



UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA  
INSTITUTO LATINO AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Foz do Iguaçu-Paraná

2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA  
INSTITUTO LATINO AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

**Curvas de rotação de galáxias LSB  
em aproximação quase-newtoniana  
da Teoria da Relatividade Geral**

**GUILHERME RIBEIRO GONÇALVES BARROCAS**

*Orientador:* Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza

Foz do Iguaçu-Paraná

2018

# Guilherme Ribeiro Gonçalves Barrocas

## Curvas de rotação de galáxias LSB em aproximação quase-newtoniana da Teoria da Relatividade Geral

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada da Universidade Federal da Integração Latino-Americana (PPGFISA-UNILA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza

### Banca Examinadora

---

Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza (Orientador)  
Universidade Federal da Integração Latino-Americana

---

Prof. Dr. Marcos Duarte Maia  
Universidade de Brasília

---

Prof. Dr. Shahram Jalalzadeh  
Universidade Federal da Integração Latino-Americana

Foz do Iguaçu-Paraná

2018

Catálogo elaborado pela Divisão de Apoio ao Usuário da Biblioteca Latino-Americana  
Catálogo de Publicação na Fonte. UNILA – Biblioteca Latino-Americana

B277c

Barrocas, Guilherme Ribeiro Gonçalves.

Curvas de rotação de galáxias LSB em aproximação quase-newtoniana da teoria da relatividade geral / Guilherme Ribeiro Gonçalves Barrocas. - Foz do Iguaçu, 2018.

77 f.: il.

Orientador: Abraão Jessé Capistrano de Souza.

Universidade Federal da Integração Latino-Americana. Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza. Programa de Pós-graduação em Física Aplicada.

1. Gravitação. 2. Curvas de rotação. 3. Movimento lento. I. Souza, Abraão Jessé Capistrano de, Orient. II. Título.

CDU 531.5



## Resumo

Desde as observações de Bosma e Rubin na década de 1970, as curvas de rotação das galáxias compõem parte central de um dos principais problemas em discussão na astrofísica contemporânea. A indicação da aparente falta de matéria bariônica, decorrente das divergências em relação a previsão newtoniana, induziu à formulação de novos modelos como a hipótese da matéria escura ou modificações da dinâmica newtoniana. No presente trabalho, estudamos o problema por meio de uma aproximação da Relatividade Geral com a aplicação de condições de movimento lento à equação da geodésica, deixando intactas as equações de campo e a equação do desvio geodésico, sem impor as condições de campo fraco. Para a obtenção de um campo de velocidades, foi utilizada uma métrica estática de Weyl em disco fino, com a qual se testou a adequação do modelo a 25 galáxias de baixo brilho superficial (LSB).

**Palavras-chave:** curvas de rotação, gravitação, movimento lento

## *Abstract*

Since the observations of Bosma and Rubin in the 1970s, the rotation curves of the galaxies are one of the main issues under discussion in contemporary astrophysics. The indication of the apparent lack of baryonic matter, due to the divergences with newtonian predictions, led to the formulation of new models, as the dark matter hypothesis or modifications of the newtonian dynamics. In the present work, we study the problem by means of an approximation of General Relativity with low motion condition applied to geodesic equation, leaving intact the field equations and the geodesic deviation equation, without imposing the conditions of weak field. In order to obtain a velocity field, we used a static Weyl thin-disc metric to test the suitability of the model to 25 low surface brightness (LSB) galaxies.

**Key words:** rotation curves, gravity, slow-motion

*Aos amores da minha vida*

*Bruna, Thata e Beni*

*Omnia Disce, videbis postea nihil esse superfluum.*

*Hugo de São Vitor*

---

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- Ao meu orientador, Professor Abraão Jessé Capistrano de Souza, pela paciência e dedicação, assim como pelo empenho em transmitir o máximo de conhecimentos, facilitando, com muita competência, o meu almejado acesso ao mundo da pesquisa em Física;
- Aos membros da Banca examinadora, por aceitarem ceder seus valiosos conhecimentos em Física para avaliar este trabalho;
- Aos Professores do PPGFISA pelos grandes esforços na árdua tarefa de manter viva a Física no Brasil, mesmo com todos os obstáculos que lhes são corriqueiramente impostos;
- À Servidora Roberta Markellyn Manfrin Nami, pelo serviços administrativos prestados com qualidade no PPGFISA, que foram essenciais para o bom andamento do mestrado;
- Aos inúmeros pesquisadores que, direta ou indiretamente, contribuíram com o desenvolvimento da Física utilizada neste trabalho;
- Aos meus Mestres e colegas de tatame, que, a cada treino, me ensinam através da Arte Suave a ter força e coragem para superar qualquer dificuldade (Oss!);
- Aos meus pais, por me educarem e me mostrarem, de forma exemplar, que as grandes conquistas na vida, para valerem a pena, requerem grandes esforços;
- Ao Luiz Fernando, por todo apoio na minha estadia forçada no Rio e as produtivas conversas sobre Física (e Cardiologia);
- Aos meus filhos Benício e Agatha, por muito me ensinarem e por me darem motivos de querer lutar para da-los um mundo melhor que aquele que encontrei;
- À minha sogra e meu sogro e os respectivos vizinhos por sempre estarem dispostos a ajudar;
- Às minhas cunhadinhas Rebeca e Beatriz por me darem muitos momentos de alegria;
- À Bruna, minha razão de viver, por toda paciência de ter me esperado e por todos os momentos como minha companheira, me ensinando a viver. Sem nosso Amor este trabalho não seria possível.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Teoria da Relatividade Geral</b>	<b>12</b>
1.1 Relatividade Especial . . . . .	12
1.1.1 Transformações de lorentz . . . . .	14
1.2 Variedades Diferenciáveis . . . . .	16
1.2.1 Cálculo tensorial . . . . .	18
1.2.2 Geometria das variedades . . . . .	20
1.2.3 Curvatura . . . . .	23
1.3 Relatividade Geral . . . . .	25
1.3.1 Equações de Einstein . . . . .	27
1.3.2 Equação da geodésica . . . . .	30
1.3.3 Desvio geodésico . . . . .	31
<b>2 Curvas de rotação de galáxias</b>	<b>34</b>
2.1 O Problema da Matéria Faltante . . . . .	35
2.2 As Curvas de Rotação . . . . .	36
2.3 Principais Modelos Hipotéticos . . . . .	38
2.3.1 Matéria escura bariônica . . . . .	38
2.3.2 Matéria escura quente (HDM) . . . . .	39
2.3.3 Matéria escura fria (CDM) . . . . .	39
2.3.4 Dinâmica newtoniana modificada (MOND) . . . . .	41
2.3.5 Outros modelos . . . . .	43

---

<b>3</b>	<b>O Formalismo Quase-Newtoniano</b>	<b>44</b>
3.1	Limite newtoniano e aproximação pós-newtoniana . . . . .	45
3.2	A Aproximação quase-newtoniana . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Curvas de Rotação via Modelo Quase-Newtoniano</b>	<b>52</b>
4.1	Métrica estacionária de Weyl . . . . .	53
4.2	Campo de velocidades quase-newtoniano . . . . .	57
4.3	Amostras de galáxias LSB e os ajustes das curvas de rotação . . . . .	59
	<b>Considerações Finais</b>	<b>71</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>72</b>

# Introdução

O estudo aprofundado da dinâmica de rotação das galáxias só foi possível nos anos 1970, graças aos aprimoramentos das técnicas da radioastronomia. As primeiras curvas de rotação obtidas pelos pioneiros Albert Bosma e Vera Rubin evidenciaram um notável problema: a partir da gravitação newtoniana e da quantidade de matéria luminosa observada, foi possível concluir que faltava uma grande quantidade de massa, igual a cerca de cinco vezes a massa de “matéria luminosa comum”, para explicar o formato das curvas.

A divergência observada se dava pelo fato de que, em uma galáxia qualquer, a velocidade linear das estrelas e gases deveria decair com o aumento da distância em relação ao raio galáctico, a partir de um determinado raio crítico que delimitaria a região central mais densa, o bojo galáctico. Porém, geralmente se nota, de forma mais clara nas galáxias espirais, um degrau na região superior da curva, de forma que a periferia da galáxia apresente velocidades próximas ao máximo, mesmo em regiões muito afastadas do núcleo massivo.

A partir daí, como a gravitação newtoniana se mostrou incapaz de descrever o fenômeno, é natural esperar o imediato uso da, testada e reconhecida, Teoria da Relatividade Geral (RG) para explicar a aparente divergência de massas. Porém, além da teoria ser muito mais complexa matematicamente devido a não-linearidade das equações de campo, geralmente considera-se que, nas regiões periféricas das galáxias, o campo gravitacional é muito fraco e a curvatura do espaço-tempo é desprezível. As metodologias que consideram uma condição de campo fraco como método aproximativo, provocam uma linearização das equações de campo da RG, fornecendo potenciais muito próximos àqueles dados pela equação de Poisson da gravitação, compatível com a teoria gravitacional de Newton.

Assim, surgiram diversas outras hipóteses para a explicação das curvas de rotação, sem considerar a RG como alternativa viável, as quais classificaremos como pertencentes a duas



classes distintas. A primeira classe, que apresentou grande aceitação acadêmica já em meados da década de 1980, e que ainda é amplamente estudada e testada, consiste nos modelos de matéria escura. A hipótese da matéria escura considera a existência de algum tipo de matéria permeando as regiões galácticas de modo a completar a massa ausente nas observações. Embora se especule diversos candidatos a constituírem a matéria escura, o ponto comum entre eles seria a propriedade de não conseguirmos observá-los diretamente dentro das limitações tecnológicas contemporâneas. As diversas tentativas frustradas em se observar e identificar a natureza desses candidatos, bem como estudos recentes que questionam a validade de algumas das hipóteses mais usuais, como a da matéria escura fria (vide, por exemplo, [1, 2]), tem levado alguns pesquisadores a abandonarem esse paradigma.

A segunda classe de hipóteses consiste em modificações da própria dinâmica para explicar a aparente matéria faltante. Segundo essas hipóteses, a própria Natureza não pode ser adequadamente compreendida, na escala galáctica, nem pela mecânica newtoniana, nem pela mecânica relativística, sendo necessário realizar modificações nessas teorias, ou mesmo utilizar novos postulados que alterem completamente o entendimento comum de gravitação (como, por exemplo, em [3]). Um ponto de vista utilizado para criticar várias dessas hipóteses consiste na afirmação de que elas teriam problemas epistemológicos decorrentes do fato de apresentarem origens essencialmente empíricas, apresentando explicações *a posteriori* de fatos que uma teoria sólida deveria, em tese, explicar *a priori*.

No trabalho descrito nesta dissertação, não levaremos em conta a possível existência da matéria escura, e não tentaremos modificar teorias consagradas ou criar hipóteses baseadas em postulados inovadores. Para tentar explicar consistentemente as curvas de rotação, partiremos da própria RG, aplicando uma aproximação de movimento lento à equação da geodésica, deixando intactas as equações de campo de Einstein e a equação do desvio geodésico. A principal proposta, que diferencia a aproximação feita neste trabalho das aproximações comuns adotadas no estudo da RG, é de não utilizarmos uma condição de campo fraco como requisito para a construção do modelo. Considerando as velocidades baixas na equação da geodésica, recuperamos as equações de movimento da gravitação newtoniana. Entretanto, sem aplicarmos as condições de campo fraco nas equações não-lineares, a equação de Poisson não é recuperada, o que deixa incompleto o limite newtoniano devido à permanência das características relativísticas no potencial. Temos, então, o chamado *modelo quase-newtoniano*. Como será esclarecido no texto, com as aproximações assumidas, há uma quebra na covariância das equações, e se obtém, para

o campo gravitacional, um potencial quase-newtoniano  $\Phi_{qN}$  na forma

$$\Phi_{qN} = -\frac{c^2}{2}(1 + g_{00}), \quad (1)$$

em que  $c$  é a velocidade da luz e  $g_{00}$  é um componente do tensor métrico. Será mostrado que o termo  $g_{00}$ , contido no potencial, pode carregar parte do aspecto não-linear do campo, tornando a escolha de uma métrica adequada fundamental para a concordância com a realidade.

Nossa ideia principal é utilizar o modelo quase-newtoniano para mostrar que os efeitos da não-linearidade da RG podem gerar significativas alterações no campo de velocidades da rotação de uma galáxia, permitindo a explicação das altas velocidades na região periférica e o formato da curva de rotação. Para isso, utilizaremos uma métrica de Weyl estática, possuidora de simetria axial cilíndrica, a qual aproximaremos à condição de disco fino, para ser compatível com a geometria comum a várias galáxias. Além disso, assumiremos um simplificado modelo exponencial de distribuição de massa, com apenas um parâmetro indeterminado. Para mostrar a adequação do formalismo quase-newtoniano, dadas as condições assumidas, serão apresentados os resultados dos ajustes das curvas de rotação de 25 galáxias com baixo brilho superficial, conforme artigo já submetido e publicado [4]. Como massa das galáxias será considerada apenas dados da matéria luminosa (bariônica), o que se mostra razoável ao considerarmos que, independente da hipótese assumida, o formato das curvas de rotação é essencialmente dependente da distribuição dessa matéria [5].

No primeiro capítulo será apresentada uma sucinta revisão da RG, partindo da Relatividade Especial até os postulados e equações fundamentais, cobrindo os assuntos que consideramos essenciais para a compreensão dos formalismos descritos no restante do texto. No segundo capítulo será apresentado o problema da matéria faltante, decorrente tanto das curvas de rotação quanto de outros fenômenos astrofísicos observados, e serão apresentadas, brevemente, algumas das propostas de elucidação do problema. No terceiro capítulo, serão apresentados o limite newtoniano, suas expansões mais comuns e o formalismo quase-newtoniano. No quarto e último capítulo serão apresentados os detalhes da metodologia empregada nos ajustes das curvas de rotação, assim como o resultado obtido para as 25 amostras de galáxias investigadas.

# Capítulo 1

## Teoria da Relatividade Geral

Neste capítulo serão abordados conceitos básicos da Teoria da Relatividade Geral (RG) fundamentais para o desenvolvimento da aproximação quase-Newtoniana e de sua aplicação aos estudos de curvas de rotação galácticas que serão apresentados no decorrer deste trabalho. Como o objetivo desta etapa inicial é demonstrar a estrutura e as ferramentas básicas da RG para aplicação em um problema da Astrofísica, evitaremos formalismos matemáticos excessivos, com omissão de algumas provas e demonstrações. Um estudo detalhado e completo sobre o tema pode ser encontrado em diversos textos como, por exemplo, os extensos livros clássicos de Wald [6] ou de Misner, Thorne e Wheeler [7], ou, para abordagens mais modernas, o livro de Padmanabhan [8] ou as notas aula de Carroll [9].

Na presente dissertação, assume-se para os índices gregos ( $\mu, \nu, \dots$ ) os valores  $\{0, 1, 2, 3\}$  para as componentes dos tensores, para os índices latinos ( $i, j, \dots$ ) os valores  $\{1, 2, 3\}$ , sem o componente temporal  $\{0\}$ . Assume-se, também, a convenção de soma de Einstein, onde os termos com índices repetidos são somados em todos componentes, como, por exemplo  $X^\mu Y_\mu \equiv X^0 Y_0 + X^1 Y_1 + X^2 Y_2 + X^3 Y_3$ .

### 1.1 Relatividade Especial

Antes de entrarmos na discussão sobre a Relatividade Geral, consideremos o caso particular dos referenciais inerciais, ou seja, sistemas de coordenadas livres de influências externas que se movem em velocidades constantes em relação à outros referenciais inerciais. O estudo de tais sistemas de coordenadas foi apresentado por Einstein em 1905 sobre a teoria que denomina-

mos hoje de Teoria da Relatividade Especial (ou Restrita). A formulação dos postulados da Relatividade Especial (RE) teve base nas observações empíricas de que:

- (i) as equações que expressam as leis da natureza mantêm a mesma forma sob transformações de coordenadas conectando referenciais inerciais;
- (ii) existe uma velocidade máxima de propagação das interações, a velocidade da luz  $c^1$ .

Do postulado (i) podemos concluir que essa velocidade tem que ser a mesma em todos referenciais inerciais [8].

De forma distinta à mecânica Newtoniana, na qual o tempo é considerado um parâmetro universal independente do referencial e do espaço, na RE o tempo deixa de ter um caráter universal e passa a ser uma dimensão acoplada às três dimensões espaciais, formando uma estrutura que chamamos de espaço-tempo. A RE pode ser compreendida como uma teoria que trata de um caso particular de uma variedade 4-dimensional<sup>2</sup> chamada *espaço-tempo de Minkowski*, denotada  $\mathbb{M}^4$ . No espaço-tempo, uma ocorrência pontual definida por um objeto de quatro componentes  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (-ct, \mathbf{x}) = (-ct, x^i)$  é denominada *evento*. Os valores numéricos de  $x^\mu$  dependem do sistema de coordenadas.

Sejam dois eventos P e Q, afastados infinitesimalmente, de coordenadas respectivas  $x^\mu$  e  $x^\mu + dx^\mu$ . Definimos *intervalo* entre esses eventos a relação, em coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.1)$$

onde multiplicamos a componente temporal por  $c$  para manter as dimensões com as mesmas unidades. De forma compacta, temos

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2)$$

onde introduzimos os componentes do tensor métrico de Minkowski<sup>3</sup>,

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, +1, +1, +1\}. \quad (1.3)$$

Suponha um relógio se movendo em trajetória arbitrária em relação a um referencial inercial  $K$ . Medido de  $K$ , o relógio se desloca uma distância  $|d\mathbf{x}|$  durante o intervalo de tempo decorrido

<sup>1</sup>Exatos  $299.792.458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

<sup>2</sup>Conceito no qual nos aprofundaremos adiante.

<sup>3</sup>De forma equivalente, pode-se considerar, no tensor métrico, os sinais das dimensões invertidos. Na presente dissertação consideraremos o sinal da dimensão temporal como negativo e das espaciais positivo. Na definição do tensor foi considerado  $c = 1$

entre  $t$  e  $t = dt$ . Considerando um referencial que se desloca com o relógio,  $K'$ , temos  $d\mathbf{x}' = 0$  e temos a variação do tempo próprio do relógio  $dt' \equiv d\tau$ , tal que [8],

$$-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt' = -c^2 d\tau, \quad (1.4)$$

ou seja,

$$d\tau = \frac{[-ds^2]^{1/2}}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma dt \quad (1.5)$$

onde definimos  $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Tal resultado é fonte de alguns “paradoxos” associados à RE que confrontam a noção da mecânica newtoniana de existência de todo o espaço em “determinado momento do tempo”. Com a ideia de espaço-tempo em substituição ao antigo paradigma, o conceito de simultaneidade entre dois eventos deixa de fazer sentido e esses paradoxos tendem a desaparecer [9].

### 1.1.1 Transformações de lorentz

Ao considerar transformações de sistemas de coordenadas que mantém o intervalo (1.2) invariante, como requerido pelos postulados da RE para referenciais inerciais, vemos que dois tipos de transformações são possíveis [9]. O primeiro tipo, é composto pelas translações, consistindo em um mero deslocamento das coordenadas:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + a^\mu, \quad (1.6)$$

onde  $a^\mu$  é o conjunto de quatro constantes reais.

O outro tipo de transformação consiste na aplicação de um operador em  $x^\mu$  na forma:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu'} x^\nu, \quad (1.7)$$

ou, em uma notação matricial,

$$x' = \Lambda x, \quad (1.8)$$

onde  $\Lambda_{\nu}^{\mu'}$  são os componentes da matriz representada por  $\Lambda$ . No caso das transformações de translação, conforme equação (1.6), os intervalos permanecem inalterados devido à invariância dos termos  $dx^\mu$ . Se quisermos determinar quais valores dos componentes  $\Lambda_{\nu}^{\mu'}$  mantém os intervalos invariantes, podemos fazer, na notação matricial:

$$s^2 = (dx)^T \eta (dx) = (dx')^T \eta (dx') = (dx)^T \Lambda^T \eta \Lambda (dx), \quad (1.9)$$

e temos, então,

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (1.10)$$

ou, em termos das componentes:

$$\eta_{\rho\sigma} = \Lambda_{\rho}^{\mu'} \Lambda_{\sigma}^{\nu'} \eta_{\mu'\nu'}. \quad (1.11)$$

As matrizes que satisfazem (1.10) são conhecidas como *Transformações de Lorentz*, pertencendo ao grupo conhecido como *Grupo de Lorentz*<sup>4</sup>. O grupo apresenta estrutura muito semelhante ao grupo de rotações no espaço tridimensional,  $O(3)$ , constituído de matrizes 3 por 3, com a diferença de possuir uma dimensão a mais (temporal) de sinal invertido. O grupo de Lorentz é denotado, geralmente como  $O(3,1)$ .

Um dos tipos de transformações de Lorentz consiste em rotações ordinárias nas coordenadas espaciais, como, por exemplo uma rotação no plano  $x - y$  por um ângulo  $\theta$ , é dada por

$$\Lambda_{\nu}^{\mu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 \\ 0 & -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Outro tipo de transformação de interesse da RE (sem inversões temporais ou espaciais) consiste nos chamados “*boosts*”, que tratam de rotações envolvendo a dimensão temporal e uma dimensão espacial. Uma rotação dessas envolvendo o plano  $t - x$ , por exemplo, tem a forma:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu'} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \text{senh} \phi & 0 & 0 \\ -\text{senh} \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

onde  $\phi$  varia de  $-\infty$  a  $\infty$ . No caso dos “*boosts*” de Lorentz as coordenadas transformadas serão<sup>5</sup>:

$$t' = t \cosh \phi - x \text{senh} \phi \quad x' = -t \text{senh} \phi + x \cosh \phi \quad y' = y \quad z' = z. \quad (1.14)$$

---

<sup>4</sup>Um grupo  $G$ , é um conjunto não vazio, dotado de uma operação binária  $G \times G \rightarrow G$ , chamada produto, e de uma operação bijetiva  $G \rightarrow G$ , chamada inversa, que apresenta as propriedades de associatividade, existência de um elemento neutro (único) em relação ao produto e a existência de uma inversa (única) para cada elemento de  $G$  (tal que o produto de um elemento por sua inversa é o elemento neutro).

<sup>5</sup>A partir daqui, consideraremos unidades tais que  $c = 1$  para simplificação, exceto quando for de interesse didático explicitar a constante.

No ponto definido por  $x' = 0$ , obtemos a velocidade:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \operatorname{tgh}\phi, \quad (1.15)$$

e em uma notação mais simplificada, fazendo  $\phi = \operatorname{tgh}^{-1}v$ , temos:

$$t' = \gamma(t - vx) \quad x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z, \quad (1.16)$$

que é a forma convencional das expressões das transformações de Lorentz [9].

Uma transformação geral pode ser realizada multiplicando cada uma das transformações individuais, formando um grupo de seis parâmetros, formado por três “boosts” e três rotações. Além disso, as translações podem ser acrescentadas, formando um grupo não-abeliano (ou não comutativo) com dez parâmetros ao qual chamamos *Grupo de Poincaré*.

## 1.2 Variedades Diferenciáveis

Tanto na física pré-relativística quanto na Relatividade Especial, considera-se que os eventos estão imersos em um continuum quadridimensional, podendo ser descritos *globalmente* por correspondências contínuas e injetivas a pontos do  $\mathbb{R}^4$ , ou seja, cada evento do espaço-tempo pode ser caracterizado por quatro números reais em um espaço Euclidiano [6].

Na Relatividade Geral, o espaço-tempo não pode se apresentar globalmente como um espaço Euclidiano, sendo necessária uma topologia que “se pareça” *localmente* com  $\mathbb{R}^4$  e que possa ter suas partes unidas suavemente, formando as chamadas *variedades diferenciáveis*, ou, simplesmente *variedades*. Porém, antes de partirmos para a definição formal de variedades, alguns conceitos básicos precisam ser estabelecidos.

Primeiramente, dizemos que uma topologia é do tipo *Hausdorff* (ou separável) se, para dois pontos distintos  $p$  e  $q$  quaisquer, existem pares de subconjuntos abertos disjuntos, contendo, cada subconjunto, apenas um dos pontos  $p$  ou  $q$ . Além disso, uma topologia Hausdorff é dita *paracompacta* se, e somente se, tem uma base enumerável de conjuntos abertos, ou seja, existe uma bijeção entre seus elementos e o conjunto de números naturais  $\mathbb{N}$ .

Seja  $M$  um espaço topológico. Uma *carta*, ou *sistema de coordenadas local*, é um par  $(\phi, U)$  que consiste em um subconjunto  $U \subset M$  com um homeomorfismo<sup>6</sup>  $\phi$  de  $U$  em um conjunto

---

<sup>6</sup>Um homeomorfismo é uma função bijetora entre dois espaços topológicos, contínua e com inversa também contínua [10]

aberto  $D \subset \mathbb{R}^m$  com a topologia Euclideana usual. Em outras palavras, para um ponto  $p \in M$ , temos  $\phi(p) = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^{m-1}) \in D$ . Dizemos que  $m$  é a *dimensão* de  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  e que os números  $\phi^i$ , com  $(i = 0, 1, \dots, m-1)$  são as coordenadas do ponto  $p$  no sistema  $\phi$ .

Um *atlas* diferenciável de classe  $C^k$  e dimensão  $m$  sobre um espaço topológico  $M$  é uma coleção de cartas  $\{\phi_\alpha, U_\alpha\}$  tal que:

- (i) a união de todos os  $U_\alpha$  cobrem  $M$ ;
- (ii) se duas cartas possuem intersecção não-nula,  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , então o mapa  $(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})$  é um homeomorfismo que leva pontos em  $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \in \mathbb{R}^m$  sobre  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \in \mathbb{R}^m$  e todos esses mapas devem ser  $C^k$  onde são definidos <sup>7</sup>.

Os mapas  $(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})$  e  $(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})$  são chamados de *mudanças de coordenadas*, conforme ilustra a figura 1.1, abaixo. Quando um atlas  $\mathfrak{U}$ , de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  sobre  $M$  contém todos sistemas de coordenadas locais admissíveis em relação a  $\mathfrak{U}$  diz-se que é um *atlas máximo*. Enfim, uma *Variedade Diferenciável* de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  é um par ordenado  $(M, \mathfrak{U})$ , onde  $M$  é um espaço topológico de Hausdorff, paracompacto e  $\mathfrak{U}$  é um atlas máximo de dimensão  $m$  e classe  $C^k$  sobre  $M$  [11].

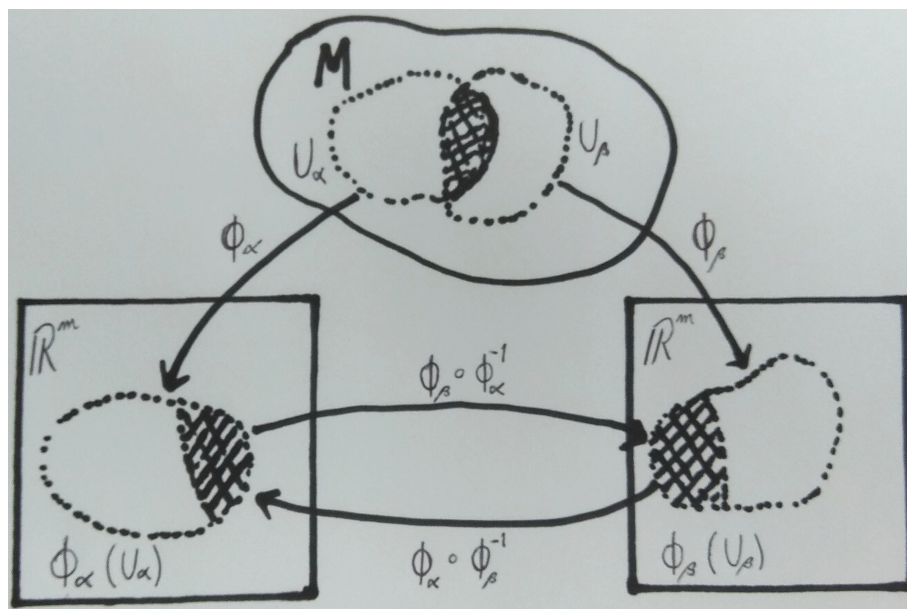


Figura 1.1: Mudança de coordenadas.

<sup>7</sup>uma aplicação é dita  $C^k$ ,  $k \geq 1$  se é  $k$ -vezes diferenciável e  $C^\infty$  se é uma aplicação “suave”, infinitamente diferenciável.



A exigência de que a variedade seja definida como Hausdorff paracompacta pode ser removida em alguns contextos, mas a assumiremos necessária para integração em qualquer domínio. Da mesma forma, é conveniente exigir, por razões físicas, que a variedade seja *conexa* (não-disjunta)[12]. No presente trabalho consideraremos apenas variedades de classe  $C^\infty$ .

### 1.2.1 Cálculo tensorial

Para a construção de equações físicas que permaneçam invariantes sob mudanças de coordenadas, precisamos saber como as quantidades descritas pelas equações se comportam com essas transformações [17]. Apresentaremos, agora, objetos fundamentais para o desenvolvimento da RG, cujas propriedades de transformação são particularmente simples, os *Tensores*.

Consideremos, inicialmente, o conjunto de todas as curvas parametrizadas que passam por um ponto  $p$  de uma variedade  $M$ , ou seja, o espaço de todos mapas não-degenerados  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ , tal que  $p$  esta na imagem de  $\gamma$ . Ao definir o espaço de todas aplicações  $C^\infty$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  podemos notar que para cada curva que passa por  $p$  pode ser definido o operador *derivada direcional*, que mapeia  $f \rightarrow df/d\lambda$ . Podemos definir, enfim, o *espaço tangente*  $T_p$  como o espaço dos operadores da derivada direcional das curvas que passam por  $p$  [9].

Podemos considerar os operadores derivadas parciais ( $\{\partial/\partial x^\mu\}$ , ou simplesmente  $\{\partial_\mu\}$ ) como os elementos de uma base particular para  $T_p$ , conhecida como *base coordenada*. Com uma mudança de coordenada  $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$  os novos vetores da base  $\partial_{\mu'}$  podem ser obtidos pela regra da cadeia:

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu. \quad (1.17)$$

Um vetor qualquer neste espaço de base  $\{\partial_\mu\}$  pode ser escrito como  $V^\mu \partial_\mu$ , onde os  $V^\mu$  são os seus componentes. Para que este vetor seja invariante na transformação, consideramos a igualdade

$$V^\mu \partial_\mu = V^{\mu'} \partial_{\mu'} = V^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu, \quad (1.18)$$

e temos, portanto, a regra de transformação para os componentes do vetor:

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu. \quad (1.19)$$

Um vetor que obedeça essas relações de transformação é chamado *vetor contravariante* ou *tensor contravariante de ordem 1*, e tem seus componentes identificados pelos índices sobrescritos.

Similarmente, consideremos o dual de  $T_p$ , o espaço cotangente  $T_p^*$ , formado pelos mapas lineares  $\omega : T_p \rightarrow \mathbb{R}$ , duais dos vetores contravariantes, as *1-formas*. Uma base natural para

$T_p^*$  é formada pelos gradientes  $dx^\mu$ , e uma 1-forma arbitrária do espaço cotangente pode ser escrita em termos dos seus componentes como  $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ . Temos então as propriedades de transformações de coordenadas [9] :

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (1.20)$$

para os elementos da base, e

$$\omega_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \omega_\mu \quad (1.21)$$

para os componentes da 1-forma, ou *tensor covariante de ordem 1*.

Para generalizar, definimos um *tensor de ordem*  $(r, s)$ , sendo  $r$  e  $s$  inteiros não-negativos, como uma aplicação multilinear do produto cartesiano  $\underbrace{T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{r \text{ vezes}} \times \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_{s \text{ vezes}}$  em  $\mathbb{R}$ . Dizemos que  $r$  é a ordem contravariante do tensor e  $s$  é a ordem covariante. Um tensor arbitrário  $T$ , de ordem  $(r, s)$ , pode ser expandido como

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s}, \quad (1.22)$$

onde o produto tensorial entre um tensor  $U$  de ordem  $(m, n)$  e um tensor  $W$  de ordem  $(p, q)$  representado por  $U \otimes W$ , é uma aplicação bilinear que satisfaz a relação

$$\begin{aligned} U \otimes W(\mu^1, \dots, \mu^m, \nu_1, \dots, \nu_n, \sigma^1, \dots, \sigma^p, \rho_1, \dots, \rho_q) \\ = U(\mu^1, \dots, \mu^m, \nu_1, \dots, \nu_n) \times W(\sigma^1, \dots, \sigma^p, \rho_1, \dots, \rho_q), \end{aligned} \quad (1.23)$$

e, conseqüentemente,  $U \otimes W$  é um tensor de ordem  $(m + p, n + q)$ . A regra de transformação dos componentes em uma mudança de coordenadas é dada por

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_r}_{\nu'_1 \dots \nu'_s} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_r}}{\partial x^{\mu_r}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial x^{\nu'_s}} T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}. \quad (1.24)$$

Convém notarmos que as derivadas parciais de um tensor não são, em geral, novos tensores. De fato, se considerarmos, por exemplo, um vetor contravariante de componentes  $V^\mu$ , para uma mudança de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ , teremos que

$$\partial_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \left( \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} V^\nu \right) = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\nu \partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu. \quad (1.25)$$

Isso ocorre pois, para a obtenção da derivada parcial é necessária a subtração dos tensores em pontos diferentes de uma vizinhança, e envolve a matriz de transformação em pontos distintos da variedade [13]. Mostraremos na próxima seção como realizar a derivação de forma a manter o caráter tensorial.

## 1.2.2 Geometria das variedades

Uma variedade não é dotada necessariamente de uma geometria, no sentido de que possamos medir ângulos e distâncias. Entretanto, podemos implementar uma geometria à variedade utilizando elementos da *Geometria métrica* ou da *Geometria afim*. No primeiro caso, para definirmos a noção de retas paralelas em uma variedade  $M$ , é necessário definir uma métrica pela introdução de um produto escalar de vetores na variedade. Como variedades não possuem vetores, definimos localmente, para cada espaço tangente, um mapa linear e simétrico<sup>8</sup> [14]:

$$\langle , \rangle : T_p \times T_p \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.26)$$

Como o produto escalar é localmente definido, os componentes do chamado *tensor métrico* em uma base arbitrária  $\{e_\mu\}$ , dados por

$$g_{\mu\nu} = \langle e_\mu, e_\nu \rangle, \quad (1.27)$$

também são definidos localmente, o que dificulta a definição de distância entre pontos distintos da variedade. Assim, a comparação entre distâncias em pontos diferentes requer uma condição adicional, qual seja, que o intervalo no espaço-tempo, ou *elemento de linha*,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.28)$$

seja preservado. Tal isometria é válida em espaços-tempo de Minkowski, Newton e Galilei, mas no caso de variedades com métricas arbitrárias os componentes variam ponto a ponto e as medidas de distância dependem da existência de uma *conexão afim* compatível com a geometria métrica [14].

Precisamos destacar algumas importantes definições propriedades operacionais do tensor métrico (ou, simplesmente “*métrica*”). Primeiramente, o *comprimento*, ou *norma*, de um vetor contravariante  $V^\mu$  é dado por

$$V^2 = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu, \quad (1.29)$$

e diz-se que a métrica é *positivo-definida* ou *negativo-definida* se, para qualquer vetor  $V^\mu$ ,  $V^2 > 0$  ou  $V^2 < 0$ , respectivamente, e *indefinida* em qualquer outro caso. O *ângulo* entre dois vetores

---

<sup>8</sup>Existe na Geometria Euclideana uma terceira condição, de que a métrica deve ser positiva definida (dado um vetor  $v$ , então  $\langle v, v \rangle \geq 0$ ). Em alguns casos, como nas Variedades Lorentzianas, a condição não é válida e deve ser omitida.

$V^\mu$  e  $W^\mu$  de norma não-nula é dado pela relação

$$\cos(V, W) = \frac{g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu}{(|g_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta|)^{\frac{1}{2}} (|g_{\sigma\rho}W^\sigma W^\rho|)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.30)$$

e, os vetores são ditos ortogonais caso

$$g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu = 0. \quad (1.31)$$

Caso o determinante da métrica, denotado por  $g = \det(g_{\mu\nu})$  seja diferente de zero, chamamos a métrica de *não-singular* e podemos obter a inversa de  $g_{\mu\nu}$ , o tensor contravariante de ordem 2,  $g^{\mu\nu}$ , pela relação

$$g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu, \quad (1.32)$$

em que  $\delta_\mu^{\nu}$  é o *delta de Kronecker* que assume valor 1 caso  $\mu = \nu$  e 0 caso  $\mu \neq \nu$ , ou, pela definição de derivadas parciais,

$$\delta_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (1.33)$$

O tensor métrico, nas formas covariante e contravariante, pode ser utilizado para alterar a ordem dos tensores nas operações de "elevação e abaixamento dos índices", definindo

$$T_{\dots\mu\dots} = g_{\mu\nu}T^{\dots\nu\dots}, \quad (1.34)$$

e, também,

$$T^{\dots\mu\dots} = g^{\mu\nu}T_{\dots\nu\dots}. \quad (1.35)$$

Assim, ao trabalharmos com uma variedade dotada de uma métrica, podemos associar os tensores covariantes e contravariantes como representações de um mesmo objeto geométrico [13].

Uma forma alternativa (ou complementar) de introduzirmos características geométricas à variedade, é o uso da *geometria afim*, baseada na noção de *transporte paralelo* de um campo vetorial ao longo de uma curva, realizado de forma a manter o ângulo constante entre o vetor transportado e a curva. Podemos postular a existência de um sistema de coordenadas no qual os componentes de qualquer vetor não são alterados por deslocamentos infinitesimais na vizinhança de um ponto  $p$  de uma variedade, ou seja, existe um transporte paralelo dos vetores. Um sistema de coordenadas com essa característica é dito *geodético* em  $p$  [15].

Como resultado da geometria afim, pode-se construir uma derivada que mantenha o caráter tensorial a partir da adição à derivada parcial de um termo que corrige os vetores ou tensores para um transporte paralelo, a *derivada covariante* (denotada por  $\nabla_\mu$ , em relação à direção

$\mu$ ). O operador derivada covariante,  $\nabla$  tem as mesmas utilidades da derivada parcial, mas de forma independente das coordenadas, mapeando campos tensoriais de ordem  $(k, l)$  em campos tensoriais de ordem  $(k, l + 1)$  apresentando as propriedades de (1) linearidade ( $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$ ) e (2) regra de Leibniz ( $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$ ) [9]. Temos, para um vetor contravariante,

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu V^\lambda, \quad (1.36)$$

onde os  $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu$  são os coeficientes da *conexão afim* (ou, simplesmente *conexão*), também chamados *símbolos de Christoffel*. Para que a expressão seja, de fato, tensorial, temos que exigir, para uma mudança de coordenadas,

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu. \quad (1.37)$$

Para obtermos a regra de transformação para os coeficientes de conexão, basta utilizarmos essa exigência em (1.36), utilizando a equação (1.25) para derivadas parciais, ou seja, fazemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu'} V^{\nu'} &= \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma_{\lambda'\mu'}^{\nu'} V^{\lambda'} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'} \partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu + \Gamma_{\lambda'\mu'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda, \end{aligned} \quad (1.38)$$

e, com a expansão do lado direito,

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu, \quad (1.39)$$

conseguimos obter com algumas manipulações, a partir de (1.31) e (1.32),

$$\Gamma_{\lambda'\mu'}^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}, \quad (1.40)$$

que é a regra de transformação para a conexão. Fica claro, com o resultado acima, que símbolos de Christoffel não se comportam como tensores. Para o caso geral de um tensor arbitrário de ordem  $(k, l)$ , convém exigirmos para o operador derivada covariante, as propriedades adicionais de (3) comutar com contrações ( $\nabla_\mu(T^\nu{}_{\nu\lambda}) = (\nabla T)_\mu{}^\nu{}_{\nu\lambda}$ ) e de (4) reduzir à derivada parcial quando aplicada a escalares ( $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$ ). Para uma 1-forma, a derivada covariante é dada por

$$\nabla_\mu\omega_\nu = \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (1.41)$$

e, enfim, para o caso de um tensor geral, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s} &= \partial_\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &+ \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu_1} T^{\sigma \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \nu_s} + \dots + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu_r} T^{\mu_1 \dots \sigma}{}_{\nu_1 \dots \nu_s} \\ &- \Gamma_{\lambda\nu_1}^\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\sigma \dots \nu_s} - \dots - \Gamma_{\lambda\nu_s}^\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_r}{}_{\nu_1 \dots \sigma}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

### 1.2.3 Curvatura

Neste trabalho serão considerados apenas efeitos de curvatura do espaço-tempo, sendo desconsiderada a possível presença de torção na geometria. Para isso vamos sempre considerar que a conexão é simétrica em relação aos seus índices covariantes<sup>9</sup>, ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} . \quad (1.43)$$

Além disso, para deixar a geometria afim compatível com a métrica, podemos exigir, como postulado por Riemann, de que o tensor métrico se comporte como uma constante em relação a derivada covariante, ou, em outras palavras exigimos a condição de *metricidade da conexão* [14]:

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0 . \quad (1.44)$$

Uma variedade dotada de um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  que atenda essas exigências (conexão simétrica e de derivada covariante nula) é dita *Riemanniana* se o tensor métrico é positivo-definido e *pseudo-Riemanniana* caso não seja. Além disso existe uma única conexão que atende a esses postulados, que pode ser obtida ao fazermos [12]:

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} g_{\sigma\mu} = 0 . \quad (1.45)$$

Com permutações cíclicas dos índices  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$ , obtemos

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} &= g_{\lambda\sigma} (\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}) \\ &= 2g_{\lambda\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} , \end{aligned} \quad (1.46)$$

que nos dá os coeficientes da conexão em termos dos coeficientes do tensor métrico:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}) . \quad (1.47)$$

O transporte paralelo de um vetor qualquer, entre dois pontos  $p$  e  $q$  ao longo de uma curva depende, em geral, da curva escolhida para conectar esses pontos. Devido a essa dependência do caminho percorrido, temos que, em geral, o vetor falha em retomar os valores iniciais ao percorrer uma curva fechada, em que partida e chegada ocorrem em um mesmo ponto. Posto de outra forma, podemos definir o *Tensor de Curvatura de Riemann* (ou simplesmente *Tensor*

---

<sup>9</sup>Algumas geometrias alternativas à usual da Relatividade Geral, como as geometrias de Einstein-Cartan e de Wittenbock, consideram que o tensor de torção, dado por  $T_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$  não é nulo, o que causa significantes modificações na conexão e na sua relação com a métrica.

de Riemann) em termos da falha de sucessivas operações da derivada covariante comutarem quando aplicadas em um vetor qualquer [6]. O tensor de Riemann,  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$  é obtido, portanto por

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu}V^\beta = (\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu)V^\alpha, \quad (1.48)$$

ou, expandindo os coeficientes, temos

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv \partial_\mu\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}. \quad (1.49)$$

Ocasionalmente, é usual escrever o tensor de Riemann com quatro índices covariantes,  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\sigma\alpha}R^\sigma_{\beta\mu\nu}$  para expandi-lo em termos do tensor métrico e dos símbolos de Christoffel, ou seja, na forma

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\beta\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha\partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\partial_\mu g_{\beta\nu}) + g_{\sigma\rho}(\Gamma^\sigma_{\beta\mu}\Gamma^\rho_{\alpha\nu} - \Gamma^\sigma_{\beta\nu}\Gamma^\rho_{\alpha\mu}). \quad (1.50)$$

O tensor de curvatura de Riemann esta vinculado diretamente a dependência do caminho do transporte paralelo, determinando a geometria da variedade. Convém destacar que, a ideia Riemanniana de curvatura é compatível com a geometria de superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , para alguns objetos geométricos básicos. Entretanto, o tensor de Riemann não é o suficiente para diferenciar, por exemplo, entre um plano e um cilindro, bem como entre uma infinidade de outras superfícies [14]. Algumas propriedades de simetria do tensor de Riemann devem ser notadas, quais sejam,

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = -R^\beta_{\alpha\mu\nu} \quad (1.51)$$

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = -R^\alpha_{\beta\nu\mu} \quad (1.52)$$

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = R^\mu_{\nu\alpha\beta} \quad (1.53)$$

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} + R^\alpha_{\nu\beta\mu} + R^\alpha_{\mu\nu\beta} = 0, \quad (1.54)$$

bem como as importantes contrações que formam o denominado *Tensor de Ricci*,

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\alpha\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (1.55)$$

e o *Escalar de Curvatura*,

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (1.56)$$

Uma outra propriedade de simetria com grande importância para a RG, relacionada às derivadas covariantes do tensor de Riemann, é a existência das *identidades de Bianchi*, que são dadas por

$$\nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R^\alpha_{\beta\lambda\mu} + \nabla_\mu R^\alpha_{\beta\nu\lambda} = 0. \quad (1.57)$$

Se multiplicarmos as identidades acima por  $g^{\alpha\mu}$ , obtemos

$$\nabla_\lambda R_{\beta\nu} - \nabla_\nu R_{\beta\lambda} + \nabla_\mu R^\mu_{\beta\nu\lambda} = 0, \quad (1.58)$$

para continuar, usarmos  $g^{\beta\nu}$  para as contrações de índice subsequentes, chegamos a

$$\nabla_\lambda - 2\nabla_\nu R^\nu_\lambda = 0, \quad (1.59)$$

e, enfim, após pequenas manipulações de índices e multiplicação da equação por  $g^{\mu\nu}$ , chegamos a

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0, \quad (1.60)$$

ou, em uma notação mais compacta<sup>10</sup>,

$$G_{\mu\nu};^\mu = 0. \quad (1.61)$$

em que,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.62)$$

é denominado *Tensor de Einstein* e a equação (1.60) desempenha importante papel em garantir a consistência das equações de campo da RG [6].

### 1.3 Relatividade Geral

A partir dos fundamentos básicos expostos nas seções anteriores, podemos introduzir, enfim a teoria da RG. Devemos notar que a Relatividade Especial, por envolver apenas referenciais inerciais, não era capaz de descrever a gravitação, sendo necessária uma nova teoria que, em determinadas condições limítrofes, fosse compatível com os fenômenos descritos pela física Newtoniana. Em 1916<sup>11</sup>, Einstein publicou um artigo na *Annalen der Physik* [16] que consolidou a RG, descrevendo uma nova teoria da gravitação com base em princípios que alteraram significativamente as noções comuns de espaço-tempo, causando fortes mudanças de paradigma na Física. Embora não exista um consenso de qual a melhor forma de estruturar logicamente os

---

<sup>10</sup>É comum nos textos de RG é a representação de derivadas parciais por vírgulas e de derivadas covariantes por ponto-e-vírgulas, como, por exemplo em  $\partial_\mu A_\nu = A_{\nu;\mu}$ , e  $\nabla_\mu A_\nu = A_{\nu;\mu}$ . Ao longo dessa dissertação serão utilizadas as duas notações

<sup>11</sup>Antes do artigo de 1916, Einstein publicou outros quatro artigos em novembro de 1915, que mostravam por partes os elementos da RG.



alicerces da RG, consideraremos, sem nos alongar em explicações filosóficas, que os postulados da teoria são:

- (i) o Princípio da Equivalência;
- (ii) o Princípio da Covariância Generalizada;
- (iii) a validade das Equações de Campo de Einstein.

Primeiramente, convém acrescentar aos três postulados que uma das motivações para a formulação da RG, foi o *Princípio de Mach*, que trata-se de redefinições sobre a origem da inércia e sobre referenciais inerciais em relação às “estrelas fixas”. De forma resumida e simplificada, as ideias essenciais associadas ao Princípio de Mach são [13]:

- (i) a distribuição de matéria determina a geometria do Universo;
- (ii) se não há matéria, não há geometria;
- (iii) o corpo em um Universo vazio não possui propriedades inerciais.

A assunção de tais ideias implica na necessidade de se descrever geometricamente o espaço-tempo e associar a esta geometria a distribuição da matéria.

O *Princípio da Equivalência* surgiu das observações experimentais de que a massa inercial,  $m_i$ , relacionada à reação de um corpo frente ao emprego de uma força e a massa gravitacional,  $m_g$ , relacionada à reação de um corpo frente a um campo gravitacional (forma passiva) ou relacionada a geração do campo gravitacional (forma ativa), são equivalentes, ou seja,

$$m_i = m_g. \quad (1.63)$$

Tal assunção, chamada em particular de *Princípio da Equivalência Fraco* pode ser interpretado como “as leis de partículas em queda livre são as mesmas em um campo gravitacional e em um referencial uniformemente acelerado, em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo” [9]. Uma extrapolação para fortalecer esse postulado “fraco”, foi realizada por Einstein com o argumento de que não há experimento possível de ser realizado dentro de uma caixa opaca que permita distinguir se a caixa está em um campo gravitacional externo ou se esta em aceleração uniforme. Assim, foi elaborado o *Princípio da Equivalência de Einstein* que nos diz: “Em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, as leis da física se reduzem às leis da Relatividade Especial, sendo impossível detectar a presença de um campo gravitacional” [9].

Outro postulado, muitas vezes considerado equivalente ou resultante do Princípio da Equivalência, é o *Princípio da Covariância Generalizada*, que estabelece as leis que regem a Física devem ser escritas por equações tensoriais, ou seja, não existem referenciais privilegiados e uma transformação qualquer de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$  não deve alterar a forma das equações. Além disso, na ausência da gravitação, devem permanecer válidas as equações, de acordo com as leis da RE, em que o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  se iguala ao tensor de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  e a conexão afim  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  se anula (diz-se, neste caso que espaço-tempo é plano) [17]. Importante consequência da Covariância Generalizada é a inexistência de uma geometria primordial, ou seja, não existe nenhum aspecto da geometria do espaço-tempo que não possa ser alterada com uma mudança na distribuição de das fontes da gravitação [7]. A covariância generalizada ocasionalmente é referida como *invariância de difeomorfismo*, em que as mudanças de coordenadas são difeomorfismos<sup>12</sup> em  $\mathbb{R}^n$  dados pelos mapas  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  [14].

### 1.3.1 Equações de Einstein

O terceiro postulado fundamental para a construção da RG é a validade das *Equações de Campo de Einstein*, que vinculam a geometria do espaço-tempo com a matéria (e energia). Uma forma simplificada de visualizarmos a o significado das equações de campo, consiste em considerarmos o tensor de Einstein, que se conserva pela identidade de Bianchi, proporcional ao denominado *Tensor de Energia-Momento*,  $T_{\mu\nu}$  ou seja,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.64)$$

em que  $\kappa$  é uma constante de proporcionalidade.

O tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$  é uma quantidade tensorial relacionada ao fluxo e densidade de energia e de momento em um espaço-tempo. Podemos usar, como exemplo, para ilustrar uma das possíveis formas desse tensor, o campo de matéria incoerente não-interagente, ou *poeira*, que é caracterizado por um campo de *4-velocidades*,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (1.65)$$

sendo  $\tau$  o tempo próprio ao longo da linha-mundo da partícula, e pelo campo escalar

$$\rho_0 = \rho_0(x^\mu), \quad (1.66)$$

---

<sup>12</sup>difeomorfismos são homeomorfismos com as aplicações e suas inversas não apenas contínuas, como suaves, ou seja, de classe  $C^\infty$ .

que é a *densidade própria*, que é a densidade observada em um referencial que se move com o fluxo. Nesse caso, temos o mais simples tensor de segunda ordem que podemos construir [13],

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu. \quad (1.67)$$

Considerando em termos da RE, com uso da métrica de Minkowski, que resulta em  $d\tau = \gamma^{-2} dt^2$ , podemos calcular o componente  $T^{00}$  do tensor de energia-momento,

$$T^{00} = \rho_0 \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = \rho_0 \frac{dt^2}{d\tau^2} = \gamma^2 \rho_0, \quad (1.68)$$

relação da qual podemos extrair a densidade,  $\rho$ , medida por um observador fora do fluxo de “poeira”, em relação ao qual o campo de material passa em uma velocidade  $\mathbf{u}$ , qual seja,

$$\rho = \gamma^2 \rho_0. \quad (1.69)$$

Dessa forma, o componente  $T^{00}$  pode ser interpretado como *densidade de energia relativística* do tensor. De forma similar, os componentes  $T^{0i}$  com  $i$  variando de 1 a 3, podem ser identificados como os *componentes de momento linear* do tensor. De fato, as equações que governam o campo de poeira na ausência de forças na RE podem ser dadas por

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.70)$$

que correspondem à *equação de continuidade* clássica quando  $\mu = 0$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \partial_i u^i = 0. \quad (1.71)$$

Fazendo uma transição de (1.69) com derivadas parciais, para o caso da RG, que requer derivadas covariantes, temos as equações

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.72)$$

que, apesar de sua semelhança com o caso da equação de continuidade, não formam uma lei de conservação. De fato, não devemos esperar que o momento e energia de um sistema físico sejam conservados por si próprios quando sob influencia de um campo gravitacional externo ( $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ ) [8]. Como a derivada covariante do tensor de Einstein também é nula, a proporcionalidade entre os tensores se mostra justificada, dando robustez a hipótese (1.63).

Para a obtenção do valor da constante de proporcionalidade  $\kappa$ , são realizadas comparações com resultados amplamente testados da mecânica Newtoniana, como o exame da aceleração de uma partícula ao entrar em um cano inserido em um planeta idealizado de densidade uniforme.

De acordo com Newton, a aceleração relativa é governada pela densidade; de acordo com a Relatividade de Einstein é governada pela curvatura do espaço-tempo [7]. O valor obtido para a constante é , então,

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \quad (1.73)$$

sendo  $G$  a constante de gravitação universal<sup>13</sup>. As equações de campo de Einstein tomam, enfim a forma<sup>14</sup>:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.74)$$

Pode-se notar nas equações de campo que, ao lado esquerdo, temos a exposta os termos que regem a estrutura geométrica do espaço-tempo e, ao lado direito, temos o termo que rege a matéria. O vínculo entre geometria e matéria, em concordância com as ideias de Mach e explicitadas pelas equações de campo podem ser resumidas pela célebre frase de Wheeler: “Spacetime tells matter how to move, and matter tells spacetime how to curve.”<sup>15</sup> [7]. Multiplicando as equações do campo por  $g^{\mu\nu}$ , podemos reescreve-las como

$$R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4}T^\mu{}_\mu, \quad (1.75)$$

ou,

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T^\mu{}_\mu, \quad (1.76)$$

que, substituindo em (1.74), resulta na forma alternativa das equações de campo:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda \right), \quad (1.77)$$

e temos, assim, as equações de campo de Einstein no vácuo:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.78)$$

Podemos observar que, embora historicamente o princípio de Mach tenha servido de motivação para a formulação da RG, com a proposição da necessidade da geometria para explicar o

<sup>13</sup>De valor aproximado  $G = 6,67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ .

<sup>14</sup>Não será considerada a Constante Cosmológica,  $\Lambda$ , na equação. O problema da Constante Cosmológica consiste na inclusão de um termo  $\Lambda g_{\mu\nu}$  no lado esquerdo das equações que trás à RG diversas complicações e problemas em aberto da Física que fogem do escopo desta dissertação. Para mais detalhes sugerimos a revisão de livros de RG como [6, 7]

<sup>15</sup>Em tradução livre do inglês: “O espaço-tempo diz a matéria como mover e a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar”

espaço-tempo, o resultado obtido sugere que, mesmo na ausência da matéria, a geometria pode estar presente, dadas as possíveis soluções para as Equações de campo no vácuo. Em outras palavras, no contexto da RG, mesmo o espaço-tempo podendo ser modificado com a presença da matéria, essa não é necessária para a existência de uma geometria inerente que o defina.

É importante notar que, de forma menos intuitiva, porém mais rigorosa fisicamente, é possível obter as equações de campo de Einstein a partir do *Princípio Variacional*, ou seja, com a minimização da ação do campo gravitacional  $I$ . A ação a ser minimizada deve apresentar um termo lagrangiano referente à matéria,  $\mathcal{L}_M$  somado a um termo lagrangiano referente ao campo gravitacional, que é dado por

$$\mathcal{L}_G \equiv \frac{R}{2\kappa}. \quad (1.79)$$

A Integral de ação é dada, então, por

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2\kappa} + \mathcal{L}_M \right] \quad (1.80)$$

que se torna a denominada *Integral de Ação de Einstein-Hilbert* na ausência de matéria:

$$I = \frac{1}{2\kappa} \int R d^4x \sqrt{-g}. \quad (1.81)$$

Como o escalar de curvatura  $R$  é o escalar mais simples obtido diretamente a partir do tensor de Riemann, a minimização da ação de Einstein-Hilbert significa que o campo gravitacional surge da geometria mais suave o possível, no sentido de corresponder às menores variações possíveis da curvatura de Riemann [14].

### 1.3.2 Equação da geodésica

As *curvas geodésicas* são objetos que surgem naturalmente na geometria Riemanniana, com a minimização da caminho que conecta dois pontos próximos. Em termos de uma geometria afim, dizemos que a *geodésica* é uma curva na qual o vetor tangente  $\mathbf{u}$  é transportado paralelamente a si mesmo, ou seja, em uma notação abstrata independente de componentes, temos [7]:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = 0. \quad (1.82)$$

Para utilizarmos uma notação em termos dos componentes, vamos considerar que as curvas são parametrizadas por  $\lambda$ , ou seja, descritas por  $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ . Para uma curva dessas, um tensor qualquer  $T$  é preservado no espaço plano, se

$$\frac{dT}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial T}{\partial x^\mu} = 0. \quad (1.83)$$

Similarmente, para o transporte paralelo no caso geral, podemos definir a derivada covariante da curva em relação o parâmetro  $\lambda$  pelo operador

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu, \quad (1.84)$$

e, como temos que o vetor tangente à curva  $x^\mu(\lambda)$ , é dado por  $dx^\mu/d\lambda$ , podemos obter a equação da geodésica, dada por

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (1.85)$$

De imediato, pode-se observar que no caso em que os coeficientes da conexão,  $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ , são nulos, a equação da geodésica se torna uma equação de linhas retas,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0. \quad (1.86)$$

Ademais, é usual parametrizar as curvas em função do tempo próprio,  $\tau$ , deixando a equação da geodésica na forma

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (1.87)$$

entretanto, podemos utilizar no lugar do tempo próprio, qualquer *parâmetro afim*, ou seja, que tenha a forma  $\lambda = a\tau + b$ .

Na RG, temos que as partículas em queda livre, ou seja, que não estão sujeitas a forças externas ao campo gravitacional, percorrer trajetórias geodésicas. Em outras palavras, a geometria do espaço-tempo determina o caminho a ser percorrido por um corpo de prova neutro em queda-livre independente de sua estrutura e composição, o que pode ser interpretado como consequência do Princípio da Equivalência Fraco [7]. Além de prover esse vínculo do movimento com a geometria e, equivalentemente, com a gravitação, a equação da geodésica pode ser entendida como uma generalização da segunda lei de Newton,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , para o caso em que a força  $\mathbf{F} = 0$ , correspondência explícita em aproximações de baixas velocidades ( $v \ll c$ ), sendo possível acrescentar termos referentes a forças externas no lado direito da equação. Veremos no capítulo 3 mais detalhes sobre essa correspondência, referente ao limite Newtoniano da equação da geodésica.

### 1.3.3 Desvio geodésico

Uma importante consequência da curvatura do espaço-tempo é a sua manifestação como efeito gravitacional por meio do desvio de uma geodésica por outra geodésica próxima, impli-

cando em uma aceleração relativa entre partículas de prova [7]. Uma forma simples de compreender esse efeito consiste inicialmente em considerarmos duas geodésicas partindo de um ponto  $A$  qualquer de um espaço plano bidimensional, separadas entre si por um ângulo  $\theta$ . A separação das geodésicas cresce linearmente com a distância, sendo nula qualquer aceleração entre elas. Em seguida, podemos comparar esse caso com o que acontece com duas geodésicas em uma situação similar, partindo de um ponto  $A$  com um ângulo  $\theta$ , na superfície de uma esfera. Neste caso, as geodésicas não manterão o mesmo ângulo e vão, de fato, se tocar em outro ponto da esfera [8].

Para quantificar o desvio consideremos uma família de geodésicas dada por  $x^\mu = x^\mu(\tau, \xi)$ , onde  $\tau$  é o tempo próprio (embora possa ser qualquer parâmetro afim) e  $\xi$  rotula cada geodésica em particular. Duas geodésicas vizinhas são parametrizadas por  $\xi$  e  $\xi + d\xi$  e o desvio entre elas é dado pelo vetor:

$$n^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi} \delta\xi \equiv \xi^\mu \delta\xi. \quad (1.88)$$

A partir da relação  $\partial u^\mu / \partial \xi = \partial \xi^\mu / \partial \tau$  e da definição de derivada covariante, podemos escrever

$$\xi^\mu \nabla_\mu u^\nu = u^\mu \nabla_\mu \xi^\nu, \quad (1.89)$$

e, ao considerarmos a segunda derivada covariante do vetor de separação  $\xi^\mu$  em relação ao tempo próprio, utilizando a equação (1.84), obtemos:

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = u^\lambda \nabla_\lambda (u^\nu \nabla_\nu \xi^\mu) = u^\lambda \nabla_\lambda (\xi^\nu \nabla_\nu u^\mu) = u^\lambda \xi^\nu \nabla_\lambda \nabla_\nu u^\mu + u^\lambda \nabla_\lambda \xi^\nu \nabla_\nu u^\mu. \quad (1.90)$$

Podemos, então, mudar a ordem da derivada covariante no primeiro termo e usar (1.89) no segundo termo do lado direito. Ao fazer essas operações, considerando a definição do tensor de curvatura de Riemann, dada por (1.48), chega-se em

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = \xi^\nu \nabla_\nu (u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu) + u^\rho R^\mu_{\rho\nu\lambda} u^\nu u^\lambda \xi^\rho. \quad (1.91)$$

Como, em uma geodésica,  $u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu = 0$ , o primeiro termo do lado direito se anula, o que nos leva, enfim, a *equação do desvio geodésico* [8]:

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{d\tau^2} - R^\mu_{\nu\lambda\rho} u^\nu u^\lambda \xi^\rho = 0. \quad (1.92)$$

Assim, equação do desvio geodésico mostra como ocorre a separação de geodésicas próximas em relação ao parâmetro afim. O termo com os componentes do tensor de Riemann,  $R^\mu_{\nu\lambda\rho} u^\nu u^\lambda \xi^\rho$  podem ser interpretados como gerador de uma força diretora entre as curvas de geodésicas, ou

a *força gravitacional de maré* [7]. Na aproximação limítrofe em que se considera um campo gravitacional fraco, com uma métrica aproximadamente igual de Minkowski (a menos de uma pequena perturbação) podemos obter a equação de Poisson para a gravitação,  $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho(\mathbf{x})$ , onde  $\rho(\mathbf{x})$  é a densidade de matéria. Dessa forma, podemos vincular a equação da geodésica ao movimento e a equação do desvio geodésico ao campo gravitacional, de forma que as duas se complementem para descrever a gravitação na RG.



# Capítulo 2

## Curvas de rotação de galáxias

A astrofísica galáctica se difere da estelar em relação à metodologia assumida para a compreensão das estruturas e evoluções, devido a vários motivos. Primeiramente, porque não compreendemos, ainda, como as galáxias se formaram (é certo que, no caso das estrelas ainda existem algumas incertezas, mas se referem mais a detalhes técnicos do que aos processos fundamentais em si). Além disso, devido às grandes distâncias das galáxias, os dados não são tão abundantes, precisos ou bem determinados quanto aos dados de estrelas individuais. Por último, as galáxias podem ser consideradas conjuntos de estrelas pouco interagentes entre si, o que requer um ferramental matemático intrinsecamente mais complexo do que o utilizado para estudar as estrelas, basicamente formadas por um gás colisional [18].

O estudo das galáxias pode ser focado em diversas características e propriedades físicas distintas (mas nem sempre independentes) como, por exemplo, na evolução de suas estruturas internas, nas interações com outras galáxias, na taxa de formação de estrelas, na sua composição e metalicidade<sup>1</sup>, dentre outros. As escalas espaciais e temporais de interesse da astrofísica galáctica são muito amplas sendo necessário delimitarmos o objeto de estudo deste texto. Para as aproximações que utilizaremos, trataremos, essencialmente, as galáxias como isoladas restringindo-nos aos problemas dinâmicos das chamadas *curvas de rotação*, sem considerar detalhes de suas estruturas morfológicas e peculiaridades físicas individuais. O presente capítulo

---

<sup>1</sup>A metalicidade é uma medida da concentração relativa de algum elemento formado por nucleossíntese, geralmente o ferro, em relação a concentração de hidrogênio, e constitui parâmetro tipicamente usado na astrofísica para estimativa de idade de objetos celestes.

descreve brevemente o problema fenomenológico observado nas curvas de rotação de galáxias e alguns dos modelos teóricos comumente utilizados para tentar solucioná-lo.

## 2.1 O Problema da Matéria Faltante

Antes de chegarmos ao problema central, convém citar que, outros fenômenos astrofísicos observados, assim como as curvas de rotação, são geralmente relacionados à suposta matéria faltante<sup>2</sup> nos sistemas em estudo, sejam esses sistemas galáxias, aglomerados de galáxias ou em todo o Universo observável. Historicamente, o primeiro indício do problema da matéria faltante foi apresentado por Oort em 1932, referente às observações dos movimentos verticais em relação ao disco galáctico de estrelas próximas ao Sistema Solar. Foi observado que a matéria luminosa não seria suficiente para gerar a força restauradora observada nas oscilações verticais, fenômeno que ficou conhecido como *discrepância de Oort*. A diferença de massa para explicar o movimento em comparação à observada era estimada por um fator dois<sup>3</sup> [19].

Em 1933, um ano depois da publicação de Oort, o astrônomo Fritz Zwicky notou, com base em medidas de velocidades radiais de galáxias individuais no aglomerado de Coma, que estas apresentavam velocidades muito maiores que as esperadas considerando a massa da matéria observável no aglomerado, de tal forma que, se fosse considerada uma taxa massa-por-luminosidade igual a um em unidades solares, as galáxias teriam velocidades superiores à velocidade de escape e o aglomerado iria se dispersar [21]. Para estimar a massa dinâmica, Zwicky utilizou o *teorema do virial*, segundo o qual, para um sistema gravitacionalmente ligado em equilíbrio, a energia cinética total é igual a metade da média temporal da energia potencial total, ou seja, fornece a correlação entre as massas dos objetos com suas velocidades médias [22]. Com as velocidades de dispersão no aglomerado de Coma, Zwicky concluiu que a discrepância entre a massa esperada devido a luminosidade e a massa virial era maior que um fator de 100, o levando a especular sobre a existência de uma *matéria escura* com massa muito maior que a matéria radiante.

Outras observações astronômicas que também contribuíram significativamente para expor a discrepância de massas foram as medições da anisotropia da radiação cósmica de fundo, por

---

<sup>2</sup>Embora comumente se denomine como problema da *matéria escura*, será utilizado o termo mais amplo *matéria faltante*, de forma a reservar o primeiro termo estritamente para descrever os modelos que supõem a existência de matéria não-luminosa, ou não-bariônica.

<sup>3</sup>Hoje com medidas mais precisas de distribuição de matéria pela observação de estrelas gigantes, a discrepância parece ter sido resolvida no disco galáctico[20].

sondas espaciais como o satélite WMAP<sup>4</sup> e, posteriormente, pelo satélite Planck. As medições mostraram que, em larga escala, a densidade de matéria bariônica  $\Omega_b = 0.049$  é significativamente menor que a densidade total de matéria gravitante  $\Omega_m = 0.27$  [19]. Por matéria bariônica queremos dizer aquela formada por bárions, partículas formadas por três quarks, que constituem aproximadamente toda massa de matéria conhecida (por exemplo, prótons e nêutrons). Além desses, relevantes experimentos referentes a matéria faltante foram feitos, por exemplo, através de medidas de lentes gravitacionais em aglomerados de galáxias, ou através da emissão de raios-x pelo plasma entre dois aglomerados em colisão, formando o chamado *Bullet Cluster*<sup>5</sup> (observação divulgada originalmente como uma prova empírica direta da existência da matéria escura [23]), entre outros.

## 2.2 As Curvas de Rotação

Em meados da década de 1970, com o aprimoramento de técnicas de radioastronomia, principalmente com o desenvolvimento dos detectores da radiação de comprimento de onda  $\lambda \sim 21 \text{ cm}$  (típico da linha hiperfina do hidrogênio neutro devido a acoplamento de spin próton-elétron), foram feitas observações de um dos fenômenos mais notáveis para a caracterização do problema da matéria faltante: as *curvas de rotação “planas”* de galáxias espirais. As primeiras medições precisa das curvas de rotação de galáxias espirais foram realizadas, de forma independente por Albert Bosma em sua tese de doutorado [24] e por Vera Rubin e seus colaboradores em uma série de artigos [25, 26, 27].

O que se denomina curvas de rotação de uma galáxia é um gráfico da velocidade linear,  $\Theta$ , em função da distância ao centro galáctico,  $r$ . Caso a galáxia fosse um disco compacto e rígido, teríamos uma velocidade angular,  $\omega$ , constante, ou seja,

$$\Theta = \omega r, \quad (2.1)$$

o que é uma aproximação para as proximidades do centro galáctico, onde a densidade estelar é maior. A partir de um determinado raio crítico,  $r_0$ , espera-se, pela gravitação não-relativística, que as órbitas sejam definidas pelas leis de Kepler, considerando a massa da galáxia,  $M$ , concentrada em seu *bojo* interno. Neste caso, a aceleração é dada por  $GM/R^2$ , onde  $G$  é a constante

<sup>4</sup>Acrônimo do termo em inglês *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*.

<sup>5</sup>Traduzido para o português ora como “Aglomerado da Bala”, ora como “Aglomerado Projétil”.

gravitacional, e deve ser considerada, em estado ligado, igual à aceleração centrípeta  $\Theta^2/r$  [28]. Assim, a velocidade linear pode ser escrita como

$$\Theta = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \quad (2.2)$$

ou seja, nas regiões mais afastadas dos centros das galáxias, a velocidade linear deve ser proporcional a  $r^{-1/2}$  no modelo newtoniano. Claramente, para uma curva de rotação real, a distribuição da matéria nas galáxias deve ser considerada e, por isso existe a necessidade de se definir um modelo de distribuição de massas estatisticamente satisfatório. Uma ilustração qualitativa das diferenças entre uma curva esperada pela gravitação newtoniana e a observada experimentalmente se encontra na Figura 2.1.

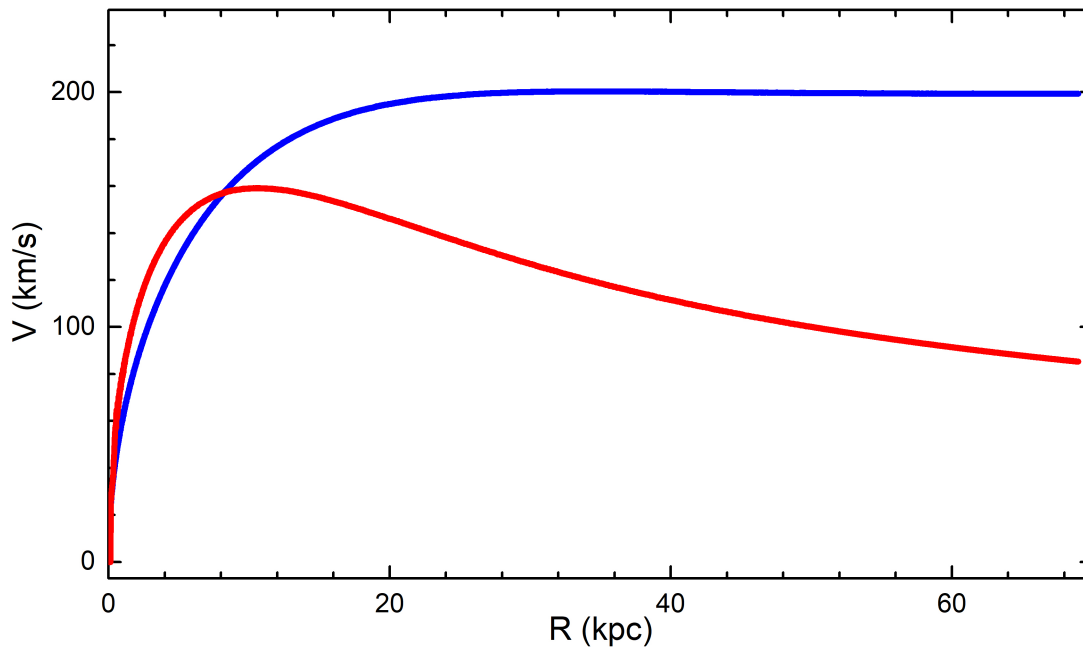


Figura 2.1: Gráfico para ilustrar o comportamento comumente observado em curvas de rotação galácticas (dados fictícios). A curva em cor vermelha ilustra o padrão esperado pela gravitação newtoniana e a curva em azul ilustra um padrão de curva observado.

O fato notório que foi descoberto por Bosma e Rubin, nos anos 70, é que as curvas de rotação galácticas são fundamentalmente planas além do raio crítico  $r_0$ , ou seja, as velocidades de rotação permanecem aproximadamente constantes não apresentando o decaimento com o raio  $\Theta \propto r^{-1/2}$ , conforme ilustrado na figura 2.1. Como a maior parte da matéria bariônica das galáxias espirais encontra-se em seu bojo interno, as curvas planas de rotação só poderiam ser explicadas, em uma teoria newtoniana, com a presença de uma matéria não-luminosa nos arredores das galáxias, ou

seja, uma explicação imediata seria a presença de “matéria escura”, de natureza bariônica ou não, influenciando gravitacionalmente a sua dinâmica de rotação. Uma outra segunda linha de raciocínio para solucionar o problema, é a não-validade da gravitação de Newton para descrever a dinâmica das galáxias, o que torna necessária a elaboração modelos que abram espaço para uma possível nova teoria capaz de descrever a gravitação em escala galáctica, sem necessidade de supor a presença de matérias gravitacionalmente interagentes não-observadas.

## 2.3 Principais Modelos Hipotéticos

O desenvolvimento de uma teoria consensual capaz de elucidar o problema das curvas de rotação das galáxias e os outros fenômenos relacionados a matéria faltante, constituem um dos maiores desafios da física contemporânea. As tentativas de descrição dos motivos que fazem a dinâmica galáctica e extragaláctica tão diferentes do previsto na gravitação newtoniana envolvem desde interações fundamentais e aspectos básicos da estrutura do espaço-tempo até formulações de modelos de inflação cosmológica e formação de estruturas em larga-escala. As soluções hipotéticas podem ser classificadas, conforme seção anterior, em dois ramos principais: modelos que consideram a presença de uma matéria escura (ou não-luminosa) que formariam *halos* (ou auréolas) ao redor das galáxias onde se concentraria a maior parte de suas massas e modelos que propõem modificações nas próprias leis da dinâmica para a descrição do movimento de rotação das galáxias. Segue uma breve exposição sobre os princípios dos modelos considerados mais próximos do consenso científico.

### 2.3.1 Matéria escura bariônica

Uma das concepções primordiais de matéria escura é a de que haveria uma notável distribuição de astros de baixa luminosidade que completaria a massa não-observada, explicando as dinâmicas das galáxias e dos aglomerados. Dentre os astros especulados como constituintes da massa faltante encontrar-se-iam planetas de grandes massas e remanescentes estelares de baixo brilho, como anãs marrons, anãs vermelhas, anãs brancas, estrelas de nêutrons e mesmo buracos negros. Por serem formados principalmente por átomos e íons, tendo a maior parte de suas massa formada por prótons e nêutrons, este tipo de matéria foi denominado matéria escura

bariônica [21], também sendo cunhado o termo MACHOs<sup>6</sup> para o designar. Graças a buscas por micro-lentes gravitacionais que seriam geradas pela presença dos MACHOs e por determinações experimentais de densidade bariônica baseadas em medidas de abundâncias de elementos leves e na radiação cósmica de fundo, existe hoje um consenso de que os MACHOs não constituem uma larga fração da matéria escura [29], sendo incapaz de solucionar o problema das dinâmicas galácticas.

### 2.3.2 Matéria escura quente (HDM)

A chamada *matéria escura quente* (HDM<sup>7</sup>) seria formada de partículas com velocidades relativísticas ( $v \approx c$ ). Os neutrinos, classe de férmions com massas próximas a zero, capazes de interagirem apenas através da gravitação e da força nuclear fraca<sup>8</sup> e seriam os principais candidatos à partículas formadoras da HDM. Entretanto, através de simulações numéricas do crescimento de estrutura em larga escala para um universo dominado por neutrinos, verificou-se grandes incongruências entre a formação de aglomerados e outros parâmetros cosmológicos com valores aceitáveis, eliminando os neutrinos como candidatos à prover a massa perdida [30].

### 2.3.3 Matéria escura fria (CDM)

A principal hipótese para os halos de matéria escura é a de que esses são formados por partículas de natureza ainda desconhecida com velocidades não-relativísticas, ou *matéria escura fria* (CDM<sup>9</sup>). No final dos anos 1980, a ideia de que a maior parte da massa do Universo era provinda de uma matéria escura fria, não bariônica, foi amplamente aceita por muitos astrofísicos e físicos dedicados à Física de partículas [29]. Uma partícula para ser candidata à CDM deve ser sem carga, estável e de massa não nula, o que exclui as partículas do Modelo Padrão, com exceção do neutrino, que seria uma partícula do HDM [21]. Assim, buscando fora do Modelo Padrão, algumas das partículas candidatas a constituírem a CDM são:

---

<sup>6</sup>Acrônimo do termo em inglês *Massive Astrophysical Compact Halo Objects*, com a tradução livre *Objeto do halo compacto massivo*.

<sup>7</sup>Acrônimo do termo em inglês *Hot Dark Matter*.

<sup>8</sup>As *interações fracas* ou *forças nucleares fracas*, são forças mediadas por bósons, decorrentes da teoria eletrofraca, cerca de  $10^{10}$  vezes mais fracas que as interações eletromagnéticas. São responsáveis pelo decaimento beta de partículas e núcleos.

<sup>9</sup>Acrônimo do termo em inglês *Cold Dark Matter*.

- (i) **Áxions.** Por hipótese, os áxions seriam um tipo de bósons leves, de massa entre  $\mu eV$  e  $meV$ , sem carga, provindos da cromodinâmica quântica para evitar a violação CP (carga-paridade) decorrentes das interações fortes. De um ponto de vista experimental, os áxions como matéria escura são considerados interessantes pois, devido a prováveis acoplamentos com fótons, seria possível determinar as suas distribuições de velocidade com grande precisão [31].
- (ii) **Partículas de modelos supersimétricos.** São previstos nas hipóteses de supersimetria<sup>10</sup>, diversas partículas eletricamente neutras, não interagentes fortemente<sup>11</sup>, incluindo parceiros supersimétricos de partículas como neutrinos (neutralinos), grávitons (gravitinos), bóson de Higgs (higgsinos), bóson Z e fótons (fotinos) [29]. Caso um desses parceiros supersimétricos seja suficientemente abundante, poderia ser o constituinte da massa faltante. Para consolidar essa hipótese, entretanto, é fundamental comprovar inicialmente a existência da supersimetria.
- (iii) **Partículas massivas fracamente interagentes (WIMPs)**<sup>12</sup>. Os WIMPs<sup>13</sup> constituem o tipo de candidato à matéria escura mais estudado, tendo sido objetos de milhares de estudos teóricos, motivando o avanço de programas experimentais. A hipótese é de que os WIMPs seriam constituídos de partículas que interagiriam via força nuclear fraca. Com as operações de colisores como o *Large Hadron Collider (LHC)*, na Europa, e com diversos aperfeiçoamentos na astrofísica experimental, espera-se que, caso não seja detectados nos próximos anos, haverá uma quebra no paradigma dos WIMPs [29].

Há modelo teórico amplamente difundido que envolve a CDM e a constante cosmológica ( $\Lambda$ ), denominado simplesmente por  $\Lambda$ CDM. As principais vantagens do  $\Lambda$ CDM estão no fato de que supostamente conciliaria o problema da matéria ausente com o problema da *energia escura*, no

<sup>10</sup>Supersimetria é uma simetria hipotética que pode ser aplicada a partículas elementares, que reduziria o problema dos infinitos na teoria quântica de campos. No modelo mais simples, para cada bóson existiria um férmion associado e para cada férmion um bóson associado, os chamados parceiros supersimétricos.

<sup>11</sup>As *interações fortes* ou *força nucleares fortes* são interações de curto alcance entre os quarks, mediadas por glúons, com força cerca de  $10^2$  maiores que as interações eletromagnéticas. É a interação responsável pela estabilidade dos hádrons (grupo que inclui os bárions).

<sup>12</sup>Acrônimo do termo em inglês *Weakly Interacting Massive Particles*.

<sup>13</sup>Originalmente, o termo WIMP, cunhado em 1984 por Gary Steigman e Michael Turner, incluía todos candidatos à matéria escura, incluindo os áxions e as supersimétricas. O significado do termo foi alterado com o tempo, passando a se referir apenas a partículas que interagem via força fraca.

qual a maior parte da energia do Universo, causadora da expansão acelerada, estaria vinculada à  $\Lambda$ . Assim, o modelo  $\Lambda$ CDM permite não só a simulação de distribuição da matéria escura, como estudos em escala cosmológica, tentando descrever, por exemplo, o crescimento e a formação das estruturas em larga escala.

### 2.3.4 Dinâmica newtoniana modificada (MOND)

O modelo MOND<sup>14</sup> surgiu em 1983 a partir de uma sequência de três artigos de Mordehai Milgrom [32, 33, 34], submetidos em fevereiro de 1982. Nesses artigos, Milgrom propôs uma modificação na dinâmica newtoniana, tendo por base a observação de que as discrepâncias de massa nas curvas de rotação ocorrem onde (e somente onde) a aceleração da gravidade é menor que um valor limítrofe de  $a_0 \approx 1,2 \times 10^{-10} m \cdot s^{-2}$ . A transição da dinâmica newtoniana para o regime MOND, que ocorre em  $a \sim a_0$  é imperceptível no Sistema Solar devido à intensidade do campo gravitacional do Sol. Para se ter uma ideia da ordem de grandeza dessa nova constante, a aceleração gravitacional causada em Plutão por Mercúrio é maior do que  $a_0$  [35]. O modelo MOND dispensa a necessidade de distribuição de massa de natureza desconhecida para explicar a dinâmica das curvas de rotação e tem sido amplamente testado, sendo considerado uma forte linha de “oposição” aos modelos que supõem a existência de matéria escura (vide, por exemplo [36]).

No modelo MOND a aceleração newtoniana,  $\mathbf{a}_N$ , se relaciona com a aceleração gravitacional real observada,  $\mathbf{a}$ , através de:

$$\mathbf{a}_N = \mu \left( \frac{a}{a_0} \right) \mathbf{a}, \quad (2.3)$$

o que leva à alteração da segunda lei de Newton,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_N$ , para

$$\mathbf{F} = m \left( \mu \left( \frac{a}{a_0} \right) \right) \mathbf{a}. \quad (2.4)$$

Quando  $a \gg a_0$ , a função  $\mu(a/a_0)$  deve ser tal que leve (2.4) assintoticamente à expressão usual da mecânica newtoniana, ou seja,  $\mu = 1$ . Similarmente, para  $a \ll a_0$ , devemos ter  $\mu = a/a_0$ . Diferentes expressões para  $\mu(a/a_0)$  já foram utilizadas na literatura, sendo a mais comum [35]:

$$\mu(a/a_0) = \frac{a/a_0}{\sqrt{1 + (a/a_0)^2}} \quad (2.5)$$

---

<sup>14</sup>Acrônimo do termo em inglês *MOdified Newtonian Dynamics*, que, tradução livre, significa “dinâmica newtoniana modificada”



Dessa forma, considerando que a intensidade da força entre uma galáxia de massa  $M$  e uma estrela de massa  $m$  a orbitando em uma distância  $r$  é dada por

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad (2.6)$$

obtemos, igualando a força gravitacional à centrípeta, uma aceleração fraca limítrofe da gravidade:

$$a = \sqrt{a_N a_0} = \frac{\sqrt{GMa_0}}{r}. \quad (2.7)$$

Se considerarmos uma órbita circular, em que  $a = v^2/r$ , temos, para órbitas afastadas do bojo galáctico, uma velocidade em valor constante igual a

$$v = (GMa_0)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.8)$$

considerando toda a massa  $M$  no interior da órbita. Assim, a principal característica problemática das curvas de rotação, que é a velocidade independente de  $r$  ao afastar-se do bojo, seria explicada pelo modelo MOND, pois a curva se torna plana, estabilizada em uma velocidade fixa, para grandes distâncias radiais.

É notório o sucesso do MOND para o ajuste de muitas curvas de rotação e explicação de outros fenômenos como, por exemplo, a relação de Tully-Fischer<sup>15</sup> que, embora amplamente verificada, ainda possui bases físicas não conhecidas [19]. Entretanto, outros fenômenos observados, como as lentes gravitacionais do *Bullet Cluster* permanecem difíceis de serem adequadamente explicados pelo modelo. Além disso, a modificação da dinâmica é totalmente baseada em dados empíricos (das curvas de rotação, principalmente), se ajustando a fenomenologia sem partir de uma teoria mais fundamental, sendo considerado um modelo que se ajusta aos fatos de forma *ad hoc*, o que torna conveniente a criação de uma hipótese que chegue *a priori* nos resultados experimentais, obedecendo, nos limites adequados, às relações do MOND. Um exemplo de tentativa de tornar o MOND mais “concreto”, foi modelo *TeVeS* (encurtamento de “Tensor-Vector-Scalar”) [38], desenvolvido por Bekenstein, que a partir de uma dinâmica totalmente relativística, tentou chegar às relações de aceleração do MOND como caso particular em campo fraco<sup>16</sup>.

<sup>15</sup>A grosso modo, a relação de Tully-Fischer é uma relação empírica entre a luminosidade de uma galáxia,  $L$  e a velocidade rotacional assintótica,  $V$ , na forma  $L \propto V^4$  [37].

<sup>16</sup>Com geração de algumas novas problemas como instabilidade de soluções de simetria esférica e presença de singularidades cáusticas [19].

### 2.3.5 Outros modelos

Por não haver uma teoria satisfatória e consensual sobre o problema da matéria faltante, e por tratar-se de uma questão que envolve desde fundamentos das interações elementares na física até a modelos que envolvem a inflação cosmológica e formação de estruturas em larga escala, existem muitos modelos hipotéticos além dos já citados (pormenorizados por serem os modelos mais comuns). Dentre esses modelos, alguns envolvem modificações da RG, como gravidade  $f(R)$  [39, 40] e gravitação Conforme [41], incluindo modelos que supõem a possível existência campos escalares específicos, geradores de supostos condensados de Bose-Einstein que resolveriam o problema [42, 43, 44] ou modelos apresentando de espaços-tempo com dimensões extras [45, 46].

Um aspecto que deve ser notado na elaboração de novas hipóteses ou aprimoramentos dos modelos existentes é que, os sistemas observados, referentes aos fenômenos de discrepâncias entre a massa esperada (newtoniana) e a massa observada, geralmente diferem entre si por algumas ordens de grandeza em relação às massas e dimensões espaciais. Enquanto uma galáxia individual possui massas (bariônicas) totais entre  $10^7$  e  $10^{13}$  massas solares ( $M_{\odot}$ ) e raios entre décimos a poucas centenas de kiloparsecs ( $kpc$ ) [22], um aglomerado de galáxias pode apresentar massas superiores a  $10^{15}M_{\odot}$  e raios maiores que  $10Mpc$ . Dadas essas diferenças de escala, e por não haver nada que, *a priori*, vincule de forma inequívoca todos os fenômenos a uma mesma causa, podemos estudá-los individualmente dentro de um modelo hipotético, sem a ambição de buscar imediatamente uma unificação teórica. O presente trabalho é focado em uma hipótese alternativa para abordar a problemática das curvas de rotação a partir de aproximações provindas diretamente da RG. Não há, por ora, a pretensão de explicar os demais fatos relacionados ao problema da matéria faltante, embora não seja uma ideia descartada para estudos futuros.

## Capítulo 3

# O Formalismo Quase-Newtoniano

Diferente do que ocorre na mecânica newtoniana ou na teoria eletromagnética de Maxwell, nas quais as equações de campo são independentes das equações de movimento, na RG as equações de movimento são consequência das equações de campo, conforme mostrado, por exemplo, no clássico texto de Infeld e Plebanski [47]. Um dos requisitos para essa relação campo-movimento, e também uma das fontes de complicações técnicas da RG, é a não-linearidade das equações de campo de Einstein. Para encontrarmos as linhas-mundo da RG precisamos conhecer o campo gravitacional, e para conhecermos o campo precisamos conhecer o movimento. A não-linearidade das equações nos dificulta, por exemplo, a obter soluções para o problema de dois corpos, o qual, na teoria newtoniana pode ser reduzido facilmente a um problema de um corpo.

Com o vínculo inevitável entre movimento e campo, uma das principais formas de tratar o movimento na RG é o desenvolvimento de métodos aproximativos adequados que nos permitam encontrar o campo e o movimento de forma aproximada. O que geralmente é feito no caso de equações não-lineares são os métodos de aproximação com uso de algum parâmetro pequeno, que consiste em, grosso modo, desenvolver as grandezas que aparecem nessas equações em séries de potencia deste parâmetro pequeno e resolver em seguida as equações formadas por esses coeficientes, desprezando os termos de maior ordem quando necessário [47].

Devido ao grande sucesso e precisão da física newtoniana nos casos que os efeitos relativísticos podem ser desconsiderados, é esperado que, as equações da RG tomem, dentro dos limites apropriados, a forma das equações de Newton. Em uma primeira aproximação, denominada *limite newtoniano*, se obtêm as equações de movimento conforme a mecânica newtoniana, e

sucessivamente, em outras ordens, se obtêm o movimento conforme a chamada aproximação *pós-newtoniana*. O objetivo deste capítulo é fazer uma breve introdução sobre esses métodos aproximativos amplamente estudados na literatura e apresentar um método menos comum, a aproximação *quase-newtoniana*<sup>1</sup>.

### 3.1 Limite newtoniano e aproximação pós-newtoniana

Um parâmetro típico que é assumido pela maioria das aproximações da RG, é a grandeza do desvio de uma métrica “de fundo” (ou “background”). Se o espaço-tempo de fundo é o de Minkowski, podemos considerar a métrica assintoticamente minkowskiana, no sentido de podermos escrever o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  como a soma de um Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  com um tensor que representa a perturbação da geometria plana  $h_{\mu\nu}$ , ou seja:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

e, similarmente

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Nesse caso, a aproximação é dita pós-minkowskiana no sentido de que o espaço-tempo se reduz ao de Minkowski, quando

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (3.3)$$

e temos, neste caso, o chamado *limite de campo fraco* [48]. Para o tratamento da situação de campo fraco, podemos expandir a perturbação do campo minkowskiano em termos  $\delta h_{\mu\nu}$ , de forma a considerar  $\delta h_{\mu\nu}^2 \ll \delta h_{\mu\nu}$ , eliminando os termos não-lineares, o que resulta no formalismo comumente denominado “teoria linearizada da gravidade”.

Na formulação de campo fraco, ou linearizada, devido a pequenez do  $h_{\mu\nu}$ , devemos utilizar o tensor métrico de Minkowski para a “elevação e abaixamento dos índices”. Além disso podemos desprezar os termos quadráticos ou de ordem superior do  $h_{\mu\nu}$  e de suas derivadas (considerando que a perturbação varia suavemente no espaço-tempo). Tendo em conta as condições para a

---

<sup>1</sup>A denominação “aproximação quase-newtoniana” é utilizada aqui como tradução do termo “*nearly-newtonian*” utilizado por Misner, Thorne e Wheller em [7]

aproximação, é possível se obter imediatamente os coeficientes da conexão afim,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\nu\beta,\mu} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\mu\nu,\beta}) \\
 &= \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\nu\beta,\mu} + h_{\mu\beta,\nu} - h_{\mu\nu,\beta}) \\
 &= \frac{1}{2} (h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu} + h_{\mu}^{\alpha}{}_{,\nu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}) .
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para a obtenção do tensor de curvatura de Riemann os termos envolvendo produtos de símbolos de Christoffel podem ser desprezados por serem formados apenas por termos quadráticos das derivadas de  $h_{\mu\nu}$ , ou seja,

$$R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\alpha} , \tag{3.5}$$

que pode ser expandido como:

$$R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2} \left[ (h_{\beta}^{\alpha}{}_{,\mu} + h_{\mu}^{\alpha}{}_{,\beta} - h_{\mu\beta}{}^{,\alpha})_{,\nu} - (h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu} + h_{\mu}^{\alpha}{}_{,\nu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha})_{,\beta} \right] . \tag{3.6}$$

Por conseguinte, a contração do tensor de curvatura nos leva ao tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} , \tag{3.7}$$

ou em termos dos coeficientes,  $h_{\mu\nu}$ ,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\mu}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{,\mu\nu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha}) , \tag{3.8}$$

onde definimos  $h \equiv h_{\alpha}^{\alpha} = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$  .

Para a completa formulação do limite newtoniano, além do campo fraco, se assume que as partículas no campo gravitacional estão a velocidades muito menores que a velocidade da luz, ou seja, temos que as velocidades características em estudo  $v$  apresentam condições de *movimento lento*, em que  $v \ll c$ . O movimento lento leva ao uso de um outro parâmetro,  $\epsilon$ , dado por  $\epsilon = v/c$ , o qual podemos fazer tão pequeno quanto necessário. A teoria newtoniana não é propriamente uma teoria de campo e não apresenta a constante  $c$  (ocorre a ação à distância), sendo obtida da RG apenas no limite em que  $\epsilon \rightarrow 0$  ou, de forma similar,  $c \rightarrow \infty$ . Para um movimento lento, em que para um determinado tempo  $\delta t$  um corpo percorre uma distância  $\delta x^i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), temos  $\delta x^i \approx \epsilon \delta x^0$ , em que  $\delta x^0 = c \delta t$ , ou seja,

$$\frac{\epsilon}{\delta x^i} \sim \frac{1}{\delta x^0} . \tag{3.9}$$

Para uma função arbitrária  $f$ , temos, então, que as variações são muito menores na coordenada  $x^0$  que nas dimensões espaciais no movimento lento em que  $\epsilon \ll 1$  pela relação:

$$\frac{\partial f}{\partial x^0} \sim \epsilon \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{3.10}$$

Para obter, através da RG, a mecânica newtoniana, é esperado que o limite apresentado seja capaz de reproduzir a *equação de Poisson*. Consideremos, portanto, duas partículas em queda livre, uma no ponto  $x^i$  e outra em um ponto  $x^i + \xi^i$ . Seja  $\Phi$  o potencial gravitacional, temos, em concordância com a mecânica não-relativística, a aceleração relativa entre as partículas:

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\Big|_{x^i+\xi^i} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\Big|_{x^i} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\partial x^j}\xi^j = -\nabla^2\Phi\xi^i, \quad (3.11)$$

em que  $\nabla^2$  é o operador laplaciano. A partir da equação do desvio geodésico (1.92), e considerando que no campo fraco a derivada covariante é igual a derivada comum, temos a relação:

$$\frac{D^2\xi^i}{d\tau^2} = \frac{d^2\xi^i}{d\tau^2} = -R^i_{0j0}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\xi^j = -R^i_{0j0}\xi^j, \quad (3.12)$$

já que no limite  $v \ll c$ , temos que  $dt/d\tau = 1$ . Considerando, então, o componente  $_{00}$  do tensor de Ricci com as devidas aproximações, chega-se a

$$R_{00} = R^{\mu}_{0\mu 0} = R^0_{000} + R^i_{0i0} = R^i_{0i0} = -\frac{1}{2}h_{00} = -\nabla^2\Phi. \quad (3.13)$$

Com esse resultado e considerando as equações de campo de Einstein (1.74), encontra-se que  $R_{00} = 4\pi\rho$ , o que leva a equação de Poisson:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho. \quad (3.14)$$

Cabe ressaltar que, para a obtenção da equação de Poisson, que leva ao potencial newtoniano, foram omitidos todos os termos de ordem quadrática e superior de  $h_{\mu\nu}$ , sendo utilizada as aproximações de campo fraco e de movimento lento da RG.

O próximo passo para se obter as equações de movimento no limite newtoniano, que será fundamental no desenvolvimento do método quase-newtoniano, é a aplicação das aproximações na equação da geodésica, de forma semelhante ao apresentado para o desvio geodésico. Primeiramente, para o campo fraco, podemos expandir os termos  $h_{\mu\nu}$  na forma  $h_{\mu\nu} \approx \delta h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}^2)$ , e manter apenas os termos de primeira ordem. Considerando, também,  $v \ll c$ , os termos que apresentam velocidades  $dx^i/d\tau$  na equação (1.87) podem ser desprezados e a equação da geodésica reescrita como

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{00}\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (3.15)$$

e conseqüentemente, ainda considerando velocidade baixas:

$$\frac{d^2x^\mu}{c^2d\tau^2} = -\Gamma^{\mu}_{00}, \quad (3.16)$$

onde os únicos coeficientes não desprezados da conexão são dados por

$$\Gamma_{00}^{\mu} = \frac{1}{2} (2\delta h_{0\mu,0} - \delta h_{00,\mu}) . \quad (3.17)$$

Considerando por fim o campo como estacionário, todas diferenciações em relação a  $x^0$  podem ser igualadas a zero (anulando, também, o  $\Gamma_{00}^0$ ) e temos, portanto,

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial \delta h_{00}}{\partial x^i} , \quad (3.18)$$

o que nos leva a equação:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\partial \delta h_{00}}{\partial x^i} . \quad (3.19)$$

Conforme esperado para os limites assumidos, a gravitação de Newton pode ser obtida a partir da equação (3.19), se determinarmos a  $\delta h_{00}$  um valor finito de aproximadamente  $-2\Phi + \chi$ , em que  $\chi$  é uma constante real arbitrária, em que teremos, portanto,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = -\frac{GM}{r} , \quad (3.20)$$

sendo  $G$  a constante da gravitação de Newton,  $M$  a massa de um corpo gerador do campo gravitacional e  $r$  a distância ao corpo.

O *formalismo pós-newtoniano* (PN), é uma versão aproximada da RG que, assim como no limite newtoniano, assume o campo gravitacional fraco e movimento lento da matéria, entretanto com ordens de aproximação maiores<sup>2</sup>. As aproximações pós-newtonianas apresentam considerável sucesso na descrição de campos gravitacionais no Sistema Solar e também pode ser aplicado em algumas situações envolvendo corpos compactos com fortes campos gravitacionais internos, desde que a força mutual entre os corpos possa ser considerada fraca. Também fornece a base para calcular ondas gravitacionais emitidas por sistemas binários compactos, assim como suas evoluções sob perdas por radiação [49].

Um limite pós-newtoniano consistente requer a determinação dos coeficientes do tensor métrico em altas ordens. Um outro formalismo que expande o PN, é o *formalismo pós-newtoniano parametrizado* (PPN), que insere parâmetros no lugar desses coeficientes, dependendo do caso em estudo. Nas versões atuais do formalismo se usam dez parâmetros, que são escolhidos de forma a medir ou indica as propriedades gerais das teorias métricas da gravidade, aparentemente exaurindo as possibilidades dos tipos de potenciais presentes no PN, sob as condições adequadas [49].

---

<sup>2</sup>Uma correção de ordem  $\epsilon^n$  é chamada de ordem  $(n/2)PN$

## 3.2 A Aproximação quase-newtoniana

Os modelos de aproximação pós-newtoniana apresentam algumas limitações como, por exemplo, o fato de não serem uniformemente válidos em grandes distâncias [50] e as fortes restrições da parametrização para estudos da dinâmica de pulsares [51]. Embora o PN e o PPN sejam, atualmente, as aproximações mais utilizadas nos casos em que pareça razoável o uso de modelos aproximativos entre a RG e o limite newtoniano, a ideia central deste trabalho é utilizar, para o estudo das curvas de rotação de galáxias, outro modelo, que chamaremos de *formalismo quase-newtoniano*, que apresenta características do limite newtoniano e um potencial gravitacional que carrega, de certa forma, características da não-linearidade da RG.

As equações de movimento da RG podem ser obtidas a partir das equações de campo de Einstein. Conforme mostrado no texto de Infeld e Plebanski [47], a partir das equações de Newton é possível restaurar a equação da geodésica e verificar que esta é parte inerente das equações de campo. É importante notar, entretanto, que embora as equações de campo sejam quadráticas em relação à conexão, a equação da geodésica é linear. Sendo assim, se aplicarmos as mesmas condições de campo fraco e movimento lento em ambos sistemas, veremos que as equações de campo apresentarão uma atenuação mais intensa que as da geodésica. Ao aplicarmos o limite newtoniano a equação do desvio geodésico, restauramos a equação de campo de Poisson e quebramos o caráter não-linear das equações de Einstein. Por outro lado, se aplicarmos as aproximações apenas à equação da geodésica, deixando intactas as demais equações, haverá a quebra da covariância generalizada, mas, manteremos a não-linearidade e teremos um campo gravitacional diferente do obtido pelas aproximações usuais que será mais forte que o campo newtoniano e mais fraco que o campo da RG.

Conforme mostrado na seção anterior, a aplicação do limite newtoniano na equação da geodésica restaura a equação de movimento gravitacional newtoniano. Porém, sem aplicarmos a mesma aproximação na equação do desvio geodésico, a equação de Poisson (3.14) não será recuperada, mantendo parte do caráter não-linear da RG, com um potencial diferente do esperado para gravitação não-relativística, o qual chamaremos de *potencial quase-newtoniano*,  $\Phi_{qN}$ . Portanto, similarmente à gravitação de Newton, podemos postular a equação de movimento como

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \equiv -\frac{\partial \Phi_{qN}}{\partial x^i}, \quad (3.21)$$



e, por comparação com (3.19), temos

$$\frac{\partial \Phi_{qN}}{\partial x^i} = -\frac{1}{2} \delta_{ij} \frac{\partial \delta h_{00}}{\partial x_j}, \quad (3.22)$$

em que  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Temos nessa relação, que o potencial  $\Phi_{qN}$  é diferente do newtoniano pois não se assumiu que o campo gravitacional seja necessariamente fraco. De fato, a única assunção para a modificação na equação da geodésica foi a de que o movimento é lento ( $\epsilon \ll 1$ ), o que é uma consideração razoável para o caso de rotação de galáxias, cujas velocidades máximas das estrelas raramente são maiores que  $300 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Para obtermos a expressão do potencial quase-newtoniano, devemos levar em consideração que o campo gravitacional é restaurado continuamente com incrementos de pequenos termos de ordem superior,

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu} + (\delta h_{\mu\nu})^2 + \dots, \quad (3.23)$$

e, portanto, a única aproximação que se mantém é a de baixa velocidade, sendo que o campo obtido pode não ser fraco. Podemos integrar, ao longo da geodésica, o conjunto de acréscimos  $\delta h_{\mu\nu}$  até um valor finito  $h_{\mu\nu}$ , o que nos leva ao potencial:

$$\Phi_{qN} = -\frac{c^2}{2} \int_0^{h_{00}} d(\delta h_{00}) = -\frac{c^2}{2} (1 + g_{00}). \quad (3.24)$$

É importante observar que o coeficiente  $g_{00}$  na relação (3.24) é obtido diretamente das soluções exatas para as equações de campo de Einstein, as quais contam com as contribuições de todos os componentes métricos e não apenas o componente “00”, sem qualquer tipo de aproximação. O potencial quase-newtoniano obtido, não é tão forte quanto o da RG, pois a soma dos acréscimos à métrica se dá apenas no componente  $g_{00}$ , mas também não é tão fraco quanto o newtoniano, pois não se aplicou as aproximações às equações não-lineares e foi considerada apenas a aproximação de movimento lento. Desta forma podemos interpretar que o termo  $g_{00}$  carrega os aspectos da não-linearidade para o novo potencial, que se situa entre a RG e a teoria de Newton. Um exemplo imediato para a obtenção de  $\Phi_{qN}$  é a utilização da métrica de Schwarzschild<sup>3</sup> de simetria esférica, com  $g_{00} = -(1 - 2GM/r)$  que, através de (3.24), resulta em um potencial  $\Phi \sim 1/r$ , coincidente com o caso newtoniano.

Conforme será mostrado no capítulo seguinte, o uso de uma métrica com simetrias diferentes, no caso, uma métrica de Weyl em disco fino, resulta em um potencial diferente daquele

---

<sup>3</sup>A solução de Schwarzschild descreve um campo gravitacional externo a uma massa esférica, sem carga elétrica e momento angular, foi obtida por Karl Schwarzschild em 1916. Seu elemento de linha é dado por  $ds^2 = -(1 - 2GM/r)c^2 dt^2 + (1 - 2GM/r)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ .

obtido para a métrica de Schwarzschild. Alguns fenômenos astrofísicos já foram estudados com a aproximação quase-newtoniana com o uso dessa métrica de Weyl, [52, 53, 54], sendo que o problema das curvas de rotação aparenta ser um teste fundamental para o modelo em escala galáctica.

# Capítulo 4

## Curvas de Rotação via Modelo Quase-Newtoniano

Conforme explicado no capítulo 2, não é possível descrever pela mecânica newtoniana as curvas de rotação das galáxias, se considerarmos apenas a matéria bariônica observável. Como tentativas de se explicar as discrepâncias nas velocidades, elaboraram-se diversas hipóteses que consistem tanto em modificações nas teorias da mecânica quanto na suposição da existência de massas não observadas com o uso das técnicas atuais. Devido às complicações matemáticas impostas pela não-linearidade da RG somadas ao argumento de que, em tese, a diferença entre o movimento em um campo relativístico e o newtoniano não seria suficiente para descrever as divergências de massa aparente (como exemplo, vide [55]), o que geralmente se faz são estudos com bases em modificações ou extensões da RG, ou formalismos como o PPN, que apresentam diversas restrições na escala galáctica, considerando *a priori* um campo fraco, assim como o movimento lento.

Neste capítulo, é apresentada uma tentativa de descrever as curvas de rotação através do formalismo quase-newtoniano, introduzido no capítulo 3. Com as aproximações assumidas pelo referido formalismo e adotando um espaço amostral de 25 galáxias de baixo brilho superficial (ou, do tipo LSB<sup>1</sup>), pretendemos mostrar a razoabilidade de se abordar o problema através de um modelo hipotético, derivado da RG, que considere apenas o movimento lento, sem a necessidade de considerar a condição de campo fraco, levando os aspectos não-lineares da gravitação para as

---

<sup>1</sup>Acrônimo do termo, em inglês, *Low Surface Brightness*, que, tradução livre, significa “Baixo Brilho Superficial”

curvas de rotação, com relativa simplicidade matemática (em comparação com outros modelos de fundo relativístico). Os ajustes das curvas de rotação apresentados encontram-se descritos em artigo submetido e publicado no decorrer do programa de mestrado do autor desta dissertação [4], artigo este que serve como fonte bibliográfica de base para o conteúdo do capítulo.

## 4.1 Métrica estacionária de Weyl

Conforme podemos ver a partir da presença do termo  $g_{00}$  no potencial dado por (3.24), as características geométricas, topológicas e de simetrias são fatores fundamentais na determinação do campo gravitacional na aproximação quase-newtoniana, de forma a requerer uma escolha adequada da métrica para que o modelo seja compatível com a fenomenologia. Nesse sentido, utilizaremos para o ajuste das curvas a métrica estática de Weyl, de simetria cilíndrica, motivada pelo movimento axialmente simétrico de uma estrela na rotação galáctica e pela possibilidade de ajustar a métrica a uma simetria em disco, compatível com as formas de galáxias espirais e lenticulares. É importante notar que a solução cilíndrica de Weyl é difeomorfa em relação a de Schwarzschild e é assintoticamente plana, conforme mostrado em [56, 57, 58, 59]

Considerando uma partícula de teste em movimento axialmente simétrico, usaremos, então, o elemento de linha de Weyl [56], que é expresso em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  por:

$$ds^2 = -e^{2\sigma} dt^2 + e^{2(\lambda-\sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\theta^2 + e^{2(\lambda-\sigma)} dz^2, \quad (4.1)$$

em que  $\lambda = \lambda(r, z)$  e  $\sigma = \sigma(r, z)$ , sendo excluída a variável  $\theta$  devido à simetria. As equações de Einstein no vácuo ( $R_{\mu\nu} = 0$ ) nos arredores do cilindro são dadas por [60]:

$$-\lambda_{,r} + r\sigma_{,r}^2 - r\sigma_{,z}^2 = 0, \quad (4.2)$$

$$\sigma_{,r} + r\sigma_{,rr} + r\sigma_{,zz} = 0, \quad (4.3)$$

$$2r\sigma_{,r}\sigma_{,z} = \lambda_{,z}. \quad (4.4)$$

Vamos utilizar a aproximação da métrica para um disco fino, ou seja, tomaremos para o cilindro que a altura do cilindro  $h_0$  é muito menor que seu raio  $R_0$ , ou seja,  $h_0 \ll R_0$ , reduzindo a uma base circular que pode ser perturbada pela expansão dos parâmetros da métrica. Com essa aproximação, rompemos as condições de invariância por difeomorfismo da RG, além dos argumentos utilizados na construção do formalismo em baixa velocidade no capítulo anterior. Usaremos, portanto, soluções aproximadas da métrica de Weyl, expandindo as funções em seus

coeficientes, referentes às orbitas das partículas, ou seja, devemos expandir  $\sigma(r, z)$  e  $\lambda(r, z)$  em séries de Taylor, na forma

$$\sigma(r, z) \approx \sigma(r, 0) + z \left. \frac{\partial \sigma(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} + z^2 \left. \frac{\partial^2 \sigma(r, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0} + \dots, \quad (4.5)$$

$$\lambda(r, z) \approx \lambda(r, 0) + z \left. \frac{\partial \lambda(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0} + z^2 \left. \frac{\partial^2 \lambda(r, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0} + \dots, \quad (4.6)$$

e consideraremos a aproximação até a segunda ordem para mantermos a não-linearidade do sistema. Podemos definir, para  $\sigma(r, z)$ ,

$$\sigma(r, z) = A(r) + a(r)z + c(r)z^2, \quad (4.7)$$

em que denotamos  $A(r) = \sigma(r, 0)$ ,  $a(r) = \left. \frac{\partial \sigma(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0}$  e  $c(r) = \left. \frac{\partial^2 \sigma(r, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0}$ . Similarmente, para  $\lambda(r, z)$ , podemos definir,

$$\lambda(r, z) = B(r) + b(r)z + d(r)z^2. \quad (4.8)$$

em que, assim como no  $\sigma(r, z)$ , se denota  $B(r) = \lambda(r, 0)$ ,  $b(r) = \left. \frac{\partial \lambda(r, z)}{\partial z} \right|_{z=0}$  e  $d(r) = \left. \frac{\partial^2 \lambda(r, z)}{\partial z^2} \right|_{z=0}$ .

Para resolver o sistema não-linear dado pelas equações (4.2), (4.3) e (4.4), pode-se substituir os coeficientes, como definidos em (4.7) e (4.8). Para obtermos o  $\sigma(r, z)$ , consideremos, inicialmente uma transformação na ordem de derivação de da equação (4.3), como:

$$\sigma_{,r} \longrightarrow y \quad , \quad \sigma_{,rr} \longrightarrow y_{,r}, \quad (4.9)$$

o que resulta em

$$y + ry_{,r} + 2rc(r) = 0 \quad (4.10)$$

que se trata de uma equação diferencial linear, que pode ser resolvida pela técnica do fator integrante<sup>2</sup>:

$$y_{,r} + \frac{1}{r}y = -2c(r) \quad \longrightarrow \quad \sigma_r = -\frac{1}{r} \left( \int 2rc(r)dr \right) + \frac{A_1(z)}{r}, \quad (4.11)$$

que, integrando novamente resulta em

$$\sigma(r, z) = - \int \frac{1}{r'} \left( \int 2r''c(r'')dr'' \right) dr' + A_1(z) \ln(r) + A_2(z), \quad (4.12)$$

sendo  $A_1(z)$  e  $A_2(z)$  funções apenas de  $z$  obtidas pelas integrações.

---

<sup>2</sup>Como revisão a técnica utilizada se recomenda livros básicos sobre equações diferenciais, como, por exemplo, [61]

Par resolver a integral em (4.12) e como buscamos funções analíticas no infinito, podemos escolher  $c(r'')$  na forma de uma potencia, qual seja,

$$c(r'') = \frac{c_0}{(r'')^n} \quad , \quad c_0 = \text{constante} \quad , \quad n > 0 \quad , \quad (4.13)$$

o que nos leva a:

$$\begin{aligned} \sigma(r, z) &= - \int \frac{1}{r'} \left( \int 2r'' \frac{c_0}{(r'')^n} dr'' \right) dr' + A_1(z) \ln(r) + A_2(z) \\ &= - \int \frac{1}{r'} \left( 2 \frac{c_0}{2-n} (r')^{2-n} + A_3(z) \right) dr' + A_1(z) \ln(r) + A_2(z) \\ &= - \int \left( 2 \frac{c_0}{2-n} (r')^{1-n} + \frac{A_3(z)}{r'} \right) dr' + A_1(z) \ln(r) + A_2(z) \\ &= \frac{-2c_0}{(2-n)^2} r^{2-n} + k(z) \ln(r) + A_2(z) \quad , \quad n \neq 2 \quad . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Derivando as equações (4.7) e (4.14) em relação a  $z$  e as comparando, obtemos

$$k(z)_{,z} \ln(r) + A_2(z)_{,z} = a(r) + \frac{2c_0}{r^n} z \quad , \quad (4.15)$$

e, portanto

$$A_2(z)_{,z} = a(r) + \frac{2c_0}{r^n} z - k(z)_{,z} \ln(r) \quad . \quad (4.16)$$

Como  $A_2(z)$  é uma função apenas da variável  $z$ , temos

$$a(r) = \text{constante} \quad , \quad k(z) = \frac{k_0}{2} = \text{constante} \quad , \quad n = 0 \quad , \quad (4.17)$$

e, então,

$$A_2(z)_{,z} = a_0 + 2c_0 z \quad , \quad (4.18)$$

que, integrando, resulta em

$$A_2(z) = a_0 z + c_0 z^2 + c_1 \quad , \quad (4.19)$$

em que  $c_1$  é uma constante de integração. Temos portanto, o resultado:

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) - \frac{c_0 r^2}{2} + a_0 z + c_0 z^2 + c_1 \quad . \quad (4.20)$$

Já com o resultado dado por (4.20), podemos, a partir de sua substituição na equação de campo (4.2), obter

$$y_{,r} = r \sigma_{,r}^2 - r \sigma_{,z}^2 = r \left( \frac{k_0}{2r} - c_0 r \right)^2 - r (a_0 + 2c_0 z)^2 \quad , \quad (4.21)$$

ou, expandindo,

$$y_{,r} = \frac{k_0^2}{4r} - k_0 c_0 r + c_0^2 r^3 - r (a_0 + 2c_0 z)^2 \quad , \quad (4.22)$$

que, integrando, resulta em

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - k_0 c_0 \frac{r^2}{2} + \frac{1}{4} c_0^2 r^4 - (a_0 + 2c_0 z)^2 \frac{r^2}{2} + B_1(z), \quad (4.23)$$

De forma semelhante ao feito para o cálculo de  $\sigma(r, z)$ , vamos considerar

$$d(r) = \frac{d_0}{r^m}, \quad d_0 = \text{constante}. \quad (4.24)$$

A partir daí, podemos calcular as derivadas de (4.8) (4.23) e compara-las, obtendo

$$B_1(z),z = b(r) + 2 \frac{d_0}{r^m} z + 2a_0 c_0 r^2 + 4c_0^2 z r^2, \quad (4.25)$$

que, integrando em relação a  $z$ , resulta em

$$B_1(z) = \left( \frac{d_0}{r^m} + 2c_0^2 r^2 \right) z^2 + (b(r) + 2a_0 c_0 r^2) z + b_1. \quad (4.26)$$

Como  $B_1(z)$  é apenas função de  $z$ , temos

$$C_1 = \frac{d_0}{r^m} + 2c_0^2 r^2 = d(r) + 2c_0^2 r^2, \quad C_2 = b(r) + 2a_0 c_0 r^2, \quad (4.27)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes. Prosseguindo no cálculo de  $\lambda(r, z)$  chegamos à expressão

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - k_0 c_0 \frac{r^2}{2} + \frac{1}{4} c_0^2 r^4 - (a_0 + 2c_0 z)^2 \frac{r^2}{2} + C_1 z^2 + C_2 z + b_1, \quad (4.28)$$

na qual podemos assumir  $b_1 = 0$  sem perda de generalidade. Pode-se obter os valores de  $C_1$  e  $C_2$

A partir das restrições impostas ao substituirmos esse resultado e a equação (4.20) nas equações de campo, de onde chegamos ao resultado:

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r) - k_0 c_0 \frac{r^2}{2} + \frac{1}{4} c_0^2 r^4 - (a_0 + 2c_0 z)^2 \frac{r^2}{2} + k_0 a_0 z + k_0 c_0 z^2 + d_1. \quad (4.29)$$

Para concluir, verifica-se imediatamente a relação entre os coeficientes das expansões, em que vemos que  $a(r)$  e  $c(r)$  podem ser reduzidos, respectivamente às constantes  $a_0$  e  $c_0$  e para  $b(r)$  e  $d(r)$  temos

$$b(r) = k_0 a_0 - 2a_0 c_0 r^2 \quad (4.30)$$

$$d(r) = k_0 c_0 - 2c_0^2 r^2, \quad (4.31)$$

em que é explícita a relação

$$b(r) = \frac{a_0}{c_0} d(r). \quad (4.32)$$

Cabe notar que, termos de ordem superiores nas expansões de  $\sigma(r, z)$  e de  $\lambda(r, z)$  se tornam redundantes e podem ser reduzidos à segunda ordem [53].

## 4.2 Campo de velocidades quase-newtoniano

A partir do elemento de linha de Weyl, dado por (4.1), podemos ver que o potencial quase-newtoniano,

$$\Phi_{qN} = -\frac{c^2}{2}(1 + g_{00}), \quad (4.33)$$

será dependente apenas de  $\sigma(r, z)$ , sendo desprezível qualquer contribuição de  $\lambda(r, z)$  para o campo. Queremos determinar o potencial sentido por uma partícula de teste de massa  $m$  (representando uma estrela, por exemplo) percorrendo uma orbita circular ao redor do bojo galáctico, tratado como uma fonte pontual de massa  $M$  no centro de uma galáxia. Desenvolvendo o potencial para um disco fino ( $z \rightarrow 0$ ), temos

$$\begin{aligned} \Phi_{qN}(r)|_{z=0} &= -\frac{c^2}{2}(1 + g_{00}) = -\frac{c^2}{2}(1 - e^{2\sigma}) \\ &= -\frac{c^2}{2} \left\{ 1 - \exp \left[ 2 \left( \frac{k_0}{2} \ln(r) - \frac{c_0 r^2}{2} + c_1 \right) \right] \right\} \\ &= -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} e^{\ln r^{k_0}} e^{-c_0 r^2} e^{2c_1} \\ &= -\frac{c^2}{2} \left( 1 - r^{k_0} e^{-c_0 r^2 + 2c_1} \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Conforme se explicou em [53], para a escala do Sistema Solar,  $c_0 \ll 1$ , sendo dado por  $c_0 = \pm \frac{1}{4\pi} \nu$ , em que  $\nu$  é o movimento médio kepleriano, dado por  $\nu = \sqrt{\frac{GM}{\gamma^3}}$ , sendo  $\gamma$  o semieixo maior da orbita. Em uma escala galáctica, considerando esse pequeno valor, o termo exponencial se aproxima da unidade, o que faz prevalecer o termo  $r^{k_0}$  e o potencial assume a forma:

$$\Phi_{qN}(r)|_{z=0} = -\frac{c^2}{2} \left( 1 - r^{k_0} e^{2c_1} \right). \quad (4.35)$$

Como o potencial dado por (4.35) tem origem relativística e pode apresentar seus efeitos nas regiões de baixa densidade bariônica, é esperado que seus efeitos prevaleçam em relação aos causados pelo potencial newtoniano nas regiões de raios maiores que o bojo, de relevância atual para o estudo das curvas de rotação. Para obtermos uma velocidade que represente a contribuição desse potencial nas curvas de rotação, a qual chamaremos de *velocidade quase-newtoniana*,  $v_{qN}$ , consideremos, primeiramente, a relação de Newton para a velocidade de uma partícula orbitante em um problema de força central,

$$v(r) = \sqrt{r \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|}, \quad (4.36)$$

e definimos, em analogia ao raio de uma órbita kepleriana, um raio característico do disco óptico, dado por  $R_0 = \frac{GM}{c^2}$ , que se faz necessário após análise dimensional, sendo  $M$  a massa visível da



galáxia. Com isso, a substituição direta da derivada do potencial em (4.36) resulta em

$$v_{qN}(r) = \sqrt{\frac{GM}{R_0} \beta_0 \left(\frac{r}{R_0}\right)^{k_0}}, \quad (4.37)$$

em que a constante  $\beta_0$  agrega todas outras constantes decorrentes dos cálculos. Convém notar, que, no caso em que  $k_0 = -1$  e  $\beta_0 = 1$ , obtemos a fórmula padrão para a velocidade newtoniana:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (4.38)$$

Para obtermos um campo efetivo de velocidades capaz de se ajustar à dinâmica das galáxias, alguns aspectos da não-linearidade devem ser considerados. Devido à (4.37) se originar de uma simetria cilíndrica, a equação não pode gerar termos newtonianos sem a imposição estrita do valor de  $k_0 = -1$ . Além disso, as sutilezas remanescentes do campo original da RG não nos permite fazer uma sobreposição linear de todos valores possíveis de  $k_0$ . Um ajuste adequado do campo para as curvas de rotação deve possuir os termos newtoniano e quase-newtoniano de forma que, para raios grandes o suficiente a contribuição newtoniana seja desprezível. Com este fim, definimos a velocidade efetiva total,  $v_{ef}$  a partir da relação

$$v_{ef}^2 = v_N^2 + v_{qN}^2, \quad (4.39)$$

em que  $v_N$  é a velocidade newtoniana.

Para conectar as regiões, postulando de forma simples a disposição de massa bariônica nas galáxias, utilizaremos o modelo de distribuição de massa em disco fino descrito por Blumenthal et al. [62], no qual a distribuição radial de massa se estende no plano galáctico, decaindo exponencialmente a partir do centro da galáxia. Ao utilizarmos esse modelo de distribuição de massa, substituímos a fonte pontual de campo gravitacional por uma estrutura linearizada de massa  $M(r)$ , de origem luminosa. Temos, no caso,

$$M(r) = M_\star \left[ 1 - \left( 1 + \frac{r}{r_c} \right) \exp\left(-\frac{r}{r_c}\right) \right], \quad (4.40)$$

em que  $r_c$  é um parâmetro característico de comprimento a ser obtido por ajuste numérico para cada galáxia, e  $M_\star$  é a soma da massa luminosa do disco galáctico,  $M_{disco}$ , com a massa de gás presente na galáxia  $M_{gás}$ , ou seja,  $M_\star = M_{disco} + M_{gás}$ . Para a correção de massa gasosa devido ao hélio e metais, é necessária fazer a correção usual  $M_{gás} = 1,4M_{HI}$ , em que  $M_{HI}$  é a massa do hidrogênio calculada a partir da linha espectral de  $21cm$ . É importante notar que, no modelo que usamos, a matéria escura bariônica é desconsiderada, sendo os ajustes realizados apenas em relação a matéria luminosa observada.

Para reescrevermos a velocidade efetiva, basta substituímos a distribuição de massa nas equações de velocidade (4.37) e (4.38), e utilizarmos (4.39). Obtemos, finalmente:

$$v_{ef}(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r} + \frac{GM(r)}{2R_0} \beta_0 \left(\frac{r}{R_0}\right)^{k_0}}. \quad (4.41)$$

Notemos que se espera a velocidade efetiva nula quando o raio se aproxima do infinito, entretanto, observacionalmente se tem velocidades de rotação desprezíveis apenas além do raio máximo da curva, onde não há mais influência gravitacional da galáxia, não sendo mais mensurável o aspecto plano da curva de rotação. O comportamento assintótico da curva obtida por (4.41) depende principalmente da constante  $k_0$ , que domina a inclinação da curva para grandes raios. Para efetuarmos os ajustes numéricos das curvas de rotação, no modelo que obtivemos, devem ser calculados apenas três parâmetros, um do modelo de massa e outros dois da velocidade efetiva, que devem ser obtidos para cada caso individual, de acordo com as particularidades de cada galáxia.

### 4.3 Amostras de galáxias LSB e os ajustes das curvas de rotação

A principal motivação para a escolha de um espaço amostral formado por galáxias LSB para a aplicação do formalismo apresentado nesse trabalho, é que as curvas de rotação e a relação de Tully-Fisher mostram que este tipo de galáxias apresenta características dominantes de matéria faltante em relação às galáxias de alto brilho superficial, (ou, dependendo do modelo, que são “dominadas por matéria escura”), sendo consideradas adequadas para testes de teorias gravitacionais [41, 63, 64]. As galáxias LSB são numericamente importantes, possuidoras geralmente de um bojo central amplo e menos denso que as alto brilho superficial HSBs, o que resulta em uma subida menos acentuada na curva a raios pequenos, e existem tanto como galáxias-anãs, com raios da ordem de  $1kpc$  quanto galáxias gigantes, como a conhecida Malin 1, com raios superiores a  $80kpc$ .

A amostra utilizada consistiu em 25 galáxias LSB extraídas de [64], em que os autores estudaram uma amostra de 30 galáxias com base na análise de curvas de rotação suaves híbridas alfa-HI, de alta resolução. As medidas foram realizada no *Las Campanas Observatory* através de espectroscopia de fenda única. As distâncias adotadas foram calculadas se assumindo uma

constante de Hubble igual a  $H_0 = 75 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ . A tabela 4.1 mostra os valores principais considerados para os ajustes numéricos das curvas de rotação. Para cada galáxia, o raio característico do disco óptico,  $R_0$ , a massa de gás através da linha espectral HI,  $M_{HI}$ , e a massa do disco estelar,  $M_{disco}$  foram obtidos de [41], enquanto a distância,  $D$ , o raio máximo,  $R_{max}$  e as velocidades de estabilização  $V$  foram obtidas a partir de [64]. Das galáxias presentes na amostragem, 8 foram estudadas com auxílio de ferramentas de fotometria, quais sejam, F563-1, F583-1, F579-1, F583-4, F571-8, F568-3, UGC 5750 e UGC 6614; todas as demais galáxias tiveram seus dados medidos sem fotometria.

Para obtenção numérica dos parâmetros, utilizamos o software GnuPlot 5.0 para calcular por método de mínimos-quadrados não-linear o ajuste com os dados experimentais aplicando o algoritmo de Levenberg-Marquardt, que é um método simples e recomendado para a análise da adequação dos dados. Na tabela 4.2, apresentamos os valores calculados para os parâmetros e os respectivos qui-quadrados reduzidos,  $\chi_{red}^2$ , e probabilidade (que indica a compatibilidade entre o modelo e os dados),  $p$  para as curvas obtidas. Na tabela, as galáxias estão mostradas em ordem crescente dos valores de  $\chi_{red}^2$ . As figuras 4.1 a 4.7 ilustram as curvas de rotação obtidas, em que os círculos azuis com as respectivas barras de erros representam os dados observacionais e as linhas representam as curvas obtidas com os parâmetros calculados.

Analisando a tabela 4.2, podemos ver que a maior parte das galáxias foram apresentadas bons ajustes, com  $p > 0,95$ , desde a UGC 4115 até a UGC 5750, representando 64% das amostras. Ajustes intermediários, com  $0,95 > p > 0,05$ , ocorreram em 7 galáxias, da F583-4 à F568-3, representando 28% das amostras e 2 galáxias, UGC 11748 e UGC 6614, 8% das amostras, apresentaram  $p = 0$ , com elevados valores de  $\chi_{red}^2$ . Devemos notar, que, em alguns casos a probabilidade se reduz devido a apenas um ponto experimental não alcançado, como é o caso da UGC 11819, com  $p = 0,735$ , na qual o ponto observado em maior raio, contando com a barra de erro, ficou abaixo da curva ajustada. Algo similar ao ajuste da UGC 11819 ocorre com a UGC 11748, porém com o ponto experimental de maior raio ficando com velocidade acima de um ajuste subestimado para aquela região.

Considerando as curvas que ficaram com ajustes inadequados,  $p = 0$ , podemos ver que, além do ponto experimental acima da curva ajustada para a UGC 11748, em raios próximos ao centro da galáxia, a curva ajustada passa acima de um ponto experimental (com sua barra de erro). No caso da galáxia gigante UGC 6614, ao contrário, um ponto de baixo raio na curva se apresenta significativamente acima da curva ajustada, indicando que o ajuste não foi capaz de cobrir o

ponto, decorrente de um pico na curva de rotação, onde prevaleceria o potencial newtoniano, dado o campo de velocidades postulado em (4.39).

Dentre as possíveis causas para esses ajustes inadequados para essas galáxias, ressalta-se que o modelo de massa assumido é demasiadamente simples, de apenas um parâmetro indeterminado, e não é adequado para todos os possíveis perfis de densidade no centro galáctico, bem como todas as particularidades de cada galáxia. Em tese, um modelo de massa mais complexo, que forneça detalhes minuciosos da massa de origem luminosa pode ser mais eficiente para falseabilidade da metodologia proposta, verificando se esses pontos fora dos ajustes são devidamente realocados nas curvas, entretanto tais modelos requerem uso de métodos computacionais mais complexos, que estão além do escopo deste trabalho. É interessante notar que, para essas galáxias, conseguimos obter resultados semelhantes aos obtidos em [64], no qual se utilizaram perfis pseudo-isotérmicos e de halos do modelo NFW<sup>3</sup> encontrando padrões semelhantes de  $\chi_{red}^2$  acima de 1 e probabilidades iguais ou próximas à zero.

Por fim, cabe lembrar que partimos de um modelo aproximativo, a partir da RG, com a quebra da covariância generalizada e não podemos descartar a hipótese do formalismo ter desconsiderado sistematicamente efeitos que alterem sutilezas das curvas. Entretanto, devido a maior parte das curvas de rotação apresentarem ajustes considerados adequados ( $p > 0,95$ ), podemos supor que, se esse for o caso, os parâmetros calculados absorvem satisfatoriamente as discrepâncias. Frisemos que, apesar de utilizarmos apenas a matéria bariônica luminosa nos cálculos, tratamos do problema apenas na escala galáctica, não sendo incompatível com a hipótese da existência de matéria escura em escalas maiores ou mesmo em escalas similares, se considerarmos uma quantidade de matéria escura menor do que a suposta para os modelos puramente newtonianos (neste segundo caso, os parâmetros absorveriam os efeitos da matéria escura, resultando em um adequado ajuste fenomenológico). No caso de modelos dinâmicos baseados em dados empíricos, como o MOND, por exemplo, são necessários, para verificar a compatibilidade entre as hipóteses, novos estudos que permitam comparar os dados dinâmicos fornecidos pela metodologia com aqueles observados universalmente nas curvas de rotação, conforme mostrado por [66]. Tais verificações serão deixadas como motivação para estudos futuros.

---

<sup>3</sup>Modelo desenvolvido por Navarro, Frenk e White, no paradigma da CDM, para a cálculo da distribuição de matéria escura no halo galáctico[65]

Tabela 4.1: Propriedades das 25 galáxias amostradas. A distância  $D$  encontra-se em unidade ( $Mpc$ ), o raio característico  $R_0$  e o raio máximo  $R_{max}$  em ( $kpc$ ), as massas  $M_{HI}$  e  $M_{disco}$  em ( $10^{10}M_{\odot}$ ), onde  $M_{\odot}$  é a massa solar, e a velocidade de estabilização média  $V$  está em unidades de ( $km \cdot s^{-1}$ ).

Galáxia	D	$R_0$	$R_{max}$	$M_{HI}$	$M_{disco}$	V
UGC4115	5,5	0,3	1,7	-	0,01	39,8
ESO3050090	13,2	1,3	5,6	-	0,06	54,6
ESO0840411	82,4	3,5	9,1	-	0,06	61,3
ESO4250180	88,3	7,3	14,6	-	4,79	144,5
ESO1870510	16,8	2,1	2,8	-	0,09	39,9
ESO4880490	28,7	1,6	7,8	-	0,43	97,1
UGC11557	23,7	3,0	6,7	0,25	0,37	80,4
ESO01400040	217,8	10,1	30,0	-	20,7	272,7
F563-1	46,8	2,9	14,1	0,29	1,35	112,4
ESO1200211	15,2	2,0	3,5	-	0,01	25,4
ESO3020120	70,9	3,4	11,2	-	0,77	86,3
UGC11648	49,0	4,0	13,0	-	2,57	144,6
F583-1	32,4	1,6	14,1	0,18	0,15	86,9
ESO2060140	59,6	5,1	11,6	-	3,51	118,0
F579-1	86,9	5,2	14,7	0,21	3,33	114,4
UGC5750	56,1	3,3	8,6	0,1	0,1	78,9
F583-4	50,8	2,8	7,0	0,06	0,31	69,9
F571-8	50,3	5,4	14,6	0,16	4,48	143,9
F730-1	148,3	5,8	12,2	-	5,95	145,3
UGC11819	61,5	4,7	11,9	-	4,83	154,7
UGC11616	74,9	3,1	9,8	-	2,43	142,8
UGC11454	93,9	3,4	12,3	-	3,15	152,2
F568-3	80,0	4,2	11,6	0,3	1,2	101,1
UGC11748	49,0	2,6	13	-	9,67	250,0
UGC6614	86,2	8,2	62,7	2,07	9,7	205,2

Tabela 4.2: Valores dos parâmetros de ajuste obtidos  $(\beta_0, r_c, k_0)$ , qui-quadrado reduzido  $\chi_{red}^2$  e probabilidade  $p$ .

Galáxia	$\beta_0$	$r_c$	$k_0$	$\chi_{red}^2$	$p$
UGC4115	11,105±13,810	1,186 ± 0,728	0,002 ±0,252	0,005	1
ESO3050090	1,585±0,368	1,343 ± 0,128	0,638 ±0,158	0,015	1
ESO0840411	3,825±0,309	2,019 ± 0,106	1,090 ±0,0782	0,007	0,999
ESO4250180	1,302±0,361	5,873 ± 0,717	0,259 ±0,263	0,018	0,999
ESO1870510	3,196±11,480	1,769 ± 3,749	-0,269 ± 2,393	0,025	0,999
ESO4880490	4,311±3,943	3,050 ± 1,351	-0,381±0,336	0,035	0,999
UGC11557	27,786±183,100	17,056 ± 57,73	-0,221± 0,652	0,073	0,999
ESO01400040	1,324±0,272	5,117 ± 0,568	0,025± 0,218	0,107	0,991
F563-1	0,510±0,214	2,844 ± 0,472	0,263 ±0,238	0,112	0,998
ESO1200211	6,695±18,630	0,938 ± 2,652	-0,262±2,910	0,142	0,999
ESO3020120	2,871± 9,521	3,894 ± 6,616	-0,395± 1,760	0,143	0,998
UGC11648	0,288±0,0228	2,504 ± 0,0447	1,266± 0,076	0,158	0,999
F583-1	2,486±5,756	3,687 ± 3,460	-0,220± 0,895	0,160	0,999
ESO2060140	1,199±5,666	3,959 ± 8,298	-0,590± 3,371	0,200	0,998
F579-v1	0,279±0,0771	2,522 ± 0,117	0,645± 0,336	0,212	0,997
UGC5750	5,836± 14,770	4,872 ± 6,525	-0,082± 1,152	0,311	0,962
F583-4	1,076±0,413	2,021 ± 0,282	0,306±0,395	0,320	0,927
F571-8	2,105±3,810	6,048 ± 5,132	-0,472± 0,979	0,418	0,939
F730-V1	1,477±7,291	5,280 ± 11,740	-0,582±3,017	0,568	0,725
UGC11819	2,417±13,360	5,802 ± 15,140	-0,347±2,846	0,718	0,735
UGC11616	2,101±8,797	3,726 ± 7,152	-0,491±2,151	0,900	0,532
UGC11454	2,601±6,560	4,820 ± 5,623	-0,4923±1,164	1,434	0,167
F568-3	3,0517±34,200	6,037 ± 32,64	-0,354± 5,059	1,470	0,162
UGC11748	0,423±0,117	1,771 ± 0,187	0,082± 0,162	2,618	0,000
UGC6614	0,850±0,520	5,906 ± 1,597	0,114± 0,393	3,915	0,000

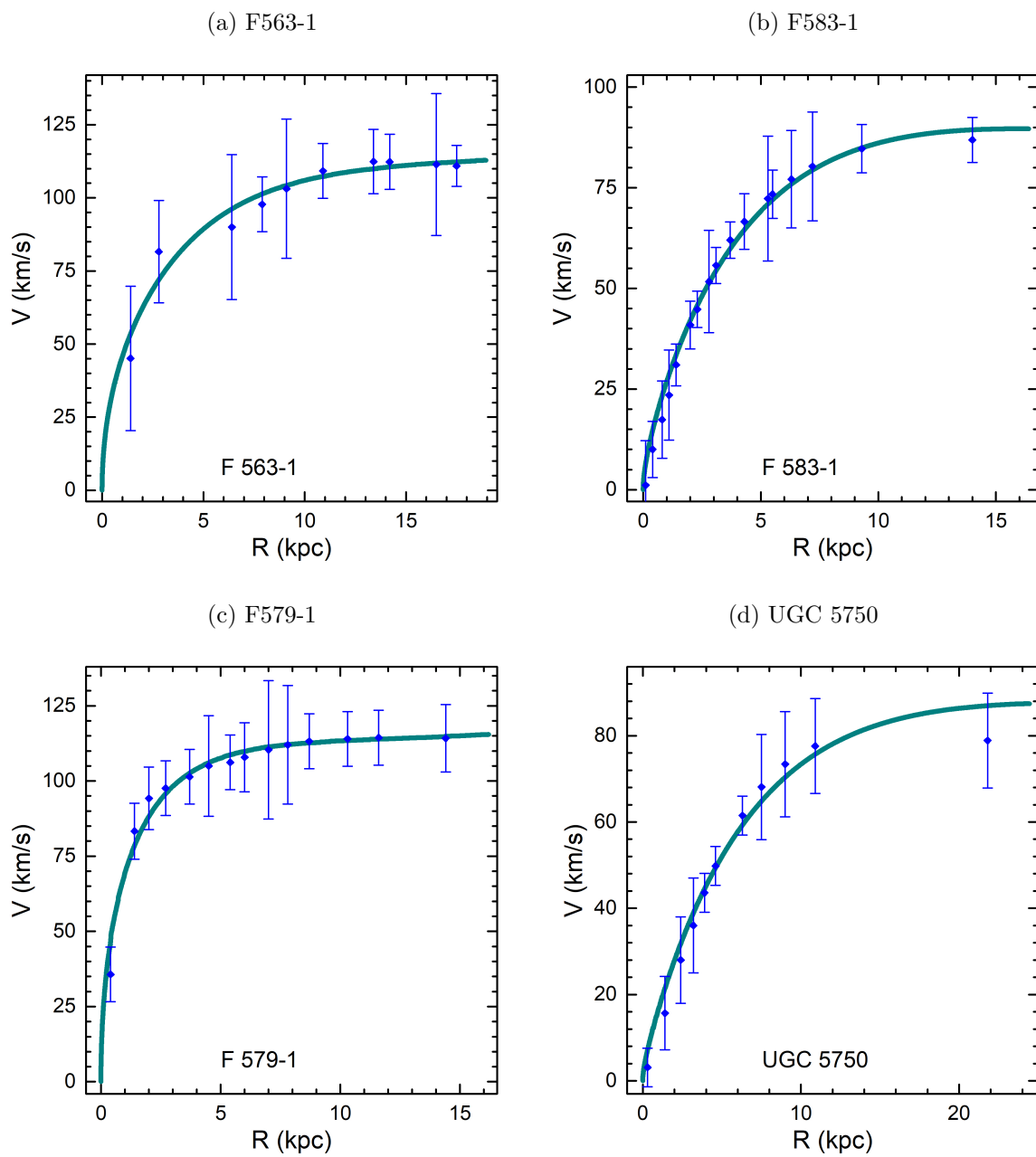


Figura 4.1: Curvas de rotação de 4 galáxias LSB (com fotometria).

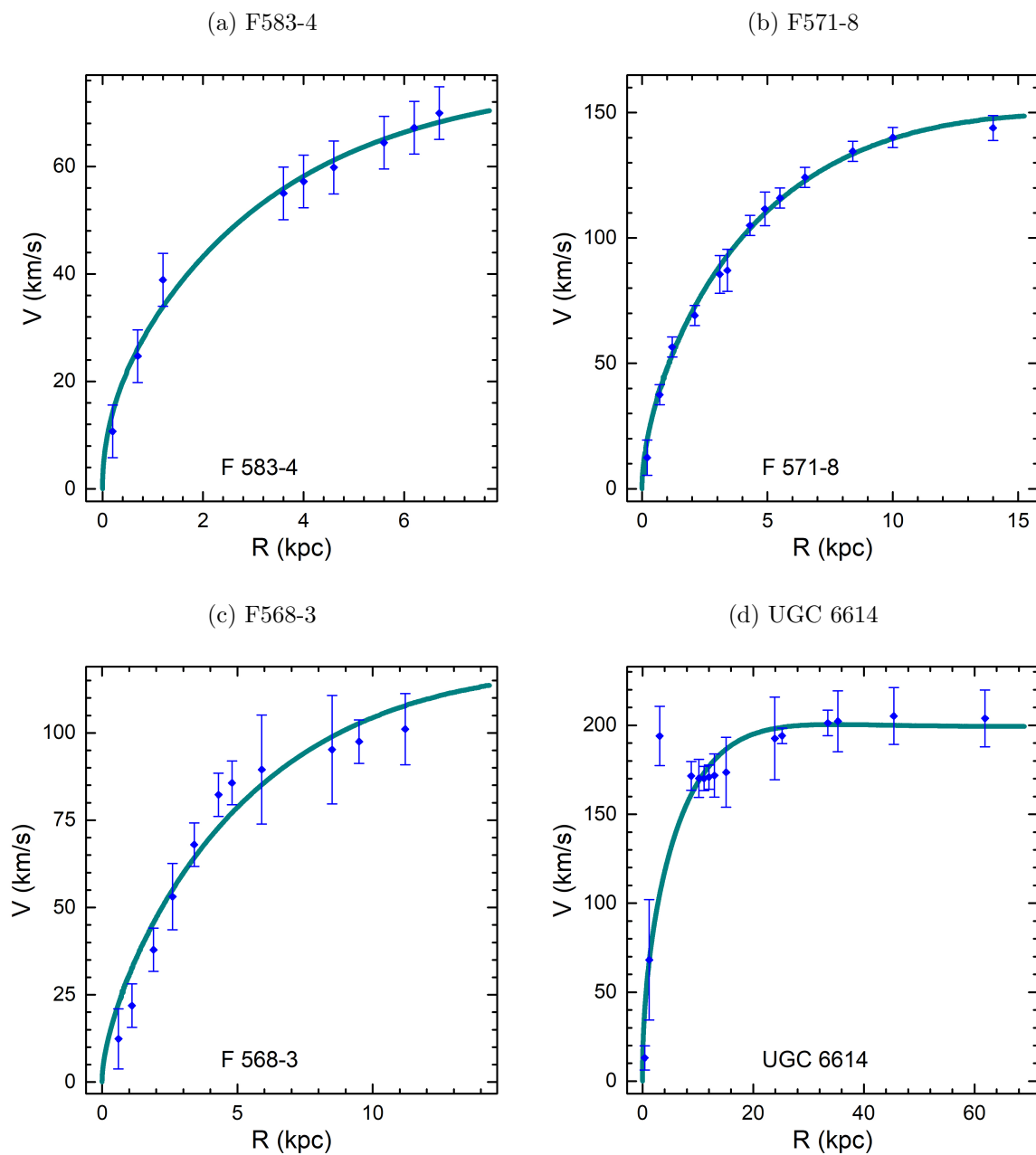


Figura 4.2: [Segundo grupo] Curvas de rotação de 4 galáxias LSB (com fotometria).



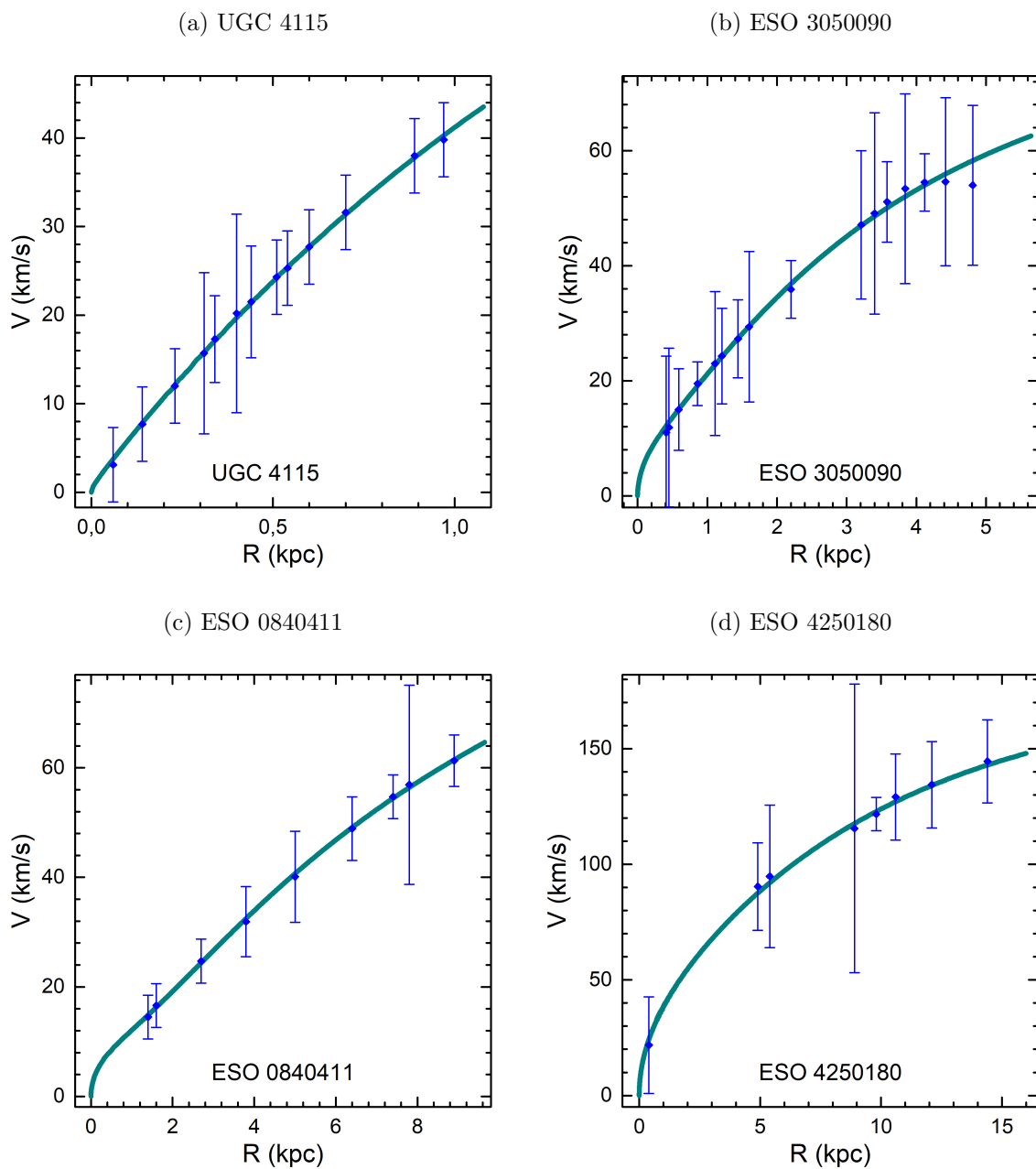


Figura 4.3: [Terceiro grupo] Curvas de rotação de 4 galáxias LSB (sem fotometria).

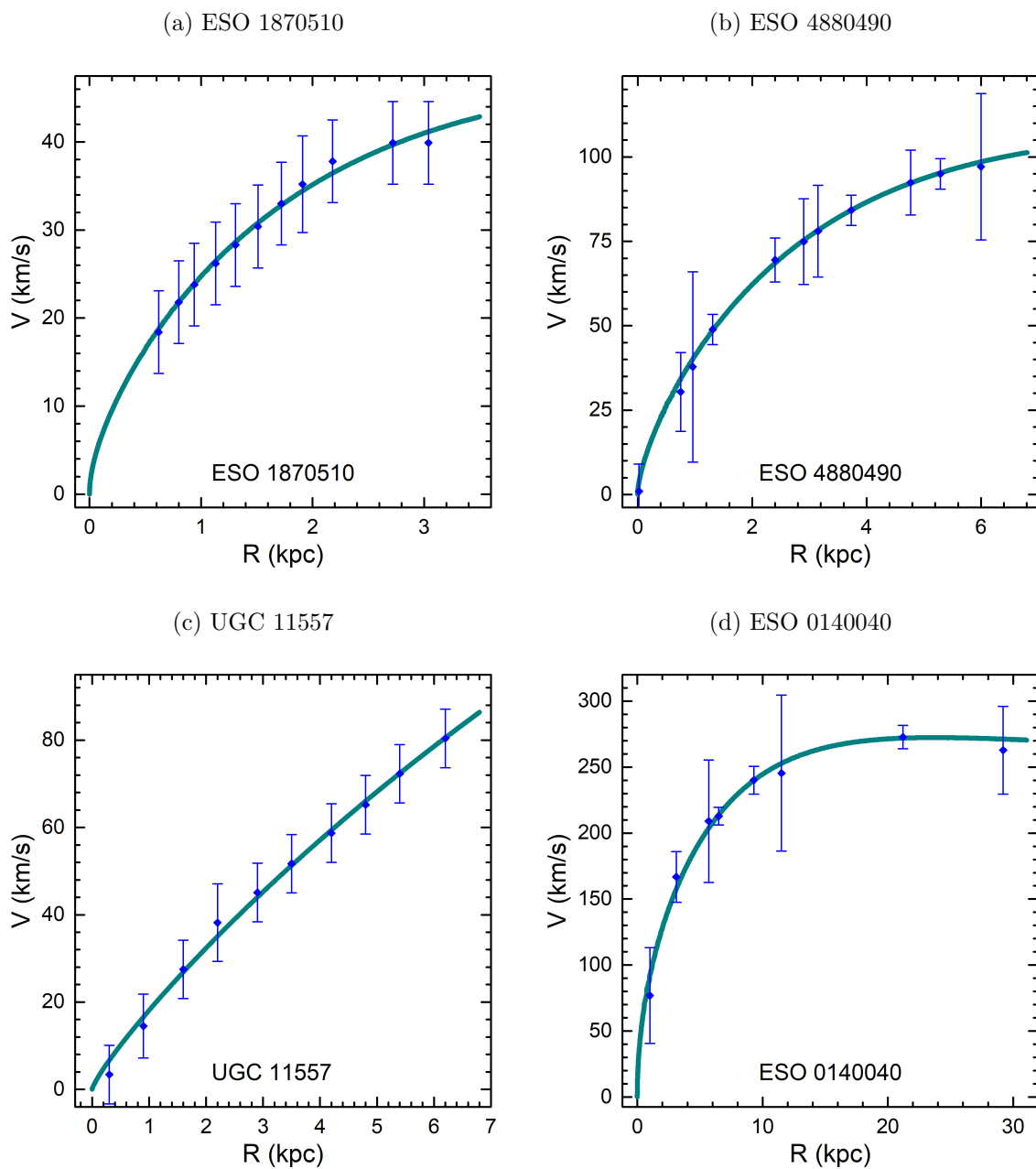


Figura 4.4: [Quarto grupo] Curvas de rotação de 4 galáxias LSB (sem fotometria).

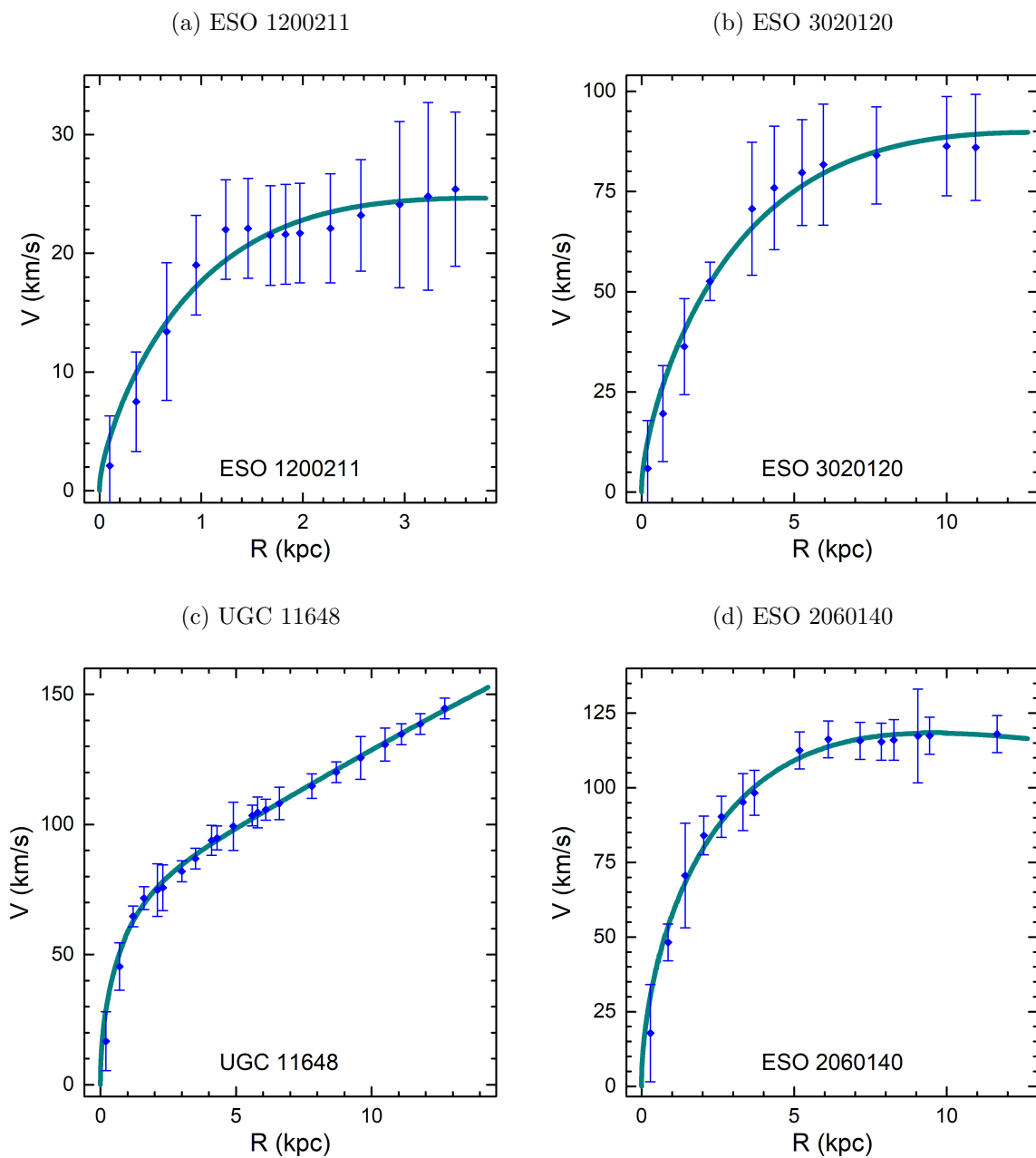


Figura 4.5: [Quinto grupo] Curvas de rotação de 4 galáxias LSB (sem fotometria).

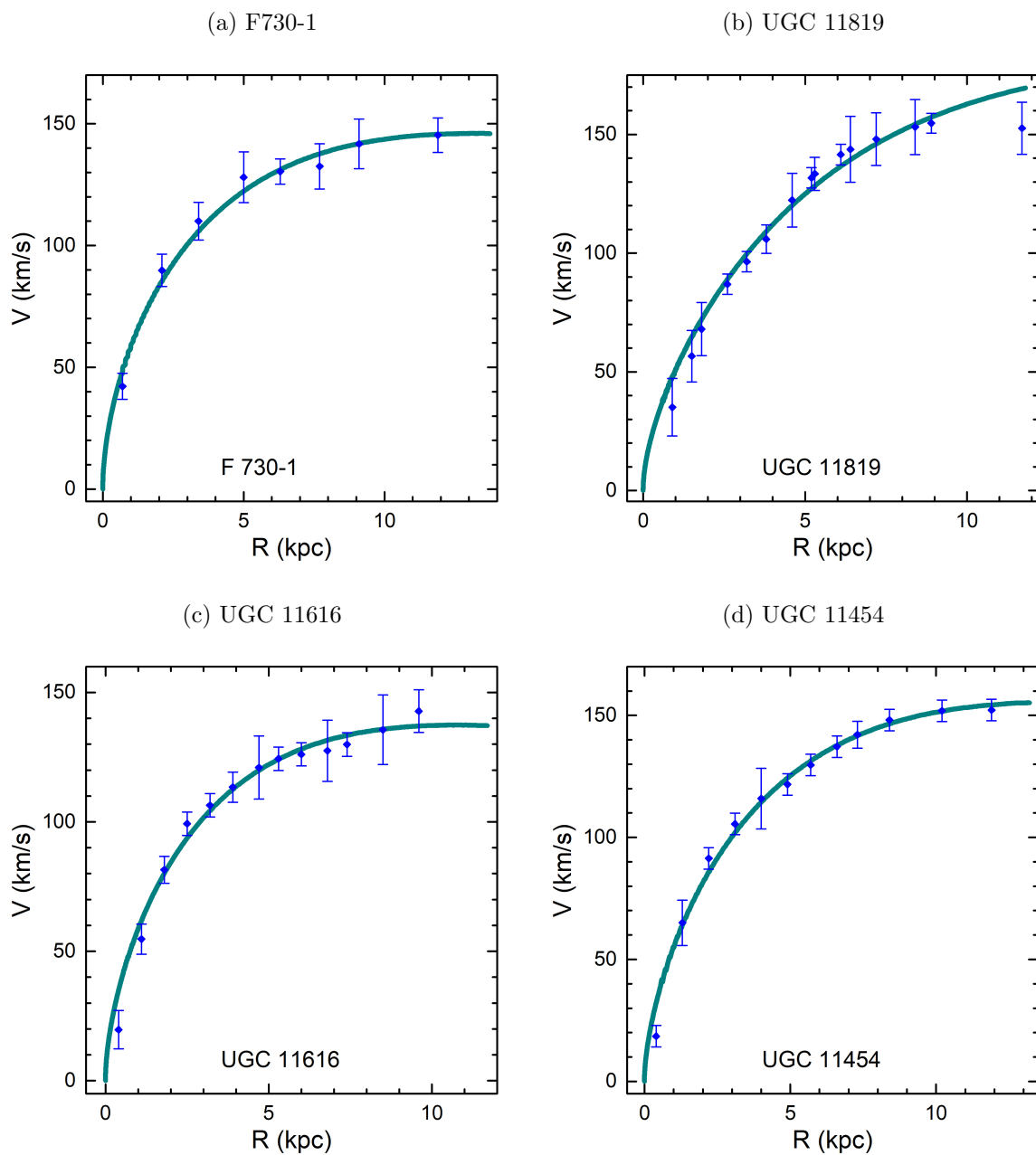


Figura 4.6: [Sexto grupo] Curvas de rotação de 4 galáxias LSB (sem fotometria).

(a) UGC 11748

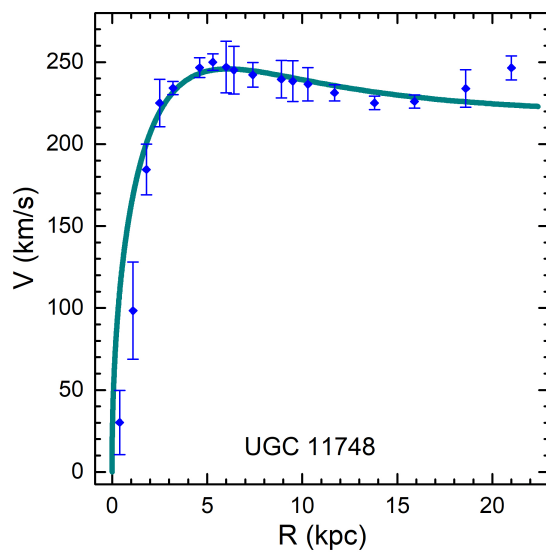


Figura 4.7: [Sétimo grupo] Curva de rotação da LSB UGC 11748 (sem fotometria).

# Considerações Finais

Usualmente, considera-se que a Teoria da Relatividade Geral é desnecessária para elucidar os problemas associados à dinâmica em escala galáctica, devido a hipótese de, nessa situação, serem efetivas as condições impostas pelo limite newtoniano: campo gravitacional fraco e baixa velocidade. Neste trabalho, mostramos que, para as curvas de rotação das galáxias, o uso do limite de baixa velocidade na equação da geodésica, sem a aplicação do limite de campo fraco e modificações nas equações de campo, implica em significativa alteração do potencial gravitacional, devido à presença de um termo que carrega os efeitos não-lineares do campo. É importante notar que esse formalismo não é uma modificação da RG e nem é proveniente de novos postulados da dinâmica, sendo resultado simples e imediato da aproximação.

Utilizamos esse modelo, que chamamos *quase-newtoniano*, junto a uma métrica estática de campo fino e um modelo de distribuição exponencial de massa, chegando a um campo de velocidades com apenas três parâmetros indeterminados (um do modelo de massa e dois do potencial quase-newtoniano). Os ajustes numéricos mostraram consistência do formalismo para descrever as curvas de rotação por meio da adequação dos parâmetros, sendo obtidas curvas com fidelidades semelhantes às decorrentes de modelos hipotéticos consagrados pela literatura.

Devido à simplicidade da metodologia adotada, não foram considerados todos aspectos geométricos e peculiaridades da distribuição bariônica nas galáxias amostradas. Para aumentar a precisão e testar com maior rigor a consistência do modelo são necessárias extensões do trabalho desenvolvido. Dentre as possibilidades de obtenção de ajustes com maior riqueza de detalhes e realismo, está o uso de métricas que possam representar uma galáxia de forma mais fidedigna, tais como as métricas propostas por [58], e o uso de modelos de massa mais complexos, capazes de descrever o conteúdo de matéria luminosa de forma mais minuciosa.

# Referências Bibliográficas

- [1] K. Schutz et.al **Constraining a thin dark matter disk with Gaia**, arXiv:1711.03103v1 [astro-ph.GA], (2017).
- [2] O. Müller et. al **A Whirling plane of satellite galaxies around Centaurus A challenges cold dark matter cosmology**, Science, 359(6375), 534-537, (2018).
- [3] E. Verlinde, **On the origin of gravity and the laws of Newton**, J. High Energ. Phys., 2011:29, (2011).
- [4] A.J.S. Capistrano, G.R.G. Barrocas, **Rotation curves of LSBGs and dwarf galaxies in a nearly Newtonian solution**, Mon. Not. R. Astron. Soc., 475, 2204-2214, (2018).
- [5] R. Sancisi, **The visible matter - dark matter coupling**, In: proceedings of IAU Symposium, 220, 233-240, (2004).
- [6] R.M. Wald, **General Relativity**, The University of Chicago Press, Estados Unidos da América (1984).
- [7] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, **Gravitation**, W.H Freeman and Company, Nova Iorque (1973).
- [8] T. Padmanabhan, **Gravitation: Foundations and Frontiers**, Cambridge University Press, Nova Iorque (2010).
- [9] S.M. Carroll, **Lecture Notes on General Relativity**, gr-qc/9712019V1.
- [10] J.C.A. Barata, **Notas para Cursos de Física-Matemática** [on-line], Disponível na Internet em [http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas\\_de\\_aula/](http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/), Universidade de São Paulo, Versão de 04/11/2017.

- [11] E.L. Lima, **Variedades Diferenciáveis**, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro (2012).
- [12] A. Das, A. DeBenedictis, **The General Theory of Relativity: A Mathematical Exposition**, Springer Science, Nova Iorque (2012).
- [13] R.D’Inverno, **Introducing Einstein’s Relativity**, Oxford University Press, Nova Iorque (2003)
- [14] M.D. Maia, **Geometry of The Fundamental Interactions**, Springer Science, Nova Iorque (2011).
- [15] H. Weyl, **Space-Time-Matter**, Dover Publications, Inc., Estados Unidos da América (1952).
- [16] A. Einstein, **Annalen Der Physic**, **49**, 769-822.
- [17] S. Weinberg, **Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity**, John Wiley & Sons, Estados Unidos da América (1972).
- [18] T. Padmanabhan, **Theoretical Astrophysics - Volume III: Galaxies and Cosmology**, Cambridge University Press, Nova Iorque (2002).
- [19] B.Famaey, S.S. McGaugh, **Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions**, Living Rev. Relativ. 15:10, <https://doi.org/10.12942/lrr-2012-10>, (2012).
- [20] J. Holmberg, C. Flynn, **The local surface density of disc matter mapped by Hipparcos**, Mon. Not. R. Astron. Soc., 352(2), 440-446, (2000).
- [21] R.H. Sanders, **The Dark Matter Problem - A Historical Perspective**, Cambridge University Press, Nova Iorque (2010).
- [22] B.W. Carroll, D.A. Ostlie, **An Introduction to Modern Astrophysics**, Pearson Education, Inc., San Francisco (2007).
- [23] D. Clowe et al., **A Direct empirical proof of the existence of dark matter**, Ap. J., 648, L109-L113, (2006).



- [24] A. Bosma, **The Distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types**, Tese de Doutorado, Universidade de Groningen, Holanda (1978).
- [25] V.C. Rubin, W.K. Ford Jr., **Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions**, *Ap. J.*, 159, 379, (1970).
- [26] V.C. Rubin, N. Thonnard, W.K. Ford Jr., **Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV - Systematic dynamical properties, SA through SC**, *Ap. J.*, 225, L107-L111, (1978).
- [27] V.C. Rubin, W.K. Ford Jr., N. Thonnard, **Rotational properties of 23 SB galaxies**, *Ap. J.*, 261, 439-456 (1982).
- [28] W.J. Maciel, **A Galáxia**. Em: A.C.S. Friaça et al., **Astronomia - Uma Visão Geral do Universo**, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo (2003).
- [29] G. Bertone, D. Hooper, **A History of dark matter**, astro-ph/1605.04909v2, (2016).
- [30] S.D.M. White, C.S. Frenk, M. Davis, **Clustering in a neutrino-dominated universe**, *Ap. J.*, 274, L1-L5, (1983).
- [31] E.A. Baltz, **Dark matter candidates**, arXiv:astro-ph/0412170v1, (2004).
- [32] M. Milgrom, **A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis**, *Ap. J.*, 270, 365-370 (1983).
- [33] M. Milgrom, **A modification of the Newtonian dynamics: Implications for galaxies**, *Ap. J.*, 270, 370-383 (1983).
- [34] M. Milgrom, **A modification of the Newtonian dynamics: Implications for galaxy systems**, *Ap. J.*, 270, 384-389 (1983).
- [35] R. Scarpa, **Modified Newtonian Dynamics, an introductory review**, arXiv:astro-ph/0601478, (2006).
- [36] G. Schilling **Battlefield Galactica: Dark matter vs. MOND**, *Sky & Telescope*, 4, 30-36, (2007).

- [37] R.B. Tully, J.R. Fisher, **A New method of determining distances to galaxies**, *A&A*, 54(3), 661-673, (1977).
- [38] J.D. Bekenstein, **Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm**, *Phys. Rev. D*, 70, 083509, (2004).
- [39] T. Katsuragawa, S. Matsuzaki, **Dark matter in modified gravity?**, *Phys. Rev. D*, 95, 044040, (2017).
- [40] S. Capozziello, V.F. Cardone, A. Troisi, **Low surface brightness galaxy rotation curves in the low energy limit of  $R^n$  gravity: no need for dark matter?**, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 375, 1423-1440, (2007).
- [41] P.D. Mannheim, J.G. O'Brien, **Fitting galactic rotation curves with conformal gravity and a global quadratic potential**, *Phys. Rev. D*, 85, 124020, (2012).
- [42] L.A. Ureña-López, **Bose-Einstein condensation of relativistic Scalar Field Dark Matter**, *JCAP*, 01, 14, (2009).
- [43] T. Harko **Evolution of cosmological perturbations in Bose-Einstein condensate dark matter**, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 413, 3095-3104, (2011).
- [44] L.A. Martínez-Medina, T. Matos, **Scalar field dark matter mass model and evolution of rotation curves for low surface brightness galaxies**, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 444, 185-191, (2014).
- [45] L.Á. Gergely et al., **Galactic rotation curves in brane world models**, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 415, 3275-3290, (2011).
- [46] A.J.S. Capistrano, L.A. Cabral, **Geometrical aspects on the dark matter problem**, *Ann. Phys.*, 384, 64-83, (2014).
- [47] L. Infeld, J. Plebanski, **Motion and Relativity**, Pergamon Press, Londres, (1960).
- [48] H. Asada, T. Futamase, P.A. Hogan, **Equations of Motion in General Relativity**, Oxford University Press, Nov Iorque, (2011).
- [49] C.M. Will, **The Confrontation between General Relativity and experiment**, *Living Rev. Relativity*, 17-4, <http://www.livingreviews.org/lrr-2014-4> (2014).

- [50] W.L. Burke, **The coupling of gravitational radiation to nonrelativistic sources**, Tese de doutorado, California Institute of Technology, Pasadena, (1969).
- [51] N. Wex, **Testing relativistic gravity with radio pulsars**, arXiv:1402.5594[gr-qc], (2014).
- [52] M.D. Maia, A.J.S. Capistrano, D. Muller, **Perturbations of dark matter gravity**, Int.J.Mod.Phys., D18, 1273-1289, (2009).
- [53] A.J.S. Capistrano, W.L. Roque, R.S. Valada, **Weyl conformastatic perihelion advance**, Mon. Not. R. Astron. Soc., 444, 1639-1646, (2014).
- [54] A.J.S. Capistrano, J.A.M. Penagos, M.S. Alárcon, **Anomalous precession of planets on a Weyl conformastatic solution**, Mon. Not. R. Astron. Soc., 463, 1587-1591, (2016).
- [55] H. Balasin, D. Grumiller, **Non-Newtonian behavior in weak field general relativity for extended rotating sources**, Int.J.Mod.Phys.D, 17, 475-488, (2008).
- [56] H. Weyl, **Zur Gravitationstheorie**, Ann. Phys., 359, 117-145, (2017).
- [57] N. Rosen, **A Particle at rest in a static gravitational field**, Rev. Mod. Phys., 21, 503-505, (1949).
- [58] M.D. Zipoy, **Topology of some spheroidal metrics**, J. Math. Phys., 7, 1137, (1966).
- [59] R. Gautreau, R.B. Hoffman, A. Armenti, **Static multiparticle systems in general relativity**, Il Nuovo Cimento B, 7(1), 71-98, (1972).
- [60] R.S. Valada, **Soluções Exatas da Métrica de Weyl para Aproximação de Segunda Ordem de um Disco Fino e Testes Clássicos da RG**, Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, (2013).
- [61] M. Tenenbaum, H. Pollard, **Ordinary Differential Equations**, Harper & Row, Nova Iorque, (1963).
- [62] G.R. Blumenthal et al., **Contraction of dark matter galactic halos due to baryonic infall**, Ap. J., 301, 27-34, (1986).
- [63] W.J.G. de Blok, S.S. McGaugh, **Dark matter in low surface brightness galaxies**, arXiv:astro-ph/9610216, (1996).

- 
- [64] W.J.G. de Blok, S.S. McGaugh, V.C. Rubin, **High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies. II. Mass models**, Ap. J., 122, 2396-2427, (2001).
- [65] J.F. Navarro, C.S. Frenk, S.D.M. White, **The Structure of cold dark matter halos**, Ap. J., 462, 563-575, (1996).
- [66] S.S. McGaugh, F. Lelli, J.M. Schombert, **The Radial acceleration relation in rotationally supported galaxies**, Phys. Rev. Lett., 117, 201101, (2016).