

UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA
INSTITUTO LATINO AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Foz do Iguaçu-Paraná

2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA
INSTITUTO LATINO AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

**Aplicações da aproximação quase-newtoniana da
Relatividade Geral a problemas em astrofísica.**

Paola Terezinha Zanolla Seidel

Orientador: Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza

Coorientador: Prof. Dr. Luís Antonio Cabral

Foz do Iguaçu-Paraná

2018

Aplicações da aproximação quase-newtoniana da Relatividade Geral a problemas em astrofísica.

Paola Terezinha Zanolla Seidel

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada da Universidade Federal da Integração Latino-Americana (PPGFISA-UNILA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em (Física).

Orientador: Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza

Coorientador: Prof. Dr. Luís Antonio Cabral

Banca Examinadora

Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza (Orientador)

Prof. Dra. Carlos Henrique Coimbra Araujo (Membro Externo)

Prof. Dr. Rodrigo Bloot (Membro Interno)

Foz do Iguaçu-Paraná

2018

Catálogo elaborado pelo setor de Tratamento da Informação da Biblioteca Latino-Americana
Catálogo de Publicação na Fonte. UNILA - BIBLIOTECA LATINO-AMERICANA

S458

Seidel, Paola Terezinha Zanolla.

Aplicações da aproximação quase-newtoniana da Relatividade Geral a problemas em Astrofísica / Paola Terezinha Zanolla Seidel. - Foz do Iguaçu - PR, 2018.

93 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana. Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza. Programa de Pós-graduação em Física Aplicada. Foz do Iguaçu-PR, 2018.

Orientador: Abraão Jessé Capistrano de Souza.

Coorientador: Luís Antonio Cabral.

1. Relatividade Geral (Física). 2. Astrofísica. 3. Mecânica Celeste. I. Souza, Abraão Jessé Capistrano de. II. Cabral, Luís Antonio. III. Universidade Federal da Integração Latino Americana. IV. Título.

CDU 530.12:52

Resumo

No presente trabalho, investigamos o movimento lento na Relatividade Geral (RG) sob ação de um campo gravitacional arbitrário. Trata-se do uso de uma aproximação conhecida por aproximação quase Newtoniana (NNA). Nossa intenção é apresentar um novo paradigma para a Astrofísica, uma vez que o modelo pode auxiliar no entendimento da gravidade na cinemática e dinâmica de corpos celestes, mas não representa uma modificação da RG. Primeiro, usamos a métrica de Weyl para analisar o desvio do periastro de 34 exoplanetas. Em segundo lugar, a métrica oblata de Zipoy, em termos da solução do monopólo, também, faz parte do escopo deste trabalho. Mostramos que a métrica de Zipoy pode ser muito útil para propósitos astrofísicos, mesmo quando comparada à solução padrão de Einstein ou via formalismo pós-newtoniano parametrizado (PPN), porque satisfaz o valor da precessão observada para o periélio de Mercúrio, a solução fornece órbitas elípticas e, também, permite o estudo de precessões retrógradas.

Abstract

In the present work, we investigate the slow motion in General Relativity (GR) under an arbitrary gravitational field. It is about the use of an approximation known by nearly Newtonian approximation (NNA). Our intent is to present a new paradigm for Astrophysics, since the model can assist the understanding of gravity in kinematic and dynamics of celestial bodies but does not represent a modification of GR. First, we use Weyl's metric to analyze the deviation of periastron of 34 exoplanets. Secondly, the oblate Zipoy's metric, in terms by monopole solution, is also part of the scope of this work. We show that Zipoy's metric may be very useful for astrophysical purposes, even when compared to Einstein's standard solution or by formalism of parameterized post-Newtonian (PPN), because it satisfies the observed precession value for Mercury's perihelion, the solution provides elliptical orbits and also allows the study of retrograde precession.

*“Aos meus pais, Jane e Odir,
e à outras duas pessoas que amo
Ana Luíza e Hugo. ”*

*Jamais considere seus estudos como uma obrigação,
mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer
a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu
próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade
à qual seu futuro trabalho pertencer.*

Albert Einstein

Agradecimentos

Começo agradecendo ao meu orientador Abraão Jessé Capistrano por todos os aprendizados vindos da convivência professor e aluno. Aprendi muito sobre a parte conceitual da pesquisa com ajuda e recomendações dele. Conteí com sua compreensão, apoio e uma série de dicas para melhorar minha didática em sala de aula e mesmo quanto a minha preparação para provas e entrevistas em concurso e processos seletivos.

Sou, igualmente, grata ao meu coorientador Luís Antonio Cabral. Graças ao incentivo e apoio de sempre consegui dar sequência a minha construção acadêmica. Sempre disposto a ajudar, mesmo à distância se fazendo presente. Sempre conteí com o direcionamento prudente e sábio do professor Cabral. Tenho o professor como exemplo e considero ele como um pai de coração que a Física me deu.

Aos professores das disciplinas que cursei no PPGFISA: o Marcelo, o Juan, o Luciano, o Márcio e o Shahram. Aos professores Eduardo e Rafael que faziam parte do meu convívio nas reuniões cujo meu o papel era ser representante discente. Agradeço à Roberta e ao Newton por me ajudarem com questões com a secretaria de pós-graduação. Aos colegas de mestrado, Éder, Rudney, Guilherme, Samah e Sérgio pelas aulas juntos, reuniões de estudo e de trabalhos.

Agradeço aos meus pais Jane e Olir. Cada um a sua forma me apoiam, aconselham e cuidam de mim. Ao meu pai por sempre me apoiar e saber o que acontece com meu computador quando esse esquece sua veneração à minha pessoa. Agradeço à minha mãe por sempre me ajudar e ver meu estudo e participação em eventos como um investimento. Sempre quis o sobrenome dela junto ao meu e durante o mestrado essa verdade tornou-se oficial. Assim posso, também, homenagear a mulher incrível que minha mãe é ao aparecer em minhas atividades o meu nome.

À minha irmã Ana Luíza por me dar força e ter feito despertar a minha vontade de ser exemplo. Deixo registrado aqui meu carinho à Vilma, Janete, Maria Cristina e Augusto. Obrigada Jaime, Juvenildo, Aline e Elmo. Sou grata, também, à tia Naidés, à Viviane e família, as amizades que fiz em Foz do Iguaçu: Nara, Romildo, Isabella, Paúl e Angelo. Aos meus professores da graduação, especialmente, ao Matheus, à Shirlei, à Regina, ao Nilo e ao Edison. Agradeço aos professores membros da banca examinadora por aceitarem avaliar minha dissertação. À CAPES e à Fundação Araucária pela bolsa de estudos que permitiu a realização desse estudo.

E para finalizar quero agradecer ao Hugo por ser meu parceiro de vida, por me dar apoio, me fazer sorrir e estar do meu lado mesmo quando eu não mereço. Por sempre me fazer lembrar de tudo que vencemos e vamos construir juntos.

Sumário

Introdução	9
1 Relatividade Geral	12
1.1 Relatividade = Relatividades	12
1.2 Gravitação Newtoniana e gravitação de Einstein	13
1.3 Aspectos matemáticos da RG	14
2 Precessão do Periélio de Mercúrio	20
2.1 Aspecto histórico	20
2.2 Conceitos básicos ligados à precessão do Periélio	21
2.2.1 1ª Lei de Kepler - Elipse - Periélio - 2ª Lei de Kepler	21
2.2.2 Tensor de Killing	25
2.2.3 Equações de Euler-Lagrange	26
2.3 Problema de Kepler	27
2.4 Órbita das partículas - Formalismo Relativístico	30
2.5 Vetor de Laplace-Runge-Lenz e avanço do Periélio	37
3 Aproximação PPN e NNA	39
3.1 PPN - formalismo pós-newtoniano parametrizado	39
3.2 NNA - Aproximação quase newtoniana	41
4 Aplicações - métrica de Weyl	46
4.1 Precessão do periastro de exoplanetas - métrica de Weyl	46
4.1.1 Precessão baseada no NNA para exoplanetas com excentricidade maior que 0,1	52

4.1.2	Precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades pequenas e órbitas circulares	56
4.1.3	Precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades grandes	59
4.1.4	Panorama geral - 34 exoplanetas e Mercúrio	62
5	Aplicações - métrica de Zipoy	68
5.1	Desvio do periélio - métrica de Zipoy $l = 0$ e $\theta = 0$	71
5.1.1	Desvio do periélio para $\sigma(v)$ pequeno	75
5.1.2	Desvio do periélio para $\sigma(v \rightarrow \infty)$	77
5.1.3	Solução geral para o desvio do periélio de Zipoy para $l = 0$	78
	Considerações Finais	83

Introdução

O estudo voltado à Cosmologia e Astrofísica tem oferecido uma gama de dados acerca da estrutura e evolução do universo. Face a tantas descobertas é aceitável que a teoria da Relatividade Geral (RG) possa se mostrar insuficiente. Esses pontos acabam por estimular o desenvolvimento de teorias gravitacionais alternativas ou mesmo a busca por extensões da teoria de gravitação de Einstein. As informações observacionais coletadas por sondas espaciais e telescópicos, por exemplo, são abrangentes e reveladoras. Exoplanetas são descobertos e muito é desvendado a respeito desses objetos, que estão fora do sistema Solar. Os dados orbitais desses objetos fornecem base para explorar aplicações da Física à Astrofísica como é o caso de estudo proposto para o presente trabalho.

Podemos dizer que os exoplanetas funcionam como um laboratório que pode abrigar nossas análises e estudos. A nossa proposta é, estudar o problema similar ao do desvio do periélio de corpos cósmicos. Não é só pelo mérito que o teste para precessão do periélio de Mercúrio rendeu a RG, levando a validação da teoria, e oportunizando ajuda quanto a construção de modelos de gravitação mais confiáveis e precisos. Mas porque estamos interessados no estudo sobre o movimento lento na RG sob ação de um campo gravitacional arbitrário.

Nesse sentido, tomamos o estudo do desvio apsidal com base em duas métricas, a métrica de Weyl e a métrica de Zipoy. A métrica de Zipoy apresenta a métrica de Weyl como um caso particular, trata-se da descrição da geometria de um esferóide oblato. Assim podemos desenvolver nosso estudo fazendo uso da aproximação quase Newtoniana (NNA) que representa uma forma para estudar o movimento lento na RG preservando o caráter não-linear da teoria de Einstein. Esse quesito ajuda-nos quanto ao intento de melhorar os resultados da RG para periélios, bem como para testar a viabilidade do método para estudos astrofísicos. Estamos propondo um novo paradigma para a Astrofísica, isso porque não estamos adotando o método usual via

formalismo pós-newtoniano. Fazemos uso da aplicação da aproximação quase Newtoniana e esta pode se revelar um importante fundamento para o entendimento da gravidade na cinemática e dinâmica a nível Solar e estelar. Por ser uma forma de respeitar a física de grande parte de eventos astrofísicos, fazemos referência aqueles eventos em regime de baixa velocidade sob ação de um campo gravitacional arbitrário de intensidade intermediária aos extremos de campo forte e campo fraco.

Para o desenvolvimento do estudo proposto é natural tratarmos sobre pontos como RG, precessão do periélio de Mercúrio, aproximação quase Newtoniana e aplicações (métrica de Weyl e métrica de Zipoy). Cada um desses temas respondem por um capítulo em nosso trabalho. Dividimos o primeiro capítulo, *Relatividade Geral*, em três seções. Na seção 1.1 tornamos o tema sobre a RG mais familiar a partir do ponto de vista histórico e explicamos o que vem a ser essa teoria. Nas seções 1.2 e 1.3 abordamos, respectivamente, as diferenças entre a Relatividade Restrita e a RG, e apresentamos detalhes sobre o aspecto matemático da RG, visto que nosso estudo depende de uma série de objetos tensoriais que compõe a RG.

No segundo capítulo, sobre *A precessão do periélio de Mercúrio*, temos cinco seções. Na seção 2.1 apresentamos o aspecto histórico do tema, na seção 2.2 vamos estudar os conceitos fundamentais alinhados com à precessão do periélio. Incluindo a primeira e a segunda lei de Kepler, diferença entre periélio e afélio, eclipse, tensor de Killing e Lagrangeana. Na seção 2.3, desenvolvemos o problema de Kepler. Por conseguinte, na seção 2.4, tomamos o formalismo relativístico para obter a órbita de uma dada partícula teste. Na seção 2.5, apresentamos a obtenção do avanço do periélio a partir do formalismo relativístico e do vetor de Laplace-Runge-Lenz.

No terceiro capítulo, *Aproximação PPN e NNA*, nos dedicamos a esclarecer sobre o modelo que propomos a estudar no presente trabalho. O capítulo é composto por duas seções, na 3.1 tratamos do modelo padrão de aproximação da RG e de outras teorias métricas, a aproximação baseada no formalismo pós-newtoniano parametrizado (PPN). E na seção 3.2 apresentamos a aproximação quase Newtoniana (NNA) da RG, sendo esta uma solução proposta ao estudo do movimento lento sob a ação de um campo gravitacional intermediário ao campo da teoria Newtoniana e ao da RG.

O quarto capítulo, *Aplicações - métrica de Weyl*, é dedicado ao estudo com base na métrica de Weyl. Na seção 4.1 temos o estudo proposto sobre a precessão do periastro de 34 exoplanetas. Apresentamos um método para a obtenção do desvio do periélio proposto por Harko [1] e em

seguida começamos a tomar nota quanto aos dados orbitais dos exoplanetas para iniciar os cálculos da precessão. Nesse caso, como os exoplanetas estudados são heterogêneos dividimos tais objetos em três grupos que são descritos nas subseções 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3.

Na subseção 4.1.1 temos a precessão baseada no NNA para exoplanetas com excentricidade maior que 0,1, sendo oportunizado a comparação entre o resultado do nosso modelo para o desvio com o do modelo PPN da RG para tal desvio. Na próxima subseção, 4.1.2, e na 4.1.3 realizamos a previsão da precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades pequenas e órbitas circulares e para a precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades grandes, respectivamente. Encerramos a abordagem sobre a aplicação, com base na métrica de Weyl, na subseção 4.1.4 apresentando um panorama geral destacando o comportamento dos parâmetros orbitais de todos os exoplanetas incluindo aqueles relativos ao planeta Mercúrio.

O quinto e último capítulo, *Aplicações - métrica de Zipoy*, é dedicado ao estudo da métrica de Zipoy. Inicialmente, apresentamos a construção dessa métrica feita por David Zipoy em 1966. Mostramos que esta métrica é dada por mudanças de coordenadas e de variáveis aplicadas à métrica de Weyl. Na sequência esclarecemos sobre a existência de três casos principais da métrica de Zipoy ligados às soluções para o potencial Newtoniano, que podem ser escritas como uma combinação linear de polinômios de Legendre de ordem integral l . Assim, temos o caso $l = 0$ (solução monopólo), $l = 1$ (solução momento de dipolo) e o terceiro caso é uma interferência das duas primeiras soluções, $l = 0$ e $l = 1$ (solução monopólo-dipolo). Nesse trabalho, estudamos apenas o caso $l = 0$ que é a forma mais trivial da métrica de Zipoy. Apesar da trivialidade obtemos uma solução altamente não-linear para a equação da órbita. Nesse sentido, buscamos contruir uma solução geral para o desvio do periélio na diferença do desvio de duas regiões. Uma região em torno da singularidade anel e outra região próxima a órbita circular, nesse caso temos dois desvios diferentes que são obtidos respectivamente nas subseções 5.1.1 e 5.1.2.

Na última subseção do quinto capítulo, 5.1.3, construímos uma solução geral para o desvio do periélio com base nos resultados das duas subseções anteriores. Com base na solução encontrada chegamos a conclusões interessantes como a pertinência do modelo para o estudo de precessões retrógradas, bem como um resultado bastante preciso para o periélio de Mercúrio posto em comparação ao resultado observacional. Finalmente no capítulo conclusões apresentaremos as considerações finais deste trabalho e apresentamos perspectivas para um estudo futuro quanto aos outros casos da métrica de Zipoy.

Capítulo 1

Relatividade Geral

A teoria da gravitação de Einstein, chamada de teoria da Relatividade Geral - RG, está dentre as teorias com grande prestígio científico e tecnológico. Sua repercussão tecnológica pode estar mesmo no nosso dia-a-dia, pois a teoria possibilita a calibração dos Sistemas de Posicionamento Global (GPS), por exemplo. São muitos os méritos dessa teoria, desde aprovação experimental nos famigerados testes clássicos (o teste sobre a precessão do periélio de mercúrio terá espaço no trabalho no próximo capítulo) até a comprovação recente de uma previsão quase centenária de Einstein, as ondas gravitacionais. Nesse capítulo iremos discutir os fundamentos dessa teoria.

1.1 Relatividade = Relatividades

Propomos uma volta no tempo para melhor abarcar a RG e permitir seguimento quanto aos detalhes do trabalho. Vamos começar com a definição de relatividade. Trata-se de um campo da Física que se ocupa do estudo para aferição correta de acontecimentos (eventos) [2]. O enfoque está na relação entre os valores aferidos em referenciais que estejam se movendo um em relação ao outro.

É importante notar que a teoria da Relatividade de Einstein é composta por duas teorias diferentes, a Relatividade Restrita/Especial - (RE) - (1905) e a Relatividade Geral (1915), que é foco do trabalho. A RE carrega esse termo, restrita, para lembrar que seu escopo de aplicação é limitado a referenciais inerciais que são sistemas em repouso ou possuem velocidade constante, isto é, sistemas acelerados não estão contidos no grupo dos referenciais inerciais [2], portanto, não poderia incluir gravitação.

Podemos afirmar que essa seja a principal diferença entre ambas as teorias, a RG tem seu escopo voltado para referenciais acelerados. Tal teoria levou a uma nova formulação sobre os efeitos gravitacionais. Os efeitos da teoria da RG são perceptíveis em escalas que estão distantes de nós, como massas astronômicas e velocidades próximas a da luz [2].

A teoria da RG é mais robusta e abstrata, sendo necessária a análise tensorial para ser compreendida. Devido ao formalismo tensorial, Einstein foi capaz de estruturar seu estudo sobre o espaço-tempo e propor a relação entre matéria/energia e geometria. Deste modo, o conteúdo de matéria e energia curvam o espaço-tempo e este dita como elas devem se mover [3]. Esse entendimento foi alcançado com a teoria da RG que é um passo além do âmbito da relatividade Newtoniana.

1.2 Gravitação Newtoniana e gravitação de Einstein

Vale lembrar que antes da teoria da gravitação de Einstein, a teoria da gravitação Newtoniana respondia relativamente aos problemas físicos da época. Porém, surgiram dois impasses significativos. Um deles era [4]: (i) por que a *teoria do eletromagnetismo de Maxwell*¹ era consistente com as observações, porém as suas premissas fundamentais não eram verificáveis (contrariavam o princípio da relatividade Galileana)? O outro, (ii), era relacionado com a teoria Newtoniana que não era capaz de reproduzir o resultado observacional para a precessão do periélio de Mercúrio [5] (vide capítulo 2).

Ambos os impasses, cada um a seu tempo, foram quebrados com a teoria de Einstein. Einstein encontrou a solução para o enigma, (i), quando levado a repensar os conceitos de espaço e tempo [4]. Einstein propôs que espaço e tempo estão entrelaçados, em outras palavras o tempo que separa dois eventos depende de quão distantes eles ocorrem e vice-versa [2]. Ademais o próprio entrelaço é distinto para observadores que estão em movimento um em relação ao outro [2]. Einstein pode formular dois postulados com os quais foi capaz de mostrar que a relatividade Galileana não poderia estar totalmente correta [2, 4]. O primeiro postulado de Einstein rotulado por *Postulado da Relatividade Especial* que afirma que as leis da Física são as mesmas para os observadores em todos os referenciais inerciais. Einstein fez uma extensão da ideia de Galileu que considerava apenas as leis da mecânica serem as mesmas nesses referenciais [2, 4].

¹Essa teoria de Maxwell era uma teoria ondulatória e a teoria de Newton, por sua vez, uma teoria corpuscular.

O segundo postulado, *Postulado da Velocidade da Luz*, afirma que a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor em todas as direções e em todos os referenciais inerciais. Esse postulado é usado para dizer que na natureza existe uma velocidade limite c , com a qual a luz viaja e nenhuma entidade que transporta energia ou informação pode exceder esse limite [2]. Ambos os postulados foram testados várias vezes e nunca foram observadas exceções [2].

Mais tarde sugeriram novos princípios, pois se fez precípua estender da RE para uma teoria que incorporasse a gravitação. Nesse sentido, fecharemos essa seção aclarando cada um desses princípios que levaram Einstein a construir a teoria da RG. Sendo eles: o princípio de Mach, o princípio da equivalência, o princípio de covariância, o princípio mínimo de acoplamento gravitacional e o princípio da correspondência.

O princípio de Mach e o princípio da equivalência surgiram do empenho em compreender a natureza das leis de Newton de forma mais acurada. Podemos resumir o *princípio de Mach* com três declarações [6]: (i) a distribuição da matéria determina a geometria; (ii) se não existe matéria então não há geometria e (iii) um corpo em outro universo vazio não deve apresentar propriedades inerciais.

O *princípio da equivalência* é norteado pela igualdade das massas inercial e gravitacional no intuito de incluir sistemas não inerciais ampliando o princípio da RE [7]. O *princípio da covariância* afirma que as equações da física devem ter forma tensorial [6]. Por conseguinte não há sistemas de coordenadas privilegiados, assim as equações de Einstein mantêm a forma em quaisquer sistema de coordenadas [7]. O *princípio mínimo de acoplamento gravitacional* diz que não deve adicionar termos desnecessários para realizar a transição para a teoria da RG [6].

Para finalizar temos o *princípio da correspondência*, este ressalta que a RG deve concordar com a RE, na ausência da gravitação, e com a própria gravitação Newtoniana no limite de sua validade, campos fracos e baixas velocidades em comparação a velocidade da luz [6].

1.3 Aspectos matemáticos da RG

Finalizada a parte conceitual da teoria, não podemos deixar de apresentar o tratamento matemático que existe por trás dessa teoria. Sabemos que para operar na física Newtoniana é preciso usar ferramentas vetoriais. Isso porque as grandezas vetoriais resumem um conjunto de três equações, revelando a estrutura do problema e ajudando a resolvê-los mais rapidamente [8].

Da mesma forma, a teoria da RG requer de um formalismo matemático para ser trabalhada e descrita.

O formalismo em questão é o tensorial. Tensor é um objeto matemático que apresenta N^m componentes no espaço, N representa o número de dimensões do espaço e m é a ordem do tensor - número de índices [9]. Um tensor de ordem zero ($N^0 = 1$) é chamado de escalar e um tensor de primeira ordem ($N^1 = N$) é chamado de vetor [10].

São os tensores que vão resumir o conjunto de equações e permitir resolvê-las, além de apresentar a estrutura das mesmas [8]. Sendo assim, os tensores apoiaram os estudos de Einstein que levaram a formulação do tensor $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.1)$$

e da relação

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

tal que $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ é um tensor simétrico, que é denominado tensor de Einstein. Na eq.(1.2) temos a forma fundamental da RG que são as equações de Einstein, elas relacionam a geometria ($G_{\mu\nu}$) com a matéria/energia (tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}$). O termo κ é uma constante de proporcionalidade, que é ajustada para garantir o limite Newtoniano da teoria. Como foi possível notar existem duas formas para esse tensor, eq.(1.1) [11] e eq.(1.2) [12], ambas as formas serão tratadas nessa seção.

No primeiro caso para $G_{\mu\nu}$ vemos: o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$ e o escalar de curvatura, R . O *tensor métrico* é um tensor simétrico, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, que guarda as componentes da métrica do espaço-tempo dada por [13]:

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (1.3)$$

os índices gregos variam de 0 a 3 ou de 1 a 4.

Para o caso das equações de campo de Einstein no vácuo, $G_{\mu\nu} = 0$, temos, por exemplo, a *métrica de Schwarzschild*², dada por [18]:

²Essa solução trata da geometria do espaço vazio fora de uma fonte de curvatura esfericamente simétrica e estática [14]. Ela é uma boa aproximação para a descrição do nosso campo gravitacional, já que a rotação do nosso planeta é bem pequena. Tal questão nos remete ao fato de que a métrica de Schwarzschild é um caso particular da métrica de Kerr para o caso de rotação nula, $a = 0$ [15]. É importante ter em mente que existem outras métricas (e.g., métrica de Weyl [16] e métrica de Zipoy [17],

$$\begin{aligned}
ds^2 &= g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{tt}dt^2, \\
&= \left(-\frac{1}{1 - \frac{2m^*}{r}} \right) dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2 + \left(1 - \frac{2m^*}{r} \right) dt^2,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

sendo $m^* = \frac{GM}{c^2}$ a massa geométrica [18] apresenta unidade de comprimento e G é a constante da gravitação universal [6]. Vale grifar que na eq.(1.4) adotamos a assinatura da métrica dada por $(- - +)$, ou seja, a componente do tempo é tomada como positiva, o caso contrário ocorre quando a assinatura é dada por $(+ + +)$.

Esse tensor, $g_{\mu\nu}$, também funciona como um operador para “baixar” e “levantar” índices [19]. Fica mais claro quando fazemos alusão a ideia de matriz identidade (I), produto de uma matriz pela sua inversa, $A \times A^{-1} = I$. No caso tensorial,

$$g_{\mu\sigma}g^{\mu\nu} = \delta_{\sigma}^{\nu}, \tag{1.5}$$

trata da mesma ideia, uma matriz (tensor com componentes covariantes, $g_{\mu\sigma}$) multiplicada pela sua inversa (tensor com componentes contravariantes, $g^{\mu\nu}$) resulta no tensor de Kronecker, δ_{σ}^{ν} , tal que $\sigma = \nu = 1$ e $\sigma \neq \nu = 0$ [20]. Na eq.(1.5) os índices μ estão indicando um somatório (notação de Einstein) e os índices σ e ν são índices livres.

Antes de seguir com a explicação para o caráter de operador do tensor métrico é importante esclarecer que o conjunto dos tensores podem extrapolar a ideia de matriz. Visto que não se resumem a objetos com apenas segunda ordem, i.e, dois índices, podem ser trabalhados com N dimensões e além das componentes contravariantes e covariantes, temos as componentes mistas (apresentam em simultâneo índices contravariante e covariante).

Nesse sentido, a ideia de que o tensor de Einstein tem componentes covariantes, $G_{\sigma\beta}$, contravariantes, $G^{\mu\nu}$ ($g^{\mu\sigma}g^{\nu\beta}G_{\sigma\beta} = G^{\mu\nu}$), e mistas, G_{β}^{ν} ($g^{\sigma\nu}G_{\sigma\beta} = G_{\beta}^{\nu}$), pode parecer algo mais natural. E, por conseguinte, podemos notar o fato de que o tensor métrico realiza a *transformação entre as componentes de um tensor*³, como no caso exemplificado para o tensor de Einstein. Quando tratamos de transformações entre sistemas de coordenadas todo tensor deve obedecer a *lei de transformação dos tensores*, do contrário não é um tensor [11]. Nesse caso uma mudança de sistema de coordenadas de S para S' um dado tensor $A^{\alpha\beta}$ torna-se, pela lei de transformação

ambas serão vistas no presente trabalho e descrevem uma região do espaço-tempo com características distintas da métrica de Schwarzschild) e tantas outras podem ser construídas.

³Essas transformações são estabelecidas no mesmo sistema de coordenadas.

dos tensores, em $A'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} A^{\gamma\lambda}$. Podemos observar nessa lei que o número de índices do tensor denuncia o número de derivadas parciais presentes na transformação de coordenadas do mesmo.

Sabemos que o tensor métrico é essencial para os cálculos da RG. Uma das principais identidades envolvidas nessa teoria é $\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$, derivada covariante da métrica é nula [11]. Esse tensor está por toda parte nessa teoria, mesmo em objetos não tensoriais como, por exemplo, o *símbolo de Christoffel*⁴, $\Gamma_{\beta\tau}^{\sigma}$ [11]:

$$\Gamma_{\beta\tau}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\partial_{\beta} g_{\alpha\tau} + \partial_{\tau} g_{\alpha\beta} - \partial_{\alpha} g_{\beta\tau}), \quad (1.6)$$

onde $\partial_x A \equiv \frac{\partial A}{\partial x}$. O símbolo de Christoffel não é um tensor, pois não obedece a lei de transformação dos tensores. Sua transformação *não* deveria ter o termo em destaque

$$\Gamma_{\beta\tau}^{\nu\sigma} = \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\tau}} \Gamma_{\gamma\mu}^{\alpha} - \underbrace{\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\sigma}}{\partial x^{\alpha} \partial x'^{\gamma}}}_{\text{destaque}}. \quad (1.7)$$

O objeto é a conexão métrica que está presente, por exemplo, na derivada covariante de um tensor, e.g., [21]

$$\nabla_{\gamma} g_{\alpha\beta} = \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} g_{\mu\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} g_{\mu\alpha}, \quad (1.8)$$

e no comportamento do *tensor de Riemann*, $R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda}$ [11],

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}. \quad (1.9)$$

Esse objeto tensorial é antissimétrico nos dois últimos índices,

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda} = -R_{\sigma\nu\mu}^{\lambda}. \quad (1.10)$$

Graças a esse comportamento temos a seguinte identidade [11]:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda} + R_{\nu\sigma\mu}^{\lambda} + R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda} = 0. \quad (1.11)$$

Outros dois comportamentos para esse tensor podem ser notados quando baixamos o primeiro índice desse tensor, e.g., $g_{\lambda\alpha} R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda} = R_{\alpha\sigma\mu\nu}$. Sendo assim, temos as seguintes relações para o tensor de Riemann [11]:

$$R_{\alpha\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\sigma} \quad (1.12)$$

⁴Como não estamos trabalhando com teorias de torção, esse objeto é simétrico ($\Gamma_{\beta\tau}^{\sigma} = \Gamma_{\tau\beta}^{\sigma}$) e portanto, satisfaz $\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$ [11].

e também

$$R_{\alpha\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\alpha\mu\nu}. \quad (1.13)$$

Essas características permitem reduzir o número de componentes independentes do tensor de Riemann. Ainda podemos contar com outra importante identidade ligada ao tensor de Riemann, a identidade de Bianchi⁵ [11]:

$$\nabla_{\beta}R_{\alpha\sigma\mu\nu} + \nabla_{\nu}R_{\alpha\sigma\beta\mu} + \nabla_{\mu}R_{\alpha\sigma\nu\beta} = 0. \quad (1.14)$$

A contribuição do tensor de Riemann também está presente na construção do *tensor de Ricci*, que é a forma reduzida do tensor de Riemann devido a uma contração específica de índices, isto é, quando $\lambda = \mu = \alpha$, temos: $R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda} = R_{\sigma\alpha\nu}^{\alpha} = R_{\sigma\nu}$ [11]. Em resumo, cada componente do tensor de Ricci é composta por uma soma de componentes do tensor de Riemann via soma de Einstein:

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\alpha\nu}^{\alpha} = R_{\sigma 1\nu}^1 + R_{\sigma 2\nu}^2 + R_{\sigma 3\nu}^3 + R_{\sigma 4\nu}^4, \quad (1.15)$$

tal que, $R_{\sigma\nu} = R_{\nu\sigma}$.

Por sua vez o tensor de Ricci está por trás do comportamento do *escalar de curvatura*, esse surge da contração completa entre os índices do tensor métrico com os índices do tensor de Ricci [11]:

$$R = g^{\nu\mu}R_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Concluimos a descrição dos objetos tensoriais presentes no primeiro formato do tensor de Einstein, eq.(1.1), vamos seguir o estudo com a segunda forma do tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. O conteúdo de matéria/energia é dado pelo *tensor energia-momento*, $T_{\mu\nu}$. Na RG temos três $T_{\mu\nu}$ mais importantes, sendo eles [12]:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^{\mu} u^{\nu}, \quad (1.17)$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho_0 + p)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-g^{\sigma\lambda}F_{\mu\sigma}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\sigma\lambda}F^{\sigma\lambda} \right), \quad (1.19)$$

sendo a eq.(1.17) o tensor energia-momento para matéria incoerente ou poeira (ρ_0 é densidade própria e $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ é o quadri vetor velocidade), a eq.(1.18) mostra o tensor energia-momento para um fluido perfeito (p é a pressão escalar) e na eq.(1.19) temos o tensor energia-momento para um campo eletromagnético ($F_{\mu\nu}$ é o tensor de campo eletromagnético).

⁵Geram $G_{\mu\nu}$ independentemente de um princípio Lagrangeano, pois $\nabla_{\lambda}G_{\mu\nu} = 0$.

Além do tensor energia-momento na eq.(1.2), temos a presença da *constante de acoplamento* [12], $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, ela é essencial para o sucesso da relação matéria/energia com geometria. A presença da constante de gravitação universal, G , nessa constante κ permite que a RG possa voltar ao campo da teoria Newtoniana fazendo uso do limite Newtoniano [22] (vide capítulo 3), que satisfaz o princípio da correspondência.

Para finalizar vamos apresentar uma forma usual de obter as equações de Einstein. O procedimento é feito com base na ação de Einstein-Hilbert, $S_H = \int \sqrt{-g} R d^4x$, que para o espaço-tempo quadridimensional é dada por:

$$S_H = \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (1.20)$$

tal que R é o escalar de curvatura, $\sqrt{-g}$ é a densidade escalar [20], d^4x é o elemento de volume (hipervolume) e $\sqrt{-g} d^4x$ é um invariante.

Consideramos essa ação, eq.(1.20), sob pequenas variações da métrica de modo a obter [23]:

$$\delta S_H = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x R \delta \sqrt{-g}. \quad (1.21)$$

Sabemos que a primeira integral acaba por não contribuir para a variação total e temos [23]:

$$\delta g^{\mu\nu} = \frac{\delta g g^{\mu\nu}}{-g} \quad (1.22)$$

e conseqüentemente,

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (1.23)$$

sendo g o determinante da métrica [11]. Logo podemos escrever a eq.(1.21) como:

$$\delta S_H = 0 + \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \int d^4x R \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (1.24)$$

$$\delta S_H = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.25)$$

Permitindo obter as equações de Einstein no vácuo [23]:

$$\frac{\delta S_H}{\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (1.26)$$

Contudo, sabemos que o tensor de Einstein é um tensor de segunda ordem, 2 índices, que em um espaço-tempo de quatro dimensões gera um sistema de 16 equações diferenciais não-lineares, e.g., $2^4 = 16$. Como é uma teoria não-linear, podemos observar a gama de efeitos que não apareciam na teoria Newtoniana, uma teoria linear. Iremos abordar esse ponto com mais detalhes no capítulo 3. Dessa forma, conhecendo a estrutura de $G_{\mu\nu}$ é possível encontrar soluções para determinadas regiões do espaço-tempo.

Capítulo 2

Precessão do Periélio de Mercúrio

Nosso propósito nesse capítulo é apresentar o problema da precessão do periélio de Mercúrio que foi solucionado com a teoria da RG. Pretendemos mostrar que testes para a precessão do periastro de exoplanetas funcionam como laboratórios astrofísicos e que respeitando o modelo gravitacional. Em termos da não-linearidade da teoria de Einstein, podemos obter muitas respostas e maior precisão nos resultados.

2.1 Aspecto histórico

Sabe-se que mesmo antes da teoria da gravitação de Einstein já se considerava a precessão do periélio, pelo fato de um sistema planetário ser composto por n -corpos que leva a um efeito de perturbação no movimento de um determinado planeta. Todavia, a previsão clássica para o avanço do periélio de Mercúrio era incompatível à observacional. Cerca de 43 segundos de arco por século era a diferença, que na escala astrofísica representaria um grande erro acumulado.

Na época, como resposta ao problema, julgaram existir um outro planeta (“Vulcan” ou Vulcano) com órbita dentro da órbita de Mercúrio. Todavia, “Vulcan” nunca foi descoberto [24]. O mistério com mais de 60 anos teve fim com a publicação da teoria da gravitação de Einstein. A previsão teórica obtida por Einstein, em novembro de 1915, para a precessão do periélio de Mercúrio foi de 43 segundos de arco por século [5].

O estudo da precessão do periélio pode ser relacionado com a órbita de partículas-teste como, por exemplo, o nosso planeta orbitando o Sol, partículas orbitando um *disco de acreção*¹

¹Estrutura com materiais difusos em movimento orbital entorno de um corpo central.

de uma *estrela de nêutron ou um buraco negro*² [14]. Deste modo, é notório que o estudo do tema proposto depende de conceitos peculiares, que precisam ser esclarecidos.

2.2 Conceitos básicos ligados à precessão do Periélio

2.2.1 1ª Lei de Kepler - Elipse - Periélio - 2ª Lei de Kepler

De acordo com a *primeira lei de Kepler*, sabemos que os planetas movem-se em torno do Sol em elipse, com a estrela fixa em um dos focos, F_1 ou F_2 , [26], de acordo com a figura a seguir:

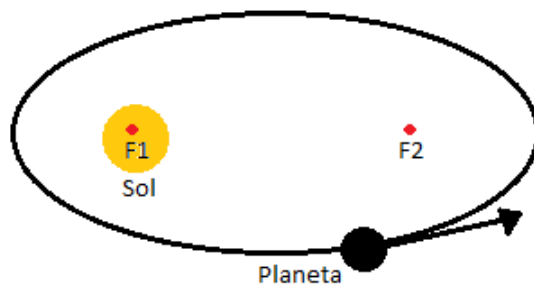


Figura 2.1: Lei das Órbitas, adaptado de [27].

Podemos definir *elipse* como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Características encontradas nas elipse são: excentricidade (ϵ), dois focos (F_1 e F_2 vide fig.(2.1)) e dois eixos (vide fig.(2.2)), sendo eles

$$\begin{cases} \text{eixo maior, } 2a; \\ \text{eixo menor, } 2b. \end{cases}$$

A excentricidade é dada por: $\epsilon = \frac{c}{a}$, vide fig.(2.2) note que c é um dos catetos do triângulo retângulo expresso na figura, sendo $0 < \epsilon < 1$. É interessante notar que para o caso de $\epsilon = 0$ temos um círculo, poderíamos afirmar que círculo é um caso particular de elipse cujos focos estão sobrepostos e os eixos são de mesma magnitude.

²Estrelas cujas massas são da magnitude da massa do Sol podem atingir um estado de equilíbrio final como uma anã branca ou uma estrela de nêutron. Para o caso de massas muito maiores não é possível atingir tal equilíbrio. A RG prediz que uma estrela esfericamente simétrica se contrairá até que toda matéria contida na estrela chegue a uma singularidade no centro da simetria [25]. Em outras palavras, quando dada massa é comprimida a ponto de possuir um raio inferior ao *raio de Schwarzschild*³, $r = \frac{2GM}{c^2}$, nem a luz é capaz de escapar do campo gravitacional gerado por essa massa, logo teremos uma singularidade conhecida com buraco negro.

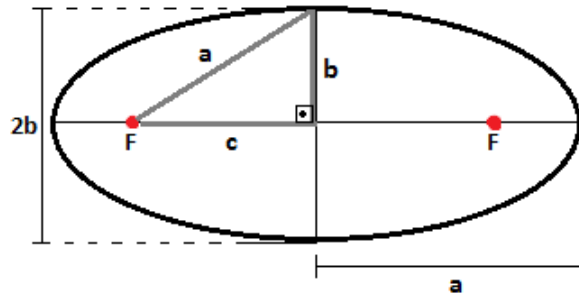


Figura 2.2: Elipse detalhes, adaptado de [28].

A excentricidade, também, pode ser determinada com dependência da diretriz s , paralela ao eixo y , a uma distância d do foco mais próximo, veja a fig.(2.3). Considerando que a diretriz esteja no lado positivo do eixo x , podemos definir ϵ como [29]:

$$\epsilon = \frac{\overline{FP}}{\overline{PD}}, \quad (2.1)$$

conforme a fig.(2.3).

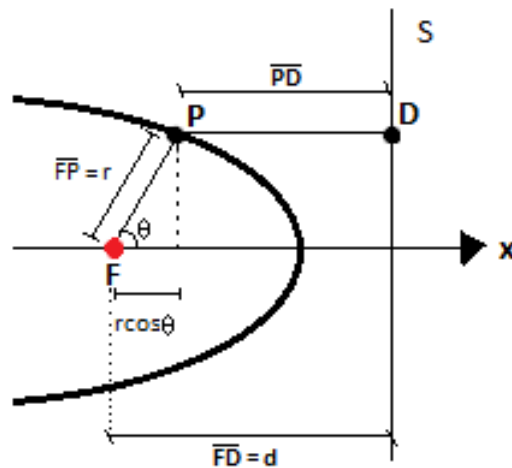


Figura 2.3: Indicações s , d , D , P e r na elipse, adaptado de [29].

Nesse sentido, tomando como base a fig.(2.3), temos $\overline{FP} = r$ e $\overline{PD} = d - r \cos \theta$ [29]. Todavia, optamos por trocar o símbolo do ângulo em questão para ϕ , logo: $\overline{PD} = d - r \cos \phi$. Sendo assim, a eq.(2.1) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{r}{d - r \cos \phi}, \\ r &= \epsilon (d - r \cos \phi), \\ r &= \frac{\epsilon d}{1 + \epsilon \cos \phi}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Levando em consideração a contribuição do “semi-latus rectum” σ [30]:

$$\frac{\sigma}{r} = 1 + \epsilon \cos \phi, \quad (2.3)$$

podemos notar na eq.(2.2) que o termo ϵd representa esse objeto, ou seja: $\sigma = \epsilon d$. Observe a fig.(2.4) e veja a representação gráfica para σ e 2σ .

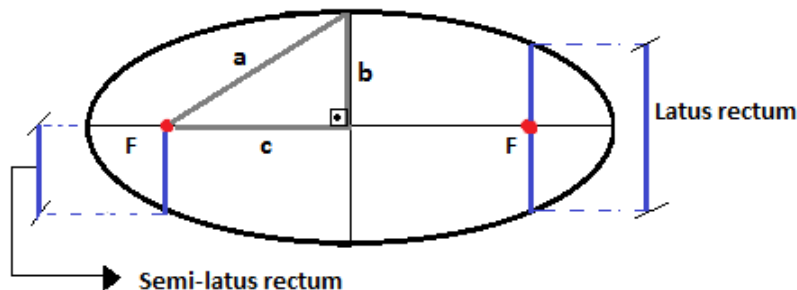


Figura 2.4: Indicação para semi-latus rectum, σ , e latus rectum, $L_R = 2\sigma$, adaptado de [31].

Podemos ainda considerar, no caso $\epsilon > 0$, que o “semi-latus rectum” é também expresso por $\sigma = a(1 - \epsilon^2)$ [30, 32]. Vale lembrar que $b^2 = a\sigma$ e $2\sigma = L_R = \frac{2b^2}{a}$ [33]. Portanto temos uma definição para semi-eixo menor, b , e semi-eixo maior, a , dada por [30]:

$$a = \frac{\sigma}{1 - \epsilon^2}, \quad (2.4)$$

$$b = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \quad (2.5)$$

Prosseguindo com o resultado final da eq.(2.2), levando em conta que $\epsilon d = \sigma$ e $\sigma = a(1 - \epsilon^2)$, podemos escrever:

$$r = \frac{\epsilon d}{1 + \epsilon \cos \phi} = \frac{\frac{\sigma}{\epsilon}}{1 + \epsilon \cos \phi} = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \phi}. \quad (2.6)$$

A eq.(2.6) é a equação da elipse em coordenadas polares, equivalente a uma órbita elíptica fechada para o problema de Kepler com o Sol fixo e precessão nula [32]. O resultado apresentado será importante para obtenção da precessão do periélio.

O *Periélio* nada mais é que a distância mínima, d_{min} , entre o planeta e o Sol. Já a distância máxima, d_{max} , entre tais corpos celestes é chamada de *Afélio*, vide fig.(2.5). Quando tratamos de exoplanetas (planetas fora do nosso sistema Solar), tais magnitudes são chamadas respectivamente de *Periastro* e *Apoastro*.

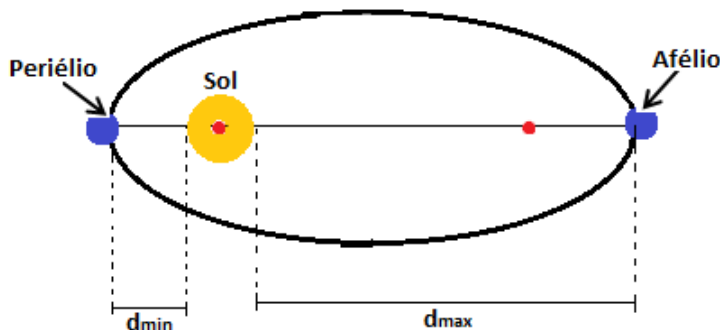


Figura 2.5: Periélio e Afélio, adaptado de [34].

A *segunda lei de Kepler* revela que cada planeta se move ao redor do Sol e a linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais [26]. É válido notar que A , ($A = A_1 = A_2$), representa a área em questão e Δt , ($\Delta t = \Delta t_1 = \Delta t_2$), a variação do tempo como podemos ver na figura a seguir.

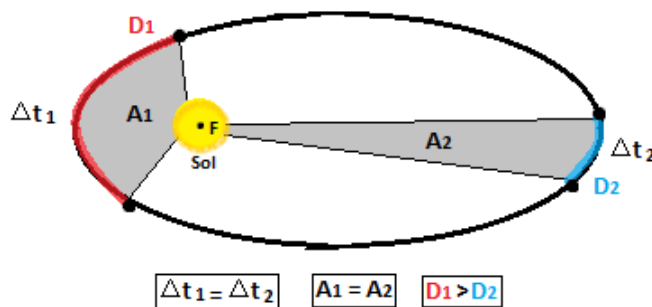


Figura 2.6: Lei das Áreas, adaptado de [35].

Ao analisar as distâncias percorridas pelo planeta, D_1 e D_2 , arcos compreendidos nos setores em destaque na órbita ilustrada na fig.(2.6), vemos que a magnitude de ambas são diferentes, e.g. $D_1 > D_2$. Baseado na 2ª lei de Kepler ambos arcos levam a mesma duração temporária para serem percorridos. Nesse sentido, a explicação para o pressuposto é que a velocidade de translação do planeta ao redor do Sol não pode ser constante. Todavia a razão entre a área varrida, A , e o tempo gasto, t , “velocidade areal” [30], é constante,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{A}{\Delta t} \right) = 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{dA}{dt} \right). \quad (2.7)$$

Retomando a questão da velocidade de translação, podemos aclarar com base na definição de velocidade, $V = \frac{D}{t}$, que o arco maior, D_1 , terá maior velocidade, V_1 , quando comparado a velocidade, V_2 , do arco menor, D_2 , já que Δt é o mesmo para ambos.

A 2ª lei de Kepler será observada no procedimento analítico do avanço do periélio a partir do formalismo relativístico, seção 2.4. Isso porque envolve uma grandeza que não evolue com o tempo, sendo assim evidencia a existência de um tensor de Killing de primeira ordem, um vetor de Killing.

2.2.2 Tensor de Killing

Sabemos que os tensor de Killing de primeira ordem são chamados de vetor de Killing, ξ_μ . Para ordens superiores podem ter forma simétrica e são conhecidos como Stackel-Killing, $K_{(\mu\nu)}$ [39]. Os tensores de Killing são os responsáveis pelas transformações de campo que preservam a métrica do espaço-tempo, correspondendo a uma isometria [36],

$$\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = \nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu = 0, \quad (2.8)$$

onde o termo $\nabla_\nu\xi_\mu$ representa uma derivada covariante de um vetor ou tensor de primeira ordem.

A isometria surge a partir da derivada de Lie da métrica [37], e facilmente podemos ver que o tensor de Killing de primeira ordem corresponde a uma isometria:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &= \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda g_{\mu\lambda}, \\ &= \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \\ &= \nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = \xi_{(\mu;\nu)} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Basicamente, isometrias são simetrias contínuas e ao solucioná-las encontramos as componentes do objeto tensorial em questão [20, 36]. As simetrias abrigam as leis fundamentais da Física, a presença delas em problemas físicos facilita a obtenção para a solução destes. As simetrias indicam grandezas que são conservadas, e.g., a velocidade areal vista na 2ª lei de Kepler é uma quantidade conservada.

Outro fato relevante é que o próprio tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, é solução para a isometria [38],

$$\nabla_{(\lambda} g_{\mu\nu)} = 0. \quad (2.10)$$

Isto é, o tensor Stackel-Killing de segunda ordem é o próprio tensor métrico. Uma curiosidade sobre o fato é que tal comportamento oportuniza a criação de novas métricas a partir de métricas já conhecidas e assim podemos, por exemplo, “varrer” regiões que não eram mapeadas pela métrica original [39].

De fato, as oportunidades que os tensores de Killing carregam são muitas, sempre que uma quantidade é conservada eles estão presentes e a Lagrangeana acaba por ajudar na detecção desses objetos.

2.2.3 Equações de Euler-Lagrange

Sabemos que embora Newton tenha construído as leis fundamentais da mecânica, existem afirmações alternativas destas leis, como por exemplo o princípio de Hamilton e a equação de Lagrange, que tornam a análise de muitos problemas da mecânica Newtoniana mais simples [40].

Vale lembrar que os resultados obtidos da análise de Newton ou de Lagrange devem ser os mesmos para qualquer sistema mecânico. Entretanto, o ponto de vista entre ambas análises é distinto. A abordagem de Newton enfatiza o agente externo que age sobre um corpo, a força. Já na formulação de Lagrange é enfatizado apenas as quantidades associadas aos corpos, as energias cinética e potencial.

O *princípio de Hamilton*⁴ e as equações de movimento, que resultam da aplicação deste princípio, são conhecidas por equações de Lagrange. Podemos enunciar o princípio de Hamilton, em termos do *cálculo de variações*⁵ como [41]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0. \quad (2.11)$$

Um dos problemas básicos do cálculo de variações é determinar uma função [41],

$$L \equiv T - U = L(x_i, \dot{x}_i), \quad (2.12)$$

cuja integral desta seja um extremo, um máximo ou um mínimo, tal que os índices $i = 1, 2, 3$.

A solução para este problema é a equação de Euler-Lagrange, expressa por [41]:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad (2.13)$$

onde a quantidade L é chamada de função de Lagrange ou lagrangeana de uma partícula. Considerando x_i para um espaço-tempo quadrimencional temos $x_i \rightarrow x_\mu$, sendo, e.g., $\mu \equiv$

⁴Caminho real seguido por um sistema dinâmico, que se move de um ponto a outro qualquer em um intervalo de tempo específico, será aquele que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinéticas e potenciais [41].

⁵O cálculo de variação testa várias soluções possíveis para um dado problema e indica um método para selecionar a solução correta [40].

0, 1, 2, 3 temos: $x_0 = t$, $x_1 = r$, $x_2 = \theta$ e $x_3 = \phi$. Vale lembrar que $\dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$ e $\ddot{x}_\mu = \frac{d^2x_\mu}{d\tau^2}$, de forma análoga para casos com índice contravariante (e.g., $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$).

Sabemos que o princípio variacional e a equação de Euler-Lagrange fornecem um método útil para determinar geodésicas⁶, pois quando $L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ a equação da geodésica é a própria equação de Euler-Lagrange [20]:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\sigma = 0 = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right). \quad (2.14)$$

Por fim, o uso da equação de Euler-Lagrange para obter as equações do movimento de uma partícula acaba sendo vantajoso em relação ao outro formato que depende dos símbolos de Christoffel, $\Gamma_{\lambda\sigma}^\mu$, isso porque só tem derivada de primeira ordem.

2.3 Problema de Kepler

O problema de Kepler trata de um movimento de dois corpos devido a uma força central e como vimos é a lagrangeana que nos leva a obter as equações que descrevem o movimento de uma partícula. Sendo assim, precisamos tomar essa força sobre o centro de massa desses corpos para reduzir o problema a um corpo equivalente. Uma forma de observar o pressuposto pode ser vista com a dependência da massa reduzida μ [43]:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (2.15)$$

Particularmente, temos o movimento de uma partícula teste em um campo gravitacional de um corpo massivo (Sol). Nesse problema, a massa do planeta em relação ao Sol é ignorada por toda parte, de modo que o Sol é considerado como estacionário e não ocorre a precessão no periélio [32]. A lagrangeana para esse problema em coordenadas esféricas é dada por [44]:

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + \dot{r}^2\dot{\theta}^2 + r^2 \text{sen}^2\theta\dot{\phi}^2) - U(r), \quad (2.16)$$

sendo $U(r) = \mu\Phi(r)$ [45], em que $\Phi(r)$ é o potencial gravitacional, $\Phi = \frac{-GM}{r}$, [45]. Considerando o movimento no plano equatorial, $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \mu\Phi(r). \quad (2.17)$$

⁶Geodésica é uma curva de valor estacionário sobre uma superfície do espaço Riemanniano. Isto é, uma curva cujo comprimento é mínimo e se mantém fixos o seu ponto inicial e final [42].

Deste modo, teremos equações do movimento para coordenadas esféricas ϕ e r . Para a coordenada ϕ identifica-se uma grandeza conservada, pois não há dependência em ϕ , então:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\phi}) = 0. \quad (2.18)$$

Nesse sentido, temos a conservação do momento angular do sistema, $l = \mu r^2 \dot{\phi}$. Essa conservação implica na conservação presente em:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} \right) = 0. \quad (2.19)$$

O fator $\frac{1}{2}$ foi inserido pois $\frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}$ é um resultado previsto pela lei das áreas de Kepler, é a velocidade areal. Sabendo que $dA = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v} dt)$ e como $\vec{p} = \mu \vec{v}$, [26], temos a velocidade areal:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2\mu} (\vec{r} \times \vec{p} dt) = \frac{l}{2\mu} = \frac{\mu r^2 \dot{\phi}}{2\mu} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{2}. \quad (2.20)$$

Substituindo o resultado da eq.(2.20) na eq.(2.7) encontramos o mesmo que na eq.(2.19). Portanto, a conservação do momento angular é o mesmo que a conservação da velocidade areal.

Já a equação de Lagrange correspondente a r leva a obtenção de:

$$\mu r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial \mu \Phi(r)}{\partial r} - \frac{d}{dt} (\mu \dot{r}) = 0, \quad (2.21)$$

$$\mu \ddot{r} - \mu r \dot{\phi}^2 = -\frac{\partial \mu \Phi(r)}{\partial r} = F(r). \quad (2.22)$$

Podemos obter $\dot{\phi}^2$ a partir de $l = \mu r^2 \dot{\phi}$, que nos leva a reescrever a eq.(2.22) em termos do potencial gravitacional, $\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$:

$$\mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = F(r) = -\frac{GM\mu}{r^2}, \quad (2.23)$$

então temos a equação radial do movimento Newtoniano,

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{l^2}{r^3}, \quad \mu = 1, \quad (2.24)$$

sendo G a constante de gravitação universal e M é a massa.

Ainda é possível reescrever a eq.(2.24) considerando $\frac{dt}{d\phi} = \frac{1}{\dot{\phi}} = \frac{r^2}{l}$,

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \left(\frac{dt^2}{d\phi^2} \right) + \frac{GM}{r^2} \left(\frac{r^4}{l^2} \right) - \frac{l^2}{r^3} \left(\frac{r^4}{l^2} \right) = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{d^2 r}{d\phi^2} + \frac{GM r^2}{l^2} - r = 0. \quad (2.26)$$

Fazendo a mudança de variável $r = \frac{1}{u}$, temos:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} \left(-\frac{1}{u^2} \right) + \frac{GM}{l^2 u^2} - \frac{1}{u} = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{l^2}. \quad (2.28)$$

Com base na ref.[30], temos que

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{\mu F(\frac{1}{u})}{l^2 u^2}, \quad (2.29)$$

logo o lado direito da eq.(2.28) é dado por:

$$-\frac{\mu F(\frac{1}{u})}{l^2 u^2} = -(GM\mu u^2) \left(-\frac{\mu}{l^2 u^2} \right) = \frac{GM\mu^2}{l^2}. \quad (2.30)$$

O resultado apresentado pela eq.(2.28) é equivalente ao apresentado na ref.[32] para $J = l$:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{J^2}. \quad (2.31)$$

A solução para esta equação é dada pela soma entre a solução homogênea e a particular:

$$\begin{aligned} u &= \frac{GM}{J^2} + k \cos\phi, \\ \frac{J^2}{GM} u &= 1 + k \frac{J^2}{GM} \cos\phi, \\ u &= \frac{GM}{J^2} (1 + \epsilon \cos\phi) = \sigma^{-1} (1 + \epsilon \cos\phi). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Esta solução não revela uma precessão do periélio, temos uma órbita fechada. Observe que podemos retornar a equação da elipse em coordenadas polares levando em conta a eq.(2.32), $\sigma = a(1 - \epsilon^2)$ e $u = r^{-1}$:

$$\frac{1}{r} = \sigma^{-1} (1 + \epsilon \cos\phi) \rightarrow r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{(1 + \epsilon \cos\phi)}. \quad (2.33)$$

Vale notar que para esse problema temos mais uma quantidade conservada, a energia, $E = T + U = T + \mu\Phi(r)$:

$$E = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + U(r). \quad (2.34)$$

Com base na conservação do momento angular, $l = \mu r^2 \dot{\phi}$, dada pela eq.(2.18) temos $\dot{\phi}^2 = \frac{l^2}{\mu^2 r^4}$, portanto:

$$E = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \right) + U(r). \quad (2.35)$$

Considerando a equação do movimento para esse caso temos [43]:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \right) + \mu \ddot{r} = 0, \quad (2.36)$$

como $\mu\ddot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu\dot{r}^2 \right)$, podemos escrever $\mu\ddot{r} = \frac{dt}{dr} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu\dot{r}^2 \right)$, portanto:

$$\mu\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \right), \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu\dot{r}^2 \right) = -\frac{dr}{dt} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \right), \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) \right) = 0, \quad (2.39)$$

$$E = \frac{1}{2} \mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) = \frac{1}{2} \mu\dot{r}^2 + U_{ef}(r), \quad (2.40)$$

é importante esclarecer que o resultado da eq.(2.40) precisa de uma correção relativística para apresentar um incremento que responda pela precessão do periélio. Sabemos que $U_{ef}(r) = V(r)$ é o potencial efetivo, com $\frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2}$ podendo ser interpretado como energia potencial centrífuga e $U(r) = \mu\Phi(r)$ a energia potencial efetiva [30].

2.4 Órbita das partículas - Formalismo Relativístico

Em 1916, Karl Schwarzschild resolveu a equação de Einstein para o vácuo, $G_{\mu\nu} = 0$. Esta solução trata da geometria do espaço vazio fora de uma fonte de curvatura esfericamente simétrica [14]. Em outras palavras, é uma boa aproximação para o campo gravitacional. Portanto, torna as previsões da teoria de Einstein mais acessíveis a testes experimentais.

Nesse sentido, com base na métrica de Schwarzschild, eq.(1.4), vamos analisar a órbita de uma partícula teste seguindo a geodésica *tipo tempo* ($c > v$ onde c é a velocidade da luz). No regime *tipo tempo* temos a seção temporal maior que a seção espacial ($c^2 dt^2 > dS_3^2$ que implica em $c > v$, onde $dS_3^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2$ é a parcela espacial da métrica do espaço-tempo mais trivial). Além disso, o intervalo de espaço-tempo, ds^2 , é negativo para satisfazer o comportamento do tempo próprio τ da partícula, $d\tau^2 = -ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Esse resultado está relacionado com a eq.(1.3) para $\eta_{\mu\nu}$ - métrica de Minkowski (vide seção 3.2).

Deste modo, podemos construir um vínculo de velocidade que generaliza a ideia de $d\tau^2 = -ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, sendo τ o tempo próprio. O pressuposto é obtido a partir do vetor tangente que parametrizado representa a quadri-velocidade, $u^\alpha = \frac{d\alpha}{d\tau}$, e via eq.(1.3) temos então [14]:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1, \quad (2.41)$$

logo

$$-\left(1 - \frac{2m^*}{r}\right) (u^t)^2 + \left(1 - \frac{2m^*}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 (u^\theta)^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta (u^\phi)^2 = -1, \quad (2.42)$$

onde $m^* = \frac{GM}{c^2}$ é a massa geométrica e $u^\alpha = \frac{d\alpha}{d\tau}$ com $\alpha = 0, 1, 2, 3$, sendo 0 a 3 igual a respectivamente (ct, r, θ, ϕ) .

Neste problema existe a conservação da energia e do momento angular, pois a métrica de Schwarzschild é independente do tempo e esféricamente simétrica. Nesse sentido, temos vetores de Killing associados, $\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ e $\eta^\alpha = (0, 0, 0, 1)$. Vimos que a presença deste objetos tensoriais implica em grandezas conservadas [46]:

- Energia conservada por unidade de massa em repouso

$$(E^*) = -\vec{\xi} \cdot \vec{u} = \left(1 - \frac{2m^*}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (2.43)$$

- Momento angular conservado por unidade de massa leva a órbita estar confinada a um plano ($\theta = \frac{\pi}{2}$, logo $\dot{\theta} = 0$.)

$$l = \vec{\eta} \cdot \vec{u} = (r^2 \text{sen}^2 \theta) \frac{d\phi}{d\tau}. \quad (2.44)$$

Com estas considerações substituídas na eq.(2.42), temos:

$$-\left(1 - \frac{2m^*}{r}\right)^{-1} (E^*)^2 + \left(1 - \frac{2m^*}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \frac{l^2}{r^4} = -1. \quad (2.45)$$

Trabalhando essa equação podemos encontrar a correção que existe em relação ao caso Newtoniano. O desenvolvimento a seguir possibilita a correspondência com a integral da energia da mecânica Newtoniana [14],

$$\frac{(E^*)^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m^*}{r}\right) \frac{l^2}{r^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m^*}{r}\right), \quad (2.46)$$

e rearranjando os termos

$$\underbrace{\frac{(E^*)^2}{2} - \frac{1}{2}}_E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2m^*}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - 1 \right]}_{V_{ef}(r)}, \quad (2.47)$$

assim, temos que

$$E - V_{ef}(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2. \quad (2.48)$$

Sabemos pela eq.(2.47) que o potencial efetivo para o movimento radial de partículas é expresso por [14]:

$$\begin{aligned} V_{ef}(r) &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2m^*}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) - 1 \right], \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{2m^*}{r} - \frac{2m^*l^2}{r^3} - 1\right), \\ V_{ef}(r) &= -\frac{GM}{c^2r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2r^3}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde $m^* = \frac{GM}{c^2}$.

Antecipando a correspondência com a energia Newtoniana usual precisamos definir E_{Newt} a partir de $(E^*) = \frac{mc^2 + E_{Newt}}{mc^2}$ [14]. Nesse sentido podemos encontrar [14]:

$$E_{Newt} = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMl^2}{c^2r^3m}. \quad (2.50)$$

Esse resultado apresenta a mesma forma para o caso da gravitação Newtoniana, mas apresenta a correção relativística dada pelo último termo, compare com a eq.(2.40) que não apresenta essa correção. Derivando o termo de correção obtemos:

$$F(r) = -\frac{3GMl^2}{c^2mr^4}, \quad (2.51)$$

onde $F(r)$ é a força perturbativa que responde pela precessão do periélio de acordo com a ref.[48] (vide seção 2.5).

Considerando o limite não relativístico, $(t, \tau) \rightarrow (ct, c\tau)$ que leva $l = \frac{r^2}{c} \frac{d\phi}{d\tau}$, podemos reescrever o potencial dado pela eq.(2.49) [14]:

$$V_{ef}(r) = -\frac{GM}{c^2r} + \frac{l^2}{2c^2r^2} - \frac{GMl^2}{c^4r^3}, \quad (2.52)$$

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{c^2} \left(-\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2r^3} \right). \quad (2.53)$$

Sabemos que $F = m\ddot{r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}$, temos:

$$m \frac{d^2r}{c^2dt^2} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{GM}{r^2} - \frac{l^2}{r^3} + 3\frac{GMl^2}{c^2r^4} \right), \quad (2.54)$$

consideramos $\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{l^2}{r^3} - 3\frac{GMl^2}{c^2r^4}$, onde fazemos $m = 1$ assim como foi feito para o caso da massa reduzida μ na eq.(2.24).

Como já referido esse resultado apresenta o fator de correção $-3\frac{GMl^2}{c^2r^4}$ em relação ao caso Newtoniano eq.(2.24). Justamente devido a presença deste termo podemos verificar a ocorrência do avanço do periélio que não é notado no caso clássico.

Podemos notar propriedades interessantes em relação ao potencial efetivo dado pela eq.(2.49) [14]:

$$V\left(\frac{2GM}{c^2}\right) = -\frac{GM}{c^2} \frac{c^2}{2GM} + \frac{l^2}{2r^2} \frac{c^4}{2^2(GM)^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3} \frac{c^6}{(2GM)^3}, \quad (2.55)$$

$$V\left(\frac{2GM}{c^2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{l^2 c^4}{2^3(GM)^2} - \frac{GMl^2 c^6}{c^2(2GM)^3} = -\frac{1}{2}, \quad (2.56)$$

e, também, para valores grandes de r o potencial se aproxima do potencial efeito newtoniano de movimento em um potencial $\frac{1}{r}$ [14]: $V(r)_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -\frac{GM}{c^2 r}$, onde $\frac{GM}{c^2} = m^*$. Mas para casos em que r diminui a contribuição do termo $\frac{1}{r^3}$, eq.(2.49), da RG torna-se cada vez mais importante.

É possível observar que haverá casos nos quais a partícula pode assumir uma órbita circular com r constante, isto pode acontecer quando o potencial é “flat”,

$$\frac{dV(r)}{dr} = 0, \quad (2.57)$$

em termos de m^* temos:

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{m^*}{r^2} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{3m^* l^2}{r^4} = 0. \quad (2.58)$$

Sendo assim, é possível encontrar r_{\min} e r_{\max} [14]:

$$r_{\min, \max} = \frac{l^2}{2m^*} \left(1 \pm \sqrt{1 - 12 \left(\frac{m^*}{l} \right)^2} \right). \quad (2.59)$$

Para $l = \sqrt{12}m^*$ temos $r = 6m^*$. Considerando a eq.(2.58), podemos achar r tanto para (i) a gravitação Newtoniana, $\frac{3m^* l^2}{r^4} = 0$, como (ii) a relativística para uma partícula “sem massa”. Sendo $r = \frac{l^2}{m^*}$ para (i) e $r = 3m^*$ para (ii) [47]. Deste modo, de acordo com a ref.[47], a solução de Schwarzschild possui órbitas circulares estáveis para $r > 6m^*$ e órbitas circulares instáveis para $3m^* < r < 6m^*$. É importante notar que estas são apenas as geodésicas, não há nada para parar uma partícula acelerada com r abaixo de $r = 3m^*$ e emergente, enquanto esta permanecer além de $r = 2m^*$ [47].

Levando em conta a eq.(2.48) podemos encontrar o avanço do periélio realizando algumas operações apresentadas na sequência com base na ref.[47].

$$2(E - V(r)) = \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2, \quad (2.60)$$

$$2E = \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + 2 \left(-\frac{GM}{c^2 r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3} \right). \quad (2.61)$$

Multiplicando a equação acima por $\frac{r^4}{l^2} = \left(\frac{d\tau}{d\phi}\right)^2$ encontramos:

$$2(E - V(r)) = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2, \quad (2.62)$$

$$2E\frac{r^4}{l^2} = \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + 2\left(-\frac{GM}{c^2 r} \frac{r^4}{l^2} + \frac{l^2}{2r^2} \frac{r^4}{l^2} - \frac{GMl^2}{c^2 r^3} \frac{r^4}{l^2}\right), \quad (2.63)$$

$$2E\frac{r^4}{l^2} = \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - \frac{2GM}{c^2} \frac{r^3}{l^2} + r^2 - \frac{2GM}{c^2} r. \quad (2.64)$$

Considerando $u = \frac{l^2}{m^* r}$ temos $dr = -\frac{m^* r^2}{l^2} du$, logo o último resultado é escrito como:

$$2E\frac{r^4}{l^2} = \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 \left(\frac{m^{*2} r^4}{l^4}\right) - \frac{2m^* r^3}{l^2} + r^2 - 2m^* r, \quad (2.65)$$

$$2E\frac{r^4}{l^2} \left(\frac{l^4}{m^{*2} r^4}\right) = \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - \frac{2m^* r^3}{l^2} \left(\frac{l^4}{m^{*2} r^4}\right) + r^2 \left(\frac{l^4}{m^{*2} r^4}\right) - 2m^* r \left(\frac{l^4}{m^{*2} r^4}\right), \quad (2.66)$$

$$2E \left(\frac{l^2}{m^{*2}}\right) = \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - \frac{2l^2}{m^* r} + \frac{l^4}{m^{*2} r^2} - 2\frac{l^4}{m^* r^3}, \quad (2.67)$$

$$2E \left(\frac{l^2}{m^{*2}}\right) = \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - 2u + u^2 - 2\frac{m^{*2} u^3}{l^2}, \quad (2.68)$$

derivando em relação à u

$$2\frac{d^2 u}{d\phi^2} - 2 + 2u - 3u^2 \left(2\frac{m^{*2}}{l^2}\right) = 0, \quad (2.69)$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} - 1 + u - 3u^2 \left(\frac{m^{*2}}{l^2}\right) = 0, \quad (2.70)$$

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} - 1 + u = 3u^2 \left(\frac{m^{*2}}{l^2}\right). \quad (2.71)$$

Sabendo que $u = u_0 + u_1$ podemos trabalhar a expressão acima:

- $\frac{d^2 u_0}{d\phi^2} - 1 + u_0 = 0$

$$\frac{d^2 u_0}{d\phi^2} + u_0 = 1, \quad u_0 = 1 + \epsilon \cos\phi \quad (2.72)$$

- $\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = 3 \left(\frac{m^{*2}}{l^2}\right) (1 + \epsilon \cos\phi)^2$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 &= 3 \left(\frac{m^{*2}}{l^2}\right) (1 + 2\epsilon \cos\phi + \epsilon^2 \cos^2\phi), \quad \cos^2\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi \\ \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 &= 3 \left(\frac{m^{*2}}{l^2}\right) \left(\left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right) + 2\epsilon \cos\phi + \frac{\epsilon^2}{2} \cos 2\phi \right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Sendo assim, sabemos que as soluções particulares vão depender de $\bar{\alpha} = 3 \left(\frac{m^{*2}}{l^2} \right)$:

$$u_1 = \bar{\alpha}A + \bar{\alpha}B\phi\text{sen}\phi + \bar{\alpha}C(D\cos 2\phi + E\text{sen} 2\phi), \quad (2.74)$$

onde A, B, C, D e E são coeficientes a serem determinados. Deste modo, substituindo a solução particular para u_1 no lado esquerdo da eq.(2.73) podemos por comparação, com o lado direito, encontrar os coeficientes envolvidos: $A = \left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right)$; $B = \epsilon$; $CD = -\frac{\epsilon^2}{6}$ e $CE = 0$. Então:

$$u_1 = 3 \left(\frac{m^{*2}}{l^2} \right) \left(\left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right) + \epsilon\phi\text{sen}\phi - \frac{\epsilon^2}{6}\cos 2\phi \right), \quad (2.75)$$

portanto,

$$u = u_0 + u_1, \quad (2.76)$$

$$= 1 + \epsilon\cos\phi + 3 \left(\frac{m^{*2}}{l^2} \right) \left(\left(1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right) + \epsilon\phi\text{sen}\phi - \frac{\epsilon^2}{6}\cos 2\phi \right), \quad (2.77)$$

$$= 1 + \epsilon\cos\phi + 3 \left(\frac{m^{*2}}{l^2} \right) \epsilon\phi\text{sen}\phi, \quad (2.78)$$

$$u = 1 + \epsilon\cos[(1 - \bar{\alpha})\phi], \quad (2.79)$$

sendo que

$$\cos[(1 - \bar{\alpha})\phi] = \cos\phi + \bar{\alpha} \frac{d}{d\bar{\alpha}} \cos[(1 - \bar{\alpha})\phi]_{\bar{\alpha}=0}, \quad (2.80)$$

$$\cos[(1 - \bar{\alpha})\phi] = \cos\phi + \bar{\alpha}\phi\text{sen}\phi. \quad (2.81)$$

Nesse sentido, sabemos que $(1 - \bar{\alpha})\phi = 2\pi$, logo:

$$\phi = \frac{2\pi}{1 - \bar{\alpha}} \approx 2\pi(1 + \bar{\alpha}), \quad (2.82)$$

isso porque $|\bar{\alpha}| \ll 1$ logo $|\frac{m^{*2}}{l^2}| \ll \frac{1}{3}$. Esse resultado, eq.(2.82), revela que a órbita do planeta não é fechada, devido ao termo $\Delta\phi = 2\pi\bar{\alpha}$ que indica a precessão do periélio, vide a fig.(2.7) para maior compreensão do fenômeno. De acordo com essa figura podemos ver uma ilustração para a órbita de Mercúrio, note que para uma órbita fechada os pontos para periélio, (e.g., $P1, P2$ e $P3$), e afélio ($A1, A2$ e $A3$) deveriam ser constantes do tempo. Mas como podemos ver pelo exemplo da fig.(2.7) esses pontos avançam de posição. Vamos mostrar que a medida de, aproximadamente, 43 segundos de arco por século descreve esse avanço para o periélio do planeta Mercúrio.

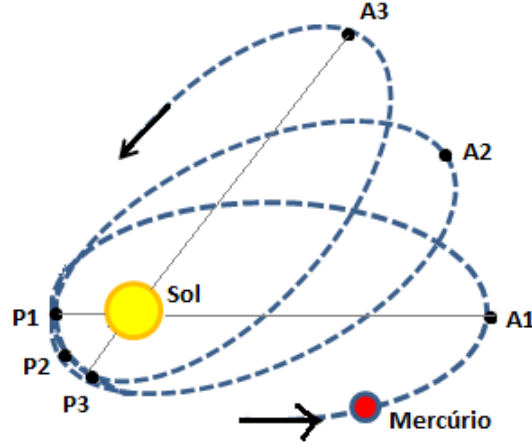


Figura 2.7: Precessão do Periélio [14].

Feito o esclarecimento para a ocorrência da precessão do periélio, podemos melhorar o resultado:

$$\delta\phi = 2\pi\bar{\alpha} = 6\pi\frac{m^{*2}}{l^2}. \quad (2.83)$$

Lembrando que $u = \frac{l^2}{m^*r}$ e r é dado pela eq.(2.6) temos:

$$l^2 = um^*r = (1 + \epsilon\cos\phi)m^*r = (1 + \epsilon\cos\phi)m^*\frac{(1 - \epsilon^2)a}{(1 + \epsilon\cos\phi)}. \quad (2.84)$$

Assim a eq.(2.83) pode ser reescrita levando ao resultado conhecido para a precessão do periélio:

$$\begin{aligned} \delta\phi &= 6\pi\frac{m^{*2}}{l^2}, \\ &= 6\pi\frac{m^{*2}}{(1 + \epsilon\cos\phi)m^*} \frac{(1 + \epsilon\cos\phi)}{(1 - \epsilon^2)a}, \\ &= 6\pi\frac{m^*}{(1 - \epsilon^2)a}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a (1 - \epsilon^2)}, \quad (2.85)$$

sendo (G) a constante gravitacional universal, (M) a massa da estrela, (c) a velocidade da luz, (a) o semi-eixo maior do planeta e (ϵ) a excentricidade.

Levando em consideração o movimento kepleriano mínimo $\eta = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \frac{2\pi}{T}$ [16], sendo T o período de revolução do planeta, temos $GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, então:

$$\delta\phi = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - \epsilon^2)}, \quad (2.86)$$

que é uma expressão alternativa do desvio do periélio em função dos períodos.

Concluída essa etapa, considerando os parâmetros revelantes para o movimento de Mercúrio ao redor do Sol, sendo eles [47]: $\frac{GM}{c^2} = 1.48 \times 10^5 \text{cm}$; $a = 5.79 \times 10^{12} \text{cm}$; $\epsilon = 0.2056$; $c = 3.00 \times 10^{10} \text{cm/sec}$ e período orbital de 88 dias. Temos para a eq.(2.85) $\Delta\phi_{Merc} = 43.0''/\text{sec}$.

2.5 Vetor de Laplace-Runge-Lenz e avanço do Periélio

Podemos encontrar a precessão do periélio de Mercúrio a partir do vetor do Laplace-Runge-Lenz, \vec{A} . Esse vetor encontra-se no plano da órbita elíptica e aponta na direção do periélio. Para o caso da órbita de Kepler temos [48]:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - \mu k \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.87)$$

sendo \vec{p} o momento linear, \vec{L} o momento angular, μ a massa reduzida e $k = GMm$.

O vetor \vec{A} será conservado quando não existe presença de forças perturbativas, logo a órbita é fechada. Todavia \vec{A} não é constante na presença dessas forças e portanto existe tendência à precessão do periélio [48]. Sabemos que a velocidade angular de \vec{A} é dada por [48]:

$$\vec{\omega} = \hat{a} \times \frac{\dot{\vec{A}}}{|\vec{A}|}, \quad (2.88)$$

tal que \hat{a} é um vetor unitário na direção de \vec{A} .

Deste modo, precisamos de $\dot{\vec{A}}$ e $|\vec{A}|$ sendo eles:

$$\frac{\dot{\vec{A}}}{\mu} = 2(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{F} - (\vec{r} \cdot \vec{F})\dot{\vec{r}}, \quad (2.89)$$

e também,

$$|\vec{A}| = \mu k \epsilon. \quad (2.90)$$

A força presente na derivada de \vec{A} terá apenas componente radial se a órbita do planeta for circular e coplanar a órbita de Mercúrio, $\vec{F} = F_r \hat{r}$, temos também $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi}$. Substituindo essas considerações em eq.(2.89), podemos obter:

$$\dot{\vec{A}} = \mu[2\dot{r}F_r\vec{r} - r\dot{r}F_r\hat{r} - rF_r(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi})], \quad (2.91)$$

$$= \mu[2\dot{r}F_r\vec{r} - 2r\dot{r}F_r\hat{r} - r^2F_r\dot{\phi}\hat{\phi}], \quad (2.92)$$

$$\dot{\vec{A}} = -\mu r^2 F_r \dot{\phi} \hat{\phi}. \quad (2.93)$$

Substituindo o resultado da eq.(2.91) e da eq.(2.90) em ω encontramos:

$$\vec{\omega} = -\frac{\mu r^2 F_r \dot{\phi}}{\mu k \epsilon} (\hat{a} \times \hat{\phi}), \quad (2.94)$$

$$\vec{\omega} = -\frac{r^2 F_r \dot{\phi}}{k \epsilon} \cos \phi \hat{z}'. \quad (2.95)$$

De acordo com a ref.[48] podemos obter a precessão do periélio calculando o ângulo de rotação de \vec{A} para uma revolução do Mercúrio:

$$\delta \phi = \int_0^\tau \omega d\tau. \quad (2.96)$$

Para obtermos a precessão, temos que considerar a força perturbativa oriunda da construção relativística, sendo esta a correção existente para o caso clássico. A força em questão já foi determinada, dada pela eq.(2.51) podemos trabalhar a eq.(2.96), considerando $l^2 = \mu k a(1 - \epsilon^2)$ para $\mu \approx m$ [14, 47, 48] e eq.(2.6):

$$\delta \phi = \frac{3GM}{\epsilon c^2 a(1 - \epsilon^2)} \int_0^{2\pi} (1 + \epsilon \cos \phi)^2 \frac{d\phi}{d\tau} d\tau, \quad (2.97)$$

$$= \lambda \left(\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi + 2\epsilon \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi + \epsilon^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \cos \phi d\phi \right), \quad (2.98)$$

$$= \lambda \left(0 + 2\epsilon \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi \right) d\phi + \epsilon^2 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \phi) \cos \phi d\phi \right), \quad (2.99)$$

$$= \lambda \left(0 + 2\epsilon \frac{2\pi}{2} + 0 + 0 \right), \quad (2.100)$$

$$= \lambda 2\epsilon \pi, \quad (2.101)$$

logo, sendo $\lambda = \frac{3GM}{\epsilon c^2 a(1 - \epsilon^2)}$ obtemos:

$$\delta \phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - \epsilon^2)}. \quad (2.102)$$

Como podemos notar o resultado encontrado é compatível a eq.(2.85), que corresponde a precessão do periélio de Mercúrio.

Capítulo 3

Aproximação PPN e NNA

Uma breve apresentação acerca da aproximação PPN para situar o leitor será feita, apenas a título de curiosidade, visto que se trata de uma ferramenta usada para explicar a precessão do periélio de Mercúrio [16]. Nosso objetivo é esclarecer sobre uma outra ferramenta disponível para a descrição de movimentos lentos no espaço-tempo curvo, a aproximação quase Newtoniana (NNA - Nearly Newtonian Approximation) que será usada no presente trabalho.

3.1 PPN - formalismo pós-newtoniano parametrizado

Sabemos que objetos no sistema Solar estão sob gravidade fraca, $|\Phi| = |\text{Potencial Newtoniano}| \leq 10^{-6}$ e que a matéria que gera a gravidade do sistema Solar move-se lentamente, $v^2 \leq 10^{-7}$, tendo tensão e energia interna respectivamente a $|T_{jk}|/\rho_0 \leq 10^{-6}$ e $\pi = \frac{(\rho-v)}{\rho_0} \leq 10^{-6}$ [49]. Por consequência, a análise de experimentos do sistema Solar usando qualquer teoria métrica da gravidade¹ pode ser simplificada, assegurando grau de precisão, por uma expansão simultânea nestes parâmetros.

A expansão para movimento lento e campo fraco leva a um espaço-tempo plano e vazio, ao tratamento newtoniano do sistema Solar em “primeira ordem” e correções pós-newtonianas no tratamento newtoniano para “segunda ordem”. O formalismo da teoria Newtoniana somado as correções pós-newtonianas é conhecido por “aproximação pós-newtoniana”. Vale notar que

¹O espaço-tempo tem uma métrica e tal métrica satisfaz o princípio da equivalência. Teorias da gravidade que respeitam esses pontos são chamadas de teorias métricas [49]

cada teoria métrica tem sua própria aproximação pós-newtoniana, e mesmo apesar das grandes discrepâncias entre essas teorias, suas aproximações pós-newtonianas são semelhantes.

Tamanha a semelhança que é possível construir uma única teoria pós-newtoniana da gravidade. Essa teoria inclusiva é rotulada por “PPN” para o formalismo pós-newtoniano parametrizado. Nessa teoria temos um conjunto de parâmetros, parâmetros PPN, que podem ser especificados de modo arbitrário. Um dado conjunto de valores para estes parâmetros permite que o formalismo do PPN seja idêntico ao limite pós-newtoniano da RG, outro conjunto torna-o como o limite pós-newtoniano da teoria de Dicke-Brans-Jordan [49].

A versão do PPN concebida por Clifford e Kenneth contém dez parâmetros PPN, descritos heurísticamente, vamos citá-los a seguir [49]:

1. γ (quanta curvatura do espaço g_{jk} é produzida por unidade de massa de repouso?);
2. β (quanta não linearidade há na lei de superposição para a gravidade g_{00} ?);
3. β_1 (quanta gravidade g_{00} é produzida por unidade de energia cinética $\frac{1}{2}\rho_0 v^2$?);
4. β_2 (quanta gravidade g_{00} é produzida por unidade de energia potencial gravitacional $\rho_0 U$?);
5. β_3 (quanta gravidade g_{00} é produzida por unidade de energia interna $\rho_0 \pi$?);
6. β_4 (quanta gravidade g_{00} é produzida por unidade de pressão p ?);
7. ξ (quanto mais gravidade g_{00} é produzida pela energia cinética radial, ou seja, energia cinética do observador do que pela energia cinética transversal?);
8. η (quanto mais gravidade g_{00} é produzida pela tensão radial do que por tensão transversal?);
9. Δ_1 (quanto arrasto de referenciais inerciais g_{0j} são produzidos por unidade de momento $\rho_0 v$);
10. Δ_2 (quão mais fácil é para o momento $\rho_0 v$ arrastar os referenciais inerciais radialmente, em direção ao observador, do que na direção transversal?).

Na década de 1970 chegou-se a afirmar que a aproximação pós-newtoniana era suficiente, mas já na época o caso de ondas gravitacionais propagando-se no sistema Solar de fontes distantes eram ignoradas por todas as aproximações pós-newtonianas e pela estrutura PPN [49]. Isto é, a expansão PPN não é uniformemente válida para grandes distâncias [50]. Ademais, baseia-se na

suposição de campo fraco produzido por fontes que se movem com velocidades pequenas em relação a velocidade da luz, entretanto ao redor e dentro de um pulsar² o campo gravitacional é forte o que contradiz a suposição de campo fraco, pois para lidar com campos fortes, deve-se aumentar o número de parâmetros. PPN não leva em consideração a topologia (forma) do problema, já a NNA resgata essa ideia. Deste modo, o conceito de movimento lento não está entrelaçado com a gênese de um campo gravitacional fraco. Sabemos que o movimento das estrelas perto de buracos negros, observados nos núcleos de algumas galáxias revelam velocidades pequenas, com velocidades de algumas centenas de quilômetros por segundo [50].

Por fim, podemos ver que a análise para aplicar o PPN é delicada posto os fatos sobre a quantidade de parâmetros envolvidos e a incompatibilidade quanto ao estudo para o movimento lento. Sendo assim, optamos por fazer uso da NNA, por ser uma possibilidade para simplificar o problema para a análise da RG no regime de movimento lento, que será tratada na próxima seção.

3.2 NNA - Aproximação quase newtoniana

Trata-se de uma aproximação já esclarecida por Thorne, Misner e Wheeler (1973, pp. 412-416), que permite encontrar situações de campo quase Newtoniano [51]. Sabemos que o campo da RG engloba desde os campos fracos observados na teoria Newtoniana, bem como os campos fortes devidos às quantidades relativísticas. Sabemos que nesse intervá-lo é possível encontrar um campo com intensidade mediana, a esse chamamos de campo quase Newtoniano. Para melhor entender a aproximação quase Newtoniana precisamos depreender alguns detalhes.

Infeld e Plebanski mostraram que ao contrário da teoria Newtoniana as equações de campo e movimento estão correlacionadas, as equações de campo de Einstein levam às equações de movimento [50]. Revelaram, também, que existe relação entre as equações de movimento e de campo com respectivamente a geodésica,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (3.1)$$

²Estrelas de Nêutrons frequentemente estão girando rapidamente e apresentam campo gravitacional forte. Essa combinação da origem aos pulsares, que aceleram partículas em jatos emitidos dos pólos magnéticos, originados à medida que a estrela de Nêutron gira [47]

e a equação do desvio geodésico [52],

$$\frac{D^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} + R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \frac{dx^\lambda}{d\tau} \xi^\gamma \frac{dx^\delta}{d\tau} = 0. \quad (3.2)$$

Nesse sentido, pensando em obter o limite de correspondência da RG com a gravitação de Newton é sabido que precisamos recuperar os postulados de movimento e de campo [7]. Para impor o limite Newtoniano da RG consideramos o movimento lento e campo fraco tanto para a equação da geodésica como para a equação do desvio geodésico. Assim, respectivamente, restauramos a equação de movimento de Newton, quebrando a covariância generalizada, e a equação de campo de Poisson, quebrando a não-linearidade das equações de Einstein.

Todavia, ao realizar essa aproximação estamos linearizando a teoria da gravitação de Einstein que é uma teoria não-linear. O pressuposto rompe com o campo de atuação da teoria, visto que é graças a essa não-linearidade que muitos fenômenos não observados pela teoria da gravitação Newtoniana, uma teoria linear, foram naturalmente previstos.

O limite quase Newtoniano é uma solução para evitar a quebra da não-linearidade da teoria da gravitação de Einstein para obter resultados no regime de movimento lento. O limite em questão é aplicação incompleta do limite Newtoniano. Aplica-se as considerações do limite Newtoniano apenas para a equação da geodésica, tornando o campo suavizado, pois a conexão é linear na geodésica e quadrática nas equações de Einstein [7]. Deste modo, para uma partícula sob movimento lento ($v \ll c$) em uma geodésica tipo tempo com $x^\mu = x^\mu(\tau)$ temos:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (3.3)$$

Parametrizando a eq.(3.3) para a coordenada $x^4 = -ct$ podemos obter os desenvolvimentos a seguir conforme as ref.[7, 53]:

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} + \Gamma_{44}^i \frac{dx^4}{cdt} \frac{dx^4}{cdt} + \Gamma_{4k}^i \frac{dx^4}{cdt} \frac{dx^k}{cdt} + \Gamma_{j\nu}^i \frac{dx^j}{cdt} \frac{dx^\nu}{cdt} = 0. \quad (3.4)$$

Devido ao campo fraco e baixa velocidade apenas os dois primeiros termos na eq.(3.4) são considerados:

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} \simeq -\Gamma_{44}^i. \quad (3.5)$$

Precisamos obter a componente do símbolo de Christoffel, Γ_{44}^i . Vimos o comportamento desse objeto na seção 1.3 dado pela eq.(1.6), todavia sob condição de campo gravitacional fraco o tensor métrico assume, com dependência da métrica de Minkowski ($\eta_{\mu\nu}$, com assinatura $(+ + + -)$)

adicionada a um termo pequeno tal que $\delta h_{\mu\nu}^2 \ll \delta h_{\mu\nu}$, a seguinte forma para as componentes covariante e contravariante respectivamente:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu} + O(\delta h_{\mu\nu}^2) \quad (3.6)$$

e, também,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \delta h^{\mu\nu} + O(\delta h_{\mu\nu}^2). \quad (3.7)$$

Nesse sentido, a eq.(1.6) do símbolo de Christoffel pode ser escrita como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\sigma}(\partial_\nu\delta h_{\mu\sigma} + \partial_\mu\delta h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma\delta h_{\mu\nu}) + O(\delta h_{\mu\nu}^2). \quad (3.8)$$

Assim para Γ_{44}^i , uma vez que $\delta h_{\mu\nu}^2 \ll \delta h_{\mu\nu}$, temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{44}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(\partial_4\delta h_{4\sigma} + \partial_4\delta h_{4\sigma} - \partial_\sigma\delta h_{44}) + O(\delta h_{\mu\nu}^2), \\ \Gamma_{44}^i &= \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(2\partial_4\delta h_{4\sigma} - \partial_\sigma\delta h_{44}), \\ \Gamma_{44}^i &= \frac{1}{2}(2\partial_4\delta h_{4i} - \partial_i\delta h_{44}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

O termo $\partial_4\delta h_{4i}$ é igual a zero por se tratar de um campo quase Newtoniano estático, por isso o comportamento para Γ_{44}^i é:

$$\Gamma_{44}^i \simeq -\frac{1}{2}(\partial_i\delta h_{44}). \quad (3.10)$$

Substituindo na eq.(3.5) vamos obter:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq \frac{1}{2}c^2(\partial_i\delta h_{44}). \quad (3.11)$$

Já que a geodésica não se trata de um postulado, mas é advinda das equações de Einstein, na recuperação do postulado de movimento temos a equação de movimento quase Newtoniana com um potencial escalar:

$$\frac{d^2x^a}{dt^2} \stackrel{def}{=} -\partial_a\Phi_{qN} = -\frac{\partial\Phi_{qN}}{\partial x^a}, \quad (3.12)$$

sendo Φ_{qN} o potencial quase Newtoniano.

Na sequência, buscamos esclarecer que a abordagem do movimento lento para um campo gravitacional arbitrário é satisfeita se considerarmos a partícula sob movimento lento e continuamente em queda livre. Sendo assim, sabemos que o campo gravitacional assume incrementos de forma a recuperar a força do campo devido a tal adição, tal que:

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu} + (\delta h_{\mu\nu})^2 + \dots \quad (3.13)$$

Deste modo, temos agora apenas a hipótese de baixa velocidade, pois o campo gradativamente é mais forte. O pressuposto nos permite somar todas as perturbações do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, desde $\delta h_{44} = 0$ até um valor finito $\delta h_{\mu\nu}$. Para encontrarmos o comportamento do Φ_{qN} igualamos os termos do lado direito das eq.(3.11) e eq.(3.12),

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\Phi_{qN}}{\partial x^a} &= \frac{1}{2}c^2\frac{\partial\delta h_{44}}{\partial x^i}, \\ -\frac{d(\Phi_{qN})}{dx^a} &= \frac{1}{2}c^2\frac{d(\delta h_{44})}{dx^a}, \\ d\Phi_{qN} &= -\frac{1}{2}c^2d\delta h_{44}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

então integrando de 0 à δh_{44} :

$$\Phi_{qN} = -\frac{1}{2}c^2 \int_0^{\delta h_{44}} d(\delta h_{44}) = -\frac{1}{2}c^2\delta h_{44}. \quad (3.15)$$

Agora precisamos recuperar δh_{44} , lembrando da eq.(3.13) podemos escrever:

$$g_{44} \approx \eta_{44} + \delta h_{44}. \quad (3.16)$$

Precisamos entender melhor o tensor métrico de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ para continuar. Para um espaço pseudo-euclideano, espaço-tempo de Minkowski, as coordenadas Cartesianas são $(x, y, z$ e $ct)$, e o sistema de coordenadas de Minkowski é dado por: $(x^\alpha) = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, e ct)$. O quadrado do elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski para a assinatura da métrica $(-, -, -, +)$, é $ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$ e, para $(+, +, +, -)$, é $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$. Note que na assinatura da métrica apenas a coordenada t apresenta sinal oposto as demais. A matriz formada por $\eta_{\mu\nu}$ em um espaço de quatro dimensões, para $c = 1$, é dada por [13]:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

com a assinatura: $(+, +, +, -)$.

Nesse sentido, fica mais claro porque $\eta_{44} = -1$, por isso a eq.(3.16) permite obter δh_{44} :

$$g_{44} \approx -1 + \delta h_{44}, \quad (3.18)$$

$$\delta h_{44} \approx 1 + g_{44}. \quad (3.19)$$

Substituindo o resultado na eq.(3.15) temos o potencial quase Newtoniano:

$$\Phi_{qN} = -\frac{1}{2}c^2(1 + g_{44}). \quad (3.20)$$

Não alteramos a equação do desvio geodésico o caráter não-linear da teoria de Einstein é preservado. Pois o potencial gerado, potencial quase Newtoniano Φ_{qN} , guarda a presença completa da componente g_{44} da métrica, visto que quaisquer sistemas dinâmicos propagam seus efeitos não-lineares exercendo efeitos qualitativos sobre suas soluções [50]. Esse potencial escalar, Φ_{qN} , representa um potencial intermediário, posto que a soma dos termos perturbativos com a métrica ocorre em apenas uma componente da métrica, $g_{tt} = g_{44}$, o que não o torna tão forte como o da RG e nem um potencial fraco como o potencial Newtoniano, pois o limite está incompleto [7, 50].

Sendo assim, vamos aplicar o uso do NNA da RG para a métrica de Weyl e métrica de Zipoy para estudar o regime lento na RG sob um campo gravitacional arbitrário para melhor respeitar a Física de grande número de eventos astrofísicos. O procedimento quanto ao uso do NNA, em resumo, diz respeito ao uso da equação da geodésica já que trata-se do limite Newtoniano incompleto. A propósito, vale esclarecer que não faremos uso do Φ_{qN} no presente trabalho. Contudo vamos trabalhar com a equação da órbita para obter a equação do desvio do periélio de corpos massivos sujeitos a tais métricas e realizar no estudo teórico com base nos resultados obtidos.

Capítulo 4

Aplicações - métrica de Weyl

Sabemos que de modo geral, a escala do sistema Solar tem sido considerada como um dos principais laboratórios para testar modelos gravitacionais. Por certo que muitos dos problemas nesta escala estão longe de ser uma solução definitiva e tantos outros requerem uma melhoria na precisão. Sob esse prisma é compreensível a preocupação que teoria e observação têm em relação ao desenvolvimento de modelos com maior precisão. O fato é que assim como o teste sobre a precessão do periélio de Mercúrio contribuiu para a validação e confiabilidade da teoria de Einstein, novamente testes sobre a determinação do periélio que incluem efeitos relativísticos podem ser úteis para a produção de modelos confiáveis. Vamos nos dedicar a tal estudo com base na métrica de Weyl, levando em conta a aproximação quase Newtoniana - NNA - da RG, pois mantemos intacta a equação do desvio geodésico. Vale lembrar que nessa aproximação, NNA, o campo gravitacional pode ser suavizado pois faz-se apenas o uso da equação da geodésica que apresenta a conexão métrica linear e no caso das equações de Einstein tal objeto é quadrático.

4.1 Precessão do periastro de exoplanetas - métrica de Weyl

A expansiva descoberta de exoplanetas, planetas fora do nosso sistema Solar, nos possibilita um novo laboratório para testar efeitos relativísticos. Portanto, gera desafios para os campos teóricos e observacionais da astronomia e da astrofísica. A importância desse estudo está no fato de que a compreensão dos sistemas estrela-planeta e suas dinâmicas permitem entender a

gravidade em uma escala do sistema Solar e por corolário, a formação de sistemas planetários, por exemplo.

Pensando nisso, resolvemos avaliar o uso da aproximação NNA da RG para obtenção do avanço do periastro de 34 exoplanetas com diferentes excentricidades a fim de aumentar a precisão das previsões dos parâmetros orbitais. Esse estudo é uma aplicação do modelo NNA visto no capítulo anterior. A vantagem é que ao contrário dos parâmetros usuais de PPN o modelo NNA levou-nos a usar apenas um parâmetro, β_0 , sendo este dependente apenas da excentricidade. Com base no estudo a ser desenvolvido será possível notar que a precessão relativística do periélio é um fenômeno não trivial, pois observamos que o modelo é sensível à variação do semi-eixo maior e dos períodos orbitais.

A aproximação NNA faz parte da própria RG. Destacamos, também, que no nosso estudo não consideramos como fonte de precessão a perturbação pela presença de outros planetas e nem mesmo o efeito de maré. Isso porque, nossa pretensão é o enfoque quanto a contribuição relativística para a precessão. Sendo assim, vamos considerar os resultados da ref.[16] para nosso estudo. Nessa referência o estudo é feito com base na métrica de Weyl,

$$ds^2 = e^{2(\lambda-\sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\theta^2 + e^{2(\lambda-\sigma)} dz^2 - e^{2\sigma} dt^2, \quad (4.1)$$

sendo $\lambda = \lambda(r, z)$ e $\sigma = \sigma(r, z)$ os potenciais de Weyl. Deste modo, as equações de Einstein para o vácuo são obtidas:

$$-\lambda, r + r\sigma^2, r - r\sigma^2, z = 0, \quad (4.2)$$

$$\sigma, r + r\sigma, rr + r\sigma, zz = 0, \quad (4.3)$$

$$2r\sigma, r\sigma, z = \lambda, z \quad (4.4)$$

onde $(, r$ e $, z)$ e $(, rr$ e $, zz)$ são derivadas de primeira e segunda ordem respectivamente.

Para resolver esse sistema não-linear foi considerado reduzir a simetria de cilindro de Weyl à sua base circular de forma a simular a órbita de uma partícula teste. O pressuposto ocorre quando a altura do cilindro é muito menor que o raio da base, $h_0 \ll R_0$, levando a obter uma condição de linha fina. Em seguida, é tomado a expansão de Taylor até a segunda ordem dos potenciais de Weyl, isso porque as ordens superiores sujeitas a condição de linha fina podem ser desprezadas, podendo serem escritos como:

$$\sigma(r, z) = A(r) + a(r)z + c(r)z^2, \quad (4.5)$$

e

$$\lambda(r, z) = B(r) + b(r)z + d(r)z^2, \quad (4.6)$$

tal que $A(r) = \sigma(r, 0)$, $B(r) = \lambda(r, 0)$ e os coeficientes de expansão que acompanham z tornam-se constantes.

Na sequência, é tomado a equação da geodésica do problema para obter a equação da órbita da partícula teste. O procedimento leva em conta a solução conformastática, isto é, o coeficiente λ é ajustado para zero [16, 44, 50, 54]. Uma mudança de variável $u = \frac{1}{r}$, também, é feita e logo obtem-se:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = e^{-2\sigma} (\alpha_0 + \beta_0 e^{-2\sigma}), \quad (4.7)$$

com α_0 e β_0 sendo constantes de integração. Com essa eq.(4.7) podemos obter a equação do desvio do periélio pelo método de Harko [1] que consiste em obter uma força,

$$F(u) = \frac{1}{2} \frac{dG(u)}{du}, \quad (4.8)$$

que depende da equação da órbita, pois

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = e^{-2\sigma} (\alpha_0 + \beta_0 e^{-2\sigma}) = G(u). \quad (4.9)$$

Continuando temos $\sigma(r, z)|_{z=0} = \frac{k_0}{2} \ln r - \frac{C_0 r^2}{2}$ para a segunda ordem de aproximação, a obtenção desse potencial está ligada as equações de campo de Einstein. Reescrevendo $\sigma(r, 0)$ temos:

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \frac{k_0}{2} \ln r - \frac{C_0 r^2}{2}, \\ \sigma(u) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{k_0}{2} \ln(u) + C_0 u^{-2} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nesse sentido, $G(u)$ precisa, também, ser reescrito:

$$\begin{aligned} G(u) &= e^{k_0 \ln(u) + C_0 u^{-2}} \alpha_0 + \beta_0 e^{2k_0 \ln(u) + 2C_0 u^{-2}}, \\ G(u) &= u^{k_0} \alpha_0 + \beta_0 u^{2k_0} + \alpha_0 e^{C_0 u^{-2}} + \beta_0 e^{2C_0 u^{-2}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Feito tais esclarecimentos derivamos $G(u)$ e obtemos $F(u)$:

$$F(u) = \frac{1}{2} \left(\alpha_0 k_0 u^{k_0-1} + 2k_0 \beta_0 u^{2k_0-1} + \alpha_0 C_0 (k_0 - 2) u^{k_0-3} + 4\beta_0 C_0 (k_0 - 1) u^{2k_0-3} \right). \quad (4.12)$$

De acordo com a ref.[16] $k_0 = 2$ reproduz o correto decaimento da lei para uma possível correção em relação a solução pós-newtoniana padrão da RG. Fazendo a substituição de k_0 encontramos

a força

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2} (2\alpha_0 u + 4\beta_0 u^3 + 4\beta_0 C_0 u), \\ F(u) &= \frac{1}{2} ((2\alpha_0 + 4\beta_0 C_0)u + 4\beta_0 u^3), \end{aligned} \quad (4.13)$$

sendo C_0 uma constante que surge da expansão de Taylor para a segunda ordem da solução para σ .

O próximo passo vem da análise sobre o desvio, $\delta = u - u_0$, para uma órbita circular quando $u = u_0$, sendo dada pela raiz da equação $u_0 = F(u_0)$ [1]. Sendo assim, fazendo $u = \delta + u_0$ na equação a seguir

$$\begin{aligned} 2\frac{d^2 u}{d\theta^2} + 2u &= \frac{dG(u)}{du}, \\ \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= \frac{1}{2} \frac{dG(u)}{du} = F(u), \end{aligned} \quad (4.14)$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\delta + u_0)}{d\theta^2} + (\delta + u_0) &= F(\delta + u_0), \\ \frac{d^2\delta}{d\theta^2} + \frac{d^2(u_0)}{d\theta^2} + (\delta + u_0) &= F(\delta + u_0). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Fazendo uma expansão de Taylor para o termo a direita da eq.(4.15) em função do desvio, δ , temos:

$$F(\delta + u_0) = F(u_0) + \frac{dF}{du}|_{u=u_0}\delta + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{du^2}|_{u=u_0}\delta^2 + \dots \quad (4.16)$$

Substituindo a eq.(4.16) na eq.(4.15), lembrando que $u_0 = F(u_0)$ e reunindo os termos de segunda ordem como a seguir

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2} + \frac{d^2(u_0)}{d\theta^2} + \delta + u_0 = F(u_0) + \frac{dF}{du}|_{u=u_0}\delta + \frac{1}{2} \frac{d^2 F}{du^2}|_{u=u_0}\delta^2 + \dots, \quad (4.17)$$

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2} + \delta + u_0 - F(u_0) - \frac{dF}{du}|_{u=u_0}\delta = O(\delta^2), \quad (4.18)$$

obtemos a equação que todo desvio de uma órbita circular deve satisfazer:

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{dF}{du}|_{u=u_0}\right)\delta + O(\delta^2) = 0. \quad (4.19)$$

Temos então uma equação diferencial de segunda ordem, eq.(4.19). Podemos escrevê-la como:

$$\begin{aligned} \delta^2 + \left(1 - \frac{dF}{du}|_{u=u_0}\right)\delta &= 0, \\ \delta &= \pm i \sqrt{\left(1 - \frac{dF}{du}|_{u=u_0}\right)}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

tal que $\mu = \sqrt{\left(1 - \frac{dF}{du}\bigg|_{u=u_0}\right)}$. Sabemos que a solução para esse tipo de equação é dada por

$$\begin{aligned}\delta &= C_1 e^{i\mu\theta} + C_2 e^{-i\mu\theta}, \\ &= C_1(\cos(\mu\theta) + i\text{sen}(\mu\theta)) + C_2(\cos(\mu\theta) - i\text{sen}(\mu\theta)), \\ &= (C_1 + C_2)\cos(\mu\theta) + i(C_1 - C_2)\text{sen}(\mu\theta), \\ \delta &= A\cos(\mu\theta) + B\text{sen}(\mu\theta),\end{aligned}\tag{4.21}$$

permitindo escrever a solução em termos da função cosseno [1]:

$$\delta = \delta_0 \cos\left(\sqrt{\left(1 - \frac{dF}{du}\bigg|_{u=u_0}\right)}\theta + \lambda\right),$$

onde δ_0 e λ são constantes de integração. Sabemos que os ângulos para o periélio da órbita são aqueles para os quais r é mínimo e u ou δ é máximo, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta_0} &= \cos\left(\sqrt{\left(1 - \frac{dF}{du}\bigg|_{u=u_0}\right)}\theta + \lambda\right), \\ \theta &= \frac{\cos^{-1}\frac{\delta}{\delta_0} - \lambda}{\sqrt{\left(1 - \frac{dF}{du}\bigg|_{u=u_0}\right)}}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Para uma volta completa podemos escrever a eq.(4.22) como:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{2\pi}{\sqrt{\left(1 - \frac{dF}{du}\bigg|_{u=u_0}\right)}}, \\ \theta &= \frac{2\pi}{1 - \rho},\end{aligned}\tag{4.23}$$

com $\rho = 1 - \sqrt{1 - \frac{dF}{du}\bigg|_{u=u_0}}$. De acordo com a ref.[1] quando $\frac{dF}{du}\bigg|_{u=u_0}$ é pequeno podemos escrever $\rho = \frac{1}{2} \frac{dF}{du}\bigg|_{u=u_0}$. O pressuposto nos permite escrever a equação para uma completa rotação, eq.(4.23), como:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{2\pi}{1 - \rho}, \\ &= 2\pi(1 - \rho)^{-1}, \\ \theta &= 2\pi(1 + \rho).\end{aligned}\tag{4.24}$$

Sabemos que o avanço do periélio é dado por:

$$\delta\theta \approx \theta - 2\pi.\tag{4.25}$$

Substituindo o valor de θ , eq.(4.24), encontramos:

$$\begin{aligned}\delta\theta &= 2\pi(1 + \rho) - 2\pi, \\ \delta\theta &= 2\pi\rho.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Com o valor de $\rho = \frac{1}{2} \frac{dF}{du} \Big|_{u=u_0}$ na eq.(4.26) obtemos,

$$\begin{aligned}\delta\theta &= 2\pi \frac{1}{2} \frac{dF}{du} \Big|_{u=u_0}, \\ \delta\theta &= \pi \frac{dF}{du} \Big|_{u=u_0},\end{aligned}\tag{4.27}$$

a equação do desvio do periélio [1].

A continuação do problema depende do valor para u_0 , o resultado vem da condição para órbita quase circular $F(u_0) = u_0$. Nesse caso, a eq.(4.13) nos permite escrever

$$F(u_0) = \frac{1}{2} ((2\alpha_0 + 4\beta_0 C_0)u_0 + 4\beta_0 u_0^3) = u_0\tag{4.28}$$

e encontrar

$$u_0 = \sqrt{\frac{1 - (\alpha_0 + 2\beta_0 C_0)}{2\beta_0}}.\tag{4.29}$$

Agora podemos, derivando a eq.(4.13) em relação a u e substituindo o valor de u_0 , finalizar o resultado com base na eq.(4.27):

$$\begin{aligned}\delta\theta &= \left[\alpha_0 + 2\beta_0 C_0 + 6\beta_0 \left(\frac{1 - (\alpha_0 + 2\beta_0 C_0)}{2\beta_0} \right) \right] \pi, \\ \delta\theta &= (3 - 2\alpha_0)\pi - 4\beta_0 C_0 \pi,\end{aligned}\tag{4.30}$$

por comparação fenomenológica podemos escrever eq.(4.30) de acordo com [16],

$$\delta\theta = \delta\theta_{schw} - 4\beta_0 C_0 \pi,\tag{4.31}$$

sendo $\delta\theta_{schw} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - \epsilon^2)}$ com a representando o semi-eixo maior e ϵ denotando a excentricidade. Adequadamente, tomando $C_0 \ll 1$ podemos escrever [16]: $C_0 = \pm \frac{1}{4\pi} \nu$ sendo ν o movimento kleperiano mínimo dado por $\nu = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$. Os sinais \pm fazem menção a variação dos coeficientes na expansão de Taylor. Já o parâmetro β_0 é limitado por uma relação que depende apenas da excentricidade [16]:

$$\beta_0 = \epsilon^4 \sqrt{1 - \epsilon^2}.\tag{4.32}$$

Restringindo o parâmetro β_0 no intervalo $[0, 1]$ podemos reescrever a eq.(4.31) da seguinte forma [16]:

$$\delta\theta = \delta\theta_{schw} \pm \epsilon^4 \sqrt{\frac{GM(1 - \epsilon^2)}{a^3}}, \quad (4.33)$$

para manter a notação usada no presente trabalho considere eq.(4.33) como

$$\delta\phi = \delta\phi_{schw} \pm \epsilon^4 \sqrt{\frac{GM(1 - \epsilon^2)}{a^3}}. \quad (4.34)$$

Note que o resultado da eq.(4.34) permite-nos obter duas soluções de $\delta\phi$ que dependem dos sinais indicados para máximo/mínimo valores da variação de $\delta\phi$. Sendo as soluções $\delta\phi^{(+)}$ e $\delta\phi^{(-)}$ para o sinal mais e menos, respectivamente. Vale notar, também, que o caso no qual o parâmetro β_0 é nulo ou muito pequeno temos a eq.(4.34) reduzida ao caso do modelo de Schwarzschild. Na subseção a seguir vamos dar início as análises para o desvio do periastro de 34 exoplanetas.

4.1.1 Precessão baseada no NNA para exoplanetas com excentricidade maior que 0,1

Os resultados presentes nessa subseção são análises inéditas que estão vinculadas aos pontos da ref.[16] recapitulados na seção 4.1. Como critério geral, selecionamos exoplanetas onde esperamos que os efeitos relativísticos possam ter uma contribuição relevante para a precessão do periastro. Vamos apresentar figuras para melhor observar possíveis relações entre todos os diferentes sistemas dos 34 exoplanetas estudados no presente trabalho. Neste primeiro grupo de exoplanetas temos o deslocamento do periélio da ordem de $\delta\phi > 1\text{grau}/\text{séc}$.

Sendo assim, tomamos a eq.(4.34) de forma reescrita em função do período orbital e obtemos o desvio do periastro a partir do NNA dado por:

$$\delta\phi = \delta\phi_{schw} \pm \frac{2\pi\beta_0}{T}, \quad (4.35)$$

onde $T = P(24)(3600)$, P é o período orbital em dias. Temos $\delta\phi_{schw}$ representando o resultado relativístico conhecido para a precessão do periélio dado pela fórmula alternativa, eq.(2.86) vista na seção (2.4), que independe da massa do corpo

$$\delta\phi_{schw} = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2(1 - \epsilon^2)T^2}, \quad (4.36)$$

com a sendo o semi-eixo maior em unidades astronômicas (AU) e ϵ é a excentricidade da órbita. Como queremos obter o resultado do desvio em unidades de graus por século, $\text{grau}/\text{séc}$, consi-

deramos:

$$\delta\phi_{schw}(\text{grau}/\text{séc}) = \delta\phi_{schw} \frac{100}{365.256} \frac{180}{\pi}, \quad (4.37)$$

tal que $\delta\phi_{schw}$ nesse caso é dado pela eq.(4.36). Na tabela (1), temos dados observacionais para exoplanetas de trânsito selecionados a partir da ref.[55]. Em alguns casos foi possível atualizar estes dados em termos das incertezas de alguns exoplanetas, vide tabela (1). Para as quantidades físicas, nós adotamos o sistema internacional de medidas Bureau [56].

Salientamos que os exoplanetas da tabela (1) apresentam um resultado conhecido para a precessão de cada um dos objetos, vide tabela (2). Nesse sentido, buscamos comparar este resultado já conhecido com o resultado obtido pelo modelo de aproximação NNA. Consideramos os dados orbitais da tabela (1) e a eq.(4.34) para obter a precessão via NNA. Acompanhe as tabelas (1) e (2) a seguir.

Tabela 1: Quantidades relevantes para a determinação da precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades maiores que 0,1. Os dados orbitais foram extraídos da ref.[55] e atualizadas as incertezas dos explanetas HD 49674b [57], HD 88133b [58], HD 118203b [58] e XO-3b [59].

Exoplaneta	ϵ	a (AU)	P (dias)
HD 49674b	0,29±0,015	0,0580±0,0033	4,9437±0,0023
HD 88133b	0,133±0,072	0,0472±0,0027	3,41587±0,00059
GJ 436b	0,1590	0,0280	2,644
HD 118203b	0,309±0,014	0,0703±0,0041	6,13350±0,0006
HAT-P-2b	0,5070	0,0690	5,6330
HD 185269b	0,2960	0,0770	6,8380
XO-3b	0,260±0,017	0,0476±0,0005	3,1915426±0,00014

Tabela 2: Comparação da precessão esperada pelo modelo padrão PPN de aproximação, $\delta\phi_{schw}$, com a precessão do periastro via NNA em unidades de graus por século. Na quarta coluna apresentamos a diferença percentual relativa $\Delta\phi$. Na última coluna é apresentado o parâmetro β_0 de cada exoplaneta. Os dados de $\delta\phi_{schw}$ foram obtidos a partir da ref.[55].

Exoplaneta	$\delta\phi_{schw}$	$\delta\phi$	$\Delta\phi$	β_0
HD 49674b	1,576	1,57912±0,00044	0,1979	0,00677±0,01398
HD 88133b	2,958	2,95593±0,00008	-0,0699	0,00031±0,00067
GJ 436b	2,234	2,26056	1,1888	0,00063
HD 118203b	1,231	1,23007±0,0002	-0,0755	0,00867±0,00164
HAT-P-2b	1,836	1,86244	1,44	0,05695
HD 185269b	1,046	1,05579	0,9359	0,00733
XO-3b	3,886	3,88305±0,00062	-0,0759	0,00441±0,00119

Com base nas tabelas (1) e (2) é possível notar que a excentricidade ϵ e o parâmetro β_0 são quantidades proporcionais. As precessões apresentadas são de ordem de magnitude maior que a esperada para a precessão do periélio de Mercúrio, $\delta\phi \approx 0,0119\text{grau}/\text{séc}$. Ademais a precessão mais acentuada ($\delta\phi \simeq 3,886\text{graus}/\text{séc}$), não apresenta o maior valor para β_0 dentre os exoplanetas analisados, sendo XO-3b o exoplaneta com a maior precessão em questão. O maior valor para β_0 , ($\simeq 0,05695$), foi verificado para HAT-P-2b, apesar da sua precessão ter sido a quarta maior dentre os exoplanetas em pauta, $\delta\phi \simeq 1,836\text{grau}/\text{séc}$.

Outro fato relevante observado diz respeito aos parâmetros a , semi-eixo maior, P , período orbital, e parâmetro β_0 . Nós percebemos que os dois exoplanetas com maiores valores para a e P , sendo eles HD 185269b e HD 118203b, são responsáveis pelas duas menores precessões dentre os exoplanetas dentre o grupo analisado. A menor precessão, a sétima maior desse *ranking*, foi verificada para HD 185269b, cujo os parâmetros a e P são os maiores quando comparados a outros exoplanetas desse grupo mostrados nas tabelas (1) e (2). Além disso, em comparação com HD 118203b, o HD 185269b apresenta menor parâmetro β_0 .

Tais pontos parecem sugerir que menores valores para a e P e maiores valores para β_0 , levam à maiores valores para a precessão do periastro. Por outro lado, surge um questionamento, nos perguntamos se tal comportamento pode ser causado por propagação de erro de dados ou por efeitos de maré desconhecidos. Nesse sentido, para esclarecer essas questões vamos estudar casos em que as excentricidades sejam maiores.

De todo modo vale notar que a tabela (2) fornece um refinamento em relação aos resultados padrões da RG. Ademais não encontramos nenhuma diferença importante entre as soluções $\delta\phi^{(+)}$ e $\delta\phi^{(-)}$ nesse grupo de exoplanetas. A diferença percentual relativa, $\Delta\phi$, apresentada, também, na tabela (2) foi calculada pela expressão:

$$\Delta\phi = \Delta\phi\% = 100 \frac{\delta\phi^{\pm} - \delta\phi_{schw}}{\delta\phi_{schw}}. \quad (4.38)$$

Quanto a diferença percentual constatamos que os valores percentuais não são superiores a 2% em comparação com a RG que pode permitir mais espaço para possíveis novos efeitos. Os valores negativos revelam como o valor percentual excede os valores da RG.

4.1.2 Precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades pequenas e órbitas circulares

Selecionamos exoplanetas cujas excentricidades são menores que 0,1 e a órbita seja circular para o segundo grupo. A título de comparação a média da excentricidade orbital de planetas gigantes varia de 0,01 a 0,06. Os exoplanetas de trânsito WASP 12b [60, 61] e WASP 14b [62] fazem parte do nosso estudo. Outros casos estudados são os planetas-gigantes do conjunto ao redor de Kepler-80 [63] e os novos planetas ao redor da estrela TRAPPIST-1 [64]. As quantidades cinemáticas são apresentadas na tabela (3).

Tabela 3: Quantidades relevantes para a determinação da precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades menores que 0,1. Particularmente, para a família Kepler os autores da ref.[63] não determinaram o exato valor para a excentricidade deles que é considerada nula nesse trabalho.

Exoplaneta	ϵ	$a(\text{AU})(\times 10^{-3})$	P (dias)
WASP 12b	$0,049 \pm 0,0150$	$22,9 \pm 0,8$	$1,091423 \pm 0,000003$
WASP 14b	$0,0830^{+0,0029}_{-0,0030}$	$37,1 \pm 1,1$	$2,24376507 \pm 4,6 \times 10^{-7}$
Kepler 80f	0	$17,5 \pm 0,2$	$0,9867873 \pm 0,00000006$
Kepler 80d	0	$37,2 \pm 0,5$	$3,07222^{+0,00006}_{-0,00004}$
Kepler 80e	0	$49,1 \pm 0,7$	$4,64489^{+0,00020}_{-0,00019}$
Kepler 80b	0	$64,8 \pm 0,9$	$7,05246^{+0,00020}_{-0,00022}$
Kepler 80c	0	$79,2 \pm 1,1$	$9,52355^{+0,00041}_{-0,00029}$
Trappist-1b	0,081	$11,11 \pm 0,34$	$1,51087081 \pm 0,6 \times 10^{-6}$
Trappist-1c	0,083	$15,21 \pm 0,47$	$2,4218633 \pm 0,17 \times 10^{-5}$
Trappist-1d	0,070	$21,44^{+0,66}_{-0,63}$	$4,049610 \pm 0,63 \times 10^{-4}$
Trappist-1e	0,085	$28,17^{+0,83}_{-0,87}$	$6,099615 \pm 0,11 \times 10^{-4}$
Trappist-1f	0,063	$37,1 \pm 1,1$	$9,206690 \pm 0,15 \times 10^{-4}$
Trappist-1g	0,061	$45,1 \pm 1,4$	$12,35294 \pm 0,12 \times 10^{-3}$
Trappist-1h	0	63^{+27}_{-13}	20^{+15}_{-6}

Com base nos dados da tabela (3) construímos a tabela (4) sob a proposta de apresentar uma previsão para o desvio desses exoplanetas, acompanhe o resultado na próxima página.

Tabela 4: Previsão da precessão do periastro $\delta\phi$ em unidades de graus por século a partir da aproximação NNA para exoplanetas selecionados com excentricidades menores que 0,1 comparadas com a precessão do periélio $\delta\phi_{schw}$ do resultado padrão de Einstein. A última coluna mostra o parâmetro β_0 para cada excentricidade.

Exoplaneta	$\delta\phi_{schw}$	$\delta\phi$	β_0
WASP 12b	21,0038281±0,0000018	21,0038282±0,0001728	0,0000058±0,0000071
WASP 14b	6,37353945±0,0000061	6,3735395±0,0010906	0,0000473±0,00000686
Kepler 80f	16,5564890±0,0000208	16,5564889±0,0000208	0
Kepler 80d	2,47908685±0,0000000	2,47908686±0,0000000	0
Kepler 80e	1,24968191±0,0000000	1,24968191±0,0000000	0
Kepler 80b	0,62185756±0,0000000	0,62185756±0,0000000	0
Kepler 80c	0,37723898±0,0000000	0,37723898±0,0000000	0
Trappist-1b	1,87140472±0,0000001	1,87140472±0,0000001	0,0429053±0,00000000
Trappist-1c	0,85187242±0,0000000	0,85187242±0,0000000	0,0472946±0,00000000
Trappist-1d	0,36133167±0,0000000	0,36133167±0,0000000	0,0239511±0,00000000
Trappist-1e	0,18296937±0,0000000	0,18296937±0,0000000	0,0520117±0,00000000
Trappist-1f	0,09198716±0,0000000	0,09198716±0,0000000	0,0157217±0,00000000
Trappist-1g	0,05626313±0,0000000	0,05626313±0,0000000	0,0138206±0,00000000
Trappist-1h	0,025772344	0,025772343	0

Observando as tabelas (3) e (4), bem como a figura (4.1), podemos notar a respeito dos exoplanetas WASP 12b e WASP 14b, desprezando as incertezas, que apesar de WASP 14b ter quase o dobro da excentricidade de WASP 12b, seu valor para o período orbital P é maior que o dobro do valor para o período orbital P de WASP 12b.

Assim, a contribuição do parâmetro β_0 foi superada devido a magnitude de P , já que os valores para o semi-eixo maior a para ambos são próximos. Portanto, WASP 12b apresenta a maior precessão em relação a WASP 14b.

Deste modo, esses exoplanetas apresentados na fig.(4.1) nos permitiram notar que de fato, altos valores para o parâmetro β_0 não são sinônimos de grandes precessões por si só. Visto que WASP 12b e WASP 14b apresentam grandes precessões mesmo tendo valores pequenos para o parâmetro β_0 . Muito provavelmente tais efeitos são consequência da proximidade em relação às suas estrelas, assim estão sujeitos à forças de maré extremas e efeitos relativísticos de precessão do periastro devido a RG não esperados como dominantes, pelo menos, quanto a baixa/nula excentricidade. De certa maneira, esses exoplanetas são importantes para testar o modelo-parâmetro de sensibilidade.

Outro ponto observado é que $\beta_0 \approx 0$ leva ao mesmo resultado esperado para $\delta\phi^\pm \approx \delta\phi_{schw}$, por exemplo. Além disso é perceptível que de Kepler 80c a Kepler 80f temos os maiores valores

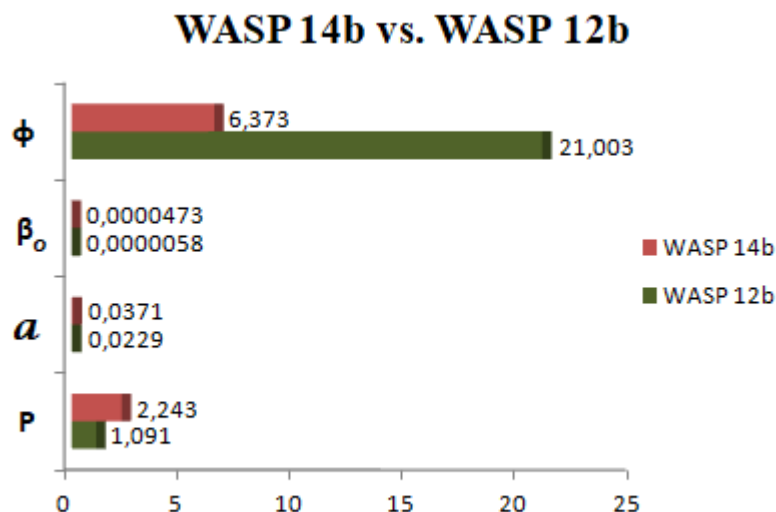


Figura 4.1: Comportamento para os exoplanetas WASP 14b e WASP 14b.

para ambos semi-eixo maior a e período orbital P . Assim sendo, devido a ausência da contribuição de β_0 , as menores precessões, também, seguiram a ordem de Kepler 80c a Kepler 80f, como ilustrado no gráfico a seguir.

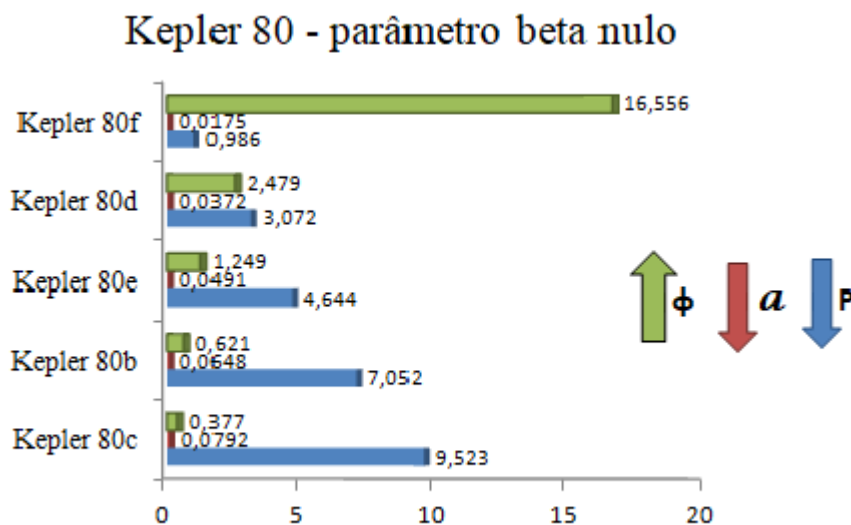


Figura 4.2: Comportamento dos exoplanetas da família Kepler 80.

Ou seja, acompanhando a fig.(4.2) vemos que para o caso de Kepler 80c, com os maiores valores para semi-eixo maior a e período orbital P , temos a menor precessão dentre os exoplanetas

desse caso, por exemplo.

Os exoplanetas da família TRAPPIST-1 constituem um grupo de exoplanetas recentemente descoberto cujo tamanho é próximo ao tamanho do planeta Terra localizados em uma zona habitável [64]. Essa família de exoplanetas tem se tornado tema recorrente nas literaturas atuais, alguns exemplos são: [65, 66, 67]. Essa família aparentemente não tem nenhum significativo efeito de maré nem efeitos de perturbação, devido a presença de outros planetas, atuando sobre sua precessão. Uma vez que a família TRAPPIST-1 apresenta baixa excentricidade ($\epsilon < 0,1$) nós não esperamos diferenças devido ao uso do modelo NNA em comparação aos resultados do modelo padrão da RG, de forma similar ao caso família Kepler.

Curiosamente, com exceção para os planetas de Kepler e TRAPPIST-1h que possuem excentricidade nula, os outros planetas têm uma menor excentricidade com períodos de revolução pequenos que equilibram o valor do parâmetro β_0 levando a um desvio mínimo da RG. Por outro lado, eles apresentam um valor elevado para o semi-eixo maior quando comparados ao caso do grupo presente na tabela (1). Essas particularidades reforçam que os valores esperados para suas precessões do periastro devem ser muito pequenas. Não detectamos quaisquer diferenças relevantes para os valores obtidos para as soluções $\delta\phi^{(+)}$ e $\delta\phi^{(-)}$. Por consequência, a diferença relativa $\Delta\phi$ é tão pequena que não produz qualquer informação importante, apenas que o modelo NNA concorda com o padrão de resultados da RG (ou PPN).

4.1.3 Precessão do periastro de exoplanetas com excentricidades grandes

Os exoplanetas deste último grupo de análise apresentam excentricidade superior a 0,4. Observamos que os exoplanetas HD 210277b e HD 222582b fogem da regra comportamental notada para a família Kepler, por exemplo. Para dar seguimento as análises vamos apresentar as tabelas sobre os dados das grandezas, tabela (5), envolvidas no processo de obtenção dos resultados para a previsão do desvio do periastro e respectivos parâmetros β_0 , tabela (6).

Tabela 5: Quantidades relevantes para a determinar a precessão do periastro de exoplanetas com a grande excentricidade. Os dados apresentados foram encontrados na ref.[58].

Exoplanet	ϵ	a (AU)	P (days)
HD 66428b	0,465±0,030	3,18±0,19	1973±31
HD 37605b	0,737±0,010	0,261±0,015	54,23±0,23
HD 45350b	0,798±0,053	1,96±0,11	967±6,2
HD 168443b	0,5296±0,0032	0,300±0,017	58,11055±0,00086
HD 187085b	0,75±0,100	2,26±0,13	1147±4
HD 210277b	0,476±0,017	1,138±0,066	442,19±0,50
HD 222582b	0,725±0,012	1,347±0,078	572,38±0,61
HD 33283b	0,480±0,050	0,145	18,1790±0,0070
HD 74156b	0,6360±0,0091	0,290±0,017	51,643±0,011
HD 117618b	0,42±0,17	0,176±0,010	25,827±0,019
HD 154857b	0,510±0,060	1,132±0,069	398,5±9,0
16 CygBb	0,681±0,017	1,681±0,097	798,5±1,0
HD 190228b	0,499±0,030	2,25±0,13	1146±16

Tabela 6: Previsão do desvio do periastro $\delta\phi$ em unidades de mili-graus por século 10^{-3} grau/séc para exoplanetas com excentricidade grande. Na quarta e sexta coluna temos os valores para a diferença percentual relativa $\Delta\phi$ para as soluções $\delta\phi^{(+)}$ e $\delta\phi^{(-)}$, respectivamente. Os valores para o parâmetro β_0 também estão presentes.

Exoplaneta	$\delta\phi_{schw}$	$\delta\phi^{(+)}$	$\Delta\phi^{(+)}$	$\delta\phi^{(-)}$	$\Delta\phi^{(-)}$	β_0
HD 66428b	0,08727	0,08726	0,0011	0,08726	-0,0011	0,04139±0, 01190
HD 37605b	48,5701	48,5704±0, 00503	0,0006	48,56988±0, 005025	-0,0006	0,19941±0, 01589
HD 45350b	0,60765	0,60767±0, 00121	0,0031	0,60763±0, 001209	-0,0031	0,24439±0, 10307
HD 168443b	33,1127	33,11283±0, 1605	0,0002	33,11266±0, 160504	-0,0003	0,06673±0, 00180
HD 187085b	0,40189	0,40191±0, 00283	0,0032	0,40188±0, 002829	-0,0032	0,20928±0, 15558
HD 210277b	1,00601	1,00602±0, 00106	0,0007	1,00600±0, 001058	-0,0007	0,04515±0, 00727
HD 222582b	1,05955	1,05958±0, 00216	0,0024	1,05953±0, 002162	-0,0023	0,19029±0, 01813
HD 33283b	236,224	236,22406±0, 22420	0,0001	236,22368±0, 224202	-0,0001	0,04657±0, 02158
HD 74156b	53,2647	53,26491±0, 06155	0,0003	53,26455±0, 061549	-0,0003	0,12626±0, 00931
HD 117618b	113,410	113,40970±0, 17853	0,0001	113,40954±0, 17853	-0,0001	0,02824±0, 04664
HD 154857b	1,42167	1,42168±0, 00000	0,0007	1,42166±0, 000000	-0,0007	0,05819±0, 03085
16 CygBb	0,53767	0,53768±0, 00154	0,0026	0,53766±0, 001544	-0,0026	0,1575±0, 021226
HD 190228b	0,23267	0,23267±0, 00154	0,0013	0,23266±0, 001544	-0,0013	0,05373±0, 01469

Com base em quão maiores valores para os parâmetros a e P menor o desvio $\delta\phi$, se excluirmos a contribuição β_0 , esperávamos o HD 210277b com a terceira maior $\delta\phi$ e o HD 222582b com a quarta maior $\delta\phi$. No entanto, como podemos ver com base nas tabelas (5) e (6), exatamente o oposto acontece. Considerar o gráfico abaixo para facilitar o entendimento quanto ao motivo do pressuposto.

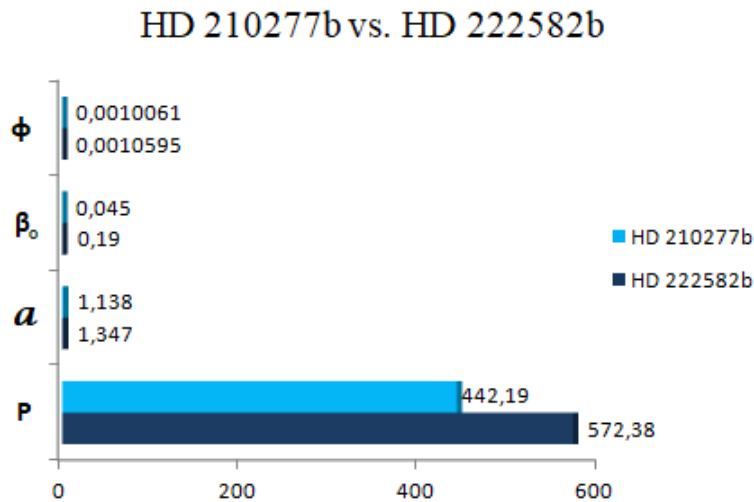


Figura 4.3: Comportamento para os exoplanetas HD 210277b e HD 222582b.

Como podemos ver, a razão para a fuga da regra está no fato de, considerando apenas os valores médios, o HD 222582b apresentar β_0 superior ao quádruplo do parâmetro β_0 de HD 210277b e seu valor para o semi-eixo maior a e período orbital P , nem excederem o dobro de a e P de HD 210277b. Tal ponto contradiz nossa primeira expectativa sobre o pressuposto de que um valor maior para a excentricidade temos a implicação de grandes valores para o parâmetro β_0 e, por outro lado, promover um desvio no valor da precessão esperada pela aproximação PPN.

Na tabela (6) vemos que a precessão desse grupo gera o resultado clássico de Einstein obtido por $\delta\phi_{schw}$. Portanto, temos a sugestão de que as relações do semi-eixo maior e do período orbital, também, são importantes para esse modelo, que revela uma sensibilidade para tais parâmetros. Aumentando a escala numérica de precisão, encontramos desvios em todos os casos.

Os planetas desse grupo têm em comum grandes excentricidade de 0,4 a 0,8 e período orbital P . O grupo em questão levou a valores para precessão $\delta\phi$ da ordem de mili-graus. Verificamos que o presente grupo foi responsável pelos menores valores para o desvio do periastro quando

comparado aos grupos anteriores. Nesse caso, nossos resultados sugerem que a excentricidade, em termos de valores grandes ou pequenos, não influencia em qualquer mudança sobre os valores de $\delta\phi$ nesse modelo, logo pode depender de outras variáveis orbitais.

4.1.4 Panorama geral - 34 exoplanetas e Mercúrio

Dentre os planetas do nosso sistema Solar, Mercúrio é o que apresenta maior precessão, por menor que seja em comparação com boa parte dos exoplanetas estudados nesse trabalho. Mercúrio apresenta a nona menor precessão dentre os 34 exoplanetas. Organizamos os objetos celestes na tabela (7), a seguir, por ordem crescente de precessão. Além disso notamos que as menores precessões foram encontradas na tabela (6).

Tabela 7: Nove menores desvios.

Objetos	$\delta\phi^{(+)}$	P	a	ϵ	β_0
HD 66428b	0,00008726	1973	3,18	0,465	0,04139
HD 190228b	0,00023267	1146	2,25	0,499	0,05373
HD 187085b	0,00040191	1147	2,26	0,75	0,20928
16 CygBb	0,00053767	798,5	1,681	0,681	0,1575
HD 45350b	0,00060765	967	1,96	0,798	0,24439
HD 210277b	0,00100602	442,19	1,138	0,476	0,04515
HD 222582b	0,00105958	572,38	1,347	0,725	0,19029
HD 154857b	0,00142167	398,5	1,132	0,51	0,05819
Mercúrio	0,01193	87,9	$5,8 \times 10^{10}$	0,205	0,00175

Para a construção da tabela (7) as incertezas observadas anteriormente para os objetos não são consideradas e não trabalhamos com os valores em unidades de milésimos ($m = 10^{-3}$). Ademais, os dados orbitais de Mercúrio foram vistos na seção (2.4). Na tabela (7) notamos que Mercúrio apresenta valores para os parâmetros ϵ , P e a expressivamente discrepantes quando comparados aos dos demais objetos dessa tabela. Nesse caso, para tomar o planeta Mercúrio como objeto de estudo resolvemos compará-lo com exoplanetas, estudados até o momento, que apresentam excentricidade próxima da conhecida para o Mercúrio, $\epsilon \approx 0,205$. Para ajudar na seleção desses exoplanetas construímos um gráfico com o comportamento para os parâmetros ϵ e β_0 de todos os exoplanetas estudados incluindo o planeta Mercúrio.

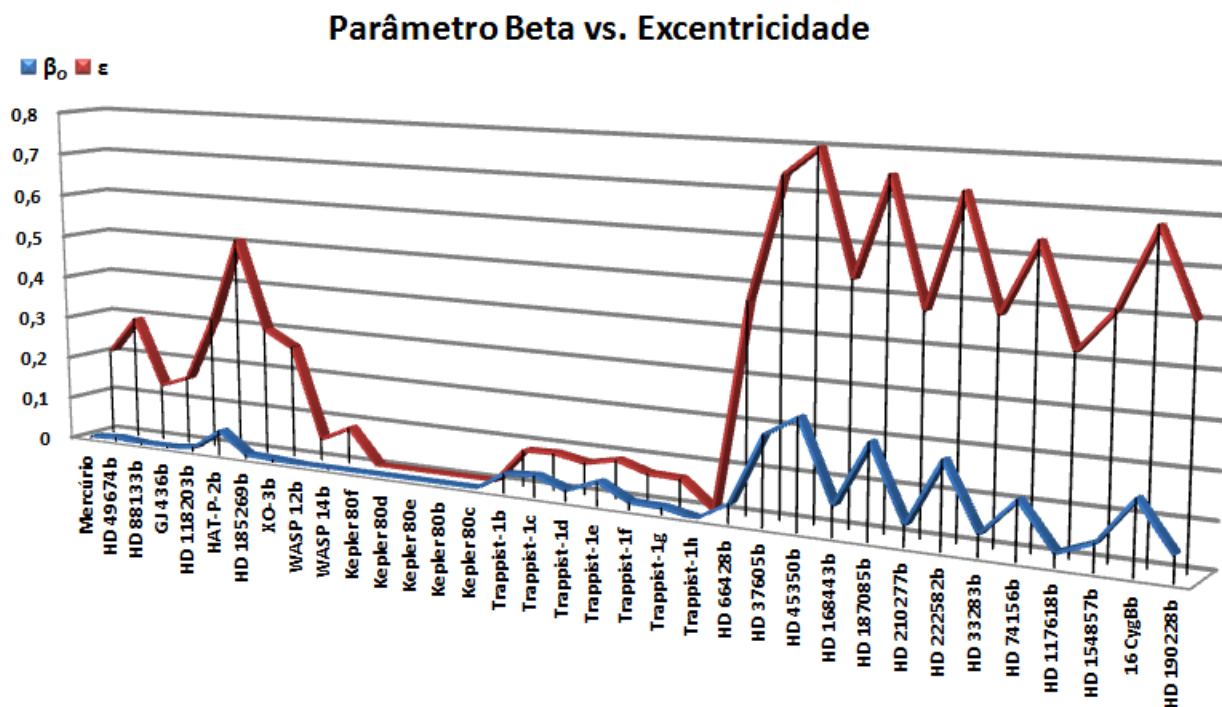


Figura 4.4: Comparação do comportamento dos parâmetros β_0 e ϵ , Mercúrio com $\epsilon \approx 0,205$ e $\beta_0 \approx 0,00175$.

A figura (4.4) revela o comportamento proporcional entre os parâmetros β_0 e ϵ em análise. Os exoplanetas que possuem $\epsilon \approx 0,205$ são: HD 49674b, HD 185269b e XO-3b. Sendo assim, podemos tomar o planeta Mercúrio como objeto de estudo. Na tabela (8) temos os dados relevantes para a nossa análise sendo eles P , a , ϵ e $\delta\phi$

Tabela 8: Objetos com $\epsilon \approx 0,205$.

Objetos	$\delta\phi$	P	a	ϵ
XO-3b	$3,88305 \pm 0,00062$	$3,1915426 \pm 0,00014$	$0,0476 \pm 0,0005$	$0,260 \pm 0,017$
HD 49674b	$1,57912 \pm 0,00044$	$4,9437 \pm 0,0023$	$0,0580 \pm 0,0033$	$0,29 \pm 0,015$
HD 185269b	1,05579	6,8380	0,0770	0,2960
Mercúrio	0,01193	87,9	$5,8 \times 10^{10}$	0,205

Com base na tabela (8) é possível notar que a precessão do periélio de Mercúrio é inferior aos demais objetos, em grande parte devido ao seu elevado valor para o período orbital. Visto que o parâmetro β_0 pouco influencia no resultado, já que todos os objetos da tabela (8) apresentam valores próximos para a excentricidade. A maior precessão foi observada para XO-3b que dentre os demais objetos apresentava menor período orbital.

Nas páginas seguintes vamos apresentar um conjunto de imagens que trazem informações de todos os 34 exoplanetas estudados em comparação quanto aos dados para o planeta Mercúrio. São gráficos que podem lembrar um relógio e considerando o sentido horário temos ordenados a exata sequência de exoplanetas estudados nesse trabalho. Nas figuras temos apenas a consideração para os valores médios e aproximados. Os valores escritos em vermelho correspondem ao dado relativo a Mercúrio sobre o respectivo parâmetro destacado em cada figura.

Na figura (4.5) temos o comportamento do parâmetro β_0 de todos os objetos estudados, destacamos a magnitude do parâmetro para 9 exoplanetas nessa figura.

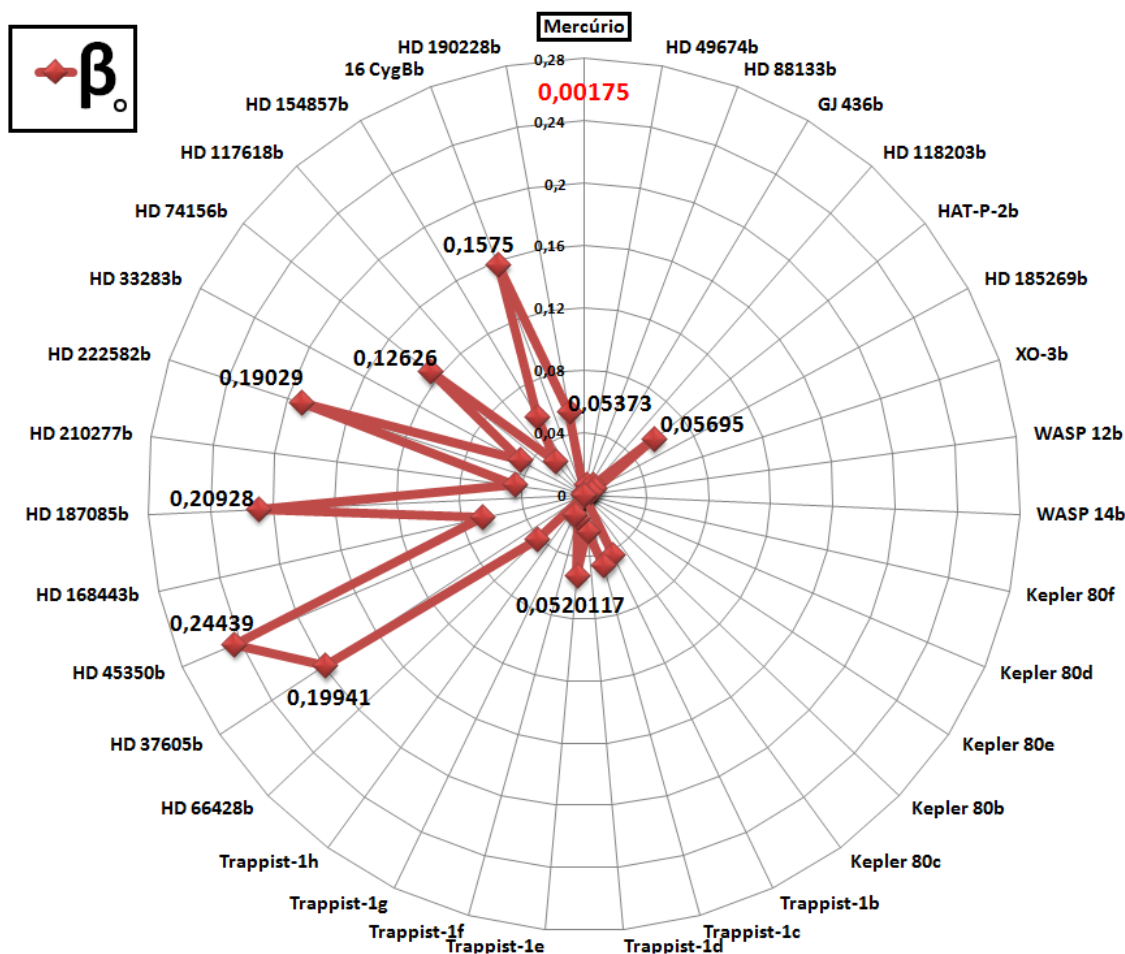


Figura 4.5: Parâmetro β_0 .

Na figura (4.6) temos o gráfico sobre o semi-eixo maior em unidades astronômicas, com destaque para magnitude de 7 exoplanetas.

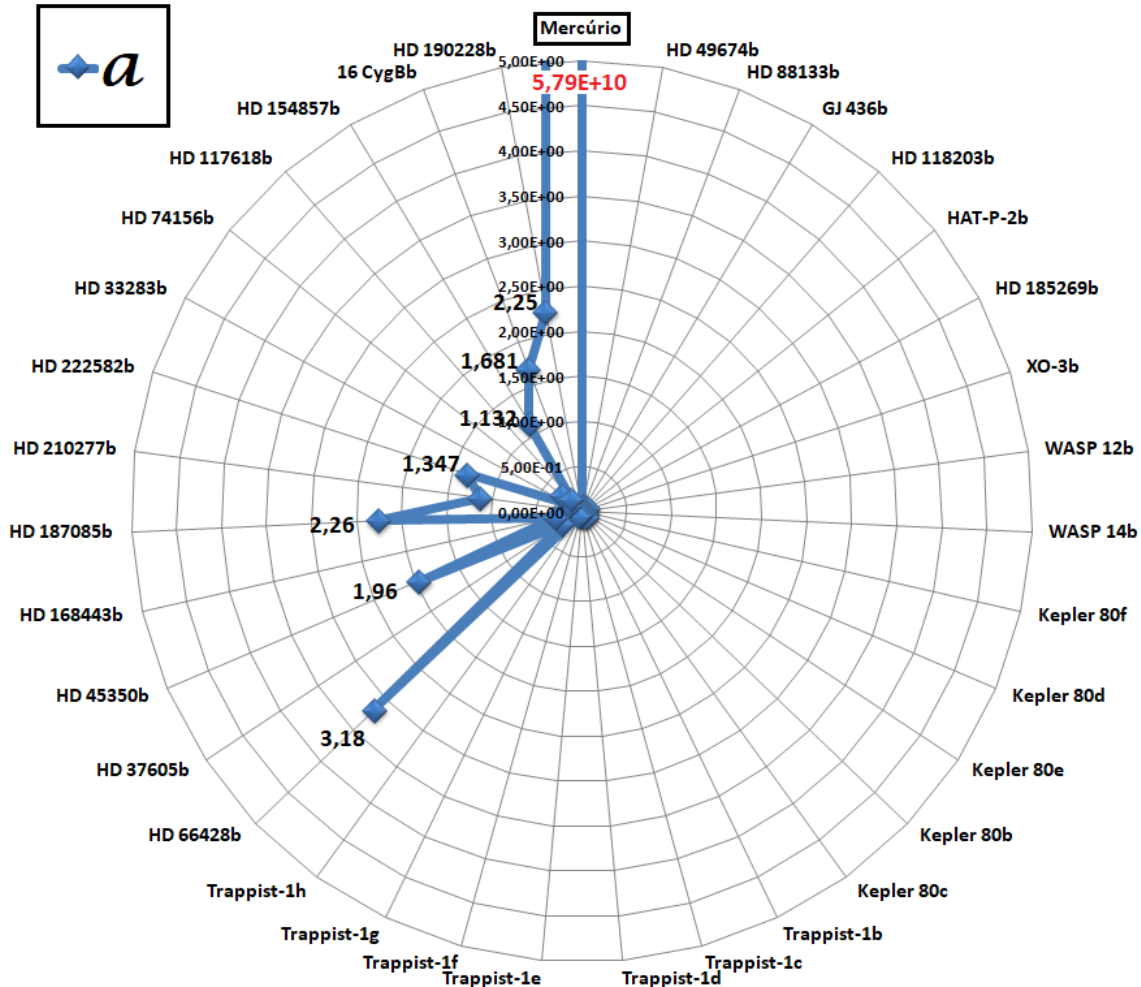


Figura 4.6: Parâmetro semi-eixo maior (AU).

Na figura (4.7) temos a relação para o período orbital em dias, destacamos a magnitude de 7 exoplanetas.

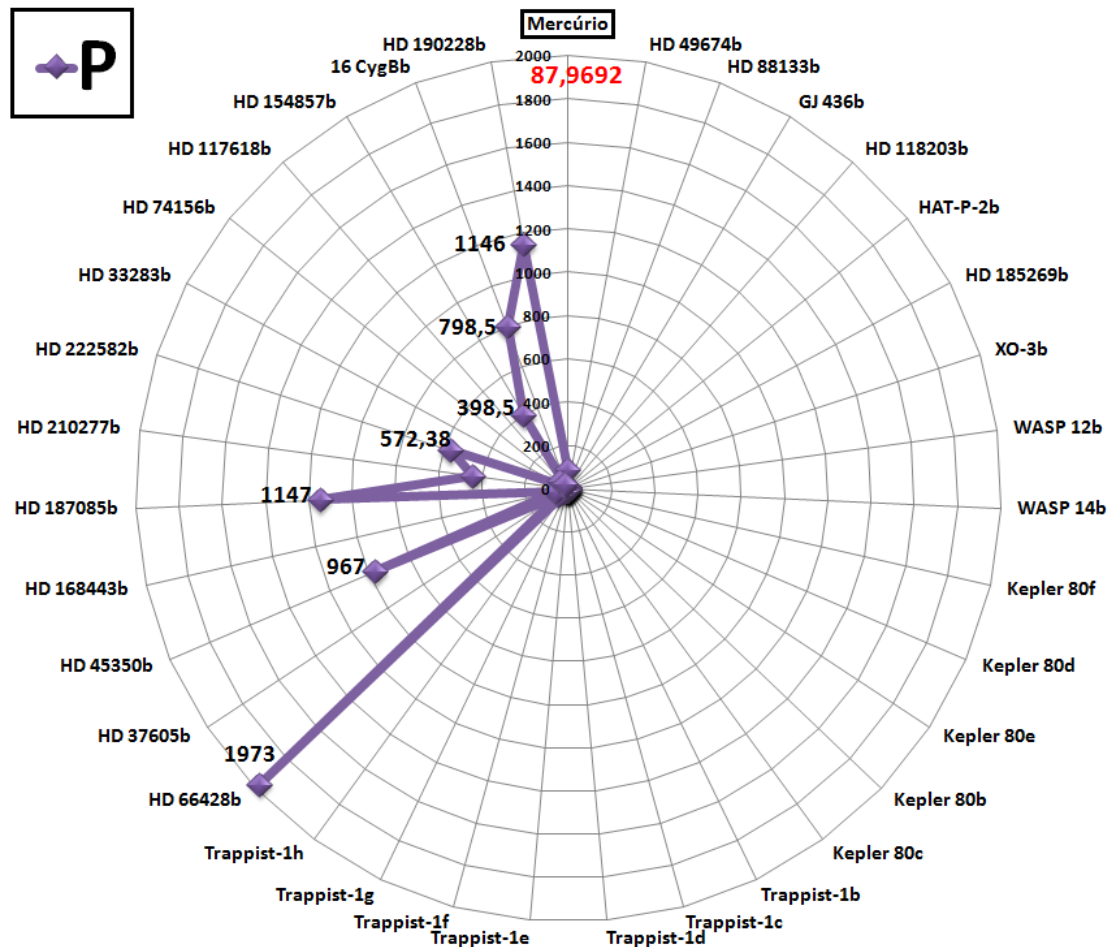


Figura 4.7: Parâmetro período orbital (dias).

Na última figura (4.8) temos o comportamento para o desvio dos objetos em unidades de grau por século. É possível notar que nos gráficos anteriores tínhamos destaque para as maiores magnitudes ao lado esquerdo, porém para a análise de $\delta\phi$ as maiores magnitudes aparecem justo do lado oposto.

O resultado já era esperado, pois nosso estudo mostrou que o desvio tende a ser maior quanto menor for os valores para o período orbital e semi-eixo maior, por exemplo. WASP 12b é o objeto com maior valor para o desvio, em segundo lugar está Kepler 80f e em terceiro e quarto

lugar temos, respectivamente, WASP 14b e XO-3b.

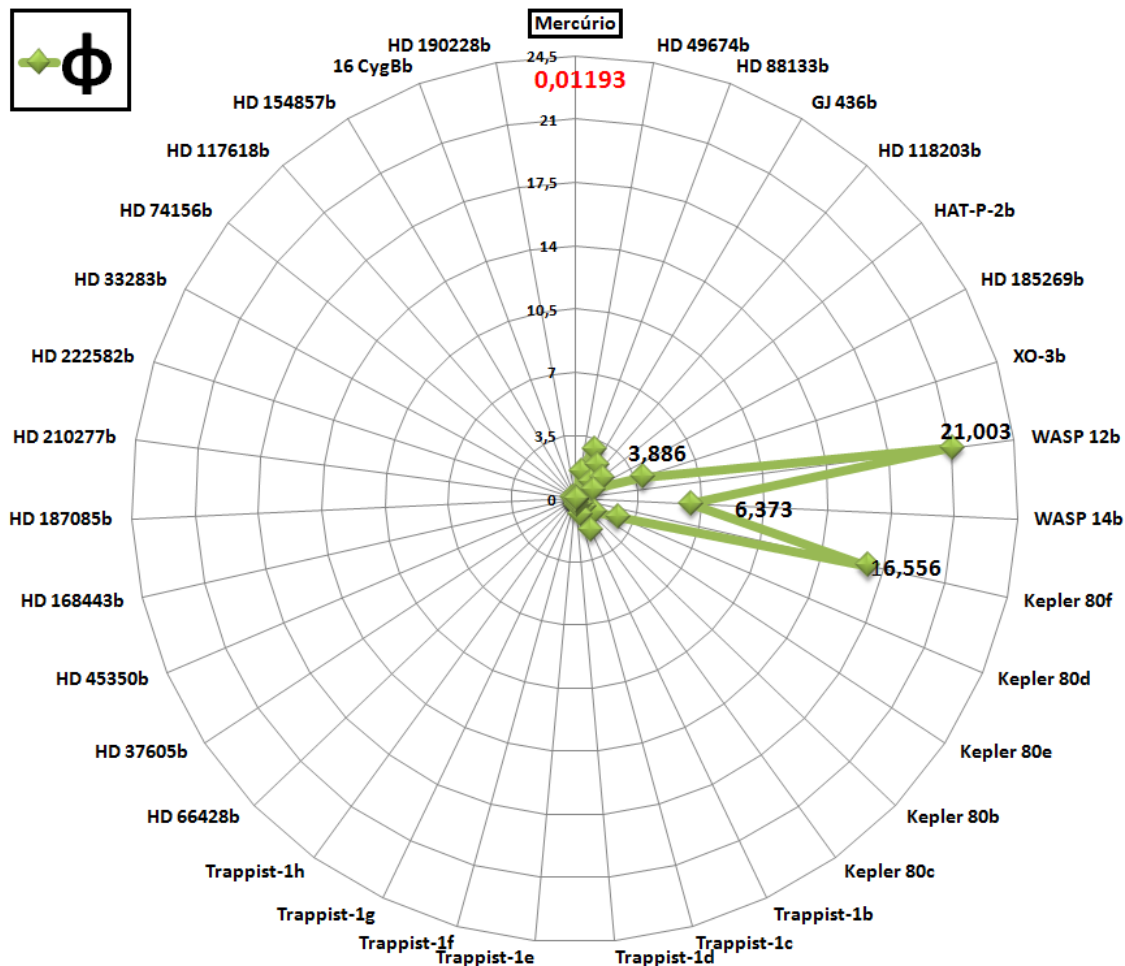


Figura 4.8: Parâmetro para o desvio do periastro/periélio.

De fato não obtemos uma regra geral para valores elevados de desvio mediante a valores grandes do parâmetro β_0 , que também depende de parâmetros internos como excentricidade, semi-eixo maior e período orbital. Como estudamos um grupo de exoplanetas heterogêneo observamos que o parâmetro β_0 está no intervalo $[0, 0.3]$, confirmando os resultados anteriores destacados na ref.[16].

Capítulo 5

Aplicações - métrica de Zipoy

Em junho de 1966 foi publicado um trabalho de David Zipoy sobre o estudo das equações de Einstein no vácuo em coordenadas esferoidais quase-oblatas e prolatas [17]. Zipoy verificou que esta métrica do espaço-tempo apresenta soluções para o potencial Newtoniano que podem ser escritas como uma combinação linear de *polinômios de Legendre de ordem integral l*. Notou que para coordenadas oblatas as soluções para cada l têm uma singularidade anel, a saber, e uma série de peculiaridades a respeito é expressa no trabalhado de Zipoy.

A título de esclarecimento são três casos para l que são relatados: (i) $l = 0$, foco do nosso trabalho, é referente a solução “monopólo”; (ii) $l = 1$ é referente a solução de momento de dipolo e por fim (iii) o caso de $l = 0$ e $l = 1$ tratados simultaneamente como uma interferência e não apenas uma superposição de soluções individuais, esse caso é a solução de “monopólo-dipolo” [17].

A seguir, esperamos que seja mais claro o motivo pelo qual optamos pelo estudo mais centrado no caso $l = 0$. Os demais casos, (ii) e (iii), serão temas para o desenvolvimento de um trabalho futuro, para uma análise cuidadosa de cada solução, visto que uma simples escolha para o valor de θ pode representar análises interessantes. Então vamos começar a apresentar o formato da métrica de Zipoy, assinatura $(- - - +)$, para cada um desses casos. Todos os casos apresentam a estrutura da Métrica de Zipoy para $l = 0$ (monopólo) [17],

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2(\xi-\sigma)}[dr^2 + (r^2 + a^2)d\theta^2] - e^{-2\sigma}(r^2 + a^2)\cos^2\theta d\phi^2 + e^{2\sigma} dt^2, \\ ds^2 &= \underbrace{-e^{2(\xi-\sigma)} dr^2}_{g_{rr}} \underbrace{-e^{2(\xi-\sigma)}(r^2 + a^2) d\theta^2}_{g_{\theta\theta}} \underbrace{-e^{-2\sigma}(r^2 + a^2)\cos^2\theta d\phi^2}_{g_{\phi\phi}} + \underbrace{e^{2\sigma} dt^2}_{g_{tt}}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

entretanto, o comportamento para os potenciais ξ e σ são diferentes. Para o caso de $l = 0$,

temos [17]:

$$e^{2\xi} = \left(\frac{r^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 + a^2} \right)^{\beta^2 + 1} \quad (5.2)$$

e a solução

$$\sigma = -\beta \operatorname{arctan} \frac{a}{r} \quad (5.3)$$

sendo

$0 \leq \operatorname{arctan} \frac{a}{r} \leq \pi$
$\beta = \frac{m}{a}$
$r = a \operatorname{sen} hv$

a constante $\beta = \frac{m}{a}$ é dimensional já que Zipoy trata m como “massa” e a como “raio”.

Antes de prosseguir aproveitamos para fazer um adendo, sabemos que a escolha das constantes de integração respeitam a condição: $\sigma \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. David Zipoy alerta que essa situação, $r \rightarrow \infty$, transforma a eq.(5.1) no elemento de linha de Schwarzschild isotrópico, portanto, ocorre que assintoticamente r , θ e ϕ tornam-se nas usuais coordenadas esféricas. Esse adendo faz-se importante, pois Zipoy realizou uma série de mudanças de variáveis para então chegar ao formato da eq.(5.1). A métrica original usada por Zipoy é um elemento de linha com simetria cilíndrica e estática:

$$ds^2 = -e^{2(\xi - \sigma)}(d\rho^2 + dz^2) - \rho^2 e^{-2\sigma} d\phi^2 + e^{2\sigma} dt^2 \quad (5.4)$$

sendo que em coordenadas esferoidal oblata $\rho = a \operatorname{cosh} v \operatorname{cos} \theta$ e $z = a \operatorname{sen} hv \operatorname{sen} \theta$. Ademais $\xi = \xi(\rho, z)$ e $\sigma = \sigma(\rho, z)$ que são encontradas resolvendo as equações de Einstein no vácuo. A obtenção da eq.(5.1) deu-se devido as considerações: $x = \operatorname{sen} hv$, $y = \operatorname{sen} \theta$ e $r = ax$. Por fim, Zipoy afirma que um caso ainda mais interessante surge para r pequeno, $r \ll a$ e $v = \frac{r}{a}$, isso porque temos o aparecimento de singularidades anéis. Pois a função σ fica limitada para todos os r e $e^{2\xi}$ é zero para $r = \theta = 0$ revelando que os invariantes do tensor de Riemann são infinitos nessa linha. A figura (5.1) ilustra esses apontamentos feitos por Zipoy.

Continuando, de acordo com ref.[17] apesar de termos a mesma eq.(5.1) para $l = 1$ as expressões para ξ e σ são diferentes do caso $l = 0$,

$$\xi = \frac{(1 - \gamma^2)}{2} \ln \left(\frac{r^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 + a^2} \right) - \frac{\gamma^2 \operatorname{cos}^2 \theta}{2} \left[\left(\operatorname{arctan} \frac{a}{r} \right)^2 + \left(1 - \frac{r}{a} \operatorname{arctan} \frac{a}{r} \right)^2 \right] \quad (5.5)$$

e

$$\sigma = \gamma \left(1 - \frac{r}{a} \operatorname{arctan} \frac{a}{r} \right) \operatorname{sen} \theta \quad (5.6)$$

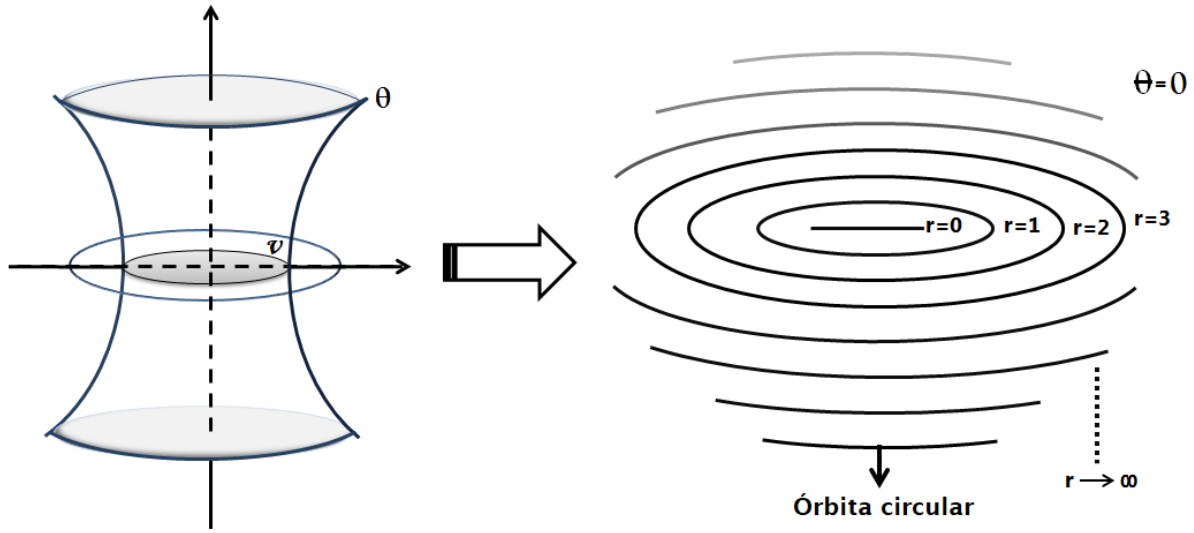


Figura 5.1: Ilustração das coordenadas oblatas (v, θ) com um hiperbolóide e elipsóide centrado. A figura apresenta ainda a redução das coordenadas em um plano bidimensional com $\theta = 0$. Nesse caso, temos um elipsóide bidimensional que resulta em uma singularidade anel quando $r \rightarrow 0$ onde os invariantes de Riemann são infinitos. A estrutura em anel é devido ao fato de termos elipsóides (anéis) que em $r = 0$ ocorre a singularidade [68]. Já para o caso $r \rightarrow \infty$ o plano elíptico se aproxima de um plano circular.

sendo $\gamma = \frac{3p}{a^2}$, p é uma constante.

Como podemos ver a escolha para o valor de θ pode simplificar ou tornar a análise mais trabalhosa devido as expressões para σ e ξ para o caso $l = 1$. Para o caso com a interferência de soluções, $l = 0$ e $l = 1$, continuamos com a estrutura da eq.(5.1), porém temos os σ de $l = 0$ e $l = 1$ somados,

$$\sigma = -\beta \arctan \frac{a}{r} + \gamma \left(1 - \frac{r}{a} \arctan \frac{a}{r} \right) \sin \theta \quad (5.7)$$

e ξ como:

$$\xi = \frac{1}{2} \lambda \ln \left(\frac{r^2 + a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2} \right) - 2\beta \gamma \left(\sin \theta \arctan \frac{a}{r} - \arctan \frac{a \sin \theta}{r} \right) \quad (5.8)$$

$$- \frac{1}{2} \gamma^2 \cos^2 \theta \left[\left(\arctan \frac{a}{r} \right)^2 + \left(1 - \frac{r}{a} \arctan \frac{a}{r} \right)^2 \right] \quad (5.9)$$

sendo $\lambda = 1 + \beta^2 - \gamma^2$.

Nosso propósito quanto ao estudo sob domínio $l = 0$ é obter a equação da órbita de Zipoy e, via método em [1], vamos obter a equação do desvio do periélio. O procedimento será apresentado na subseção a seguir.

5.1 Desvio do periélio - métrica de Zipoy $l = 0$ e $\theta = 0$

Em termos da métrica de Zipoy, ilustrada para o caso de monopólo, eq.(5.1) tomamos a geodésica tipo tempo para obter a equação da órbita. Consideramos $\theta = 0$ o que leva a ajustes como a eliminação da componente $g_{22} = g_{\theta\theta}$ da métrica, pois $d\theta^2 = \dot{\theta}^2 = 0$. Temos então um vínculo de velocidade:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = -1 \quad (5.10)$$

com $v^\alpha = \frac{d\alpha}{d\tau}$, logo

$$-\left(\frac{r^2}{r^2 + a^2}\right)^{\beta^2+1} e^{-2\sigma(r)} \underbrace{\left(\frac{v^r}{\frac{dr}{d\tau}}\right)^2}_{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2} - e^{-2\sigma(r)}(r^2 + a^2) \underbrace{\left(\frac{v^\phi}{\frac{d\phi}{d\tau}}\right)^2}_{\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2} + e^{2\sigma(r)} \underbrace{\left(\frac{v^t}{\frac{dt}{d\tau}}\right)^2}_{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2} = -1. \quad (5.11)$$

Para prosseguir precisamos das quantidades conservadas ao longo dessa geodésica. Lembrando da eq.(2.14) sabemos que tomando o funcional $L^* = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ temos a equação de Euler-Lagrange igual a equação da geodésica de uma partícula. Vimos na seção 2.3 que quantidades conservadas aparecem quando temos apenas o segundo termo da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L^*}{\partial x^\beta} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}^\beta} \right) = 0, \quad (5.12)$$

isto é, quando $\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}^\beta} \right) = 0$. O pressuposto ocorre quando temos apenas dependência de \dot{x}^β , como são os casos para as coordenadas ϕ e t , sendo assim temos para ϕ

$$L^* = -\frac{1}{2}e^{-2\sigma(r)}(r^2 + a^2)\dot{\phi}^2 \quad (5.13)$$

e para t

$$L^* = \frac{1}{2}e^{2\sigma(r)}\dot{t}^2. \quad (5.14)$$

Portanto, encontramos as seguintes grandezas conservadas:

$$L = -e^{-2\sigma(r)}(r^2 + a^2)\frac{d\phi}{d\tau} \rightarrow \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{L^2 e^{4\sigma(r)}}{(r^2 + a^2)^2} \quad (5.15)$$

e

$$E = e^{2\sigma(r)}\frac{dt}{d\tau} \rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = E^2 e^{-4\sigma(r)}. \quad (5.16)$$

Com os resultados para $\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$ e $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$ podemos reescrever a eq.(5.11) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{r^2}{r^2 + a^2}\right)^{\beta^2+1} e^{-2\sigma(r)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - e^{-2\sigma(r)}(r^2 + a^2) \frac{L^2 e^{4\sigma(r)}}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{e^{2\sigma(r)} E^2}{e^{4\sigma(r)}} = -1, \\ & -\left(\frac{r^2}{r^2 + a^2}\right)^{\beta^2+1} e^{-2\sigma(r)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{L^2 e^{2\sigma(r)}}{(r^2 + a^2)}\right) + e^{-2\sigma(r)} E^2 = -1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Isolando $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$ em eq.(5.17), temos:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left[-1 + \frac{L^2 e^{2\sigma(r)}}{(r^2 + a^2)} - e^{-2\sigma(r)} E^2\right] e^{2\sigma(r)} (-1) \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2}\right)^{\beta^2+1}. \quad (5.18)$$

Podemos rearranjar L^2 ,

$$\left(\frac{d\tau}{d\phi}\right)^2 = \frac{(r^2 + a^2)^2}{e^{4\sigma(r)} L^2}, \quad (5.19)$$

para multiplicar o lado direito da eq.(5.18) por $\left(\frac{d\tau}{d\phi}\right)^2$ e, para manter a igualdade, vamos multiplicar o lado esquerdo da eq.(5.18) pelo termo $\frac{(r^2 + a^2)^2}{e^{4\sigma(r)} L^2}$. Acompanhe o resultado:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d\tau}{d\phi}\right)^2 &= \left[1 - \frac{L^2 e^{2\sigma(r)}}{(r^2 + a^2)} + e^{-2\sigma(r)} E^2\right] e^{2\sigma(r)} \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2}\right)^{\beta^2+1} \frac{(r^2 + a^2)^2}{L^2 e^{4\sigma(r)}}, \\ \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= \left[1 - \frac{L^2 e^{2\sigma(r)}}{(r^2 + a^2)} + e^{-2\sigma(r)} E^2\right] \frac{e^{-2\sigma(r)}}{L^2} \left(\frac{r^2 + a^2}{r^2}\right)^{\beta^2+1} (r^2 + a^2)^2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Vamos fazer uma mudança de variável do tipo $u = \frac{1}{r}$, logo $dr = -\frac{du}{u^2}$, e aplicar na eq.(5.20) conforme apresentamos a seguir:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 \frac{1}{u^4} &= \left[1 - \frac{L^2 e^{2\sigma(u)} u^2}{(1 + a^2 u^2)} + e^{-2\sigma(u)} E^2\right] \frac{e^{-2\sigma(u)}}{L^2} \left(\frac{1 + a^2 u^2}{\frac{u^2}{u^2}}\right)^{\beta^2+1} \frac{(1 + a^2 u^2)^2}{u^4}, \\ \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= \frac{e^{-2\sigma(u)}}{L^2} (1 + a^2 u^2)^{\beta^2+3} - u^2 (1 + a^2 u^2)^{\beta^2+2} + \frac{E^2 e^{-4\sigma(u)}}{L^2} (1 + a^2 u^2)^{\beta^2+3}, \\ \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= -u^2 (1 + a^2 u^2)^{\beta^2+2} + \frac{e^{-2\sigma(u)}}{L^2} (1 + a^2 u^2)^{\beta^2+3} \left[1 + E^2 e^{-2\sigma(u)}\right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Precisamos abrir o quadrado e o cubo da soma de dois termos, por isso é viável reduzir o resultado da eq.(5.21) definindo:

$$C(u) = 1 + E^2 e^{-2\sigma(u)}. \quad (5.22)$$

Então encontramos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= -u^2 (1 + 2a^2 u^2 + a^4 u^4) (1 + a^2 u^2)^{\beta^2} \\ &+ \frac{e^{-2\sigma(u)} C(u)}{L^2} (1 + a^2 u^2 + 2a^2 u^2 + 2a^4 u^4 + a^4 u^4 + a^6 u^6) (1 + a^2 u^2)^{\beta^2}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Por pertinência nomeamos:

$$\alpha(u) = (1 + a^2 u^2)^{\beta^2}. \quad (5.24)$$

Substituindo $\alpha(u)$ na eq.(5.23) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= (-u^2 - 2a^2u^4 - a^4u^6)\alpha(u) \\ &+ \frac{e^{-2\sigma(u)}C(u)}{L^2}(1 + 3a^2u^2 + 3a^4u^4 + a^6u^6)\alpha(u), \\ \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= \alpha(u)u^2 \left[\frac{3a^2C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2} - 1 \right] \\ &+ \alpha(u)a^2u^4 \left[\frac{3a^2C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2} - 2 \right] + \alpha(u)a^4u^6 \left[\frac{a^2C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2} - 1 \right] + \frac{\alpha(u)C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Perceba que o resultado da eq.(5.25) é o resultado puro para a equação da órbita da partícula submetida ao regime da métrica de Zipoy estudada. Na sequência vamos realizar considerações astrofísicas para melhor ajustar a equação ao nosso estudo. Truncaremos a expressão da eq.(5.25) em u^4 , pois o regime para $O(u^5)$ nos é desprezível, já que os efeitos nessa escala do sistema solar são insignificantes [69]. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= \alpha(u)u^2 \left[\frac{3a^2C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2} - 1 \right] + \alpha(u)a^2u^4 \left[\frac{3a^2C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2} - 2 \right] \\ &+ \frac{\alpha(u)C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Todavia ainda podemos ter $O(u^5)$ para desprezar, pois temos $\alpha(u)$. Perceba que $C(u)$ ainda pode ser mantido na eq.(5.26), pois depende de $e^{-2\sigma(u)}$. Pensando nisso e fazendo uma expansão binomial para $\alpha(u)$, temos:

$$\alpha(u) = (1 + a^2u^2)^{\beta^2} = 1 + \beta^2a^2u^2 + \dots + O(u). \quad (5.27)$$

Analisando $C(u)$ encontramos regiões proibidas do tipo $E^2e^{-2\sigma(u)} \gg 1$, logo podemos fazer com base na eq.(5.22)

$$C(u) = E^2e^{-2\sigma(u)} \quad (5.28)$$

e substituí-lo posteriormente. Continuando os cálculos com base nas considerações feitas:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= (1 + a^2u^2\beta^2)u^2 \left[\frac{3a^2C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2} - 1 \right] + (1 + a^2u^2\beta^2)a^2u^4 \left[\frac{3a^2C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2} - 2 \right] \\ &+ \frac{(1 + a^2u^2\beta^2)C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2}, \\ \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= u^2 \left[\frac{3a^2C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2} - 1 \right] + u^4a^2\beta^2 \left[\frac{3a^2C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2} - 1 \right] + a^2u^4 \left[\frac{3a^2C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2} - 2 \right] \\ &+ \frac{(1 + a^2u^2\beta^2)C(u)}{e^{2\sigma(u)}L^2}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Agora podemos substituir $C(u) = E^2 e^{-2\sigma(u)}$ na eq.(5.29), logo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= u^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{e^{4\sigma(u)} L^2} - 1 \right] + u^4 a^2 \beta^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{e^{4\sigma(u)} L^2} - 1 \right] + a^2 u^4 \left[\frac{3a^2 E^2}{e^{4\sigma(u)} L^2} - 2 \right] \\ &+ \frac{(1 + a^2 u^2 \beta^2) E^2}{e^{4\sigma(u)} L^2}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Note que a eq.(5.30) ainda não está no formato para fazer uso do método em [1], visto na seção (4.1), $\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = G(u)$. Nesse caso, podemos somar zero no resultado da eq.(5.30) ou retirar o termo $-u^2$ que está livre à direita dessa mesma equação. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 &= u^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{e^{4\sigma(u)} L^2} - 1 \right] + u^4 a^2 \beta^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{e^{4\sigma(u)} L^2} - 1 \right] + a^2 u^4 \left[\frac{3a^2 E^2}{e^{4\sigma(u)} L^2} - 2 \right] \\ &+ \frac{(1 + a^2 u^2 \beta^2) E^2}{e^{4\sigma(u)} L^2} + u^2. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Observe que a eq.(5.31) apresenta exponenciais com dependência de u , $e^{-4\sigma(u)}$. Sabemos que: $e^{-4\sigma(u)}$; $\sigma(u) = -\beta \arctan(au)$; $\beta = \frac{m}{a}$; $u = \frac{1}{r}$ e $r = ax = a \operatorname{senh} v$, logo, mantendo β , podemos obter:

$$e^{-4\sigma(v)} = e^{4\beta \arctan\left(\frac{a}{a \operatorname{senh} v}\right)} = e^{4\beta \arctan(\operatorname{csch} v)}, \quad (5.32)$$

a função dentro do argumento do arcotangente é

$$\operatorname{csch}(v) = \frac{2}{e^v - e^{-v}}. \quad (5.33)$$

Nesse caso, como o comportamento da equação (5.31) é fortemente não-linear podemos procurar uma solução para o desvio do periélio na diferença de duas regiões. Uma região dada por $\sigma(v) \rightarrow 0$ permite fazer uma expansão em torno da singularidade em anel. A outra região é próxima à órbita circular, trata-se do caso $\sigma(v \rightarrow \infty)$, mantendo a função σ finita. Não faria sentido calcular o caso na região da singularidade, $v = 0$, pois não temos domínio sobre essa região e mesmo a própria órbita elíptica fica descaracterizada. O próprio Zipoy afirma que os invariantes de Riemann (ex. Escalar de Kretschmann) são infinitos.

Sendo assim, sabemos que para a região próxima à órbita circular, $\sigma(v \rightarrow \infty)$, a eq.(5.32) terá valor unitário, $e^{-4\sigma(v)} \rightarrow 1$. Já para $\sigma(v)$ pequeno, $\sigma(v) \rightarrow 0$, precisamos expandir $e^{-4\sigma(v)}$, que resulta em:

$$e^{-4\sigma(v)} = 1 - 4\sigma(v) + 8\sigma(v)^2 + \dots \approx 1 - 4\sigma(v). \quad (5.34)$$

Expandindo $-4\sigma(v)$, temos:

$$\begin{aligned}
-4\sigma(v) &= -2\beta \operatorname{csgn}(\operatorname{csch}(v))\pi + 4\beta v - \frac{2}{3}\beta(v)^3 + O(v^4), \\
-4\sigma(0) &= -2\beta \operatorname{csgn}(\operatorname{csch}(0))\pi + 4\beta(0) - \frac{2}{3}\beta(0)^3 + O(v^4), \\
-4\sigma(0) &= -2\beta \operatorname{csgn}(\infty)\pi, \\
-4\sigma(0) &= -2\beta\pi.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Sendo assim, para $\sigma(v) \rightarrow 0$ temos: $e^{-4\sigma(v)} = 1 - 2\beta\pi = e^{-2\beta\pi}$.

Agora podemos retomar os cálculos com o caso para $\sigma(v)$ pequeno, assim a eq.(5.31) terá o seguinte formato:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 &= u^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} - 1 \right] + u^4 a^2 \beta^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} - 1 \right] \\
&+ a^2 u^4 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} - 2 \right] + \frac{(1 + a^2 u^2 \beta^2) E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} + u^2, \\
\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 &= \frac{E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} + u^2 \left[\frac{a^2 E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} (3 + \beta^2) \right] \\
&+ u^4 \left[a^2 \beta^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} - 1 \right] + a^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} - 2 \right] \right].
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Para $\sigma(v \rightarrow \infty)$, a eq.(5.31) apresenta o seguinte formato:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 &= u^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} - 1 \right] + u^4 a^2 \beta^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} - 1 \right] + a^2 u^4 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} - 2 \right] \\
&+ \frac{(1 + a^2 u^2 \beta^2) E^2}{L^2} + u^2, \\
\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 &= u^2 \left[\frac{a^2 E^2}{L^2} (3 + \beta^2) \right] \\
&+ u^4 \left[a^2 \beta^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} - 1 \right] + a^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} - 2 \right] \right] + \frac{E^2}{L^2}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Em ambas as eq.(5.36) e eq.(5.37) vamos aplicar o método visto em [1] para obter a equação do desvio do periélio. O procedimento pode ser acompanhado nas subseções (5.1.1) e (5.1.2).

5.1.1 Desvio do periélio para $\sigma(v)$ pequeno

Aproveitando o resultado da eq.(5.36) dada para a região ao redor da singularidade em anel podemos fazer uso do método Harko, visto na seção (4.1), para obter o desvio do periélio. Na

eq.(5.36) é possível notar que todos os termos multiplicados por u são constantes em relação a u , portanto, podemos escrever essa equação como:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = u^2 A + u^4 B + D, \quad (5.38)$$

sendo A , B e D , respectivamente,

$$A = \frac{a^2 E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} (3 + \beta^2), \quad (5.39)$$

$$B = a^2 \beta^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} - 1 \right] + a^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} - 2 \right] \quad (5.40)$$

e

$$D = \frac{E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi}. \quad (5.41)$$

Vamos chamar a eq.(5.38) de $G(u)$ e calcular

$$F(u) = \frac{1}{2} \frac{dG(u)}{du} \quad (5.42)$$

para mais tarde obter:

$$\delta\phi = \pi \frac{dF(u)}{du} \Big|_{u_0}. \quad (5.43)$$

Seguindo o pressuposto temos $F(u)$ dado por:

$$F(u) = \frac{1}{2} \frac{dG(u)}{du} = \frac{1}{2} (2uA + 4u^3 B) = uA + 2u^3 B. \quad (5.44)$$

Para continuar precisamos saber qual o comportamento de u_0 e então obter $\delta\phi$. Para encontrá-lo precisamos fazer $F(u_0) = u_0$, logo a eq.(5.44) assume o comportamento:

$$u_0 A + 2u_0^3 B = u_0. \quad (5.45)$$

Então, temos a expressão para u_0 ,

$$\begin{aligned} u_0 (A + 2u_0^2 B) &= u_0, \\ A + 2u_0^2 B &= 1, \\ u_0 &= \sqrt{\frac{1-A}{2B}}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Aproveitando o resultado da eq. (5.44) para derivá-lo de acordo com a eq.(5.43) e fazer uso de u_0 , como se segue

$$\delta\phi = \pi \frac{dF(u)}{du} \Big|_{u_0}, \quad (5.47)$$

$$\delta\phi = \pi \left(A + 6B \left(\frac{1-A}{2B} \right) \right), \quad (5.48)$$

encontramos:

$$\delta\phi = 3\pi - 2\pi A. \quad (5.49)$$

Tomando o valor da eq.(5.39) em $\delta\phi$, eq.(5.49), temos para $\sigma(v)$ pequeno o seguinte resultado para o desvio do periélio:

$$\delta\phi = 3\pi - 2\pi \left(\frac{a^2 E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} (3 + \beta^2) \right). \quad (5.50)$$

5.1.2 Desvio do periélio para $\sigma(v \rightarrow \infty)$

A exemplo do caso trabalhado na subseção (5.1.1), para $\sigma(v)$ pequeno, vamos obter a equação do desvio do periélio, $\delta\phi^*$, para $\sigma(v \rightarrow \infty)$, na região próxima à órbita circular, de forma similar. Sabemos que na eq.(5.37) todos os termos multiplicados por u são constantes em relação a essa variável. Nesse sentido, podemos escrever essa equação como:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 = u^2 H + u^4 J + N, \quad (5.51)$$

sendo H , J e N , respectivamente:

$$H = \frac{a^2 E^2}{L^2} (3 + \beta^2), \quad (5.52)$$

$$J = a^2 \beta^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} - 1 \right] + a^2 \left[\frac{3a^2 E^2}{L^2} - 2 \right] \quad (5.53)$$

e

$$N = \frac{E^2}{L^2}. \quad (5.54)$$

Chamando a eq.(5.51) de $G(u)^*$ e derivando o resultado em relação a u temos:

$$F(u)^* = \frac{1}{2} \frac{dG(u)^*}{du} = \frac{1}{2} (2uH + 4u^3 J) = uH + 2u^3 J. \quad (5.55)$$

O próximo passo depende do comportamento de u_0^* para obter $\delta\phi^*$. Sabemos que $F(u_0^*) = u_0^*$, logo a eq.(5.55) fica

$$u_0^* H + 2u_0^{*3} J = u_0^* \quad (5.56)$$

e então temos a expressão para u_0^* ,

$$\begin{aligned} u_0^* (H + 2u_0^{*2} J) &= u_0^*, \\ H + 2u_0^{*2} J &= 1, \\ u_0^* &= \sqrt{\frac{1-H}{2J}}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Feito isso já podemos trabalhar com $\delta\phi^*$. Tomamos a derivada da eq.(5.55) em relação a variável u e, posteriormente, substituímos a expressão obtida para u_0^* , logo $\delta\phi$ é dado por:

$$\begin{aligned}\delta\phi^* &= \pi \frac{dF(u)^*}{du} \Big|_{u_0^*}, \\ &= \pi(H + 6u^2 J) \Big|_{u_0^*}, \\ &= \pi \left(H + 6J \left(\frac{1-H}{2J} \right) \right), \\ \delta\phi^* &= 3\pi - 2\pi H.\end{aligned}\tag{5.58}$$

Sabemos a expressão para H dada pela eq.(5.52), por fim temos como escrever o desvio do periélio para o caso de $\sigma(v \rightarrow \infty)$, $\delta\phi^*$, da seguinte forma:

$$\delta\phi^* = 3\pi - 2\pi \left(\frac{a^2 E^2}{L^2} (3 + \beta^2) \right).\tag{5.59}$$

5.1.3 Solução geral para o desvio do periélio de Zipoy para $l = 0$

Tendo obtido as duas eq.(5.59) e eq.(5.50) podemos pela diferença entre ambas encontrar a fórmula para a precessão para o caso de Zipoy para $l = 0$, $\delta\phi_{(zipoy)} = \delta\phi^* - \delta\phi$:

$$\begin{aligned}\delta\phi_{(zipoy)} &= 3\pi - 2\pi \left(\frac{a^2 E^2}{L^2} (3 + \beta^2) \right) \\ &- \left(3\pi - 2\pi \left(\frac{a^2 E^2}{L^2} e^{-2\beta\pi} (3 + \beta^2) \right) \right),\end{aligned}\tag{5.60}$$

então podemos escrever

$$\delta\phi_{(zipoy)} = \frac{2\pi a^2 E^2}{L^2} (3 + \beta^2) (e^{-2\beta\pi} - 1).\tag{5.61}$$

Podemos melhorar o resultado da eq.(5.61), pois β é pequeno devido a consideração trabalhada para $\alpha(u)$ na eq.(5.27). Logo podemos escrever $e^{-2\beta\pi} \approx 1 - 2\beta\pi$ e $(3 + \beta^2) \approx 3$, então o desvio angular que o plano elíptico visto na fig.(5.1) está sujeito é expresso por:

$$\begin{aligned}\delta\phi_{(zipoy)} &= \frac{6\pi a^2 E^2}{L^2} (1 - 2\beta\pi - 1) \\ \delta\phi_{(zipoy)} &= \frac{-12\pi^2 \beta a^2 E^2}{L^2}.\end{aligned}\tag{5.62}$$

O interessante sobre esse resultado é a possibilidade de levar a resultados negativos para a eq.(5.62). Nesse caso, o desvio do periélio com base na métrica de Zipoy para o caso $l = 0$ permite trabalhar com *precessões retrógradas*¹, sendo útil ao estudo para o caso do cinturão de asteróides, por exemplo.

¹Alguns casos que tratam de fenômenos dessa espécie podem ser visto nas ref.[70]

Podemos refinar o resultado da eq.(5.62) com base na energia orbital específica e no momento angular específico $E = \frac{-GM}{2\gamma}$ e $L^2 = \mu p$, respectivamente, com $\mu = GM$ e $p = \gamma(1 - \epsilon^2)$ logo:

$$\frac{E^2}{L^2} = \frac{(GM)^2}{4\gamma^2(GM)\gamma(1 - \epsilon^2)} \quad (5.63)$$

$$\frac{E^2}{L^2} = \frac{GM}{4\gamma^3(1 - \epsilon^2)}, \quad (5.64)$$

tal que G é a constante da gravitação universal, M a massa, γ o semi-eixo maior e ϵ a excentricidade. Deste modo, a eq.(5.62) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta\phi_{(zipoy)} = \frac{-3\pi^2\beta a^2 GM}{c^2\gamma^3(1 - \epsilon^2)}. \quad (5.65)$$

Na eq.(5.65) percebemos que o termo $\frac{GM}{\gamma^3}$ trata da relação sobre o movimento kepleriano mínimo visto na seção (2.4), sabemos que $\frac{GM}{\gamma^3} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$. Deste modo, podemos reescrever a eq.(5.65) da seguinte forma:

$$\delta\phi_{(zipoy)} = \frac{-12\pi^4\beta a^2}{c^2(1 - \epsilon^2)T^2}. \quad (5.66)$$

Note que o resultado obtido na eq.(5.66) depende de dois parâmetros a e β da métrica de Zipoy, os demais já são conhecidos de acordo com eq.(2.86), lembrando que $T = P(24)(3600)$. Apesar da semelhança entre essas equações o termo a^2 na eq.(2.86) que diz respeito ao semi-eixo maior a princípio é diferente do parâmetro a visto na eq.(5.66). Para enfatizar a ressalva vamos considerar o parâmetro a da eq.(5.66) como a_* . Além disso, o resultado da eq.(2.86) não apresenta a contribuição de $-\pi^4\beta$ que é observada no resultado do desvio de Zipoy dado pela eq.(5.66).

Com base no teste do qui-quadrado podemos encontrar o valor para o parâmetro a_* a partir de um conjunto de valores impostos para o parâmetro β , a saber, isso porque o resultado de β deve ser negativo para levar ao resultado da precessão comumente trabalhada, visto que a eq.(5.66) permite, também, o estudo de precessões retrógradas. Além disso, precisamos do conjunto de dados observacionais de Mercúrio, período orbital - P e precessão do periélio - $\delta\phi_{(obs)}$. Na tabela (9) a seguir apresentamos o valor de $\delta\phi_{(obs)}$ de diferentes literaturas, vale notar que os valores para P foram extraídos das respectivas referências destacadas na terceira coluna da tabela em questão.

Tabela 9: $\delta\phi_{(obs)}$ para o teste do qui-quadrado

P	$\delta\phi_{(obs)}$	Ref.
89	43.098 ± 0.503	[71, 72, 73]
88	43.20 ± 0.86	[74]
89	43.11 ± 0.22	[75]
88	43.11 ± 0.22	[76]
87	42.98 ± 0.09	[77]
87	43.13 ± 0.14	[78]

O procedimento foi feito com auxílio do *Software* Gnuplot versão 5.2. Os parâmetros envolvidos na eq.(2.86) para o planeta Mercúrio são conhecidos, a proposta é substituí-los deixando apenas a_*^2 e P arbitrários na eq.(5.66). Além disso, precisamos levar em consideração a conversão para unidades de segundo de arco por século a fim de obter compatibilização com os dados da precessão do periélio de Mercúrio apresentados na tabela (9).

Já realizamos uma amostra de conversão para unidades de graus por século na eq.(4.37), em termos da unidade que buscamos basta multiplicar a eq.(4.37) por 3600. Deste modo, temos para eq.(5.66):

$$\delta\phi(zipoy) = \frac{-12\pi^4 a_*^2 \beta}{c^2(1-\epsilon^2)T^2} \frac{100}{365.256} \frac{180}{\pi} 3600. \quad (5.67)$$

Sabemos que o período de revolução, T , pode ser escrito com dependência do período orbital, $T = P(24)(3600)$. Ademais, precisamos fixar um valor para β , observamos que de $\beta = -0.00001$ à $\beta = -0.1$ temos satisfeita a hipótese inicial $\beta \ll 1$ sendo o parâmetro a_* grande. Deste modo, assumindo os valores $\pi = 3.14159$, $c = 299792458$, $\epsilon = 0.20563$ e $\beta = -0.1$ na eq.(5.67) obtemos:

$$\delta\phi(zipoy) = 1.370555 \times 10^{-15} \frac{a_*^2}{P^3}. \quad (5.68)$$

Nesse sentido, realizamos o ajuste de qui-quadrado com base na eq.(5.68) para os dados da tabela (9). Ao final de algumas interações o ajuste foi convergido para a_* , obtemos

$$a_* = 1.46303e + 011, \quad (5.69)$$

que é apresenta ordem de grandezas bastante próxima da ordem de grandeza do semi-eixo maior de Mercúrio. Notamos que para o caso de $\beta = -0.00001$ à $\beta = -0.1$ temos a magnitude do parâmetro de comprimento a_* próxima do valor para o semi-eixo maior. Sendo assim, conseguimos estabelecer a interpretação Física ao parâmetro e explicar o porque Zipoy toma a_* com unidades de comprimento.

Na sequência, retornamos à eq.(5.68) fazendo a substituição para os parâmetro a_* , eq.(5.69), e período orbital $P = 87.969$, [79]. Obtivemos êxito quanto ao resultado para $\delta\phi(zipoy)$, pois encontramos o valor conhecido para a precessão do periélio de Mercúrio, aproximadamente

43.0937 segundos de arco por século com erro padrão assintótico de $\pm 9.269 \times 10^8$ e reduzido qui-quadrado 1.79012.

Observamos que mesmo a variação quanto ao valor de β não afeta o resultado final apresentado. Para $\beta = -0.00001$ na eq.(5.67) mantendo os valores já aplicados para π , c e ϵ temos:

$$\delta\phi(\text{zipoy}) = 1.370555 \times 10^{-19} \frac{a_*^2}{P^3}. \quad (5.70)$$

Realizando o teste do qui-quadrado fazendo uso da eq.(5.70) e da tabela (9) encontramos um novo valor para a_* :

$$a_* = 1.46303e + 013. \quad (5.71)$$

Seguindo a proposta do exemplo anterior visto para o caso de $\beta = -0.1$, precisamos tomar o resultado da eq.(5.71) e o valor de $P = 87.969$ e inseri-los na eq.(5.70) para obter, com base na métrica de Zipoy estudada, o valor da precessão do periélio de Mercúrio. O resultado para $\delta\phi(\text{zipoy})$ de Mercúrio para $\beta = -0.00001$ foi o mesmo observado para $\beta = -0.1$, isto é, aproximadamente 43.0937 segundos de arco por século. Comparando os casos para $\beta = -0.1$ e $\beta = -0.00001$ notamos que apenas a ordem de grandeza da equação do desvio que é aplicada no teste do qui-quadrado foi alterada, bem como a ordem de grandeza para a_* .

Para finalizar apresentamos um quadro comparativo entre os resultados obtidos para o desvio do periélio para Mercúrio. Levamos em consideração o resultado padrão (Einstein) [16], $\delta\phi_{Schw}$, bem como outro feito com base na métrica de Weyl [16], $\delta\phi_{Weyl}^{\pm}$, e por fim outro obtido a partir do presente estudo sobre a métrica de Zipoy, $\delta\phi_{Zipoy}$.

Tabela 10: Desvio do periélio de Mercúrio.

Planeta	$\delta\phi_{Schw}$	$\delta\phi_{Weyl}^+$	$\delta\phi_{Weyl}^-$	$\delta\phi_{Zipoy}$
Mercúrio	42,9782	43,1047	42,8569	43,0937

As magnitudes dos desvio observados na tabela (10) são dadas em unidades de segundo de arco por século. Ademais, temos dois resultados para o modelo de Weyl, pois o modelo é semelhante ao apresentado no capítulo 4, possui um incremento máximo e mínimo para o resultado da precessão com base na métrica de Schwarzschild eq.(2.86).

De acordo com a tabela em questão podemos notar que o resultado para o desvio a partir da métrica de Zipoy para o caso de monopólo, $l = 0$, é bastante próximo do valor médio dos resultados observacionais vistos na tabela (9). Ademais, a solução fornece órbitas elípticas

tornando o resultado em pauta uma melhor descrição física para fins astrofísicos, de acordo com a forma, topologia, e simetria do campo gravitacional.

Outro ponto que gostaríamos de ressaltar é que as métricas de Weyl e Zipoy são assintoticamente equivalentes às coordenadas de Schwarzschild, porém uma vez quebrado o difeomorfismo temos outros campos gravitacionais que podem ser ajustados de forma específica. O difeomorfismo possibilita transformarmos um cilindro ou disco em uma esfera, por exemplo [7]. Todavia quando aplicamos as condições para o limite Newtoniano apenas na equação da geodésica, estamos fazendo uso da NNA, e a prática leva a quebra do princípio da covariância generalizada visto na seção 1.3 e então temos um sistema de coordenadas privilegiado.

Nesse sentido, podemos fazer uma analogia para aclarar o que observamos a respeito da tabela (10). Por exemplo, um GPS será melhor calibrado com base na métrica de Kerr do que com a métrica de Schwarzschild. Pois não temos a contribuição da rotação do corpo na métrica de Schwarzschild e por isso ela é um caso particular da métrica de Kerr. Apesar da rotação do planeta Terra ser pequena quando comparada a de um pulsar sabemos que ela existe e uma métrica do espaço-tempo que apresente essa contribuição permitirá um estudo mais fidedigno.

Portanto, podemos afirmar, de certo modo, que o modelo gravitacional do espaço-tempo parece influir no resultado para o desvio estudado. A métrica selecionada para o estudo (métrica de Zipoy) e o uso de uma aproximação que leva em conta os efeitos de não-linearidade da Relatividade Geral (e.g., NNA) conduziram a um resultado mais fidedigno e fisicamente adequado para $\delta\phi$, mesmo em comparação com a solução padrão de Einstein ou via PPN.

Considerações Finais

O presente trabalho oportunizou rever pontos importantes não só da teoria de Einstein. Estudamos aspectos da teoria Newtoniana, bem como formalismo lagrangeano e hamiltoniano, por exemplo. O apanhado quanto a linha do tempo anterior a RG foi importante para podermos desenvolver nosso estudo. Compreendemos um pouco sobre a estrutura tensorial da RG, sobre os princípios básicos que nortearam a transição da RE à RG para incorporar a contribuição da gravitação, bem como os fenômenos previstos pela teoria.

O principal fenômeno tratado no presente trabalho foi o avanço do periélio de Mercúrio. Vimos que mesmo antes da RG o fato pressuposto já era conhecido e por anos buscaram encontrar a solução para o problema. De acordo com o problema de Kepler a órbita dos planetas é fechada, entretanto Mercúrio não apresenta concordância nesse quesito. Sendo assim, muitas considerações para tentar explicar a precessão do periélio de Mercúrio foram feitas. A solução de fato surgiu naturalmente com a RG que levou a obtenção teórica do valor que a experiência observacional mostrava.

Deste modo, diante desse teste clássico da RG a teoria foi validada. Nesse caso, usufruir do teste quanto o avanço do periélio visando contribuir para o desenvolvimento de modelos gravitacionais que sejam mais confiáveis e possibilitem resultados mais precisos é uma boa saída. Tal ensejo é uma preocupação compartilhada por profissionais tanto do ramo teórico como do observacional. Isso porque temos uma gama de dados sobre a estrutura e evolução do universo e uma série de descobertas são feitas, deste modo é natural a busca explicitada.

Sendo assim, aproveitamos os dados observacionais de um conjunto de 34 exoplanetas divididos em três grupos. A experiência funcionou como um laboratório para poder testar o estudo pautado no movimento lento da RG com respeito ao perfil não-linear da teoria via aproximação quase Newtoniana. Notamos que o estudo sobre a precessão do periastro e mesmo periélio não

é uma tarefa trivial sob efeito relativístico. Notamos que a excentricidade, o semi-eixo maior e o período orbital influenciam, $\beta_0 \uparrow + a \downarrow + P \downarrow \rightarrow \delta\phi \uparrow$, para um maior ou menor desvio.

Ademais conseguimos realizar previsões sobre a precessão do periastro de alguns exoplanetas. Verificamos que para excentricidades “grandes” é possível obter uma maior precisão para os resultados já conhecidos sobre o desvio do periastro de exoplanetas estudados. Entretanto, quando a excentricidade é quase nula o resultado via NNA é equivalente ao método usual.

Estudamos ainda o caso da métrica de Zipoy sob o ponto de vista da solução quando $l = 0$. Notamos que essa métrica tem riqueza de detalhes, quanto a forma, topologia, e simetria do campo gravitacional. Fornece uma solução que leva a órbitas elípticas. Além de reproduzir o valor bastante aproximado para a precessão do periélio de Mercúrio, possibilita o estudo voltado ao caso do cinturão de asteróides, pois o desvio angular para métrica de Zipoy pode apresentar resultados negativos (precessões retrógradas). Observamos o motivo pelo qual Zipoy trata o parâmetro a com unidade de comprimento, visto que quanto menor o valor para β temos a magnitude de a próxima do valor para semi-eixo maior.

Nosso propósito de estudo visava mostrar que o modelo gravitacional e uma aproximação apropriada podem surtir em soluções fisicamente adequadas para fins astrofísicos. Vale notar que não se trata de uma modificação da RG. Mostramos que a contribuição da não-linearidade da RG no sistema de equações produz efeitos qualitativos nas órbitas de suas soluções. Compreendemos que mesmo soluções assintóticas à solução de Schwarzschild como exemplo a métrica de Weyl e a métrica de Zipoy quando perdem a covariância generalizada permitem a produção de novos campos gravitacionais. Deste modo, temos a possibilidade de estudar casos astrofísicos respeitando a física do problema, visto que ao linearizar a RG estamos desprezando eventos que ocorrem no campo não-linear.

Contudo, nos dedicamos ao caso mais simples da métrica de Zipoy que está relacionado com a solução de monopólo. Ainda nesse caso mais trivial da métrica obtemos equações orbitais altamente não-lineares que nos permitiram observar uma série de pontos a favor do uso de tal métrica para fins astrofísicos. A perspectiva futura é estudar os outros casos da métrica de Zipoy, solução dipolo e a solução que trata da interferência entre a solução monopólo e a solução dipolo. Bem como, trabalhar frente à possibilidade de obter o desvio do periélio de corpos celestes com base em um procedimento que implica, basicamente, em obter a força vinculada a cada potencial e, posteriormente, extrair o raio orbital desta para aplicá-lo na frequência angular que compõe a equação do desvio.

Referências Bibliográficas

- [1] HARKO, Tiberiu; KOVÁCS, Zoltan; LOBO, Francisco. Solar System test of Horava-Lifshitz gravity. Proc. R. Soc. A(2011) **467**, 1390-1490.
- [2] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Relativity. In: **Fundamentals of physics**. 9^a ed. United States of America: John Wiley & Sons, Inc, 2011. cap. 37, p.1022-1137.
- [3] MISNER, Charles; THORNE, Kip; WHEELER, John. **Gravitation**. San Francisco: Freeman and Company, 1973.
- [4] D'INVERNO, Ray. The k-calculus. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 2, p.15-28.
- [5] PAIS, Abraham. Relativity, the special theory. In: **Subtle is the Lord**. United States: Oxford University Press, New York, 2005. cap. 3, p.111-137.
- [6] D'INVERNO, Ray. The principles of general relativity. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 9, p.120-132.
- [7] CAPISTRANO, Abraão. **A matéria escura como efeito não-linear da gravitação**. 2006. 61f. Dissertação (Mestrado em Física Teórica) - Instituto de Física, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.
- [8] D'INVERNO, Ray. Tensor Algebra. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 5, p.55-67.
- [9] SOARES, D. Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativista. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v.35, n^o.3, 3302, set. 2013.

- [10] FLEISCH, D. A Students Guide to Vector and Tensors. New York: Cambridge University Press, 2012.
- [11] D'INVERNO, Ray. Tensor calculus. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 6, p.68-89.
- [12] ————. The field equations of general relativity. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 10, p.134-144.
- [13] ————. Special relativity revisited. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 8, p.107-119.
- [14] HARTLE, James. The Geometry Outside a Spherical Star. In: **Gravity an Introduction to Einstein's General Relativity**. Pearson Education, San Francisco, 2003. cap. 9, p.186-204.
- [15] D'INVERNO, Ray. Rotating black holes. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 19, p.248-268.
- [16] CAPISTRANO, Abraão; ROQUE, Waldir; VALADA, Rafael. Weyl conformastatic perihelion advance. **MNRAS** 444, 1639-1646 (2014).
- [17] ZIPOY, David. Topology of Some Spheroidal Metrics. **Journal of Mathematical Physics**. v.7, n.6, American Institute of Physics, june, 1966.
- [18] D'INVERNO, Ray. The Schwarzschild solution. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 14, p.180-190.
- [19] CATTANI, Mário. Dedução das Equações da Teoria de Gravitação de Einstein em um Curso de Graduação. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v.20, n.1, p.27-37, mar. 1998. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v20_27.pdf>. Acesso em: 27 mar. 2018.
- [20] D'INVERNO, Ray. Integration, variation, and symmetry. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 7, p.91-103.
- [21] MISNER, Charles; THORNE, Kip; WHEELER, John. Differential Geometry: An Overview. In: **Gravitation**. San Francisco: Freeman and Company, 1973. Cap. 8, p. 195-224.

- [22] D'INVERNO, Ray. The energy-momentum tensor. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 12, p.155-168.
- [23] CARROLL, Sean. Gravitation. In: **Spacetime and Geometry an Introduction to General Relativity**. San Francisco: Addison Wesley, 2004. cap. 4, p.151-192.
- [24] D'INVERNO, Ray. Experimental tests of general relativity. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 15, p.192-209.
- [25] —————. Non-rotating black holes. In: **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999. cap. 16, p.211-229.
- [26] TAYLOR, John. Momentum and Angular Momentum. In: **Classical Mechanics**. University Science Book, United States of America, 2005. cap. 3, p.83-104.
- [27] “Leis de Kepler”. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/leis-de-kepler/>> acesso em: 22 out. 2016.
- [28] “Elipse”. Disponível em: <<http://www.wikiwand.com/es/Elipse>> acesso em: 22 out. 2016.
- [29] “Forma Polar das Cônicas”.
Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/deleo/MA141/Luiza07.pdf>> acesso em: 22 out. 2016.
- [30] MARION, Jerry; THORNTON, Stephen. Central-Force Motion. In: **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5^a ed. Thomson Books/Cole, USA, 2004. cap. 8, p.287-327.
- [31] Figura: “latus rectum” . Disponível em: <goo.gl/cxQyPY>
- [32] LO, Kin-Ho; YOUNG, Kenneth; LEE, Benjamin. Advance of perihelion. **Am. J. Phys.** 81, 695 (2013).
- [33] “Latus rectum”. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Latus_rectum> acesso em: 22 out. 2016.
- [34] “Mecânica Celeste: as 3 Leis de Kepler e a Gravitação Universal”. Disponível em: <<http://blogdoenem.com.br/leis-de-gravitacao-de-kepler-fisica-enem/>> acesso em: 22 out. 2016.

- [35] “Segunda Lei de Kepler”. Disponível em:
<<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/segunda-lei-kepler.htm>> acesso em: 22 out. 2016.
- [36] FROLOV, Valeri P.; KUBIZNAK, David. Higher-Dimensional Black Holes: Hidden Symmetries and Separation of Variables. **Classical and Quantum Gravity**, vol.25, p.154005, jul. 2008. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/0802.0322v2.pdf>>.
- [37] CHERVONYI, Yuri; LUNIN, Oleg. Killing(-Yano) Tensors in String Theory. **Journal of High Energy Physics**. vol.09, p.182, set. 2015. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1505.06154v3.pdf>>. Acesso em: 17 dez. 2015.
- [38] RIETDIJK, Rachael H.; HOLTEN, Jan W. Killing tensors and a new geometric duality. **Nuclear Physics B**, vol.472, p.427, jul. 1996. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/hep-th/9511166v1.pdf>>. Acesso em: 16 mai. 2015.
- [39] SEIDEL, Paola; CABRAL, Luís. Dualities and geometrical invariants for static and spherically symmetric spacetimes. **International Journal of Modern Physics D**, v.25, p.1641007-1641007-7, 2016.
- [40] MARION, Jerry; THORNTON, Stephen. Some Methods in the Calculus of Variations. In:**Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5^a ed. Thomson Books/Cole, USA, 2004. cap. 6, p.207-227.
- [41] —————. Hamilton’s Principle - Lagrangian and Hamiltonian Dynamics. In:**Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5^a ed. Thomson Books/Cole, USA, 2004. cap. 7, p.228-286.
- [42] SÁNCHEZ, Emil. **Cálculo Tensorial**. Rio de Janeiro: Interciência, 2011. p. 252.
- [43] GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charles; SAFKO, John. The Central Force Problem. In: **Classical Mechanics**. 3^a ed. Addison Wesley, 2000. cap. 3, p.70-133.
- [44] VALADA, Rafael. **Soluções Exatas da Métrica de Weyl para Aproximação de Segunda Ordem de um Disco Fino e Testes Clássicos da RG**. 2013. 88f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Programa de Pós-Graduação em Matemática aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

- [45] MARION, Jerry; THORNTON, Stephen. Gravitation. In: **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5^a ed. Thomson Books/Cole, USA, 2004. cap. 5, p.182-206.
- [46] HARTLE, James. Geodesics. In: **Gravity an Introduction to Einstein's General Relativity**. Pearson Education, San Francisco, 2003. cap. 8, p.169-185.
- [47] CARROLL, Sean. The Schwarzschild Solution. In: **Spacetime and Geometry an Introduction to General Relativity**. San Francisco: Addison Wesley, 2004. cap. 5, p.192-237.
- [48] STEWART, M. Precession of the perihelion of Mercury's orbit. **Am. J. Phys.** 73, 730 (2005); doi: 10.1119/1.1949625
- [49] MISNER, Charles; THORNE, Kip; WHEELER, John. Other theories of gravity and the post-newtonian approximation. In: **Gravitation**. San Francisco: Freeman and Company, 1973. Cap. 39, p. 1066-1095.
- [50] CAPISTRANO, Abraão. On Nearly Newtonian Potentials and Their Implications to Astrophysics. **Galaxies** 2018, 6, 48.
- [51] MISNER, Charles; THORNE, Kip; WHEELER, John. Weak gravitational Fields. In: **Gravitation**. San Francisco: Freeman and Company, 1973. Cap. 18, p. 435-447.
- [52] —————. Geometrodynamics in Brief. In: **Gravitation**. San Francisco: Freeman and Company, 1973. Cap. 1, p. 3-44.
- [53] MAIA, M. D.; CAPISTRANO, A. J. S.; MULLER, D. Perturbations of dark matter gravity. **International Journal of Modern Physics D**, v.18, p. 1273-1289, 2009.
- [54] BARROCAS, Guilherme. **Curvas de Rotação de Galáxias LSB em aproximação quase-newtoniana da Teoria da Relatividade Geral**. 2018. 77f. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada) - Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2018.
- [55] JORDÁN, A; BAKOS, G. Observability of the General Relativistic Precession of Periastra in Exoplanets. **The Astrophysical Journal**, 685:543Y552, 2008.
- [56] Bureal International des Poids et Mesures, 2006. Le Système International d'Unités(SI), 8e édition, BIPM, Sévres, 37.

- [57] WRIGHT, J; et al. Four New Exoplanets and Hints of Additional Substellar Companions to Exoplanet Host Stars. **The Astrophysical Journal**, 657:533Y545, 2007. <<http://iopscience.iop.org/article/10.1086/510553/pdf>>
- [58] BUTLER, R; WRIGHT, J; et al. Catalog of Nearby Exoplanets. **The Astrophysical Journal**, 646:505-522, 2006.
- [59] KRULL, C; et al. XO-3b: A MASSIVE PLANET IN AN ECCENTRIC ORBIT TRANSITING AN F5 V STAR. **The Astrophysical Journal**, 677:657-670, 2008. <http://iopscience.iop.org/article/10.1086/528950/pdf>.
- [60] Hebb, L; et al. WASP-12b: THE HOTTEST TRANSITING EXTRASOLAR PLANET YET DISCOVERED. **The Astrophysical Journal**, 693:1920-1928, 2009. Available in: <<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0004-637X/693/2/1920/pdf>>.
- [61] CAMPO, C; et al. ON THE ORBIT OF EXOPLANET WASP-12B. **The Astrophysical Journal**, V. 727, N° 2, 2011.
- [62] WONG, I; et al. 3.6 AND 4.5 μm PHASE CURVES OF THE HIGHLY IRRADIATED ECCENTRIC HOT JUPITER WASP-14b. **The Astrophysical Journal**, 811:122 (15pp), 2015. Available in: <<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0004-637X/811/2/122/pdf>>
- [63] MACDONALD, M; et al. A DYNAMICAL ANALYSIS OF THE KEPLER-80 SYSTEM OF FIVE TRANSITING PLANETS. **The Astronomical Journal**, V. 152, N° 4, 2016.
- [64] GILLON, M; et al. Seven temperate terrestrial planets around the nearby ultracool dwarf TRAPPIST-1. **Nature**, V.542, 456-460, 2017.
- [65] ALBERTI, T; et al. Comparative Climates of TRAPPIST-1 planetary system: results from a simple climate-vegetation model. **The Astrophysical Journal**, V.844, 1, 2017.
- [66] BOLMONT, E; Water loss from terrestrial planets orbiting ultracool dwarfs: implications for the planets of TRAPPIST-1. **MNRAS**, V.464, 3728, 2017.
- [67] VIDA, K; et al. Frequent flaring in the TRAPPIST-1 system - unsuited for life? **The Astrophysical Journal**. V.841, 2, 2017.

- [68] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R.; Exact solutions. In: **The large scale structure of space-times**. United States of America: Cambridge University Press, 1994. Cap. 5, p. 117-179.
- [69] YAMADA, K.; ASADA, H. Post-newtonian effects of planetary gravity on the perihelion shift. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, 423, 3540-3544, 2012.
- [70] CAPISTRANO, Abraão; PENAGOS, Joice; ALARCON, M; Anomalous precession of planets on a Weyl conformastatic solution. **MNRAS** 463, 1587-1591, 2016.
- [71] NAMBUYA, G. G. Azimuthally symmetric theory of gravitation - I. On the perihelion precession of planetary orbits. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, 403, 1381, 2010.
- [72] PITJEVA, E. V.; PITJEV, N. P. Relativistic effects and dark matter in the Solar system from observations of planets and spacecraft. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, 432, 4, 3431-3437, 2013.
- [73] PITJEV, N. P; PITJEVA, E. V. Constraints on dark matter in the solar system. **Astron. Lett**, 39, 3, 141-149, 2013.
- [74] SHAPIRO, I. I; et al. Mercury's Perihelion Advance: Determination by Radar. **Phys. Rev. Lett.**, 28, 1594-1597, 1972.
- [75] SHAPIRO, I. I; et al. Verification of the Principle of Equivalence for Massive Bodies. **Phys. Rev. Lett.**, 36, 555-558, 1976.
- [76] ANDERSON, J. D.; et al. Tests of general relativity using astrometric and radio metric observations of the planets. **Acta Astronautica.**, 5, 43-61, 1978.
- [77] SHAPIRO, I. I., 1990, "Solar system tests of general relativity: Recent results and present plan". In: N. Ashby et. al (Eds): General Relativity and Gravitation, 1989, Proceedings of the 12th International Conference on General Relativity and Gravitation: Cambridge University Press, Cambridge, 313-330.
- [78] ANDERSON, J. D.; et al. 1992, "Recent developments in solar-system tests of general relativity". In: H. Sato et al (Eds.): Proceedings of 6th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Kyoto, June 1991, World Scientific, Singapore, 353-355.
- [79] NASA Mercury Fact Sheet. disponível em: <<https://nssde.gsfc.nasa.gov>>