n = \frac{t}{T} - \frac{\delta}{T}$, obtemos

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \left(\frac{c}{1+c}\right)^{\frac{t}{T} - \frac{\delta}{T}} E(0) \\ &\leq \left(\frac{c}{1+c}\right)^{\frac{t}{T} - 1} E(0) \\ &\leq \left(\frac{1+c}{c}\right)\left(\frac{1+c}{c}\right)^{-\frac{t}{T}} E(0) \\ &= \left(1 + \frac{1}{c}\right) e^{\ln(\frac{1+c}{c})^{\frac{-t}{T}}} E(0) \\ &= \left(1 + \frac{1}{c}\right) e^{-\frac{1}{T}\ln(\frac{1+c}{c})t} E(0). \end{aligned}$$

Fazendo $\tilde{c} = 1 + \frac{1}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{T}\ln(\frac{1+c}{c})$, temos

$$E(t) \leq \tilde{c} e^{-\gamma t}$$

com $\tilde{c} > 1$ e $\gamma > 0 \ \ \forall t > T$, como tínhamos afirmado.

Observe que se a pressão p é constante em todo Ω, podemos dar uma grande variedade de exemplos emprestados de [21] (veja seção 8, Corolário 8.1 e Corolário 8.2) seguindo as ideias introduzidas primeiramente em [1], [2]. A saber:

Corolário 8.1 *Suponha que $g'(0) = 0$ (isto é, a dissipação é "fraca" e superlinear na origem) e a função $\sqrt{s}g(\sqrt{s})$ é convexa para $\in [0, s_0]$, onde s_0 pode ser arbitrariamente pequeno, a equação diferencial a ser resolvida torna-se*

$$S_t + \sqrt{S}g(\sqrt{S}) = 0, \quad S(0) = E(0) = S_0,$$

e $E(t) \leq C(E(0))S(t)$. Mais especificamente, integrando a equação diferencial, nós obtemos com $G(S, S_0) = \int_{\sqrt{S}}^{\sqrt{S_0}} \frac{1}{g(u)} du$, $S(t) = G^{-1}(-\frac{t}{2}, S_0)$.

Corolário 8.2 *Suponha que $g(s)$ decai para zero perto da origem mais lento do que qualquer função linear, isto é,*

$$\lim_{s \to 0} \frac{s}{g(s)} = 0,$$

e, além disso, a função $\sqrt{s}g^{-1}(\sqrt{s})$ é convexa para $s \in [0, s_0]$, onde s_0 pode ser arbitrariamente pequeno, a equação diferencial a ser resolvida torna-se

$$S_t + \sqrt{S}g^{-1}(\sqrt{S}) = 0, \quad S(0) = E(0) = S_0,$$

e $E(t) \leq C(E(0))S(t)$. Mais especificamente, integrando a equação diferencial obtemos com $G(S, S_0) = \int_{\sqrt{S}}^{\sqrt{S_0}} \frac{1}{g^{-1}(u)} du$, $S(t) = G^{-1}(-\frac{t}{2}, S_0)$.

De fato, neste caso específico, denotando

$$E_i(t) := \frac{1}{2}\left(||u_i(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||u_i'(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right), \ i = 1, \cdots, n$$

cada porção da energia cheia verifica a identidade da energia

$$E_i(t_2) - E_i(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega a(x) g_i(u_i') u_i' \, dx dt, \ i = 1, \cdots, n,$$

e, além disso, para cada $i = 1, \cdots, n$ temos a equação da onda, ou seja,

$$\begin{cases} u_i'' - \Delta u_i + a(x) g_i(u_i') = \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \text{ em } \Omega \times]0, \infty[, \\ u_i = 0 \ \text{ sobre } \Gamma \times]0, \infty[, \\ u_i(0) = u_i^0, \ u_i'(0) = u_i^1. \end{cases} \tag{2.2.169}$$

Como consequência, deduzimos, para a equação da onda pura, que

$$E_i(T) \leq c \int_0^T \int_\Omega (|u_i'|^2 + |g_i(u_i')|^2)\, dxdt,$$

que implica que o decaimento de cada $E_i(T)$ é dado pelo Corolário 8.1 e Corolário 8.2 devido a [21] e o decaimento associado com a energia cheia é dado por

$$E(t) := \sum_{i=1}^n E_i(t) \leq \sum_{i=1}^n S_i(\frac{t}{T_0} - 1), \forall t > T_0. \tag{2.2.170}$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2 Considere $g_i(s_i) = s_i^c$, $c > 1$ na origem. Observe que $\sqrt{s_i} g(\sqrt{s_i}) = s_i^{\frac{c+1}{2}}$ e é convexa para $c \geq 1$, então resolvemos

$$\frac{dS_i}{dt} + S_i^{\frac{c+1}{2}} = 0. \tag{2.2.171}$$

Esta equação pode ser integrada diretamente. Entretanto para ilustrar a fórmula geral, nós encontramos

$$G(s_i, S_{i_0}) = \int_{\sqrt{S_{i_0}}}^{\sqrt{s_i}} u^{-c} du = \frac{1}{1-c}[s_i^{\frac{-c+1}{2}} - S_{i_0}^{\frac{-c+1}{2}}].$$

Tem-se que $G^{-1}(t) = [S_{i_0}^{\frac{-c+1}{2}} - t(1-c)]^{\frac{2}{-c+1}}$ e como $E_i(0) = S_i(0) = S_{i_0}$ segue que

$$E_i(t) \leq C(E_i(0))S_i(t) = C(E_i(0))[E_i(0)^{\frac{-c+1}{2}} + t(c-1)]^{\frac{2}{-c+1}}.$$

Se $g_i(s_i) = s_i^c$ para todo $i = 1, \cdots, n$, o decaimento de $E(t)$ é a soma dos decaimentos do mesmo tipo. Entretanto, se $g_i(s_i) = s_i^{c_i}$ o decaimento é o pior dado pelo maior c_i.

Exemplo 3 Tome $g_i(s_i) = s_i^3 e^{-\frac{1}{s_i^2}}$ para s_i perto da origem. Como a função $s_i^2 e^{-\frac{1}{s_i}}$ é convexa numa vizinhança da origem, resolvemos

$$\frac{dS_i}{dt} + S_i^2 e^{-\frac{1}{S_i}} = 0. \tag{2.2.172}$$

Neste caso $G(s_i, S_{i_0}) = -1/2[e^{-\frac{1}{s_i}} - e^{-\frac{1}{S_{i0}}}]$ e $G^{-1}(t, S_{i_0})) = [ln(e^{\frac{1}{S_{i0}}} - 2t)]^{-1}$. Consequentemente

$$E_i(t) \leq C(E_i(0))[ln(e^{\frac{1}{E_i(0)}} + t)]^{-1}.$$

Exemplo 4 Considere $g_i(s_i) = s_i|s_i|e^{-\frac{1}{|s_i|}}$ para s_i perto do zero . Como a função $s_i^{3/2}e^{-\frac{1}{\sqrt{s_i}}}$ é convexa sobre $[0, p_0]$ para algum p_0 pequeno, somos conduzidos à equação diferencial

$$\frac{S_i}{dt} + S_i^{3/2}e^{-\frac{1}{\sqrt{S_i}}} = 0. \tag{2.2.173}$$

A função $G(s_i, S_{i_0})$ é dada por $G(s_i, S_{i_0}) = -[e^{\frac{1}{\sqrt{s_i}}} - e^{\frac{1}{\sqrt{S_{i_0}}}}]$. Consequentemente, $G^{-1}(t, S_{i_0}) = \frac{1}{ln^2[e^{\frac{1}{\sqrt{S_{i_0}}}} - t]}$ e

$$E_i(t) \leq C(E_i(0))\frac{1}{ln^2[e^{\frac{1}{\sqrt{E_i(0)}}} + \frac{1}{2}t]}.$$

Exemplo 5 Tome $g_i(s_i) = |s_i|^{\theta-1}s_i, 0 < \theta < 1$. Neste caso, a análise é idêntica ao caso do exemplo 1 como $g_i^{-1}(s_i) = s_i^{\frac{1}{\theta}}, s_i > 0$ e $\frac{1}{\theta} > 1$. Assim, a taxa de decaimento neste caso torna-se

$$E_i(t) \leq C(E_i(0))\left[E_i(0)^{\frac{-1+\theta}{2\theta}} + t\frac{1-\theta}{\theta}\right]^{\frac{2\theta}{\theta-1}}.$$

Capítulo 3

Desigualdade de Observabilidade Usando Teoria de Análise Microlocal

Este capítulo foi realizado em parceria com Maria Astudillo, Marcelo Moreira Cavalcanti e Janaina Pedroso Zanchetta.

3.1 Descrição do Problema

Neste capítulo vamos generalizar os resultados obtidos no capítulo anterior, isto é, queremos obter a controlabilidade exata interna para o seguinte problema

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = -\nabla p + h\chi_\omega \quad \text{em } Q, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \quad \text{em } Q, \\ \phi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \quad \phi'(0) = \phi^1 \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

onde $\Delta\phi = (\Delta\phi_1, \cdots, \Delta\phi_n), \phi'' = (\phi_1'', \cdots, \phi_n''), \operatorname{div}\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi_i}{\partial x_i}$ e $p = p(x,t)$ é o termo de pressão. Além disso, Ω é um subconjunto aberto, limitado do $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ com fronteira regular Γ e $\omega \subset \Omega$ um conjunto aberto dado pela interseção de uma vizinhança aberta da fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ e χ_ω é a função característica de ω.

Como já visto anteriormente, para obter a controlabilidade exata interna, é suficiente obter a desigualdade de observabilidade para o problema

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = -\nabla p \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \ \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \ \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

a saber

$$E_\phi(0) \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi'(x,t)|^2 \, dxdt, \tag{3.1.3}$$

onde E_ϕ é a energia associada ao problema (3.1.2). Para obtermos (3.1.3) faremos uso de argumentos de análise microlocal devido a N. Burq e P. Gérard em [17]. É importante salientar que no capítulo anterior, foi fortemente usado a hipótese que Ω é estritamente estrelado em relação à origem. Precisamos desta hipótese, mais precisamente no Lema 2.10 e, consequentemente, nas proposições seguintes que dependem deste Lema. O principal objetivo deste capítulo é remover esta hipótese.

Definição 3.1 *(Condição Geométrica de Controle): Dizemos ω controla geometricamente Ω, quando existe $T_0 > 0$, tal que toda geodésica de Ω viajando com velocidade constante igual a 1 no tempo $t = 0$, encontra o conjunto ω em um tempo $t < T_0$.*

Hipótese 3.2 *Assuma que ω satisfaz a condição geométrica de controle conforme Definição 3.1.*

Podemos ver em [42] um exemplo de domínio Ω satisfazendo a hipótese acima, embora exista uma ampla variedade de exemplos interessantes como aqueles considerados em Bardos, Lebeau e Rauch [10].

3.2 Desigualdade de Observabilidade

Considere

$$E_\phi(t) = \frac{1}{2}\,\|\phi(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\,|\phi'(t)|_H^2 \tag{3.2.4}$$

a energia associada ao problema (3.1.2). O próximo resultado, é o principal resultado desta seção.

Teorema 3.3 *Suponha que os dados iniciais satisfazem $E_\phi(0) \leq L$. Então para todo $T > T_0$ e $L > 0$ existe $C = C(T, L) > 0$ tal que a desigualdade*

$$E_\phi(0) \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi'(x,t)|^2 \, dxdt, \tag{3.2.5}$$

é verificada para toda solução fraca ϕ do problema (3.1.2).

Demonstração: Observe primeiramente que se a estimativa (3.2.5) vale para o seguinte problema

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = 0 \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \ \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \ \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{3.2.6}$$

então, temos o resultado desejado. De fato, considere os seguintes problemas sujeitos aos mesmos dados iniciais, mas um com o termo de pressão e o outro não, isto é,

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = -\nabla p \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\phi = 0 \text{ em } Q, \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \phi(0) = \phi^0, \ \phi'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \ \Omega, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = 0 \text{ em } Q, \\ \operatorname{div}\theta = 0 \text{ em } Q, \\ \theta = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \theta(0) = \phi^0, \ \theta'(0) = \phi^1 \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases}$$

Como $E_\phi(0) = E_\theta(0)$, pois estamos considerando os mesmos dados iniciais, temos que

$$E_\phi(0) = E_\theta(0) \leq C \int_0^T \int_\omega |\theta'(x,t)|^2 \, dxdt. \tag{3.2.7}$$

Por outro lado, considere $w := \phi - \theta$. Então w satisfaz:

$$\begin{cases} w'' - \Delta w = -\nabla p \text{ em } Q, \\ \operatorname{div} w = 0 \text{ em } Q, \\ w = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ w(0) = w'(0) = 0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{3.2.8}$$

Contudo, vemos que $E_w(t) = E_w(0) = 0$ e, portanto, $\phi = \theta$ q.s. em Q. Consequentemente, a presença da pressão não influencia na observabilidade, assim em (3.2.7) temos que

$$E_\phi(0) \leq C \int_0^T \int_\omega |\phi'(x,t)|^2 \, dxdt.$$

Sendo assim, provemos (3.2.5) para o problema (3.2.6). Vamos trabalhar com soluções regulares e reestabelecer (3.2.5) por argumentos de densidade. Argumentemos por contradição. Suponha, por absurdo, que (3.2.5) não vale. Então existe uma sequência $\{\phi_m\}$ de soluções para o problema (3.2.6), tal que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{E_{\phi_m}(0)}{\int_0^T \int_\omega |\phi_m'(x,t)|^2 \, dxdt} = +\infty. \tag{3.2.9}$$

De (3.2.9) temos que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\int_0^T \int_\omega |\phi_m'(x,t)|^2 \, dxdt}{E_{\phi_m}(0)} = 0. \tag{3.2.10}$$

Considere a seguinte sequência de problemas

$$\begin{cases} \phi_m'' - \Delta\phi_m = 0 \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div} \phi_m = 0 \ \text{ em } Q, \\ \phi_m = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ \phi_m(0) = \phi_m^0, \quad \phi_m'(0) = \phi_m^1 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.2.11}$$

Agora, defina:

$$\alpha_m := [E_{\phi_m}(0)]^{1/2}, \ v_m := \frac{\phi_m}{\alpha_m}. \tag{3.2.12}$$

Considere agora, a seguinte sequência de problemas normalizados

$$\begin{cases} v_m'' - \Delta v_m = 0 \ \text{ em } Q, \\ \operatorname{div} v_m = 0 \ \text{ em } Q, \\ v_m = 0 \ \text{ sobre } \Sigma, \\ v_m(0) = v_m^0 = \frac{\phi_m^0}{\alpha_m}, \quad v_m'(0) = v_m^1 = \frac{\phi_m^1}{\alpha_m} \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{3.2.13}$$

Dessa forma, temos que

$$E_{v_m}(t) = \frac{1}{\alpha_m^2} E_{\phi_m}(t). \tag{3.2.14}$$

De fato, pois

$$
\begin{aligned}
E_{v_m}(t) &= \frac{1}{2}\|v_m(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}|v'_m(t)|_H^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\|v_{m_i}(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|v'_{m_i}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\nabla\left(\frac{\phi_{m_i}(t)}{\alpha_m}\right)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\phi'_{m_i}(t)}{\alpha_m}\right|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{1}{\alpha_m^2}\Big(|\nabla\phi_{m_i}(t)|^2 + |\phi'_{m_i}(t)|^2 \Big) dx \\
&= \frac{1}{\alpha_m^2}\left(\frac{1}{2}\|\phi_m(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}|\phi'_m(t)|_H^2\right) \\
&= \frac{1}{\alpha_m^2}E_{\phi_m}(t).
\end{aligned}
$$

Portanto, em particular, temos

$$
E_{v_m}(0) = 1 \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3.2.15}
$$

A fim de obter uma contradição, vamos mostrar que $E_{v_m}(0)$ converge para zero. De (3.2.15), obtemos que $E_{v_m}(0) \leq L$ então, para uma possível subsequência de $\{v_m\}$, temos que

$$
v_m^0 \rightharpoonup v^0 \quad \text{(fraco) em} \quad V, \tag{3.2.16}
$$

$$
v_m^1 \rightharpoonup v^1 \quad \text{(fraco) em} \quad H. \tag{3.2.17}
$$

Como $\{v_m\}$ é solução do problema (3.2.13) associado aos dados inciais $\{v_m^0, v_m^1\} \in V \times H$, temos que $E_{v_m}(t) = E_{v_m}(0) \leq L$. Portanto, temos que existe uma subsequência de $\{v_m\}$, denotada do mesmo modo, tal que

$$
\{v_m\} \;\; \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;V), \tag{3.2.18}
$$

$$
\{v'_m\} \;\; \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;H). \tag{3.2.19}
$$

De (3.2.18) e (3.2.19), concluímos que existem subsequências, denotadas do mesmo modo, tais que

$$v_m \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ (fraco estrela) em } L^\infty(0,T;V), \tag{3.2.20}$$

$$v'_m \overset{*}{\rightharpoonup} v' \text{ (fraco estrela) em } L^\infty(0,T;H). \tag{3.2.21}$$

Além disso, como $V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow H$ e a imersão $V \hookrightarrow H$ é compacta, e pondo

$$W = \{u \in L^2(0,T;V), u' \in L^2(0,T;H)\}$$

munido da topologia

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H)},$$

resulta que $\{v_m\}$ é limitada em W. Logo, pelo Teorema da Compacidade de Aubin-Lions, ver Teorema 1.23, temos que

$$v_m \to v \quad \text{(forte) em} \quad L^2(0,T,H). \tag{3.2.22}$$

Note que por (3.2.10) e (3.2.12), temos que

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\omega |v'_m(x,t)|^2 \, dxdt = 0. \tag{3.2.23}$$

Assim de (3.2.21) e (3.2.23), segue que

$$v'(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \omega\times]0,T[\tag{3.2.24}$$

e v é independente de t em ω.

Das convergências acima, temos que v é solução do problema (3.2.6) sujeito aos dados iniciais $\{v^0, v^1\} \in V \times H$.

Passando o limite em (3.2.13) obtemos, no sentido distribucional que

$$\begin{cases} v'' - \Delta v = 0 \quad \text{em } Q, \\ v'(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{3.2.25}$$

e para $w = v'$, de (3.2.25) concluímos que

$$\begin{cases} w'' - \Delta w = 0 \quad \text{em } Q, \\ w(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{3.2.26}$$

que implica pelo Teorema de Holmgren que $w = v' = 0$ em $\Omega\times]0,T[$. Assim, voltando em (3.2.25) temos que $\|v\|^2 = 0$ donde $v = 0$.

Das convergências obtidas acima, temos que

$$v'_{m_i} \rightharpoonup 0 \ \ \text{(fraco) em} \ \ L^2(\Omega\times]0,T[), \tag{3.2.27}$$

tendo sentido considerar a medida μ_i, a medida de defeito microlocal (m.d.m.) associada a $\{v'_{m_i}\}$, (garantida pelo Teorema 1.72 conforme Observação 1.74).

Considere

$$Pv_{m_i} := v''_{m_i} - \Delta v_{m_i} = 0 \ \ \text{em} \ \ Q, \tag{3.2.28}$$

onde P é operador D'Alambertiano. Portanto,

$$Pv_{m_i} \to 0 \ \ \text{em} \ \ L^2(\Omega\times]0,T[), \ \ \forall \ \ i = 1,\cdots,n \tag{3.2.29}$$

consequentemente,

$$\partial_t Pv_{m_i} \to 0 \ \ \text{em} \ \ H^{-1}_{loc}(\Omega\times]0,T[), \ \ \forall \ \ i = 1,\cdots,n. \tag{3.2.30}$$

Vamos provar a convergência (3.2.30) mais adiante.

Da convergência (3.2.30) concluímos dois fatos:

(i) O $\text{supp}(\mu_i)$ está contido no conjunto característico do operador de ondas $\{(t,x,\tau,\xi) \in \mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : \sigma_2(P) = 0\}$ onde $\sigma_2(P) = p(t,x,\tau,\xi)$ denota o símbolo principal de $P = \square$, (pelo Teorema 1.76).

(ii) O $\text{supp}(\mu_i)$ é, para cada $i \in \{1,\cdots,n\}$, uma união de curvas do tipo

$$t \in I \longmapsto m \pm (t) = \left(t, x(t), \pm\frac{1}{\sqrt{1+(x'(t))^2}}, \pm\frac{x'(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}} \right) \tag{3.2.31}$$

onde $t \in I \longmapsto x(t) \in \Omega$ é uma geodésica associada à métrica, (pelo Teorema 1.81 e Proposição 1.82).

Dessa forma, tem-se que μ_i se propaga ao longo do fluxo bicaracterístico do operador P de ondas, isto significa que se algum ponto $\omega_0 = (t_0,x_0,\tau_0,\xi_0)$ não pertence a $\text{supp}(\mu_i)$ então toda bicaracterística começando por ω_0 está fora do $\text{supp}(\mu_i)$.

Note que de (3.2.23) temos que $v'_{m_i} \to 0$ em $L^2(\omega\times]0,T[)$ o que implica (pela Observação 1.74) que $\mu_i = 0$ em $\omega\times]0,T[\ \ \forall i = 1,\cdots,n$ de modo que μ_i não apresenta medida de defeito em $\omega\times]0,T[$ e, desta forma, $\text{supp}(\mu_i) \subset (\Omega\backslash\omega)\times]0,T[$.

Contudo, como as geodésicas de Ω são linhas retas que tocam a fronteira $\partial\Omega$ de Ω e se refletem de acordo com as leis da ótica geométrica, então as bicaracterísticas $m \pm (t)$, acima mencionadas, tocam a fronteira lateral $\partial\Omega\times]0,T[$ do cilindro $\Omega\times]0,T[$. Dessa forma, $m \pm (t) \notin \text{supp}(\mu_\varphi)$. Assim, $\text{supp}(\mu_i) = \emptyset$, isto é, $\mu_i = 0$ em todo $\Omega\times]0,T[$.

Assim, por propagação, (pela Observação 1.74)

$$v'_{m_i} \to 0 \text{ (forte) em } L^2_{loc}(\Omega\times]0,T[) \tag{3.2.32}$$

e, como $v'_{m_i} \to 0$ (forte) em $L^2(\omega\times]0,T[)$, deduzimos que

$$v'_{m_i} \to 0 \text{ (forte) em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \forall i = 1,\cdots,n. \tag{3.2.33}$$

Seja $\psi \in C_0^\infty(0,T); 0 \le \psi \le 1$ e $\psi = 1$ em $]\epsilon, T-\epsilon[$.

Para concluir a demonstração, vamos multiplicar a equação $(3.2.13)_1$ por $v_m\psi(t)$ e integrando de zero a T, temos que

$$\int_0^T \psi(t)(v''_m(t), v_m(t))dt - \int_0^T \psi(t)(\Delta v_m(t), v_m(t))dt = 0. \tag{3.2.34}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\psi(t)(v'_{m_i}(t), v_{m_i}(t))_{L^2(\Omega)}\right] &= \psi(t)(v''_{m_i}(t), v_{m_i}(t))_{L^2(\Omega)} + \psi(t)(v'_{m_i}(t), v'_{m_i}(t))_{L^2(\Omega)} \\ &+ (v'_{m_i}(t), v_{m_i}(t))\psi'(t)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Integrando de 0 a T, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T \psi(t)(v''_{m_i}(t), v_{m_i}(t))_{L^2(\Omega)}dt &= -\int_0^T \psi(t)\int_\Omega \left|v'_{m_i}(x,t)\right|^2 dxdt \\ &- \int_0^T \psi'(t)(v'_{m_i}(t), v_{m_i}(t))_{L^2(\Omega)}dt,\end{aligned}$$

somando-se em i, temos

$$\int_0^T \psi(t)(v''_m(t), v_m(t))dt = -\int_0^T \psi(t)\left|v'_m(t)\right|_H^2 dt - \int_0^T \psi'(t)(v'_m(t), v_m(t))dt. \tag{3.2.35}$$

Além disso, pela Fórmula de Green e como $v_m \in V$, segue que

$$-\int_0^T \psi(t)(\Delta v_m(t), v_m(t))dt = \int_0^T \psi(t)(\nabla v_m(t), \nabla v_m(t))dt = \int_0^T \psi(t) \|v_m(t)\|_V^2 \, dt \quad (3.2.36)$$

Dessa forma, por (3.2.35) e (3.2.36), concluímos que

$$-\int_0^T \psi(t)|v_m'(t)|_H^2 dt - \int_0^T \psi'(t)(v_m'(t), v_m(t))dt + \int_0^T \psi(t) \|v_m(t)\|_V^2 \, dt = 0 \quad (3.2.37)$$

Por (3.2.22) e (3.2.37) ($v = 0$) e de (3.2.33), temos que

$$\int_\epsilon^{T-\epsilon} \|v_m(t)\|_V^2 \, dt \to 0 \ \ \forall \ \ \epsilon > 0. \quad (3.2.38)$$

Portanto, por (3.2.33) e (3.2.38) e com $\epsilon > 0$ arbitrário, temos que

$$\int_\epsilon^{T-\epsilon} |v_m'(t)|_H^2 \, dt + \int_\epsilon^{T-\epsilon} \|v_m(t)\|_V^2 \, dt \to 0.$$

Consequentemente,

$$\int_\epsilon^{T-\epsilon} E_{v_m}(t)dt \to 0 \ \ \forall \ \ t. \quad (3.2.39)$$

Como v_m é solução do problema (3.2.13) sujeito aos dados inciais $\{v_m^0, v_m^1\} \in V \times H$, temos que $E_{v_m}(t) = E_{v_m}(0)$. Então

$$(T - 2\epsilon)E_{v_m}(0) = \int_\epsilon^{T-\epsilon} E_{v_m}(0)dt = \int_\epsilon^{T-\epsilon} E_{v_m}(t)dt \to 0$$

que implica que $E_{v_m}(0) \to 0$ quando $m \to +\infty$ como desejávamos provar.

Vamos demonstrar agora a convergência (3.2.30), isto é, mostraremos que

$$\partial_t P v_{m_i} \to 0 \ \ \text{(forte) em} \ \ H^{-1}_{loc}(\Omega \times]0, T[). \quad (3.2.40)$$

Para tal, tome $y \in H_0^1(\Omega \times]0, T[) \equiv H_0^1(0, T; H_0^1(\Omega))$. Temos que

$$\begin{aligned}
&\left| \langle \partial_t P v_{m_i}, y \rangle_{H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Omega)),\ H_0^1(0,T;H_0^1(\Omega))} \right| \\
&= \left| \langle P v_{m_i}, \partial_t y \rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \right| \\
&\leq ||P v_{m_i}||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \, ||\partial_t y||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&\leq ||P v_{m_i}||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \, ||y||_{H_0^1(0,T;H_0^1(\Omega))}
\end{aligned} \quad (3.2.41)$$

onde a última desigualdade usamos que

$$||y||_{H_0^1(0,T;H_0^1(\Omega))} := ||y||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||\partial_t y||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

Assim, combinando (3.2.41) com o fato de $Pv_{m_i} \to 0$ (forte) em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, deduzimos que

$$\lim_{n\to+\infty} ||\partial_t Pv_{m_i}||_{H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Omega))} = 0. \tag{3.2.42}$$

Por outro lado, como $H^{-1}_{loc}(Q)$ representa o dual topológico de $H^1_{comp}(Q)$ e como

$$H^1_{comp}(Q) \hookrightarrow H^1_0(Q) \;\Rightarrow\; H^{-1}(Q) \hookrightarrow H^{-1}_{loc}(Q). \tag{3.2.43}$$

Dessa forma, por (3.2.42) e (3.2.43) concluímos que

$$\partial_t Pv_{m_i} \to 0 \text{ forte em } H^{-1}_{loc}(Q), \tag{3.2.44}$$

e, portanto, $\partial_t Pv_{m_i} \to 0$ (forte) em $H^{-1}_{loc}(\Omega\times]0,T[)$. ■

Capítulo 4

Taxa de Decaimento Uniforme para Dois Sistemas Acoplados Semilineares da Onda

Este capítulo foi realizado em parceria com Marcelo Moreira Cavalcanti, Victor Hugo Gonzalez Martinez e Janaina Pedroso Zanchetta.

Neste capítulo vamos investigar a estabilidade assintótica de dois sistemas acoplados semilineares da onda postos em um meio não homogêneo e sujeitos a uma dissipação não linear localmente distribuída. A saber

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(u_t) - \gamma(x)v_t = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,\infty[, \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla v] + h(v) + b(x)g(v_t) + \gamma(x)u_t = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,\infty[, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,\infty[, \\ u(0) = u^0, \ u_t(0) = u^1 \ \text{ em } \Omega, \\ v(0) = v^0, \ v_t(0) = v^1 \ \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(u_t) + \delta v = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,\infty[, \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla v] + h(v) + b(x)g(v_t) + \delta u = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,\infty[, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,\infty[, \\ u(0) = u^0, \ u_t(0) = u^1 \ \text{ em } \Omega, \\ v(0) = v^0, \ v_t(0) = v^1 \ \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio do $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$, com fronteira suave $\partial\Omega$.

O problema de estabilização de sistemas acoplados tem sido estudado por vários autores, como [3], [4], [5], [27] e [58]. Alabau et al. [4] estudaram a estabilização interna indireta do sistema fracamente acoplado onde a dissipação é efetiva em todo o domínio. Em [5] foi considerado o decaimento da energia do sistema hiperbólico com acoplamento através das velocidades com dissipação, o interesse dos autores estava nas propriedades assintóticas das soluções deste sistema no caso quando a dissipação é não-linear indireta, isto é, quando apenas uma equação do sistema tem uma dissipação não linear. Charles [27] considerou um sistema acoplado da onda em um domínio limitado unidimensional com dissipação não linear localmente localizada em ambas equações. Sob certas condições impostas sobre o subconjunto onde termo de dissipação é efetiva, Kapitonov [58] provou a estabilização uniforme das soluções de um par de sistemas acoplados por suas velocidades.

O modelo proposto neste trabalho, é uma extensão para sistemas da equação introduzida por Cavalcanti et al. em [7], dada por

$$\rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(u_t) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty),$$

em uma variedade Riemanniana $(\Omega, \mathbf{g})$ compacta conexa orientável n-dimensional com fronteira suave. Os autores contribuíram para extensão do entendimento acerca do comportamento assintótico da energia associado à equação da onda na presença do termo não linear $f(u)$ e da dissipação não linear $g(u_t)$ efetiva em uma região satisfazendo a condição geométrica de controle e uma pequena vizinhança da fronteira. Inspirados nos trabalhos de [10] e [54] os autores provaram que a energia do problema decai uniformemente para zero desde que os dados iniciais sejam tomados em conjuntos limitados no espaço fase.

4.1 Sistema I

Considere o seguinte sistema acoplado

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(u_t) - \gamma(x)v_t = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla v] + h(v) + b(x)g(v_t) + \gamma(x)u_t = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times]0,\infty[, \\ u(0) = u^0, \ u_t(0) = u^1 \quad \text{em } \Omega, \\ v(0) = v^0, \ v_t(0) = v^1 \quad \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira suave $\partial\Omega$, $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $k_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq d$ são funções $C^\infty(\Omega)$ tais que para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2, \tag{4.1.2}$$

onde $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$ são constantes positivas e $K(x) = (k_{ij})_{i,j}$ é uma matriz simétrica positiva definida. Vamos denotar por $\omega \subset \Omega$ um conjunto aberto dado pela interseção de uma vizinhança aberta da fronteira $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^n$ e que controla geometricamente a equação (4.1.1), em um sentido a ser precisado adiante.

Hipótese 4.1 • *Os termos não lineares $f, h \in C^2(\mathbb{R})$ são funções reais e satisfazem*

$$\begin{aligned} &f(0) = 0, \quad |f^j(s)| \leq k_0(1 + |s|)^{p-j}, \ j = 1, 2, \ \forall s \in \mathbb{R}, \\ &h(0) = 0, \quad |h^j(s)| \leq k_0(1 + |s|)^{p-j}, \ j = 1, 2, \ \forall s \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

que implica, em particular, que para algum $C > 0$,

$$\begin{aligned} &|f(r) - f(s)| \leq C\left(1 + |r|^{p-1} + |s|^{p-1}\right)|r - s|, \ \forall r, s \in \mathbb{R}, \\ &|h(r) - h(s)| \leq C\left(1 + |r|^{p-1} + |s|^{p-1}\right)|r - s|, \ \forall r, s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

• *Com respectivas primitivas $F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$ e $H(s) = \int_0^s h(\tau)d\tau$ verificando*

$$\begin{aligned} &-\frac{\beta}{2}|s|^2 \leq F(s) \leq f(s)s + \frac{\beta}{2}|s|^2, \ \forall s \in \mathbb{R}, \\ &-\frac{\beta}{2}|s|^2 \leq H(s) \leq h(s)s + \frac{\beta}{2}|s|^2, \ \forall s \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

onde $k_0 > 0$, $\beta \in [0, \lambda_1)$, onde $\lambda_1 > 0$ é um autovalor principal positivo do correspondente problema linear

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(K(x)\nabla w) = \lambda w \quad em \quad \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4.1.6}$$

e

$$p \geq 1 \quad para \quad n = 2, \quad e \quad 1 \leq p < \frac{n+2}{n-2} \quad para \quad n \geq 3.$$

Hipótese 4.2 *A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, monótona crescente e satisfaz as seguintes condições*

$$\begin{cases} g(s)s > 0 \ para\ todo\ s \neq 0; \\ k|s| \leq |g(s)| \leq K|s| \ para\ todo\ |s| \geq 1 \end{cases} \tag{4.1.7}$$

onde k, K são constantes positivas.

Hipótese 4.3 *As funções reais não negativas $a = a(\cdot)$ e $b = b(\cdot)$, responsáveis pelo efeito dissipativo localizado, satisfazem as seguintes condições respectivamente:*

$$a \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega});\ a(x) \geq a_0 > 0 \ \text{em}\ \omega \subset \Omega. \tag{4.1.8}$$

$$b \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega});\ b(x) \geq b_0 > 0 \ \text{em}\ \omega \subset \Omega. \tag{4.1.9}$$

Hipótese 4.4 *A função $\gamma \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e satisfaz*

$$0 \leq \gamma(x) \leq a(x) \ \text{e}\ 0 \leq \gamma(x) \leq b(x) \ \text{q.s. em}\ \Omega. \tag{4.1.10}$$

Vamos assumir a Condição Geométrica de Controle:

Hipótese 4.5 *ω controla geometricamente Ω, isto é, existe $T_0 > 0$, tal que, para toda geodésica da métrica definida pela matriz $G(x) = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$ viajando com velocidade constante igual a 1 e com início em $t = 0$, entra na região ω em um tempo $t < T_0$.*

Hipótese 4.6 *Para todo $T > 0$, a única solução v pertencente ao espaço $C(]0,T[;L^2(\Omega)) \cap C(]0,T[,H^{-1}(\Omega))$, para o sistema*

$$\begin{cases} v_{tt} - div[(K/\rho)\nabla v] + V(x,t)v = 0 \ \text{em}\ \Omega \times (0,T), \\ v = 0 \ \text{sobre}\ \omega, \end{cases} \tag{4.1.11}$$

onde $V(x,t) \in L^{\frac{n+1}{2}}(]0,T[,L^{\frac{n+1}{2}}(\Omega))$, é a trivial $v \equiv 0$.

Observação 4.7 *É importante observar que a Hipótese 4.5 não é obviamente cumprida para todas as matrizes $G = (K/\rho)^{-1}$. Podemos ver em [7] exemplos em que esta situação ocorre. Acontece facilmente quando $G(x) = I_d$, neste caso as geodésicas são linhas retas e, necessariamente, elas vão encontrar a região ω.*

A Hipótese 4.5 é a chamada de Condição Geométrica de Controle (C.G.C.). É sabido que a C.G.C é uma condição necessária e suficiente para a estabilização e controle da equação da onda linear (veja [10], [15], [24], [23], [30], [49]).

Observação 4.8 *Observe que para $V(t,x) \in L^\infty(]0,T[, L^n(\Omega))$ e considerando $G(x) = I_d$, a Hipótese 4.6 é satisfeita pelo trabalho de Ruiz [53]. De acordo com Koch e Tataru [59] (veja Teorema 15), no caso mais geral onde $V \in L^{\frac{n+1}{2}}(]0,T[, L^{\frac{n+1}{2}}(\Omega))$ e G pode não ser a identidade, o princípio de continuação vale. Consequentemente, sob condições específicas em [59], a Hipótese 4.6 cumpre-se.*

Vamos provar a existência e unicidade de soluções fracas para o problema (4.1.1) e, além disso, que estas soluções decaem uniformemente para zero, isto é, denotando $E(t) = E_{u,v}(t)$ a energia associada ao problema (4.1.1), onde

$$\begin{aligned} E(t) := \int_\Omega & \rho(x)|u_t(x,t)|^2 + \rho(x)|v_t(x,t)|^2 + \nabla u(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla u(x,t) \\ & + \nabla v(x,t)^\top \cdot K(x) \cdot \nabla v(x,t) + F(u(x,t)) + H(v(x,t))dx \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

$F(\lambda) = \int_0^\lambda f(s)\,ds$ e $H(\lambda) = \int_0^\lambda h(s)\,ds$, tem-se

$$E(t) \le S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \quad \forall t > T_0, \tag{4.1.13}$$

com $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = 0$, onde o semigrupo de contração $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \tag{4.1.14}$$

e q é dado em (4.1.177) para toda solução fraca do problema (4.1.1) desde que $\{u^0, v^0, u^1, v^1\}$ sejam tomados em conjuntos limitados de $(H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2$.

4.1.1 Resultados Prévios

Em vez de estudar o problema específico (4.1.1), vamos considerar o problema auxiliar, que será descrito na sequência. Para este propósito, vamos induzir em Ω uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}$ tal que $(\Omega, \mathbf{g})$ é uma variedade conexa, compacta, orientável n-dimensional com métrica $\mathbf{g}$ de classe C^∞ e fronteira suave $\partial\Omega$.

Vamos denotar $\Delta_{\mathbf{g}}$ o operador Laplace-Beltrami em $(\Omega, \mathbf{g})$ e $\nabla_{\mathbf{g}}$ sua conexão

Riemanniana. Consideremos o seguinte sistema acoplado:

$$
\begin{cases}
u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u + f(u) + a(x)g(u_t) - \gamma(x)v_t = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[,\\
v_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} v + h(v) + b(x)g(v_t) + \gamma(x)u_t = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[,\\
u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times]0,\infty[,\\
u(0) = u^0,\ u_t(0) = u^1 \quad \text{em } \Omega,\\
v(0) = v^0,\ v_t(0) = v^1 \quad \text{em } \Omega.
\end{cases}
\tag{4.1.15}
$$

A energia associada ao problema (4.1.15) é dada por

$$
\begin{aligned}
E(t) := &\int_\Omega \frac{1}{2}|u_t(x,t)|^2 + \frac{1}{2}|v_t(x,t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_{\mathbf{g}} u(x,t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_{\mathbf{g}} v(x,t)|^2 dx\\
&+ \int_\Omega F(u(x,t))dx + \int_\Omega H(v(x,t))dx.
\end{aligned}
\tag{4.1.16}
$$

Procederemos formalmente. Multiplicando a primeira equação do problema (4.1.15) por u_t e a segunda equação de (4.1.15) por v_t, tem-se

$$
\begin{cases}
(u_{tt}, u_t) + ((u, u_t)) + (f(u), u_t) + (a(x)g(u_t), u_t) - (\gamma(x)v_t, u_t) = 0\\
(v_{tt}, v_t) + ((v, v_t)) + (h(v), v_t) + (b(x)g(v_t), v_t) + (\gamma(x)u_t, v_t) = 0,
\end{cases}
$$

donde

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left[\|u_t(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|^2_{L^2}\right] + \displaystyle\int_\Omega f(u)u_t dx - \int_\Omega \gamma(x)v_t u_t dx = -\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx.\\
\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left[\|v_t(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|^2_{L^2}\right] + \displaystyle\int_\Omega h(v)v_t dx + \int_\Omega \gamma(x)u_t v_t dx = -\int_\Omega b(x)g(v_t)v_t dx.
\end{cases}
\tag{4.1.17}
$$

Como $[-\int_\Omega \gamma(x)v_t.u_t dx + \int_\Omega \gamma(x)u_t.v_t dx] = 0$, então somando as equações em (4.1.17) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_t(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|^2_{L^2} + \|v_t(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|^2_{L^2} + 2\int_\Omega F(u)dx + 2\int_\Omega H(v)dx\right]\\
= -\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx - \int_\Omega b(x)g(v_t)v_t dx
\end{aligned}
\tag{4.1.18}
$$

onde $F(\lambda) = \int_0^\lambda f(\tau)d\tau$ e $H(\lambda) = \int_0^\lambda h(\tau)d\tau$

Segue de (4.1.18), do fato de $a(x)$ e $b(x)$ serem funções não negativas e, pela Hipótese 4.2, que

$$
\frac{d}{dt}E(t) \leq 0. \tag{4.1.19}
$$

Além disso, obtemos a seguinte identidade da energia:

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t + b(x)g(v_t)v_t dxdt, \ \forall\ 0 \le t_1 \le t_2 < \infty. \tag{4.1.20}$$

Inspirados em [7], voltamos ao nosso problema original (4.1.1) tendo em mente que $\rho \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha_0 \le \rho(x) \le \beta_0$. Fixe um sistema de coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$ sobre $(\Omega, \mathbf{g})$, com $\mathbf{g}$ sendo a métrica Riemanniana definida pela matriz $g_{ij} = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$ cuja inversa é denotada por $(g_{ij})^{-1} = g^{ij}$ e defina

$$\rho = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

O operador Laplace-Beltrami neste sistema de coordenadas é dado por

$$\Delta_{\mathbf{g}} u = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det g_{ij}}\, g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{\rho(x)}\mathrm{div}(K(x)\nabla u)$$

onde ∇ é o gradiente usual corresponde à métrica Euclidiana.

Consequentemente,

$$\rho(x)\partial_t^2 u - \mathrm{div}[K(x)\nabla u] = 0 \ \Leftrightarrow\ \partial_t^2 u - \Delta_{\mathbf{g}} u = 0.$$

Assim, analisar o problema (4.1.1) é equivalente a analisar o problema (4.1.15).

4.1.2 Boa Colocação

Observe primeiramente, que pelos Teoremas de Imersão (ver Teorema 1.8) temos

$$\begin{aligned} &H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall\ q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right] \ \text{ para } \ n \ge 3. \\ &H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall\ q \in [2, +\infty[\ \text{ para } \ n = 2. \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Considere o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = (H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2$$

munido do produto interno

$$\langle U, V\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega (\nabla_{\mathbf{g}} u_1 \nabla_{\mathbf{g}} v_1 + \nabla_{\mathbf{g}} u_2 \nabla_{\mathbf{g}} v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4) dx$$

onde $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^\top$ e $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)^\top$ e $\top$ denota o transposto.

Denotando $\widetilde{u} = u_t,\ \widetilde{v} = v_t$, então para $W(t) = (u, v, \widetilde{u}, \widetilde{v})^\top$ o problema (4.1.15) pode ser reescrito como um problema de primeira ordem como segue:

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dt}(t) + \mathcal{A}W(t) = \mathcal{F}(W(t)) \\ W(0) = W^0 \end{cases} \tag{4.1.22}$$

onde $W^0 = (u^0, v^0, u^1, v^1)$ e o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dado por $\mathcal{A} = A + B$ com operadores componentes definidos por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ -\Delta_{\mathbf{g}} & 0 & 0 & -\gamma(x)I(\cdot) \\ 0 & -\Delta_{\mathbf{g}} & \gamma(x)I(\cdot) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1.23}$$

onde $D(A) = \{(l, w, z, y) \in \mathcal{H}; \Delta_{\mathbf{g}} l, \Delta_{\mathbf{g}} w \in L^2(\Omega)\} = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$ e o operador $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(x)g(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b(x)g(\cdot) \end{pmatrix}. \tag{4.1.24}$$

Como $D(A) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$, $D(B) = \mathcal{H}$ segue que $D(\mathcal{A}) = D(A)$.

O operador $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f(\cdot) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h(\cdot) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1.25}$$

Vamos provar agora, a boa colocação do problema (4.1.22) que assegura a boa colocação para o problema (4.1.1) . Primeiramente provaremos para o caso $1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}$. Depois provaremos para o caso $\frac{n}{n-2} < p < \frac{n+2}{n-2}$.

4.1.3 Caso Semilinear $(1 \leq p \leq \frac{n}{n-2})$

Teorema 4.9 *Suponha que as hipóteses dos termos não lineares f, h, especificados em 4.1, sejam satisfeitas com a restrição $p \geq 1$ se $p = 2$ e $1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}$ se $n \geq 3$ e os dados* *iniciais* $(u^0, v^0, u^1, v^1) \in \mathcal{H}$. *Então o problema* (4.1.22) *possui uma única solução generalizada* $(u, v, \widetilde{u}, \widetilde{v}) \in C([0,T];\mathcal{H})$. *Além disso, se* $(u^0, v^0, u^1, v^1) \in D(\mathcal{A})$, *então a solução é regular.*

Demonstração: A fim de mostrar a existência e unicidade, vamos usar o Teorema 1.39, para tal, temos que mostrar que $\mathcal{A} = A + B$ é um operador maximal monótono e que $\mathcal{F}$ é um operador contínuo localmente Lipschitz. Primeiramente observe que o operador $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por (4.1.23) é linear e é maximal monótono. Que A é linear, é trivial. Mostremos que:

$\vdash$: A é monótono

Seja $U = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in D(A)$. Então $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $u_3, u_4 \in H_0^1(\Omega)$. Note que

$$\begin{aligned}
\langle U, AU \rangle &= (U, AU)_{\mathcal{H}} \\
&= ((u_1, u_2, u_3, u_4), (-u_3, -u_4, -\Delta_{\mathbf{g}} u_1 - \gamma(x) u_4, -\Delta_{\mathbf{g}} u_2 + \gamma(x) u_3)_{\mathcal{H}} \\
&= -\int_\Omega \nabla_{\mathbf{g}} u_1 \nabla_{\mathbf{g}} u_3 dx - \int_\Omega \nabla_{\mathbf{g}} u_2 \nabla_{\mathbf{g}} u_4 dx + \int_\Omega u_3(-\Delta_{\mathbf{g}} u_1) dx + \int_\Omega u_4(-\Delta_{\mathbf{g}} u_2) dx \\
&- \int_\Omega u_3 \gamma(x) u_4 dx + \int_\Omega u_4 \gamma(x) u_3 dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, A é monótono.

$\vdash$: A é maximal

A fim de provar a maximalidade de A, é suficiente provar que $Im(I + A) = \mathcal{H}$, isto é, dado $V = (l_0, w_0, z_0, y_0) \in \mathcal{H}$, temos que mostrar que existe $W = (l, w, z, y) \in D(A)$ tal que $W + AW = V$, ou seja,

$$\begin{cases} l - z = l_0 \in H_0^1(\Omega), \\ w - y = w_0 \in H_0^1(\Omega), \\ z - \Delta_{\mathbf{g}} l - \gamma(x) y = z_0 \in L^2(\Omega), \\ y - \Delta_{\mathbf{g}} w + \gamma(x) z = y_0 \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{4.1.26}$$

De (4.1.26) obtemos

$$z = l - l_0 \text{ e } y = w - w_0. \tag{4.1.27}$$

Assim, substituindo (4.1.27) nas duas últimas equações de (4.1.26), obtemos

$$\begin{cases} l - \Delta_{\mathbf{g}} l - \gamma(x) w = -\gamma(x) w_0 + l_0 + z_0 = M_0 \in L^2(\Omega) \\ w - \Delta_{\mathbf{g}} w + \gamma(x) l = \gamma(x) l_0 + w_0 + y_0 = M_1 \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{4.1.28}$$

Defina

$$
\begin{array}{rcl}
b \ : \ (H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
((l,w),(\varphi,\psi)) & \longmapsto & b((l,w),(\varphi,\psi))
\end{array}
$$

onde b é dada por

$$
\begin{aligned}
b((l,w),(\varphi,\psi)) \;=\; & \int_\Omega \nabla_{\mathbf{g}} l \nabla_{\mathbf{g}} \varphi dx + \int_\Omega \nabla_{\mathbf{g}} w \nabla_{\mathbf{g}} \psi dx + \int_\Omega l\varphi dx + \int_\Omega w\psi dx \\
- & \int_\Omega \gamma(x) w\varphi dx + \int_\Omega \gamma(x) l\psi dx.
\end{aligned}
$$

Observe que b é uma forma bilinear, contínua e coerciva em $(H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))^2$. De fato, que b é bilinear é trivial. Vejamos que b é contínua e coerciva.

Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$
\begin{aligned}
|b((l,w),(\varphi,\psi))| \leq & \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{g}} l||\nabla_{\mathbf{g}} \varphi| dx + \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{g}} w||\nabla_{\mathbf{g}} \psi| dx + \int_\Omega |l||\varphi| dx + \int_\Omega |w||\psi| dx \\
& + \int_\Omega |\gamma(x)|w||\varphi| dx + \int_\Omega |\gamma(x)|l||\psi| dx \\
& \leq \|\nabla_{\mathbf{g}} l\|_{L^2}\|\nabla_{\mathbf{g}}\varphi\|_{L^2} + \|\nabla_{\mathbf{g}} w\|_{L^2}\|\nabla_{\mathbf{g}}\psi\|_{L^2} + \|l\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \|w\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \\
& + \|\gamma\|_\infty \|w\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} + \|\gamma\|_\infty \|l\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2} \\
& = (*).
\end{aligned}
$$

Assim, pela imersão de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos que

$$
\begin{aligned}
(*) \leq & \, C\big(\|l\|_{H_0^1}\|\varphi\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1}\|\psi\|_{H_0^1} + \|l\|_{H_0^1}\|\varphi\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1}\|\psi\|_{H_0^1} \\
& + \|w\|_{H_0^1}\|\varphi\|_{H_0^1} + \|l\|_{H_0^1}\|\psi\|_{H_0^1}\big) \\
\leq & \, C\big(\|(l,w)\|_{(H_0^1)^2} \cdot \|(\varphi,\psi)\|_{(H_0^1)^2}\big).
\end{aligned} \tag{4.1.29}
$$

Portanto,

$$
|b((l,w),(\varphi,\psi))| \leq C\big(\|(l,w)\|_{(H_0^1)^2} \cdot \|(\varphi,\psi)\|_{(H_0^1)^2}\big)
$$

donde b é contínua.

Além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
b((l,w),(l,w)) &= \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{g}} l|^2 dx + \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{g}} w|^2 dx + \int_\Omega |l|^2 dx + \int_\Omega |w|^2 dx \\
&\quad \underbrace{- \int_\Omega \gamma(x) w l dx + \int_\Omega \gamma(x) l w dx}_{=0} \\
&\geq \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{g}} l|^2 dx + \int_\Omega |\nabla_{\mathbf{g}} w|^2 dx \\
&= \|\nabla_{\mathbf{g}} l\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}} w\|_{L^2}^2 \\
&= \|l\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_0^1}^2 \\
&= \|(l,w)\|_{(H_0^1)^2}^2
\end{aligned}
\tag{4.1.30}
$$

e, portanto, b é coerciva.

Dessa forma, b é uma forma bilinear, contínua e coerciva em $(H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega))^2$ assim, pela imersão $(H_0^1(\Omega))^2 \hookrightarrow (L^2(\Omega))^2$ e como $(H_0^1(\Omega))^2$ é denso em $(L^2(\Omega))^2$ segue que o operador

$$
\begin{array}{rccc}
\mathbb{B} : & D(\mathbb{B}) \subset (H_0^1(\Omega))^2 & \longrightarrow & (L^2(\Omega))^2 \\
& (l,w) & \longmapsto & (l - \Delta_{\mathbf{g}} l - \gamma(x) w, w - \Delta_{\mathbf{g}} w + \gamma(x) l)
\end{array}
$$

onde $D(\mathbb{B}) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2$, é definido pela terna $\{(H_0^1(\Omega))^2, (L^2(\Omega))^2, b((l,w),(\varphi,\psi))\}$. Além disso, pelo Teorema de Lax-Milgran, podemos estender $\mathbb{B} : (H_0^1(\Omega))^2 \to (H^{-1}(\Omega))^2$ e tal extensão é um isomorfismo. Dessa forma, dado $(M_0, M_1) \in (L^2(\Omega))^2 \subset (H^{-1}(\Omega))^2$ existe um único $(l,w) \in (H_0^1(\Omega))^2$ tal que $\mathbb{B}(l,w) = (M_0, M_1)$. Assim, (4.1.28) possui única solução $(l,w) \in (H_0^1(\Omega))^2 \subset (L^2(\Omega))^2$. Ou seja,

$$
\begin{cases}
l - \Delta_{\mathbf{g}} l - \gamma(x) w = M_0 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega) \\
w - \Delta_{\mathbf{g}} w + \gamma(x) l = M_1 & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega).
\end{cases}
$$

Como $l, M_0, \gamma(x) w \in L^2(\Omega)$ segue que $\Delta_{\mathbf{g}} l \in L^2(\Omega)$ donde, pela regularidade elíptica, $l \in H^2(\Omega)$. Da mesma forma, como $w, M_1, \gamma(x) l \in L^2(\Omega)$ segue que $\Delta_{\mathbf{g}} w \in L^2(\Omega)$ donde, pela regularidade elíptica, $w \in H^2(\Omega)$. Além disso, em (4.1.27) $z = l - l_0 \in L^2(\Omega)$ e, da mesma forma, $y = w - w_0 \in L^2(\Omega)$.

Sendo assim, o sistema (4.1.26) tem solução única $(l, w, z, y) \in D(A)$ e, portanto, A é maximal monótono em $\mathcal{H}$.

Mostremos agora que o operador B é monótono, hemicontínuo e limitado. Para tal, sejam $U=(u_1,u_2,u_3,u_4), V=(v_1,v_2,v_3,v_4)\in D(B)$.

$\vdash$: B é monótono

$$\begin{aligned}
&\langle BU-BV, U-V\rangle = (BU-BV,U-V)_{\mathcal{H}}\\
&= ((0,0,a(x)(g(u_3)-g(v_3)), b(x)(g(u_4)-g(v_4))), (u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3,u_4-v_4))_{\mathcal{H}}\\
&= \int_\Omega a(x)(g(u_3)-g(v_3))(u_3-v_3)dx + \int_\Omega b(x)(g(u_4)-g(v_4))(u_4-v_4)dx \geq 0,
\end{aligned}$$

pois $a(x)$ e $b(x)$ são não negativas e g é uma função monótona crescente, por hipótese. Portanto, B é monótono.

$\vdash$: B é hemicontínuo

Seja $t_m\subset\mathbb{R}$ uma sequência tal que $t_m\to 0$ quando $m\to\infty$. Note que para todo $W=(w_1,w_2,w_3,w_4)\in\mathcal{H}$ temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\langle B(U+t_mV),W\rangle = \lim_{m\to\infty}(B(U+t_mV),W)_{\mathcal{H}}\\
&= \lim_{m\to\infty}((0,0,a(x)g(u_3+t_mv_3), b(x)g(u_4+t_mv_4)), (w_1,w_2,w_3,w_4))_{\mathcal{H}}\\
&= \lim_{m\to\infty}\left[\int_\Omega a(x)(g(u_3(x)+t_mv_3(x))w_3(x)dx + \int_\Omega b(x)(g(u_4(x)+t_mv_4(x))w_4(x)dx\right].
\end{aligned}$$

Seja $f_m = a(x)g(u_3(x)+t_mv_3(x))w_3(x)$.

Assim se $|u_3(x)+t_mv_3(x)|\geq 1$ temos pela Hipótese 4.2 que

$$\begin{aligned}
|f_m(x)| &= |a(x)g(u_3(x)+t_mv_3(x))||w_3(x)|\\
&\leq K\|a\|_\infty |u_3(x)+t_mv_3(x)||w_3(x)|\\
&\leq \tilde{K}[|u_3(x)||w_3(x)| + \tilde{\tilde{K}}|v_3(x)||w_3(x)|]\\
&\leq C|u_3(x)||w_3(x)| + \tilde{C}|v_3(x)||w_3(x)|
\end{aligned}$$

quase sempre em Ω, onde $\tilde{\tilde{K}}$ é tal que $|t_m|\leq\tilde{\tilde{K}}$. Como $u_3(x),v_3(x),w_3(x)\in L^2(\Omega)$, então $f_m\in L^1(\Omega)$, para todo $m\in\mathbb{N}$.

Além disso, definindo

$$h := C|u_3(x)||w_3(x)| + \tilde{C}|v_3(x)||w_3(x)|$$

segue que $h \in L^1(\Omega)$ e $|f_m| \leq h(x)$ quase sempre em Ω.

Na sequência, devido a continuidade da g temos que

$$\lim_{m\to\infty} g(u_3(x) + t_m v_3(x))w_3(x) = g(u_3(x))w_3(x).$$

Dessa forma, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega a(x)g(u_3(x) + t_m v_3(x))w_3(x)dx = \int_\Omega a(x)g(u_3(x))w_3(x)dx.$$

Analogamente obtemos

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega b(x)g(u_4(x) + t_m v_4(x))w_4(x)dx = \int_\Omega b(x)g(u_4(x))w_4(x)dx.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \langle B(U + t_m V), W\rangle &= \int_\Omega a(x)g(u_3(x))w_3(x)dx + \int_\Omega b(x)g(u_4(x))w_4(x)dx \\ &= \langle BU, W\rangle\end{aligned} \tag{4.1.31}$$

e, portanto, B é hemicontínuo.

É evidente que o operador B transforma subconjuntos limitados em subconjuntos limitados, concluindo-se a prova da afirmação.

Dessa forma, sendo A linear e maximal monótono, B monótono, hemicontínuo e leva conjuntos limitados em conjuntos limitados, segue da Proposição 1.35 que $\mathcal{A} = A + B$ é maximal monótono.

Vamos mostrar agora que o operador não linear $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado em (4.1.25) é um operador contínuo e localmente Lipschitz.

$\vdash$: $\mathcal{F}$ está bem definida.

Com efeito, note que se $v \in H_0^1(\Omega)$ então $f(v), h(v) \in L^2(\Omega)$. De fato, por (4.1.4) e como $f(0) = 0$ temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(v)|^2 dx &\leq C \int_\Omega [(1 + |v|^{p-1})|v|]^2 dx \\ &\leq C\left(\int_\Omega |v|^2 dx + \int_\Omega (|v|^{2(p-1)})|v|^2 dx\right).\end{aligned} \tag{4.1.32}$$

Pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega |v|^2 dx = \|v\|_{L^2}^2 \leq C\|v\|_{H_0^1}^2 < +\infty. \tag{4.1.33}$$

Por outro lado, como $1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}$ então $2 \leq 2p \leq \frac{2n}{n-2}$, então por (4.1.21) temos que vale a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ donde segue que

$$\int_\Omega (|v|^{2(p-1)})|v|^2 dx = \int_\Omega |v|^{2p} dx = \|v\|_{L^{2p}}^{2p} \leq C\|v\|_{H_0^1}^{2p} < +\infty. \tag{4.1.34}$$

Portanto, por (4.1.32), (4.1.33) e (4.1.34) temos que $f(v) \in L^2(\Omega)$. Analogamente, $h(v) \in L^2(\Omega)$.

Dessa forma, dado $U = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathcal{H}$ temos

$$\|\mathcal{F}U\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_\Omega |f(u_1)|^2 dx + \int_\Omega |h(u_2)|^2 dx < +\infty.$$

Mostraremos agora que $\mathcal{F}$ é localmente Lipschitz, para tal, considere D um conjunto limitado em $\mathcal{H}$ tal que

$$U = (u_1, u_2, u_3, u_4),\ V = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in D. \tag{4.1.35}$$

Temos que

$$\mathcal{F}U - \mathcal{F}V = (0, 0, -f(u_1) + f(v_1), -h(u_2) + h(v_2))^\top,$$

assim

$$\|\mathcal{F}U - \mathcal{F}V\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|f(u_1) - f(v_1)\|_{L^2}^2 + \|h(u_2) - h(v_2)\|_{L^2}^2. \tag{4.1.36}$$

Observe que por (4.1.4) temos que

$$\begin{aligned}
\|f(u_1) - f(v_1)\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |f(u_1) - f(v_1)|^2 dx \\
&\leq C\int_\Omega [(1 + |u_1|^{p-1} + |v_1|^{p-1})|u_1 - v_1|]^2 dx \\
&\leq C\int_\Omega (1 + |u_1|^{2(p-1)} + |v_1|^{2(p-1)})|u_1 - v_1|^2 dx \\
&= C\left(\int_\Omega |u_1 - v_1|^2 dx + \int_\Omega |u_1|^{2(p-1)}|u_1 - v_1|^2 dx + \int_\Omega |v_1|^{2(p-1)}|u_1 - v_1|^2 dx\right) \\
&= C\left(\|u_1 - v_1\|_{L^2}^2 + \int_\Omega |u_1|^{2(p-1)}|u_1 - v_1|^2 dx + \int_\Omega |v_1|^{2(p-1)}|u_1 - v_1|^2 dx\right).
\end{aligned} \tag{4.1.37}$$

Usando a desigualdade de Hölder para os conjugados $\frac{1}{\frac{p}{p-1}}$ e $\frac{1}{p}$ e pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_1|^{2(p-1)}|u_1 - v_1|^2 dx &\leq \left(\int_\Omega \left[|u_1|^{2(p-1)} \right]^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |u_1 - v_1|^{2p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u_1\|_{L^{2p}}^{2(p-1)} \|u_1 - v_1\|_{L^{2p}}^2 \\ &\leq C\|u_1\|_{H_0^1}^{2(p-1)} \|u_1 - v_1\|_{H_0^1}^2.\end{aligned} \tag{4.1.38}$$

Além disso, de (4.1.35) temos que $\|u_1\|_{H_0^1}^2 \leq \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R, (R > 0)$, então segue que

$$\int_\Omega |u_1|^{2(p-1)}|u_1 - v_1|^2 dx \leq \widetilde{C} R^{2(p-1)} \|u_1 - v_1\|_{H_0^1}^2. \tag{4.1.39}$$

Analogamente, temos que

$$\int_\Omega |v_1|^{2(p-1)}|u_1 - v_1|^2 dx \leq \widetilde{C} R^{2(p-1)} \|u_1 - v_1\|_{H_0^1}^2. \tag{4.1.40}$$

Portanto, de (4.1.37), (4.1.39) e (4.1.40) temos que

$$\|f(u_1) - f(v_1)\|_{L^2}^2 \leq C(R)\|u_1 - v_1\|_{H_0^1}^2. \tag{4.1.41}$$

Da mesma forma, tem-se

$$\|h(u_2) - h(v_2)\|_{L^2}^2 \leq C(R)\|u_2 - v_2\|_{H_0^1}^2. \tag{4.1.42}$$

Assim, voltando em (4.1.36), temos que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}U - \mathcal{F}V\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \widetilde{C}(\|u_1 - v_1\|_{H^1}^2 + \|u_2 - v_2\|_{H^1}^2) \\ &\leq \widetilde{C}\|U - V\|_{\mathcal{H}}^2.\end{aligned}$$

Dessa forma, sendo $\mathcal{A}$ um operador maximal monótono, $\mathcal{F}$ um operador contínuo localmente Lipschitz, então pelo Teorema 1.39, o problema de Cauchy (4.1.22) tem uma única solução generalizada $W = (u, v, u_t, v_t)$ no intervalo $[0, T_{max}[$. Além disso, se $W^0 \in D(\mathcal{A})$, a solução é regular.

Vejamos agora que $T_{max} = +\infty$. De fato, se, por absurdo, $T_{max} < +\infty$, então, pelo Teorema 1.39,

$$\lim_{t \nearrow T_{max}} \|W(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty. \tag{4.1.43}$$

Como a energia $E(t)$ definida em (4.1.16) é não crescente, temos que $E(t) \leq E(0)$ $\forall\, t \in [0, T_{max}[$. Por outro lado, por (4.1.5), deduzimos que

$$\begin{aligned}
E(t) \geq\ & \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 \\
& - \frac{\beta}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\beta}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2 \\
& \geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 \\
& - \frac{\beta}{2\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\beta}{2\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 \\
& = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1}\right)\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\lambda_1}\right)\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 \\
& \geq \frac{\beta_1}{2}\|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

onde $\beta_1 = 1 - \frac{\beta}{\lambda_1}$. Assim,

$$\frac{\beta_1}{2}\|W\|_{\mathcal{H}}^2 \leq E(t) \leq E(0)\ \forall t \in [0, T_{max}[,$$

contrariando (4.1.43). Portanto $T_{max} = +\infty$. ■

4.1.4 Caso Semilinear ($\frac{n}{n-2} < p < \frac{n+2}{n-2}$)

Provaremos agora, a boa colocação quando $\frac{n}{n-2} < p < \frac{n+2}{n-2}$. Neste caso, vamos considerar $3 < p < 5$, isto é, com $n = 3$ e, observamos, que por argumentos análogos, vale para o caso $\frac{n}{n-2} < p < \frac{n+2}{n-2}$ com $n > 3$, como argumentado em [7]. Para provar a boa colocação neste caso, faremos uso das estimativas de Strichartz (enunciadas pelo Teorema 1.83).

Considere os seguintes truncamentos

$$\begin{aligned}
f_k(u) &= f(u)\eta_k(u) \\
h_k(v) &= h(v)\eta_k(v)
\end{aligned} \tag{4.1.44}$$

onde $\eta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ é uma função cut-off suave tal que $0 \leq \eta_k \leq 1$, $\eta_k(w) = 1$ se $|w| \leq k$, $\eta_k(w) = 0$ se $|w| \geq 2k$ e $\eta_k' \leq \frac{C}{k}$. (Este tipo de truncamento foi usado primeiramente em [52]).

Proposição 4.10 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, as funções f_k, h_k, definidas em (4.1.44) definem um operador contínuo globalmente Lipschitz $f_k, h_k : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ com constante de Lipschitz dependendo de k.*

Demonstração: Ver [60]. ■

Teorema 4.11 *Sejam $(u^0, v^0, u^1, v^1) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2$ e $(\Omega, \mathbf{g})$ uma variedade Riemanniana tri-dimensional como introduzida na Subseção 4.1.1. Então, considerando $E_0 > 0$ e $E(0) \leq E_0$ existe uma única solução $(u, v, u_t, v_t) \in C([0, \infty[; (H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2)$ para o problema*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u + f(u) + a(x)g(u_t) - \gamma(x)v_t = 0 \quad \textit{em} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ v_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} v + h(v) + b(x)g(v_t) + \gamma(x)u_t = 0 \quad \textit{em} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ u = v = 0 \ \textit{sobre} \quad \partial\Omega\times]0,\infty[, \\ u(0) = u^0, \ u_t(0) = u^1 \quad \textit{em} \ \Omega, \\ v(0) = v^0, \ v_t(0) = v^1 \quad \textit{em} \ \Omega. \end{cases} \tag{4.1.45}$$

Demonstração: Considere as funções truncadas f_k, h_k definidas em (4.1.44) e tome $\{(u_0^k, v_0^k, u_1^k, v_1^k)\}$ uma sequência de dados iniciais regulares tais que

$$\begin{aligned} (u_0^k, u_1^k) &\to (u^0, u^1) \quad \text{(forte) em } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \\ (v_0^k, v_1^k) &\to (v^0, v^1) \quad \text{(forte) em } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{4.1.46}$$

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt}^k - \Delta_{\mathbf{g}} u^k + f_k(u^k) + a(x)g(u_t^k) - \gamma(x)v_t^k = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T_k[, \\ v_{tt}^k - \Delta_{\mathbf{g}} v^k + h_k(v^k) + b(x)g(v_t^k) + \gamma(x)u_t^k = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T_k[, \\ u^k = v^k = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,T_k[, \\ u^k(0) = u_0^k, \ u_t^k(0) = u_1^k \ \text{ em } \Omega, \\ v^k(0) = v_0^k, \ v_t^k(0) = v_1^k \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.47}$$

Pela Proposição 4.10, f_k, h_k definem operadores globalmente contínuos Lipschitz. Assim, analogamente ao que fizemos anteriormente, usando teoria de semigrupos, provamos pelo Teorema 1.7.3 que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $(u^k, v^k) \in C([0,T_k]; (H_0^1(\Omega))^2) \cap C^1([0,T_k]; (L^2(\Omega))^2)$ solução para o problema (4.1.47).

Além disso, definindo

$$\begin{aligned} E_k(t) := E_{u^k,v^k}(t) = \frac{1}{2}\|u_t^k(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v_t^k(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_{\mathbf{g}} u^k(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_{\mathbf{g}} v^k(t)\|_{L^2}^2 \\ + \int_\Omega F_k(u^k)dx + \int_\Omega H_k(v^k)dx \end{aligned} \tag{4.1.48}$$

onde $F_k(u^k) = \int_0^{u^k} \eta_k(s) f(s) ds$ e $H_k(v^k) = \int_0^{v^k} \eta_k(s) h(s) ds$, temos que

$$E_k(t) \leq E_k(0) \leq E_0, \quad \forall t \quad \text{e } \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.1.49}$$

Como $E_k(t)$ controla a norma $\|(u^k, v^k, u_t^k, v_t^k)(t)\|_{(H_0^1)^2 \times (L^2)^2}$ concluímos que, podemos estender a solução globalmente no tempo, isto é,

$$(u^k, v^k) \in C([0,\infty[; (H_0^1(\Omega))^2) \cap C^1([0,\infty[; (L^2(\Omega))^2).$$

Além disso, de (4.1.49) temos que,

$$\begin{aligned} &\text{para cada } T > 0 \ \text{ fixado, } (u^k, v^k) \text{ e } (u_t^k, v_t^k) \text{ são sequências limitadas em} \\ &\qquad (L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)))^2 \text{ e } (L^\infty(0,T; L^2(\Omega)))^2, \text{respectivamente.} \end{aligned} \tag{4.1.50}$$

Dessa forma, existem subsequências, ainda denotadas por $(u^k, v^k), (u_t^k, v_t^k)$, e uma função $(u, v) \in (L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)))^2$ tais que

$$(u^k, v^k) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v) \quad \text{(fraco estrela) em } (L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)))^2 \tag{4.1.51}$$

$$(u_t^k, v_t^k) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_t, v_t) \quad \text{(fraco estrela) em } (L^\infty(0,T; L^2(\Omega)))^2 \tag{4.1.52}$$

e, pelo Lema de Aubin-Lions,

$$(u^k, v^k) \to (u, v) \quad \text{(forte) em } (L^2(0,T; L^2(\Omega)))^2. \tag{4.1.53}$$

Pela Hipótese 4.2 e por (4.1.50),

$$\begin{aligned} \|g(u_t^k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq k_0 \text{med}(\Omega) + K_0 \|u_t^k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_0 = C_0(E_0, T, \Omega), \\ \|g(v_t^k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq k_1 \text{med}(\Omega) + K_1 \|v_t^k\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_1 = C_1(E_0, T, \Omega) \end{aligned} \tag{4.1.54}$$

e, assim, existem $(g_0^*, g_1^*) \in (L^2(0,T;L^2(\Omega)))^2$ tais que

$$(g(u_t^k), g(v_t^k)) \rightharpoonup (g_0^*, g_1^*) \quad \text{(fraco) em } (L^2(0,T;L^2(\Omega)))^2.$$

Como $a \in L^\infty(\Omega)$ segue que o operador $S : L^2(]0,T[\times\Omega) \to L^2]0,T[\times\Omega)$ tal que $S(w) = a(x)w$ é linear e limitado, então

$$ag(u_t^k) \rightharpoonup ag_0^* \quad \text{(fraco) em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Analogamente, desde que $b \in L^\infty(\Omega)$, temos que

$$bg(v_t^k) \rightharpoonup bg_1^* \quad \text{(fraco) em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Além disso, como $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} \gamma v_t^k &\rightharpoonup \gamma v_t \quad \text{(fraco) em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \gamma u_t^k &\rightharpoonup \gamma u_t \quad \text{(fraco) em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Afirmação (1): $f_k(u^k), h_k(v^k) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $T > 0$ fixado e, elas podem ser estimadas por uma constante que não depende de k.

$\vdash$: $F_0 = -a(x)g(u_t^k) + \gamma(x)v_t^k \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

De fato, por (4.1.50) e por 4.2 temos que

$$\begin{aligned} \|a(\cdot)g(u_t^k) + \gamma(\cdot)v_t^k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \int_0^T \int_\Omega |a(x)g(u_t^k)|^2 dxdt + \int_0^T \int_\Omega |\gamma(x)v_t^k|^2 dxdt \\ &\leq K^2\|a\|_\infty^2 \int_0^T \int_\Omega |u_t^k|^2 dxdt + \|\gamma\|_\infty^2 \int_0^T \int_\Omega |v_t^k|^2 dxdt \\ &\leq C(\|u_t^k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|v_t^k\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}) \\ &\leq C(E_0, T, \Omega). \end{aligned} \tag{4.1.55}$$

Assim, podemos usar as estimativas de Strichartz como no Lema 1.84 para a primeira equação do problema (4.1.47) e, então obtemos a limitação

$$\begin{aligned} \|u^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} &\leq C\left(\|u_0^k\|_{H^1} + \|u_1^k\|_{L^2} + \|a(\cdot)g(u_t^k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|\gamma(\cdot)v_t^k\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \right) \\ &\leq C(E_0 + C(E_0, T, \Omega)) \\ &\leq C. \end{aligned} \tag{4.1.56}$$

Como $\|u^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}$ controla a norma de $f_k(u^k)$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, temos que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\|f_k(u^k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq T^{\frac{1}{2}}\|f_k(u^k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C = C(T,E_0).$$

Do mesmo modo, pela Hipótese 4.2 e por (4.1.50) temos que $F_1 := -b(x)g(v_t^k) - \gamma(x)u_t^k \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, então fazemos uso das estimativas de Strichartz como no Lema 1.84 para a segunda equação do problema (4.1.47), e obtemos a limitação

$$\begin{aligned}\|v^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} &\leq C\Big(\|v_0^k\|_{H^1} + \|v_1^k\|_{L^2} + \|b(\cdot)g(v_t^k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|\gamma(\cdot)u_t^k\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\Big)\\ &\leq C(E_0 + C(E_0,T,\Omega))\\ &\leq C.\end{aligned} \tag{4.1.57}$$

Analogamente, como $\|v^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}$ controla a norma de $h_k(v^k)$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, concluímos que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\|h_k(v^k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq T^{\frac{1}{2}}\|h_k(v^k)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C = C(T,E_0).$$

Assim, provamos a Afirmação (1).

Observe que, como $f_k(u^k), h_k(v^k)$ são uniformemente limitadas em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, existem subsequências, denotadas da mesma maneira, e funções $f^*, h^* \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ tais que,

$$f_k(u^k) \rightharpoonup f^* \text{ (fraco) em } L^2(0,T,L^2(\Omega)) \tag{4.1.58}$$

e

$$h_k(v^k) \rightharpoonup h^* \text{ (fraco) em } L^2(0,T,L^2(\Omega)) \tag{4.1.59}$$

respectivamente.

Passando o limite em (4.1.47), obtemos

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u = -f^* - ag_0^* + \gamma v_t \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[,\\ v_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} v = -h^* - bg_1^* - \gamma u_t \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[,\\ u = v = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,T[,\\ u(0) = u^0,\ u_t(0) = u^1 \ \text{ em } \Omega,\\ v(0) = v^0,\ v_t(0) = v^1 \ \text{ em } \Omega,\end{cases} \tag{4.1.60}$$

com $G_0 = -f^* - ag_0^* + \gamma v_t, G_1 = -h^* - bg_1^* - \gamma u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e, então, usando as estimativas de Strichartz separadamente para cada equação do problema (4.1.60) temos que, $u, v \in L^5(0,T;L^{10}(\Omega))$ e, além disso, temos as limitações

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} \leq C\bigg(& \|(u^0,u^1)\|_{H_0^1\times L^2(\Omega)} + \|f^*\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ & + \|a\|_{L^\infty}\|g_0^*\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|\gamma\|_{L^\infty}\|v_t\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\bigg) \end{aligned} \tag{4.1.61}$$

e

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} \leq C\bigg(& \|(v^0,v^1)\|_{H_0^1\times L^2(\Omega)} + \|h^*\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ & + \|b\|_{L^\infty}\|g_1^*\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|\gamma\|_{L^\infty}\|u_t\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\bigg). \end{aligned} \tag{4.1.62}$$

Afirmação (2)**:** $\|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \longrightarrow 0$ quando $k, m \to \infty$.

Observe que,

$$\begin{aligned} \|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq & \|f_k(u^k) - f_k(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \|f_k(u) - f_m(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ & + \|f_m(u) - f_m(u^m)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Vamos provar primeiro que,

$$\|f_k(u) - f_m(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to 0 \quad \text{quando } k, m \to \infty. \tag{4.1.63}$$

De fato, note que

$$f_k(u) - f_m(u) = [\eta_k(u) - \eta_m(u)]\, f(u) \tag{4.1.64}$$

como $\eta_k(u) = \eta_m(u) = 1$ para k, m suficientemente grandes, temos que $f_k(u) - f_m(u) \to 0$ para quase todo $(t,x) \in [0,T] \times \Omega$ e

$$\begin{aligned} |f_k(u) - f_m(u)| &\leq |f_k(u)| + |f_m(u)| \\ &= |\eta_k(u)||f(u)| + |\eta_k(u)||f(u)| \\ &\leq 2|f(u)| \\ &= z(t,x) \end{aligned} \tag{4.1.65}$$

com $z \in L^2((0,T)\times\Omega)$, assim $\|f_k(u) - f_m(u)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \to 0$ e, consequentemente,

$$\|f_k(u) - f_m(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to 0. \tag{4.1.66}$$

Para provar que

$$\|f_k(u^k) - f_k(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to 0$$

primeiro observamos que, como $|\eta_k(u)| \leq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |f_k(u^k) - f_k(u)| &= |\eta_k(u)\left[f(u^k) - f(u)\right]| \\ &\leq C(1 + |u^k|^{p-1} + |u|^{p-1})|u^k - u| \\ &= C(|u^k - u| + |u^k|^{p-1}|u^k - u| + |u|^{p-1}|u^k - u|). \end{aligned} \tag{4.1.67}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \||u^k|^{p-1}|u^k - u|\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T \||u^k|^{p-1}|u^k - u|\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &= \int_0^T \left[\int_\Omega (|u^k|^{p-1}|u^k - u|)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^T \left[\int_\Omega |u^k|^{2(p-1)}|u^k - u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} dt. \\ &= (*). \end{aligned} \tag{4.1.68}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder para $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{\frac{p}{p-1}}$ temos que

$$\begin{aligned} (*) &\leq \int_0^T \left[\int_\Omega \left(|u^k|^{2(p-1)})^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \int_\Omega \left(|u^k - u|^{2p}\right)^{\frac{1}{p}} dx\right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^T \left[\int_\Omega \left(|u^k|^{2p} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \int_\Omega \left(|u^k - u|^{2p}\right)^{\frac{1}{p}} dx\right]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^T \|u^k\|_{L^{2p}}^{p-1}\|u^k - u\|_{L^{2p}} dt. \end{aligned} \tag{4.1.69}$$

Usando a desigualdade de interpolação (ver Proposição 1.4) com $\theta = \frac{5-p}{4p}, \theta \in [0,1]$, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u^k\|_{L^{2p}}^{p-1}\|u^k - u\|_{L^{2p}} dt &\leq \int_0^T \|u^k\|_{L^{2p}}^{p-1}\|u^k - u\|_{L^2}^{\theta}\|u^k - u\|_{L^{10}}^{1-\theta} dt \\ &= (**). \end{aligned} \tag{4.1.70}$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder generalizada (ver Proposição 1.3) com $q_1 = \frac{5}{p-1}$, $q_2 = \frac{8p}{5-p}$ e $q_3 = \frac{4p}{p-1}$, temos que

$$(**) \leq T^\lambda \|u^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}^{p-1}\|u^k - u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^{\theta}\|u^k - u\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}^{1-\theta} \tag{4.1.71}$$

e, portanto, de (4.1.68)-(4.1.71) temos que

$$\||u^k|^{p-1}|u^k-u|\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq T^\lambda \|u^k\|^{p-1}_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} \|u^k-u\|^{\theta}_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|u^k-u\|^{1-\theta}_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} \longrightarrow 0 \quad \text{as } k,m\to\infty \tag{4.1.72}$$

pois, de (4.1.56) e (4.1.61), $\|u^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}, \|u^k-u\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))} \leq C$ para cada $T>0$ fixado e, por (4.1.53), tem-se $\|u^k-u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\to 0$. Procedendo com os outros termos em (4.1.67) da mesma maneira, concluímos que

$$\|f_k(u^k)-f_k(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\to 0.$$

O mesmo argumento mostra que

$$\|f_m(u^m)-f_m(u)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\to 0$$

e, portanto,

$$\|f_m(u^m)-f_k(u^k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\to 0 \quad \text{quando } k,m\to\infty. \tag{4.1.73}$$

Assim, $(f_k(u^k))$ é uma sequência de Cauchy $L^1(0,T;L^2(\Omega))$, disto segue que

$$f_k(u^k)\to f(u) \quad \text{em} \quad L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.1.74}$$

Da mesma forma, temos que

$$\|h_m(v^m)-h_k(v^k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\to 0 \quad \text{quando } k,m\to\infty, \tag{4.1.75}$$

e, portanto, $(h_k(v^k))$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e, consequentemente,

$$h_k(v^k)\to h(v) \quad \text{em} \quad L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.1.76}$$

Segue de (4.1.47) para $y^{k,m}=u^k-u^m$ e $z^{k,m}=v^k-v^m$ que

$$\begin{cases} y^{k,m}_{tt}-\Delta_{\mathbf{g}}y^{k,m}+(f_k(u^k)-f_m(u^m))+a(x)(g(u^k_t)-g(u^m_t))-\gamma(x)z^{k,m}_t=0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[,\\ z^{k,m}_{tt}-\Delta_{\mathbf{g}}z^{k,m}+(h_k(v^k)-h_m(v^m))+b(x)(g(v^t_k)-g(v^m_t))+\gamma(x)y^{k,m}_t=0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[,\\ y^{k,m}=z^{k,m}=0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,T[,\\ y^{k,m}(0)=y^{k,m}_0, \ y^{k,m}_t(0)=y^{k,m}_1 \ \text{ em } \Omega,\\ z^{k,m}(0)=z^{k,m}_0, \ z^{k,m}_t(0)=z^{k,m}_1 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.77}$$

Multiplicando a primeira equação de (4.1.77) por $(u_t^k - u_t^m)$ e a segunda equação de (4.1.77) por $(v_t^k - v_t^m)$ e, somando as duas equações, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\Big(\|u_t^k - u_t^m\|_{L^2}^2 + \|v_t^k - v_t^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(u^k - u^m)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(v^k - v^m)\|_{L^2}^2\Big)\\
&+\int_\Omega a(x)(g(u_t^k) - g(u_t^m))(u_t^k - u_t^m)dx + \int_\Omega b(x)(g(v_t^k) - g(v_t^m))(v_t^k - v_t^m)dx\\
&+\int_\Omega (f_k(u^k) - f_m(u^m))(u_t^k - u_t^m)dx + \int_\Omega (h_k(v^k) - h_m(v^m))(v_t^k - v_t^m)dx = 0.
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a T temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\|u_t^k - u_t^m\|_{L^2}^2 + \|v_t^k - v_t^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(u^k - u^m)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(v^k - v^m)\|_{L^2}^2\Big)\\
&+\int_0^T\int_\Omega a(x)(g(u_t^k) - g(u_t^m))(u_t^k - u_t^m)dxdt + \int_0^T\int_\Omega b(x)(g(v_t^k) - g(v_t^m))(v_t^k - v_t^m)dxdt\\
&\leq \int_0^T \|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^2}\|u_t^k - u_t^m\|_{L^2}dt + \int_0^T \|h_k(v^k) - h_m(v^m)\|_{L^2}\|v_t^k - v_t^m\|_{L^2}dt\\
&+\frac{1}{2}\|(u_0^k - u_0^m, v_0^k - v_0^m, u_1^k - u_1^m, v_1^k - v_1^m)\|_{(H_0^1)^2\times(L^2)^2}^2.
\end{aligned}$$

Como a, b são funções não negativas e, por 4.2, g é uma função mónotona crescente, então

$$\int_0^T\int_\Omega a(x)(g(u_t^k) - g(u_t^m))(u_t^k - u_t^m)dxdt + \int_0^T\int_\Omega b(x)(g(v_t^k) - g(v_t^m))(v_t^k - v_t^m)dxdt \geq 0.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\|u_t^k - u_t^m\|_{L^2}^2 + \|v_t^k - v_t^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(u^k - u^m)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(v^k - v^m)\|_{L^2}^2\\
&\leq C\Big(\int_0^T \|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^2}\|u_t^k - u_t^m\|_{L^2}dt + \int_0^T \|h_k(v^k) - h_m(v^m)\|_{L^2}\|v_t^k - v_t^m\|_{L^2}dt\\
&+\|(u_0^k - u_0^m, v_0^k - v_0^m, u_1^k - u_1^m, v_1^k - v_1^m)\|_{(H_0^1)^2\times(L^2)^2}^2\Big).
\end{aligned}$$

Definindo

$$(\phi_{k,m}(t))^2 = \|(u_t^k - u_t^m)(t)\|_{L^2}^2 + \|(v_t^k - v_t^m)(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(u^k - u^m)(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(v^k - v^m)(t)\|_{L^2}^2$$

temos que

$$\begin{aligned}
(\phi_{k,m}(t))^2 \leq C\Big((\phi_{k,m}(0))^2 &+ \int_0^t \|f_k(u^k - f_m(u^m)\|_{L^2}\phi_{k,m}(s)ds\\
&+ \int_0^t \|h_k(v^k) - h_m(v^m)\|_{L^2}\phi_{k,m}(s)ds\Big)
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$(\phi_{k,m}(t))^2 \le C\left[(\phi_{k,m}(0))^2 + \int_0^t \Big(\|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^2} + \|h_k(v^k) - h_m(v^m)\|_{L^2}\Big)\phi_{k,m}(s)ds\right]$$

assim, pela desigualdade de Gronwall, temos que

$$\begin{aligned}\phi_{k,m}(t) \le C\bigg(&\|(u_0^k - u_0^m, v_0^k - v_0^m, u_1^k - u_1^m, v_1^k - v_1^m)\|_{H_0^1 \times L^2(\Omega)} \\ &+ \int_0^T (\|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^2} + \|h_k(v^k) - h_m(v^m)\|_{L^2})ds\bigg).\end{aligned}$$

Agora, observando as convergências (4.1.46), (4.1.74) e (4.1.75) temos que

$$\begin{aligned}&\|u^k - u^m\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|v^k - v^m\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u_t^k - u_t^m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|v_t^k - v_t^m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\quad \le C\bigg(\|(u_0^k - u_0^m, v_0^k - v_0^m, u_1^k - u_1^m, v_1^k - v_1^m)\|_{(H_0^1)^2 \times (L^2)^2} \\ &\quad + \int_0^T \|f_k(u^k) - f_m(u^m)\|_{L^2}ds + \int_0^T \|h_k(v^k) - h_m(v^m)\|_{L^2}\bigg)ds \longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{4.1.78}$$

Este último limite permite-nos concluir que $g_0^* = g(u_t)$ e $g_1^* = g(v_t)$. De fato, primeiramente observe que

$$(g(u_t^k), g(v_t^k)) \rightharpoonup (g_0^*, g_1^*) \quad \text{(fraco) em } (L^2((0,T)\times\Omega))^2 \tag{4.1.79}$$

e g é uma função crescente, então $g(\cdot) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um operador monótono e hemi-contínuo e assim é maximal monótono. Assim, por (4.1.78) temos, para cada $T > 0$ fixo que

$$\int_{(0,T)\times\Omega} (g(u_t^k) - g(u_t^m))(u_t^k - u_t^m)dxdt \to 0 \tag{4.1.80}$$

e

$$\int_{(0,T)\times\Omega} (g(v_t^k) - g(v_t^m))(v_t^k - v_t^m)dxdt \to 0 \tag{4.1.81}$$

então usando o Teorema 1.40, podemos concluir que $g_0^* = g(u_t)$ e $g_1^* = g(v_t)$.

Observe que, $(u^k, v^k, u_t^k, v_t^k) \in C([0,T]; (H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e então a convergência uniforme em (4.1.78) implica em $(u, v, u_t, v_t) \in C([0,T]; (H_0^1(\Omega))^2 \times$

$(L^2(\Omega))^2)$ assim, passando o limite em (4.1.47), obtemos

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u + f(u) + a(x)g(u_t) - \gamma(x)v_t = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times [0,T], \\ v_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} v + h(v) + b(x)g(v_t) + \gamma(x)u_t = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times [0,T], \\ u = v = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,T[\\ u(0) = u^0, \ u_t(0) = u^1 \ \text{ em } \Omega, \\ v(0) = v^0, \ v_t(0) = v^1 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.82}$$

Além disso, considerando a energia

$$E(t) := E_{u,v}(t) = \frac{1}{2}\Big(\|u_t(t)\|_{L^2}^2 + \|v_t(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_g u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_g v(t)\|_{L^2}^2 \Big) + \int_\Omega F(u)dx + \int_\Omega H(v)dx$$

associada ao problema (4.1.82) temos que, $\frac{d}{dt}E_u(t) \leq 0$ e, portanto, $E(t) \leq E(0)$, para todo $t \in [0,T]$, isto é, a solução não explode no tempo infinito, disto segue que podemos estender a solução globalmente no tempo.

Unicidade: Vamos supor que existe $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in (C([0,T]; (H_0^1(\Omega))^2) \cap C^1([0,T]; (L^2(\Omega))^2)$ outra solução para o problema (4.1.82), então denotando $\varphi = u - \widetilde{u}, \psi = v - \widetilde{v}$ temos que

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\varphi + (f(u) - f(\widetilde{u})) + a(x)(g(u_t) - g(\widetilde{u}_t)) - \gamma(x)\psi_t = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times [0,T], \\ \psi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\psi + (h(v) - h(\widetilde{v})) + b(x)(g(v_t) - g(\widetilde{v}_t)) + \gamma(x)\varphi_t = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times [0,T], \\ \varphi = \psi = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega \times (0,T), \\ \varphi(0) = \varphi_t(0) = 0 \ \text{ em } \Omega, \\ \psi(0) = \psi_t(0) = 0 \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.83}$$

analogamente ao que fizemos anteriormente, temos que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\Big(\|u_t - \widetilde{u}_t\|_{L^2}^2 + \|v_t - \widetilde{v}_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(u - \widetilde{u})\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(v - \widetilde{v})\|_{L^2}^2 \Big)\right. \\ &+ \int_\Omega a(x)(g(u_t) - g(\widetilde{u}_t))(u_t - \widetilde{u}_t)dx + \int_\Omega b(x)(g(v_t) - g(\widetilde{v}_t))(v_t - \widetilde{v}_t)dx \\ &\leq \int_\Omega |f(u) - f(\widetilde{u})||u_t - \widetilde{u}_t|dx + \int_\Omega |h(v) - h(\widetilde{v})||v_t - \widetilde{v}_t|dx. \end{aligned}$$

Por outro lado, por (4.1.4), pela desigualdade de Hölder generalizada para $q_1 = 3(p-1), q_2 = 6$ e $q_3 = 2$, pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ e, pela desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(u)-f(\widetilde{u})||u_t-\widetilde{u}_t|dx &\leq C\int_\Omega (1+|u|^{p-1}+|\widetilde{u}|^{p-1})|u-\widetilde{u}||u_t-\widetilde{u}_t|dx\\
&\leq C(1+\|u\|^{p-1}_{L^{3(p-1)}}+\|\widetilde{u}\|^{p-1}_{L^{3(p-1)}})\|u-\widetilde{u}\|_{L^6}\|u_t-\widetilde{u}_t\|_{L^2}\\
&\leq C(1+\|u\|^{p-1}_{L^{3(p-1)}}+\|\widetilde{u}\|^{p-1}_{L^{3(p-1)}})\|u-\widetilde{u}\|^2_{H^1_0}+\|u_t-\widetilde{u}_t\|^2_{L^2}).
\end{aligned}$$

Como $3<p<5$ então $6<3p-3<12$ logo, $L^{12}(\Omega)\hookrightarrow L^{3(p-1)}(\Omega)$ e assim,

$$\|u\|^{p-1}_{L^{3(p-1)}}+\|\widetilde{u}\|^{p-1}_{L^{3(p-1)}} \leq C(\|u\|^{p-1}_{L^{12}}+\|\widetilde{u}\|^{p-1}_{L^{12}})$$

e, portanto,

$$\int_\Omega |f(u)-f(\widetilde{u})||u_t-\widetilde{u}_t|dx \leq C\Big((1+\|u\|^{p-1}_{L^{12}}+\|\widetilde{u}\|^{p-1}_{L^{12}})(\|u-\widetilde{u}\|^2_{H^1_0}+\|u_t-\widetilde{u}_t\|^2_{L^2})\Big).$$

Da mesma forma tem-se

$$\int_\Omega |h(v)-h(\widetilde{v})||v_t-\widetilde{v}_t|dx \leq C\Big((1+\|v\|^{p-1}_{L^{12}}+\|\widetilde{v}\|^{p-1}_{L^{12}})(\|v-\widetilde{v}\|^2_{H^1_0}+\|v_t-\widetilde{v}_t\|^2_{L^2})\Big).$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Bigg[\frac{1}{2}\Big(\|u_t-\widetilde{u}_t\|^2_{L^2}+\|v_t-\widetilde{v}_t\|^2_{L^2}+\|\nabla_{\mathbf{g}}(u-\widetilde{u})\|^2_{L^2}+\|\nabla_{\mathbf{g}}(v-\widetilde{v})\|^2_{L^2}\Big)\\
&+\int_\Omega a(x)(g(u_t)-g(\widetilde{u}_t))(u_t-\widetilde{u}_t)dx+\int_\Omega b(x)(g(v_t)-g(\widetilde{v}_t))(v_t-\widetilde{v}_t)dx\\
&\leq C\Big((1+\|u\|^{p-1}_{L^{12}}+\|\widetilde{u}\|^{p-1}_{L^{12}})(\|u-\widetilde{u}\|^2_{H^1_0}+\|u_t-\widetilde{u}_t\|^2_{L^2})\\
&+(1+\|v\|^{p-1}_{L^{12}}+\|\widetilde{v}\|^{p-1}_{L^{12}})(\|v-\widetilde{v}\|^2_{H^1_0}+\|v_t-\widetilde{v}_t\|^2_{L^2})\Big).
\end{aligned}$$

Então, integrando de 0 a t, $t\in[0,T]$, tendo em vista que $\varphi(0)=\varphi_t(0)=\psi(0)=\psi_t(0)=0$, segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\|u_t-\widetilde{u}_t\|^2_{L^2}+\|v_t-\widetilde{v}_t\|^2_{L^2}+\|\nabla_{\mathbf{g}}(u-\widetilde{u})\|^2_{L^2}+\|\nabla_{\mathbf{g}}(v-\widetilde{v})\|^2_{L^2}\Big)\\
&+\int_0^t\int_\Omega a(x)(g(u_t)-g(\widetilde{u}_t))(u_t-\widetilde{u}_t)dxdt+\int_0^t\int_\Omega b(x)(g(v_t)-g(\widetilde{v}_t))(v_t-\widetilde{v}_t)dxdt\\
&\leq C\Big(\int_0^t(1+\|u\|^{p-1}_{L^{12}}+\|\widetilde{u}\|^{p-1}_{L^{12}})(\|u-\widetilde{u}\|^2_{H^1_0}dt+\|u_t-\widetilde{u}_t\|^2_{L^2})dt\\
&+\int_0^t(1+\|v\|^{p-1}_{L^{12}}+\|\widetilde{v}\|^{p-1}_{L^{12}})(\|v-\widetilde{v}\|^2_{H^1_0}+\|v_t-\widetilde{v}_t\|^2_{L^2})dt\Big).
\end{aligned}$$

Da mesma forma como fizemos anteriormente, como as funções a e b são não negativas e g é monótona crescente, então temos que

$$\begin{aligned}
&\|u_t - \widetilde{u}_t\|_{L^2}^2 + \|v_t - \widetilde{v}_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(u - \widetilde{u})\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}(v - \widetilde{v})\|_{L^2}^2 \\
&\leq C\bigg(\int_0^t (1 + \|u\|_{L^{12}}^{p-1} + \|\widetilde{u}\|_{L^{12}}^{p-1})(\|u - \widetilde{u}\|_{H_0^1}^2 dt + \|u_t - \widetilde{u}_t\|_{L^2}^2) dt \\
&+ \int_0^t (1 + \|v\|_{L^{12}}^{p-1} + \|\widetilde{v}\|_{L^{12}}^{p-1})(\|v - \widetilde{v}\|_{H_0^1}^2 + \|v_t - \widetilde{v}_t\|_{L^2}^2) dt \bigg).
\end{aligned}$$

Assim, definindo

$$\phi_{\varphi,\psi}(t) = \|(u_t - \widetilde{u}_t)(t)\|_{L^2}^2 + \|(v_t - \widetilde{v}_t)(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_g(u - \widetilde{u})(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_g(v - \widetilde{v})(t)\|_{L^2}^2,$$

temos que

$$\phi_{\varphi,\psi}(t) \leq C \int_0^t \Big((1 + \|u\|_{L^{12}}^{p-1} + \|\widetilde{u}\|_{L^{12}}^{p-1}) + (1 + \|v\|_{L^{12}}^{p-1} + \|\widetilde{v}\|_{L^{12}}^{p-1}) \Big) \phi_{\varphi,\psi}(s) ds$$

e, pela desigualdade de Gronwall, concluímos que $u = \widetilde{u}, v = \widetilde{v}$ o que conclui a prova. ■

4.1.5 Desigualdade de Observabilidade

4.1.6 Caso Semilinear $(1 \leq p \leq \frac{n}{n-2})$

Para provar nosso resultado de estabilidade assintótica, precisamos do seguinte Lema:

Lema 4.12 *Suponha que os dados iniciais satisfazem $E(0) \leq R$. Então para $T > 0$ e $R > 0$, existe uma constante $C = C(T, R) > 0$ tal que a desigualdade*

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_\Omega a(x)(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2) + b(x)(|g(v_t)|^2 + |v_t|^2) dx dt \qquad (4.1.84)$$

vale para toda solução fraca $\{u, v\}$ do problema (4.1.15).

Demonstração: Por argumentos clássicos, é suficiente trabalhar com soluções regulares. No entanto, o resultado permanece válido para soluções fracas usando argumentos de densidade. Vamos argumentar por contradição. Suponha, por absurdo, que (4.1.84) não seja verdadeira.

Então considere $\{u_0^m, v_0^m, u_1^m, v_1^m\}$ uma sequência de dados iniciais onde a correspondente solução $\{u^m, v^m\}$ com $E_m(0)$ uniformemente limitada em m, verifica

$$\lim_{m\to\infty} \frac{E_m(0)}{\int_0^T \int_\Omega a(x)(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2) + b(x)(|g(v_t)|^2 + |v_t|^2) dxdt} = +\infty. \tag{4.1.85}$$

De onde tem-se

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\int_0^T \int_\Omega a(x)(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2) + b(x)(|g(v_t)|^2 + |v_t|^2) dxdt}{E_m(0)} = 0. \tag{4.1.86}$$

Como $E_m(t)$ é não crescente e $E_m(0)$ é limitada então, obtemos uma subsequência de $\{u^m, v^m\}$, denotada da mesma forma, que verifica

$$(u^m, v^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v) \text{ (fraco estrela) em } (L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega)))^2, \tag{4.1.87}$$

$$(u_t^m, v_t^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_t, v_t) \text{ (fraco estrela) em } (L^\infty(0,T; L^2(\Omega)))^2. \tag{4.1.88}$$

Além disso, por argumentos de compacidade clássicos, (veja [41],[55]), deduzimos para uma eventual subsequência, que

$$(u^m, v^m) \to (u, v) \text{ (forte) em } (L^2(0,T; L^q(\Omega)))^2 \quad \forall\, q \in [2, 2^*[, \tag{4.1.89}$$

onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$ e, consequentemente, de (4.1.89)

$$(f(u^m), h(v^m)) \to (f(u), h(v)) \quad \text{(q.s.) em} \quad (\Omega\times]0,T[)^2. \tag{4.1.90}$$

Da convergência acima e desde que $\{f(u^m), h(v^m)\}$ é limitada em $(L^2(0,T; L^2(\Omega)))^2$ segue pelo Lema de Lions em 1.24 que

$$(f(u^m), h(v^m)) \rightharpoonup (f(u), h(v)) \quad \text{(fraco) em} \quad (L^2(0,T; L^2(\Omega)))^2. \tag{4.1.91}$$

Note que por (4.1.86) temos que

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u_t^m(x,t))|^2\, dxdt = 0, \\ \lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\Omega b(x)|g(v_t^m(x,t))|^2\, dxdt = 0 \end{aligned} \tag{4.1.92}$$

e

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega a(x)|u_t^m(x,t)|^2\,dxdt=0,\\
&\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega b(x)|v_t^m(x,t)|^2\,dxdt=0.
\end{aligned}
\tag{4.1.93}
$$

Como $a(x)\geq a_0>0$ em $\omega\subset\Omega$, temos que

$$
\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\omega |u_t^m(x,t)|^2\,dxdt=0 \tag{4.1.94}
$$

e como $b(x)\geq b_0>0$ em $\omega\subset\Omega$, temos que

$$
\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\omega |v_t^m(x,t)|^2\,dxdt=0. \tag{4.1.95}
$$

De (4.1.88), (4.1.94) e (4.1.95) temos, respectivamente,

$$
u_t(x,t)=0,\quad v_t(x,t)=0 \;\text{ em }\; \omega\times]0,T[. \tag{4.1.96}
$$

Além disso, pelo fato de que $0\leq\gamma(x)\leq a(x)$ e $0\leq\gamma(x)\leq b(x)$ e, por (4.1.93), temos, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega \gamma(x)|u_t^m(x,t)|^2\,dxdt=0\\
&\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega \gamma(x)|v_t^m(x,t)|^2\,dxdt=0.
\end{aligned}
\tag{4.1.97}
$$

Agora vamos dividir nossa prova em dois casos:

Caso (i): $u\neq 0$

Considere a seguinte sequência de problemas

$$
\begin{cases}
u_{tt}^m-\Delta_{\mathbf{g}}u^m+f(u^m)+a(x)g(u_t^m)-\gamma(x)v_t^m=0 \;\text{ em }\; \Omega\times]0,T[,\\
v_{tt}^m-\Delta_{\mathbf{g}}v^m+h(v^m)+b(x)g(v_t^m)+\gamma(x)u_t^m=0 \;\text{ em }\; \Omega\times]0,T[,\\
u^m=v^m=0 \text{ sobre } \partial\Omega\times]0,T[,\\
u^m(0)=u_0^m,\; u_t^m(0)=u_1^m \;\text{ em }\; \Omega,\\
v^m(0)=v_0^m,\; v_t^m(0)=v_1^m \;\text{ em }\; \Omega,
\end{cases}
\tag{4.1.98}
$$

com $E_m(t)$ a energia associada ao sistema (4.1.98).

Passando o limite quando $m\to+\infty$ em (4.1.98), pelas convergências acima segue que

$$
\begin{cases}
u_{tt}-\Delta_{\mathbf{g}}u+f(u)=0 \;\text{ em }\; \Omega\times]0,T[,\\
v_{tt}-\Delta_{\mathbf{g}}v+h(v)=0 \;\text{ em }\; \Omega\times]0,T[,\\
u_t=0,\quad v_t=0 \;\text{ em }\; \omega\times]0,T[.
\end{cases}
\tag{4.1.99}
$$

Se $v \neq 0$, então para $y = u_t$ e $z = v_t$, temos que

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} y + V_1(x,t)y = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0,T[, \\ z_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} z + V_2(x,t)z = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0,T[, \\ y = 0, \quad z = 0 \quad \text{em} \quad \omega \times]0,T[, \end{cases} \tag{4.1.100}$$

onde $V_1 = f'(u)$ e $V_2 = h'(v)$.

Temos que

$$V_1 \in L^\infty(0,T; L^{\frac{n+1}{2}}(\Omega)). \tag{4.1.101}$$

De fato, pois

$$|f'(u)|^{\frac{n+1}{2}} \leq C(1+|u|)^{\frac{(p-1)(n+1)}{2}}.$$

Se $n \geq 3$ então como $p \leq \frac{n}{n-2}$, segue que $p - 1 \leq \frac{2}{n-2}$ logo, $\frac{(p-1)(n+1)}{2} \leq \frac{n+1}{n-2} < \frac{2n}{n-2}$ e, por (4.1.21), temos o desejado.

Se $n = 2$ entao $V_1 \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$.

De fato, temos que

$$|f'(u)|^{\frac{3}{2}} \leq (1+|u|)^{\frac{(p-1)3}{2}}.$$

Como $p - 1 \geq 0$ então $\frac{(p-1)3}{2} \geq 0$.

Assim se $\frac{(p-1)3}{2} < 2$ temos que $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{(p-1)3}{2}}(\Omega)$ e, portanto,

$$\int_\Omega (1+|u|)^{\frac{(p-1)3}{2}} < +\infty.$$

Se $\frac{(p-1)3}{2} \geq 2$, então por (4.1.21) temos o desejado. Análise similar é feita para V_2. Dessa forma, usando a Hipótese 4.6 em cada equação de (4.1.100), concluímos que $y = z = 0$, donde $u_t = v_t = 0$.

Voltando em (4.1.99) temos que

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{g}} u + f(u) = 0 \\ -\Delta_{\mathbf{g}} v + h(v) = 0 \end{cases} \tag{4.1.102}$$

donde

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (-\Delta_{\mathbf{g}} u) u dx + \int_\Omega f(u) u dx = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega (-\Delta_{\mathbf{g}} v) v dx + \int_\Omega h(v) v dx = 0. \end{cases} \tag{4.1.103}$$

Observe que por (4.1.5) e (4.1.6) temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (-\Delta_{\mathbf{g}} u)u + f(u)u dx \\ &\geq \int_\Omega (\lambda u^2 - \beta u^2) dx \\ &= \int_\Omega \underbrace{(\lambda - \beta)}_{>0} u^2 dx \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1.104}$$

pois $\beta \in [0, \lambda_1)$. Portanto, segue que

$$\int_\Omega (\lambda - \beta) u^2 dx = 0$$

e, consequentemente, $u = 0$, que é uma contradição. Analogamente obtemos que $v = 0$.

Se $v = 0$ e, como $h(0) = 0$, então em (4.1.99) obtemos

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u + f(u) = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times]0, T[, \\ u_t = 0, \ \text{ em } \ \omega \times]0, T[, \end{cases} \tag{4.1.105}$$

donde pela Hipótese 4.6 $u = 0$, que é uma contradição. Analogamente chegamos numa contradição se $u = 0$ e $v \neq 0$.

Caso (ii): $u = 0$ e $v = 0$

Defina agora:

$$c_m = [E_m(0)]^{1/2} \tag{4.1.106}$$

$$\varphi^m = \frac{u^m}{c_m}, \quad \psi^m = \frac{v^m}{c_m} \tag{4.1.107}$$

Considere a seguinte sequência de problemas normalizados:

$$\begin{cases} \varphi_{tt}^m - \Delta_{\mathbf{g}} \varphi^m + \frac{1}{c_m} f(u^m) + \frac{1}{c_m} a(x) g(u_t^m) - \gamma(x) \psi_t^m = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times]0, T[, \\ \psi_{tt}^m - \Delta_{\mathbf{g}} \psi^m + \frac{1}{c_m} h(v^m) + \frac{1}{c_m} b(x) g(v_t^m) + \gamma(x) \varphi_t^m = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times]0, T[, \\ \varphi^m = \psi^m = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega \times]0, T[, \\ \varphi^m(0) = \varphi_0^m, \ \varphi_t^m(0) = \varphi_1^m \ \text{ em } \ \Omega, \\ \psi^m(0) = \psi_0^m, \ \psi_t(0) = \psi_1^m \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{4.1.108}$$

Observe que

$$\widehat{E}_m(t) = \frac{1}{c_m^2} E_m(t), \tag{4.1.109}$$

onde $\widehat{E}_m(t)$ é a energia associada ao sistema (4.1.108). De fato, pois

$$\begin{aligned}\widehat{E}_m(t) &= \frac{1}{2}\Big[\|\varphi_t^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\psi_t^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}\varphi^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}\psi^m(t)\|_{L^2}^2\Big] \\ &+ \frac{1}{c_m^2}\int_\Omega F(u^m)dx + \frac{1}{c_m^2}\int_\Omega H(v^m)dx \\ &= \frac{1}{c_m^2}E_m(t).\end{aligned}$$

Portanto, em particular, temos que

$$\widehat{E}_m(0) = 1. \tag{4.1.110}$$

A fim de obter uma contradição vamos provar que $\widehat{E}_m(0)$ converge para zero quando $m \to +\infty$.

De (4.1.110) obtemos $\widehat{E}_m(0) \leq L$ então, para uma eventual subsequência de $\{\varphi^m, \psi^m\}$, temos que

$$(\varphi^m, \psi^m) \stackrel{*}{\rightharpoonup} (\varphi, \psi) \text{ (fraco estrela) em } (L^\infty(0, T;\ H_0^1(\Omega)))^2, \tag{4.1.111}$$

$$(\varphi_t^m, \psi_t^m) \stackrel{*}{\rightharpoonup} (\varphi_t, \psi_t) \text{ (fraco estrela) em } (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^2. \tag{4.1.112}$$

Além disso, por argumentos clássicos de compacidade, (veja [41],[55]), deduzimos para uma eventual subsequência de $\{\varphi^m, \psi^m\}$ que

$$(\varphi^m, \psi^m) \to (\varphi, \psi) \text{ (forte) em } (L^2(0, T; L^q(\Omega)))^2 \ \ \forall\ q \in [2, 2^*[, \tag{4.1.113}$$

onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

Além disso, note que por (4.1.86) e (4.1.106) temos que

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega a(x)\frac{1}{c_m^2}|g(u_t^m)|^2\,dxdt = 0\\ &\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega b(x)\frac{1}{c_m^2}|g(v_t^m)|^2\,dxdt = 0.\end{aligned} \tag{4.1.114}$$

e

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega a(x)|\varphi_t^m|^2\,dxdt = 0\\ &\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega b(x)|\psi_t^m|^2\,dxdt = 0.\end{aligned} \tag{4.1.115}$$

Como $a(x) \geq a_0 > 0$ em $\omega \subset \Omega$ segue que

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\omega |\varphi_t^m(x,t)|^2\, dxdt = 0 \tag{4.1.116}$$

e como $b(x) \geq b_0 > 0$ em $\omega \subset \Omega$, segue que

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\omega |\psi_t^m(x,t)|^2\, dxdt = 0. \tag{4.1.117}$$

De (4.1.112), (4.1.116) e (4.1.117) temos que

$$\varphi_t(x,t) = 0, \quad \psi_t(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \omega\times]0,T[. \tag{4.1.118}$$

Além disso, como $0 \leq \gamma(x) \leq a(x)$ e $0 \leq \gamma(x) \leq b(x)$, temos por (4.1.115)

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \gamma(x)|\varphi_t^m|^2\, dxdt = 0 \\ \lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \gamma(x)|\psi_t^m|^2\, dxdt = 0, \end{aligned} \tag{4.1.119}$$

respectivamente.

Note que $c_m \to \lambda \in [0,+\infty[$. Se $\lambda > 0$ e como

$$\begin{aligned} c_m\varphi^m = u^m \to 0 \ \text{ (forte) em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ c_m\psi^m = v^m \to 0 \ \text{ (forte) em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

passando o limite em (4.1.108) concluímos que

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\varphi = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ \psi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\psi = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ \varphi_t = 0, \quad \psi_t = 0 \ \text{ em } \ \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{4.1.120}$$

e para $y = \varphi_t, z = \psi_t$ de (4.1.120) concluímos que

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}y = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ z_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}z = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ y = 0, \quad z = 0 \ \text{ em } \ \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{4.1.121}$$

que implica, pela Hipótese 4.6, que $y = z = 0$ e, consequentemente, $\varphi_t = \psi_t = 0$. Dessa forma, voltando em (4.1.120), deduzimos que $\varphi = \psi = 0$.

Agora, vamos considerar $\lambda = 0$, isto é, $c_m \to 0$. Note que podemos escrever

$$f(s) = f'(0)s + R(s), \quad \text{onde} \quad |R(s)| \leq C(|s|^2 + |s|^p).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_m} f(c_m \varphi^m) &= f'(0)\varphi^m + \frac{R(c_m\varphi^m)}{c_m}. \\ \frac{|R(c_m\varphi^m)|}{c_m} &\leq C(c_m|\varphi^m|^2 + |c_m|^{p-1}|\varphi^m|^p). \end{aligned} \tag{4.1.122}$$

Observe que

$$c_m|\varphi^m|^2 + |c_m|^{p-1}|\varphi^m|^p \to 0 \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.1.123}$$

De fato, como φ^m é limitada em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e como $1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}$ então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, assim segue que φ^m é limitada em $L^\infty(0,T;L^{2p}(\Omega))$, donde φ^m é limitada em $L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))$. Por outro lado,

$$\||\varphi^m|^p\|^2_{L^2L^2} = \int_0^T \||\varphi^m|^p\|^2_{L^2} dt = \int_0^T \int_\Omega |\varphi^m|^{2p} = \int_0^T \|\varphi^m\|^{2p}_{L^{2p}} = \|\varphi^m\|^{2p}_{L^{2p}L^{2p}}. \tag{4.1.124}$$

Assim, temos que $|\varphi^m|^p$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e, como $c_m \to 0$, segue (4.1.123).

Assim, por (4.1.122) e (4.1.123) temos que

$$\frac{1}{c_m} f(c_m\varphi^m) \to f'(0)\varphi \ \ \text{(forte) em} \ \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.1.125}$$

Analogamente, temos que

$$\frac{1}{c_m} h(c_m\psi^m) \to h'(0)\psi \ \ \text{(forte) em} \ \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.1.126}$$

Assim, passando o limite em (4.1.108), concluímos que

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\varphi + f'(0)\varphi = 0 \ \ \text{em} \ \ \Omega\times]0,T[, \\ \psi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\psi + h'(0)\psi = 0 \ \ \text{em} \ \ \Omega\times]0,T[, \\ \varphi_t = 0, \quad \psi_t = 0 \ \ \text{em} \ \ \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{4.1.127}$$

e para $y = \varphi_t, z = \psi_t$, concluímos que

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}y + f'(0)y = 0 \ \ \text{em} \ \ \Omega\times]0,T[, \\ z_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}z + h'(0)z = 0 \ \ \text{em} \ \ \Omega\times]0,T[, \\ y = 0, \quad z = 0 \ \ \text{em} \ \ \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{4.1.128}$$

que implica pela Hipótese 4.6, que $y = z = 0$ e, consequentemente, $\varphi_t = \psi_t = 0$.

Dessa forma, voltando em (4.1.126) temos que

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{g}}\varphi + f'(0)\varphi = 0 \\ -\Delta_{\mathbf{g}}\psi + h'(0)\psi = 0 \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (-\Delta_{\mathbf{g}}\varphi)\varphi dx + \int_\Omega f'(0)\varphi^2 dx = 0 \\ \\ \displaystyle\int_\Omega (-\Delta_{\mathbf{g}}\psi)\psi dx + \int_\Omega h'(0)\psi^2 dx = 0. \end{cases}$$

Analogamente ao feito em (4.1.104) deduzimos que $\varphi = \psi = 0$.

Lembre-se que nosso objetivo é provar que $\widehat{E}_m(0)$ converge para zero, onde

$$\begin{aligned} \widehat{E}_m(t) = \frac{1}{2}\Big(\|\varphi_t^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\psi_t^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}\varphi^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}\psi^m(t)\|_{L^2}^2 \Big) \\ + \frac{1}{c_m^2}\int_\Omega F(u^m(x,t))dx + \frac{1}{c_m^2}\int_\Omega H(v^m(x,t))dx \end{aligned} \tag{4.1.129}$$

é a energia associada ao sistema (4.1.108).

Para este propósito, considere

$$P := \partial_t^2 - \Delta_{\mathbf{g}}.$$

Primeiramente, provaremos que

$$\varphi_t^m \to 0 \text{ (forte) em } L^2(\Omega\times]0,T[).$$

Observe que pelas convergências obtidas acima, temos que

$$\varphi_t^m \rightharpoonup 0 \ \text{ (fraco) em } \ L^2(\Omega\times]0,T[). \tag{4.1.130}$$

Então considere μ_φ a medida de defeito microlocal (m.d.m.) associada a $\{\varphi_t^m\}$, (garantida pelo Teorema 1.72 conforme Observação 1.74). Assim pelas convergências em (4.1.114), (4.1.119) e (4.1.125) e, tendo em mente que $\varphi = 0 = \psi$, concluímos que

$$P\varphi^m = -\frac{1}{c_m}f(c_m\varphi^m) - \frac{1}{c_m}a(x)g(c_m\varphi_t^m) + \gamma(x)\psi_t^m \to 0 \ \text{ (forte) em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.1.131}$$

Analogamente ao feito em (3.2.40) deduzimos que

$$\partial_t P\varphi^m \to 0 \;\; \text{(forte) em} \;\; H^{-1}_{loc}(\Omega\times]0,T[). \tag{4.1.132}$$

Da convergência (4.1.132) concluímos dois fatos:

(i) O $\text{supp}(\mu_\varphi)$ está contido no conjunto característico do operador de ondas $\{\tau^2 = \frac{K(x)}{\rho(x)}\|\xi\|^2\}$ (pelo Teorema 1.76).

(ii) O $\text{supp}(\mu_\varphi)$ é uma união de curvas do tipo

$$t \in I\cap]0,\infty[\longmapsto m\pm(t) = \left(t, x(t), \pm\frac{1}{\sqrt{1+|G(x)\dot{x}|^2}}, \pm\frac{G(x)\dot{x}}{\sqrt{1+|G(x)\dot{x}|^2}}\right) \tag{4.1.133}$$

onde $t \in I \longmapsto x(t) \in \Omega$ é uma geodésica para a métrica $G = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$. (Pelo Teorema 1.81 e Proposição 1.82).

Dessa forma, tem-se que μ_φ se propaga ao longo do fluxo bicaracterístico do operador P de ondas, isto significa que se algum ponto $\omega_0 = (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ não pertence a $\text{supp}(\mu_\varphi)$ então toda bicaracterística começando por ω_0 está fora do $\text{supp}(\mu_\varphi)$.

Como por (4.1.116) temos que $\varphi_t^m \to 0$ fortemente em $L^2(\omega\times]0,T[)$ deduzimos (pela Observação 1.74) que $\mu_\varphi = 0$ em $\omega\times]0,T[$ e, consequentemente, $\text{supp}(\mu_\varphi) \subset (\Omega\backslash\omega)\times]0,T[$.

Por outro lado, sejam $t_0 \in (0,+\infty)$ e x uma geodésica definida perto de t_0. Como estamos assumindo por hipótese, que as geodésicas no interior de $\Omega\backslash\omega$ entram necessariamente na região ω, então para cada geodésica de métrica G, com $0 \in I$ existe $t > 0$ tal que $m\pm(t)$ não pertence ao $\text{supp}(\mu_\varphi)$, de modo que $m\pm(t_0)$ também não pertence ao $\text{supp}(\mu_\varphi)$. Como o tempo t_0 e a geodésica x são tomadas arbitrariamente, concluímos que $\text{supp}(\mu_\varphi)$ é vazio. Isto é, $\mu_\varphi = 0$ em todo $\Omega\times]0,T[$.

Assim, por propagação, (pela Observação 1.74), tem-se que

$$\varphi_t^m \to 0 \text{ (forte) em } L^2_{loc}(\Omega\times]0,T[) \tag{4.1.134}$$

e, como $\varphi_t^m \to 0$ (forte) em $L^2(\omega\times]0,T[)$, deduzimos que

$$\varphi_t^m \to 0 \text{ (forte) em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.1.135}$$

Da mesma forma, como

$$\psi_t^m \rightharpoonup 0 \ \text{(fraco) em} \ L^2(\Omega\times]0,T[),$$

então podemos considerar μ_ψ a medida de defeito microlocal (m.d.m.) associada a $\{\psi_t^m\}$. Pelas convergências em (4.1.114), (4.1.119) e (4.1.126) e, tendo em mente que $\varphi = 0 = \psi$, concluímos que

$$P\psi^m = -\frac{1}{c_m}h(c_m\psi^m) - \frac{1}{c_m}b(x)g(c_m\psi_t^m) - \gamma(x)\varphi_t^m \to 0 \ \text{(forte) em} \ L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De onde deduzimos que

$$\partial_t P\psi^m \to 0 \ \text{(forte) em} \ H^{-1}_{loc}(\Omega\times]0,T[). \tag{4.1.136}$$

Assim, analogamente ao feito anteriormente, concluímos que

$$\psi_t^m \to 0 \text{ (forte) em } L^2(\Omega\times]0,T[). \tag{4.1.137}$$

Agora, vamos fazer uso de uma equipartição de energia, para tal, considere $\theta \in C_0^\infty(0,T); 0 \leq \theta \leq 1$ e $\theta = 1$ em $]\epsilon, T-\epsilon[$ e multiplique a primeira equação de (4.1.108) por $\varphi^m\theta(t)$ e a segunda equação de (4.1.108) por $\psi^m\theta(t)$ então temos, respectivamente,

$$\begin{aligned}&\int_0^T \theta(t)(\varphi_{tt}^m(t),\varphi^m(t))dt - \int_0^T \theta(t)(\Delta_{\mathbf{g}}\varphi^m(t),\varphi^m(t))dt + \frac{1}{c_m}\int_0^T \theta(t)(f(c_m\varphi^m(t)),\varphi^m(t))dt\\ &-\int_0^T \theta(t)(\gamma(x)\psi_t^m(t),\varphi^m(t))dt + \frac{1}{c_m}\int_0^T \theta(t)(a(x)g(u_t^m(t)),\varphi^m(t))dt = 0\end{aligned} \tag{4.1.138}$$

e

$$\begin{aligned}&\int_0^T \theta(t)(\psi_{tt}^m(t),\psi^m(t))dt - \int_0^T \theta(t)(\Delta_{\mathbf{g}}\psi^m(t),\psi^m(t))dt + \frac{1}{c_m}\int_0^T \theta(t)(h(c_m\psi^m(t)),\psi^m(t))dt\\ &+\int_0^T \theta(t)(\gamma(x)\varphi_t^m(t),\psi^m(t))dt + \frac{1}{c_m}\int_0^T \theta(t)(b(x)g(v_t^m(t)),\psi^m(t))dt = 0.\end{aligned} \tag{4.1.139}$$

Integrando por partes (4.1.138), concluímos que

$$\begin{aligned}&-\int_0^T \theta(t)\int_\Omega |\varphi_t^m(x,t)|^2dxdt - \int_0^T \theta_t(t)\int_\Omega \varphi_t^m(x,t)\varphi^m(x,t)dxdt\\ &+\int_0^T \theta(t)\int_\Omega |\nabla_{\mathbf{g}}\varphi^m(x,t)|^2dxdt + \frac{1}{c_m}\int_0^T \theta(t)\int_\Omega f(c_m\varphi^m(x,t))\varphi^m(x,t)dxdt\\ &-\int_0^T \theta(t)\int_\Omega \gamma(x)\psi_t^m(x,t)\varphi^m(x,t)dxdt + \frac{1}{c_m}\int_0^T \theta(t)\int_\Omega a(x)g(u_t^m(x,t))\varphi^m(x,t)dt = 0\end{aligned} \tag{4.1.140}$$

Por (4.1.113), (4.1.114), (4.1.119), (4.1.125) e (4.1.134) e tendo em mente que $\varphi = \psi = 0$, de (4.1.140) deduzimos que

$$\lim_{m\to+\infty}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_\Omega |\nabla_{\mathbf{g}}\varphi^m(x,t)|^2 dxdt = 0. \tag{4.1.141}$$

Além disso, como

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{c_m}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_\Omega f(c_m\varphi^m(x,t))\varphi^m(x,t)dxdt\\ &= \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{c_m^2}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_\Omega f(u^m(x,t))u^m(x,t)dxdt = 0,\end{aligned} \tag{4.1.142}$$

então por (4.1.142) e (4.1.5) concluímos que

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{c_m^2}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_\Omega F(u^m(x,t))dxdt = 0. \tag{4.1.143}$$

Analogamente, por (4.1.113), (4.1.114), (4.1.119), (4.1.126), (4.1.137) e (4.1.139), concluímos que

$$\lim_{m\to+\infty}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_\Omega |\nabla_{\mathbf{g}}\psi^m(x,t)|^2 dxdt = 0 \tag{4.1.144}$$

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{c_m^2}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_\Omega H(v^m(x,t))dxdt = 0 \tag{4.1.145}$$

que implica, juntamente com as convergências acima, que

$$\int_\epsilon^{T-\epsilon}\widehat{E}_m(t) \to 0 \quad \text{quando} \quad m\to+\infty. \tag{4.1.146}$$

Como $\widehat{E}_m(t)$ é não crescente, então para todo $t\in[\epsilon, T-\epsilon]$ temos que

$$\int_\epsilon^{T-\epsilon}\widehat{E}_m(T-\epsilon)dt \le \int_\epsilon^{T-\epsilon}\widehat{E}_m(t)dt \longrightarrow 0.$$

Logo,

$$(T-2\epsilon)\widehat{E}_m(T-\epsilon)\to 0. \tag{4.1.147}$$

Dessa forma, combinando a identidade da energia

$$\widehat{E}_m(T-\epsilon)-\widehat{E}_m(\epsilon) = -\frac{1}{c_m^2}\int_\epsilon^{T-\epsilon}\int_\Omega a(x)g(u_t^m)u_t^m + b(x)g(v_t^m)v_t^m dxdt,$$

com (4.1.147), (4.1.114) e (4.1.135) segue que

$$\widehat{E}_m(\epsilon) \to 0. \tag{4.1.148}$$

Assim, pela identidade da energia novamente, por (4.1.114), (4.1.148) e (4.1.135) temos que

$$\begin{aligned}\widehat{E}_m(0) &= -[\widehat{E}_m(\epsilon) - \widehat{E}_m(0)] + \widehat{E}_m(\epsilon)\\ &= \frac{1}{c_m^2}\int_0^\epsilon \int_\Omega a(x)g(u_t^m)u_t^m + b(x)g(v_t^m)v_t^m dxdt + \widehat{E}_m(\epsilon) \longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{4.1.149}$$

Portanto, $\widehat{E}_m(0) \to 0$ quando $m \to +\infty$, como queríamos demonstrar. ∎

4.1.7 Caso Semilinear ($\frac{n}{n-2} < p < \frac{n+2}{n-2}$)

Nesta subseção vamos estudar o caso $\frac{n}{n-2} < p < \frac{n+2}{n-2}$ para $n \geq 3$. Por simplicidade, assim como fizemos na existência, vamos assumir $n = 3$, para $n > 3$ o resultado pode ser provado analogamente. Da subseção anterior, é suficiente provar a desigualdade de observabilidade, a saber:

$$E(0) \leq C\int_0^T \int_\Omega a(x)(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2) + b(x)(|g(v_t)|^2 + |v_t|^2)\, dxdt, \text{ para todo } T > T_0, \tag{4.1.150}$$

onde T e C são constantes positivas e dado que $E(0) \leq R$. Para provar isto, vamos combinar as estimativas de Strichartz para equação da onda com o princípio de continuação única, como enunciado na Proposição 1.88.

Vamos mostrar (4.1.150) por contradição. Suponha que (4.1.150) não seja verdadeira, então existe uma sequência $\{u^k, v^k\}$ de soluções fracas para o problema (4.1.15), tal que $E_k(0) \leq R$ e

$$\lim_{k\to\infty} \frac{E_k(0)}{\int_0^T \int_\Omega a(x)(|g(u_t^k)|^2 + |u_t^k|^2) + b(x)(|g(v_t^k)|^2 + |v_t^k|^2)\, dxdt} = +\infty. \tag{4.1.151}$$

De (4.1.151) tem-se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^T \int_\Omega a(x)(|g(u_t^k)|^2 + |u_t^k|^2) + b(x)(|g(v_t^k)|^2 + |v_t^k|^2)\, dxdt}{E_k(0)} = 0. \tag{4.1.152}$$

Considere a seguinte sequência de problemas

$$\begin{cases} u^k_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u^k + f(u^k) + a(x)g(u^k_t) - \gamma(x)v^k_t = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[,\\ v^k_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} v^k + h(v^k) + b(x)g(v^k_t) + \gamma(x)u^k_t = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[,\\ u^k = v^k = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,T[,\\ u^k(0) = u^k_0, \ u^k_t(0) = u^k_1 \ \text{ em } \ \Omega,\\ v^k_t(0) = v^k_0, \ v^k_t(0) = v^k_1 \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{4.1.153}$$

Agora, defina:

$$c_k := [E_k(0)]^{1/2}, \ \varphi^k := \frac{u^k}{c_k}, \psi^k := \frac{v^k}{c_k}. \tag{4.1.154}$$

Analogamente ao que fizemos anteriormente, temos que existe $C > 0$ tal que $1/C \leq E_{(\varphi^k,\psi^k)}(0) \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e a sequência c_k é limitada. Para obter uma contradição, precisamos provar que $\widehat{E}_k(0) := E_{(\varphi^k,\psi^k)}(0)$ converge para zero.

De fato, por (4.1.152) e (4.1.154) concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x)(|\varphi^k_t|^2 + \frac{1}{c_k^2}|g(u^k_t)|^2) + b(x)(|\psi^k_t|^2 + \frac{1}{c_k^2}|g(v^k_t)|^2)\, dxdt = 0. \tag{4.1.155}$$

Dessa forma, de (4.1.155) e como $0 \leq \gamma(x) \leq a(x)$ e $0 \leq \gamma(x) \leq b(x)$ temos, respectivamente que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \gamma(x)|\varphi^k_t|^2 dxdt = 0\\ \lim_{k\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \gamma(x)|\psi^k_t|^2 dxdt = 0. \end{aligned} \tag{4.1.156}$$

Além disso, como $\widehat{E}_k(0) \leq C$ temos que

$$\begin{aligned} &\text{para cada } T > 0 \ \text{ fixado, } \{\varphi^k,\psi^k\}, \{\varphi^k_t,\psi^k_t\} \text{ são sequências limitadas em}\\ &(L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)))^2 \text{ e } (L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^2, \text{respectivamente.} \end{aligned} \tag{4.1.157}$$

Dessa forma, deduzimos para uma eventual subsequência de $\{\varphi^k,\psi^k\}$ que

$$(\varphi^k,\psi^k) \overset{*}{\rightharpoonup} (\varphi,\psi) \text{ (fraco estrela) em } (L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)))^2, \tag{4.1.158}$$

$$(\varphi^k_t,\psi^k_t) \overset{*}{\rightharpoonup} (\varphi_t,\psi_t) \text{ (fraco estrela) em } (L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^2, \tag{4.1.159}$$

$$(\varphi^k,\psi^k) \to (\varphi,\psi) \text{ (forte) em } (L^2(0,T;L^q(\Omega)))^2 \ \ \forall\, q \ \in [2,2^*[, \tag{4.1.160}$$

onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

Considere a seguinte sequência de problemas normalizados

$$\begin{cases} \varphi^k_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\varphi^k + \frac{1}{c_k}f(u^k) + \frac{1}{c_k}a(x)g(u^k_t) - \gamma(x)\psi^k_t = 0 \;\text{ em }\; \Omega\times]0,T[, \\ \psi^k_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\psi^k + \frac{1}{c_k}h(v^k) + \frac{1}{c_k}b(x)g(v^k_t) + \gamma(x)\varphi^k_t = 0 \;\text{ em }\; \Omega\times]0,T[, \\ \varphi^k = \psi^k = 0 \text{ sobre }\; \partial\Omega\times]0,T[, \\ \varphi^k(0) = \varphi^k_0,\; \varphi^k_t(0) = \varphi^k_1 \;\text{ em }\; \Omega, \\ \psi^k(0) = \psi^k_0,\; \psi^k_t(0) = \psi^k_1 \;\text{ em }\; \Omega. \end{cases} \tag{4.1.161}$$

Observe que $c_k \to \lambda \in [0,\infty[$. Vamos dividir nosssa prova em dois casos: $\lambda > 0$ ou $\lambda = 0$.

Caso (i): $\lambda > 0$**.**

Passando o limite em (4.1.161) temos que

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\varphi + \frac{1}{\lambda}f(\lambda\varphi) = 0 \;\text{ em }\; \Omega\times]0,T[, \\ \psi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\psi + \frac{1}{\lambda}h(\lambda\psi) = 0 \;\text{ em }\; \Omega\times]0,T[, \\ \varphi_t = \psi_t = 0 \text{ sobre }\; \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{4.1.162}$$

e então, usando a Proposição 1.88 em cada equação de (4.1.162) separadamente, temos que $\varphi = \psi \equiv 0$.

Caso (ii): $\lambda = 0$**.**

Agora, vamos considerar $\lambda = 0$, isto é, se $c_k \to 0$. Note que podemos escrever

$$f(s) = f'(0)s + R(s), \text{ onde } |R(s)| \leq C(|s|^2 + |s|^p).$$

Então

$$\frac{1}{c_k}f(c_k\varphi^k) = f'(0)\varphi^k + \frac{R(c_k\varphi^k)}{c_k},$$

$$\frac{R(c_k\varphi^k)}{c_k} \leq C(c_k|\varphi^k|^2 + |c_k|^{p-1}|\varphi^k|^p).$$

Afirmação:

$$|c_k|^{p-1}\||\varphi^k|^p\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to 0 \quad \text{quando } k \to \infty. \tag{4.1.163}$$

De fato, temos que $F_0 = -a(x)g(u_t^k) + \gamma(x)v_t^k \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ então podemos fazer uso das estimativas de Strichartz como no Lema 1.84 para a primeira equação do problema (4.1.153), para obter a limitação

$$\|u^k\|_{L^5L^{10}} \leq C((E_k(0))^{\frac{1}{2}} + \|F_0\|_{L^1L^2}) \leq C$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, disto concluímos que $f(u^k) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e a norma $\|f(u^k)\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$ pode ser controlada pela norma $\|u^k\|_{L^5(0,T;L^{10}(\Omega))}$ que é uniformemente limitada, em $k \in \mathbb{N}$.

Além disso, como $G_0 = -a(x)g(u_t^k) + \gamma(x)\psi_t^k - f(u^k) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ então, usando as estimativas de Strichartz para a primeira equação do problema (4.1.161) temos que

$$\|\varphi^k\|_{L^5L^{10}} \leq C\left([\widehat{E}_k(0)]^{\frac{1}{2}} + \|G_0\|_{L^1L^2}\right) \leq C \tag{4.1.164}$$

onde a constante $C > 0$ não depende de k.

Consequentemente, como $\||\varphi^k|^p\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$ pode ser controlado pela norma $\|\varphi^k\|_{L^5L^{10}}$, podemos concluir que $(|\varphi^k|^p)$ é uma sequência limitada em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e, portanto, como $c_k \to 0$ provamos (4.1.163), o que nos leva a

$$\frac{1}{c_k}f(c_k\varphi^k) \to f'(0)\varphi \text{ (forte) em } L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.1.165}$$

Analogamente temos que

$$\frac{1}{c_k}h(c_k\psi^k) \to h'(0)\psi \text{ (forte) em } L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.1.166}$$

Assim, passando o limite em (4.1.161) temos que

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\varphi + f'(0)\varphi = 0 \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ \psi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\psi + h'(0)\psi = 0 \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ \varphi_t = \psi_t = 0 \text{ em } \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{4.1.167}$$

e para $y = \varphi_t, z = \psi_t$ de (4.1.167) concluímos que

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}y + V_1 y = 0 \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ z_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}z + V_2 z = 0 \text{ em } \Omega\times]0,T[, \\ y = z = 0 \text{ em } \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{4.1.168}$$

que implica pela Hipótese 4.6, que $y = z = 0$ e, consequentemente, $\varphi = \psi = 0$. Assim em ambos os casos $\varphi = \psi = 0$. Lembre-se que nosso principal objetivo é provar que $\widehat{E}_k(0)$ converge para zero. Para este propósito, considere

$$P := \Box = \partial_t^2 - \Delta_{\mathbf{g}}.$$

Primeiramente, provaremos que

$$\varphi_t^k \to 0 \ \text{(forte) em} \ L^2(\Omega\times]0,T[).$$

Das convergências acima sabemos que

$$\varphi^k \rightharpoonup 0 \ \text{(fraco) em} \ H^1(\Omega\times]0,T[).$$

Assim, considere μ_φ a medida de defeito microlocal associada a (φ^k) em $H^1(\Omega\times]0,T[)$, isto é, μ_φ é a m.d.m associada com (φ_t^k) e $(\nabla_{\mathbf{g}}\varphi^k)$ em $L^2_{loc}(\Omega\times]0,T[)$.

Observe agora, que a sequência (φ^k) é linearizável no sentido da Definição 1.85. De fato, temos que (φ^k, ψ^k) é uma sequência de soluções para o problema (4.1.161), considere o seguinte problema da onda linear com dados iniciais $(\varphi_0^k, \varphi_1^k)$

$$\begin{cases} w^k - \Delta_{\mathbf{g}} w^k = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ w^k = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,T[, \\ w^k(0) = \varphi_0^k, \ w_t^k(0) = \varphi_1^k \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.169}$$

Assim, para $z^k = \varphi^k - w^k$ temos que

$$\begin{cases} (\varphi^k - w^k)_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}(\varphi^k - w^k) = -\frac{1}{c_k} f(u^k) + \gamma(x)\psi_t^k - \frac{1}{c_k} a(x) g(u_t^k) = G^k \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ \varphi^k - w^k = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,T[, \\ (\varphi^k - w^k)(0) = (\varphi^k - w^k)_t(0) = 0 \ \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Temos que $G^k = -\frac{1}{c_k} f(u^k) + \gamma(x)\psi_t^k - \frac{1}{c_k} a(x) g(u_t^k) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Além disso, dos casos (i) e (ii) temos que

$$\left\| \frac{1}{c_k} f(u_k) \right\|_{L^1 L^2}^2 \to 0,$$

e, pela hipótese de contradição,

$$\int_0^T \|\gamma(x)\psi_t^k\|_{L^2}^2 \leq \|\gamma\|_\infty \int_0^T \int_\Omega \gamma(x)|\psi_t^k|^2 \to 0,$$

e

$$\int_0^T \left\| \frac{1}{c_k} a(x) g(u_t^k) \right\|_{L^2}^2 \leq \|a\|_\infty \int_0^T \int_\Omega a(x) \frac{1}{c_k^2} |g(u_t^k)|^2 \to 0.$$

Portanto, $G^k \to 0$ (forte) em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e assim, pela Observação 1.87, a sequência φ^k é linearizável no sentido da Definição 1.85 e, então, concluímos que μ_φ se propaga como uma H^1-m.d.m. associada a equação da onda linear com os mesmos dados iniciais. Assim, pelo exposto no Capítulo 1, Seção 1.11 segue que

$$\text{supp}(\mu_\varphi) \subset \{\tau^2 = (\mathbf{g}_{ij})^{-1}|\xi|^2\}$$

e que μ_φ se propaga ao longo do fluxo bicaracterístico do operador de ondas.

Por outro lado,

$$\varphi_t^k \to 0 \ \ \text{(forte) em } L^2(\omega \times]0,T[), \tag{4.1.170}$$

o que implica (pela Observação 1.74) que $\mu_\varphi = 0$ em $\omega\times]0,T[$ de modo que μ_φ não apresenta medida de defeito em $\omega\times]0,T[$ e, assim, $\text{supp}(\mu_\varphi) \subset (\Omega\backslash\omega)\times]0,T[$. Como ω controla geometricamente Ω, então as geodésicas no interior de $\Omega\backslash\omega$, entram necessariamente na região ω, para toda geodésica de métrica $G = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$. Logo, $\text{supp}(\mu_\varphi)$ é vazio e, dessa forma, $\mu_\varphi \equiv 0$ em todo $\Omega\times]0,T[$. Portanto, $\varphi^k \to 0$ (forte) em $H^1(\Omega\times]0,T[)$ donde concluímos que que

$$\varphi_t^k \to 0 \ \ \text{(forte) em } L^2(\Omega \times]0,T[). \tag{4.1.171}$$

Analogamente, como

$$\psi^k \rightharpoonup 0 \ \ \text{(fraco) em } H^1(\Omega\times]0,T[),$$

então podemos considerar μ_ψ a medida de defeito microlocal associada a (ψ^k) em $H^1(\Omega\times]0,T[)$, isto é, μ_ψ é a m.d.m associada com (ψ_t^k) e $(\nabla_{\mathbf{g}}\psi^k)$ em $L^2_{loc}(\Omega\times]0,T[)$.

Da mesma forma, a sequência (ψ^k) é linearizável no sentido da Definição 1.85. De fato, basta considerar agora, o problema da onda linear com dados iniciais (ψ_0^k, ψ_1^k)

$$\begin{cases} w^k - \Delta_{\mathbf{g}} w^k = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ w^k = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,T[, \\ w^k(0) = \psi_0^k, \ w_t^k(0) = \psi_1^k \ \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{4.1.172}$$

Assim, para $y^k = \psi^k - w^k$ temos que

$$\begin{cases}(\psi^k - w^k)_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}(\psi^k - w^k) = -\frac{1}{c_k}h(v^k) - \gamma(x)\varphi_t^k - \frac{1}{c_k}b(x)g(v_t^k) = G_1^k \text{ em } \Omega\times]0,T[,\\ \psi^k - w^k = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times]0,T[,\\ (\psi^k - w^k)(0) = (\psi^k - w^k)_t(0) = 0 \text{ em } \Omega.\end{cases}$$

Temos que $G_1^k = -\frac{1}{c_k}f(v^k) - \gamma(x)\varphi_t^k - \frac{1}{c_k}b(x)g(v_t^k) \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e, além disso, dos casos (i), (ii) e pela hipótese de contradição, temos que $G_1^k \to 0$ (forte) em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Assim, pela Observação 1.87, a sequência ψ^k é linearizável no sentido da Definição 1.85 e, então, concluímos que μ_ψ se propaga como uma H^1-m.d.m. associada a equação da onda linear com os mesmos dados iniciais.

Assim, analogamente ao feito anteriormente, concluímos que

$$\psi_t^k \to 0 \text{ (forte) em } L^2(\Omega\times]0,T[). \tag{4.1.173}$$

Dessa forma, usando uma equipartição da energia, como fizemos anteriormente, concluímos que $\widehat{E}_k(0) \to 0$, como desejávamos provar. ■

4.1.8 Taxa de Decaimento Uniforme

Antes de iniciar nosso resultado de estabilidade, definiremos algumas funções necessárias. Para este propósito, vamos seguir as ideias introduzidas primeiramente por Lasiecka e Tataru em [39]. Seja uma função ϕ côncava, estritamente crescente tal que $\phi(0) = 0$ e

$$\phi(yg(y)) \geq |y|^2 + |g(y)|^2 \text{ para } |y| < 1. \tag{4.1.174}$$

A seguir, definimos

$$r(\cdot) = \phi\left(\frac{\cdot}{med(Q_T)}\right), Q_T = \Omega\times]0,T[\text{ associado com o problema (4.1.15)}. \tag{4.1.175}$$

Observe que r é monótona crescente, então $cI + r$ é invertível para todo $c \geq 0$. Para L uma constante positiva, colocamos

$$z(x) = (cI + r)^{-1}(Lx), \quad L := (Cmed(Q_T)((1 + \|a\|_\infty) + (1 + \|b\|_\infty))^{-1}, \tag{4.1.176}$$

onde c é uma constante positiva que será estabelecida posteriormente.

Desta forma, a função z é positiva, contínua e estritamente crescente com $z(0) = 0$. Finalmente, seja

$$q(x) = x - (I + z)^{-1}(x). \tag{4.1.177}$$

Podemos agora enunciar nosso resultado de estabilidade.

Teorema 4.13 *Suponha que as hipóteses 4.1-4.5 sejam satisfeitas. Seja $\{u, v\}$ a solução fraca do problema* (4.1.15) *com a energia $E(t)$ definida como em* (4.1.16). *Então existe um $T_0 > 0$ tal que*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right) \quad \forall \quad t > T_0 \tag{4.1.178}$$

com $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$, onde o semigrupo de contração $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \tag{4.1.179}$$

onde q é dado em (4.1.177). *Aqui a constante c (da Definição* (4.1.176)*) é*
$c \equiv \frac{(k^{-1}+K)}{med(Q_T)((1+\|a\|_\infty)+(1+\|b\|_\infty))}$.

Demonstração: Analogamente ao que fizemos no Capítulo 2 para provar o Teorema 2.25, mostramos o Teorema 4.13.

■

4.2 Sistema II

O segundo problema deste capítulo consiste em estudar a estabilidade uniforme do seguinte sistema

$$\begin{cases} \rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla u] + f(u) + a(x)g(u_t) + \delta v = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,\infty[, \\ \rho(x)v_{tt} - \operatorname{div}[K(x)\nabla v] + h(v) + b(x)g(v_t) + \delta u = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,\infty[, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,\infty[, \\ u(0) = u^0, \ u_t(0) = u^1 \ \text{ em } \ \Omega, \\ v(0) = v^0, \ v_t(0) = v^1 \ \text{ em } \ \Omega, \end{cases} \tag{4.2.180}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$, com fronteira suave $\partial\Omega$, $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $k_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq d$ são funções $C^\infty(\Omega)$ tais que para todo $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0, \quad k_{ij}(x) = k_{ji}(x), \quad \alpha|\xi|^2 \leq \xi^\top \cdot K(x) \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2, \tag{4.2.181}$$

onde $\alpha_0, \beta_0, \alpha, \beta$ são constantes positivas e $K(x) = (k_{ij})_{i,j}$ é uma matriz simétrica positiva definida. Vamos denotar por $\omega \subset \Omega$ um conjunto aberto dado pela interseção de uma vizinhança aberta da fronteira $\partial\Omega$ em $\mathbb{R}^n$ e que controla geometricamente a equação (4.2.180).

Hipótese 4.14 • *f e h satisfazem a Hipótese 4.1 com*

$$p \geq 1 \ \ \textit{para} \ \ n = 2, \quad \textit{e} \ \ 1 \leq p \leq \frac{n}{n-2} \ \ \textit{para} \ \ n \geq 3.$$

- *g satisfaz a Hipótese 4.2.*
- *As funções $a = a(x), b = b(x) \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ são reais não negativas e satisfazem a Hipótese 4.3.*

Hipótese 4.15 *δ é um número real positivo suficientemente pequeno tal que $\delta < \lambda_1 - \beta$, onde λ_1 e β são dados em (4.1.5).*

Hipótese 4.16 *Assumiremos a Condição Geométrica de Controle dada na Hipótese 4.5.*

Hipótese 4.17 *Para todo $T > 0$, a única solução $u, v \in C(]0, T[; L^2(\Omega)) \cap C(]0, T[; H^{-1}(\Omega))$ para o sistema*

$$\begin{cases} u_{tt} - \operatorname{div}[(K/\rho)\nabla u] + V_1(x,t)u = V_3(x,t)v & \textit{em} \ \ \Omega \times (0,T), \\ v_{tt} - \operatorname{div}[(K/\rho)\nabla v] + V_2(x,t)v = V_3(x,t)u & \textit{em} \ \ \Omega \times (0,T), \\ u = v = 0 & \textit{sobre} \ \ \omega, \end{cases} \tag{4.2.182}$$

onde $V_1(x,t), V_2(x,t)$ e $V_3(x,t)$ são elementos de $L^\infty(]0,T[, L^{\frac{n+1}{2}})$, é a trivial, isto é, $u = v = 0$.

Observação 4.18 *Em [26] devido a Cavalcanti et al., foi provado um princípio de continuação única para sistemas hiperbólicos acoplados de segunda ordem com coeficientes e potenciais em $L^{\frac{n+1}{2}}$. Os autores se inspiraram em Dos Santos Ferreira em [31] e Koch-Tataru* *em [59] e usaram as estimativas de $L^p - L^q$-Calerman . Este resultado nos dá certas situações em que a propriedade de continuação única dada na Hipótese 4.17 vale. Este resultado está enunciado e provado na Seção 1.13.*

4.2.1 Resultados Prévios

Assim como fizemos anteriormente, em vez de estudar o problema específico (4.2.180), vamos considerar o problema auxiliar, que será descrito na sequência. Da mesma forma, induziremos em Ω uma métrica Riemanniana $\mathbf{g}$ tal que $(\Omega, \mathbf{g})$ é uma variedade conexa, compacta, orientável n-dimensional com métrica $\mathbf{g}$ de classe C^∞ e fronteira suave $\partial\Omega$.

Vamos denotar $\Delta_{\mathbf{g}}$ o operador Laplace-Beltrami em $(\Omega, \mathbf{g})$ e $\nabla_{\mathbf{g}}$ sua conexão Riemanniana. Consideremos o seguinte sistema acoplado:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u + f(u) + a(x)g(u_t) + \delta v = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times]0, \infty[, \\ v_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} v + h(v) + b(x)g(v_t) + \delta u = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times]0, \infty[, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega \times]0, \infty[, \\ u(0) = u^0, \ u_t(0) = u^1 \ \text{ em } \ \Omega, \\ v(0) = v^0, \ v_t(x, 0) = v^1(x) \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{4.2.183}$$

A energia associada ao problema (4.2.183) é dada por

$$\begin{aligned} E(t) := & \int_\Omega \frac{1}{2}|u_t(x,t)|^2 + \frac{1}{2}|v_t(x,t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_{\mathbf{g}} u(x,t)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_{\mathbf{g}} v(x,t)|^2 dx \\ & + \int_\Omega F(u(x,t))dx + \int_\Omega H(v(x,t))dx + \delta \int_\Omega u(x,t)v(x,t)dx. \end{aligned} \tag{4.2.184}$$

Observação 4.19 $E(t) \geq 0$.

Demonstração: De fato, observe que

$$\delta \int_\Omega uv dx = -(-\delta) \int_\Omega uv dx.$$

Pela desigualdade de Hölder e pela desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
-\delta \int_\Omega uvdx &\leq \left| -\delta \int_\Omega uvdx \right| \\
&\leq |\delta| \int_\Omega |u||v|dx \\
&\leq |\delta|(\|u(t)\|_{L^2}\|v(t)\|_{L^2}) \\
&\leq |\delta|\left(\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2\right) \\
&= \frac{|\delta|}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{|\delta|}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{|\delta|}{2\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{|\delta|}{2\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
\tag{4.2.185}
$$

Dessa forma,

$$
-(-\delta) \int_\Omega uvdx \geq -\frac{|\delta|}{2\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{|\delta|}{2\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2,
$$

e, portanto,

$$
\delta \int_\Omega uvdx \geq -\frac{|\delta|}{2\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{|\delta|}{2\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2. \tag{4.2.186}
$$

Dessa forma, por (4.1.5) e (4.2.186), deduzimos que

$$
\begin{aligned}
E(t) &\geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{|\delta|}{2\lambda_1}\right)\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{|\delta|}{2\lambda_1}\right)\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 \\
&- \frac{\beta}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\beta}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2 \\
&\geq \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{|\delta|}{2\lambda_1}\right)\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{|\delta|}{2\lambda_1}\right)\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 \\
&- \frac{\beta}{2\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\beta}{2\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v_t(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1} - \frac{\beta}{\lambda_1}\right)\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1} - \frac{\beta}{\lambda_1}\right)\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 \\
&\geq \frac{\beta_1}{2}\|(u, v, u_t, v_t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned}
\tag{4.2.187}
$$

onde $\beta_1 = 1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1} - \frac{\beta}{\lambda_1} > 0 \Leftrightarrow |\delta| < \lambda_1 - \beta$.

Ou seja, $E(t) \geq 0$, como queríamos demonstrar. ∎

Procederemos formalmente. Multiplicando a primeira equação do problema (4.2.183) por u_t e a segunda equação de (4.2.183) por v_t, tem-se

$$\begin{cases}(u_{tt},u_t)+((u,u_t))+(f(u),u_t)+(\delta v,u_t)+(a(x)g(u_t),u_t)=0\\(v_{tt},v_t)+((v,v_t))+(h(v),v_t)+(\delta u,v_t)+(b(x)g(v_t),v_t)=0\end{cases}$$

donde

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left[\|u_t(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla_{\mathbf{g}}u(t)\|_{L^2}^2\right]+\displaystyle\int_\Omega f(u)u_t dx+\delta\int_\Omega vu_t dx=-\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx.\\[2ex]\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\left[\|v_t(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla_{\mathbf{g}}v(t)\|_{L^2}^2\right]+\displaystyle\int_\Omega h(v)v_t dx+\delta\int_\Omega uv_t dx=-\int_\Omega b(x)g(v_t)v_t dx.\end{cases} \tag{4.2.188}$$

Note que

$$\delta\int_\Omega(vu_t+uv_t)dx=\delta\int_\Omega(uv)_t dx=\delta\frac{d}{dt}\int_\Omega uv dx,$$

pois

$$\left\langle\frac{d}{dt}\int_\Omega uv dx,\theta\right\rangle=\left\langle\int_\Omega(uv)_t dx,\theta\right\rangle,\quad\forall\ \theta\in\mathcal{D}(0,T).$$

Dessa forma, somando as equações em (4.2.188) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg[&\|u_t(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla_{\mathbf{g}}u(t)\|_{L^2}^2+\|v_t(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla_{\mathbf{g}}v(t)\|_{L^2}^2\\&+2\int_\Omega F(u)dx+2\int_\Omega H(v)dx+2\delta\int_\Omega uv dx\Bigg]\\&=-\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t dx-\int_\Omega b(x)g(v_t)v_t dx\end{aligned} \tag{4.2.189}$$

onde $F(w)=\int_0^w f(\tau)d\tau$.

Pelo fato que $a(x),b(x)$ são funções não negativas e pela Hipótese 4.2, segue de (4.2.189) que

$$\frac{d}{dt}E(t)\leq 0. \tag{4.2.190}$$

Além disso, obtemos a identidade da energia:

$$E(t_2)-E(t_1)=-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t+b(x)g(v_t)v_t dx dt,\ \forall\ 0\leq t_1\leq t_2<\infty. \tag{4.2.191}$$

Como no problema anterior, inspirados em [7], voltamos ao nosso problema original (4.2.180) tendo em mente que $\rho \in C^{\infty}(\Omega)$ e $\alpha_0 \leq \rho(x) \leq \beta_0$. Fixe um sistema de coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$ sobre $(\Omega, \mathbf{g})$, com $\mathbf{g}$ sendo a métrica Riemanniana definida pela matriz $g_{ij} = \left(\frac{K(x)}{\rho(x)}\right)^{-1}$ cuja inversa é denotada por $(g_{ij})^{-1} = g^{ij}$ e defina

$$\rho = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

O operador Laplace-Beltrami neste sistema de coordenadas é dado por

$$\Delta_{\mathbf{g}} u = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\rho(x)} \mathrm{div}(K(x) \nabla u)$$

onde ∇ é o gradiente usual correspondente à métrica Euclidiana.

Consequentemente,

$$\rho(x) \partial_t^2 u - \mathrm{div}[K(x) \nabla u] = 0 \ \Leftrightarrow \ \partial_t^2 u - \Delta_{\mathbf{g}} u = 0.$$

Assim, analisar o problema (4.2.180) é equivalente a analisar o problema (4.2.183).

4.2.2 Boa Colocação

Para mostrar a existência, vamos considerar o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = (H_0^1(\Omega))^2 \times (L^2(\Omega))^2$$

munido do produto interno

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} (\nabla_{\mathbf{g}} u_1 \nabla_{\mathbf{g}} v_1 + \nabla_{\mathbf{g}} u_2 \nabla_{\mathbf{g}} v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4) dx$$

onde $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^{\top}$ e $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)^{\top}$ e $\top$ denota o transposto.

Denotando $\widetilde{u} = u_t$, $\widetilde{v} = v_t$, então para $W(t) = (u, v, \widetilde{u}, \widetilde{v})^{\top}$ o problema (4.2.183) pode ser reescrito como um problema de primeria ordem como segue:

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dt}(t) + \mathcal{A} W(t) = \mathcal{F}(W(t)) \\ W(0) = W^0 \end{cases} \tag{4.2.192}$$

onde $W^0 = (u^0, v^0, u^1, v^1)$ e o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dado por $\mathcal{A} = A + B$ com operadores componentes definidos por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \\ -\Delta_{\mathbf{g}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_{\mathbf{g}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2.193}$$

onde $D(A) = \{(h, w, z, y) \in \mathcal{H}; \Delta_{\mathbf{g}} h, \Delta_{\mathbf{g}} w \in L^2(\Omega)\} = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$ e o operador $B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(x)g(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b(x)g(\cdot) \end{pmatrix}. \tag{4.2.194}$$

Como $D(A) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$, $D(B) = \mathcal{H}$ segue que $D(\mathcal{A}) = D(A)$.

O operador $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f(\cdot) & -\delta I & 0 & 0 \\ -\delta I & -h(\cdot) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2.195}$$

Teorema 4.20 *Suponha que as hipóteses dos termos não lineares f e h especificadas na Hipótese 4.1 sejam satisfeitas, com a restrição $p \geq 1$ se $n = 2$ e $1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}$ se $n \geq 3$ e os dados iniciais $(u^0, v^0, u^1, v^1) \in \mathcal{H}$. Então o problema (4.2.192) possui uma única solução generalizada $(u, v, \widetilde{u}, \widetilde{v}) \in C([0, T]; \mathcal{H})$. Além disso, se $(u^0, v^0, u^1, v^1) \in D(\mathcal{A})$, então a solução é regular.*

Demonstração: Tal como fizemos anteriormente, podemos mostrar que $\mathcal{A} = A + B$ é um operador maximal monótono no espaço da energia $\mathcal{H}$, além disso, se $1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}$ como consequência da desigualdade de Hölder e de imersões de Sobolev, prova-se que $\mathcal{F}$ define um operador contínuo localmente Lipschitz. Dessa forma, pelo Teorema 1.39, o problema de Cauchy (4.2.192) tem uma única solução generalizada $W = (u, v, u_t, v_t)$ no intervalo $[0, T_{max}[$. Além disso, se $W^0 \in D(\mathcal{A})$, a solução é regular.

Vejamos agora que $T_{max} = +\infty$. De fato, se, por absurdo, $T_{max} < +\infty$, então, pelo Teorema 1.39,

$$\lim_{t \nearrow T_{max}} \|W(t)\|_{\mathcal{H}} = +\infty. \tag{4.2.196}$$

Como a energia $E(t)$ definida em (4.2.184) é não crescente, temos que $E(t) \leq E(0)$ $\forall\ t \in [0, T_{max}[$.

Por outro lado, em (4.2.187) temos que

$$E(t) \geq \frac{\beta_1}{2}\|(u, v, u_t, v_t)\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Assim,

$$\frac{\beta_1}{2}\|W\|^2_{\mathcal{H}} \leq E(t) \leq E(0)\ \forall t \in [0, T_{max}),$$

contrariando (4.2.196). Portanto $T_{max} = +\infty$. ■

4.2.3 Desigualdade de Observabilidade

Lema 4.21 *Suponha que os dados iniciais satisfazem $E(0) \leq R$. Então para $T > 0$ e $R > 0$, existe uma constante $C = C(T, R) > 0$ tal que a desigualdade*

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_\Omega a(x)(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2) + b(x)(|g(v_t)|^2 + |v_t|^2)dxdt \tag{4.2.197}$$

vale para toda solução fraca $\{u, v\}$ do problema (4.2.183).

Demonstração: Por argumentos clássicos, é suficiente trabalhar com soluções regulares. No entanto, o resultado permanece válido para soluções fracas usando argumentos de densidade. Vamos argumentar por contradição. Suponha, por absurdo, que (4.2.197) não seja verdadeira. Então considere $\{u_0^m, v_0^m, u_1^m, v_1^m\}$ uma sequência de dados iniciais onde a correspondente solução $\{u^m, v^m\}$ com $E_m(0)$ uniformemente limitada em m, verifica

$$\lim_{m\to\infty} \frac{E_m(0)}{\int_0^T \int_\Omega a(x)(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2) + b(x)(|g(v_t)|^2 + |v_t|^2)dxdt} = +\infty. \tag{4.2.198}$$

De onde tem-se

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\int_0^T \int_\Omega a(x)(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2) + b(x)(|g(v_t)|^2 + |v_t|^2)dxdt}{E_m(0)} = 0. \tag{4.2.199}$$

Como $E_m(t)$ é não crescente e $E_m(0)$ é limitada então, obtemos uma subsequência de $\{u^m, v^m\}$, denotada da mesma forma, que verifica

$$(u^m, v^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v) \text{ (fraco estrela) em } (L^\infty(0,T;\ H_0^1(\Omega)))^2, \tag{4.2.200}$$

$$(u_t^m, v_t^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_t, v_t) \text{ (fraco estrela) em } (L^\infty(0,T; L^2(\Omega)))^2. \tag{4.2.201}$$

Além disso, por argumentos de compacidade clássicos, (veja [41],[55]), deduzimos para uma eventual subsequência, que

$$(u^m, v^m) \to (u, v) \text{ (forte) em } (L^2(0,T; L^q(\Omega)))^2, \quad \forall\ q \in [2, 2^*[, \tag{4.2.202}$$

onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$ e, consequentemente, de (4.2.202)

$$(f(u^m), h(v^m)) \to (f(u), h(v)) \quad \text{(q.s.) em} \quad (\Omega\times]0,T[)^2. \tag{4.2.203}$$

Da convergência acima e desde que $\{f(u^m), h(v^m)\}$ é limitada em $(L^2(0,T; L^2(\Omega)))^2$ segue pelo Lema de Lions em 1.24 que

$$(f(u^m), h(v^m)) \rightharpoonup (f(u), h(v)) \quad \text{(fraco) em} \quad (L^2(0,T; L^2(\Omega)))^2. \tag{4.2.204}$$

Note que por (4.2.199) temos que

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u_t^m(x,t))|^2\, dxdt = 0, \\ \lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\Omega b(x)|g(v_t^m(x,t))|^2\, dxdt = 0 \end{aligned} \tag{4.2.205}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x)|u_t^m(x,t)|^2\, dxdt = 0, \\ \lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\Omega b(x)|v_t^m(x,t)|^2\, dxdt = 0. \end{aligned} \tag{4.2.206}$$

Como $a(x) \geq a_0 > 0$ em $\omega \subset \Omega$, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\omega |u_t^m(x,t)|^2\, dxdt = 0 \tag{4.2.207}$$

e como $b(x) \geq b_0 > 0$ em $\omega \subset \Omega$, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \int_\omega |v_t^m(x,t)|^2\, dxdt = 0. \tag{4.2.208}$$

De (4.2.201), (4.2.207) e (4.2.208) temos, respectivamente,

$$u_t(x,t) = 0, \quad v_t(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \omega\times]0,T[. \tag{4.2.209}$$

Agora vamos dividir nossa prova em dois casos:

Caso (i): $u \neq 0$

Considere a seguinte sequência de problemas

$$\begin{cases} u_{tt}^m - \Delta_{\mathbf{g}} u^m + f(u^m) + a(x)g(u_t^m) + \delta v^m = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ v_{tt}^m - \Delta_{\mathbf{g}} v^m + h(v^m) + b(x)g(v_t^m) + \delta u^m = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ u^m = v^m = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,T[, \\ u^m(0) = u_0^m, \ u_t^m(0) = u_1^m \ \text{ em } \ \Omega, \\ v^m(0) = v_0^m, \ v_t^m(0) = v_1^m \ \text{ em } \ \Omega, \end{cases} \tag{4.2.210}$$

com $E_m(t)$ a energia associada ao sistema (4.2.210).

Passando o limite quando $m \to +\infty$ em (4.2.210), pelas convergências acima segue que

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u + f(u) + \delta v = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ v_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} v + h(v) + \delta u = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ u_t = 0, \quad v_t = 0 \ \text{ em } \ \omega\times]0,T[. \end{cases} \tag{4.2.211}$$

Se $v \neq 0$, então para $y = u_t$ e $z = v_t$, temos que

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} y + V_1(x,t)y + \delta z = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ z_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} z + V_2(x,t)z + \delta y = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ y = 0, \quad z = 0 \ \text{ em } \ \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{4.2.212}$$

onde, de forma análoga a (4.1.104), $V_1 = f'(u), V_2 = h'(v) \in L^\infty(0,T; L^{\frac{n+1}{2}}(\Omega))$.

Dessa forma, pela Hipótese 4.17, concluímos que $y = z = 0$, donde $u_t = v_t = 0$.

Voltando em (4.2.211) temos que

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{g}} u + f(u) + \delta v = 0 \\ -\Delta_{\mathbf{g}} v + h(v) + \delta u = 0 \end{cases} \tag{4.2.213}$$

donde

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (-\Delta_{\mathbf{g}} u) u dx + \int_\Omega f(u) u dx + \delta \int_\Omega v u dx = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega (-\Delta_{\mathbf{g}} v) v dx + \int_\Omega h(v) v dx + \delta \int_\Omega v u dx = 0. \end{cases} \tag{4.2.214}$$

Somando as duas equações e usando a identidade de Green, obtemos

$$I := \|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 + 2\delta \int_\Omega uv + \int_\Omega f(u) u dx + \int_\Omega h(v) v dx = 0.$$

Por (4.2.186) e por (4.1.5) temos que

$$\begin{aligned} 0 = I &\geq \big(1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1}\big)\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \big(1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1}\big)\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 - \beta \int_\Omega u^2 dx - \beta \int_\Omega v^2 dx \\ &= \big(1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1}\big)\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \big(1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1}\big)\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 - \beta\|u(t)\|_{L^2}^2 - \beta\|v(t)\|_{L^2}^2 \\ &\geq \big(1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1}\big)\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \big(1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1}\big)\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\beta}{\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\beta}{\lambda_1}\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 \\ &= \big(1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1} - \frac{\beta}{\lambda_1}\big)\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \big(1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1} - \frac{\beta}{\lambda_1}\big)\|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.2.215}$$

Portanto, como $\big(1 - \frac{|\delta|}{\lambda_1} - \frac{\beta}{\lambda_1}\big) > 0$, segue que

$$\|\nabla_{\mathbf{g}} u(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}} v(t)\|_{L^2}^2 = 0$$

e, consequentemente, $u = v = 0$, que é uma contradição.

Se $v = 0$ e como $f(0) = 0$, obtemos

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} u + f(u) = 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega\times]0,T[, \\ \delta u = 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega\times]0,T[, \\ u_t = 0, \quad v_t = 0 \;\; \text{em} \;\; \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{4.2.216}$$

donde $u = 0$, que é uma contradição. Analogamente chegamos numa contradição se $u = 0$ e $v \neq 0$.

Caso (ii): $u = 0$ e $v = 0$

Defina agora:

$$c_m = [E_m(0)]^{1/2} \tag{4.2.217}$$

$$\varphi^m = \frac{u^m}{c_m}, \quad \psi^m = \frac{v^m}{c_m} \tag{4.2.218}$$

Considere a seguinte sequência de problemas normalizados:

$$\begin{cases} \varphi^m_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\varphi^m + \frac{1}{c_m}f(u^m) + \frac{1}{c_m}a(x)g(u^m_t) + \delta\psi^m = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ \psi^m_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\psi^m + \frac{1}{c_m}h(v^m) + \frac{1}{c_m}b(x)g(v^m_t) + \delta\varphi^m = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[, \\ \varphi^m = \psi^m = 0 \text{ sobre } \ \partial\Omega\times]0,T[, \\ \varphi^m(0) = \varphi^m_0, \ \varphi^m_t(0) = \varphi^m_1 \ \text{ em } \ \Omega, \\ \psi^m(0) = \psi^m_0, \ \psi_t(0) = \psi^m_1 \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{4.2.219}$$

Observe que

$$\widehat{E}_m(t) = \frac{1}{c_m^2}E_m(t), \tag{4.2.220}$$

onde $\widehat{E}_m(t)$ é a energia associada ao sistema (4.2.219). De fato, pois

$$\begin{aligned} \widehat{E}_m(t) &= \frac{1}{2}\left[\|\varphi^m_t(t)\|^2_{L^2} + \|\psi^m_t(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla_{\mathbf{g}}\varphi^m(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla_{\mathbf{g}}\psi^m(t)\|^2_{L^2}\right] \\ &+ \frac{1}{c_m^2}\int_\Omega F(u^m)dx + \frac{1}{c_m^2}\int_\Omega H(v^m)dx + \delta\int_\Omega \varphi^m\psi^m dx \\ &= \frac{1}{c_m^2}E_m(t). \end{aligned}$$

Portanto, em particular, temos que

$$\widehat{E}_m(0) = 1. \tag{4.2.221}$$

A fim de obter uma contradição vamos provar que $\widehat{E}_m(0)$ converge para zero quando $m \to +\infty$.

De (4.2.221) obtemos $\widehat{E}_m(0) \leq L$ então, para uma eventual subsequência de $\{\varphi^m, \psi^m\}$, temos que

$$(\varphi^m, \psi^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (\varphi, \psi) \text{ (fraco estrela) em } (L^\infty(0,T;\ H^1_0(\Omega)))^2, \tag{4.2.222}$$

$$(\varphi^m_t, \psi^m_t) \overset{*}{\rightharpoonup} (\varphi_t, \psi_t) \text{ (fraco estrela) em } (L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^2. \tag{4.2.223}$$

Além disso, por argumentos clássicos de compacidade, (veja [41],[55]), deduzimos para uma eventual subsequência de $\{\varphi^m, \psi^m\}$ que

$$(\varphi^m, \psi^m) \to (\varphi, \psi) \text{ (forte) em } (L^2(0,T;L^q(\Omega)))^2 \ \ \forall\ q \in [2, 2^*[. \tag{4.2.224}$$

onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

Além disso, note que por (4.2.199) e (4.2.218) temos que

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega a(x)\frac{1}{c_m^2}|g(u_t^m)|^2\,dxdt = 0 \\ \lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega b(x)\frac{1}{c_m^2}|g(v_t^m)|^2\,dxdt = 0. \end{aligned} \tag{4.2.225}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega a(x)|\varphi_t^m|^2\,dxdt = 0 \\ \lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\Omega b(x)|\psi_t^m|^2\,dxdt = 0. \end{aligned} \tag{4.2.226}$$

Como $a(x) \geq a_0 > 0$ em $\omega \subset \Omega$ segue que

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\omega |\varphi_t^m(x,t)|^2\,dxdt = 0 \tag{4.2.227}$$

e como $b(x) \geq b_0 > 0$ em $\omega \subset \Omega$, segue que

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T\int_\omega |\psi_t^m(x,t)|^2\,dxdt = 0. \tag{4.2.228}$$

De (4.2.223), (4.2.227) e (4.2.228) temos que

$$\varphi_t(x,t) = 0, \quad \psi_t(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \omega\times]0,T[. \tag{4.2.229}$$

Note que $c_m \to \lambda \in [0,+\infty[$. Se $\lambda > 0$ e como

$$c_m\varphi^m = u^m \to 0 \ \ \text{(forte) em} \ \ L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$c_m\psi^m = v^m \to 0 \ \ \text{(forte) em} \ \ L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

passando o limite em (4.2.219) concluímos que

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\varphi = 0 \ \ \text{em} \ \ \Omega\times]0,T[, \\ \psi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}\psi = 0 \ \ \text{em} \ \ \Omega\times]0,T[, \\ \varphi_t = 0, \quad \psi_t = 0 \ \ \text{em} \ \ \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{4.2.230}$$

e para $y = \varphi_t, z = \psi_t$ de (4.2.230) concluímos que

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}y = 0 \ \ \text{em} \ \ \Omega\times]0,T[, \\ z_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}}z = 0 \ \ \text{em} \ \ \Omega\times]0,T[, \\ y = 0, \quad z = 0 \ \ \text{em} \ \ \omega\times]0,T[, \end{cases} \tag{4.2.231}$$

que implica pela Hipótese 4.6 que $y = z = 0$ e, consequentemente, $\varphi_t = \psi_t = 0$. Assim, voltando em (4.2.230), deduzimos que $\varphi = \psi = 0$.

Agora, vamos considerar $\lambda = 0$, isto é, $c_m \to 0$. Note que podemos escrever

$$f(s) = f'(0)s + R(s), \quad \text{onde} \quad |R(s)| \leq C(|s|^2 + |s|^p).$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_m} f(c_m \varphi^m) &= f'(0)\varphi^m + \frac{R(c_m \varphi^m)}{c_m}. \\ \frac{|R(c_m \varphi^m)|}{c_m} &\leq C(c_m |\varphi^m|^2 + |c_m|^{p-1} |\varphi^m|^p). \end{aligned} \tag{4.2.232}$$

como $|\varphi^m|^p$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $c_m \to 0$, segue em (4.2.232) que

$$\frac{1}{c_m} f(c_m \varphi^m) \to f'(0)\varphi \quad \text{(forte) em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.2.233}$$

Analogamente, temos que

$$\frac{1}{c_m} h(c_m \psi^m) \to h'(0)\psi \quad \text{(forte) em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{4.2.234}$$

Assim, passando o limite em (4.2.219), concluímos que

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} \varphi + f'(0)\varphi + \delta\psi = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0,T[, \\ \psi_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} \psi + h'(0)\psi + \delta\varphi = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0,T[, \\ \varphi_t = 0, \quad \psi_t = 0 \quad \text{em} \quad \omega \times]0,T[, \end{cases} \tag{4.2.235}$$

e para $y = \varphi_t, z = \psi_t$, concluímos que

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} y + f'(0)y + \delta z = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0,T[, \\ z_{tt} - \Delta_{\mathbf{g}} z + h'(0)z + \delta y = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times]0,T[, \\ y = 0, \quad z = 0 \quad \text{em} \quad \omega \times]0,T[, \end{cases} \tag{4.2.236}$$

que implica pela Hipótese 4.17 que $y = z = 0$ e, consequentemente, $\varphi_t = \psi_t = 0$.

Dessa forma, voltando em (4.2.234) temos que

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{g}} \varphi + f'(0)\varphi + \delta\psi = 0 \\ -\Delta_{\mathbf{g}} \psi + h'(0)\psi + \delta\varphi = 0 \end{cases}$$

donde

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (-\Delta_{\mathbf{g}}\varphi)\varphi dx + \int_\Omega f'(0)\varphi\varphi dx + \delta \int_\Omega \psi\varphi dx = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega (-\Delta_{\mathbf{g}}\psi)\psi dx + \int_\Omega h'(0)\psi\psi dx + \delta \int_\Omega \psi\varphi dx = 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações e usando a identidade de Green, obtemos

$$I := \|\nabla_{\mathbf{g}}\varphi(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}\psi(t)\|_{L^2}^2 + 2\delta \int_\Omega \varphi\psi + \int_\Omega f'(0)(\varphi)^2 dx + \int_\Omega h'(0)(\psi)^2 dx = 0.$$

Assim, analogamente ao que fizemos em (4.2.215), deduzimos que $\varphi = \psi = 0$.

Lembre-se que nosso objetivo é provar que $\widehat{E}_m(0)$ converge para zero, onde

$$\begin{aligned} \widehat{E}_m(t) &= \frac{1}{2}\Big(\|\varphi_t^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\psi_t^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}\varphi^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla_{\mathbf{g}}\psi^m(t)\|_{L^2}^2 \Big) \\ &+ \frac{1}{c_m^2}\int_\Omega F(u^m(x,t))dx + \frac{1}{c_m^2}\int_\Omega H(v^m(x,t))dx + \delta \int_\Omega \varphi^m(x,t)\psi^m(x,t)dx \end{aligned} \tag{4.2.237}$$

é a energia associada ao sistema (4.2.219).

Para este propósito, considere

$$P := \partial_t^2 - \Delta_{\mathbf{g}}.$$

Observe que pelas convergências obtidas acima, temos que

$$\begin{aligned} \varphi^m &\rightharpoonup 0 \ \text{(fraco) em } \ L^2(\Omega\times]0,T[), \\ \psi^m &\rightharpoonup 0 \ \text{(fraco) em } \ L^2(\Omega\times]0,T[). \end{aligned} \tag{4.2.238}$$

Então, considere μ_φ a medida de defeito microlocal (m.d.m.) associada a $\{\varphi_t^m\}$, μ_ψ a medida de defeito microlocal (m.d.m.) associada a $\{\psi_t^m\}$ (garantida pelo Teorema 1.72 conforme observado em 1.74). Assim por (4.2.224), (4.2.225), (4.2.233) e (4.2.234) e, tendo em mente que $\varphi = 0 = \psi$, concluímos que

$$\begin{aligned} P\varphi^m &= -\frac{1}{c_m}f(c_m\varphi^m) - \frac{1}{c_m}a(x)g(u_t^m) - \delta\psi^m \to 0 \ \text{(forte) em } \ L^2(\Omega\times]0,T[), \\ P\psi^m &- \frac{1}{c_m}h(c_m\psi^m) - \frac{1}{c_m}a(x)g(v_t^m) - \delta\varphi^m \to 0 \ \text{(forte) em } \ L^2(\Omega\times]0,T[). \end{aligned} \tag{4.2.239}$$

disto deduzimos, respectivamente, que

$$\begin{aligned} \partial_t P\varphi^m &\to 0 \ \text{(forte) em } \ H_{loc}^{-1}(\Omega\times]0,T[). \\ \partial_t P\psi^m &\to 0 \ \text{(forte) em } \ H_{loc}^{-1}(\Omega\times]0,T[). \end{aligned} \tag{4.2.240}$$

Levando em conta que ω controla geometricamente Ω, da mesma forma como feito no sistema anterior, usando análise microlocal, concluímos que

$$\begin{aligned} \varphi_t^m &\to 0 \text{ (forte) em } L^2(\Omega\times]0,T[), \\ \psi_t^m &\to 0 \text{ (forte) em } L^2(\Omega\times]0,T[). \end{aligned} \tag{4.2.241}$$

Assim, usando uma equipartição da energia, como usado anteriormente, podemos concluir que $\widehat{E}_m(0) \to 0$ quando $m \to +\infty$, como queríamos demonstrar. ■

4.2.4 Taxa de Decaimento Uniforme

Analogamente ao feito na subseção 4.1.8 provamos o teorema

Teorema 4.22 *Suponha que as hipóteses 4.14-4.17 sejam satisfeitas. Seja $\{u, v\}$ a solução fraca do problema (4.2.183) com a energia $E(t)$ definida como em (4.2.184). Então existe um $T_0 > 0$ tal que*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right) \quad \forall \quad t > T_0 \tag{4.2.242}$$

com $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$, onde o semigrupo de contração $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \tag{4.2.243}$$

onde q é dado em (4.1.177). Aqui a constante c (da Definição (4.1.176)) é
$c \equiv \frac{(k^{-1}+K)}{med(Q_T)((1+\|a\|_\infty)+(1+\|b\|_\infty))}$.

Capítulo 5

Considerações Finais

Observamos que, diferentemente do sistema I abordado no Capítulo 4, no sistema II, quando passamos o limite na sequência de problemas em (4.2.210), ainda continuamos com um sistema acoplado conforme visto em (4.2.211) . Nossa dificuldade foi encontrar um princípio de continuação única adequado que satisfizesse as hipóteses do sistema II. Para o caso $1 \leq p \leq \frac{n}{n-2}$ esse problema foi solucionado devido a Cavalcanti et al. em [26] que pode ser visto na Seção 1.13. Para o caso $\frac{n}{n-2} < p < \frac{n-2}{n+2}$, assim como no sistema I, podemos provar a boa colocação usando as estimativas de Strichartz, porém na desigualdade de observabilidade, não temos um princípio de continuação única que satisfaça as hipóteses. Dessa forma, nossa meta para o futuro é, inspirados na Proposição 1.88, estabelecer um resultado de continuação única para sistemas acoplados que satisfaça as nossas hipóteses para assim poder provar a desigualdade de observabilidade para o sistema II no caso $\frac{n}{n-2} < p < \frac{n-2}{n+2}$. Isso significa que esta tese é só o início de trabalho de uma pesquisa.

Bibliografia

[1] F. Alabau-Boussouira, Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, *Appl. Math. Optim.*, 51 (2005), pp. 61-105.

[2] F. Alabau-Boussouira, A unified approach via convexity for optimal energy decay rates of finite and infinite dimensional vibrating damped systems with applications to semi-discretized vibrating damped systems, *J. Differential Equations*, 248 (2010), pp. 1473-1517.

[3] F. Alabau-Boussouira, Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* 2 (2002), 41 511-541.

[4] F. Alabau, P. Cannarsa and V. Komornik, Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equation, *J. of Evolutions Equations* 2 (2002), 127-150.

[5] F. Alabau-Boussouira, Z. Whang and L. Yu, A one-step optimal energy decay formula for indrectly nonlinearly damped hyperbolic system coupled by velocities, *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations* 23 (2017), 721-749.

[6] A. F. Almeida, M. Astudillo, M. M. Cavalcanti, J. Zanchetta, Internal Exact Controllability and Uniform Decay Rates for a model of dynamical elasticity equations for incompressible materials with a Pressure Term, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* (2018), No. 24, 1-28.

[7] M. Astudillo, M. M. Cavalcanti, V, N. Domingos Cavalcanti, R. FuKuoka, A. B. Pampu. Uniform Decay Rates estimates for the semilinear wave equation in inhomogeneous media with locally distributed nonlinear damping, *Nonlinearity*, 31. (2018), pp. 4031-4064.

[8] V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff International Publishing, Bucharest, Romania, 1976.

[9] V. Barbu, Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces, Springer Monographs in Mathematics, *Springer*, New York, 2010.

[10] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Control Optim.* 30 (1992), no. 5, 1024-1065.

[11] M. D. Blair, H. F. Smith, C. D. Sogge, Strichartz estimates for the wave equation on manifolds with boundary. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 26:5 (2009), 1817-1829.

[12] F. Boyer, P. Fabrie, Mathematical tools for study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models, Springer, New York, 2013.

[13] H. Brezis, Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans le Espaces de Hilbert, Math. Stud. 5, North Holland, Amsterdam, 1973.

[14] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer, New York, 2011.

[15] N. Burq, P. Gérard, Condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte des ondes. (French) [A necessary and sufficient condition for the exact controllability of the wave equation] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325 (1997), no. 7, 749-752.

[16] N. Burq, Contrôlabilité exacte de léquation des ondes dans des ouverts peu réguliers, *Asymptot. Anal.*, 14 (1997), pp. 157-191.

[17] N. Burq, P. Gérard, Contrôle Optimal des équations aux dérivées partielles. 2001, Url:http://www.math.u-psud.fr/ burq/articles/coursX.pdf.

[18] N. Burq, G. Lebeau, F. Planchon, Global existence for energy critical waves in 3-D domains, *J. Amer. Math. Soc.*, 21 (2008) 831-845.

[19] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema de equazione di Stokes, *Rend. Sem. Math. Padova*, (1961).

[20] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, A. Rocha, J. A. Soriano, Exact controllability of a second-order integro-differential equation with a pressure term, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* (1998), No. 9, 18 pp.

[21] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, I. Lasiecka, Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction, *J. Differential Equations* 236 (2007), no. 2, 407-459.

[22] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, Eduem. Maringá, Brasil, 2009.

[23] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping-a sharp result, *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009), no. 9, 4561-4580.

[24] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping: a sharp result, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 197 (2010), no. 3, 925-964.

[25] M. M. Cavalcanti, F. R. Dias Silva, V. N. Domingos Cavalcanti, Uniform decay rates for the wave equation with nonlinear damping locally distributed in unbounded domains with finite measure, *SIAM J. Control Optim.* **52**, (2014), 545-580.

[26] M.M. Cavalcanti, L.G. Delatorre, V.H. Gonzalez Martinez, D.C. Soares, J.P. Zanchetta, Uniform Stabilization for the Klein-Gordon System in an Inhomogeneous Medium with

Locally Distributed Damping, *ArXiv e-prints*,eprint:1810.00247v1[math.AP],(2018), Url:http://adsabs.harvard.edu/abs/2018arXiv181000247C.

[27] W. Charles, A Stabilization for a Coupled Wave System with Nonlinear and Arbitrary Damping, *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science* 26(3) (2018) 1-14.

[28] I. Chueshov, M. Eller, I. Lasiecka, On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation, *Comm. Partial Differential Equations* 27 (2002), no. 9-10, 1901-1951.

[29] B. Dehman, P. Gérard, G. Lebeau, Stabilization and control for the nonlinear Schrödinger equation on a compact surface, *Math. Z.* 254 (2006), no. 4, 729-749.

[30] B. Dehman, G. Lebeau, E. Zuazua, Stabilization and control for the subcritical semilinear wave equation, Anna. Sci. Ec. Norm. Super. **36**, (2003), 525-551.

[31] D. S. Ferreira, Sharp Lp Carleman estimates and unique continuation, *Journées Équations aux Dérivées Partielles*, No. VI, 12. Univ. Nantes, Nantes, (2003) pp. 2-6.

[32] P. Gérard, Microlocal defect measures, *Comm. Partial Differential Equations* 16 (1991) 1761-1794.

[33] P. Gérard, Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations, *J. Funct. Anal.* 141 (1996), no. 1, 60-98.

[34] J. Ginibre, G. Velo, The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation, *Math. Z.* 189:4 (1985), 487-505.

[35] J. Ginibre, G. Velo, The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation II, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire,* 6:1 (1989), 15-35.

[36] R. Joly, C. Laurent, Stabilization for the semilinear wave equation with geometric control, *Analysis* & *PDE,* Vol. 6 (2013), No. 5, 1089-1119.

[37] J. Jost, Riemannian Geometry and Geometric Analysis. Springer Verlag, 2008.

[38] E. Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, Wiley, New York, 1989.

[39] I. Lasiecka, D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping, *Differential and integral Equations*, 6 (1993), 507-533.

[40] J.L. Lions, Problèmes aux limites dans les équations aux derivées partielles, les Press de l'Université de Montreal, Montreal, Canada, 1965.

[41] J.L. Lions, Quelques méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires. Dunod, Guthier-Villars, 1969.

[42] J.L. Lions, Contrôlabilité Exacte, Stabilization et Perturbations de Système Distribuées, Tome 1, Masson, RMA 8, (1988).

[43] J.L. Lions, On Some Hyperbolic Equations with a Pressure Term, Proceedings of the conference dedicated to Louis Nirenberg held in Trento, Italy, September 3-8, 1990. Harlow: Longman Scientific and Technical,Pitman Res. Notes Math. Ser 269, (1992), 196-208.

[44] J.L. Lions, E. Magènes, Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications, Vol I, 1968.

[45] J.L. Lions, E. Magènes, Non Homogeneous Boundary Value Problems and Application, Vol I, 1972.

[46] L. A. Medeiros, Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações. Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 16, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.

[47] L.A. Medeiros, E.A. Mello, A integral de Lebesgue. Textos Matemáticos, Vol.18, ed. 4, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.

[48] M.M. Miranda, Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev, Bol. Soc. Paran. Mat.(2 série), vol 11, num 2, 131-157, 1990.

[49] J. Rauch, M. Taylor, Decay of solutions to nondissipative hyperbolic systems on compact manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.* 28(4) (1975), 501-523.

[50] J.E.M. Rivera, Teoria das Distribuções e Equações Diferenciais Parciais. Textos Avançados, Rio de Janeiro, Petrópolis, LNCC. 1999.

[51] A. Rocha, Exact Controllability for a Hyperbolic System with a Pressure Term, Pre-Print, 1997.

[52] P. Radu, Weak solutions to the Cauchy problem of a semilinear wave equation with damping and source terms, *Adv. Differential Equations* 10(11) (2005) 1261-1300.

[53] A. Ruiz, Unique Continuation for Weak Solutions of the Wave Equation plus a Potential, *J. Math. Pures. Appl.* 71 (1992) 455-467.

[54] J. Rauch - M. Taylor, Exponential decay of solutions to hyperbolic equationin bounded domains. *Indiana* Univ.Math. J. 24 (1974), 79-86.

[55] J. Simon, Compact Sets in the space $L^p(0, T, B)$, *Ann. Mat. Pura Appl.* 146 65-96 (1987).

[56] J. Simon, On the existence of pressure for solutions of the variational Navier-Stokes equations, *J. Math. Fluid Mech.*, 1 (1999), 225-234.

[57] R. Showalter, Monotone Operators in Banach Spaces an Nonlinear Partial Differential Equations, AMS, Providence, RI, 1997.

[58] V. V. Kapitanov, Uniform stabilization and exact controllability for a class of coupled hiperbolic systems, *Comp. Appl. Math.* 15(1996) 199-212.

[59] H. Koch, D. Tataru, Dispersive estimates for principally normal pseudodifferential operators, *Commun. Pure Appl. Math.* 58(2), (2005), 217-284.

[60] M. A. Rammaha, Z. Wilstein, Hadamard well-posedness for wave equation with p-Laplacian damping and supercritical sources, *Adv. Differential Equations* 17(1-2) (2012) 105-150.

[61] L. Tartar, Topics in Nonlinear Analysis, Publications Mathématiques D'Orsay, Université de Paris-Sud, 1978.

[62] R. Teman, Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[63] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Aplications, Vol 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, 1990.