



Ministério da Educação
Universidade Federal da Integração Latino-Americana
Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território
Centro Interdisciplinar de Tecnologia e Infraestrutura
Engenharia Civil de Infraestrutura

**MODELO PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS SUBMETIDAS A
SOLICITAÇÕES QUÍMICO-MECÂNICAS**

RENATA RAUBER DAHMER

Foz do Iguaçu, PR
Dezembro de 2018



Ministério da Educação
Universidade Federal da Integração Latino-Americana
Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território
Centro Interdisciplinar de Tecnologia e Infraestrutura
Engenharia Civil de Infraestrutura

MODELO PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS SUBMETIDAS A SOLICITAÇÕES QUÍMICO-MECÂNICAS

RENATA RAUBER DAHMER

Plano de Trabalho apresentado à Banca Examinadora do Curso de Engenharia Civil de Infraestrutura da UNILA, como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof^o. Dr^o. Julio Flórez López

Foz do Iguaçu, PR
Dezembro de 2018

RESUMO

A corrosão é uma das principais manifestações patológicas a qual o concreto armado está suscetível. No entanto, não existe uma metodologia adequada de cálculo - a nível estrutural - que inclua a evolução dos danos devido à corrosão. A avaliação do comportamento mecânico de estruturas de concreto armado pode ser realizada a partir da teoria do dano concentrado, através da implementação de rótulas plásticas e variáveis de dano que descrevem a fissuração. Ademais, tal fenômeno, que pode ser aliada à teoria da termodinâmica, para assim, descrever a evolução da corrosão no tempo, bem como analisar em conjunto a influência dessas variáveis no comportamento estrutural. Dessa forma, a teoria do dano concentrado será utilizada, neste trabalho, em conjunto com a teoria da termodinâmica, na análise de estruturas submetidas a solicitações químico-mecânicas, a partir da criação de uma lei constitutiva de corrosão acoplada ao dano mecânico e à plasticidade. Os valores numéricos obtidos com o modelo de fissuração vinculado à corrosão elaborado, aplicados a mesma estrutura, foram comparados entre si para diferentes teores de corrosão, bem como foi realizada uma análise durante toda a vida útil, como forma de apresentar a aplicação do modelo. Assim, pôde-se obter uma melhor estimativa da vida útil e analisar o comportamento da estrutura, como as deflexões, a redução da área de aço, as fissurações no concreto e diminuição da resistência.

Palavras-chave: Dano concentrado, Concreto armado, Corrosão, Termodinâmica.

ABSTRACT

Corrosion is one of the main pathological manifestations that the reinforced concrete is susceptible. However, there is no suitable methodology - at structural level - that includes the evolution of the damage caused by corrosion. The evaluation of the mechanical behavior of reinforced concrete structures can be performed based on the lumped damage mechanics through the implementation of plastic hinges and damage variables that describe the cracking, together with the thermodynamics, which allows describe the corrosion evolution in time, and also analyze the influence of this variables in the structural behavior. Thus, the objective of the present work combined the lumped damage mechanics with the thermodynamics to analyze structures subjected to chemical-mechanical stress from the creation of a constitutive law of corrosion coupled to mechanical damage and plasticity. The numerical values obtained with the generated cracking model coupled to corrosion created, applied to the same frame, will be compared to each other for different levels of corrosion, also it is realized a lifetime analysis, as a way of presented the model application. So, it is possible obtained a estimative of service life and analyze the structural behavior, as displacements, reduction of reinforcement's effective area, concrete cracks and resistance reduction.

Keywords: Lumped damage, Reinforced concrete, Corrosion, Thermodynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Corrosão por pit.	6
Figura 2 - Esquema de profundidade de pit.....	7
Figura 3 – Pórtico plano e deslocamentos generalizados.....	8
Figura 4 – Pórtico plano, deformações e tensões generalizadas.....	9
Figura 5 – Deformações devido às velocidades virtuais.....	9
Figura 6 – Efeito Bauschiger.	10
Figura 7 – Rótulas plásticas.	11
Figura 8 – Momento em função do dano.	15
Figura 9 – Variáveis internas.....	31
Figura 10 – Esquema do modelo.....	34
Figura 11 – Identificação dos nós da grelha.	35
Figura 12 - Carregamento de serviço da grelha.....	35
Figura 13 - Modelo no SAP2000.	36
Figura 14 – Gráfico de deslocamento por tempo.....	38
Figura 15 – Gráfico de dano por tempo.....	39
Figura 16 – Gráfico de dano por deslocamento.....	40
Figura 17 – Gráfico de força por deslocamento.....	41
Figura 18 – Gráficos de dano por deslocamento para cada rótula do elemento 1.	42
Figura 19 – Gráficos de dano por deslocamento para cada rótula do elemento 2.	44
Figura 20 – Gráficos de dano por deslocamento para cada rótula do elemento 3.	45
Figura 21 – Gráficos de dano por deslocamento para cada rótula do elemento 4.	46
Figura 22 – Gráficos de corrosão por força.	47
Figura 23 – Esquema para o cálculo do momento plástico.....	52
Figura 24 – Esquema para o cálculo do momento último.	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Procedimento para a análise comparativa.....	40
Tabela 2 - Comparativo de força para um mesmo deslocamento.....	41
Tabela 3 - Comparativo de dano para um mesmo deslocamento.....	43

LISTA DE SÍMBOLOS

A_α	força termodinâmica associada as variáveis de estado
A	área da seção
A_0	área de aço inicial
A_s	área efetiva de aço
A_d	área de micro defeitos
A_t	área total da seção
$\{A\}$	força termodinâmica associada à plasticidade
$[B]_b$	matriz de transformação cinemática da barra b
$\{B\}$	força termodinâmica associada à corrosão
b	número de elementos
$C(x, t)$	concentração de cloretos
C_s	concentração de cloretos na superfície
c, c_i, c_j	Corrosão
cob	Cobrimento
Df	coeficiente de difusão
D_0	diâmetro inicial da barra de aço
d, d_i, d_j	dano
d_p	dano plástico
d_u	dano último
\dot{E}, \dot{E}_b	taxa de energia interna
E	módulo de elasticidade
EI	rigidez da seção
erf	erro da função de difusão
$\{F\}$	matriz de forças nodais equivalentes
$[F^0], [F^0(D)]$	matriz de flexibilidade inicial do elemento
$[F], [F(D)]$	matriz de flexibilidade do elemento
f	função de escoamento
G_b	energia livre de Gibbs
g	diferença entre critério de Griffth e a resistência
$[H], [H(D)], [H(D, C)]$	matriz de encruamento cinemático linear
$h, h(c)$	termo de encruamento cinemático linear
I	momento de inércia
$I(D), I(D, C)$	função que representa a resistência no potencial termodinâmico

i_{cor}	taxa de corrosão
\dot{K}, \dot{K}_b	taxa de energia cinética
$k_0, k_0(c)$	momento da função de escoamento
L_b	comprimento do elemento b
$\{M\}$	matriz das tensões generalizadas
$[Mass]$	matriz de massa
M_n	momento externo
M_p	momento plástico
M_{cr}	momento crítico
M_u	momento último
m_i^b, m_j^b, n_b	tensões generalizadas do elemento b
m_y	momento de escoamento
m	Momento
n	número de nós
$\{O\}$	lei de corrosão da literatura
\hat{P}	potência virtual
P_{def}	potência das deformações
\hat{P}_{def}	potência virtual das deformações
P_{ext}	potência das forças externas
\hat{P}_{ext}	potência virtual das forças externas
P_{ine}	potência das forças de inércia
\hat{P}_{ine}	potência virtual das forças de inércia
$p(t)$	profundidade do pit
Q, Q_b	taxa quantidade de calor recebida
$q(c), q(c)$	incremento da resistência pela ação da armadura
$R(d), R(d, c)$	função de resistência
R_0	resistência inicial
R_{est}	parâmetro estatístico
Ru_n	força horizontal externa
Rw_n	força vertical externa
\dot{S}, \dot{S}_b	entropia
T, T_b	temperatura absoluta
t	tempo
t_{ini}	tempo de início da corrosão
$\{U\}$	matriz de deslocamentos generalizados

$\{\dot{U}\}$	matriz de velocidades virtuais
$\{U\}$	matriz de acelerações
u_n	deslocamento horizontal
V_α	variáveis de estado
w_n	deslocamento vertical
w/c	relação água cimento
x	Profundidade
y	critério de Griffth
α_b	ângulo entre eixo local e eixo global
Δt	variação do tempo
ΔG	variação da energia livre de Gibbs
θ_n	rotações
ξ	parâmetro de calibração
τ	Trabalho
$\{\Phi\}$	matriz de deformações generalizadas
$\{\Phi^e\}_b$	deformação elástica
$\{\Phi^p\}_b$	deformação plástica
$\{\Phi^d\}_b$	rotação pelo dano
$\{\Phi^p\}$	matriz de rotação plástica
$\{\dot{\Phi}\}$	taxa de deformações generalizadas
ϕ_{pu}	rotação plástica última
$\phi_i^b, \phi_j^b, \delta_b$	deformações generalizadas do elemento b
ϕ_i^p, ϕ_j^p	rotações plásticas
ψ_b	energia livre de Helmholtz

SUMÁRIO

RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	vii
1. INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA.....	1
2. OBJETIVOS.....	3
2.1 Objetivo Geral	3
2.2 Objetivos Específicos	3
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4
3.1 Processo corrosivo.....	4
3.1.1 Carbonatação	5
3.1.2 Cloretos	5
3.2 Teoria do Dano Concentrado para pórticos	8
3.2.1 Conceitos Iniciais	8
3.2.2 Efeito Bauschinger.....	9
3.2.3 Teoria do Dano Concentrado.....	10
3.2.4 Pórticos elastoplásticos com encruamento cinemático linear.....	11
3.3 Termodinâmica de Sólidos	16
3.3.1 Princípio da potência Virtual	17
3.3.2 Primeiro princípio da termodinâmica	17
3.3.3 Segundo princípio da termodinâmica	18
3.3.4 Potenciais termodinâmicos	19
4. METODOLOGIA	20
4.1 Termodinâmica de pórticos	20
4.2 Modelos termodinâmicos.....	22

4.2.1 Modelo elastoplástico perfeito.....	23
4.2.2 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear	24
4.2.3 Modelo elástico com dano	26
4.2.4 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear e dano	27
4.2.5 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, dano e corrosão	31
4.3 Modelagem de plasticidade, dano e corrosão	33
4.4 Estrutura para a análise	35
4.4.1 Análise durante a vida útil	36
4.4.2 Análise comparativa.....	36
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	38
5.1 Análise durante a vida útil	38
5.2 Análise comparativa	40
6. CONCLUSÕES.....	48
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	49
APÊNDICE A.....	52
Cálculo do momento crítico	52
Cálculo do momento plástico	52
Cálculo do momento último	53

1. INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

O concreto armado é o material mais utilizado na construção civil devido à sua durabilidade, facilidade de acesso e de execução (ANDRADE e MANCINI, 2011). Como o concreto apresenta boa resistência à compressão e baixa resistência à tração, é necessária a composição de concreto com aço para a utilização estrutural, devido ao tipo de solicitação usual da estrutura, como por exemplo a flexão. Essa composição tem a característica de funcionar em conjunto dado a aderência entre a armadura e o concreto, no qual o alongamento do aço somente se inicia quando ocorrem deformações no concreto (CARVALHO e FILHO, 2007), além do concreto servir como uma proteção para o aço. No entanto, com o avanço da construção civil, das metodologias de cálculo e dos métodos construtivos, fez-se necessário modificar as estruturas para acompanhar a demanda atual. Em que se permitiu maior produtividade e reduções de custos, porém levou-se ao aumento da esbelteza, gerando maiores tensões de serviço e cobrimentos menores para o aço, reduzindo assim, a durabilidade das estruturas (RIBEIRO, 2014).

Além disso, o concreto armado está suscetível a determinadas manifestações patológicas quando exposto a certos ambientes. Sendo a corrosão uma das principais manifestações patológicas na construção civil, porém, ainda não há uma metodologia de cálculo adequada, a um nível estrutural, que represente a evolução da deterioração do concreto armado nestas condições (ANDRADE e MANCINI, 2011).

A corrosão é causada pela interação físico-química do material com seu meio, e apresenta alterações prejudiciais ao material, sendo este um problema frequente em várias atividades, como nas indústrias química, petrolífera, naval, de construção civil, nos meios de transporte, entre outros (GENTIL, 2014). Dessa forma, podem ser citadas três razões principais da importância do estudo da corrosão: economia, segurança e conservação (REVIE e UHLIG, 2008). Ressalta-se ainda, que este é um grande problema enfrentado pelos engenheiros civis e pelos governos, devido à perda econômica causada pelos danos por corrosão, em que bilhões de dólares são gastos por ano na proteção, reparação e substituição de estruturas (BROOMFIELD, 2006). Assim, existe uma relação direta deste fenômeno com o avanço tecnológico, podendo-se concluir que países com maior desenvolvimento tecnológico têm gastos mais elevados com corrosão (GENTIL, 2014).

Ressalta-se que em estruturas de concreto armado, o aço está inicialmente protegido da corrosão devido à alcalinidade do concreto, ou seja, este contém poros microscópicos com altas concentrações de cálcio solúvel, óxidos de sódio e de potássio, os quais na presença de água formam hidróxidos. Essa condição alcalina (pH 12-13) leva à formação de uma camada passiva no aço, também chamada de filme passivo. No entanto, esse

ambiente de passivação nem sempre é mantido e duas condições levam à despassivação sem atacar o concreto: a carbonatação e o ataque de cloretos (BROOMFIELD, 2006). Estes processos referem-se à um aspecto energético, ou seja, buscam o equilíbrio energético em um composto mais estável, sendo esta a razão termodinâmica da espontaneidade de reações (HELENE, 2014). Destaca-se que a redução da energia livre de Gibbs é a força motriz de toda corrosão (SHAW e KELLY, 2006). Como o concreto consegue proteger o aço somente até o momento em que a corrosão se inicia, após instaurada a corrosão, as consequências estruturais desse processo são: a diminuição da ductilidade do aço; a redução da ligação aço/concreto; o decréscimo da área efetiva de aço; e, a fissuração e destacamento do concreto, devido ao caráter expansivo dos óxidos (ANDRADE, 2012).

Como forma de analisar as estruturas de concreto armado submetidas à corrosão, neste trabalho propõe-se a utilização da Teoria do Dano Concentrado (TDC). O uso da TDC para modelagem de estruturas de concreto armado primeiramente foi proposto por Coelho (2017). A TDC reduz os custos computacionais das análises tornando possível um estudo confiável de estruturas complexas, combinando a mecânica da fratura com o modelo de plasticidade concentrada, assumindo que as fissuras são concentradas em rótulas plásticas (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

Neste contexto, o presente trabalho teve por finalidade propor uma metodologia de cálculo estrutural considerando a corrosão, através da teoria do dano concentrado, aliado ao princípio de conservação de energia da teoria da termodinâmica. Além disso, os resultados foram validados de forma comparativa, utilizando uma estrutura submetida a esforços químicos-mecânicos com diferentes teores de corrosão variando o tempo. Assim, pôde-se obter uma melhor estimativa da vida útil e analisar o comportamento da estrutura, como as deflexões, a redução da área de aço, as fissurações no concreto, diminuição da resistência, entre outros.

2. OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

Propor uma metodologia de cálculo estrutural considerando a corrosão da armadura de aço imersa no concreto, através da teoria do dano concentrado, bem como validar os resultados de forma comparativa, utilizando uma estrutura submetida a esforços químicos-mecânicos com diferentes teores de corrosão, variando o tempo.

2.2 Objetivos Específicos

- a) Obter uma melhor estimativa da vida útil e analisar o comportamento da estrutura;
- b) Criar uma lei constitutiva de corrosão acoplada ao dano mecânico;
- c) Obter deflexões, redução da área de aço e o grau fissuração no concreto;
- d) Avaliar a perda da resistência da estrutura para diferentes teores de corrosão.

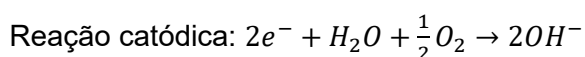
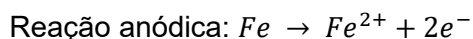
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 Processo corrosivo

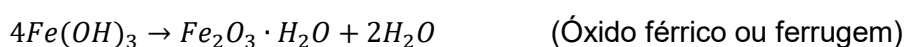
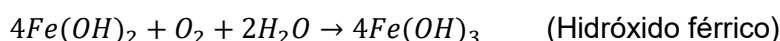
A corrosão é um processo espontâneo, uma vez que na produção dos metais é fornecida uma certa quantidade de energia ao minério e, quando expostos ao ambiente esses metais tendem a voltar ao estado original, liberando essa energia (ROBERGE, 2008). Gentil (1996), define a corrosão como a deterioração de um material por ação química ou eletroquímica do meio ambiente aliada ou não a esforços mecânicos. Assim, pode-se dizer que o processo corrosivo é o processo inverso ao siderúrgico, em que o produto da corrosão muitas vezes é semelhante ao minério do qual o metal é originário (GENTIL, 2014).

No concreto armado, a corrosão pode ocorrer, após a despassivação, pela carbonatação ou pelo ataque de cloretos, em que ambos se referem a um aspecto energético, devido ao fato de que os metais se apresentam em um estado superior de energia ao composto inicial, mais estável, sendo esta a razão termodinâmica da espontaneidade das reações, assim, a energia liberada no processo corrosivo é perdida para o meio ambiente (GENTIL, 2014). Ou seja, para formar compostos mais estáveis na forma de óxidos, reduz-se a energia livre de Gibbs (HELENE, 2014).

As reações envolvidas resultam de um processo eletroquímico composto de reações anódicas e catódicas (MIYAGAWA, 1985).



Essas reações correspondem apenas à primeira fase da formação da ferrugem, porém outras reações devem ocorrer, em que o hidróxido ferroso se transforma em hidróxido férrico e depois em óxido férrico ou ferrugem, de acordo com as seguintes formulações (BROOMFIELD, 2006):



A reação anódica representa a dissolução do metal, em que o fluxo de íons e elétrons pode ser tomado como uma forma de medir a taxa de corrosão. Essa taxa pode

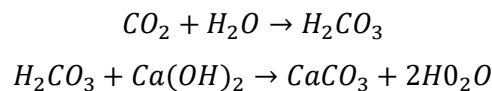
ser dada pela densidade de corrente, bem como pela redução da espessura por unidade de tempo ou pela perda de massa por unidade de tempo e área. Para o aço são válidas as seguintes afirmações (HUNKELER, 2005):

$$1 \text{ mA/cm}^2 \approx 11,6 \text{ mm/ano} \approx 250 \text{ g/m}^2 \text{ dia}$$

$$1 \text{ }\mu\text{A/cm}^2 \approx 12 \text{ }\mu\text{m/ano} \approx 0,25 \text{ g/m}^2 \text{ dia}$$

3.1.1 Carbonatação

A carbonatação é o resultado da interação entre o dióxido de carbono presente na atmosfera com os hidróxidos alcalinos do concreto. O dióxido de carbono penetra nos poros do concreto e dissolve-se na água formando o ácido carbônico, no entanto, esse ácido não ataca a pasta de cimento, apenas neutraliza os álcalis na água dos poros, formando assim o carbonato de cálcio (BROOMFIELD, 2006):



O pH do concreto é mantido devido à quantidade de hidróxido de cálcio nos poros, porém, à medida que o dióxido de carbono passa a reagir com o hidróxido de cálcio em solução, ocorre a precipitação do carbonato de cálcio, o que reduz o pH até um nível no qual poderá ocorrer a corrosão no aço (BROOMFIELD, 2006).

A carbonatação é um processo frequente nos centros urbanos, entretanto, o enfoque do presente trabalho constitui-se da corrosão devido ao ataque de cloretos.

3.1.2 Cloretos

Os cloretos podem ser de fonte externa ou interna, ou seja, por ingresso no concreto no estado endurecido ou por incorporação durante a fabricação do compósito (NEVILLE, 1995). A entrada de cloretos somente ocorre se houver a presença de água nos poros do concreto e o ingresso de cloretos pode ser descrito através da segunda Lei de difusão de Fick (Equação 1) (COSTA e APPLETON, 1999).

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = Df \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{Equação 1}$$

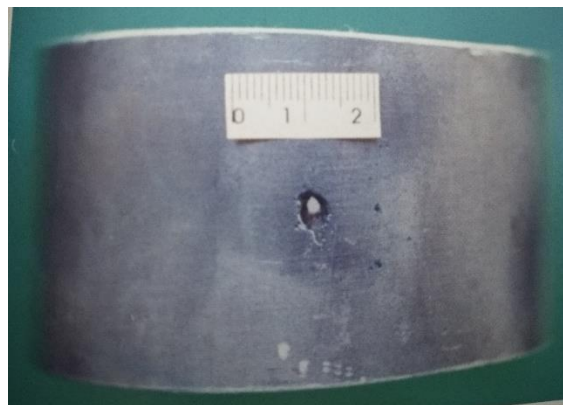
Em que, $C(x, t)$ é a concentração de cloretos a uma profundidade x no tempo t e Df é o coeficiente de difusão. A solução para esta equação considerando uma difusão unidirecional é dada pela Equação 2 (VU e STEWART, 2000).

$$C(x, t) = C_s \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right] \quad \text{Equação 2}$$

Em que C_s é a concentração de cloretos na superfície e erf é o erro da função.

A corrosão pode manifestar-se de diferentes formas, dependendo de suas causas e de seus mecanismos. Uma das formas é a corrosão por íons de cloretos, que por sua vez provoca a corrosão por pit, também conhecida como corrosão puntiforme. A corrosão por pit (Figura 1), consiste em pontos ou pequenas áreas localizadas na superfície (GENTIL, 2014). Esta pode ser considerada a forma mais grave de corrosão, pois gera uma cavidade que se propaga rapidamente, deteriorando as propriedades mecânicas do aço (SOUSA, 2014).

Figura 1 - Corrosão por pit.



Fonte: Gentil (2014).

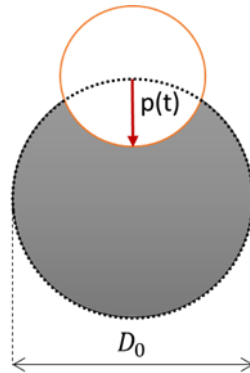
A corrosão por pit é composta por etapas de despassivação, sendo este o processo de início de formação do pit, que devido à alta velocidade de ocorrência da despassivação, bem como sua pequena escala, dificultam a observação deste fenômeno, impedindo assim, a definição do mecanismo de ruptura do filme passivo. Destaca-se que tal mecanismo de ruptura pode ocorrer por meio de: penetração através do filme passivo, associado a presença de um campo elétrico; ruptura mecânica, correspondendo a uma ruptura localizada do filme; e, adsorção (adesão), que ocorre a redução da espessura do filme, devido à concentração crítica de íons adsorvidos sobre a superfície (SOUSA, 2014).

A profundidade do pit ($p(t)$) representa a perda de área efetiva de aço, sendo definida por uma função do tempo que depende da taxa de corrosão (i_{cor}), de acordo com a Equação 3 (STEWART, 2004):

$$p(t) = 0,0116 i_{cor} R_{est} t \quad \text{Equação 3}$$

Em que, R_{est} é um parâmetro estatístico e por simplificação é igual a 5,08 (COELHO, 2017) e t é o tempo em anos (STEWART, 2004). Esta profundidade está representada no esquema da Figura 2.

Figura 2 - Esquema de profundidade de pit.



A taxa de corrosão (Equação 4), por sua vez, é definida empiricamente para condições ambientais típicas como (VU e STEWART, 2000):

$$i_{cor} = \frac{37,8(1 - w/c)^{-1,64}}{cob} 0,85(t - t_{ini})^{-0,29} \quad \text{Equação 4}$$

Em que, w/c é a relação água cimento do concreto, cob é o cobrimento, t é o tempo e t_{ini} é o tempo de início da corrosão. Para equações de profundidade de pit e de taxa de corrosão, podem ser utilizadas também outras leis presentes na literatura, dependendo das condições desejadas para realização da simulação. De forma geral, pode-se classificar as condições de exposição da seguinte maneira (BERTOLINI, 2010):

- Condições de concreto seco: não é agressivo, seja para a corrosão, seja para fenômenos de degradação de concreto, pois estes necessitam da presença de umidade, para sua ocorrência;
- Condições de concreto permanentemente saturado: não é agressivo, pois o oxigênio não consegue atingir a superfície da armadura, somente estando exposto aos problemas de gelo-degelo;

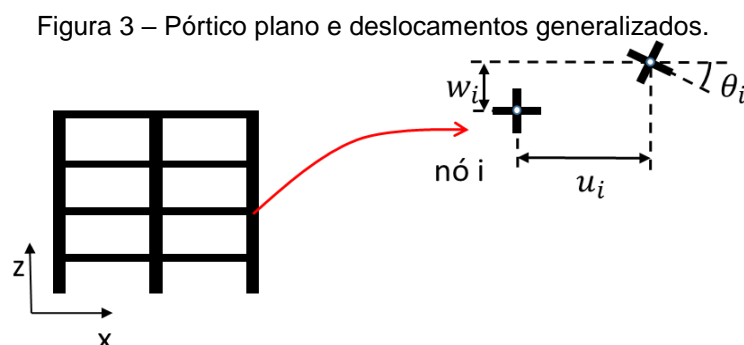
- Condições de umidade intermediária: é agressivo, em que os elementos estão sujeitos tanto à corrosão das armaduras, quanto à degradação direta do concreto;
- Condições em que o concreto sofre ciclos de molhagem e secagem: são condições críticas para a corrosão das armaduras, permitindo a entrada de água com íons de cloreto, bem como a entrada de oxigênio.

3.2 Teoria do Dano Concentrado para pórticos

3.2.1 Conceitos Iniciais

Os pórticos são elementos estruturais conectados uns aos outros por meio de nós e compostos por vigas e colunas com ligações rígidas, normalmente com um ângulo de 90° (LEET, UANG e GILBERT, 2009). Na análise de um pórtico consideram-se os deslocamentos generalizados dos nós e as cargas equivalentes (forças externas) aplicadas em cada nó. Após a determinação das forças externas analisam-se os esforços internos através da utilização de equações cinemáticas e de equações de equilíbrio, para obter respectivamente as deformações e as tensões solicitantes da barra analisada.

As tensões e as deformações são relacionadas através de equações constitutivas, as quais caracterizam o comportamento do material. Essas equações serão apresentadas detalhadamente no item 3.2.4. Em um pórtico, cada nó apresenta três deslocamentos generalizados (Figura 3), gerando a matriz de deslocamentos que considera deslocamentos horizontais (u_n), deslocamentos verticais (w_n) e rotações (θ_n), em que n representa o número de nós (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

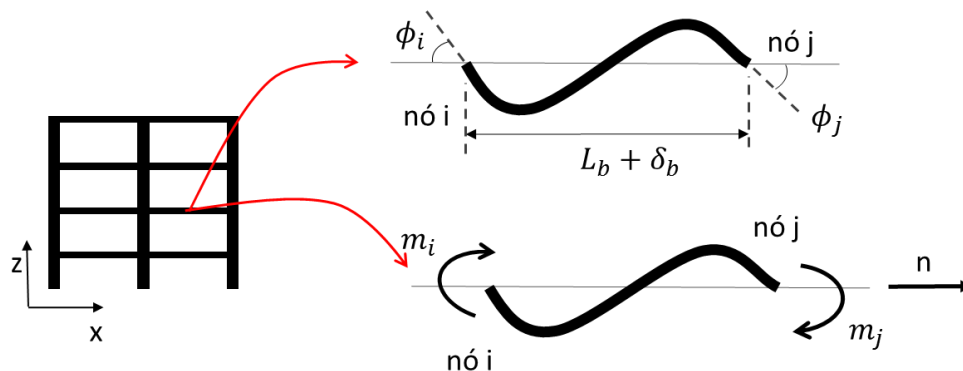


Os deslocamentos na direção positiva do eixo x , na direção positiva do eixo z e a rotação no sentido horário do nó i , representados respectivamente por u_i, w_i, θ_i , por convenção, são deslocamentos positivos.

A matriz das forças externas é definida através das forças horizontais (Ru_n), das forças verticais (Rw_n) e dos momentos externos (M_n). A matriz de deslocamentos e a matriz de forças externas são definidas com suas respectivas condições de contorno dependendo da estrutura e do suporte.

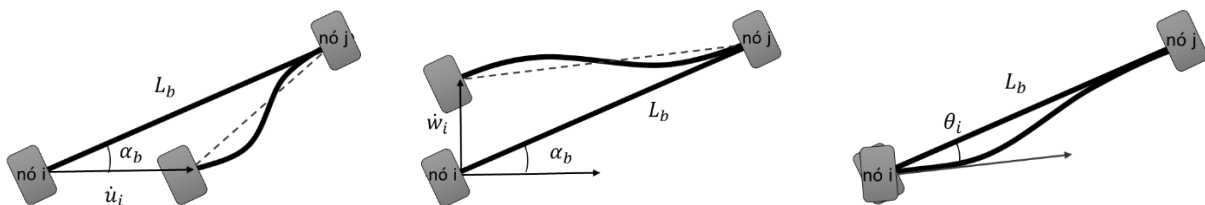
Considerando um elemento b de um pórtico, as deformações generalizadas ($\{\Phi\}_b^T$) e as tensões generalizadas ($\{M\}_b^T$) (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015) são definidas para cada elemento pela convenção de sinais apresentada na Figura 4:

Figura 4 – Pórtico plano, deformações e tensões generalizadas.



As equações cinemáticas são obtidas aplicando um deslocamento infinitesimal no elemento, conforme o esquema da Figura 5, o que estabelece uma relação entre deformações e deslocamentos de cada elemento do pórtico. Estas equações também são apresentadas detalhadamente no item 3.2.4 (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

Figura 5 – Deformações devido às velocidades virtuais

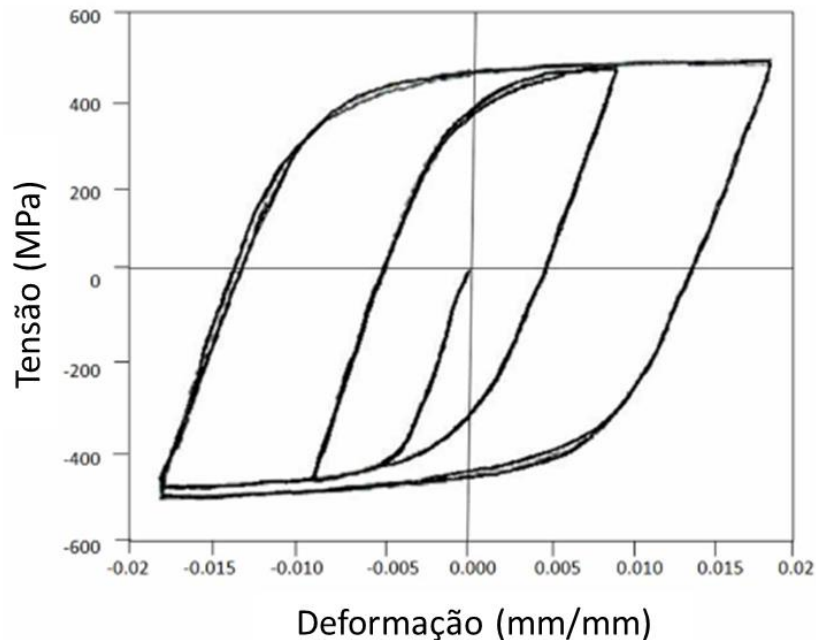


3.2.2 Efeito Bauschinger

Quando um material é carregado até o regime plástico, por exemplo em compressão, e posteriormente descarregado e carregado novamente, mas com cargas contrárias (i.e., tração), gera-se uma tensão inferior ao primeiro carregamento, bem como um decréscimo

do limite elástico (Figura 6), sendo este comportamento do material é denominado efeito de Bauschinger (YAN, 1998).

Figura 6 – Efeito Bauschiger.



Fonte: Flórez-López, Marante e Picón (2015).

Este efeito pode ser explicado através de um modelo elastoplástico com encruamento cinemático. O estudo do comportamento das estruturas sob um carregamento cíclico é de extrema importância, pois a reversão de carregamento, em geral, tem um efeito devastador nas estruturas, como por exemplo, os sismos. Assim, uma forma de análise de estruturas complexas é a aplicação de um modelo de plasticidade concentrada, em que o dano é acoplado de forma a obter-se rótulas inelásticas e, para descrever os fenômenos inelásticos, utiliza-se um modelo elastoplástico com encruamento cinemático, como mencionado por Flórez-López, Marante e Picón (2015).

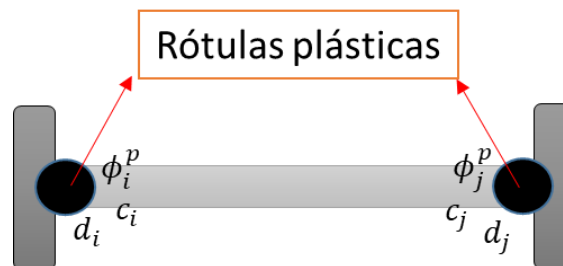
3.2.3 Teoria do Dano Concentrado

A teoria do dano concentrado consiste em integrar a mecânica da fratura e de dano clássico em elementos de rótulas plásticas, onde se assume que as fissuras no concreto podem ser acopladas nas rótulas, assim, as rótulas plásticas tornam-se rótulas inelásticas ou rótulas plásticas com dano (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015). Esta teoria é

recomendada para estruturas de concreto armado pois atua como uma forma de reduzir os custos computacionais, além de garantir um estudo confiável (COELHO, 2017).

O estado de fissuração é representado pelas variáveis internas $(d) = (d_i, d_j)$ para cada elemento. Essas variáveis assumem valores entre zero e um, que representam a densidade de fissuras, em que um dano igual a zero indica a ausência de fissuras e um dano de 1 representa a fissuração completa da seção, ou seja, a perda de rigidez completa da seção (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015). Nesta teoria são adicionadas a plasticidade e o dano como variáveis internas, acopladas de forma concentrada em rótulas, como apresentado na Figura 7. Da mesma forma pode-se acoplar a corrosão nas rótulas na forma de variáveis internas $(c) = (c_i, c_j)$ (DAHMER e FLÓREZ-LÓPEZ, 2017), sendo que a inserção destas variáveis será apresentada detalhadamente na metodologia.

Figura 7 – Rótulas plásticas.



3.2.4 Pórticos elastoplásticos com encruamento cinemático linear

Para a análise de pórticos elastoplásticos com encruamento cinemático linear, que consideram o efeito Bauschinger, primeiro definem-se as propriedades dos materiais e as características da seção (módulo de elasticidade, momento de inércia, área da seção, momento crítico, momento plástico e momento último) e, posteriormente são adicionadas a matriz de deslocamentos (Matriz 1) e a matriz de carregamentos e de momentos externos (Matriz 2), com suas respectivas condições de contorno (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015). Essas matrizes foram citadas previamente no item 3.2.1, esquematizadas através da Figura 3.

As condições de contorno podem ser essenciais ou naturais, indicando, respectivamente, os nós com apoios, com engastes ou livres, e os nós com carregamentos ou momentos aplicados (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

$$\{U\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ u_n \\ w_n \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 1} \quad \{F\} = \begin{bmatrix} Ru_1 \\ Rw_1 \\ M_1 \\ \vdots \\ Ru_n \\ Rw_n \\ M_n \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 2}$$

Para cada elemento é definida a matriz de transformação cinemática (Matriz 3), que relaciona eixos locais com eixos globais, através do ângulo entre estes eixos e a direção de cada barra em relação aos nós i e j ($i \rightarrow j$).

$$[B]_b = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & \dots & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & \dots & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & \dots \\ 0 & \dots & -\cos \alpha_b & -\sin \alpha_b & 0 & \dots & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 3}$$

Ademais, também é definida a matriz de flexibilidade (Matriz 4) para cada elemento de pórtico, onde considera-se que para um tempo $t = 0$, o dano é nulo, ou seja, não há fissuração no concreto e tem-se a matriz de flexibilidade inicial.

$$[F(D)] = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI(1-d_i)} & -\frac{L_b}{6EI} & 0 \\ -\frac{L_b}{6EI} & \frac{L_b}{3EI(1-d_j)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{AE} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 4}$$

De forma simplificada, a matriz de flexibilidade inicial ($t = 0$ e $d = 0$), pode ser escrita conforme a Matriz 5.

$$[F^0] = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI} & -\frac{L_b}{6EI} & 0 \\ -\frac{L_b}{6EI} & \frac{L_b}{3EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{AE} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 5}$$

Em seguida são definidas as matrizes de deformações generalizadas (Matriz 6) e as matrizes de tensões generalizadas (Matriz 7) para cada elemento. O esquema para

definição dessas matrizes, bem como as considerações utilizadas também foram apresentadas no item 3.2.1.

$$\{\Phi\}_b = \begin{bmatrix} \phi_i^b \\ \phi_j^b \\ \delta_b \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 6} \quad \{M\}_b = \begin{bmatrix} m_i^b \\ m_j^b \\ n_b \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 7}$$

Posteriormente, define-se a matriz de rotações plásticas (Matriz 8) e a matriz de dano (Matriz 9) com valores iniciais nulos. Estas matrizes são definidas para cada elemento e incrementadas com a variação do tempo.

$$\{\Phi\}_b^p = \begin{bmatrix} \phi_i^p \\ \phi_j^p \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 8} \quad [d]_b = \begin{bmatrix} d_i \\ d_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 9}$$

Para relacionar os deslocamentos e as deformações utilizam-se as equações cinemáticas, que são aplicadas para cada elemento. As equações cinemáticas são obtidas aplicando um deslocamento infinitesimal, como foi apresentado na Figura 5, estabelecendo-se uma relação entre deformações e deslocamentos de cada elemento do pórtico, conforme as equações abaixo (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

$$\phi_i = \frac{\sin \alpha}{L_b} u_i - \frac{\cos \alpha}{L_b} w_i + \theta_i - \frac{\sin \alpha}{L_b} u_j + \frac{\cos \alpha}{L_b} w_j \quad \text{Equação 5}$$

$$\phi_j = \frac{\sin \alpha}{L_b} u_i - \frac{\cos \alpha}{L_b} w_i - \frac{\sin \alpha}{L_b} u_j + \frac{\cos \alpha}{L_b} w_j + \theta_j \quad \text{Equação 6}$$

$$\delta = -\cos \alpha u_i - \sin \alpha w_i + \cos \alpha u_j + \sin \alpha w_j \quad \text{Equação 7}$$

Na forma matricial obtém-se a seguinte expressão:

$$\{\Phi\} = [B]_b \{U\} \quad \text{Equação 8}$$

Aplica-se a equação de equilíbrio (Equação 9) no pórtico, em que essa equação representa a relação entre esforços externos e internos, ou seja, relaciona as carregamentos e momentos aplicados com as tensões, através da matriz de transformação cinemática $[B]$.

$$\sum [B]_b^T \{M\} = \{P\} \quad \text{Equação 9}$$

Posteriormente, é necessário definir as equações constitutivas, que representam o comportamento do material sendo que, a deformação de um elemento ($\{\Phi\}_b$) expressa na Equação 10, é composta pelas deformações elásticas ($\{\Phi^e\}_b$), pelas deformações plásticas ($\{\Phi^p\}_b$) e pelas rotações do dano ($\{\Phi^d\}_b$).

$$\{\Phi\}_b = \{\Phi^e\}_b + \{\Phi^p\}_b + \{\Phi^d\}_b \quad \text{Equação 10}$$

Assim, as equações constitutivas são um conjunto de leis que tem por objetivo caracterizar o comportamento do material, dividindo-se, portanto, em lei de elasticidade, lei de dano e lei de plasticidade (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015). A lei de elasticidade (Equação 11) é aplicada para cada elemento e considera as deformações elásticas e plásticas desse elemento, em que a diferença dessas deformações corresponde à matriz de flexibilidade multiplicada pelas matrizes de tensões.

$$\{\Phi - \Phi^p\} = [F(D)]\{M\} \quad \text{Equação 11}$$

Para a lei de dano, primeiramente é necessário definir a taxa de liberação de energia (y), através da Equação 12 (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

$$y = \frac{F^0 m^2}{2(1-d)^2} \quad \text{Equação 12}$$

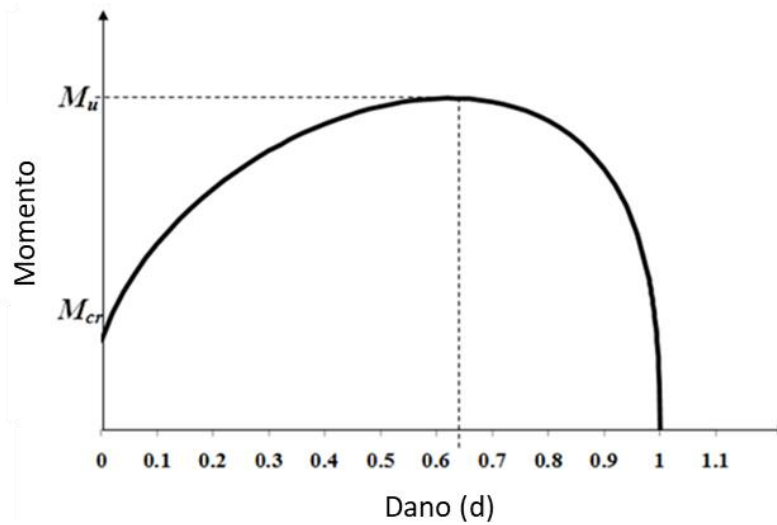
Posteriormente, define-se a função de resistência ($R(d)$), que pode ser determinada pela Equação 13.

$$R(d) = R_0 + q \frac{\ln(1-d)}{1-d} \quad \text{Equação 13}$$

Em que, R_0 é a resistência inicial e q é o incremento de resistência pela ação da armadura. Estes parâmetros, são determinados através da Equação 14 e da Figura 8, utilizando o momento crítico (M_{cr}) e o momento último (M_u):

$$m^2 = \frac{6EI(1-d)^2}{L_b} R_0 + \frac{6qEI}{L_b} (1-d) \ln(1-d) \quad \text{Equação 14}$$

Figura 8 – Momento em função do dano.



Fonte: Flórez-López, Marante e Picón (2015).

Quando $m = M_{cr}$, então o dano é zero e a resistência inicial (Equação 15) é definida como:

$$R_0 = \frac{M_{cr}^2 L_b}{6EI} \quad \text{Equação 15}$$

O parâmetro q é calculado utilizando-se o momento último e derivando a Equação 14 e igualando a zero. Dessa forma, enquanto o valor obtido através da equação da taxa de liberação de energia (Equação 12) for menor que o valor da função de resistência, não haverá dano no pórtico. No entanto, quando existir uma igualdade, inicia-se o incremento da variável de dano.

$$\begin{cases} y < R(d) \Rightarrow \dot{d} = 0 \\ \dot{d} > 0 \Rightarrow y = R(d) \end{cases} \quad \text{Equação 16}$$

A lei de plasticidade, inicialmente, considera que as rotações plásticas são nulas, ou seja, apenas tem-se deformações elásticas, por isso para o cálculo é necessário definir a função de escoamento (Equação 17).

$$f = \left| \frac{m}{1-d} - h\dot{\phi}^p \right| - k_0 \leq 0 \quad \text{Equação 17}$$

Em que h é o termo de encruamento cinemático linear e k_0 é o momento de

escoamento da função. A função de escoamento pode assumir valores menores ou iguais a zero, assim, enquanto esta função for menor que zero ainda não foram geradas rotações plásticas ou estas rotações são constantes e, quando for igual zero, a rótula está ativa e ocorre o incremento da rotação plástica. Dessa forma, a lei de plasticidade (Equação 18) define se a rótula está ativa ou bloqueada.

$$\begin{cases} f < 0 \Rightarrow \dot{\phi}^p = 0 & (\text{rótula bloqueada}) \\ \dot{\phi}^p \neq 0 \Rightarrow f = 0 & (\text{rótula ativa}) \end{cases} \quad \text{Equação 18}$$

Os parâmetros da função de escoamento são determinados através do valor de dano no início da plasticidade (d_p), ou seja, as rotações plásticas são nulas e k_0 é definido de acordo com a Equação 19 (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015)

$$k_0 = \frac{M_p}{1 - d_p} \quad \text{Equação 19}$$

Em que, M_p é o momento plástico.

A função de plasticidade é zero quando o momento é último (M_u), então, o termo de encruamento (Equação 20) é obtido em função da rotação plástica última (ϕ_{p_u}), como (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015):

$$h = \frac{1}{\phi_{p_u}} \left(\frac{M_u}{1 - d_u} - \frac{M_p}{1 - d_p} \right) \quad \text{Equação 20}$$

Em que, d_u é o dano último.

Por fim, a lei de corrosão, também é uma equação constitutiva, que depende da taxa de corrosão e das leis que definem a profundidade de pit expostos no item 3.1.2, e sua aplicação em conjunto com a TDC será apresentada na metodologia, no item 4.2.5.

3.3 Termodinâmica de Sólidos

Na termodinâmica de sólidos um axioma fundamental é que o sistema possui uma energia interna, referenciada por unidade de massa, em que essa energia interna pode ser determinada em qualquer instante através de uma variável de estado (PROENÇA, 2000). Além disso, são utilizados potenciais termodinâmicos, que apresentam a propriedade de

continuidade, ou seja, o potencial é uma função contínua de todas as variáveis do espaço, sendo assim, diferenciável em relação a essas variáveis (CAMPOS, SILVA, *et al.*, 2015).

3.3.1 Princípio da potência Virtual

A potência virtual de um sistema de forças é uma função linear contínua do valor escalar da velocidade virtual (\dot{U}) igual ao trabalho realizado por unidade de tempo do fenômeno, ou seja, $\hat{P} = \frac{\tau}{\Delta t}$ (LEMAITRE e CHABOCHE, 1994). Assim, deve-se considerar dois axiomas:

- Axioma da objetividade: a potência virtual das forças internas agindo em um sistema para um dado movimento virtual é uma quantidade objetiva, isto é, a potência virtual das forças internas em qualquer movimento rígido do meio é zero (GERMAIN, 1973; LEMAITRE e CHABOCHE, 1994);
- Axioma do equilíbrio: a potência virtual total das forças internas, externas e de inércia, para qualquer instante t em qualquer estado virtual admissível de movimento é zero (KELLY, 2018).

Dessa forma, esse princípio afirma que a potência virtual das forças externas (\hat{P}_{ext}) é igual a soma da potência virtual das forças de inércia (\hat{P}_{ine}) e da potência virtual das deformações (\hat{P}_{def}) (LEMAITRE e CHABOCHE, 1994).

$$\hat{P}_{ext} = \hat{P}_{ine} + \hat{P}_{def} \quad \text{Equação 21}$$

3.3.2 Primeiro princípio da termodinâmica

A variação da energia total do sistema ocorre se houver trabalho mecânico e/ou transferência de calor, dessa forma, o primeiro princípio representa a conservação de energia do sistema, estabelecendo o equilíbrio entre a potência mecânica e a taxa de calor transferida com a taxa de variação da energia total. Desta forma, a taxa de trabalho mecânico (potência das forças externas (P_{ext})) mais a taxa de calor (Q) é igual a taxa de energia cinética (\dot{K}) mais a taxa de variação da energia interna (\dot{E}), conforme expresso na Equação 22 (PROENÇA, 2000).

$$\dot{E} + \dot{K} = P_{ext} + Q \quad \text{Equação 22}$$

Este primeiro princípio permite a interconvertibilidade das diferentes formas de

energia, sem qualquer restrição em relação ao sentido que a conversão possa se dar, desde que haja um balanço entre as energias. Nos processos reversíveis, o sentido não é relevante, no entanto, nos processos irreversíveis ou dissipativos, a restrição é de grande importância (PROENÇA, 2000). Ao relacionar o primeiro princípio da termodinâmica com o princípio da potência virtual, e considerando que $P_{ext} = \{\dot{U}\}\{F\}$ e $\dot{K} = P_{ine}$, obtém-se a Equação 23.

$$\therefore \dot{E} = P_{def} + Q \quad \text{Equação 23}$$

3.3.3 Segundo princípio da termodinâmica

O segundo princípio incrementa duas variáveis, a entropia (\dot{S}) e a temperatura (T), assumindo que é possível representar a temperatura por um campo escalar de valores positivos definido para cada instante de tempo, em que a entropia corresponde à variação de energia associada à uma variação da temperatura. Assim, o princípio determina que a taxa de entropia é sempre maior ou igual à taxa de calor dividida pela temperatura absoluta (LEMAITRE e CHABOCHE, 1994). De forma simplificada pode ser definida pela Equação 24 (SWALIN, 1972)

$$\dot{S} - \frac{Q}{T} \geq 0 \quad \text{Equação 24}$$

Esse princípio pode ser utilizado tanto para processos reversíveis, como para processos irreversíveis, diferentemente do primeiro princípio, que não restringe a direção da conversão, apenas requer que haja um balanço entre as energias. Dessa forma, na Equação 24, a igualdade corresponde aos processos reversíveis e a desigualdade aos processos irreversíveis (PROENÇA, 2000).

Nos processos reversíveis a variação da entropia é relacionada com a quantidade de calor transferida, em que em função dessa quantidade de calor, a entropia relaciona-se com o grau de desordem assumido do sistema. Assim, este princípio, impõem que para processos irreversíveis, a variação total de entropia deve ser maior ou igual a variação pela transferência de calor (PROENÇA, 2000).

Os dois princípios da termodinâmica podem ser combinados de forma a obter uma desigualdade, que deve ser cumprida para que o processo seja termodinamicamente admissível (PROENÇA, 2000). Essa desigualdade, conhecida como desigualdade de Clausius-Duhem, pode ser obtida através da energia livre, em que por exemplo,

Lemaitre e Chaboche (1994), utilizam a energia livre de Helmholtz ($\dot{\psi}_b$), assim, a energia livre escolhida para resolver a equação irá depender das variáveis de estado e das variáveis internas, que definem a desigualdade (Equação 25), como:

$$P_{def}^b - \dot{\psi}_b - S_b \dot{T}_b \geq 0 \quad \text{Equação 25}$$

Dessa forma, os processos são denominados termodinamicamente admissíveis quando a desigualdade de Clausius-Duheim é verificada a cada instante (PROENÇA, 2000).

3.3.4 Potenciais termodinâmicos

Primeiramente, deve-se compreender que as reações químicas liberam energia quando as ligações armazenadoras de energia são quebradas (AVISSAR, CHOI, *et al.*, 2015). Assim, os potenciais termodinâmicos, também chamados de energia livre, correspondem a determinada quantidade de energia disponível para realizar um trabalho mecânico (CAMPOS, SILVA, *et al.*, 2015). Dessa forma, pode-se utilizar uma medida de energia livre para quantificar as transferências energéticas em reações químicas (AVISSAR, CHOI, *et al.*, 2015).

As energias livres de Helmholtz e de Gibbs podem ser usadas como potenciais termodinâmicos, assumindo que a energia livre de Helmholtz é uma função das deformações generalizadas, da temperatura e de um conjunto de variáveis de estado, e ainda, considerando que a energia livre de Gibbs é uma função das tensões generalizadas, da temperatura e do mesmo conjunto de variáveis de estado (CAMPOS, SILVA, *et al.*, 2015).

Considerando que a variação da energia livre de Gibbs (ΔG) indica a tendência de reação de um metal com seu ambiente. Dessa forma, quanto mais negativo o valor de ΔG maior a tendência de ocorrência da reação, no entanto, não indica que a taxa de corrosão também será alta (REVIE e UHLIG, 2008). Assim, para a análise da corrosão é necessário considerar a energia livre de Gibbs, sendo a redução dessa energia a causa fundamental ou a força motriz de toda a corrosão (SHAW e KELLY, 2006).

4. METODOLOGIA

A metodologia do presente trabalho envolve as seguintes etapas: determinação da termodinâmica de pórticos; implementação de um modelo termodinâmico elastoplástico com encruamento cinemático linear acoplado ao dano e à corrosão; determinação dos exemplos utilizados; e, explicação das análises comparativas.

4.1 Termodinâmica de pórticos

Utilizando os conceitos expostos no item 3.3, pode-se definir as equações da termodinâmica para um pórtico. Assim, a potência virtual das forças externas corresponde a uma função das velocidades virtuais ($\dot{\hat{U}}$) pelas forças externas, e é expressa pela Equação 26, em que $\{F\}$ é a matriz das forças nodais equivalentes.

$$\hat{P}_{ext} = \{\dot{\hat{U}}\}^T \{F\} \quad \text{Equação 26}$$

A notação utilizada implica que as variáveis com circunflexo ($\hat{\cdot}$) são virtuais e as com ponto ($\dot{\cdot}$) são derivadas. A potência virtual das deformações (\hat{P}_{def}) corresponde ao somatório das potências virtuais definidas para cada elemento do pórtico, em que a potência de cada elemento é dada pelo produto da taxa de deformações generalizadas $\{\dot{\hat{\Phi}}\}$ pela matriz de tensões generalizadas $\{M\}_b$, de acordo com a Equação 27.

$$\hat{P}_{def} = \sum_{b=1}^m \hat{P}_{def}^b \Rightarrow \hat{P}_{def}^b = \{\dot{\hat{\Phi}}\}_b^T \{M\}_b \quad \text{Equação 27}$$

No qual m é o número de elementos do pórtico.

A potência virtual das forças de inércia (\hat{P}_{ine}), por sua vez, é definida pela Equação 28, no qual $[Mass]$ é a matriz de massa da estrutura e $\{\ddot{U}\}$ é a matriz de acelerações.

$$\hat{P}_{ine} = \{\dot{\hat{U}}\}^T [Mass] \{\ddot{U}\} \quad \text{Equação 28}$$

Assim, obtém-se a equação de equilíbrio dinâmico do pórtico (Equação 29), que

provem da teoria clássica de pórticos elásticos, sendo esta obtida ao derivar as potências de inércia e de deformações em relação à velocidade, e assim, obtém-se o equilíbrio estático.

$$\{F\} = \sum_{b=1}^m [B]_b^T \{M\} + [Mass]\{\dot{U}\} \quad \text{Equação 29}$$

Da mesma maneira, definem-se os princípios da termodinâmica para pórticos, na análise para um elemento. O primeiro princípio pode ser definido pela Equação 30.

$$\dot{E}_b + \dot{K}_b = P_{ext}^b + Q_b \quad \text{Equação 30}$$

A taxa de energia cinética é igual a potência das forças de inércia, em que esta taxa é definida através da Equação 28. Dessa forma, a energia interna de um elemento de pórtico é dada pela Equação 31, que representa a energia acumulada em um elemento de pórtico.

$$\dot{E}_b = P_{def}^b + Q_b \quad \text{Equação 31}$$

O segundo princípio da termodinâmica aplicado para pórticos corresponde a Equação 32, em que esta desigualdade pode ser escrita em função da energia interna (Equação 33) ou em relação a energia livre de Gibbs (Equação 34).

$$\dot{S}_b - \frac{Q_b}{T_b} \geq 0 \quad \text{Equação 32}$$

$$T_b \dot{S}_b + \{\dot{\Phi}\}^T \{M\} - \dot{E}_b \geq 0 \quad \text{Equação 33}$$

$$G_b = -E_b + T_b S_b + \{\Phi\}^T \{M\} \quad \text{Equação 34}$$

Em que se deriva a Equação 34 e substitui-se a derivada de energia interna (\dot{E}_b) obtida na Equação 33 e, dessa forma, obtém-se a Equação 35, que representa a relação entre os princípios da termodinâmica e a energia livre de Gibbs.

$$\dot{G}_b - \{\dot{M}\}^T \{\Phi\} - S_b \dot{T}_b \geq 0 \quad \text{Equação 35}$$

Esta equação (Equação 35) define um processo termodinamicamente admissível. Dessa forma, pode-se obter as leis de estado ao derivar a Equação 35 em relação às variáveis internas, o que resulta nas seguintes equações:

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\} = \{\Phi\} \quad \text{Equação 36}$$

$$\frac{\partial G_b}{\partial T_b} = S_b \quad \text{Equação 37}$$

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial V_\alpha} \right\} = \{A_\alpha\} \quad \text{Equação 38}$$

Assim, reescreve-se a desigualdade (Equação 39) para obter-se o princípio da termodinâmica mais o conceito de potencial (Equação 40), utilizando como potencial a energia livre de Gibbs.

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\}^T \{\dot{M}\} + \frac{\partial G_b}{\partial T_b} \dot{T}_b + \left\{ \frac{\partial G_b}{\partial V_\alpha} \right\} \{\dot{V}_\alpha\} \geq 0 \quad \text{Equação 39}$$

$$\{\Phi\}^T \{\dot{M}\} + S_b \dot{T}_b + \{A_\alpha\} \{\dot{V}_\alpha\} \geq 0 \quad \text{Equação 40}$$

Dessa forma, observa-se uma relação de causa-efeito entre as variáveis internas e as derivadas de Gibbs: $\{M\} \leftrightarrow \{\Phi\}$; $T_b \leftrightarrow S_b$; $\{V_\alpha\} \leftrightarrow \{A_\alpha\}$, em que a variável A_α é a força termodinâmica associada as variáveis de estado ou variáveis internas (V_α). A desigualdade, indica que a dissipação de energia durante um processo inelástico deve ser positiva. Para problemas reais, ocorre a dissipação de energia, ou seja, a desigualdade é maior que zero, e é igual a zero em um processo elástico.

4.2 Modelos termodinâmicos

Os modelos termodinâmicos consistem em aplicar a teoria de termodinâmica de pórticos (item 4.1) e definir uma equação para o potencial termodinâmico de Gibbs, de forma a obter as leis conhecidas da mecânica clássica de pórticos, da plasticidade e de dano e, assim definir a lei para corrosão seguindo os mesmos princípios. Dessa forma, se apresentarão a seguir modelos mais simples para compreender o processo até a obtenção do modelo completo de plasticidade com dano e corrosão.

4.2.1 Modelo elastoplástico perfeito

O modelo elastoplástico perfeito considera as deformações plásticas, no entanto o momento não ultrapassa o momento de escoamento (m_y). Este modelo é caracterizado pelas leis de elasticidade (Equação 41) e de evolução (Equação 42) e pela função de escoamento (Equação 43).

$$\{\Phi - \Phi^p\} = [F^0]\{M\} \quad \text{Equação 41}$$

$$\begin{cases} f < 0 \Rightarrow \dot{\Phi}^p = 0 & (\text{rótula bloqueada}) \\ \dot{\Phi}^p \neq 0 \Rightarrow f = 0 & (\text{rótula ativa}) \end{cases} \quad \text{Equação 42}$$

$$f = |m| - m_y \leq 0 \quad \text{Equação 43}$$

Dessa forma, deve-se encontrar um potencial termodinâmico que represente estas equações. Assim, um potencial adequado é uma equação $G_b = G_b(\{M\}, \Phi^p)$, dado por:

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}^T [F^0] \{M\} + \{M\}^T \{\Phi^p\} \quad \text{Equação 44}$$

Desta forma, quando se deriva o potencial em relação ao momento $\left(\left\{\frac{\partial G_b}{\partial M}\right\}\right)$ obtém-se a lei de elasticidade (Equação 41) e, ao derivar em relação às deformações plásticas obtém-se a força termodinâmica associada à plasticidade (Equação 45).

$$\left\{\frac{\partial G_b}{\partial \Phi^p}\right\} = \{M\} \quad \text{Equação 45}$$

Na equação acima pode-se observar que a função de escoamento depende apenas do momento ($\{M\}$). Dessa forma, aplicando os conceitos da termodinâmica, o modelo deve cumprir a seguinte desigualdade:

$$\{M\}\{\dot{\Phi}^p\} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_i \dot{\phi}_i^p + m_j \dot{\phi}_j^p \geq 0 \quad \text{Equação 46}$$

Pela convenção de um modelo elastoplástico perfeito sabe-se que o momento e a deformação apresentam o mesmo sinal.

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_i > 0 & \quad \therefore \phi_i^p \geq 0 \\ \Rightarrow m_i < 0 & \quad \therefore \phi_i^p \leq 0 \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade (Equação 46) sempre é verificada e, assim, pode-se dizer que este modelo é termodinamicamente admissível.

4.2.2 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear

O modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, além de considerar as deformações plásticas, define que o momento pode ser superior ao momento de escoamento, representando de forma mais adequada uma estrutura real ao adicionar o efeito Bauschinger. Assim, deve-se definir um termo de encruamento (h), dado pela Matriz 10.

$$[H] = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 10}$$

Para este modelo, a lei de elasticidade (Equação 47) e a lei de evolução (Equação 48) se mantêm, mas a função de escoamento (Equação 49) sofre alterações de maneira a incluir as deformações plásticas e o termo de encruamento.

$$\{\Phi - \Phi^p\} = [F^0]\{M\} \quad \text{Equação 47}$$

$$\begin{cases} f < 0 \Rightarrow \dot{\phi}^p = 0 & (\text{rótula bloqueada}) \\ \dot{\phi}^p \neq 0 \Rightarrow f = 0 & (\text{rótula ativa}) \end{cases} \quad \text{Equação 48}$$

$$f = |m - h\Phi^p| - m_y \leq 0 \quad \text{Equação 49}$$

Dessa forma, deve-se encontrar um potencial termodinâmico que represente estas equações. Assim, um potencial adequado é uma equação $G_b = G_b(\{M\}, \Phi^p)$, dado por:

$$G_b = \frac{1}{2}\{M\}^T [F^0]\{M\} + \{M\}^T \{\Phi^p\} - \frac{1}{2}\{\Phi^p\}^T [H]\{\Phi^p\} \quad \text{Equação 50}$$

Desta forma, ao se derivar o potencial em relação ao momento $\left(\left\{\frac{\partial G_b}{\partial M}\right\}\right)$ obtém-se a lei de elasticidade (Equação 47), e ao derivar em relação às deformações plásticas obtém-se a força termodinâmica associada à plasticidade, que será chamada de $\{A\}$ (Equação 51).

$$\left\{\frac{\partial G_b}{\partial \Phi^p}\right\} = \{M\} - [H]\{\Phi^p\} = \{A\} \quad \text{Equação 51}$$

Assim, a representação da dissipação de energia desse modelo é dada pela desigualdade (Equação 52).

$$\left\{\frac{\partial G_b}{\partial \Phi^p}\right\}\{\dot{\Phi}^p\} \geq 0 \quad \text{ou} \quad \{A\}\{\dot{\Phi}^p\} \geq 0 \quad \text{Equação 52}$$

Para demonstrar que esta desigualdade é sempre verificada neste modelo, reescreve-se a lei de evolução (Equação 53):

$$\begin{cases} f < 0 \text{ ou } \dot{f} < 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ f = 0 \text{ ou } \dot{f} = 0 \Rightarrow \lambda > 0 \end{cases} \quad \text{Equação 53}$$

Em que a derivada da deformação plástica é:

$$\{\dot{\Phi}^p\} = \lambda \frac{\partial f}{\partial A} \quad \text{Equação 54}$$

Dessa forma, supõem-se as condições indicadas abaixo, para A , visando analisar se a equação verifica.

$$\begin{aligned} \text{se } A > 0 \text{ e } f = 0 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial A} = 1 \text{ e } \{\dot{\Phi}^p\} = \lambda \quad \therefore \{A\}\{\dot{\Phi}^p\} \geq 0 \\ \text{se } A < 0 \text{ e } f = 0 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial A} = -1 \text{ e } \{\dot{\Phi}^p\} = -\lambda \quad \therefore \{A\}\{\dot{\Phi}^p\} \geq 0 \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade (Equação 52) sempre é verificada, assim, pode-se dizer que este modelo é termodinamicamente admissível.

4.2.3 Modelo elástico com dano

No modelo elástico com dano, não é considerado o comportamento plástico da estrutura, no entanto, inclui-se a fissuração através da variável de dano. O modelo apresenta uma lei de elasticidade dada pela Equação 55, uma lei de evolução dada pela Equação 56 e o critério de Griffith representado na Equação 57.

$$\{\Phi\} = [F(D)]\{M\} \quad \text{Equação 55}$$

$$\begin{cases} y < R_0 \Rightarrow d = 0 & (\text{sem dano}) \\ d > 0 \Rightarrow y = R_0 & (\text{com dano}) \end{cases} \quad \text{Equação 56}$$

$$y = \frac{F^0 m^2}{2(1-d)^2} \quad \text{Equação 57}$$

Em que, a matriz de flexibilidade com dano ($F(D)$) corresponde a Matriz 11.

$$[F(D)] = \begin{bmatrix} \frac{F_{11}^0}{(1-d_i)} & F_{12}^0 \\ F_{12}^0 & \frac{F_{22}^0}{(1-d_j)} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 11}$$

Dessa forma, deve-se encontrar um potencial termodinâmico que represente estas equações. Assim, um potencial adequado é uma equação $G_b = G_b(\{M\}, d)$, dado por:

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}^T [F(D)] \{M\} \quad \text{Equação 58}$$

De forma que ao se derivar o potencial em relação ao momento $\left(\frac{\partial G_b}{\partial M}\right)$ obtém-se a lei de elasticidade (Equação 55). E ao derivar em relação ao dano obtém-se a força termodinâmica associada ao dano $\{y\}$ (Equação 59).

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial d} \right\} = \frac{F^0 m^2}{2(1-d)^2} = \{y\} \quad \text{Equação 59}$$

Em que este valor sempre é positivo. Assim, a representação da dissipação de energia desse modelo é dada pela desigualdade (Equação 60).

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial d} \right\} \{ \dot{d} \} \geq 0 \quad \text{ou} \quad \{ y \} \{ \dot{d} \} \geq 0 \quad \text{Equação 60}$$

Para demonstrar que esta desigualdade é sempre verificada neste modelo, reescreve-se a lei de evolução (Equação 53).

$$\begin{cases} g < 0 \text{ ou } \dot{g} < 0 \Rightarrow \lambda^d = 0 \\ g = 0 \text{ ou } \dot{g} = 0 \Rightarrow \lambda^d > 0 \end{cases} \quad \text{Equação 61}$$

Em que a derivada do dano é:

$$\{ \dot{d} \} = \lambda^d \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{Equação 62}$$

A função g é dada pela diferença entre o critério de Griffth (y) e a resistência inicial (R_0). Dessa forma, é realizada a verificação para y positivo, no entanto, não se realiza a verificação para y negativo, pois essa não é uma condição possível no critério de Griffth.

$$\text{se } y > 0 \text{ e } g = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 1 \text{ e } \{ d \} = \lambda \quad \therefore \{ y \} \{ \dot{d} \} \geq 0$$

Portanto, a desigualdade (Equação 60) sempre é verificada e, assim, pode-se dizer que este modelo é termodinamicamente admissível.

4.2.4 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear e dano

O modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear e dano considera as deformações plásticas, define que o momento pode ser superior ao momento de escoamento, através do termo de encruamento (h) e, além disso, inclui o efeito da fissuração do concreto.

Para este modelo, a lei de elasticidade (Equação 63) e a lei de evolução da plasticidade (Equação 64) são iguais às do modelo elastoplástico sem dano, mas a função de escoamento (Equação 65) sofre alterações ao incluir uma variável de dano.

$$\{ \Phi - \Phi^p \} = [F(D)] \{ M \} \quad \text{Equação 63}$$

$$\begin{cases} f < 0 \Rightarrow \dot{\phi}^p = 0 & (\text{rótula bloqueada}) \\ \dot{\phi}^p \neq 0 \Rightarrow f = 0 & (\text{rótula ativa}) \end{cases} \quad \text{Equação 64}$$

$$f = \left| \frac{m}{1-d} - h\phi^p \right| - k_0 \leq 0 \quad \text{Equação 65}$$

Quanto ao dano, utiliza-se uma nova lei de evolução (Equação 66) e uma nova equação de resistência (Equação 67), mantendo o critério de Griffith (Equação 68).

$$\begin{cases} y < R(d) \Rightarrow d = 0 & (\text{sem dano}) \\ d > 0 \Rightarrow y = R(d) & (\text{com dano}) \end{cases} \quad \text{Equação 66}$$

$$R(d) = R_0 + q \frac{\ln(1-d)}{1-d} \quad \text{Equação 67}$$

$$y = \frac{F^0 m^2}{2(1-d)^2} \quad \text{Equação 68}$$

Dessa forma, deve-se encontrar um potencial termodinâmico que represente estas equações. Assim, um potencial adequado é uma equação $G_b = G_b(\{M\}, \Phi^p, d)$, dado por:

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}^T [F(D)] \{M\} + \{M\}^T \{\Phi^p\} - \frac{1}{2} \{\Phi^p\}^T [H(D)] \{\Phi^p\} - I(D) \quad \text{Equação 69}$$

Em que (D) é dada pela Equação 70, sendo uma função que representa a resistência no potencial termodinâmico

$$I(D) = -\frac{1}{2} q \ln^2(1-d_i) - \frac{1}{2} q \ln^2(1-d_j) \quad \text{Equação 70}$$

E o encruamento considerando o dano $[H(D)]$ é dado pela Matriz 12:

$$[H(D)] = \begin{bmatrix} (1-d_i)h & 0 & 0 \\ 0 & (1-d_j)h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 12}$$

De forma que ao se derivar o potencial em relação ao momento $\left(\frac{\partial G_b}{\partial M}\right)$ obtém-se a lei de elasticidade (Equação 63). E ao derivar em relação às deformações plásticas (Equação 71) obtém-se a força termodinâmica associada à plasticidade, que será chamada

de $\{A\}$, correspondente à função de escoamento (Equação 65). Por fim, ao derivar em relação ao dano, obtém-se a Equação 72.

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial \Phi^p} \right\} = \{M\} - [H(D)]\{\Phi^p\} \quad \text{Equação 71}$$

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial d} \right\} = \frac{F^0 m^2}{2(1-d)^2} - q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} + h(\phi^p)^2 \quad \text{Equação 72}$$

Assim, a representação da dissipação de energia desse modelo é dada pela desigualdade (Equação 73).

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial d} \right\} \{ \dot{d} \} + \left\{ \frac{\partial G_b}{\partial \Phi^p} \right\} \{ \dot{\Phi}^p \} \geq 0 \quad \text{ou} \quad \{y\} \{ \dot{d} \} + \{A\} \{ \dot{\Phi}^p \} \geq 0 \quad \text{Equação 73}$$

Para demonstrar que esta desigualdade é sempre verificada neste modelo, reescreve-se cada lei de evolução, começando pela plasticidade:

$$\begin{cases} f < 0 \text{ ou } \dot{f} < 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ f = 0 \text{ ou } \dot{f} = 0 \Rightarrow \lambda > 0 \end{cases} \quad \text{Equação 74}$$

$$f = |A| - (1-d)k_0 \leq 0 \quad \text{Equação 75}$$

A função de escoamento acima pode ser escrita como:

$$\frac{f}{1-d} = \left| \frac{m}{1-d} - h\phi^p \right| - k_0 \leq 0 \quad \text{Equação 76}$$

Em que a derivada da deformação plástica é:

$$\{ \dot{\Phi}^p \} = \lambda \frac{\partial f}{\partial A} \quad \text{Equação 77}$$

Dessa forma, supõem-se as condições para A (abaixo) para analisar se a desigualdade é verificada.

$$\text{se } A > 0 \text{ e } f = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial A} = 1 \text{ e } \{ \dot{\Phi}^p \} = \lambda \quad \therefore \{A\} \{ \dot{\Phi}^p \} \geq 0$$

$$\text{se } A < 0 \text{ e } f = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial A} = -1 \text{ e } \{\dot{\phi}^p\} = -\lambda \quad \therefore \{A\}\{\dot{\phi}^p\} \geq 0$$

Portanto, a desigualdade (Equação 73) sempre é verificada para a plasticidade e, assim, pode-se dizer que este modelo é termodinamicamente admissível.

Posteriormente, é necessário verificar o modelo para o dano. Para demonstrar que a desigualdade é sempre verificada neste modelo, reescreve-se a lei de evolução de dano através da Equação 78Equação 53.

$$\begin{cases} g < 0 \text{ ou } \dot{g} < 0 \Rightarrow \lambda^d = 0 \\ g = 0 \text{ ou } \dot{g} = 0 \Rightarrow \lambda^d > 0 \end{cases} \quad \text{Equação 78}$$

Da mesma forma, reescreve-se a lei de dano como:

$$g = |y| - (R_0 + h(\phi^p)^2) \quad \text{Equação 79}$$

Em que a derivada do dano é:

$$\{\dot{d}\} = \lambda^d \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{Equação 80}$$

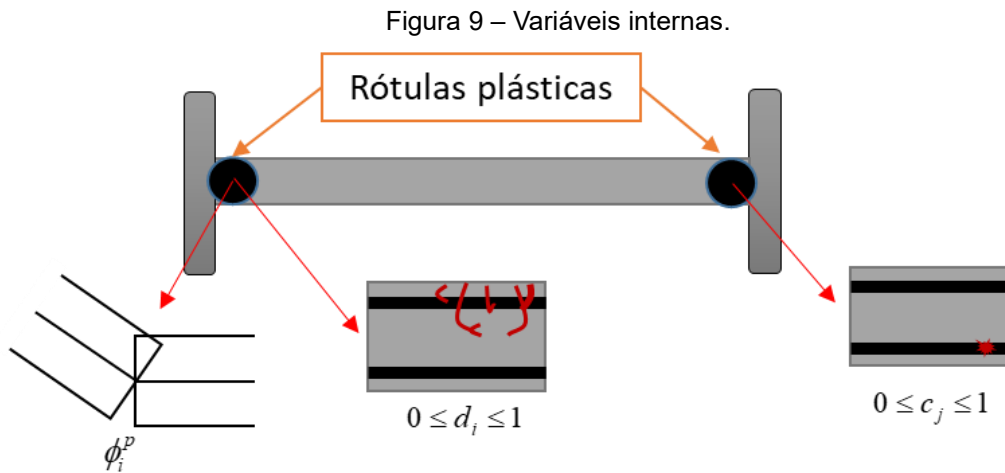
A função g é dada pela diferença entre o critério de Griffith (y) e a resistência inicial (R_0). Dessa forma, supõem-se as condições para y (abaixo) para analisar se a equação verifica.

$$\begin{aligned} \text{se } y > 0 \text{ e } g = 0 &\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 1 \text{ e } \{d\} = \lambda \quad \therefore \{y\}\{\dot{d}\} \geq 0 \\ \text{se } y < 0 \text{ e } g = 0 &\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = -1 \text{ e } \{d\} = -\lambda \quad \therefore \{y\}\{\dot{d}\} \geq 0 \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade (Equação 73) sempre é verificada para o dano e, assim, pode-se dizer que este modelo é termodinamicamente admissível para dano e plasticidade.

4.2.5 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, dano e corrosão

O modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, dano e corrosão, deve incluir todas as equações do modelo anterior sem corrosão, ou seja, possui a mesma lei de plasticidade e de evolução de plasticidade e dano. A diferença é que neste modelo o potencial termodinâmico deve também incluir a corrosão como variável interna, de acordo com a Figura 9, que representa a rotação plástica, a fissuração por uma variável de dano e a corrosão por uma variável de estado, assim, $G_b = G_b(\{M\}, \Phi^p, d, c)$.



Em que a variável de corrosão (c) depende da profundidade de pit e é dada pela Equação 81.

$$c = \frac{1}{D_0} * p(t) \quad \text{Equação 81}$$

Dessa forma, a variável de estado da corrosão (c) representa a taxa de corrosão na rótula (Equação 81), assumindo valores entre zero e um, ou seja, sem corrosão até a destruição total da barra. Esta variável representa também a redução da área efetiva de aço, portanto, a nova área calculada ao incrementar a taxa de corrosão é dada pela Equação 82.

$$A_s = \frac{A_0}{\pi} \begin{cases} -4c_i^2 \arcsin \sqrt{1 - c_i^2} + 2c_i \sqrt{1 - c_i^2} - \arcsin \left(2c_i \sqrt{1 - c_i^2} \right) + \pi & \text{if } c_i < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -4c_i^2 \arcsin \sqrt{1 - c_i^2} + 2c_i \sqrt{1 - c_i^2} + \arcsin \left(2c_i \sqrt{1 - c_i^2} \right) & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{Equação 82}$$

Em que A_0 é a área de aço inicial.

Ao se alterar a área de aço, tem-se uma mudança nas propriedades iniciais calculadas para a seção, como os momentos plástico e último. Assim, a função de

escoamento passa a depender da corrosão e é dada por:

$$f = \left| \frac{m}{1-d} - h(c)\dot{\phi}^p \right| - k_0(c) \leq 0 \quad \text{Equação 83}$$

Em que $h(c)$ é o termo de encruamento cinemático linear em função da corrosão e $k_0(c)$ é o momento em função da corrosão e, como visto na Equação 19 e na Equação 20 no item 3.2.4, estas equações dependem do momento plástico e/ou do momento último.

Da mesma forma, a função de resistência também passa a ser dada em função da corrosão e é reescrita como:

$$R(d, c) = R_0 + q(c) \frac{\ln(1-d)}{1-d} \quad \text{Equação 84}$$

Em que R_0 é a resistência inicial, que depende apenas da inércia da seção e $q(c)$ é o incremento de resistência pela ação da armadura, que depende do momento último.

No Apêndice A, indica-se como é realizado o cálculo do momento crítico, do momento plástico e do momento último, no qual a corrosão não tem influência no momento crítico, mas reduz o momento plástico e o momento último, devido a redução da área de aço da seção. Em que este parâmetro é definido através de um gráfico (Figura 8) que relaciona momento e dano, assim é alterado a cada incremento da taxa de corrosão por haver a redução dos momentos plástico e último.

Assim, deve-se definir um potencial termodinâmico que inclua todas essas variáveis, de forma que quando se derivar em relação a cada variável interna seja possível obter as leis de elasticidade e de evolução de plasticidade e de dano. Tais leis devem ser iguais ao modelo anterior, sendo a parcela de corrosão independente, assim quando não se inicia o processo corrosivo não há alteração no modelo termodinâmico já comprovado. Portanto esse potencial pode ser escrito como:

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}^T [F(D)] \{M\} + \{M\}^T \{\Phi^p\} - \frac{1}{2} \{\Phi^p\}^T [H(D, C)] \{\Phi^p\} - I(D, C) + \xi \{c\}^T \{O\} \quad \text{Equação 85}$$

Em que $\{O\}$ corresponde a uma lei qualquer de corrosão da literatura e ξ é um parâmetro de calibração com os resultados experimentais. Assim, ao derivar o potencial em relação à corrosão, se obtém a força termodinâmica associada à corrosão ($\{B\}$), dada pela Equação 86.

$$\{B\} = \left\{ \frac{\partial G_b}{\partial c} \right\} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial c} (\{\Phi^p\}^T [H(D, C)] \{\Phi^p\}) \right\} - \left\{ \frac{\partial I(D, C)}{\partial c} \right\} + \xi \{O\} \quad \text{Equação 86}$$

Para a modelagem, essa força termodinâmica foi utilizada associada à corrosão, no entanto, não foram considerados os efeitos conjuntos de plasticidade e dano, logo a força termodinâmica corresponde a Equação 87.

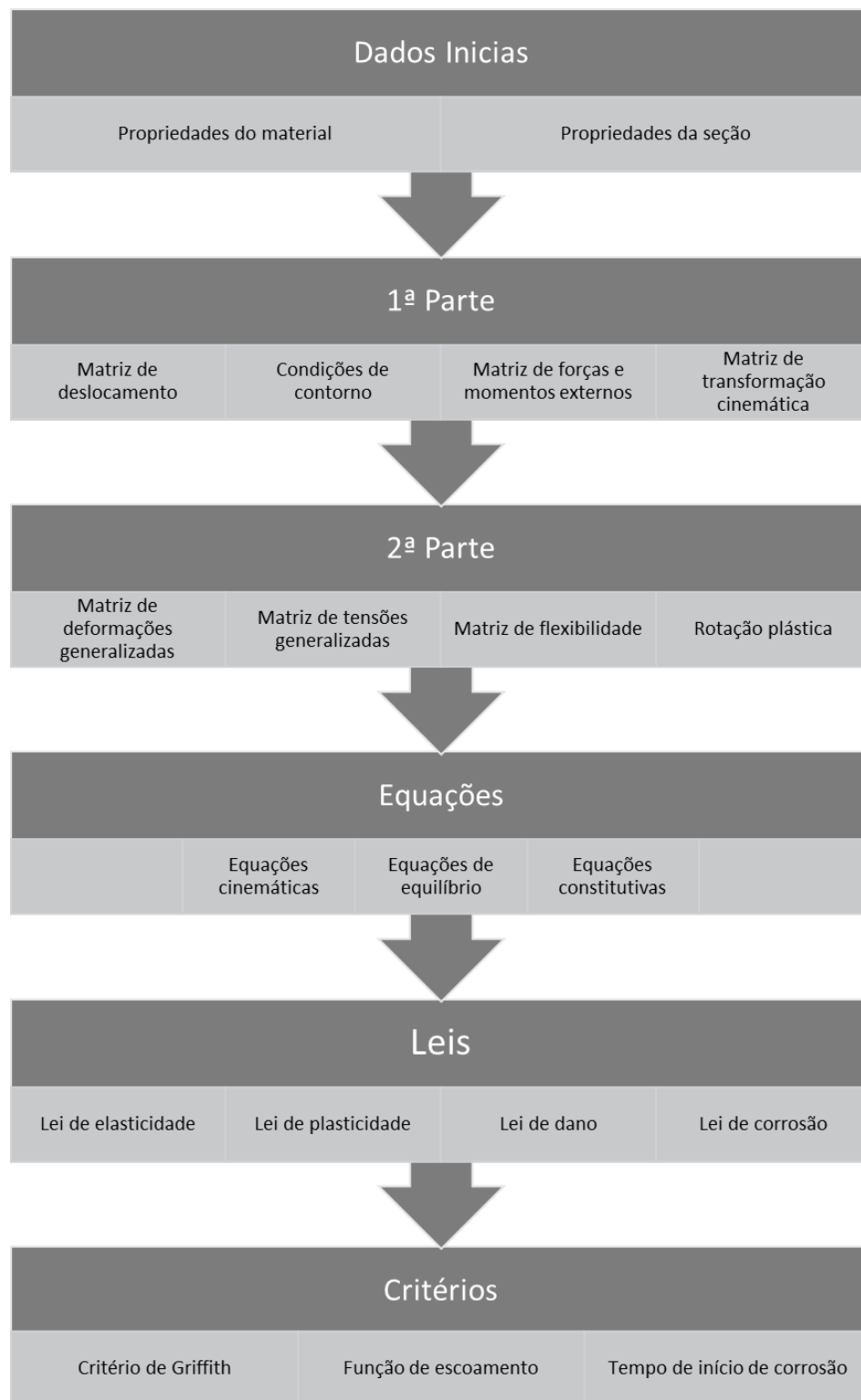
$$\{B\} = \xi \{O\} \quad \text{Equação 87}$$

Ou seja, a Equação 87, depende apenas da lei de corrosão da literatura, em que se utilizou a equação de taxa de corrosão de Vu e Stewart (2000) e a profundidade de pit de Stewart (2004), ambas apresentadas no item 3.1.2 e dadas pela Equação 4 e Equação 3, respectivamente.

4.3 Modelagem de plasticidade, dano e corrosão

A modelagem da estrutura inclui todas as equações apresentadas no modelo termodinâmico, considerando o potencial termodinâmico definido para um modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, dano e corrosão. De forma simplificada o esquema da Figura 10 apresenta como foi realizada a modelagem.

Figura 10 – Esquema do modelo.

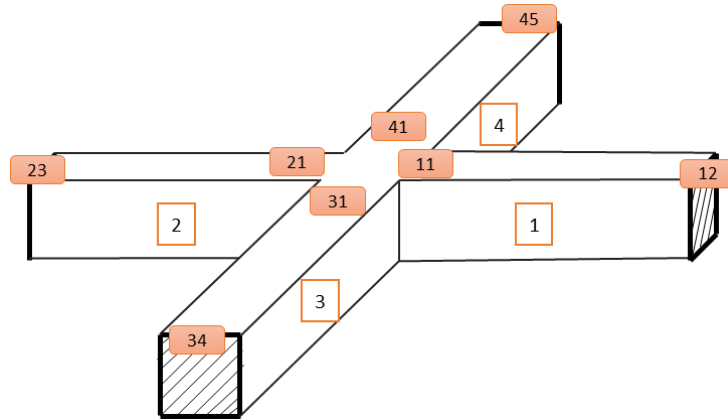


Na Figura 9 observa-se que após o início da corrosão, as propriedades da seção são recalculadas para cada passo. Para a modelagem do problema e realização dos cálculos foi utilizado o software ©Maplesoft.

4.4 Estrutura para a análise

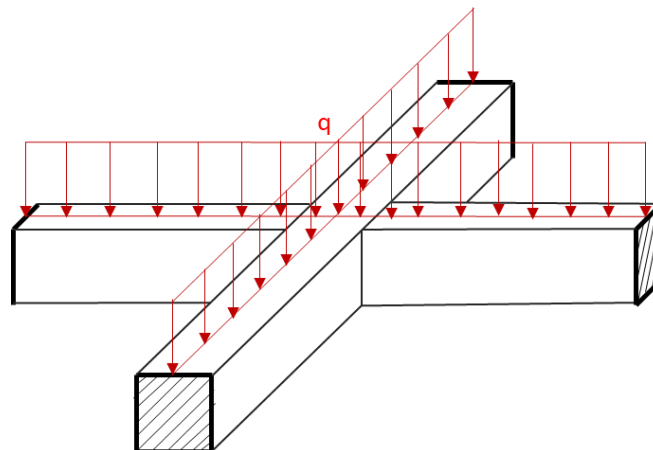
Para a realização das duas análises, foi utilizada uma grelha composta de 4 elementos e de 8 rótulas plásticas, sendo seus apoios engastados, conforme o esquema apresentado na Figura 11. Os elementos são numerados de 1 a 4 e possuem um comprimento de 4 m, 3 m, 3 m e 5 m, respectivamente.

Figura 11 – Identificação dos nós da grelha.



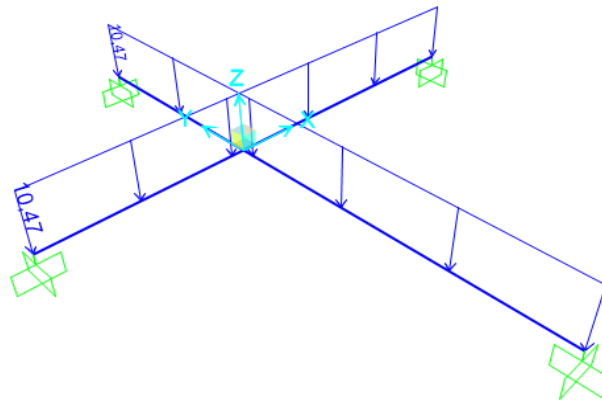
Primeiramente, foi inserida uma carga variável, considerando uma estrutura de um edifício residencial com carga distribuída (q) em todos os elementos da grelha, com valor de $1,5 \text{ kN/m}^2$ multiplicado pela largura do elemento, para obtenção de valor distribuído linearmente (kN/m). À esta, somou-se a carga permanente, assumindo um peso específico do concreto armado de 25 kN/m^3 , obtendo assim, um valor total de carga $q=7,475 \text{ kN/m}$, aplicada como mostra a Figura 12. E, considerando ainda um coeficiente de majoração de 1,4 para cargas permanentes e variáveis, obteve-se uma carga final de $10,465 \text{ kN/m}$ (NBR 6120, 1980).

Figura 12 - Carregamento de serviço da grelha.



Com a estrutura e cargas definidas foi realizado o dimensionamento de acordo com a NBR 6118 (2014) e esforços calculados pelo SAP2000® (Figura 13), utilizando um fck de 30 MPa, para uma estrutura com seção de 0,25 x 0,30 m (largura x altura). Sendo assim, considerando os carregamentos e coeficientes da norma, foi necessário a utilização de três barras de aço de tração com diâmetro de 16 mm.

Figura 13 - Modelo no SAP2000.



4.4.1 Análise durante a vida útil

Nesta análise, utilizou-se a grelha apresentada no item anterior, em que se calcularam suas propriedades iniciais, como momento crítico, momento plástico, momento último e dano último. Assim, manteve-se a carga constante até o tempo crítico de início de corrosão de 20 anos e, posteriormente, foi incrementada a taxa de corrosão até o final da vida útil, ou seja, 100 anos.

Como a taxa de corrosão depende do tempo de exposição à corrosão e, a partir desta taxa pode-se calcular a variável de corrosão concentrada, considerando que a mesma implica na redução da área de aço, a cada ano deve-se recalculer as propriedades da grelha. Assim, pode-se ter uma perda de resistência e aumento do deslocamento sem o acréscimo de novas forças.

4.4.2 Análise comparativa

Na análise comparativa, seguiu-se um procedimento inicial similar ao da análise anterior, em que se calculam as propriedades iniciais, adiciona-se a carga de serviço e mantém-se a carga constante até o tempo crítico. A partir desse ponto, esta análise se

diferencia, pois grelhas iguais são analisadas com tempos de exposição diferentes, variando a cada 10 anos a partir do tempo 20 até 100 anos.

A comparação foi realizada ao avaliar os gráficos e dados extraídos do programa ©Maplesoft. Para isto foram elaborados gráficos de dano por tempo e momento por tempo para cada rótula, bem como um gráfico de força por deslocamento.

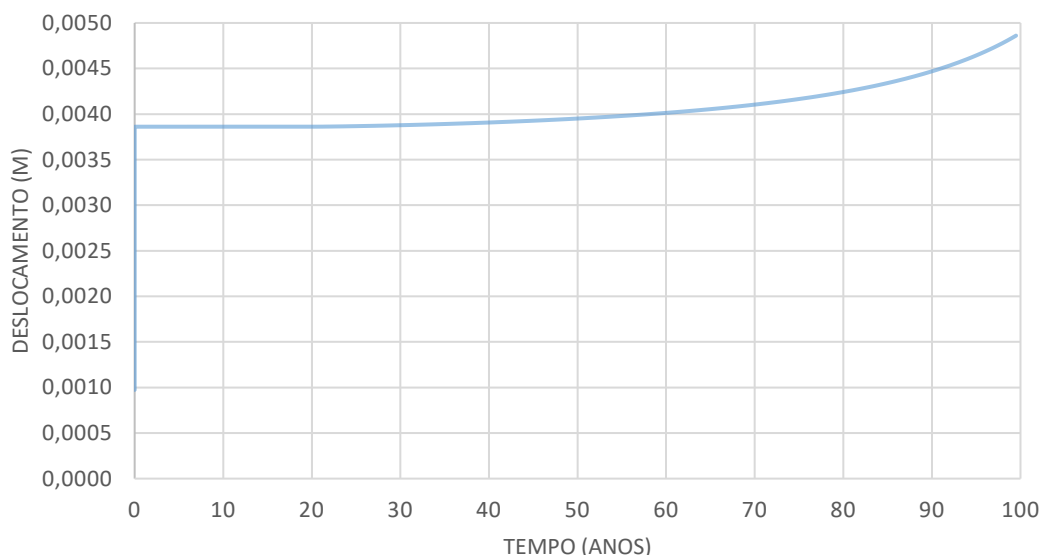
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com base nos conceitos apresentados e na elaboração de programas para o cálculo de estruturas submetidas a solicitações químico-mecânicas através do software ©Maplesoft., foi possível realizar análises durante a vida útil, bem como análises comparativas como forma de avaliar o comportamento mecânico de uma grelha quando exposta a diferentes taxas de corrosão.

5.1 Análise durante a vida útil

Na análise durante a vida útil, foi incrementada a carga até atingir-se a carga de projeto, obtendo um deslocamento significativo e instantâneo, que se manteve constante até atingir o tempo crítico de 20 anos, sendo que neste período não foi incluída nenhuma sobrecarga nem as variáveis de corrosão. Passado o tempo crítico, a estrutura voltou a apresentar variação no deslocamento, no entanto, somente a partir do ano 70 essa variação passou a ser mais significativa, como mostrado no gráfico da Figura 14.

Figura 14 – Gráfico de deslocamento por tempo.

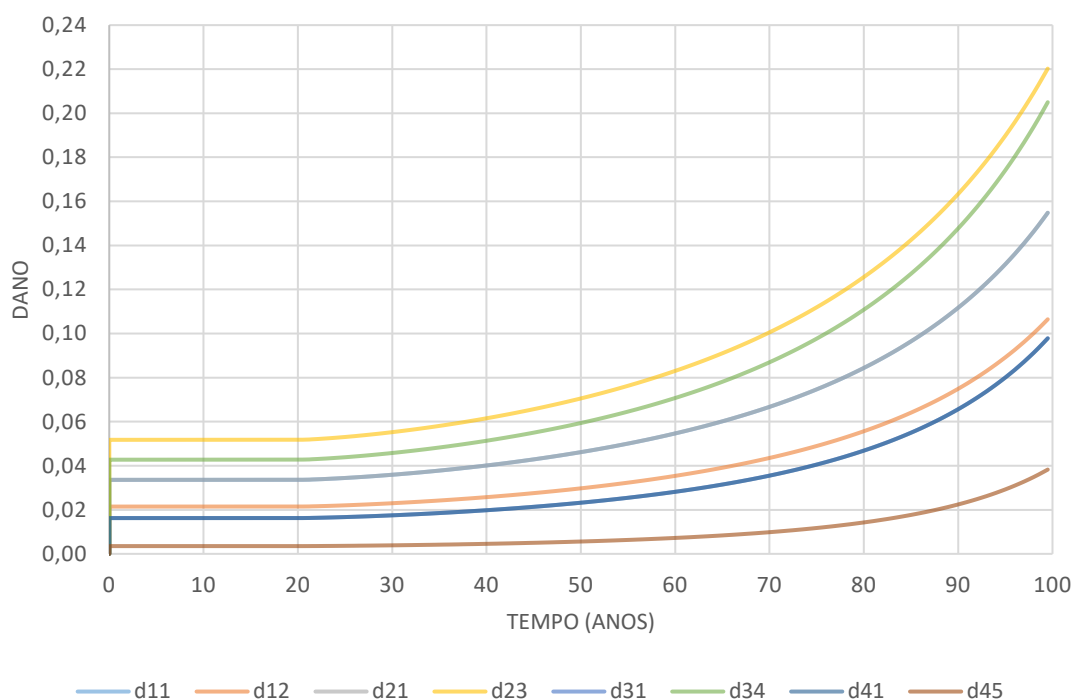


Da mesma forma, elaborou-se um gráfico de dano por tempo (Figura 15), em que se pode avaliar a evolução do dano, sendo que essa também foi mais significativa após o ano 70. No entanto, observa-se que os valores de dano não passam de 0,22, ou seja, não são

suficientes para que ocorra o colapso da estrutura, em que o dano último em geral fica em torno de 0,60 a 0,70.

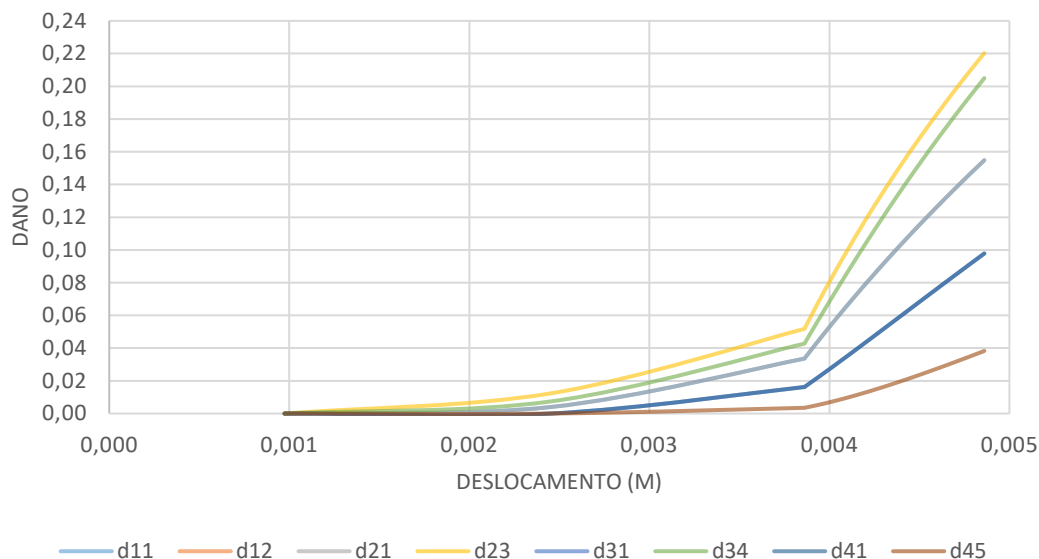
Assim, pode-se dizer que para uma estrutura bem dimensionada somente a redução da área de aço causada pela corrosão não é capaz colapsá-la. Sendo necessário também, avaliar a redução da resistência do aço para uma análise mais próxima da realidade. Como também incluir a influência da plasticidade e do dano nas variáveis de corrosão, como forma de acelerar o processo de degradação da estrutura.

Figura 15 – Gráfico de dano por tempo.



Verificou-se que a variação no deslocamento durante a vida útil (0 a 100 anos) da estrutura foi menor que 5 mm, apresentando um primeiro aumento do dano com a implementação das variáveis internas de corrosão e um segundo a partir do ano 40. Neste período a perda da área de aço é mais significativa e variável de corrosão (c) maior que 0,20, o que pode ser observado no gráfico da Figura 16.

Figura 16 – Gráfico de dano por deslocamento.



Sendo assim, os resultados obtidos numa análise durante a vida útil da estrutura e sem considerar a perda da resistência do aço e os efeitos conjuntos de plasticidade e dano na corrosão, não são suficientes para qualificar a estimativa de vida da estrutura. No entanto, é possível identificar o efeito da corrosão no aumento do deslocamento e do dano.

5.2 Análise comparativa

Na segunda análise realizada foi possível verificar de forma comparativa a perda da resistência da estrutura de acordo com o avanço da taxa de corrosão com o passar dos anos. Dessa forma, a análise foi realizada a cada dez anos, seguindo o procedimento da Tabela 1.

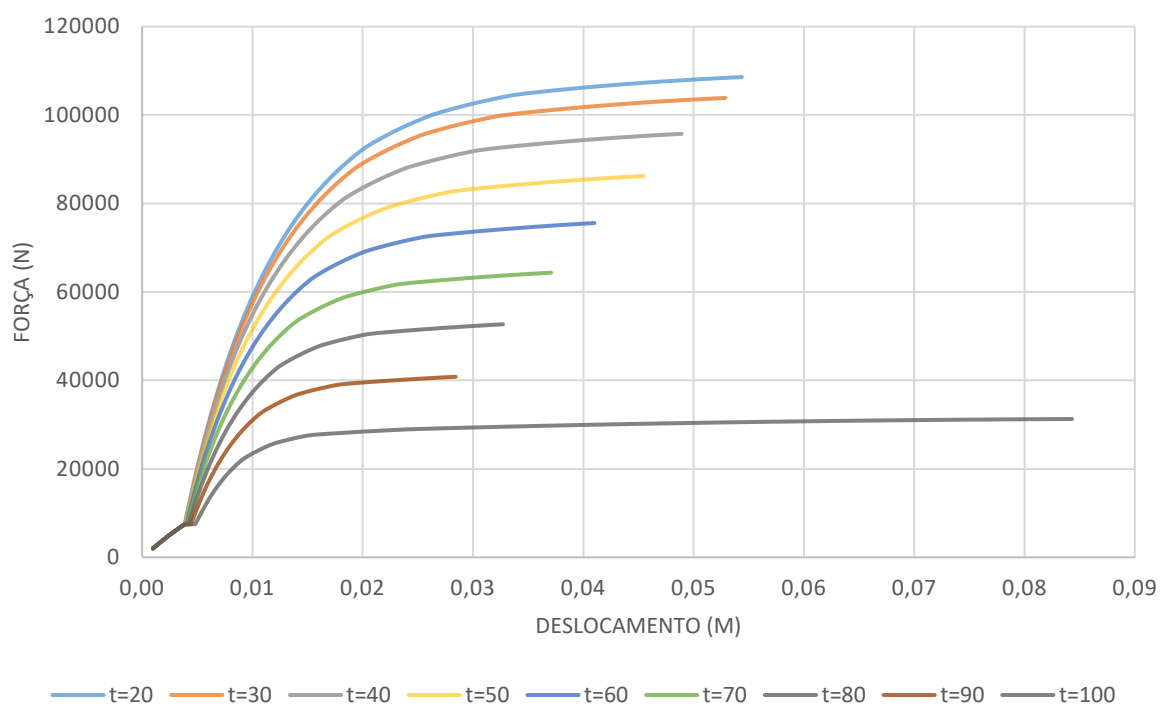
Tabela 1 - Procedimento para a análise comparativa.

Nome de identificação	Taxa de corrosão	Período de análise sem corrosão	Período de análise com corrosão
<i>t=20</i>	Não	0 - 20 anos	-
<i>t=30</i>	Sim	0 - 20 anos	20 - 30 anos
<i>t=40</i>	Sim	0 - 20 anos	20 - 40 anos
<i>t=50</i>	Sim	0 - 20 anos	20 - 50 anos

$t=60$	Sim	0 - 20 anos	20 - 60 anos
$t=70$	Sim	0 - 20 anos	20 - 70 anos
$t=80$	Sim	0 - 20 anos	20 - 80 anos
$t=90$	Sim	0 - 20 anos	20 - 90 anos
$t=100$	Sim	0 - 20 anos	20 - 100 anos

Dessa forma, ao realizar o cálculo para cada grelha com diferentes exposições à corrosão, pode-se elaborar um gráfico comparativo de força por deslocamento (Figura 17). Nesse gráfico, pode-se observar que a resistência da estrutura é reduzida quando o tempo de exposição à corrosão aumenta, conseqüentemente para um mesmo deslocamento é necessária uma força muito inferior.

Figura 17 – Gráfico de força por deslocamento.



Esta diferença na força é mais visível quando se comparam os valores de força para um mesmo deslocamento, assim, na Tabela 2 apresenta-se uma comparação de porcentagem de variação da força utilizando um deslocamento de 0,02 m.

Tabela 2 - Comparativo de força para um mesmo deslocamento.

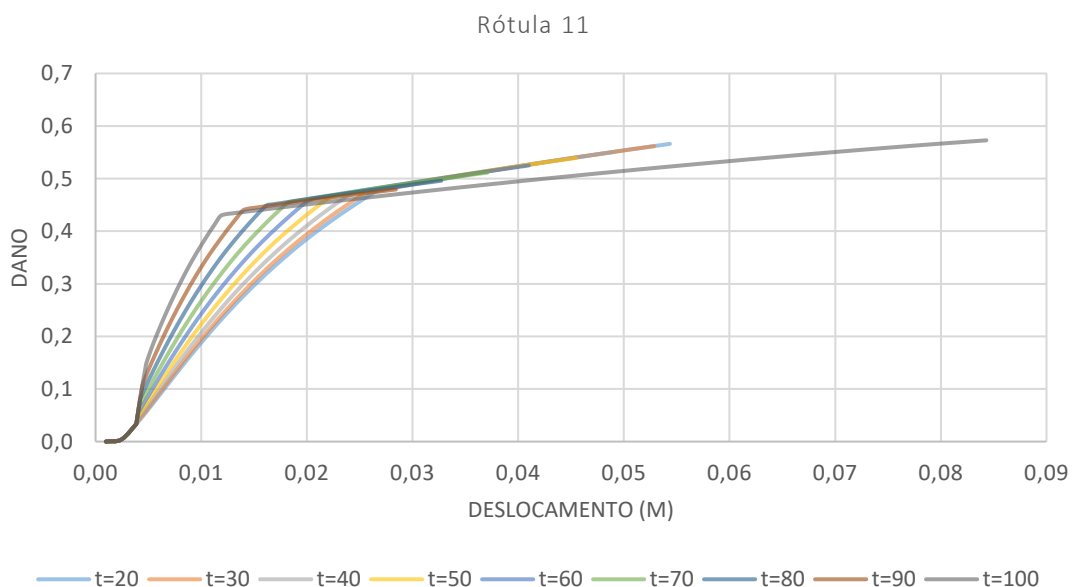
Nome de identificação	W (m)	Força (N)	% redução da força
------------------------------	--------------	------------------	---------------------------

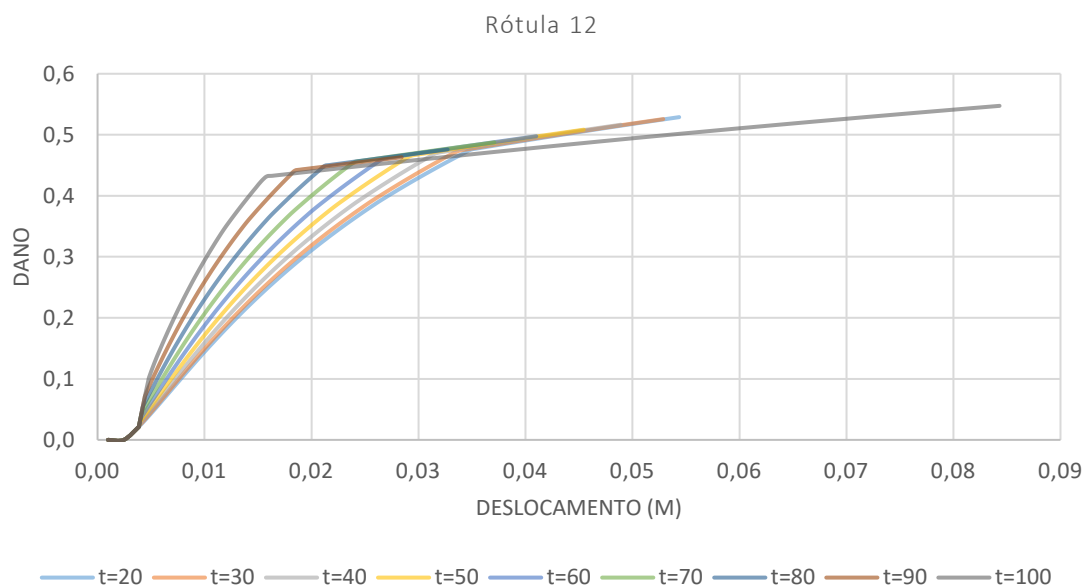
$t=20$	0,02	92844,93	0,00 %
$t=30$	0,02	89629,38	3,46 %
$t=40$	0,02	84073,00	9,45 %
$t=50$	0,02	77248,27	16,80 %
$t=60$	0,02	68941,73	25,75 %
$t=70$	0,02	59999,48	35,38 %
$t=80$	0,02	50345,76	45,77 %
$t=90$	0,02	39598,57	57,35 %
$t=100$	0,02	28453,97	69,35 %

A última coluna da Tabela 2 indica a redução da força aplicada à estrutura para gerar um mesmo deslocamento. Assim, para um tempo superior a 90 anos é necessário menos da metade da força para gerar um deslocamento de 0,02 m quando comparado a uma estrutura sem corrosão. Lembrando ainda, que não foram considerados nesse cálculo a perda da resistência do aço, que geraria uma redução ainda maior na força.

A grelha utilizada nas simulações do trabalho é composta de oito rótulas e 4 elementos, dessa forma, foi determinado o dano para cada rótula e pôde-se comparar a evolução do dano para diferentes tempos. Assim, pode-se observar no gráfico para o elemento 1 (Figura 18), por exemplo, que um mesmo deslocamento gera diferentes valores de dano, e que para maiores tempos de exposição o dano apresentado é superior ao dano para tempos inferiores.

Figura 18 – Gráficos de dano por deslocamento para cada rótula do elemento 1.





A rótula que apresenta o maior valor de dano atingindo, de 0,60, é a 23 do elemento 2. Assim como no caso da força, onde se apresentou uma comparação de sua porcentagem de redução para diferentes avanços da taxa de corrosão, pode-se realizar o mesmo procedimento para o dano, sendo que neste caso ocorreu o aumento do dano conforme o avanço da taxa de corrosão (Tabela 3).

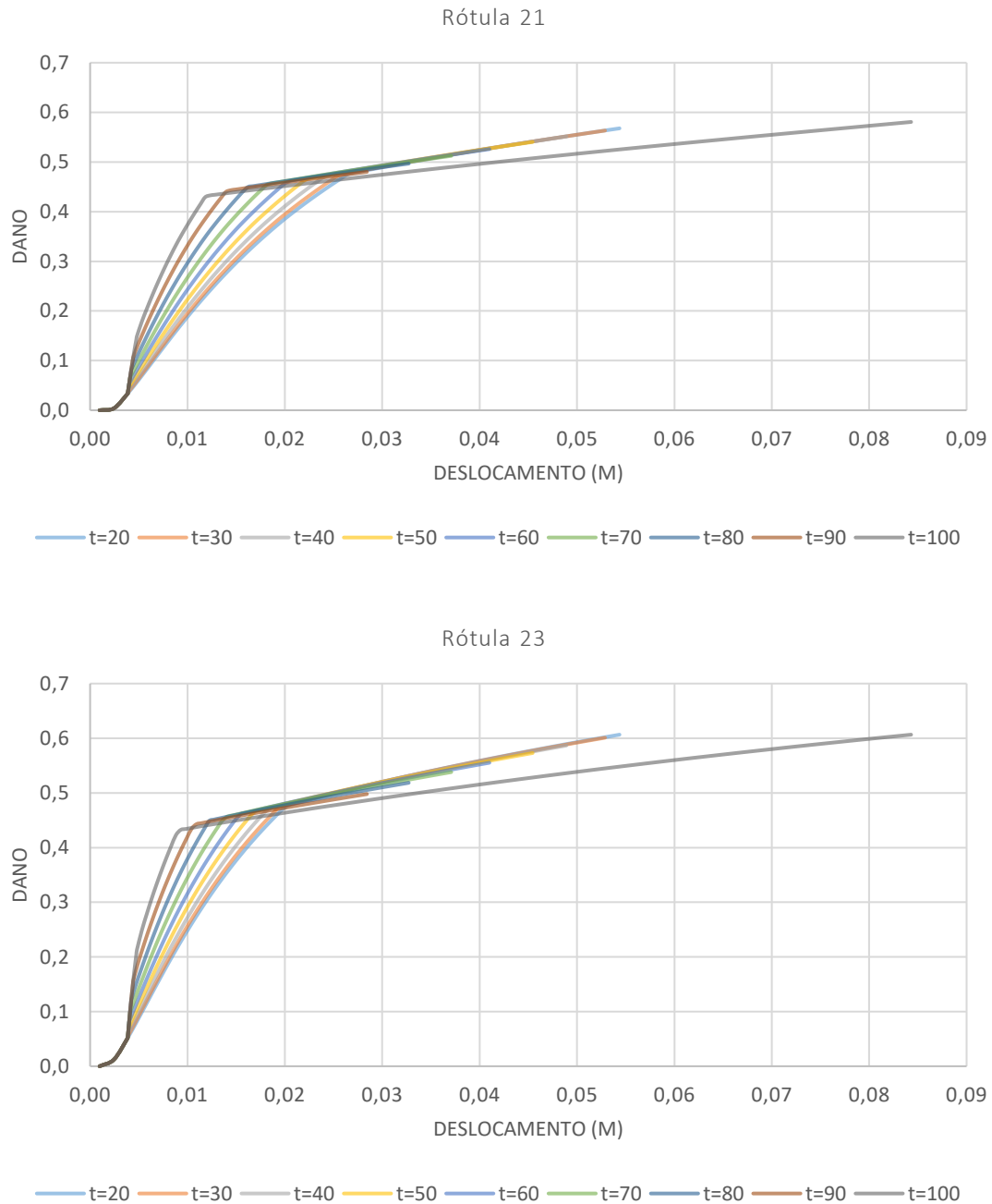
Tabela 3 - Comparativo de dano para um mesmo deslocamento.

Nome de identificação	w (m)	d23	% aumento da dano
t=20	0,01	0,26	0,00 %
t=30	0,01	0,27	3,47 %
t=40	0,01	0,28	9,75 %
t=50	0,01	0,31	18,00 %
t=60	0,01	0,32	22,09 %
t=70	0,01	0,35	34,42 %
t=80	0,01	0,39	49,45 %
t=90	0,01	0,43	67,92 %
t=100	0,01	0,44	68,28 %

Com esta tabela, é possível observar que para um deslocamento de 0,01 m o dano varia em até 68,28 % para as diferentes taxas de corrosão consideradas, indicando que para um mesmo deslocamento a estrutura apresenta maior fissuração quando se incrementa a taxa de corrosão, aproximando-se assim, mais rapidamente do colapso em caso de sobrecarga.

Nos gráficos abaixo (Figura 19), pode-se observar a evolução do dano no elemento 2, considerando os tempos de 20 a 100 anos, nos quais novamente apresentaram-se danos maiores para deslocamentos menores.

Figura 19 – Gráficos de dano por deslocamento para cada rótula do elemento 2.



Da mesma maneira, para os elementos 3 e 4, respectivamente, na Figura 20 e na Figura 21 observa-se um aumento do dano conforme o tempo de exposição à corrosão.

Figura 20 – Gráficos de dano por deslocamento para cada rótula do elemento 3.

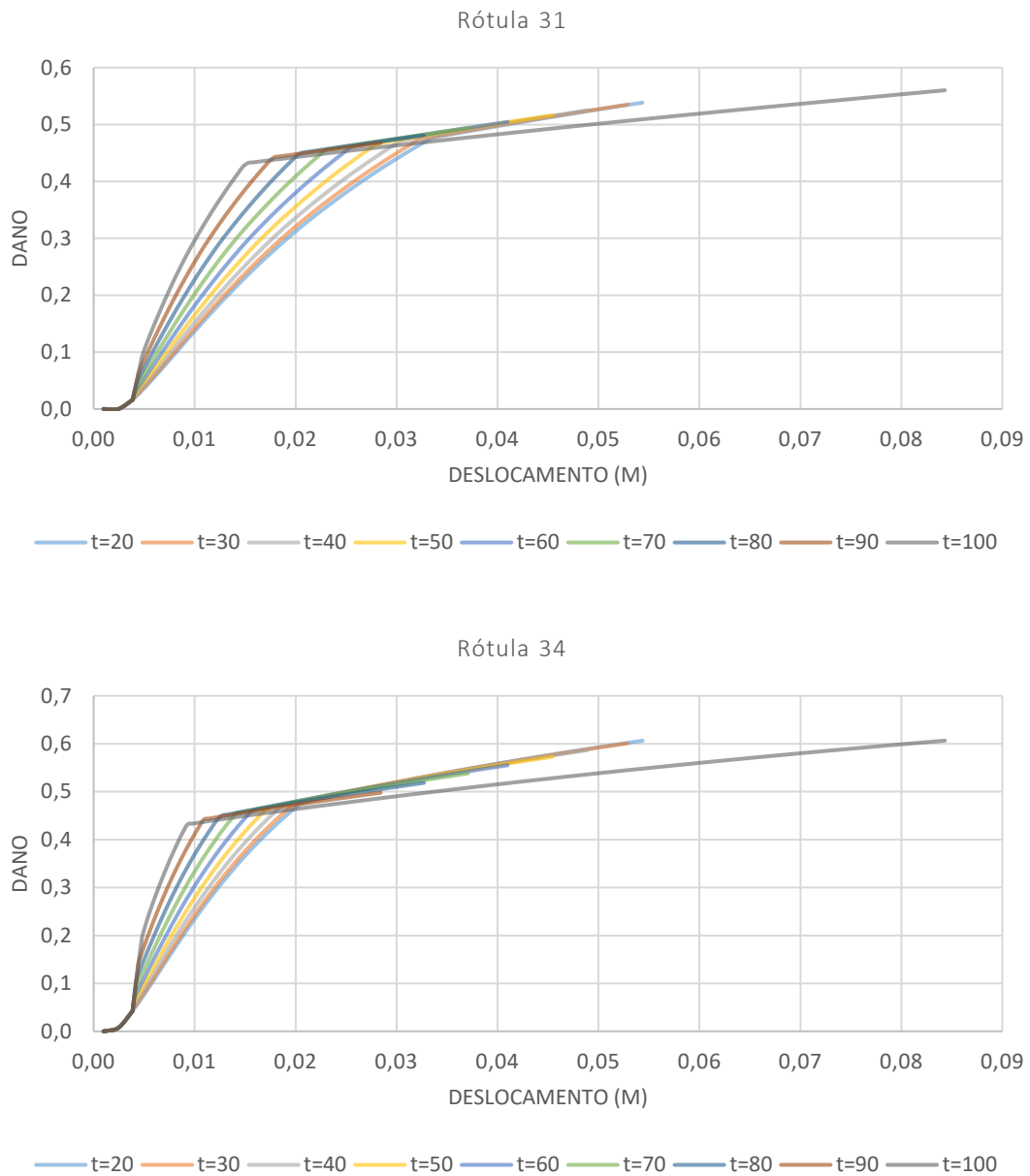
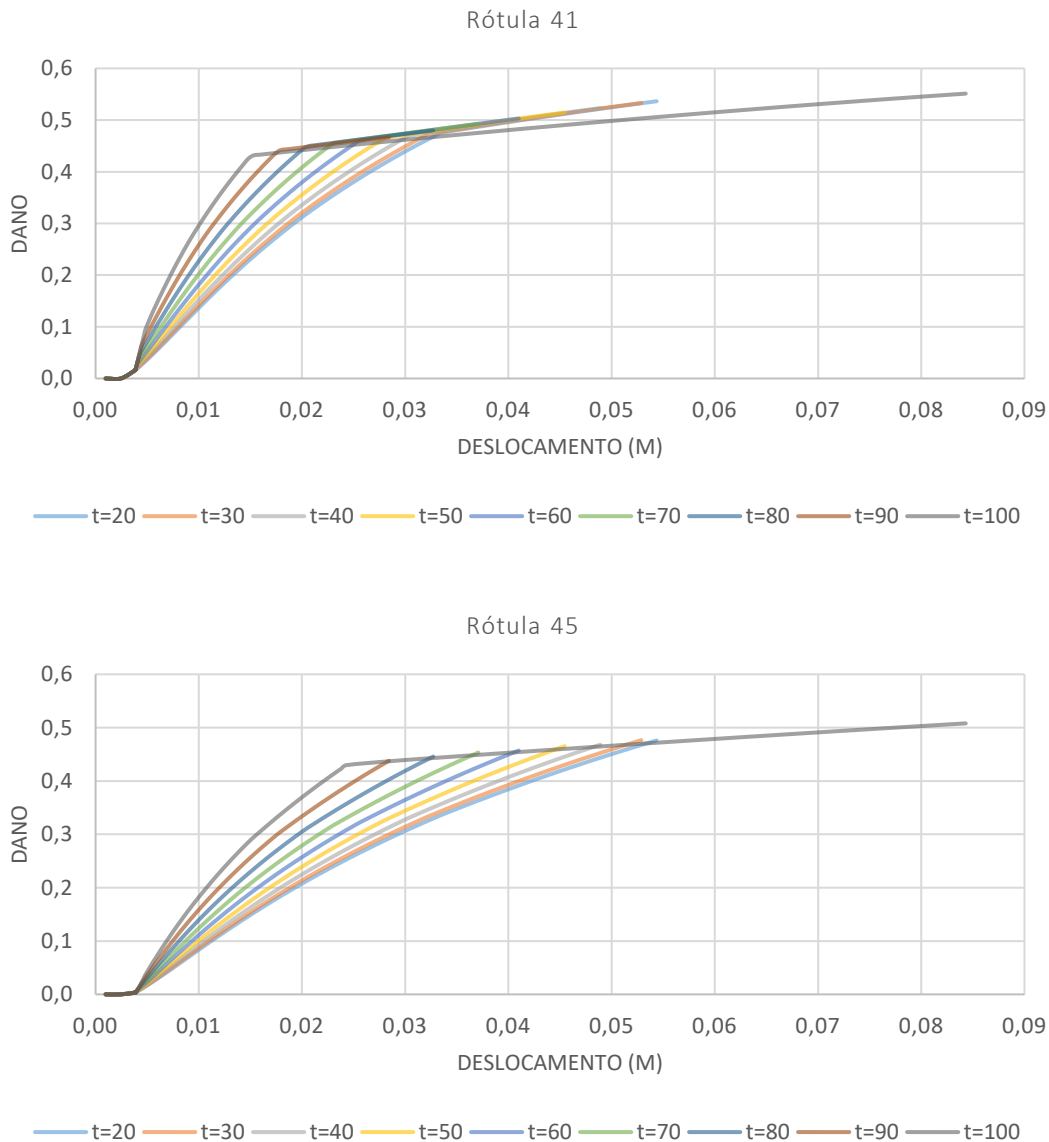


Figura 21 – Gráficos de dano por deslocamento para cada rótula do elemento 4.

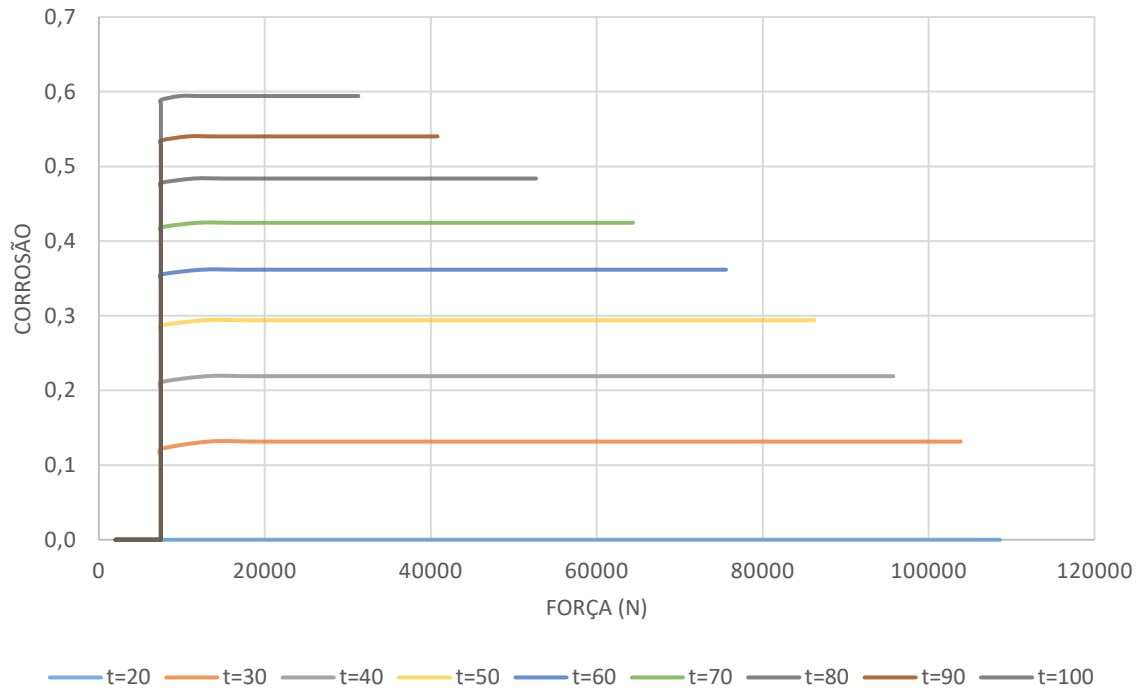


Os gráficos de dano por tempo para todas as rótulas da grelha apresentam, para o tempo 100, um grande deslocamento até o final do cálculo, atingindo um valor máximo de 84,3 mm, em que devido à alta taxa de corrosão era necessária uma força pequena para esse deslocamento. Antes do início da corrosão, somente com o carregamento da edificação, verificou-se um deslocamento de 3,9 mm e, ao final da exposição aos cloretos, o deslocamento foi de 4,8, i.e., 24,5 % maior.

A variável interna de corrosão, conseqüentemente, é maior de acordo com o tempo de exposição, assim observa-se que para uma maior taxa de corrosão, a força que gera danos entre 0,50 e 0,60 é consideravelmente menor. O gráfico abaixo (Figura 22), apresenta a curva corrosão por força, em que o último ponto do gráfico representa a máxima

força calculada e, posteriormente o programa não consegue resolvê-la, pois apresenta deslocamentos excessivos e danos próximos ao dano último.

Figura 22 – Gráficos de corrosão por força.



6. CONCLUSÕES

Com este trabalho, foi possível através da formulação apresentada incorporar uma lei de corrosão da literatura no cálculo estrutural, por meio da implementação de um modelo. Tal modelo pode utilizar qualquer lei presente na literatura de forma a considerar a influência da corrosão no comportamento mecânico, sendo possível realizar uma análise durante toda a vida útil ou de forma comparativa para avaliar a perda de resistência com o aumento do tempo de exposição à corrosão.

Dessa forma, na primeira análise, concluiu-se que apenas a implementação da corrosão reduzindo a área de aço não é suficiente para avaliar o real comportamento da estrutura, sendo necessário introduzir a perda de resistência do aço de forma a obter melhores resultados, bem como acoplar a plasticidade e o dano na força termodinâmica associada à corrosão. Assim, nesta análise, observa-se um deslocamento significativo na estrutura a partir do ano 70, no entanto, o dano não ultrapassa 0,22 (abaixo do dano último), ou seja, não colapsa a estrutura somente ao reduzir a área efetiva de aço.

Na segunda análise, realizada de forma comparativa, observa-se a perda de resistência da grelha ao incrementar o tempo de exposição à corrosão, pois em todos os casos levou-se a estrutura ao colapso ao incrementar o deslocamento, em que se pode notar que para um mesmo deslocamento é necessária uma força muito inferior para gerá-lo, aproximando-se a 70% a redução da força. Da mesma forma, observa-se que o dano gerado para um mesmo deslocamento aumenta em até 68 % para uma exposição de 100 anos, ou seja, apresenta grande fissuração com pouco deslocamento, salientando ainda que o aumento da fissuração gera um caminho preferencial para a implementação da corrosão.

Para trabalhos futuros, sugere-se que seja implementada a redução da resistência do aço em simultâneo com o incremento da taxa de corrosão, bem como incluir através da termodinâmica a influência da plasticidade e da fissuração na propagação da corrosão, por meio da utilização completa do modelo termodinâmico proposto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6120**: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.

ANDRADE, C. **Advances in Modeling Concrete Service Life**. [S.l.]: Springer, 2012. 163 p.

ANDRADE, C.; MANCINI, G. **Modeling of Corroding Concrete Structures**. [S.l.]: Springer, 2011. 613 p.

AVISSAR, Y. et al. **Biology**. [S.l.]: OpenStax College, 2015.

BERTOLINI, L. **Materiais de construção**: patologia, reabilitação, prevenção. São Paulo: Oficina de Textos, 2010.

BROOMFIELD, J. P. **Corrosion of Steel in Concrete**: Understanding, Investigation and Repair. 2ª. ed. Nova York: Taylor & Francis, 2006. 296 p.

CAMPOS, D. E. D. et al. **Potenciais Termodinâmicos**. Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora , p. 13. 2015.

CARVALHO, R. C.; FILHO, J. R. D. F. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. 3ª. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2007. 368 p.

COELHO, K. O. **Modelos numéricos aplicados à modelagem probabilística da degradação mecânica do concreto e corrosão de armaduras**. São Carlos: USP, 2017.

COSTA, A.; APPLETON, J. Chloride penetration into concrete in marine environment - Part I: Main parameters affecting chloride penetration. **Material and Structures**, v. 32, p. 252-259, Maio 1999.

DAHMER, R. R.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A model to analyze structures subjected to chemical-mechanical stress. **XXXVIII Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**, Florianópolis, 2017.

FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames**: State-of-the-Art Industrial Applications. [S.l.]: IGI Global, 2015.

GENTIL, V. **Corrosão**. 3ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. 373 p.

- GERMAIN, P. The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2: Microstructure. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Paris, 25, Novembro 1973.
- HELENE, P. Introdução. In: RIBEIRO, D. V. **Corrosão em Estruturas de Concreto Armado: Teoria, Controle e Métodos de Análise**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. Cap. 1, p. 272.
- HUNKELER, F. **Corrosion in reinforced concrete structures**. [S.l.]: Woodhead Publishing Ltd, 2005. 262 p.
- KELLY, P. A. **Foundations of Continuum Mechanics: Mechanics Lecture Notes Part III**. Auckland: [s.n.], 2018.
- LEET, K. M.; UANG, C.-M.; GILBERT, A. M. **Fundamentos da Análise Estrutural**. 3ª. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2009. 810 p.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. **Mechanics of solid materials**. Nova York: Cambridge University Press, 1994. 582 p.
- MA, Y. et al. **Influence of corrosion-induced cracking on structural behavior of reinforced concrete arch ribs**. [S.l.]: Engineering Structures, 2016.
- MIYAGAWA, T. **Early Chloride Corrosion of Reinforcing Steel in Concrete**. Kyoto: Kyoto University, 1985. 186 p.
- NEVILLE, A. Chloride attack of reinforced concrete: an overview. **Materials and Structures**, Londres, 1995. 63-70.
- PROENÇA, S. P. B. **Fundamentos da Termodinâmica dos Sólidos**. São Carlos: [s.n.], 2000.
- REVIE, R. W.; UHLIG, H. H. **Corrosion and Corrosion Control**. 4ª. ed. Hoboken, Nova Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2008. 513 p.
- RIBEIRO, D. V. Durabilidade e vida útil das estruturas de concreto. In: RIBEIRO, D. V. **Corrosão em Estruturas de Concreto Armado: Teoria, Controle e Métodos de Análise**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. Cap. 3, p. 272.
- ROBERGE, P. R. **Corrosion Engineering: Principles and Practice**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2008. 770 p.
- SHAW, B. A.; KELLY, R. G. What is corrosion? **Electrochemical Society Interface**, Março 2006.

SOUSA, C. A. C. D. Princípios da corrosão eletroquímica. In: RIBEIRO, D. V. **Corrosão em Estruturas de Concreto Armado**: Teoria, Controle e Métodos de Análise. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. Cap. 2, p. 272.

STEWART, M. G. Spatial variability of pitting corrosion and its influence on structural fragility and reliability of RC beams in flexure. **Structural Safety**, v. 26, p. 453-470, 2004.

SWALIN, R. A. **Thermodynamics of solids**. [S.l.]: Wiley, 1972.

VU, K. A. T.; STEWART, M. G. Structural reliability of concrete bridges including improved chloride-induced corrosion models. **Structural Safety**, v. 22, p. 313-333, 2000.

YAN, J. **Study of Bauschinger Effect in various spring steels**. Dissertação de Mestrado, Universidade de Toronto. Ottawa. 1998.

APÊNDICE A

Cálculo do momento crítico

O momento crítico também chamado de fissuração, depende da resistência de tração do concreto (f_t) e é dado pela equação.

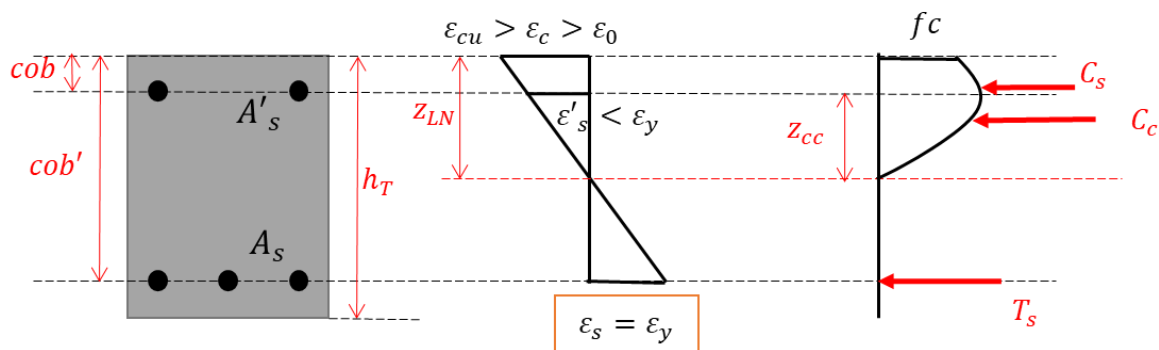
$$M_{cr} = 1,5 \frac{f_t I}{y_t} \quad \text{Equação 88}$$

Em que $y_t = h_T/2$ e $f_t = 0,3fck^{2/3}$.

Cálculo do momento plástico

O esquema da seção de concreto armado com deformação plástica no aço é apresentado na Figura 23, em que se define a força de compressão no concreto (C_c), a força de compressão do aço (C'_s) e a força de tração do aço (T_s).

Figura 23 – Esquema para o cálculo do momento plástico.



Em que, z_{LN} é a linha neutra da seção e z_{cc} é a distância entre a linha neutra e a aplicação da força de compressão no concreto. Define-se o equilíbrio de forças, de acordo com a Equação 89

$$C'_s + C_c = T_s \quad \text{Equação 89}$$

Em que, estas forças são dadas pelas seguintes equações:

$$C'_s = -f_s A'_s \quad \text{Equação 90}$$

$$C_c = -b \int_0^{z_{LN}} f_c dz \quad \text{Equação 91}$$

$$T_s = f_y A_s \quad \text{Equação 92}$$

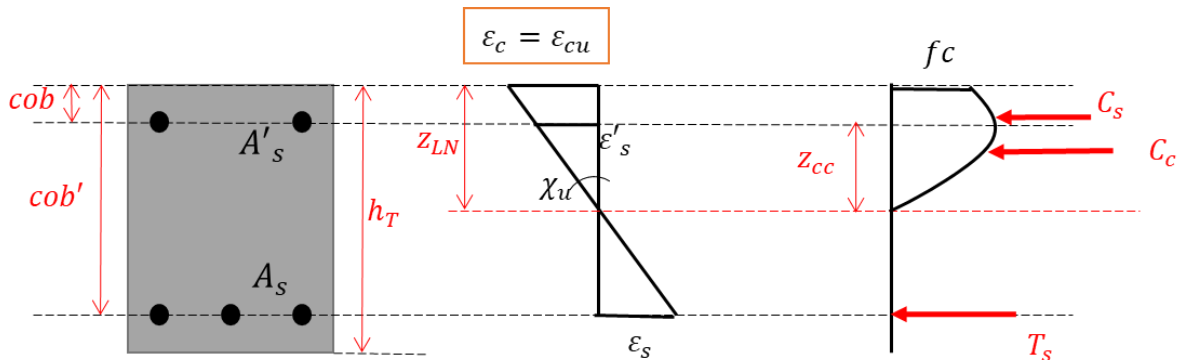
Assim, quando a deformação no aço for igual à deformação plástica ou de escoamento, ou seja, $\varepsilon_s = \varepsilon_y$, assim, pode-se calcular a linha neutra e a localização da força no concreto e tem-se o momento plástico (Equação 93).

$$M_p = C_c \left(\frac{h_T}{2} - (z_{LN} - z_{cc}) \right) + C'_s \left(\frac{h_T}{2} - cob \right) + T_s \left(cob' - \frac{h_T}{2} \right) \quad \text{Equação 93}$$

Cálculo do momento último

O esquema da seção de concreto armado com deformação última no concreto é apresentado na Figura 24

Figura 24 – Esquema para o cálculo do momento último.



Para o cálculo do momento último, da mesma maneira que o momento plástico, deve-se definir o equilíbrio de forças (Equação 94).

$$C'_s + C_c = T_s \quad \text{Equação 94}$$

Em que, estas forças são dadas pelas seguintes equações:

$$C'_s = -f_s A'_s \quad \text{Equação 95}$$

$$C_c = -b \int_0^{z_{LN}} f_c dz \quad \text{Equação 96}$$

$$T_s = f_y A_s \quad \text{Equação 97}$$

Assim, quando a deformação no concreto for igual à deformação última do concreto, ou seja, $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$, assim, pode-se calcular a linha neutra e a localização da força no concreto e tem-se o momento último (Equação 98).

$$M_u = C_c \left(\frac{h_T}{2} - (z_{LN} - z_{cc}) \right) + C'_s \left(\frac{h_T}{2} - cob \right) + T_s \left(cob' - \frac{h_T}{2} \right) \quad \text{Equação 98}$$