INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS
DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)

LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

O NÚMERO π: UM ESTUDO DE SUA IRRACIONALIDADE, TRANSCENDÊNCIA E POTÊNCIAS ESPECÍFICAS

MARHLON BHRENDO FERNANDEZ BRAGA

Foz do Iguaçu
2025

INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)

LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

O NÚMERO π: UM ESTUDO DE SUA IRRACIONALIDADE, TRANSCENDÊNCIA E POTÊNCIAS ESPECÍFICAS

MARHLON BHRENDO FERNANDEZ BRAGA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León

Foz do Iguaçu
2025

MARHLON BHRENDO FERNANDEZ BRAGA

O NÚMERO π: UM ESTUDO DE SUA IRRACIONALIDADE, TRANSCENDÊNCIA E POTÊNCIAS ESPECÍFICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León
(UNILA)

Profa. Dra. Adriana Flores de Almeida
(UNILA)

Prof. Dr. Jonny Ardila Ardila
(UNILA)

Foz do Iguaçu, 08 de agosto de 2025.

TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor: Marhlon Bhrendo Fernandez Braga

Curso: Matemática – Licenciatura

Tipo de Documento

(X) graduação	(.....) artigo
(.....) especialização	(X) trabalho de conclusão de curso
(.....) mestrado	(.....) monografia
(.....) doutorado	(.....) dissertação
	(.....) tese
	(.....) CD/DVD – obras audiovisuais
	(.....)

Título do trabalho acadêmico: O número π: Um estudo de sua irracionalidade, transcendência e potências específicas

Nome do orientador: Víctor Arturo Martínez León

Data da Defesa: 08/08/2025

Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor:

a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons* **Licença 3.0 Unported.**

Foz do Iguaçu, 09 de agosto de 2025.

Marhlon B.

Marhlon Bhrendo Fernandez Braga

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço ao meu professor orientador Víctor Arturo Martínez León pela sugestão de tema, agradeço-o não só pela constante orientação neste trabalho, mas sobretudo pela sua amizade e incentivo diante das dificuldades neste percurso, dada a impossibilidade de descrever em palavras toda ajuda e apoio recebidos, deixo aqui minha imensa gratidão por sua magnífica orientação.

Também ressalto todos os maravilhosos professores que tive ao longo da graduação, suas qualidades e destreza para ensinar certamente me motivaram a seguir o mesmo caminho.

Agradeço aos meus pais Helena e Antonio, e aos demais membros da família, por todo apoio e estrutura disponíveis durante toda minha graduação, por todo carinho e suporte nas minhas escolhas. Principalmente a minha mãe Helena Fernandez que sem duvidas é a figura que mais me inspirou com toda sua resiliência e empenho, proporcionando as melhores condições para que eu pudesse estudar. Não menos importante, agradeço e dedico as minhas cinco sobrinhas, Vitoria, Isabelly, Heloisa, Stefany e Yasmin, pelos bons momentos passados em fins de semana, trazendo "perturbação" e descanso dos meus estudos.

Antes de um turbilhão de emoções que passarei ao mencionar pessoas importantes ao longo desses anos. cabe aqui um agradecimento às integrantes do grupo *Red Velvet*, Seulgi, Irene, Joy, Yeri e Wendy. Que mesmo desconhecendo a existência de quem as cita, tiveram papel fundamental nas tardes e noites que passei pesquisando e escrevendo enquanto as escutava.

Agradeço daqui em diante nos parágrafos, tentando manter a ordem cronológica dos fatos, a todos os meus amigos que estiveram presentes desde o início no curso de Engenharia Física até o presente momento. Inicialmente, agradeço aos meus amigos Denilson e Joyce pelos bons momentos como calouros, somados posteriormente por Gelson e Alexandre.

Agradeço às pessoas que conheci por meio da salinha de estudos, da qual passamos por longos períodos em volta de uma mesa no formato circular que dificultava a organização de tantas pessoas, que nomeio aqui com carinho: a Ana, Bárbara e também as engenheiras químicas Ale, Anne, Lidi, Luanna e Chen (que contribuiu, além de intensificar meu apreço por ensinar e aprender matemática, como

me apresentar grupos de k-pop). Em particular, preciso destacar minha melhor amiga Luanna, que, apesar de nossas divergências esportivas, sempre esteve ao meu lado nos momentos de mudança, contribuindo significativamente no meu acervo e cultura cinematográfica.

Mais recentemente, forçado a mencionar, fruto de um convívio inoportuno e ocasionado por questões contratuais, seja de trabalho ou transporte, se faz necessário mencionar duas novas figuras constantes no meu cotidiano: a dupla Mayara e Manoela, que me incentivaram de forma sucinta e concisa a focar em terminar este trabalho. Meus mais sinceros agradecimentos.

Também neste ano pude conviver e aprender novas palavras em espanhol e guarani, cultivando ódios mútuos e paixão por *chipitas*. Agradeço à Jazmín por seu apoio e palavras confusas, das quais estou coibido de mencionar.

Em especial, dedico este parágrafo para agradecer aos meus melhores amigos Hussein e Gabriel, que, apesar de engenheiros físicos, são pessoas incríveis, e que, por mais que nossos futuros tenham a quase certeza de um distanciamento, jamais manterei longe as memórias experienciadas em sextas de futebol e shawarma. Um adendo dentro de um parágrafo já específico, devo agradecer profundamente ao meu melhor amigo Gabriel por tantos anos de amizade e longos períodos de silêncio.

Cuando sobre los hombros de una clase productora, pesa la más dura opresión económica, se agrega aún el desprecio y el odio de que es víctima como raza, no falta más que una comprensión sencilla y clara de la situación, para que esta masa se levante como un solo hombre y arroje todas las formas de explotación.

José Carlos Mariátegui

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso investiga a natureza matemática do número π, focando em suas propriedades de irracionalidade e transcendência. São estabelecidos os fundamentos matemáticos necessários, abrangendo conceitos de cálculo real e complexo, além de elementos da teoria dos números e um panorama histórico da constante. O estudo da irracionalidade de π é abordado por meio das demonstrações de Ivan Niven e Cartwright. A transcendência de Pi, por sua vez, é explorada através das provas desenvolvidas por Robert E. Moritz e Ivan Niven. Adicionalmente, este trabalho apresenta a demonstração da irracionalidade de π^4 baseada na técnica de identidades integrais de Hermite, conforme proposto por Mohammad Reza Yegan. Durante a análise desta abordagem, foi realizada uma investigação detalhada da derivação de uma relação de recorrência fundamental para a prova da irracionalidade de π^6 contida no artigo de Yegan (2017), revelando inconsistências significativas que impediram sua replicação e inclusão. Os resultados obtidos contribuem para uma compreensão mais profunda das propriedades de π, destacando a complexidade e a beleza da matemática, ao mesmo tempo em que enfatizam a importância da verificação rigorosa em pesquisa. O estudo reforça a relevância de π em diversas áreas do conhecimento e inspira novas direções para a pesquisa, especialmente na elucidação da referida inconsistência.

Palavras-chaves: π; Irracionalidade; Transcendência; Polinômios; Séries; Integrais.

RESUMEN

Este trabajo de conclusión de curso investiga la naturaleza matemática del número π, centrándose en sus propiedades de irracionalidad y trascendencia. Se establecen los fundamentos matemáticos necesarios, abarcando conceptos de cálculo real y complejo, además de elementos de la teoría de números y un panorama histórico de la constante. El estudio de la irracionalidad de π se aborda mediante las demostraciones de Ivan Niven y Cartwright. La trascendencia de π, a su vez, se explora a través de las pruebas desarrolladas por Robert E. Moritz e Ivan Niven. Adicionalmente, este trabajo presenta la demostración de la irracionalidad de π^4 basada en la técnica de identidades integrales de Hermite, según lo propuesto por Mohammad Reza Yegan. Durante el análisis de este enfoque, se realizó una investigación detallada de la derivación de una relación de recurrencia fundamental para la prueba de la irracionalidad de π^6 contenida en el artículo de Yegan (2017), revelando inconsistencias significativas que impidieron su replicación e inclusión. Los resultados obtenidos contribuyen a una comprensión más profunda de las propiedades de π, destacando la complejidad y la belleza de las matemáticas, al mismo tiempo que enfatizan la importancia de la verificación rigurosa en la investigación. El estudio refuerza la relevancia de π en diversas áreas del conocimiento e inspira nuevas direcciones para la investigación, especialmente en la elucidación de dicha inconsistencia.

Palabras clave: π; Irracionalidad; Trascendencia; Polinomios; Series; Integrales.

ABSTRACT

This undergraduate thesis investigates the mathematical nature of the number π, focusing on its irrationality and transcendence properties. Necessary mathematical foundations are established, covering concepts from real and complex calculus, as well as elements of number theory and a historical overview of the constant. The study of π's irrationality is approached through the demonstrations by Ivan Niven and Cartwright. π's transcendence, in turn, is explored through proofs developed by Robert E. Moritz and Ivan Niven. Additionally, this work presents the demonstration of π^4's irrationality based on Hermite's integral identities technique, as proposed by Mohammad Reza Yegan. During the analysis of this approach, a detailed investigation into the derivation of a fundamental recurrence relation for the proof of π^6's irrationality contained in Yegan's (2017) article was conducted, revealing significant inconsistencies that prevented its replication and inclusion. The obtained results contribute to a deeper understanding of π's properties, highlighting the complexity and beauty of mathematics, while also emphasizing the importance of rigorous verification in research. The study reinforces π's relevance in various fields of knowledge and inspires new directions for research, particularly in elucidating the aforementioned inconsistency.

Keywords: π; Irrationality; Transcendence; Polynomials; Series; Integrals.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Método de Arquimedes para o cálculo de π com polígonos de 6 e 12 lados 50

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **13**

2 FUNDAMENTOS **17**

2.1 **CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CÁLCULO REAL** 17

2.1.1 Funções 17

2.1.2 Polinômios Simétricos 18

2.1.3 Derivadas 21

2.1.4 Integrais 23

2.1.4.1 1º Teorema Fundamental do Cálculo 24

2.1.4.2 2º Teorema Fundamental do Cálculo 25

2.1.4.3 Integração por partes 26

2.1.5 Sequências e séries 26

2.1.5.1 Sequências 26

2.1.5.2 Séries 27

2.1.6 Séries de potências 29

2.2 **NÚMEROS COMPLEXOS E FUNÇÕES ANALÍTICAS** 32

2.2.1 Números Complexos 33

2.2.1.1 Fórmula de Euler 38

2.2.2 Funções Analíticas 40

2.2.2.1 Derivada de funções de uma variável complexa a valores complexos 40

2.3 **CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE TEORIA DOS NÚMEROS** 44

2.3.1 Aritmética 44

2.3.2 Princípios da Boa Ordenação e Indução 45

2.3.3 Números Racionais e Irracionais 46

2.3.4 Números Algébricos e Transcendentes 47

3 PANORAMA HISTÓRICO DO NÚMERO π **50**

3.1 **A PERMANÊNCIA DE π NA MATEMÁTICA** 50

3.2 **AS CONTRIBUIÇÕES FUNDAMENTAIS DE ARQUIMEDES** 50

3.3 **O PRIMEIRO ALGORITMO PARA π** 51

3.4 **DESENVOLVIMENTOS HISTÓRICOS NOTÁVEIS** 51

3.5 π **NO NASCIMENTO DA ANÁLISE MODERNA** 52
3.5.1 Produtos Infinitos 52
3.5.2 Séries e Fórmulas de Arco-tangente 52
3.6 **A NATUREZA FUNDAMENTAL DE** π 53
3.7 **O** π **DEFINIDO PELA INTEGRAL** 53
4 A IRRACIONALIDADE DE π **55**
4.1 **A DEMONSTRAÇÃO DE NIVEN** 55
4.2 **A DEMONSTRAÇÃO DE CARTWRIGHT** 60
5 A TRANSCENDÊNCIA DE π **65**
5.1 **A DEMONSTRAÇÃO DE ROBERT E. MORITZ** 65
5.2 **A DEMONSTRAÇÃO DE NIVEN** 72
6 A IRRACIONALIDADE DE π^4 . . . . . **77**
6.1 **ANÁLISE CRÍTICA DA DERIVAÇÃO DA RECORRÊNCIA PARA** π^6 **NO TRABALHO DE YEGAN** 86
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS **97**

REFERÊNCIAS **99**

1 INTRODUÇÃO

Minha jornada acadêmica na Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA) teve início no curso de Engenharia Física. Contudo, ao longo dos anos, percebi que meu entusiasmo se direcionava mais intensamente às disciplinas de matemática do que às competências físicas mais específicas. Essa percepção me levou à decisão de mudar para o curso de Matemática na própria UNILA em 2022. Desde as primeiras disciplinas, como matemática básica, meu fascínio pela matemática tem crescido continuamente, atraído pela beleza de criar e manipular objetos matemáticos que podem coexistir tanto no mundo real quanto no abstrato, tornando o estudo dessa área uma jornada que transcende a mera aplicabilidade.

Historicamente, diversos conceitos matemáticos têm gerado debates acalorados sobre sua validade, como é o caso dos números irracionais. A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$, por exemplo, que desafiou a filosofia pitagórica ao negar que todos os fenômenos do universo pudessem ser reduzidos a números inteiros, inclusive custou a vida de Hipaso de Metaponto (MOREIRA; CABRAL, 2021). Dentre os objetos de estudo que se destacam em muitos ramos da matemática, o número π é uma constante de particular importância. π representa a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro.

Neste trabalho de conclusão de curso, exploraremos dois aspectos fundamentais de π: sua irracionalidade e sua transcendência. A irracionalidade de π significa que ele não pode ser expresso como uma fração exata de dois números inteiros. A transcendência, por sua vez, implica que π não pode ser a raiz de nenhum polinômio não trivial com coeficientes inteiros. Essas propriedades conferem a π um caráter único e desafiador, com profundas implicações para a teoria dos números e a matemática em geral. A demonstração da irracionalidade de π tem um histórico notável; Lambert provou esse resultado em 1767 por meio de frações contínuas (LAMBERT, 1761). Posteriormente, Ivan Niven, em 1947, encontrou uma forma de utilizar a técnica de Hermite para provar que π é irracional (NIVEN, 1947). Além da demonstração de Niven, abordaremos a demonstração da irracionalidade de π por Cartwright. No que concerne à transcendência, Charles Hermite provou a transcendência do número de Euler em 1873 utilizando um polinômio que é a soma das derivadas de outro polinômio (HERMITE,

1874). A demonstração da transcendência de π foi fornecida por Lindemann em 1882, seguindo o método utilizado por Hermite (LINDEMANN, 1882), um resultado de grande impacto que estabeleceu a impossibilidade da clássica quadratura do círculo. Neste trabalho, apresentaremos em detalhes algumas demonstrações da irracionalidade e transcendência de π, as quais podem ser compreendidas e acompanhadas por alunos de graduação utilizando conhecimentos das disciplinas de Cálculo (GUIDORIZZI, 2018; SPIVAK, 1980; GUIDORIZZI, 2023) e Funções Complexas (ÁVILA, 2008; FERNANDEZ; BERNARDES, 2013; NETO, 2008).

A pesquisa sobre a irracionalidade e transcendência do número π representa um campo de estudo matemático fundamental que tem intrigado e cativado matemáticos, cientistas e educadores por séculos. Nosso objetivo é, contribuir para a compreensão mais profunda das propriedades singulares deste número. O número ocupa papel fundamental ao longo da história matemática, como pode-se observar no primeiro Livro dos Reis, capítulo 7, que trata da construção do palácio de Salomão, onde o mesmo incumbiu ao artesão Hirão a realizar o seguinte trabalho: Versículo 23: "Fez o “Mar de Bronze” de metal fundido, dez cúbitos de borda a borda, de forma circular, e com cinco cúbitos de altura; uma corda de 30 cúbitos de comprimento dava a medida de sua periferia". Diante do versículo, podemos concluir que $2\pi r = 30$ e $2r = 10$ e, portanto, temos que $\pi = 3$, mas sabemos que isso não é verdade pois é um número irracional como demonstraremos neste trabalho. Além disso, π também se enquadra na categoria de números transcendentes. Temos duas separações para os números reais: os racionais e os irracionais (NIVEN, 1947). Existe outra separação dos números reais, idealizada mais recentemente, dividida em duas categorias: os números algébricos e os números transcendentes. Um número real algébrico satisfaz alguma equação algébrica com coeficientes inteiros; caso não satisfaça, ele será um número transcendente. Percebe-se que ainda faltam elementos para tornar clara a existência de números transcendentes, pois exibir um número transcendente é fácil, porém provar que ele é transcendente é mais complexo. Assim, torna-se imprescindível estudar as demonstrações e características que levam esse importante número a satisfazer as condições de número irracional e transcendente.

A relevância deste trabalho reside em vários aspectos. Primeiramente, nos fundamentos da matemática, visto que π é uma constante matemática fundamental,

representando a relação entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. A questão de sua irracionalidade e transcendência é crucial, pois ilustra a complexidade matemática subjacente a conceitos aparentemente simples, lançando luz sobre os fundamentos da matemática e suas fronteiras. Em segundo lugar, no desenvolvimento de demonstrações, a busca por novas demonstrações da irracionalidade e transcendência de π é uma empreitada intelectual que pode conduzir a avanços significativos, tornando esses conceitos mais compreensíveis para um público mais amplo. Em terceiro lugar, no impacto educacional, ao aprofundar nosso entendimento desses conceitos, podemos melhorar a forma como a matemática é ensinada e aprendida, inspirando futuras gerações de estudantes. Em quarto lugar, nas aplicações interdisciplinares, as propriedades de π não se limitam ao campo da matemática pura, tendo aplicações significativas em física, engenharia, computação e outras áreas, e o avanço em sua compreensão pode levar a inovações práticas. Finalmente, na contribuição à comunidade científica, este projeto de pesquisa enriquecerá o corpo de conhecimento existente, servindo como um recurso valioso para futuras investigações e debates. Portanto, a pesquisa sobre a irracionalidade e transcendência do número π é relevante e importante, pois lança luz sobre os aspectos fundamentais da matemática e tem implicações significativas em educação, ciência e tecnologia, buscando aprofundar a compreensão desses conceitos e, assim, enriquecer o conhecimento matemático e científico.

O objetivo geral deste trabalho é investigar e apresentar uma demonstração detalhada da irracionalidade e a transcendência do número π. Para isso, os objetivos específicos incluem estudar derivação e integração de funções de uma variável real em valores reais, estudar números complexos e funções analíticas complexas, estudar algumas outras demonstrações “básicas” da irracionalidade e transcendência de π, e apresentar a demonstração em detalhes da irracionalidade e transcendência de π. A metodologia utilizada nesta pesquisa é a bibliográfica, que consiste na análise e leitura de livros, artigos, dissertações e teses que abordam o tema. Os temas estudados serão debatidos entre orientador e orientando, e as informações colhidas serão digitalizadas e transcritas na pesquisa, levando em conta sua validade e a qualidade da apresentação. Se necessário, o caminho escolhido pelo autor será questionado e outras possibilidades serão elaboradas. Dada a natureza da pesquisa em matemática pura, é necessário o uso de várias simbologias da área, e para facilitar a escrita, optou-se por

utilizar a ferramenta Overleaf, um editor online LáTeX colaborativo baseado em nuvem, que permite a criação de documentos científicos de forma profissional e padronizada. Sessões de estudo e análise foram conduzidas regularmente, com encontros semanais agendados previamente, ocorridas de forma presencial ou remota. Este trabalho se baseia em contribuições de autores notáveis, como Borwein e Chapman (2015), Thomas e Finney (1996), Niven (1939), Niven (1947) e Figueiredo (2011), cujas obras têm sido fonte essencial de inspiração e orientação para a nossa pesquisa.

Este trabalho está organizado em sete capítulos, buscando uma abordagem abrangente e progressiva das propriedades matemáticas de π. Após esta introdução, o Capítulo 2 estabelece os conceitos básicos de Cálculo Real, Números Complexos e Teoria dos Números, que são as ferramentas matemáticas essenciais para a compreensão das demonstrações subsequentes. O Capítulo 3 oferece uma perspectiva histórica sobre a evolução do conhecimento de π, desde métodos antigos até os desenvolvimentos da análise moderna. O Capítulo 4 explora em detalhes duas demonstrações clássicas da irracionalidade de π, as quais não pode ser expresso como uma razão de dois inteiros. No Capítulo 5, aprofundamo-nos na propriedade de transcendência de π, apresentando demonstrações de Robert E. Moritz e Ivan Niven. Em uma extensão dos estudos sobre a natureza de π, o Capítulo 6 é dedicado à demonstração da irracionalidade de π^4, conforme apresentado por Mohammad Reza Yegan, incluindo uma análise crítica e detalhada da derivação de uma de suas relações de recorrência para a prova da irracionalidade de π^6. Finalmente, o Capítulo 7 apresenta uma síntese dos resultados obtidos, discute as implicações da pesquisa original e sugere caminhos para investigações futuras

2 FUNDAMENTOS

Neste capítulo, estabelecemos as bases necessárias para o entendimento dos conceitos abordados no decorrer do trabalho. Os fundamentos aqui apresentados visam fornecer ao leitor o conhecimento mínimo essencial para acompanhar as demonstrações da irracionalidade e transcendência de π nos capítulos subsequentes. Serão revisados conceitos de funções de uma variável real, números complexos e funções analíticas, bem como noções fundamentais de séries e sequências, e elementos da teoria dos números relacionados a números algébricos e transcendentes. Para fundamentação foram utilizadas como referências os seguintes livros e artigos, (COELHO, 2001), (GONÇALVEZ, 2013), (LIMA, 2018), (BLUM-SMITH; COSKEY, 2017), (ÁVILA, 2008), (NETO, 2008), (FERNANDEZ; BERNARDES, 2013), (GUIDORIZZI, 2018), (GUIDORIZZI, 2019), (GUIDORIZZI, 2023) e (FIGUEIREDO, 2011).

2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CÁLCULO REAL

Esta seção revisa elementos de cálculo diferencial e integral para funções de uma variável real, essenciais para a compreensão de certas etapas das demonstrações da irracionalidade de π.

2.1.1 Funções

Definição 2.1 (Função) Descrevemos por uma função f uma terna

$$(A, B, \quad a \mapsto b),$$

onde A e B são dois conjuntos e $a \mapsto b$, uma regra que permite associar a cada elemento a de A um único elemento b de B. A é o *domínio* de f denotado por D_f, logo, $A = D_f$, e B é o *contradomínio* de f.

Uma função de uma variável real a valores reais é uma função $f\colon A \to B$ (leia: f de A em B), em que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Usualmente, representa-se uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A, por

$$y = f(x), \quad x \in A.$$

Onde, x é a variável independente, e y a variável dependente, podendo ser descrita como y em função de x.

Exemplo 2.1 (Função Polinomial) Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

onde $a_0 \neq 0$, e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais fixos, é conhecida como *função polinomial de grau* n ($n \in \mathbb{N}$).

Exemplo 2.2 (Função exponencial) Sejam $a > 0$, $a \neq 1$, e $f(r) = a^r$ para todo r racional. Definimos a potência de base a e expoente x denotada como função exponencial de base a dada por

$$f(x) = a^x.$$

Observação 2.1 Cabe ressaltar que a função exponencial de base e, definida como $f(x) = e^x$ desempenhará um papel significante neste trabalho.

2.1.2 Polinômios Simétricos

Um importante tópico a se utilizar no desenvolvimento das duas demonstrações sobre a transcendência de π diz respeito a polinômios simétricos, além disso, dentro desse tópico temos o importante Teorema de Viète.

Definição 2.2 (Polinômios simétricos elementares) Seja $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$ raízes de um polinômio $P(x)$, onde o polinômio é da forma:

$$P(x) = (x - t_1)(x - t_2)\ldots(x - t_n).$$

Ao desenvolvermos o produto desse polinômio, obtemos:

$$P(x) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \ldots + (-1)^n s_n,$$

onde

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{j=1}^{n} t_j \\ s_2 &= \sum_{i<j} t_i t_j \\ s_3 &= \sum_{i<j<k} t_i t_j t_k \\ &\vdots \\ s_n &= t_1 t_2 \dots t_n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Os polinômios $s_1, \dots, s_n$ são conhecidos como *polinômios simétricos elementares* em $t_1, \dots, t_n$.

Definição 2.3 (Polinômio Simétrico) Um polinômio $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ é chamado *simétrico* se

$$f^{\sigma}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

para todas as permutações σ dos inteiros $1, \dots, n$.

Definição 2.4 (Monômio) Um *monômio* é uma expressão do tipo $at_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_n^{k_n}$ onde os k_j são inteiros maiores que 0 e a é seu coeficiente ($a \in A \subset \mathbb{C}$, onde $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{Q}$). O *grau do monômio* é o número inteiro $\sum_{j=1}^{n} k_j$, e o *peso do monômio* é dado pelo inteiro $\sum_{j=1}^{n} jk_j$. O *grau de um polinômio* é o máximo dos graus dos monômios que o formam, e o *peso de um polinômio* é o máximo dos pesos dos monômios que o constituem.

Teorema 2.1 (Teorema A em (FIGUEIREDO, 2011)) Seja $f(t_1, \dots, t_n)$ um polinômio simétrico de grau d, com coeficientes em $A \subset \mathbb{C}$. Então existe um polinômio $g(s_1, \dots, s_n)$ de peso menor ou igual que d, com coeficientes em A, onde $s_1, \dots, s_n$ são polinômios simétricos elementares definidos em (2.1), tal que:

$$f(t_1, \dots, t_n) = g(s_1, \dots, s_n).$$

A demonstração do teorema A pode ser encontrado no apêndice de Figueiredo (2011), página 45.

Exemplo 2.3 O polinômio $f(t_1, t_2) = t_1^2 + t_2^2 + 6t_1t_2$ é simétrico podendo ser escrito como

$$f(t_1, t_2) = (t_1 + t_2)^2 + 4t_1t_2,$$

assim o polinômio $g(s_1, s_2)$ é escrito como

$$g(s_1, s_2) = s_1^2 + 4s_2.$$

Teorema 2.2 (Teorema de Viète) Seja $p(x)$ um polinômio mônico (o coeficiente do termo de maior grau (termo dominante) é igual a 1), de grau m com coeficientes inteiros ou racionais, e com raízes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Então

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_m) = x^m - s_1x^{m-1} + s_2x^{m-2} + \ldots + (-1)^m s_m,$$

onde os s_m são os polinômios simétricos elementares em m variáveis de α_k, assim

$$\begin{aligned}
s_1 &= \sum_k \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m \\
s_2 &= \sum_{j<k} \alpha_j\alpha_k = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{m-1}\alpha_m \\
s_3 &= \sum_{i<j<k} \alpha_i\alpha_j\alpha_k = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{m-2}\alpha_{m-1}\alpha_m \\
&\vdots \\
s_m &= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m.
\end{aligned}$$

Se todos os coeficientes de $p(x)$ são inteiros ou racionais, então cada s_k é um número inteiro ou racional, respectivamente. Por outro lado, se todos os polinômios simétricos elementares do conjunto $\alpha_k,\ 1 \leq k \leq m$ forem inteiros ou racionais, então os α_k são raízes de um polinômio de grau m com coeficientes inteiros ou racionais, respectivamente.

Teorema 2.3 (Teorema fundamental dos polinômios simétricos) Qualquer polinômio multivariado pode ser escrito unicamente como uma soma dos polinômios simétricos elementares.

Com relação aos teoremas (2.2) e (2.3) pode-se encontrar as demonstrações no artigo de Blum-Smith e Coskey (2017).

2.1.3 Derivadas

Definição 2.5 (Derivada de uma função) Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

quando existe e é finito, chama-se *derivada de f em p* e indicada-se por $f'(p)$ (leia: f linha de p). Logo,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p, dizemos que f é *derivável* ou *diferenciável* em p.

Observação 2.2 Como

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

Temos que,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

Teorema 2.4 Seja $n \neq 0$ um número natural. Temos as seguintes fórmulas de derivação:

1. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$.
2. $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}$.
3. $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, onde $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar ($n \geq 2$).
4. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$.
5. $f(x) = \ln(x),\ x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Exemplo 2.4 (derivadas de seno e cosseno.)

1. $f(x) = \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$.

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen}(x))' &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}(\frac{h}{2}) \cos(\frac{2x+h}{2})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})} \cos\left(\frac{2x + h}{2}\right) \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

2. $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

$$\begin{aligned}(\cos(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2\operatorname{sen}(\frac{h}{2})\operatorname{sen}(\frac{2x+h}{2})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} -\frac{\operatorname{sen}(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})}\operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right) \\ &= -\operatorname{sen}(x).\end{aligned}$$

Proposição 2.1 (Regras de derivação) Sejam f e g funções deriváveis em p e seja k uma constante. Então as $f+g$, kf e $f \cdot g$ são deriváveis em p, assim temos:

1. $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$.
2. $(kf)'(p) = kf'(p)$.
3. $(f \cdot g)'(p) = f'(p)\, g(p) + f(p)\, g'(p)$.
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(p) = \dfrac{f'(p)\, g(p) - f(p)\, g'(p)}{[g(p)]^2}$, com $g(p) \neq 0$.
5. Se h é uma função derivável em q com $p = h(q)$ e $\operatorname{Im}(h) \subset D_f$ então

$$(f \circ h)'(q) = f'(h(q)) \cdot h'(q).$$

Teorema 2.5 (Teorema do Valor Médio) Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em $]a,b[$ então existe $c \in]a,b[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}.$$

A demonstração para este teorema pode ser encontrado na seção (15.2) do (GUIDORIZZI, 2018).

Definição 2.6 (Derivadas de Ordem Superior) Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' também é uma função, logo f pode ter sua derivada, ou seja, $(f')' = f''$, conhecida como derivada segunda de f. Assim, para derivada terceira temos, $(f'')' = f'''$, se continuarmos o processo para derivada quarta nota-se uma pequena mudança de notação, denotamos por $f^{(4)}$. Assim sucessivamente até a n-ésima derivada de f denotada por $f^{(n)}$ e obtida a partir de f diferenciando n-vezes.

Teorema 2.6 (Regra do produto generalizado) Sejam f e g funções n-vezes diferenciáveis. Então

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

A demonstração do Teorema de acima pode ser encontrada na página 68 de Spivey (2019), mas especificamente na Identidade 94.

2.1.4 Integrais

Antes de definirmos a integral de Riemann necessitamos alguns conceitos prévios de partição e somas. Para além da integral de Riemann, esses conceitos nos fornecem meios para caracterizar os teoremas fundamentais do cálculo.

Definição 2.7 (Partição de um intervalo) Uma *partição P de um intervalo* $[a, b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, onde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Essa partição divide $[a, b]$ em n intervalos do tipo $[x_{i-1}, x_i],\ i = 1, 2, \ldots, n$, com amplitude dada por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Note que os números $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ não são necessariamente iguais, onde o maior é chamado *amplitude* da partição P e indicado como $\max \Delta x_i$. Assim, definimos uma partição P de $[a, b]$ como:

$$P:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Definição 2.8 (Soma de Riemann) Sejam f uma função definida em $[a, b]$ a valores reais e $P:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ uma partição em $[a, b]$. Para cada índice i com $i = 1, 2, \ldots, n$, seja c_i um número em $[x_{i-1}, x_i]$ escolhido arbitrariamente. Logo, o número

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n,$$

denomina-se *soma de Riemann* de f, relativa à partição P e aos números c_i.

Definição 2.9 (Integral de Riemann) Sejam f uma função definida em $[a, b]$ a valores reais e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ *tende a* L, quando $\max \Delta x_i \to 0$, e escrevemos

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ que não dependa da escolha dos c_i, tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \varepsilon,$$

para toda partição P de $[a, b]$, com $\max \Delta x_i < \delta$. Onde, o número L é único quando existe, denomina-se *integral de Riemann* de f em $[a, b]$ e indica-se por $\int_a^b f(x)dx$. Portanto, pela definição, temos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Se $\int_a^b f(x)dx$ existe, diremos que f é *integrável* em $[a, b]$ sendo costumeiramente referida como *integral definida* de f em $[a, b]$.

Observação 2.3 *Por definição temos:*

1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ *($a < b$).*

Proposição 2.2 Sejam f, g integráveis em $[a, b]$ e k uma constante. Então tem-se

1. $f + g$ integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
2. kf integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$
3. se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$
4. Se $c \in]a, b[$ então f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$. Além disso,
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
5. Se $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx.$

2.1.4.1 1º Teorema Fundamental do Cálculo

Vimos anteriormente a seguinte relação,

$$L = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Suponhamos, que f seja integrável em $[a, b]$ e que admita uma primitiva $F(x)$ em $[a, b]$, ou seja, $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$. Seja $P: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Note que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Do Teorema do valor médio, temos que para uma escolha conveniente de $\overline{c_i}$ em $[x_i, x_{i-1}]$, obtemos:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^{n} F'(\overline{c_i})\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\overline{c_i})\Delta x_i. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Se, para cada partição P de $[a, b]$, os $\overline{c_i}$ forem escolhidos seguindo como feito em (2.2), obtemos

$$F(b) - F(a) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F'(\overline{c_i})\Delta x_i.$$

Assim, obtemos o 1º Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

2.1.4.2 2º Teorema Fundamental do Cálculo

Para enunciarmos este teorema necessitamos enunciar um outro teorema que servirá de apoio para nossos propósitos.

Teorema 2.7 (Teorema do valor médio para integrais) Se f for contínua em $[a, b]$, então existirá pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

A demonstração para este teorema pode ser encontrado na seção (2.3) do (GUIDORIZZI, 2019).

Teorema 2.8 (2º Teorema Fundamental do Cálculo) Seja f contínua no intervalo I e seja a um ponto em I.E suponha que a integral $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ existe. Temos que se F é uma primitiva de f em I, ou seja, $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, então F é dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in I.$$

A demonstração para este teorema pode ser encontrado na seção (2.4) do (GUIDORIZZI, 2019).

2.1.4.3 Integração por partes

A integração por partes é importante ferramenta para o cálculo de integrais de produto de funções.

Tomemos f e g definidas e deriváveis no intervalo I. Assim

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

rearranjando os termos, obtemos

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Agora, suponha que $f'(x)g(x)$ admita primitiva em I e note que $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$, logo $f(x)g'(x)$ também admite primitiva em I. Assim podemos definir a integração por partes dada por:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Por meio de uma substituição, $u = f(x)$ e $v = g(x)$, então, $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$. Assim, podemos reescrever a regra de integração por partes para algo mais usual dado por:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

2.1.5 Sequências e séries

Nesta seção, veremos a definição de sequência e série numérica. Conceito de convergência de séries. O Teste da Razão para convergência de séries é um critério importante e é utilizado na demonstração de Niven para a irracionalidade de π para mostrar que um termo tende a zero quando $n \to \infty$.

2.1.5.1 Sequências

Definição 2.10 (Sequência) Uma *sequência* ou *sucessão* de números reais é uma função $n \mapsto a_n$ (leia: a índice n) a números reais, onde o domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}$, tal que $\{n \in \mathbb{N};\ n \geq q\}$, onde q é um natural fixo. Para sequências a_n é o termo geral, indicando o valor que a sequência assume dado n.

Exemplo 2.5 Seja a sequência de termo geral $a_n = 2^n$. Temos

$$a_0 = 2^0,\ a_1 = 2^1,\ a_2 = 2^2,\ \ldots$$

Exemplo 2.6 Seja a sequência de termo geral $s_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Temos

$$s_0 = 1,\ s_1 = 1 + 2,\ s_2 = 1 + 2 + 3,\ \ldots$$

Definição 2.11 Consideremos uma sequência de termo geral a_n e seja $a \in \mathbb{R}$. Temos

1. $\lim_{n \to +\infty} a_n = a \iff \begin{cases} \text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe um natural } n_0 \text{ tal que} \\ n > n_0 \implies a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \end{cases}$

2. $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \iff \begin{cases} \text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe um natural } n_0 \text{ tal que} \\ n > n_0 \implies a_n > \varepsilon. \end{cases}$

3. $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \iff \begin{cases} \text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe um natural } n_0 \text{ tal que} \\ n > n_0 \implies a_n < -\varepsilon. \end{cases}$

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n$ for finito, então a sequência a_n é chamada *convergente*, do contrário, a sequência é chamada *divergente*.

2.1.5.2 Séries

Definição 2.12 (Série Numérica) Seja a_n definida para $n \geq q$ com q natural fixo, uma sequência numérica. A sequência de termo geral

$$s_n = \sum_{k=q}^{n} a_k,\ n \geq q,$$

é denominada *série numérica* associada à sequência a_n. Os números $s_n,\ n \geq q$ são denominados termos da série e s_n é o termo geral da série. Defini-se *soma da série* o limite da série seja ele finito ou infinito quando existe, e é dado por

$$\sum_{k=q}^{+\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=q}^{n} a_k,$$

onde,

$$\sum_{k=q}^{n} a_k = a_q + a_{q+1} + a_{q+2} + \ldots + a_n.$$

No caso da soma ser finita dizemos que a série é *convergente*, enquanto que se a soma for infinita ($+\infty$ ou $-\infty$) ou se caso o limite não existir, então a série é chamada *divergente*.

Teorema 2.9 Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Para decidir se uma série é convergente ou divergente se faz necessário alguns critérios para calcular o limite da série, neste caso o escolhido e importante para cálculos posteriores é o teste da razão.

Proposição 2.3 (Teste da razão) Seja a série $\sum_{k=q}^{+\infty} a_k$ com $a_k > 0$, para todo $k \geq q$ com $k \in \mathbb{N}$ fixo. Suponhamos que $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ exista, finito ou infinito. Seja, $L = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ então:

1. Se $L < 1$ então $\sum_{k=q}^{+\infty} a_k$ é convergente.

2. Se $L > 1$ ou $L = +\infty$ então $\sum_{k=q}^{+\infty} a_k$ é divergente.

3. Se $L = 1$, o critério nada revela.

Exemplo 2.7 Pelo teste da razão decida se $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$ converge ou diverge.

Solução: Como $a_k = \frac{2^k}{k!}$, temos

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}} = \frac{2}{k+1}.$$

Assim,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2}{k+1} = 0.$$

Portanto, a série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}$ é convergente.

Exemplo 2.8 Mostre que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{k!}$ é divergente.

Solução: Temos,

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{k^k}\\ &= \frac{(k+1)^k}{k^k}\\ &= \left(\frac{k+1}{k}\right)^k\\ &= \left(1+\frac{1}{k}\right)^k.\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e > 1.$$

Portanto, a série é divergente.

2.1.6 Séries de potências

Definição 2.13 (Séries de potências) Sejam $a_n,\ n > 0$ uma sequência numérica dada e x_0 um número real dado. A série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

é denominada *série de potências*, com coeficientes a_n em volta de x_0. Se $x_0 = 0$, temos a série de potências em volta de zero, conhecida como *série de Maclaurin*,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots.$$

Observação 2.4 Por convenção assumimos que $0^0 = 1$.

Teorema 2.10 Seja a série de potência $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, existem as seguintes possibilidades:

1. ou $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge apenas para $x = 0$;
2. ou $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolutamente[1] para todo x real;

[1] Dizemos que uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge absolutamente* se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ é convergente.

3. ou existe um $R > 0$ tal que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo x no intervalo $]-R,\, R[$, e diverge para todo x com $|x| > R$. Nos extremos $-R$ e R a série pode ou não convergir.

A demonstração para este teorema pode ser encontrado na seção (8.2) do (GUIDO-RIZZI, 2023).

Exemplo 2.9 Seja a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, suponha $a_n \neq 0$, $\forall\, n \geq p$, onde p é um inteiro fixo. Então o raio de convergência da série é dado por

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Desde que o limite exista, finito ou infinito.

Solução: Por meio do critério da razão para a série de termos quaisquer.

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, a série convergirá absolutamente para todo x. Neste caso, o raio de convergência é $+\infty$:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = +\infty.$$

Se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$, a série convergirá apenas para $x = 0$:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 0.$$

Se for finito e diferente de zero, a série convergirá absolutamente para todo x tal que

$$|x| \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

ou seja, convergirá, para todo x, tal que

$$|x| < \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R;$$

e divergirá para $|x| > R$.

Exemplo 2.10 Seja a função $f(x) = e^x$ dada em termos de séries de potências por $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para todo x, e o domínio de f é $\mathbb{R}$.

Solução:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty.$$

Pelo exemplo anterior, como $R = +\infty$ então a série converge para todo x.

Observação 2.5 (Funções trigonométricas) De maneira concisa podemos definir as funções trigonométricas.

Pelas séries de potências

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{e} \quad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

com raio de convergência infinito, assim funções $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ambas de classe C^∞. Temos das relações que $c(0) = 1$, $s(0) = 0$, $c(-x) = c(x)$, e $s(-x) = -s(x)$. Se $f(x) = c(x)^2 + s(x)^2$, e $f(0) = 1$, então $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Para as fórmulas de adição temos:

1. $s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)$.

2. $c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$.

Propriedade 2.1 Deve existir algum $x > 0$ tal que $c(x) = 0$. Chamaremos $\frac{\pi}{2}$ este menor número positivo para o qual se tem $c(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Propriedade 2.2 As funções $c(x)$ e $s(x)$ são periódicas, com período 2π. Assim, $s(x) = s(x+2\pi)$ e $c(x) = c(x+2\pi)$

Com isso, ganhamos a relação $c(2x) = c(x)^2 - s(x)^2 = 2c(x)^2 - 1$, logo $c(\pi) = 1$ e $s(\pi) = s(2\pi) = 0$.

As notações comumente usadas para estas funções são $c(x) = cos(x)$ e $s(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Exemplo 2.11 A série de potência $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$, converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Basta mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^n$ converge absolutamente para todo $y \in \mathbb{R}$. Logo, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ teríamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

converge absolutamente. Para encontrar o raio de convergência R, aplicamos o teste da razão. O termo geral é $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$, então o termo da série é $a_n y^n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} y^n$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} y^{n+1}}{a_n y^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} y^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(-1)^n y^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-y}{(2n+2)(2n+1)} \right| = 0.$$

Como o limite é zero, a série converge absolutamente para todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto, o raio de convergência é: $R = +\infty$.

Exemplo 2.12 A série de potência $\operatorname{sen}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Também, basta mostrar que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^n$ converge absolutamente para todo $y \in \mathbb{R}$. Daí, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ teríamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$$

converge absolutamente. Assim,

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

converge absolutamente. Novamente para encontrar o raio de convergência R, aplicamos o teste da razão. O termo geral é $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, então o termo da série é $a_n y^n$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} y^{n+1}}{a_n y^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} y^{n+1}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n y^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-y}{(2n+3)(2n+2)} \right| = 0.$$

Como o limite é zero, a série converge absolutamente para todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto, o raio de convergência é: $R = +\infty$.

2.2 NÚMEROS COMPLEXOS E FUNÇÕES ANALÍTICAS

Esta subseção introduz ou revisa os conceitos necessários para entender as operações e propriedades de funções complexas, que são a base das demonstrações de transcendência.

2.2.1 Números Complexos

Definição 2.14 O conjunto dos *números complexos* $\mathbb{C}$ é definido como a coleção de todos os paras ordenados $z = (x, y)$ de números reais, i.e.,

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Observação 2.6

1. Um número complexo pode ser identificado como um ponto do plano $\mathbb{R}^2$.
2. Sejam $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ pela noção de igualdade no produto cartesiano temos:
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \text{ e } \ y_1 = y_2.$$

Definição 2.15 Sejam $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$.

1. A *soma de* z_1 *e* z_2, denotada por $z_1 + z_2$, define-se como
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$
2. O *produto de* z_1 *e* z_2, denotado por $z_1 \cdot z_2$ ou simplesmente $z_1 z_2$, define-se como
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Teorema 2.11 É satisfeito:

1. Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ então $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$.
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
3. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
4. Existe $\theta \in \mathbb{C}$ chamado *neutro aditivo* tal que $z + \theta = \theta + z = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
5. Para cada $z \in \mathbb{C}$, existe $u \in \mathbb{C}$ chamado *inverso aditivo* de z tal que $z + u = u + z = \theta$.
6. Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ então $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$.
7. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

8. $z_1 z_2 = z_2 z_1$, para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

9. Existe $v \in \mathbb{C}$ chamado *neutro multiplicativo* tal que $zv = vz = z$.

10. Dado $z \in \mathbb{C} - \{\theta\}$, existe $w \in \mathbb{C}$ chamado *inverso multiplicativo* tal que $zw = wz = v$.

11. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Demonstração.

4. Seja $\theta = (0,0) \in \mathbb{C}$, para $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ temos

$$z + \theta = (x,y) + (0,0) = (x+0, y+0) = (x,y) = z.$$

Analogamente, $\theta + z = z$.

5. Para $z = (x,y) \in \mathbb{C}$, consideremos $u = (-x,-y) \in \mathbb{C}$. Assim, tem-se

$$z + u = (x,y) + (-x,-y) = (x + (-x), y + (-y)) = (0,0) = \theta.$$

9. Seja $v = (1,0) \in \mathbb{C}$, para $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ se satisfaz

$$z \cdot v = (x,y) \cdot (1,0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x,y) = z.$$

10. Dado $z = (x,y) \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}$, Consideremos

$$w = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right) \in \mathbb{C},$$

daí temos

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (x,y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}, -\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \\ &= (1,0) = v. \end{aligned}$$

Observação 2.7

1. Demonstra-se que o neutro aditivo e o neutro multiplicativo são únicos e denotam-se por 0 e 1 respectivamente.

2. Demonstra-se que o inverso aditivo e o inverso multiplicativo são únicas e denotam-se por $-z$ e $z^{-1} = \frac{1}{z}$, respectivamente.

3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo, desta maneira, vamos admitir todas as propriedades algébricas de $\mathbb{C}$.

Definição 2.16 Seja $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$. A *potência n-ésima de z*, denotada Por z^n, defina-se indutivamente como $z^1 = z,\ z^n = z \cdot z^{n-1},\ n > 1$. Se $z \neq 0$ então $z^0 = 1$. Se $z \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}^-$ então $z^n := (z^{-1})^{-n}$.

Proposição 2.4 A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x) = (x, 0)$ é um monomorfismo de corpos, i.e, satisfaz

1. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

2. $f(x_1 x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, para quaisquer $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$.

3. f é injetiva.

Observação 2.8

1. Pela Proposição anterior, podemos identificar algebricamente $\mathbb{R}$ com $f(\mathbb{R}) = \{(x, 0);\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$. Por um "abuso de notação" escrevemos $\mathbb{R}$"="$\{(x, 0);\ x \in \mathbb{R}\}$. Desta maneira identificamos $x \in \mathbb{R}$ com $(x, 0) \in \mathbb{C}$ logo pela notação temos x"="$(x, 0)$.

2. $(0, 1) \in \mathbb{C}$ e satisfaz

$$(0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

   Denotemos $i = (0, 1)$, observe que $(0, 1)$ é $\sqrt{-1}$ na "notação formal".

3. Dado $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, pelas identificações e notações anteriores temos

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

   De agora em diante escreveremos (x, y) ou $x + iy$ para denotar a $z \in \mathbb{C}$. A reta real é identificado com o eixo horizontal o qual é chamado *eixo real*, o eixo vertical é chamado *eixo imaginário*.

Definição 2.17 Sejam $z = (x, y) = x + iy$, a *parte real* de z e a *parte imaginária* de z, denotada respectivamente, por $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$, definem-se como $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$.

Definição 2.18 Seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$, o *conjugado de* z, denotado por $\overline{z}$ define-se como $\overline{z} = x - iy$. Geometricamente é a reflexão do ponto z em relação ao eixo real.

Proposição 2.5 Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se satisfaz:

1. $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$.
2. $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$.
3. Se $z \neq 0$ então $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$.
4. Se $w \neq 0$ então $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
5. $\overline{\lambda z} = \lambda \cdot \overline{z}$.
6. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
7. $\overline{\overline{z}} = z$.

Definição 2.19 A *norma ou módulo* de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ denotado por $|z|$, define-se como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Geometricamente a norma de $z = x + iy$ é a distância entre o ponto $z = (x, y)$ e a origem $(0, 0)$.

Proposição 2.6 Dados $z, w \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. É satisfeito:

1. $|z| \geq 0$.
2. $|z| = 0$ se, e só se, $z = 0$.
3. $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$.
4. $|\,\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ e $|\,\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
5. $|z| = |\overline{z}|$.
6. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.
7. $|zw| = |z| \cdot |w|$.

8. Se $z \neq 0$ então $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

9. Se $w \neq 0$ então $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

Observação 2.9 Seja $x = (x, 0) \in \mathbb{C}$ então

$$|x| = |(x, 0)| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2}.$$

Desta maneira a norma de um número complexo é a extensão do valor absoluto de um número real.

Dado $z = x + iy \in \mathbb{C} - \{0\}$. Seja $r = |z|$ e θ o ângulo formado pela parte positiva do eixo real e o segmento de reta que liga a origem com o ponto $z = (x, y)$. Sabemos que $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Logo,

$$z = x + iy = (x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

A expressão anterior é chamada *forma polar* ou *representação polar* do número complexo z. O conjunto de todos as possibilidades para θ é chamado *argumento* de z e será denotado por $\arg(z)$.

Observação 2.10

1. Se $z = 0$ então $\arg(z)$ não está definido.

2. $\arg(z) \subset \mathbb{R}$ e os elementos são medidos em radianos.

3. O argumento de z não é único, já que se $\theta \in \arg(z)$ então $\theta + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ também pertence ao argumento de z.

4. Se $\theta \in \arg(z)$ é tal que $0 \leq \theta < 2\pi$ então θ é chamado *argumento principal* de z e será denotado par $\mathrm{Arg}(z)$.

5. $\arg(z) = \{\mathrm{Arg}(z) + 2n\pi \;\; n \in \mathbb{Z}\}$.

Proposição 2.7 Se $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$ então

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$;

2. se $z_2 \neq 0$ então $z_2^{-1} = r_2^{-1}(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$;

3. se $z_2 \neq 0$ então $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\Big[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)\Big]$.

Corolário 2.1 (Fórmula de De Moivre) Se $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \neq 0$ então

$$z^n = r^n\Big(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)\Big), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Definição 2.20 Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$, dizemos que w é uma *raiz n-ésima* de z se, e só se, $w^n = z$.

Proposição 2.8 Se $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$ então existe exatamente n-raízes n-ésimas de z e todas elas estão dadas por:

$$\omega_k = |z|^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right],\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ e } \theta_0 = \mathrm{Arg}(z).$$

2.2.1.1 Fórmula de Euler

Para obtermos a fórmula de Euler, previamente precisamos definir a exponencial denotado por e^z de um número complexo z. Note que a expansão em série de Taylor de e^x, $x \in \mathbb{R}$ é dada por

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots. \tag{2.3}$$

Vamos tomar como base (2.3) para definir e^z com $z \in \mathbb{C}$. Supondo que temos definido e^z para $z \in \mathbb{C}$ e que (2.3) fosse valido neste caso, então substituindo $x = iy$ com $y \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Note que as séries entre parenteses são respectivamente as expansões em série de Taylor das funções $\cos y$ e $\mathrm{sen}\, y$, daí obtemos

$$e^{iy} = \cos y + i\,\mathrm{sen}\, y. \tag{2.4}$$

Todas essas considerações são puramente formais e não verificam (2.4), mas ajudam como motivação para definir a função exponencial. Assim, tomando (2.4) como ponto de partida, vamos usar ela para definir a exponencial no caso de expoente puramente

imaginário iy. Também, a definição da exponencial no caso de um expoente qualquer $z = x + iy$ é realizada de maneira a preservar a propriedade aditiva da exponencial real:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b.\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 2.21 A *exponencial de* $z = x + iy$ é definida por

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Definição 2.22 (Fórmula de Euler) Com $z = iy$ obtemos a fórmula de Euler:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Exemplo 2.13 (Identidade de Euler) Como principal resultado da fórmula de Euler tomamos $y = \pi$. Assim

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi) \Rightarrow e^{i\pi} = -1.$$

Portanto,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Proposição 2.9 É satisfeito:

1. $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
3. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
4. $(e^z)^n = e^{nz}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ e para todo $n \in \mathbb{Z}$.
5. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.
6. $e^z = 1$ se, e só se, $z = 2k\pi i$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

2.2.2 Funções Analíticas

Definição 2.23 (Função complexa) Defini-se uma *função complexa de uma variável* $f\colon A \to \mathbb{C}$ cujo domínio A é um subconjunto de $\mathbb{C}$.
A menos que se diga o contrário, sempre consideramos que $A \subset \mathbb{C}$.

Comumente expressamos explicitamente os valores da função complexa, como por exemplo,

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+1}.$$

Definição 2.24 (Limites de funções complexas) Sejam $f\colon A \to \mathbb{C}$ uma função e z_0 um ponto de acumulação de A[2]. Dizemos que a função f tem o número complexo w_0 como seu limite em z_0 se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \quad \text{sempre que } z \in A \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Assim, se existe um número complexo w_0 satisfazendo a definição acima, então ele é único. Escrevemos $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, tendo sentido a escrita quando z_0 é ponto de acumulação do domínio de f.

Definição 2.25 (Continuidade de funções complexas) Sejam $A \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in A$. Se z_0 é um ponto de acumulação de A, então uma função $f\colon A \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0 se, e só se, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe e é igual a $f(z_0)$.

Teorema 2.12 (Teorema Fundamental da Álgebra.) Todo polinômio de grau $n > 0$ tem exatamente n raízes, contadas as multiplicidades .

A demonstração deste teorema pode ser verificada em (ÁVILA, 2008) na página 177.

2.2.2.1 Derivada de funções de uma variável complexa a valores complexos

Para esta seção utilizaremos como base Figueiredo (2011) que traz o teorema do valor médio para funções complexas, adaptando do teorema do valor médio como conhecemos. Sabemos pelo teorema do valor médio que dado $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma

[2] Dizemos que $z_0 \in \mathbb{C}$ é um *ponto de acumulação* de $A \subset \mathbb{C}$ se, e só se, todo disco aberto centrado em z_0 intercepta $A - \{z_0\}$.

função real contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Agora suponha que a derivada $f'(x)$ existe para todo $x \in]a, b[$. Assim, existe λ com $0 < \lambda < 1$ tal que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a + \lambda(b - a)).$$

Moritz faz uma adaptação para funções complexas.

Definição 2.26 (Função analítica) Uma função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem *derivada no ponto* z se o limite abaixo existir

$$f'(z) = \lim_{z_0 \to 0} \frac{f(z + z_0) - f(z)}{z_0}, \tag{2.5}$$

onde $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f'(z)$ é chamada a *derivada de* f *em* z. E caso uma função f for derivável em todos os pontos de $\mathbb{C}$, então dizemos que f é *analítica em* $\mathbb{C}$.

Agora, tomemos $u(x, y)$ e $v(x, y)$ partes reais e imaginárias de $f(z)$, ou seja,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy. \tag{2.6}$$

Supondo que $f(z)$ seja analítica em $\mathbb{C}$ e calculando a derivada (2.5) por meio de valores reais para z_0, com $z_0 = h$. Temos,

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{v(x + h, y) - v(x, y)}{h}.$$

Assim,

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y), \tag{2.7}$$

onde u_x representa a derivada de $u(x, y)$ com relação à primeira variável, enquanto para derivada (2.6) usando valores imaginários puros de z_0, com $z_0 = ik$ fornece u_y representando a derivada em relação a segunda variável. Logo,

$$f'(z) = \lim_{k \to 0} \frac{u(x, y + k) - u(x, y)}{ik} + i \lim_{k \to 0} \frac{v(x, y + k) - v(x, y)}{ik}.$$

Daí,

$$f'(z) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y). \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8) obtemos as equações de *Cauchy-Riemann*

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \qquad u_y(x, y) = -v_x(x, y),$$

para qualquer $z = x + iy$ em $\mathbb{C}$.

Porém, em geral não é verdade que se $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ for uma função analítica em $\mathbb{C}$ e se z_1 e z_2 forem números complexos exista um λ, onde $0 < \lambda < 1$, tal que

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1)f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1)). \tag{2.9}$$

Podemos encontrar contra-exemplos onde esse teorema do valor médio não funciona. Tomemos $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$, onde suas raízes são $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1 + i$ e $z_4 = -1 - i$. Ao aplicarmos aos pares os pontos (z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_4), (z_4, z_1) em (2.9) chegaríamos em $P'(z)$ contendo 4 raízes distintas. o que contraria o Teorema Fundamental da Álgebra (2.2.2) que diz que um polinômio de grau n tem exatamente n-raízes complexas, nesse caso $P'(z)$ tem grau 3 e 4 raízes complexas. Logo, se faz necessário buscar um novo teorema envolvendo uma desigualdade do valor médio.

Teorema 2.13 Seja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica e sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Então

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq 2|z_2 - z_1| \sup\{|f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))|;\ 0 \leq \lambda \leq 1\}. \tag{2.10}$$

Demonstração. Primeiramente, mostraremos a validade para $z_0 = z_2 - z_1, 0 \in \mathbb{C}$. Assim, substituindo em (2.10) obtemos

$$|f(z_0) - f(0)| \leq 2|z_0| \sup\{|f'(\lambda z_0)|;\ 0 \leq \lambda \leq 1\}. \tag{2.11}$$

Agora para o caso geral, tomamos $g(z) = f(z + z_1)$ sendo $z_0 = z_2 - z_1$. Dai, tem-se

$$|g(z_0) - g(0)| \leq 2\,|z_0| \sup\{|g'(\lambda z_0)|;\ 0 \leq \lambda \leq 1\},$$
$$|f(z_0 + z_1) - f(0 + z_1)| \leq 2\,|z_0| \sup\{|f'(\lambda z_0 + z_1)|;\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

E substituindo o ponto $z_0 = z_2 - z_1$, obtemos

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq 2\,|z_2 - z_1| \sup\{|f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))|;\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Analisando novamente o caso para $z_0, 0 \in \mathbb{C}$. Vamos definir as funções $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com as seguintes expressões

$$\phi(\lambda) = u(\lambda x_0, \lambda y_0) \quad \text{e} \quad \varphi(\lambda) = v(\lambda x_0, \lambda y_0), \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ao aplicarmos o Teorema do Valor Médio (Teorema 2.5) às funções reais acima apresentadas, temos

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\lambda_1), \text{ para algum } 0 < \lambda_1 < 1,$$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\lambda_2), \text{ para algum } 0 < \lambda_2 < 1.$$

Agora devemos calcular as derivadas de ϕ e φ por meio da Regra da Cadeia, deste modo encontramos

$$u(x_0, y_0) - u(0,0) = \phi(1) - \phi(0) = \phi'(\lambda_1) = u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0,$$

$$v(x_0, y_0) - v(0,0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\lambda_2) = v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)y_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(z_0) - f(0) &= [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)] - [u(0,0) + iv(0,0)] \\ &= [u(x_0, y_0) - u(0,0)] + i[v(x_0, y_0) - v(0,0)] \\ &= [u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)\, x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)\, y_0] \\ &\quad + i\,[v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)\, x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)\, y_0]\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Se utilizarmos a desigualdade que nos diz que o módulo de um número complexo $z = x + iy$ é menos que a soma dos valores absolutos de sua parte real e imaginária, ou seja, $|z| \leq |x| + |y|$. Além disso, temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz dada por

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

onde a_1, a_2, b_1 e b_2 são números reais quaisquer. Logo, por meio dessas duas desigualdades enunciadas, aplicando em (2.12) obtemos:

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(0)| \leq &\sqrt{u_x^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) + u_y^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)}\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ &+ \sqrt{v_x^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0) + v_y^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)}\sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \end{aligned}$$

Observe que de (2.8) e das equações de Cauchy-Riemann, os radicais de u e v descritos acimas são o módulo de f' calculado em certos pontos, ou seja,

$$\sqrt{u_x^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) + u_y^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)} = |f'(\lambda_1 z_0)|\,,$$

$$\sqrt{v_x^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0) + v_y^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)} = |f'(\lambda_2 z_0)|\,.$$

Então, temos

$$|f(z_0) - f(0)| \leq |f'(\lambda_1 z_0)|\,|z_0| + |f'(\lambda_2 z_0)|\,|z_0|\,.$$

E por fim, segue da desigualdade acima que

$$|f(z_0) - f(0)| \leq 2\,|z_0| \sup\{|f'(\lambda z_0)|\,;\ 0 \leq \lambda \leq 1\}\,.$$

2.3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE TEORIA DOS NÚMEROS

Esta seção aborda as definições de irracionalidade, números algébricos e transcendentes, que são a base conceitual de todo o trabalho.

2.3.1 Aritmética

Definição 2.27 Sejam a e b inteiros, dizemos que b *divide* a (ou também, que b é um divisor de a), que denotamos $b \mid a$, se existe um $c \in \mathbb{Z}$ ta que $bc = a$. Quando b não divide a denotaremos por $b \nmid a$.

O conceito de divisibilidade é importante para entendermos o que é um número primo, e estes por sua vez são de suma importância, pois todo número inteiro maior que 1 é primo ou pode ser escrito como o produto de primos.

Definição 2.28 (Máximo divisor comum) Sejam a e b inteiros diferentes de zero. O conjunto dos divisores comuns de a e b é denotado por $D(a, b)$. O *máximo divisor comum de* a *e* b é dado por:

$$\mathrm{mdc}(a, b) = \max D(a, b).$$

Teorema 2.14 Sejam a e b dois inteiros não nulos. Um inteiro $d > 0$ é o máximo divisor comum de a e b se, e só se, vale as relações:

1. $d \mid a$ e $d \mid b$.
2. Se existe $d' \in \mathbb{Z}$ tal que $d' \mid a$ e $d' \mid b$, então $d' | d$.

A demostração para este teorema pode ser lida em (COELHO, 2001), na página 67.

Definição 2.29 (Números primos) Um número $p > 1$ é *primo* quando seus únicos divisores positivos são 1 e p.

Proposição 2.10 Seja p um número primo e, $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Se $p \nmid a$ então $\mathrm{mdc}(p, a) = 1$.

2. Se $p \mid ab$ então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Definição 2.30 Dois inteiros a e b são chamados *primos entre si* quando $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$.

Corolário 2.1 Se um número primo p divide um produto $a_1 a_2 \ldots a_n$ então $p \mid a_k$ para algum k com $1 \leq k \leq n$.

Teorema 2.15 (Teorema Fundamental da Aritmética) Seja $m > 1$ um inteiro. Existem números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ com $p_1 > p_2 > \ldots > p_n$ e $n \geq 1$ inteiro, e inteiros não negativos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$. Os inteiros $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são univocamente determinados.

As demonstrações da Proposição (2.10), Corolário (2.1) e do Teorema (2.15) são encontrados no livro (COELHO, 2001), entre as páginas 78 e 82.

2.3.2 Princípios da Boa Ordenação e Indução

Vamos supor que em $\mathbb{Z}$ existem as noções de "ordem" $<$ e de módulo $|\cdot|$, as quais admitiremos com algumas de suas propriedades básicas. Também, vamos admitir o princípio da boa ordenação em $\mathbb{Z}$.

Axioma 2.1 (Princípio da Boa Ordenação) Todo subconjunto não vazio S de $\mathbb{Z}$ de elementos não negativos possui um primeiro elemento, isto é, existe $x_0 \in S$ tal que $x_0 \leq x$ para todo $x \in S$.

Proposição 2.11 Não existe inteiro m tal que $0 < m < 1$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que existe tal $m \in \mathbb{Z}$, com $0 < m < 1$. Assim o conjunto $S = \{m \in \mathbb{Z};\ 0 < m < 1\}$ é não vazio e pelo princípio da boa ordenação existe $x_0 \in S$ tal que $x_0 \leq x$ para todo $x \in S$. Como $x_0 \in S$ temos $0 < x_0 < 1$ e daí segue que $0 < x_0^2 < x_0 < 1$ e isto contradiz a minimalidade de $x_0 \in S$ pois $x_0 \in S$.

Proposição 2.12 (Princípio da Indução - 1ª forma) Suponhamos que seja dada uma afirmação $a(n)$ dependendo de $n \in \mathbb{N}$ tal que:

1. $a(0)$ é verdadeira.

2. Para $k \in \mathbb{N}$, $a(k+1)$ é verdadeira sempre que $a(k)$ for verdadeira.

Então, $a(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja S o conjunto dos inteiros $m \in \mathbb{N}$ tais que $a(m)$ seja falsa, e suponhamos que $S \neq \emptyset$. Pelo Princípio da Boa Ordenação, existe $x_0 \in S$ tal que $x_0 \leq m$ para todo $m \in S$. Como $a(0)$ é verdadeira, por hipótese temos que $0 \notin S$ e portanto $x_0 \geq 1$; mais ainda como $x_0 - 1 \notin S$ temos que $a\left(x_0 - 1\right)$ é verdadeira. Agora pela hipótese (2) segue que $a\left(x_0\right) = a\left[\left(x_0 - 1\right) + 1\right]$ é verdadeira, o que é uma contradição. Logo, $S = \emptyset$ e a proposição está demonstrada.

Proposição 2.13 (Princípio da Indução - 2ª forma) Suponhamos que seja dada uma afirmação $a(n)$ dependendo de $n \in \mathbb{N}$ tal que:

1. $a(0)$ é verdadeira.

2. Para cada inteiro $m > 0$, $a(m)$ é verdadeira sempre que $a(k)$ for verdadeira para $0 \leq k < m$.

Então, $a(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja S o conjunto dos inteiros $m \in \mathbb{N}$ tais que $a(m)$ seja falsa e suponhamos que $S \neq \emptyset$. Novamente, pelo Principio de Boa Ordenação, existe $x_0 \in S$ tal que $x_0 \leq x$, para todo $x \in S$, e pela hipótese (1) $x_0 > 0$. Portanto, $a(k)$ é verdadeira para todo k com $0 \leq k < x_0$ e (2) nos dá uma contradição.

2.3.3 Números Racionais e Irracionais

O conjuntos dos **números racionais**, denotado por $\mathbb{Q}$, pode ser definido como o quociente de dois números inteiros, sendo o denominador não nulo. Podemos representar o conjunto por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$$

Enquanto que o conjunto dos **números irracionais**, denotados por $\mathbb{I}$, são definidos como números que não podem ser expressos como a razão entre dois inteiros. Dentre

os infinitos números irracionais, podemos destacar a história de $\sqrt{2}$, a geometria inicialmente a definiu como a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos iguais a 1. A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ em suma é atribuída a Hippasus de Metapontum (500 a.C.) da escola pitagórica, onde a lenda entorno da história conta que realizar essa demonstração lhe custou a vida, visto que nesse período os gregos eram céticos com relação a existência de números incomensuráveis.

Teorema 2.16 $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $\sqrt{2}$ seja racional, ou seja, pode ser escrito da forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$, tal que $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. Daí, temos,

$$\sqrt{2}q = p \quad \Rightarrow \quad 2q^2 = p^2. \tag{2.13}$$

Assim, temos que p^2 é par, então, p também é par, denotamos $p = 2k$ com $k \in \mathbb{Z}$. Agora, substituindo $p = 2k$ em (2.13), obtemos:

$$2q^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

e portanto,

$$q^2 = 2k^2.$$

Assim, q^2 também é um número par, logo, q é par. Entretanto, note que temos p e q pares, assim o $\mathrm{mdc}(p, q) \geq 2 \Rightarrow 2 \mid \mathrm{mdc}(p, q)$. O que contraria nossa hipótese inicial $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$, portanto $\sqrt{2}$ é irracional.

2.3.4 Números Algébricos e Transcendentes

Definição 2.31 Qualquer solução de uma equação polinomial da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

com $a_i \in \mathbb{Z}$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. É chamado um *número algébrico*. Ou seja, um número α é algébrico quando é possível encontrar uma equação polinomial com coeficientes inteiros, da qual α seja raiz. Assim, um número que não é algébrico é denominado *transcendente*.

Exemplo 2.14 Qualquer número racional $\alpha = \dfrac{p}{q}$, é algébrico porque α é a raiz da equação $qx - p = 0$.

Exemplo 2.15 Dado qualquer $n \geq 2$ número natural e $\alpha > 0$ número real, o número $\sqrt[n]{\alpha}$ é algébrico pois é α é raiz da equação $x^n - \alpha = 0$.

Exemplo 2.16 $i = \sqrt{-1}$ é algébrico pois é raiz da equação $x^2 + 1 = 0$.

Definição 2.32 Um conjunto A é dito *enumerável* se seus elementos puderem ser colocado em correspondência biunívoca com os números naturais. Mais precisamente, A é enumerável se existir uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to A$.

Teorema 2.17 A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

A demonstração para este teorema pode ser encontrada em (FIGUEIREDO, 2011).

Teorema 2.18 O conjunto de todos os números algébricos é enumerável.

Demonstração.
Dado um polinômio de coeficientes inteiros

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ com } a_n \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

A altura $|P|$ é a soma dos valores absolutos dos coeficientes, acrescido o grau desse polinômio, da qual define-se por

$$|P| = |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0| + n.$$

O Teorema Fundamental da Álgebra (2.2.2) garante que $P(x)$, tem exatamente n raízes complexas, onde todas elas, algumas ou nenhuma delas podem ser reais. A uma dada altura, teremos um número finito de polinômios. Para isso, incluímos a parcela n na definição de altura. Portanto, todas as raízes de todos os polinômios de uma dada altura formam um conjunto finito.
Logo, se observa que o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas formam um conjunto enumerável, e portanto, pela Teorema 2.17 garantimos que o conjuntos de todos os números algébricos é enumerável.

Teorema 2.19 Existem números transcendentes.

Demonstração. Em virtude do Teorema 2.18 temos que o conjunto dos algébricos reais é enumerável, e como o conjunto $\mathbb{R}$ é não enumerável, como consequência o conjunto dos transcendentes reais deve ser não enumerável, caso contrário $\mathbb{R}$ seria enumerável como a união de dois conjuntos enumeráveis.

Propriedade 2.3 (A aritmética dos números algébricos)

1. A soma de dois números algébricos é algébrico.

2. O produto de dois números algébricos é algébrico.

3. O simétrico $-\alpha$ de um número algébrico α é algébrico.

4. O inverso α^{-1} de um número algébrico $\alpha \neq 0$ é algébrico.

As demonstrações das propriedades dos números algébricos podem ser encontradas no livro (FIGUEIREDO, 2011), entre as páginas 17 e 20.

3 PANORAMA HISTÓRICO DO NÚMERO π

3.1 A PERMANÊNCIA DE π NA MATEMÁTICA

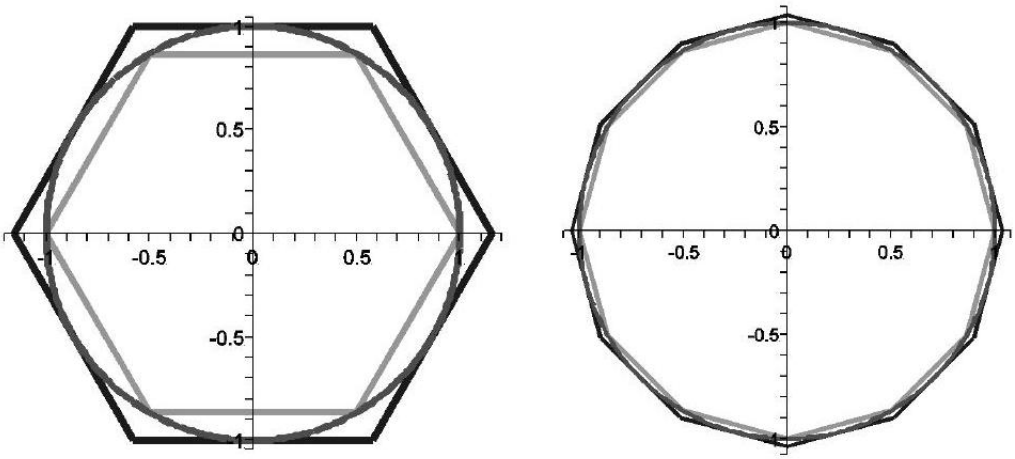
Conforme destacado por Borwein e Chapman (BORWEIN; CHAPMAN, 2015), o número π destaca-se como um dos objetos matemáticos mais persistentes ao longo da história. Sua investigação remonta a civilizações antigas, mantendo relevância contínua desde os estudos pioneiros em Siracusa até as pesquisas contemporâneas. A constante aparece frequentemente na cultura popular, como nos filmes *As Aventuras de Pi* (2012) e *Pi: Ordem no Caos* (1998), este último surpreendendo por tratar de conceitos matemáticos em um filme para adultos[1].

3.2 AS CONTRIBUIÇÕES FUNDAMENTAIS DE ARQUIMEDES

Segundo (BORWEIN; CHAPMAN, 2015), Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) realizou contribuições fundamentais ao estabelecer a equivalência entre duas definições aparentemente distintas de π:

- Razão entre a área do círculo e o quadrado de seu raio ($\pi_1 r^2$)
- Razão entre a circunferência e o diâmetro ($\pi_2 d$)

Figura 1 – Método de Arquimedes para o cálculo de π com polígonos de 6 e 12 lados



Fonte: Borwein e Chapman (2015, fig. 1, p. 197)

[1] Um filme classificação R abordando conceitos matemáticos avançados!

O método arquimediano, desenvolvido por volta de 250 a.C., representou um marco na história do cálculo numérico. Através da duplicação sistemática de polígonos inscritos e circunscritos:

$$6 \to 12 \to 24 \to 48 \to 96 \text{ lados}$$

Arquimedes obteve os limites históricos:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

3.3 O PRIMEIRO ALGORITMO PARA π

Como observam (BORWEIN; CHAPMAN, 2015), o esquema de Arquimedes constitui o primeiro algoritmo verdadeiramente eficaz para calcular π com precisão arbitrária. Esse método, redescoberto no século XIX, pode ser expresso através de uma recursão numericamente estável conhecida como Iteração Média Arquimediana:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{(Média harmônica)} \tag{3.1}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \quad \text{(Média geométrica)} \tag{3.2}$$

Partindo de $a_0 = 2\sqrt{3}$ e $b_0 = 3$ (valores para hexágonos), a sequência converge para π com erro reduzido por fator quatro a cada iteração.

3.4 DESENVOLVIMENTOS HISTÓRICOS NOTÁVEIS

O método arquimediano permaneceu como principal técnica por séculos. Destaques incluem:

- **Século V**: Tsu Chung-Chih na China calculou 7 dígitos exatos
- **Século XV**: O matemático persa al-Kāshi obteve 16 casas decimais usando polígonos com 32^{28} lados, expressando 2π em base sexagesimal:

$$2\pi \approx 6 + \frac{16}{60^1} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{01}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9},$$

3.5 π NO NASCIMENTO DA ANÁLISE MODERNA

Com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, novas representações de π emergiram:

3.5.1 Produtos Infinitos

- Fórmula de Viéta (1593):

$$\frac{2}{\pi} = \frac{2}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

- Produto de Wallis (1655):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9}\cdots$$

3.5.2 Séries e Fórmulas de Arco-tangente

A série de arco-tangente:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1$$

Levou a importantes fórmulas de cálculo:

- Série de Gregory-Leibniz (1674):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

- Fórmula de Hutton (1776):

$$\operatorname{arctg}(1) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right)$$

- Fórmula de Euler (1738):

$$\operatorname{arctg}(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{8}\right)$$

- Fórmula de Machin (1706):

$$\operatorname{arctg}(1) = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$$

3.6 A NATUREZA FUNDAMENTAL DE π

A compreensão da essência de π evoluiu através de:

1. **1761**: Lambert prova a irracionalidade usando frações contínuas.
2. **1794**: Legendre da a conjectura da transcendência.
3. **1882**: Lindemann demonstra a transcendência, resolvendo definitivamente o problema da quadratura do círculo.

Como destacado em (BORWEIN; CHAPMAN, 2015), a história de π reflete a própria evolução do pensamento matemático, desde métodos geométricos até sofisticadas técnicas analíticas modernas, mantendo-se como um dos conceitos mais estudados e fascinantes da matemática.

3.7 O π DEFINIDO PELA INTEGRAL

De uma maneira não tão rigorosa (THOMAS; FINNEY, 1996) afirmam que π é irracional e a circunferência do círculo de raio 1 é 2π, sem definirem π. Para uma abordagem mais rigorosa, (SPIVAK, 1980) define π pela integral

$$\pi := 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Dessa maneira, pode-se definir o setor de ângulo x por

$$A(x) := \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \int_{x}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

As funções trigonométricas são então definidas a partir da função A. Para $0 \leq x \leq \pi$, define-se $\cos x$ como a única função que satisfaz a equação $A(\cos x) = \frac{x}{2}$, e a função $\operatorname{sen} x$ é posteriormente definida por $\operatorname{sen} x := \sqrt{1-\cos^2 x}$.
Dessa forma, define-se as funções *arco-tangente* e *arco-seno*, escritas como $\operatorname{arctg} x$ e $\operatorname{arcsen} x$, respectivamente.

$$\operatorname{arctg} x := \int_{0}^{x} \frac{dt}{1+t^2}, \quad x > 0,$$

e,

$$\operatorname{arcsen} x := \int_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Portanto, π é definido pela integral

$$\pi := 2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2},$$

de forma que $\pi = 2\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(\infty)$.

4 A IRRACIONALIDADE DE π

Neste capítulo, abordaremos a primeira das propriedades fundamentais do número π: sua irracionalidade. A irracionalidade de π implica que ele não pode ser expresso como uma fração exata de dois números inteiros. Para demonstrar essa característica, exploraremos duas provas distintas e elegantemente construídas. A primeira, apresentada por Ivan Niven (1947) em um artigo publicado no *Bulletin of the American Mathematica Society*, utiliza uma abordagem baseada em cálculo diferencial e integral para chegar a uma contradição. A segunda, desenvolvida por Mary Cartwright, de acordo com Harold Jeffreys (1973) (ver página 268), essa prova foi incluída por Cartwright como exemplo em um exame da Universidade de Cambridge, no ano de 1945, emprega uma técnica diferente, também envolvendo integrais e propriedades de polinômios, para reafirmar a natureza irracional de π. Ambas as demonstrações oferecem perspectivas valiosas sobre a complexidade subjacente a uma das constantes mais conhecidas da matemática.

4.1 A DEMONSTRAÇÃO DE NIVEN

Para esta demonstração vamos utilizar a qualidade do π onde nos diz ser a menor raiz real positiva de $\operatorname{sen}(x)$, ou seja $\operatorname{sen}(\pi) = 0$. A parte fundamental desta demonstração é mostrar que se π é racional, então existe um número inteiro entre 0 e 1, o que seria um absurdo e portanto podemos concluir que π é irracional. Para isso, suponhamos que π seja racional, assim pode ser escrito como $\pi = \dfrac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}^+$, e $b \neq 0$. Agora definimos uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

onde n é um número natural arbitrário.

Proposição 4.1 É satisfeito:

1. A função f se anula nos pontos 0 e π;
2. $f(x) > 0$ quando $x \in]0, \pi[$;
3. Se $x \in]0, \pi[$, então $0 < f(x)\operatorname{sen}(x) < \dfrac{\pi^n a^n}{n!}$;

4. Para todo x, vale $f(\pi - x) = f(x)$;

5. Cada derivada de $f(x)$, para qualquer ordem, assume apenas valores inteiros no ponto $x = 0$, ou seja, $f^{(i)}(0)$ é sempre um inteiro, onde $f^{(i)}$ represente a i-ésima derivada de f;

6. Sempre vale $f^{(i)}(x) = (-1)^i f^{(i)}(\pi - x)$;

7. $f^{(i)}(\pi)$ é sempre um inteiro.

Demonstração.

1. Para $x = 0$ em (4.1), temos

$$f(0) = \frac{0^n(a - b \cdot 0)^n}{n!} = \frac{0(a)^n}{n!} = 0$$

e para $x = \pi$ em (4.1), onde $\pi = \dfrac{a}{b}$, tem-se

$$f(\pi) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n \left(a - b \cdot \frac{a}{b}\right)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n (a - a)^n}{n!} = 0.$$

2. Se $x \in]0, \pi[$ então $x > 0$. Logo, $x^n > 0$. Além disso, desde que $b > 0$, obtemos

$$0 < x < \pi \Rightarrow 0 < x < \frac{a}{b} \Rightarrow 0 < bx < a \Rightarrow 0 < a - bx \Rightarrow 0 < (a - bx)^n.$$

Logo,

$$x^n(a - bx)^n > 0 \Rightarrow \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} > 0.$$

Portanto, $f(x) > 0$.

3. Se $0 < x < \pi$ então $0 < x^n < \pi^n$. Desde que $b > 0$, também temos

$$0 < a - bx < a \Rightarrow (a - bx)^n < a^n.$$

Por outro lado, como $0 < \operatorname{sen}(x) < 1$, para $x \in]0, \pi[$, obtemos:

$$0 < f(x)\operatorname{sen}(x) < f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} < \frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

4. Para todo x, por (4.1) e desde que $b\pi = a$, tem-se

$$\begin{aligned} f(\pi - x) &= \frac{(\pi - x)^n[a - b(\pi - x)]^n}{n!} \\ &= \frac{(\pi - x)^n[a - b\pi + bx]^n}{n!} \\ &= \frac{(\pi - x)^n(bx)^n}{n!} \\ &= \frac{x^n(b\pi - bx)^n}{n!} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

5. Reescrevendo $f(x)$ desenvolvendo o binômio, temos:

$$f(x) = \frac{x^n(a^n - \ldots + (-b)^n x^n)}{n!} = \frac{a^n x^n}{n!} - \ldots + \frac{(-b)^n x^{2n}}{n!}. \tag{4.2}$$

Assim, $f(x)$ tem grau $2n$. Daí, temos as seguintes possibilidades:

- Para $i > 2n$ tem-se $f^{(i)}(x) = 0$ para todo x, em particular para $x = 0$, temos $f^{(i)}(0) = 0$.
- Para $i < n$ temos que $f^{(i)}(x)$ sempre tem uma potência de x como fator, logo $f^{(i)}(0) = 0$.
- Para $n \leq i \leq 2n$. Da equação (4.2) temos que cada monômio em $f(x)$ é da forma, $\dfrac{kx^{n+j}}{n!}$, onde k é uma constante inteira e $0 \leq j \leq n$. Na expressão (4.2), alguns termos terão grau menor do que i, outros terão grau maior do que i, e um único termo terá grau igual a i, ou seja, $i = n + j$ para algum j. Ao calcular $f^i(0)$ os termos de grau menor do que i e os termos maiores do que i se reduzirão a zero. Agora, falta verificar para o termo cujo grau vale $i = n + j$. Derivando $i = n + j$ vezes, obtemos,

$$\frac{(n+j)(n+j-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot k \cdot x^0}{n!} = \frac{(n+j)!k}{n!}.$$

  Logo, a expressão $\dfrac{(n+j)!k}{n!}$ é um inteiro. Segue que a derivada de ordem $n + j$ de cada monômio de f em $x = 0$ vale 0 ou é um inteiro, portanto concluí-se que $f^{(n+j)}(0)$ é um inteiro.

6. A prova segue por indução sobre i. Para cada x, temos $f(\pi - x) = f(x)$. Logo, derivando ambos os lados e pela Regra da Cadeia, tem-se

$$(-1)f'(\pi - x) = f'(x)$$

verificando a igualdade para $i = 1$. Suponhamos que, para cada x, temos

$$(-1)^i f^{(i)}(\pi - x) = f^{(i)}(x).$$

Derivando ambos os lados e pela Regra da Cadeia, obtemos

$$(-1)^{i+1} f^{(i+1)}(\pi - x) = f^{(i+1)}(x).$$

verificando a igualdade para $i + 1$.

7. Usando o item anterior para $x = \pi$, temos,

$$f^{(i)}(\pi) = (-1)^i f^{(i)}(\pi - \pi) = (-1)^i f^{(i)}(0).$$

Sabe-se que $f^{(i)}(0)$ é um inteiro e $(-1)^i$ também é um inteiro. Logo $(-1)^i f^{(i)}(0)$ é um inteiro.

Agora definimos uma nova função $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x). \tag{4.3}$$

Para está função temos as seguintes propriedades:

Proposição 4.2 É satisfeito

1. $F''(x) + F(x) = f(x)$;
2. $F'(x)\operatorname{sen}(x) - F(x)\cos(x)$ é uma primitiva de $f(x)\operatorname{sen}(x)$;
3. $F(0) + F(\pi)$ é um número inteiro.
4. A integral $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(x)dx$ é um número inteiro;
5. Se $x \in]0, \pi[$ então $0 < \displaystyle\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(x)dx < \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}$.

Demonstração.

1. Derivando duas vezes (4.3), obtemos

$$F'(x) = f'(x) - f'''(x) + f^{(5)}(x) - \cdots + (-1)^{n-1} f^{(2n-1)}(x) + (-1)^n f^{(2n+1)}(x),$$
$$F''(x) = f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \cdots - (-1)^n f^{(2n)}(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x). \tag{4.4}$$

Somando, (4.3) e (4.4), e desde que f tem grau $2n$, tem-se

$$F''(x) + F(x) = f(x).$$

2. Derivando, obtemos

$$\begin{aligned}\Big(F'(x)\operatorname{sen}(x) - F(x)\cos(x)\Big)' &= F''(x)\operatorname{sen}(x) + F'(x)\cos(x)\\ &\quad - F'(x)\cos(x) + F(x)\operatorname{sen}(x)\\ &= F''(x)\operatorname{sen}(x) + F(x)\operatorname{sen}(x)\\ &= [F''(x) + F(x)]\operatorname{sen}(x)\\ &= f(x)\operatorname{sen}(x).\end{aligned}$$

3. Pela item 6 e 7 da Proposição 4.1 as somas abaixo se reduzem a números inteiros,

$$F(0) = f(0) - f^{(2)}(0) + f^{(4)}(0) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(0) \text{ é um inteiro,}$$

$$F(\pi) = f(\pi) - f^{(2)}(\pi) + f^{(4)}(\pi) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(\pi) \text{ é um inteiro.}$$

Portanto, claramente $F(0) + F(\pi)$ é um inteiro.

4. Pelo item 2 e pelo 2º Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(x)dx &= \int_0^\pi \Big(F'(x)\operatorname{sen}(x) - F(x)\cos(x)\Big)' dx\\ &= \Big[F'(x)\operatorname{sen}(x) - F(x)\cos(x)\Big]_0^\pi\\ &= [F'(\pi)\operatorname{sen}(\pi) - F(\pi)\cos(\pi)] - [F'(0)\operatorname{sen}(0) - F(0)\cos(0)]\\ &= F(\pi) + F(0).\end{aligned}$$

E como visto anteriormente $F(\pi) + F(0)$ é um número inteiro.

5. Pelo item 3 da Proposição 4.1, para $x \in]0, \pi[$, obtemos

$$0 < f(x)\operatorname{sen}(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

logo, integrando de 0 a π, tem-se

$$\begin{aligned}0 < \int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(x)dx &< \int_0^\pi \frac{\pi^n a^n}{n!}dx\\ 0 < \int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}(x)dx &< \frac{\pi^{n+1}a^n}{n!}.\end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que para n muito grande temos que $\dfrac{\pi^{n+1}a^n}{n!} < 1$. Para isso vamos utilizar conceitos de convergência de séries. Desde que $e^{\pi a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi a)^n}{n!}$ é uma série

convergente então $\lim_{n\to\infty} \frac{(\pi a)^n}{n!} = 0$. Assim, por definição existe um n suficientemente grande tal que

$$\frac{\pi^n a^n}{n!} < \frac{1}{\pi}.$$

Assim, podemos concluir,

$$0 < \int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(x)dx < 1.$$

E como obtemos anteriormente, que $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}(x)dx$ é um número inteiro, resulta na existência de um número inteiro maior que 0 e menor que 1, o que é um absurdo, logo contraria a hipótese feita de π ser um número racional. E portanto, π é irracional.

4.2 A DEMONSTRAÇÃO DE CARTWRIGHT

Para esta demonstração será necessário os conceitos de integral e séries e sequências.

Inicialmente, para $x \neq 0$, consideremos a integral

$$I_n(x) = \int_{-1}^{1} (1-z^2)^n \cos(xz)dz, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Queremos escrever a integral de maneira recursiva, assim fazendo uso da integração por partes podemos chegar no objetivo. Para $n \geq 2$, tomando,

$$\begin{cases} u = (1-z^2)^n & \Rightarrow \quad du = -2nz(1-z^2)^{n-1}dz, \\ dv = \cos(xz)dz & \Rightarrow \quad v = \dfrac{\mathrm{sen}(xz)}{x}, \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_{-1}^{1} (1-z^2)^n \cos(xz)dz \\ &= \underbrace{\left[\frac{\mathrm{sen}(xz)}{x}(1-z^2)^n\right]_{-1}^{1}}_{0} + \int_{-1}^{1} 2nz(1-z^2)^{n-1}\frac{\mathrm{sen}(xz)}{x}dz \\ &= \frac{2n}{x}\int_{-1}^{1} z(1-z^2)^{n-1}\,\mathrm{sen}(xz)dz. \end{aligned}$$

Novamente, necessitamos aplicar a integração por partes. Daí, considerando

$$\begin{cases} u = z(1-z^2)^{n-1} & \Rightarrow \quad du = \left[(1-z^2)^{n-1} - 2z^2(n-1)(1-z^2)^{n-2}\right]dz, \\ dv = \mathrm{sen}(xz)dz & \Rightarrow \quad v = -\dfrac{\cos(xz)}{x}, \end{cases}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \frac{2n}{x}\int_{-1}^{1} z(1-z^2)^{n-1}\operatorname{sen}(xz)dz \\
&= \frac{2n}{x}\underbrace{\left[-\frac{\cos(xz)}{x}z(1-z^2)^{n-1}\right]_{-1}^{1}}_{0} \\
&\quad + \frac{2n}{x}\int_{-1}^{1}\frac{\cos(xz)}{x}\left[(1-z^2)^{n-1} - 2z^2(n-1)(1-z^2)^{n-2}\right]dz \\
&= \frac{2n}{x^2}\int_{-1}^{1}\cos(xz)\left[(1-z^2)^{n-1} - 2z^2(n-1)(1-z^2)^{n-2}\right]dz.
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que

$$(1-z^2)^{n-1} - 2z^2(n-1)(1-z^2)^{n-2} = -2(n-1)(1-z^2)^{n-2} + (2n-1)(1-z^2)^{n-1}.$$

Daí, temos

$$I_n(x) = \frac{2n}{x^2}\int_{-1}^{1}\cos(xz)\left[-2(n-1)(1-z^2)^{n-2} + (2n-1)(1-z^2)^{n-1}\right]dz.$$

Equivalentemente,

$$x^2 I_n(x) = -4n(n-1)I_{n-2}(x) + 2n(2n-1)I_{n-1}(x), \text{ para todo } n \geq 2. \tag{4.5}$$

Agora, para $x \neq 0$, consideremos a função,

$$J_n(x) = x^{2n+1}I_n(x), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Assim, para $n \geq 2$, por (4.5) e (4.6), temos

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= x^{2n+1}I_n(x) \\
&= x^{2n-1}[-4n(n-1)I_{n-2}(x) + 2n(2n-1)I_{n-1}(x)] \\
&= -4n(n-1)x^2x^{2(n-2)+1}I_{n-2}(x) + 2n(2n-1)x^{2(n-1)+1}I_{n-1}(x) \\
&= -4n(n-1)x^2J_{n-2}(x) + 2n(2n-1)J_{n-1}(x).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Lema 4.1 Para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$J_n(x) = n![P_n(x)\cos(x) + Q_n(x)\operatorname{sen}(x)], \tag{4.8}$$

onde $P_n(x)$ e $Q_n(x)$ são polinômios de grau menor ou igual a $2n$, com coeficientes inteiros dependendo de n.

Demonstração. Para esta demonstração vamos utilizar a 2º forma do Principio de Indução. Para $n = 0$, temos

$$J_0 = xI_0(x) = x\int_{-1}^{1}\cos(xz)dz = x\left[\frac{\operatorname{sen}(xz)}{x}\right]_{-1}^{1} = 2\operatorname{sen}(x).$$

Para $n = 1$, por integração por partes, tem-se

$$\begin{aligned}
J_1(x) = x^3 I_1(x) &= x^3\int_{-1}^{1}(1-z^2)\cos(xz)dz \\
&= x^3\left(\underbrace{\left[(1-z^2)\frac{\operatorname{sen}(xz)}{x}\right]_{-1}^{1}}_{0} + \int_{-1}^{1} 2z\frac{\operatorname{sen}(xz)}{x}dz\right) \\
&= 2x^2\int_{-1}^{1} z\operatorname{sen}(xz)dz \\
&= 2x^2\left(\left[-z\frac{\cos(xz)}{x}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\cos(xz)}{x}dz\right) \\
&= -4x\cos(x) + 4\operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

Agora, suponhamos que (4.8) é válido para todos os inteiros positivos menores que $k \geq 2$. Assim, por hipótese indutiva temos

$$J_{k-1}(x) = (k-1)![P_{k-1}(x)\cos(x) + Q_{k-1}(x)\operatorname{sen}(x)], \tag{4.9}$$

$$J_{k-2}(x) = (k-2)![P_{k-2}(x)\cos(x) + Q_{k-2}(x)\operatorname{sen}(x)], \tag{4.10}$$

onde $P_{k-1}(x), Q_{k-1}(x)$ são polinômios de grau menor ou igual a $2(k-1)$ com coeficientes inteiros e $P_{k-2}(x), Q_{k-2}(x)$ são polinômios de grau menor ou igual a $2(k-2)$ com coeficientes inteiros. Agora, por (4.7), temos

$$J_k(x) = -4k(k-1)x^2 J_{k-2}(x) + 2k(2k-1)J_{k-1}(x).$$

Assim, por (4.9) e (4.10), tem-se

$$\begin{aligned}
J_k(x) = &-4k(k-1)x^2\Big((k-2)![P_{k-2}(x)\cos(x) + Q_{k-2}(x)\operatorname{sen}(x)]\Big) \\
&+ 2k(2k-1)\Big((k-1)![P_{k-1}(x)\cos(x) + Q_{k-1}(x)\operatorname{sen}(x)]\Big) \\
= &\ k!\Big(-4x^2P_{k-2}(x) + 2(2k-1)P_{k-1}(x)\Big)\cos(x) \\
&+ k!\Big(-4x^2Q_{k-2}(x) + 2(2k-1)Q_{k-1}(x)\Big)\operatorname{sen}(x) \\
= &\ k![P_k(x)\cos(x) + Q_k(x)\operatorname{sen}(x)],
\end{aligned}$$

onde $P_k(x) = -4x^2P_{k-2}(x)+2(2k-1)P_{k-1}(x)$ e $Q_k(x) = -4x^2Q_{k-2}(x)+2(2k-1)Q_{k-1}(x)$ são polinômios de grau menor ou igual a $\max\{2(k-1), 2(k-2)+2\} = 2k-2 \leq 2k$ com coeficientes inteiros. Portanto, (4.8) é satisfeita para k.

Teorema 4.1 π é irracional.

Demonstração. Suponha por absurdo, que π é racional, então $\frac{\pi}{2}$ também é racional, ou seja, pode ser expresso como $\frac{\pi}{2} = \frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Note que, para $x = \frac{\pi}{2}$ em (4.6) e (4.8), obtemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) &= J_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= n!\left[P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + Q_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\\ &= n!Q_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = Q_n\left(\frac{\pi}{2}\right) b^{2n+1}. \tag{4.11}$$

Agora, desde que,

$$Q_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}, \text{ com } a_i \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$Q_n\left(\frac{\pi}{2}\right) b^{2n+1} = Q_n\left(\frac{a}{b}\right) b^{2n+1} = \left(a_0 + a_1\left(\frac{a}{b}\right) + a_2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \ldots + a_{2n}\left(\frac{a}{b}\right)^{2n}\right) b^{2n+1}.$$

Portanto,

$$Q_n\left(\frac{\pi}{2}\right) b^{2n+1} \in \mathbb{Z}.$$

Por outro lado, para $-1 \leq z \leq 1$ tem-se $0 \leq z^2 \leq 1$ daí $0 \leq 1 - z^2 \leq 1$. Logo, $0 \leq (1-z^2)^n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Também, como $|\cos(xz)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Assim, temos que

$$|(1-z^2)^n \cos(xz)| \leq 1, \text{ para todo } -1 \leq z \leq 1. \tag{4.12}$$

Em particular, para $x = \frac{\pi}{2}$ em (4.12), temos

$$0 < (1-z^2)^n \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \leq 1, \text{para todo } -1 \leq z \leq 1.$$

Logo, integrando ambos os lados das desigualdades de -1 até 1, obtemos

$$0 < I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 2.$$

Daí,

$$0 < \frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{2a^{2n+1}}{n!}.$$

Agora, como $e^{a^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a^2)^n}{n!}$ é convergente então $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n}}{n!} = 0$. Daí, por definição existe um n suficientemente grande tal que

$$\frac{a^{2n}}{n!} < \frac{1}{2a}.$$

Desta maneira, podemos concluir,

$$0 < \frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) < 1.$$

Mas, por (4.11), $\frac{a^{2n+1}}{n!} I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{Z}$, ou seja, com isso poderíamos encontrar um numero inteiro entre 0 e 1. O que contradiz nossa suposição de que π é racional, portanto π é irracional.

5 A TRANSCENDÊNCIA DE π

Expandindo nossa investigação sobre a natureza de π, este capítulo se dedica à sua transcendência, uma propriedade que implica ser um número não algébrico, ou seja, não pode ser a raiz de nenhum polinômio não trivial com coeficientes inteiros. A transcendência de π é um resultado mais profundo que sua irracionalidade e possui implicações históricas significativas, sendo uma delas a conhecida impossibilidade da quadratura do círculo. Apresentaremos duas demonstrações detalhadas para a transcendência de π. A primeira, inspirada no trabalho de Robert E. Moritz está presente no livro (FIGUEIREDO, 2011), e explora conceitos de funções complexas e desigualdades do valor médio. A segunda, baseada na abordagem de Ivan Niven (1939), utiliza-se de polinômios simétricos e propriedades de exponenciais de números algébricos para estabelecer este resultado fundamental. Ambas as provas destacam a sofisticação das ferramentas matemáticas necessárias para desvendar as propriedades mais profundas de π.

5.1 A DEMONSTRAÇÃO DE ROBERT E. MORITZ

Para esta demonstração baseada na de Moritz (1901) ao invés do uso do teorema do valor médio para polinômios complexos faremos uma substituição por uma desigualdade do valor médio anteriormente definida e demonstrada na seção (2.2.2.1).

Teorema 5.1 O número π é transcendente.

Demonstração. Para esta prova vamos supor por absurdo que π seja um número algébrico, então $i\pi$, onde $i = \sqrt{-1}$, também é um número algébrico, visto que é o produto entre algébricos. Como $i\pi$ é algébrico, logo é uma raiz de uma equação polinomial, de grau n, com coeficientes inteiros $P_1(x)$, onde as raízes desse polinômio são dadas por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, onde $\alpha_1 = i\pi$. Temos a partir da identidade de Euler que $e^{i\pi} = -1$, dado

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + e^{\alpha_j}) = 0. \tag{5.1}$$

Ao desenvolver esse produto obtemos uma expressão da forma: 1 + somatório de exponenciais cujos expoentes são

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \tag{5.2}$$

$$\alpha_i + \alpha_j, \quad \text{para todos } i < j, \tag{5.3}$$

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, \quad \text{para todos } i < j < k, \tag{5.4}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n. \tag{5.5}$$

Note que os expoentes de (5.2) possui n termos; (5.3) possui $\binom{n}{2}$ termos; (5.4) possui $\binom{n}{3}$ termos;. . .; (5.5) possui $\binom{n}{n} = 1$ termo. Onde $\binom{n}{m}$ são os coeficientes binomiais descritos por $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ para $0 \leq m \leq n$.
Como consequências de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ satisfazerem uma equação polinomial de grau n com coeficientes inteiros, temos: os números de (5.3) satisfazem um polinômio de grau $\binom{n}{2}$ com coeficientes inteiros, denotada por $P_2(x) = 0$. Enquanto que os números de (5.4) satisfazem um polinômio de grau $\binom{n}{3}$ com coeficientes inteiros, denotada por $P_3(x) = 0$. E assim, sucessivamente. Podemos perceber que os números (5.2), (5.3), (5.4), . . . , (5.5) satisfazem uma equação polinomial com coeficientes inteiros da forma:

$$P_1(x)P_2(x)P_3(x)\ldots P_n(x) = 0, \tag{5.6}$$

onde o grau do polinômio é

$$n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

pois, pelo Binômio de Newton, temos

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} 1^m \cdot 1^{n-m} = 1 + n + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n},$$

e subtraindo 1 de ambos os lados, obtemos a relação que descreve o grau do polinômio (5.6). De (5.2), (5.3), (5.4), . . . , (5.5) podemos perceber que alguns números podem vir a se anular, assim suponhamos que m deles sejam diferentes de zero, e os denotamos por $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Agora simplificamos de (5.6) os fatores da forma x^q, para $q > 0$, caso

ocorra, e de fato terá se $2^n - 1 > m$, obtemos que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ são raízes de um polinômio do tipo:

$$R(x) = cx^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \tag{5.7}$$

com coeficientes inteiros. Assim, o produto de (5.1) pode ser escrito como:

$$\ell + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + e^{\beta_3} + \cdots + e^{\beta_m} = 0, \tag{5.8}$$

onde ℓ é um inteiro. Consideremos agora o polinômio

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} (R(x))^p, \tag{5.9}$$

onde $s = mp - 1$ e p é um número primo que determinaremos posteriormente. O grau de P é $r = s + p$. Definamos agora

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(r)}(x). \tag{5.10}$$

Lema 5.1 Sejam $Q(x)$ um polinômio de grau r e $Q^{(r)}$ a derivada de ordem r de Q, e $G(x)$ a função $G(x) = Q(x) + Q'(x) + \ldots + Q^{(r)}(x)$, então temos a seguinte relação:

$$(e^{-x}G(x))' = -e^{-x}Q(x).$$

Demonstração. Derivando, obtemos

$$\begin{aligned}
\Big(e^{-x}G(x)\Big)' &= -e^{-x}G(x) + e^{-x}G'(x) \\
&= -e^{-x}G(x) + e^{-x}\Big(Q'(x) + Q''(x) + \ldots + Q^{(r)}(x) + \underbrace{Q^{(r+1)}(x)}_{0}\Big) \\
&= -e^{-x}\Big(Q(x) + Q'(x) + \ldots + Q^{(r)}(x)\Big) \\
&\quad + e^{-x}\Big(Q'(x) + Q''(x) + \ldots + Q^{(r)}(x)\Big) \\
&= -e^{-x}Q(x).
\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 5.1, tem-se que $\Big(e^{-x}F(x)\Big)' = -e^{-x}P(x)$. Daí, ao aplicarmos o Teorema 2.13 à função $f(z) = e^{-z}F(z)$, temos:

$$\left|e^{-\beta_j}F(\beta_j) - F(0)\right| \leq 2\left|\beta_j\right| \sup\left\{\left|e^{-\lambda\beta_j}P(\lambda\beta_j)\right|;\ 0 \leq \lambda \leq 1\right\} \text{ para } j = 1, \ldots, m. \tag{5.11}$$

Multiplicando por e^{β_j} a ambos os lados da desigualdade (5.11) e fazendo

$$\epsilon_j = 2\left|\beta_j\right| \sup\left\{\left|e^{(1-\lambda)\beta_j}P(\lambda\beta_j)\right|;\ 0 \leq \lambda \leq 1\right\}, \tag{5.12}$$

obtemos

$$\left|F\left(\beta_j\right) - e^{\beta_j} F(0)\right| \leq \epsilon_j. \tag{5.13}$$

Por meio dos resultados obtidos em (5.8) e (5.13), para $j = 1, 2, \ldots, m$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left|\ell F(0) + \sum_{j=1}^{m} F(\beta_j)\right| &= \left|-\Big(\sum_{j=1}^{m} e^{\beta_j}\Big) F(0) + \sum_{j=1}^{m} F(\beta_j)\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{m} \left[F(\beta_j) - e^{\beta_j} F(0)\right]\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \left|F\left(\beta_j\right) - e^{\beta_j} F(0)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \epsilon_j. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Feito isso, nossa meta adiante é mostrar que o lado esquerdo de (5.14) é um inteiro não nulo, enquanto que o lado direito, para um p adequado, é menor que 1. Para isso, vamos calcular as diversas derivadas de $P(x)$ nos pontos $0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$.

Observação 5.1 O polinômio $P(x)$ definido em (5.9) é da forma

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}\Big(c_0^p x^{p-1} + bx^p + \ldots + c^p x^r\Big),$$

onde b é um inteiro. De fato,

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} (R(x))^p \\
&= \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} \Big(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{m-1} x^{m-1} + cx^m\Big)^p \\
&= \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} \Big(c_0^p + bx + \ldots + c^p x^{mp}\Big) \\
&= \frac{c^s}{(p-1)!} \Big(c_0^p x^{p-1} + bx^p + \ldots + c^p x^r\Big).
\end{aligned}$$

Agora, pelo Observação 5.1, temos que $P^{(i)}(0) = 0$ para $i < p-1$ pois $P^{(i)}(x)$ sempre tem uma potência de x. Também,

$$P^{(p-1)}(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}\Big((p-1)! c_0^p + p \cdot (p-1) \cdot 2bx + \ldots + r \cdot (r-1) \cdots (r-p+1) c^p x^{r-p+1}\Big)$$

logo, $P^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p$. Assim,

$$P^{(i)}(0) = 0, \quad \text{para} \quad i < p-1 \quad \text{e} \quad P^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p. \tag{5.15}$$

Por outro lado, para cada $j = 1, \ldots, m$, temos que β_j é raiz de $R(x)$, logo existe $S_j(x)$ polinômio de grau $m-1$ tal que

$$R(x) = (x - \beta_j)S_j(x). \tag{5.16}$$

Logo, substituindo (5.16) em (5.9), obtemos

$$P(x) = (x - \beta_j)^p T_j(x), \tag{5.17}$$

$$T_j(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} (S_j(x))^p.$$

Assim, para $i < p$, pela regra de Leibniz em (5.17), temos

$$\begin{aligned} P^{(i)}(x) &= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} [(x-\beta_j)^p]^{(k)} [T_j(x)]^{(i-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \Big(p \cdot (p-i) \cdots (p-k+1)(x-\beta_j)^{p-k}\Big) \Big(T_j(x)\Big)^{(i-k)} \end{aligned}$$

daí, $P^{(i)}(\beta_j) = 0$. Portanto, resumindo tem-se

$$P^{(i)}(\beta_j) = 0, \quad \text{para } i < p, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.18}$$

Lema 5.2 Seja $Q(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j$ um polinômio com coeficientes inteiros e seja $p < r$, então

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}, \quad i \leq r. \tag{5.19}$$

Consequentemente, temos

$$\frac{1}{(p-1)!} Q^{(i)}(x), \quad \text{para} \quad i \geq p, \tag{5.20}$$

é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.

Demonstração. De fato, para $i \leq r$, derivando obtemos

$$\begin{aligned} Q'(x) &= \sum_{j=1}^{r} j a_j x^{j-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + r a_r x^{r-1} \\ Q''(x) &= \sum_{j=2}^{r} j(j-1) a_j x^{j-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \cdots + r(r-1) r a_r x^{r-2} \\ Q'''(x) &= \sum_{j=3}^{r} j(j-1)(j-2) a_j x^{j-3} = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 x + \cdots + r(r-1)(r-2) a_r x^{r-3} \\ &\vdots \\ Q^{(i)}(x) &= \sum_{j=i}^{r} j(j-1) \cdots (j-i+1) a_j x^{j-i} = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}. \end{aligned}$$

De (5.19) podemos reescrever a expressão (5.20) como:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x) &= \frac{1}{(p-1)!}\left(\sum_{j=i}^{r}\frac{j!}{(j-i)!}a_j x^{j-i}\right)\\ &= \sum_{j=i}^{r}\frac{1}{(p-1)!}\frac{j!}{(j-i)!}a_j x^{j-i}.\end{aligned}$$

Note que, cada coeficiente é do tipo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(p-1)!}\frac{j!}{(j-i)!}a_j &= p\cdot\frac{i!}{p!}\frac{j!}{i!(j-i)!}a_j,\\ &= p\cdot\frac{i!}{p!}\binom{j}{i}a_j, \text{ com } i\leq j\leq r,\end{aligned}$$

e, como $i \geq p$ então

$$\frac{i!}{p!}\in\mathbb{Z}.$$

Portanto, (5.20) é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.

Em virtude do Lema 5.2, tomando $Q(x) = c_0^p x^{p-1} + bx^p + \ldots + c^p x^r$, para $i \geq p$ podemos concluir que

$$P^{(i)}(x) = c^s\left(\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)\right) \tag{5.21}$$

é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por pc^s. Logo, de (5.15) e (5.21) temos que:

$$F(0) = c^s c_0^p + pc^s\ell_0, \tag{5.22}$$

onde ℓ_0 é um inteiro cujo valor não é necessário conhecer para nosso objetivo. E para os demais $F(\beta_j)$, por (5.18), podemos escrevê-los da forma:

$$\sum_{j=1}^{m}F(\beta_j) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i\geq p}P^{(i)}(\beta_j) = \sum_{i\geq p}\sum_{j=1}^{m}P^{(i)}(\beta_j). \tag{5.23}$$

Agora, prestemos atenção à expressão

$$\sum_{j=1}^{m}P^{(i)}(\beta_j), \tag{5.24}$$

para cada i fixado, com $p \leq i \leq r = s + p$. Por (5.21), temos que o polinômio $P^{(i)}(x)$ tem coeficientes inteiros e divisíveis por pc^s, e também possui grau $r = s + p$, então $P^{(i)}(x)$ tem grau $s + p - i \leq s$, pois $p \leq i$. Então podemos escrever a expressão (5.24) da forma:

$$\sum_{j=1}^{m}P^{(i)}(\beta_j) = pc^s Q(\beta_1,\ldots,\beta_m), \tag{5.25}$$

onde $Q(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ é um polinômio nos β_i com grau menor ou igual a s e coeficientes inteiros, além de ser um polinômio simétrico nos β_i. Pelo Teorema 2.1 existe um polinômio $H(\theta_1, \ldots, \theta_m)$ de grau menor ou igual a s, com coeficientes inteiros, onde $\theta_1, \ldots, \theta_m$, são polinômios simétricos elementares em $\beta_1, \ldots, \beta_m$, tal que

$$Q(\beta_1, \ldots, \beta_m) = H(\theta_1, \ldots, \theta_m). \tag{5.26}$$

Além disso, temos

$$\theta_1 = c^{-1}c_{m-1},\ \theta_2 = c^{-1}c_{m-2}, \ldots,\ \theta_m = c^{-1}c_0. \tag{5.27}$$

Assim, por (5.25), (5.26) e (5.27), temos que $\sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j)$ é um inteiro divisível por p. Então, pela igualdade descrita em (5.23), podemos concluir que:

$$\sum_{j=1}^{m} F(\beta_j) = pL_1, \tag{5.28}$$

onde L_1 é um inteiro cujo valor não é necessário conhecer para nosso objetivo. Por meio dos resultados encontrados em (5.22) e (5.28) podemos concluir a analise do lado esquerdo da relação (5.14) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \left|\ell F(0) + \sum_{j=1}^{m} F(\beta_j)\right| &= \left|\ell\left(c^s c_0^p + pc^s\ell_0\right) + pL_1\right| \\ &= \left|\ell c^s c_0^p + pL\right|, \end{aligned} \tag{5.29}$$

onde $L = c^s\ell_0\ell + L_1$. Vamos escolher o número primo p tal que seja maior que ℓ, c e c_0. Consequentemente, o inteiro (5.29) não é divisível por p, então esse valor é um inteiro não nulo.

Para finalizar a demonstração, precisamos estimar o lado direito da desigualdade (5.14). Para isto, consideremos

$$\mathcal{M} = \max\{|\beta_1|, \ldots, |\beta_m|\}.$$

Daí, por (5.12) e (5.9), temos

$$\begin{aligned} \epsilon_j &= 2\left|\beta_j\right| \sup\left\{\left|e^{(1-\lambda)\beta_j} P\left(\lambda\beta_j\right)\right|;\ 0 \le \lambda \le 1\right\} \\ &\le 2\mathcal{M}e^{\mathcal{M}} \frac{|c|^s}{(p-1)!} \sup\left\{\left|\lambda\beta_j\right|^{p-1}\left|R\left(\lambda\beta_j\right)\right|^p;\ 0 \le \lambda \le 1\right\}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Consideremos $\mathcal{N} = \max\{|R(z)|;\ |z| \leq M\}$ então de (5.30) obtemos:

$$\begin{aligned}\epsilon_j &\leq 2\mathcal{M}e^{\mathcal{M}}\frac{|c|^s}{(p-1)!}\mathcal{M}^{p-1}\mathcal{N}^p \\ &= 2|c|^{m-1}(\mathcal{M}\mathcal{N})e^{\mathcal{M}}\frac{(|c|^m\mathcal{M}\mathcal{N})^{p-1}}{(p-1)!}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Agora, desde que $e^{|c|^m\mathcal{M}\mathcal{N}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(|c|^m\mathcal{M}\mathcal{N})^n}{n!}$ é convergente então $\lim_{n\to\infty}\frac{(|c|^m\mathcal{M}\mathcal{N})^n}{n!} = 0$. Em particular, $\lim_{n\to\infty}\frac{(|c|^m\mathcal{M}\mathcal{N})^{n-1}}{(n-1)!} = 0$. Daí, por definição existe p_0 tal que

$$\frac{(|c|^m\mathcal{M}\mathcal{N})^{n-1}}{(n-1)!} < \frac{1}{2|c|^{m-1}(\mathcal{M}\mathcal{N})e^{\mathcal{M}}(m+1)}, \text{ para todo } n \geq p_0. \tag{5.32}$$

Consideremos p primo tal que $p > p_0$ então por (5.31) e (5.32) temos

$$\epsilon_j < \frac{1}{m+1},$$

logo,

$$\sum_{j=1}^{m}\epsilon_j < \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1} < 1. \tag{5.33}$$

Que é um absurdo, visto que saindo de (5.14) chegamos que (5.33) é um inteiro não nulo, enquanto que o lado direito de (5.14) é menor que 1, como obtido em (5.33). Portanto, fica provado que π é um número transcendente.

5.2 A DEMONSTRAÇÃO DE NIVEN

A demonstração apresentada aqui baseia-se na feita por Niven em 1939, utilizando principalmente conceitos de polinômios simétricos e integração complexa, tornando a demonstração relativamente mais simples.

Teorema 5.2 π é transcendente.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que π seja um número algébrico, então $i\pi$ também é um número algébrico, ou seja, $i\pi$ é raiz de uma equação algébrica $\theta_1(x) = 0$ com coeficientes inteiros (não necessariamente um polinômio mônico) e com raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ para m inteiro, com $\alpha_1 = i\pi$. Por meio da identidade de Euler, $e^{i\pi} + 1 = 0$,

temos que $e^{\alpha_1}+1=0$, por consequência obtemos:

$$\begin{aligned}0 =&(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\cdots(1+e^{\alpha_m})\\ =&1+(e^{\alpha_1}+e^{\alpha_2}+\cdots+e^{\alpha_m})+\left(e^{\alpha_1+\alpha_2}+e^{\alpha_1+\alpha_3}+\cdots+e^{\alpha_{m-1}+\alpha_m}\right)\\ &+\left(e^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}+e^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1}+\cdots+e^{\alpha_{m-2}+\alpha_{m-1}+\alpha_m}\right)+\cdots+e^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}.\end{aligned} \tag{5.34}$$

Precisamos construir uma equação algébrica com coeficientes racionais cujas raízes são precisamente os expoentes na forma expandida da equação (5.34). Veja que os α_k são raízes de $\theta_1(x)=0$, assim do Teorema (2.2) temos que os polinômios simétricos elementares de $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ são racionais.

Consideramos o conjunto das raízes somadas em pares, assim:

$$S_2=\{\alpha_i+\alpha_j;\ i<j\leq m\}=\{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3,\ldots,\alpha_1+\alpha_m,\ldots,\alpha_{m-1}+\alpha_m\}. \tag{5.35}$$

Note que os polinômios simétricos das entradas de S_2 também são simétricos nas α_k, e pelo Teorema 2.3 eles são racionais, logo, esses racionais formam os coeficientes (exceto pelos sinais, como no Teorema de Viète) de uma equação algébrica $\theta_2(x)=0$ cujas raízes são precisamente as somas de dois a dois, dadas por S_2. Partindo do mesmo pressuposto, fazemos o conjunto de somas três a três,

$$S_3=\{\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k;\ i<j<k\},$$

obtendo uma equação algébrica $\theta_3(x)=0$ em que as raízes são as somas em S_3, e assim por diante até S_m com $\theta_m(x)=0$.

Assim, temos que o produto das raízes

$$\theta_1(x)\theta_2(x)\ldots\theta_m(x)=0, \tag{5.36}$$

são os expoentes na expansão (5.34).

Agora, caso haja, eliminamos as raízes que forem zero, assim obtemos a equação:

$$\theta(x)=c_0x^r+c_1x^{r-1}+\cdots+c_r=0, \tag{5.37}$$

onde as raizes de $\theta(x)$ são $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ expoentes não nulos na expansão de (5.34), com coeficientes inteiros, e c_0 e c_r diferentes de zero.

Logo, podemos escrever (5.34) da seguinte forma:

$$e^{\beta_1}+e^{\beta_2}+\cdots+e^{\beta_r}+k=0, \tag{5.38}$$

para k inteiro positivo, com $k \neq 0$.

Deste ponto em diante tomamos $c = c_0$, o coeficiente de ordem superior da equação (5.37). Seja a função definida por:

$$f(x) = \frac{c^s x^{p-1}[\theta(x)]^p}{(p-1)!}, \tag{5.39}$$

com o inteiro $s = rp-1$, e p é um número primo arbitrário a ser escolhido posteriormente. Definimos agora a seguinte função:

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(s+p)}(x). \tag{5.40}$$

Como mostrado anteriormente pelo Lema 5.1, temos

$$(e^{-x}F(x))' = -e^{-x}f(x).$$

Assim,

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -\int_0^x e^{-\xi}f(\xi)d\xi.$$

Substituindo $\xi = \lambda x$, e multiplicando a equação por e^x, obtemos:

$$\begin{cases} \xi = 0 \to \lambda = 0 \\ \xi = x \to \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) - e^x F(0) = -\int_0^1 e^{(1-\lambda)x} f(\lambda x)d\lambda. \tag{5.41}$$

Sabemos de (5.38) que:

$$\sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j} + k = 0.$$

Substituindo $x = \beta_j$, e por meio do somatório em (5.41) obtemos a seguinte relação:

$$\sum_{j=1}^{r} F(\beta_j) + kF(0) = -\sum_{j=1}^{r} \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f(\lambda\beta_j)\, d\lambda. \tag{5.42}$$

Precisamos mostrar que a relação acima gera uma contradição, pois para p suficientemente grande, a expressão a esquerda é um inteiro diferente de zero, enquanto que o lado direito é arbitrariamente pequeno.

Inicialmente, tomemos de (5.39) que nos fornece:

$$f^{(t)}(\beta_j) = 0 \quad \text{para } 0 \leq t < p. \tag{5.43}$$

Temos que o polinômio $g(x) = (p-1)!f(x)$ tem coeficientes inteiros. Note que o produto de p inteiros consecutivos é sempre divisível por $p!$, e as derivadas de ordem

p e derivadas de ordem superiores de $g(x)$ são polinômios com coeficientes inteiros divisíveis por $p!$. Logo, tanto as derivadas de ordem p e as superiores de $f(x)$ são polinômios com coeficientes inteiros divisíveis por p, além do fato que cada um desses coeficientes serem divisíveis por c^s.

Portanto, para $t \geq p$, temos que $f^{(t)}(\beta_j)$ é um polinômio em β_j com grau máximo igual a s, e coeficientes divisíveis por pc^s. De (5.37) temos que para qualquer função simétrica de $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ com coeficientes inteiros e grau máximo s nos fornece um número inteiro se cada coeficiente for divisível por c^s, que de fato acontece.

Assim

$$\sum_{j=1}^{r} f^{(t)}(\beta_j) = pk_t \quad \text{para } p \leq t \leq p+s, \tag{5.44}$$

onde $k_t \in \mathbb{Z}$.

Ao combinarmos (5.43) com (5.44), e somando sobre t, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{r} F(\beta_j) = p \sum_{t=p}^{p+s} k_t. \tag{5.45}$$

Por meio de (5.39) e (5.40), temos:

$$f^{(t)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{para} \quad 0 \leq t \leq p-2, \\ c^s c_r^p, & \text{para} \quad t = p-1, \\ pq_t, & \text{para} \quad p \leq t \leq p+s, \end{cases} \tag{5.46}$$

para alguns q_t inteiros. Assim, por (5.46), obtemos

$$F(0) = pq + c^s c_r^p, \tag{5.47}$$

para algum q inteiro. Logo, por (5.45) e (5.47), o lado esquerdo de (5.42) é $pq' + kc^s c_r^p$ para algum q' inteiro. Agora escolhendo p primo maior do que k, c e c_r, conseguimos que o lado esquerdo de (5.42) é um inteiro não divisível por p, (pois, $kc^s c_r^p$ não pode ser divisível por p), e, consequentemente, não-nulo.

Consideremos $M = \max\{|\beta_1|, \ldots, |\beta_r|\}$ e $N = \max\{|\theta(z)|;\ |z| \leq M\}$.

Para $0 \leq \lambda \leq 1$ e $j = 1, \ldots, r$, por (5.39), temos

$$\begin{aligned} |f(\lambda\beta_j)| &= \left| \frac{c^s(\lambda\beta_j)^{p-1}[\theta(\lambda\beta_j)]^p}{(p-1)!} \right| \\ &= \frac{|c|^{rp-1}(\lambda|\beta_j|)^{p-1}|\theta(\lambda\beta_j)|^p}{(p-1)!} \\ &\leq \frac{|c|^{rp-1}M^{p-1}N^p}{(p-1)!} \\ &\leq N|c|^{r-1}\frac{(|c|^r MN)^{p-1}}{(p-1)!}. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Com respeito ao modulo do lado direito de (5.42), por (5.48), tem-se

$$\begin{aligned} \left| -\sum_{j=1}^{r} \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f\left(\lambda\beta_j\right) d\lambda \right| &\leq \sum_{j=1}^{r} \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} |f(\lambda\beta_j)| d\lambda \\ &\leq \sum_{j=1}^{r} \int_0^1 e^M N|c|^{r-1}\frac{(|c|^r MN)^{p-1}}{(p-1)!} d\lambda \\ &= rNe^M|c|^{r-1}\frac{(|c|^r MN)^{p-1}}{(p-1)!}. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Agora, desde que $\lim_{n\to\infty} \frac{(|c|^r MN)^{n-1}}{(n-1)!} = 0$, existe p_0 tal que

$$\frac{(|c|^r MN)^{n-1}}{(n-1)!} < \frac{1}{(r+1)Ne^M|c|^{r-1}}, \quad \text{para todo } n \geq p_0. \tag{5.50}$$

Daí, escolhendo p primo tal que $p > p_0$ então por (5.49) e (5.50) tem-se

$$\left| -\sum_{j=1}^{r} \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f\left(\lambda\beta_j\right) d\lambda \right| = \frac{r}{r+1} < 1. \tag{5.51}$$

Assim, de (5.42) e (5.51), obtemos uma contradição com o lado esquerdo sendo um inteiro não nulo enquanto o lado direito para p suficientemente grande é menor do que 1. Portanto, concluímos que a hipótese inicial não é valida, sendo assim fica provado que π é um número transcendente.

6 A IRRACIONALIDADE DE π^4

Neste capítulo, expandimos nossa investigação sobre a natureza dos números irracionais, dedicando-nos à demonstração da irracionalidade de π^4. Embora a irracionalidade de π já tenha sido estabelecida no Capítulo 3, a análise de potências de π apresenta desafios e abordagens específicas. Para tal, exploraremos a prova desenvolvida por Mohammad Reza Yegan em (YEGAN, 2017), que utiliza a poderosa técnica das identidades integrais de Hermite. Esta abordagem não apenas complementa as discussões anteriores sobre a natureza de π, mas também ilustra a versatilidade das ferramentas analíticas no estudo das propriedades dos números. É importante notar que, embora o artigo original de Yegan também propusesse uma prova para π^6, uma análise detalhada dessa parte da demonstração será abordada na subseção 6.1, onde inconsistências relevantes serão discutidas.

Teorema 6.1 O número π^4 é irracional.

Demonstração. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) g_0(x) dx,$$

onde

$$f_n(x) = \frac{(1-x^4)^n}{n!}, \text{ para todo } x \in [0,1], \tag{6.1}$$

$$g_0(x) = e^{a(x-1)} - e^{-a(x-1)} + ie^{ai(x-1)} - ie^{-ai(x-1)}, \text{ para todo } x \in [0,1], \tag{6.2}$$

sendo $i^2 = -1$ e $a = \dfrac{(1+i)\pi}{2}$.

Agora, note que, por (6.2), para $x \in [0,1]$ temos

$$\begin{aligned}
|g_0(x)| &= \left| e^{a(x-1)} - e^{-a(x-1)} + ie^{ai(x-1)} - ie^{-ai(x-1)} \right| \\
&\leq \left| e^{a(x-1)} \right| + \left| -e^{-a(x-1)} \right| + \left| ie^{ai(x-1)} \right| + \left| -ie^{-ai(x-1)} \right| \\
&= e^{\frac{\pi}{2}(x-1)} + e^{\frac{\pi}{2}(1-x)} + e^{\frac{\pi}{2}(1-x)} + e^{\frac{\pi}{2}(x-1)} \\
&\leq 1 + e^{\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} + 1 \text{ (pois } e^x \text{ é crescente)} \\
&= 2(1 + e^{\frac{\pi}{2}}).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

E, por (6.1) e (6.3), temos

$$\begin{aligned}
|I_n| &= \left|\int_0^1 f_n(x)g_0(x)dx\right| \\
&\leq \int_0^1 |f_n(x)| \cdot |g_0(x)|dx \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{n!} \cdot 2(1+e^{\frac{\pi}{2}})dx \\
&= \frac{2(1+e^{\frac{\pi}{2}})}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Afirmação 6.1 Tem-se

$$\begin{aligned}
f_n^{(4)}(x) &= 8\Big((4n-1)(4n-3)(1-2n)f_{n-1}(x) + 6\left(16n^2-32n+17\right)f_{n-2}(x) \\
&\quad + 48(3-2n)f_{n-3}(x) + 32f_{n-4}(x)\Big), \text{ para todo } x \in [0,1].
\end{aligned} \tag{6.5}$$

De fato, derivando quatro vezes f_n, por (6.1), obtemos

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= \frac{(1-x^4)^{n-1}}{(n-1)!}(-4x^3),\ f_n''(x) = \frac{(1-x^4)^{n-2}}{(n-2)!}(16x^6) + \frac{(1-x^4)^{n-1}}{(n-1)!}(-12x^2), \\
f_n'''(x) &= \frac{(1-x^4)^{n-3}}{(n-3)!}(-64x^9) + \frac{(1-x^4)^{n-2}}{(n-2)!}(144x^5) + \frac{(1-x^4)^{n-1}}{(n-1)!}(-24x), \\
f_n^{(4)}(x) &= \frac{(1-x^4)^{n-4}}{(n-4)!}(256x^{12}) + \frac{(1-x^4)^{n-3}}{(n-3)!}(-1152x^8) + \frac{(1-x^4)^{n-2}}{(n-2)!}(816x^4) \\
&\quad + \frac{(1-x^4)^{n-1}}{(n-1)!}(-24).
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Por outro lado, tem-se

$$x^8 = (1-x^4)^2 - 2(1-x^4) + 1, \tag{6.7}$$

$$x^{12} = -(1-x^4)^3 + 3(1-x^4)^2 - 3(1-x^4) + 1. \tag{6.8}$$

Agora, substituindo (6.7) e (6.8) em (6.6)

$$\begin{aligned}
f_n^{(4)}(x) &= \frac{(1-x^4)^{n-4}}{(n-4)!} \cdot 256(-(1-x^4)^3 + 3(1-x^4)^2 - 3(1-x^4) + 1) \\
&\quad + \frac{(1-x^4)^{n-3}}{(n-3)!} \cdot 1152(-(1-x^4)^2 + 2(1-x^4) - 1) \\
&\quad + \frac{(1-x^4)^{n-2}}{(n-2)!} \cdot 816(-(1-x^4) + 1) + \frac{(1-x^4)^{n-1}}{(n-1)!}(-24) \\
&= 8\left[\frac{(1-x^4)^{n-4}}{(n-4)!} \cdot 32(-(1-x^4)^3 + 3(1-x^4)^2 - 3(1-x^4) + 1)\right. \\
&\quad + \frac{(1-x^4)^{n-3}}{(n-3)!} \cdot 144(-(1-x^4)^2 + 2(1-x^4) - 1) \\
&\quad \left. + \frac{(1-x^4)^{n-2}}{(n-2)!} \cdot 102(-(1-x^4) + 1) + \frac{(1-x^4)^{n-1}}{(n-1)!}(-3)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_n^{(4)}(x) = 8\Bigg[&-\frac{32}{(n-4)!}(1-x^4)^{n-1} + \frac{96}{(n-4)!}(1-x^4)^{n-2} - \frac{96}{(n-4)!}(1-x^4)^{n-3} \\
&+ \frac{32}{(n-4)!}(1-x^4)^{n-4} - \frac{144}{(n-3)!}(1-x^4)^{n-1} + \frac{288}{(n-3)!}(1-x^4)^{n-2} \\
&- \frac{144}{(n-3)!}(1-x^4)^{n-3} - \frac{102}{(n-2)!}(1-x^4)^{n-1} + \frac{102}{(n-2)!}\left(1-x^4\right)^{n-2} \\
&- \frac{3}{(n-1)!}\left(1-x^4\right)^{n-1}\Bigg] \\
= 8\Big[&\{-32(n-1)(n-2)(n-3) - 144(n-1)(n-2) - 102(n-1) - 3\} f_{n-1}(x) \\
&+ \{96(n-2)(n-3) + 288(n-2) + 102\} f_{n-2}(x) + \{-96(n-3) - 144\} f_{n-3}(x) \\
&+ 32 f_{n-4}(x)\Big]. \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
&-32(n-1)(n-2)(n-3) - 144(n-1)(n-2) - 102(n-1) - 3 \\
&= -32(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) - 144(n^2 - 3n + 2) - 102n + 102 - 3 \\
&= -32n^3 + 48n^2 - 22n + 3 = (4n-3)(4n-1)(1-2n), \qquad (6.10) \\
&96(n-2)(n-3) + 288(n-2) + 102 \\
&= 6[16(n^2 - 5n + 6) + 48(n-2) + 17] = 6[16n^2 - 32n + 17], \qquad (6.11) \\
&-96(n-3) - 144 = 48[-2(n-3) - 3] = 48[3 - 2n]. \qquad (6.12)
\end{aligned}
$$

Assim, substituindo (6.10), (6.11) e (6.12) em (6.9) obtemos (6.5).

Afirmação 6.2 Tem-se

$$
g_k(x) = \frac{1}{a^k}\left(e^{a(x-1)} + (-1)^{k-1}e^{-a(x-1)} + (-i)^{k-1}e^{ia(x-1)} + i^{k-1}e^{-ia(x-1)}\right), \qquad (6.13)
$$

onde

$$
g_k(x) = \int g_{k-1}(x)dx, \ k = 1, 2, 3, \ldots \text{(sem considerar constantes).}
$$

De fato, a prova segue por indução sobre k.

Para $k = 1$, tem-se

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= \int g_0(x)dx \\
&= \int \left[e^{a(x-1)} - e^{-a(x-1)} + ie^{ai(x-1)} - ie^{-ai(x-1)}\right] dx \\
&= \frac{e^{a(x-1)}}{a} - \frac{e^{-a(x-1)}}{-a} + \frac{ie^{ai(x-1)}}{ia} - \frac{ie^{-ai(x-1)}}{-ia} \\
&= \frac{1}{a}\Big(e^{a(x-1)} + e^{-a(x-1)} + e^{ai(x-1)} + e^{-ai(x-1)}\Big)
\end{aligned}
$$

verifica a equação (6.13). Suponhamos que equação (6.13) seja valida para k. Assim, temos

$$\begin{aligned}
g_{k+1}(x) &= \int g_k(x)dx \\
&= \int \frac{1}{a^k}\left(e^{a(x-1)} + (-1)^{k-1}e^{-a(x-1)} + (-i)^{k-1}e^{ia(x-1)} + i^{k-1}e^{-ia(x-1)}\right)dx \\
&= \frac{1}{a^k}\left[\frac{e^{a(x-1)}}{a} + \frac{(-1)^{k-1}e^{-a(x-1)}}{-a} + \frac{(-i)^{k-1}e^{ai(x-1)}}{ia} + \frac{i^{k-1}e^{-ai(x-1)}}{-ia}\right] \\
&= \frac{1}{a^{k+1}}\Big(e^{a(x-1)} + (-1)^k e^{-a(x-1)} + (-i)^k e^{ai(x-1)} + i^k e^{-ai(x-1)}\Big)
\end{aligned}$$

satisfaz a equação (6.13) para $k+1$.

Afirmação 6.3 Para $n \geq 4$ tem-se

$$\begin{aligned}
I_n = \frac{32}{\pi^4}\Big((4n-1)(4n-3)(2n-1)I_{n-1} - 6(16n^2-32n+17)I_{n-2} \\
+ 48(2n-3)I_{n-3} - 32I_{n-4}\Big).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

De fato, basta fazer quatro vezes integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 f_n(x)g_0(x)dx \\
&= \underbrace{\Big[f_n(x)g_1(x)\Big]_0^1}_{0} - \int_0^1 f_n'(x)g_1(x)dx \text{ (pois } f_n(1) = g_1(0) = 0) \\
&= -\underbrace{\Big[f_n'(x)g_2(x)\Big]_0^1}_{0} + \int_0^1 f_n''(x)g_2(x)dx \text{ (pois } f_n'(1) = f_n'(0) = 0 \text{ para } n \geq 4) \\
&= \underbrace{\Big[f_n''(x)g_3(x)\Big]_0^1}_{0} - \int_0^1 f_n'''(x)g_3(x)dx \text{ (pois } f_n''(1) = f_n''(0) = 0 \text{ para } n \geq 4) \\
&= -\underbrace{\Big[f_n'''(x)g_4(x)\Big]_0^1}_{0} + \int_0^1 f_n^{(4)}(x)g_4(x)dx \text{ (pois } f_n'''(1) = f_n'''(0) = 0 \text{ para } n \geq 4) \\
&= \int_0^1 f_n^{(4)}(x)g_4(x)dx.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Por outro lado, por (6.13) e (6.2), temos

$$\begin{aligned}
g_4(x) &= \frac{1}{a^4}\Big(e^{a(x-1)} + (-1)^3 e^{-a(x-1)} + (-i)^3 e^{ia(x-1)} + i^3 e^{-ia(x-1)}\Big) \\
&= \frac{1}{a^4}\Big(e^{a(x-1)} - e^{-a(x-1)} + ie^{ia(x-1)} - ie^{-ia(x-1)}\Big) = \frac{g_0(x)}{a^4}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Também, tem-se

$$\frac{1}{a^4} = \frac{1}{\left(\frac{(1+i)\pi}{2}\right)^4} = \frac{16}{(1+i)^4\pi^4} = \frac{16}{-4\pi^4} = -\frac{4}{\pi^4}. \tag{6.17}$$

Substituindo (6.16) e (6.17) em (6.15) e por (6.5) obtemos

$$\begin{aligned}
I_n &= -\frac{4}{\pi^4}\int_0^1 f_n^{(4)}(x)g_0(x)dx \\
&= -\frac{32}{\pi^4}\int_0^1 \Big((4n-1)(4n-3)(1-2n)f_{n-1}(x) + 6\left(16n^2-32n+17\right)f_{n-2}(x) \\
&\qquad + 48(3-2n)f_{n-3}(x) + 32f_{n-4}(x)\Big)g_0(x)dx \\
&= \frac{32}{\pi^4}\Big((4n-1)(4n-3)(2n-1)\int_0^1 f_{n-1}(x)g_0(x)dx \\
&\qquad - 6\left(16n^2-32n+17\right)\int_0^1 f_{n-2}(x)g_0(x)dx + 48(2n-3)\int_0^1 f_{n-3}(x)g_0(x)dx \\
&\qquad - 32\int_0^1 f_{n-4}(x)g_0(x)dx\Big)
\end{aligned}$$

o que verifica a equação (6.5).

Definamos agora

$$J_n = \left(\frac{\pi^{4n+1}}{2^{2n+3}}\right)(1+i)I_n,\ n = 0,1,2,3,\ldots. \tag{6.18}$$

Afirmação 6.4 Para $n \geq 4$ tem-se

$$\begin{aligned}
J_n &= 8(4n-1)(4n-3)(2n-1)J_{n-1} - 12(16n^2-32n+17)\pi^4 J_{n-2} \\
&\quad + 24(2n-3)\pi^8 J_{n-3} - 4\pi^{12}J_{n-4}.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

De fato, para $n \geq 4$, por (6.18) e (6.14), tem-se

$$\begin{aligned}
J_n &= \left(\frac{\pi^{4n+1}}{2^{2n+3}}\right)(1+i)\frac{32}{\pi^4}\Big((4n-1)(4n-3)(2n-1)I_{n-1} - 6(16n^2-32n+17)I_{n-2} \\
&\qquad + 48(2n-3)I_{n-3} - 32I_{n-4}\Big) \\
&= \left(\frac{\pi^{4n-3}}{2^{2n-2}}\right)(1+i)\Big((4n-1)(4n-3)(2n-1)I_{n-1} - 6(16n^2-32n+17)I_{n-2} \\
&\qquad + 48(2n-3)I_{n-3} - 32I_{n-4}\Big) \\
&= 8(4n-1)(4n-3)(2n-1)\left(\frac{\pi^{4n-3}}{2^{2n+1}}\right)(1+i)I_{n-1} \\
&\quad - 12(16n^2-32n+17)\pi^4\left(\frac{\pi^{4n-7}}{2^{2n-1}}\right)(1+i)I_{n-2} + 24(2n-3)\pi^8\left(\frac{\pi^{4n-11}}{2^{2n-3}}\right)(1+i)I_{n-3} \\
&\quad - 4\pi^{12}\left(\frac{\pi^{4n-15}}{2^{2n-5}}\right)(1+i)I_{n-4}
\end{aligned}$$

o que mostra a equação (6.19).

Agora calculemos I_0, I_1, I_2 e I_3:

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 f_0(x)g_0(x)dx = \int_0^1 g_0(x)dx = [g_1(x)]_0^1 = g_1(1) - g_1(0) = \frac{4}{a} - 0 = \frac{2^3}{(1+i)\pi}, \\
I_1 &= \int_0^1 f_1(x)g_0(x)dx \\
&= \underbrace{\Big[f_1(x)g_1(x)\Big]_0^1}_{0} - \int_0^1 f_1'(x)g_1(x)dx \text{ (pois } f_1(1) = g_1(0) = 0) \\
&= -\underbrace{\Big[f_1'(x)g_2(x)\Big]_0^1}_{0} + \int_0^1 f_1''(x)g_2(x)dx \text{ (pois } f_1'(0) = g_2(1) = 0) \\
&= \underbrace{\Big[f_1''(x)g_3(x)\Big]_0^1}_{0} - \int_0^1 f_1'''(x)g_3(x)dx \text{ (pois } f_1''(0) = g_3(1) = 0) \\
&= -\underbrace{\Big[f_1'''(x)g_4(x)\Big]_0^1}_{0} + \int_0^1 f_1^{(4)}(x)g_4(x)dx \text{ (pois } f_1'''(0) = g_4(1) = 0) \\
&= \int_0^1 f_1^{(4)}(x)g_4(x)dx = \frac{4\cdot 24}{\pi^4}\int_0^1 g_0(x)dx \text{ (usando (6.16) e (6.17))} \\
&= \frac{4\cdot 24}{\pi^4}\frac{2^3}{(1+i)\pi} = \frac{2^8\cdot 3}{(1+i)\pi^5},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 f_2(x)g_0(x)dx \\
&= \underbrace{\Big[f_2(x)g_1(x)\Big]_0^1}_{0} - \int_0^1 f_2'(x)g_1(x)dx \text{ (pois } f_2(1) = g_1(0) = 0) \\
&= -\underbrace{\Big[f_2'(x)g_2(x)\Big]_0^1}_{0} + \int_0^1 f_2''(x)g_2(x)dx \text{ (pois } f_2'(1) = f_2'(0) = 0) \\
&= \underbrace{\Big[f_2''(x)g_3(x)\Big]_0^1}_{0} - \int_0^1 f_2'''(x)g_3(x)dx \text{ (pois } f_2''(0) = g_3(1) = 0) \\
&= -\underbrace{\Big[f_2'''(x)g_4(x)\Big]_0^1}_{0} + \int_0^1 f_2^{(4)}(x)g_4(x)dx \text{ (pois } f_2'''(0) = g_4(1) = 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 f_2^{(4)}(x)g_4(x)dx = -\frac{4}{\pi^4}\int_0^1 [840x^4 - 24]g_0(x)dx \text{ (usando (6.16) e (6.17))} \\
&= -\frac{4}{\pi^4}\int_0^1 [816 - 840(1-x^4)]g_0(x)dx \\
&= -\frac{4}{\pi^4}[816I_0 - 840I_1] \\
&= -\frac{4}{\pi^4}\left[(2^4\cdot 3\cdot 17)\frac{2^3}{(1+i)\pi} - (2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7)\frac{2^8\cdot 3}{(1+i)\pi^5}\right] \\
&= 2^9\left[-\frac{3\cdot 17}{(1+i)\pi^5} + \frac{2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}{(1+i)\pi^9}\right], \\
I_3 &= \int_0^1 f_3(x)g_0(x)dx \\
&= \underbrace{\Big[f_3(x)g_1(x)\Big]_0^1}_{0} - \int_0^1 f_3'(x)g_1(x)dx \text{ (pois } f_3(1) = g_1(0) = 0) \\
&= -\underbrace{\Big[f_3'(x)g_2(x)\Big]_0^1}_{0} + \int_0^1 f_3''(x)g_2(x)dx \text{ (pois } f_3'(1) = f_3'(0) = 0) \\
&= \underbrace{\Big[f_3''(x)g_3(x)\Big]_0^1}_{0} - \int_0^1 f_3'''(x)g_3(x)dx \text{ (pois } f_3''(1) = f_3''(0) = 0) \\
&= -\underbrace{\Big[f_3'''(x)g_4(x)\Big]_0^1}_{0} + \int_0^1 f_3^{(4)}(x)g_4(x)dx \text{ (pois } f_3'''(0) = g_4(1) = 0) \\
&= \int_0^1 f_3^{(4)}(x)g_4(x)dx \\
&= -\frac{4}{\pi^4}\int_0^1 [-1152x^8 + (1-x^4)(816x^4) - 12(1-x^4)^2]g_0(x)dx \text{ (usando (6.16) e (6.17))} \\
&= -\frac{4}{\pi^4}\int_0^1 \left[-3960\frac{(1-x^4)^2}{2} + 3120(1-x^4) - 1152\right]g_0(x)dx \text{ (usando (6.7))} \\
&= -\frac{4}{\pi^4}[-1152I_0 + 3120I_1 - 3960I_2] \\
&= -\frac{4}{\pi^4}\left[-(2^7\cdot 3^2)\frac{2^3}{(1+i)\pi} + (2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 13)\frac{2^8\cdot 3}{(1+i)\pi^5}\right. \\
&\qquad \left. -(2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11)\cdot 2^9\left(-\frac{3\cdot 17}{(1+i)\pi^5} + \frac{2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}{(1+i)\pi^9}\right)\right] \\
&= 2^{12}\left[\frac{3^2}{(1+i)\pi^5} - \frac{2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 41}{(1+i)\pi^9} + \frac{2^6\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}{(1+i)\pi^{13}}\right].
\end{aligned}
$$

Assim, por (6.18), temos

$$J_0 = \left(\frac{\pi}{2^3}\right)(1+i)I_0 = 1, \quad J_1 = \left(\frac{\pi^5}{2^5}\right)(1+i)I_1 = 24,$$
$$J_2 = \left(\frac{\pi^9}{2^7}\right)(1+i)I_2 = 2^2\Big(-3\cdot 17\pi^4 + 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\Big),$$
$$J_3 = \left(\frac{\pi^{13}}{2^9}\right)(1+i)I_3 = 2^3\Big(3^2\pi^8 - 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 41\pi^4 + 2^6\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\Big).$$

Afirmação 6.5 A sequência (J_n) possui infinitos termos não nulos.

De fato, suponhamos a partir de um certo k, quatro termos sucessivos da sequência (J_n) se tornem zero. Por exemplo, vamos supor que $J_k = J_{k-1} = J_{k-2} = J_{k-3} = 0$ para algum $k \geq 4$. Logo, por (6.19), $J_{k-4} = 0$. Assim, por diante usando (6.19) $J_{k-5} = 0$. Desta maneira, se em algum ponto, quatro termos sucessivos da sequência se anulam, todos os termos anteriores na sequência também devem ser zero. Então eventualmente implicaria que $J_1 = J_0 = 0$ o que é uma contradição.

Afirmação 6.6 J_n é um polinômio em π^4 com coeficientes inteiros e grau $k \leq n-1$ para todo $n \geq 1$.

De fato, note primeiramente que J_1, J_2 e J_3 são polinômios em π^4, com coeficientes inteiros, de grau menor ou igual a 2, por (6.19), tem-se

$$\begin{aligned}
J_4 &= 8\cdot 15\cdot 13\cdot 7J_3 - 12(16\cdot 16 - 32\cdot 4 + 17)\pi^4 J_2 + 24\cdot 5\pi^8 J_1 - 4\pi^{12}J_0 \\
&= 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13J_3 - 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 29\pi^4 J_2 + 2^3\cdot 3\cdot 5\pi^8 J_1 - 4\pi^{12}J_0 \\
&= -4\pi^{12} + 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 227\pi^8 - 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 227\pi^4 + 2^{12}\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13
\end{aligned}$$

é um polinômio em π^4 com coeficientes inteiros de grau 3. Mas,

$$\begin{aligned}
J_5 &= 8\cdot 19\cdot 17\cdot 9J_4 - 12(16\cdot 25 - 32\cdot 5 + 17)\pi^4 J_3 + 24\cdot 7\pi^8 J_2 - 4\pi^{12}J_1 \\
&= 2^3\cdot 3^2\cdot 17\cdot 19J_4 - 2^2\cdot 3\cdot 257\pi^4 J_3 + 2^3\cdot 3\cdot 7\pi^8 J_2 - 4\pi^{12}J_1 \\
&= -2^8\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 13\pi^{12} + 2^7\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 487\pi^8 \\
&\quad - 2^{12}\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 7\cdot 22279\pi^4 + 2^{15}\cdot 3^7\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19
\end{aligned}$$

é um polinômio em π^4 com coeficientes inteiros de grau 3[1]. Suponhamos agora, por hipótese de indução, que a afirmação é verdadeira para todos os J_m com $m < n$, onde

[1] Aqui cabe mencionar que no artigo (YEGAN, 2017) afirma que J_n é um polinômio em π^4 com coeficientes inteiros e grau $n-1$ para $n \geq 1$ o qual como vemos é incorreto

$n \geq 4$. Ou seja, J_m é um polinômio em π^4 com coeficientes inteiros e grau $k_m \leq m-1$. Por (6.19), J_n pode ser expresso como um polinômio em π^4 com coeficientes inteiros. Analisemos o grau de J_n utilizando (6.19):

- O termo $8(4n-1)(4n-3)(2n-1)J_{n-1}$: J_{n-1} é um polinômio em π^4 de grau $k_{n-1} \leq (n-1)-1 = n-2$ com coeficientes inteiros.

- O termo $-12(16n^2-32n+17)\pi^4 J_{n-2}$: J_{n-2} é um polinômio em π^4 de grau $k_{n-2} \leq (n-2)-1 = n-3$ com coeficientes inteiros. Multiplicado por π^4 (grau 1 em π^4), o grau resultante é $k_{n-2}+1 \leq (n-3)+1 = n-2$ com coeficientes inteiros.

- O termo $24(2n-3)\pi^8 J_{n-3}$: J_{n-3} é um polinômio em π^4 de grau $k_{n-3} \leq (n-3)-1 = n-4$ com coeficientes inteiros. Multiplicado por $\pi^8 = (\pi^4)^2$ (grau 2 em π^4), o grau resultante é $k_{n-3}+2 \leq (n-4)+2 = n-2$ com coeficientes inteiros.

- O termo $-4\pi^{12} J_{n-4}$: J_{n-4} é um polinômio em π^4 de grau $k_{n-4} \leq (n-4)-1 = n-5$ com coeficientes inteiros. Multiplicado por $\pi^{12} = (\pi^4)^3$ (grau 3 em π^4), o grau resultante é $k_{n-4}+3 \leq (n-5)+3 = n-2$ com coeficientes inteiros.

Como J_n é a soma de termos que são polinômios em π^4 com coeficientes inteiros e cujo grau máximo é $n-2$, J_n é, de fato, um polinômio em π^4 com coeficientes inteiros. Além disso, o grau de J_n será $k_n \leq n-2$. Considerando a base de indução para $n = 1, 2, 3$ onde o grau é $n-1$, e para $n = 4, 5$ onde o grau é $n-1-1 = n-2$, podemos generalizar que o grau $k \leq n-1$ para todo $n \geq 1$. Se o termo de grau $n-1$ existe para $n = 1, 2, 3$ e o termo de grau $n-2$ existe para $n \geq 4$, a afirmação $k \leq n-1$ permanece verdadeira e abrange todos os casos. Por indução Matemática, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

Finalmente, suponhamos por absurdo que π^4 seja racional, isto é, $\pi^4 = \frac{p}{q}$ para alguns $p, q \in \mathbb{N}$. Então, $q^{n-1}|J_n|$ é um inteiro positivo para pelo menos infinitos n. Isso é porque, ao substituir $\pi^4 = \frac{p}{q}$ em J_n (que é um polinômio de grau menor ou igual a $n-1$ em π^4 com coeficientes inteiros), o termo q^{n-1} irá eliminar todos os denominadores q resultantes, deixando um número inteiro. E como J_n não se anula

para infinitos n, esse inteiro será positivo. Por outro lado, por (6.18) e (6.4), obtemos

$$\begin{aligned} q^{n-1}|J_n| &= q^{n-1}\left(\frac{\pi^{4n+1}}{2^{2n+3}}\right)\sqrt{2}|I_n| \\ &\leq q^{n-1}\left(\frac{\pi^{4n+1}}{2^{2n+3}}\right)\sqrt{2}\left(\frac{2(1+e^{\frac{\pi}{2}})}{n!}\right) \\ &= M\frac{p^n}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{6.20}$$

sendo $M = \dfrac{\pi(1+e^{\frac{\pi}{2}})}{\sqrt{2^3}q}$. Agora, desde que $e^p = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{n!}$ é convergente então $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p^n}{n!} = 0$. Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$M\frac{p^{n_0}}{n_0!} < 1. \tag{6.21}$$

Assim, por (6.20) e (6.21), obtemos

$$0 < q^{n_0-1}|J_{n_0}| < 1$$

o que contradiz o fato de $q^{n_0-1}|J_{n_0}|$ é um inteiro positivo. Esta contradição completa a demonstração.

6.1 ANÁLISE CRÍTICA DA DERIVAÇÃO DA RECORRÊNCIA PARA π^6 NO TRABALHO DE YEGAN

Conforme mencionado na introdução deste capítulo, o artigo de Yegan (2017) não se limita à demonstração da irracionalidade de π^4, mas também propõe uma prova para a irracionalidade de π^6 (Teorema 2 em (YEGAN, 2017)). Para essa prova, uma relação de recorrência específica para a sequência auxiliar J_n (Equação (6) em (YEGAN, 2017)) é fundamental. No entanto, durante a tentativa de replicar e verificar a derivação desta equação a partir das relações primárias de I_n (Equação (4) em (YEGAN, 2017)) e da definição de $J_n = (n+1)I_{n+1} - I_n$ (Equação (5) em (YEGAN, 2017)), foram identificadas inconsistências significativas. Esta seção detalha o processo de verificação dessa derivação e as discrepâncias encontradas, destacando a complexidade da manipulação de recorrências e a importância do rigor na validação de resultados matemáticos publicados.

A seguir, detalharemos o processo de derivação da relação de recorrência para J_n a partir da Equação (4) e da Equação (5) em Yegan (2017). Nosso objetivo é recomputar os coeficientes de cada termo da sequência I_n na expansão

de J_n, para então identificar se a forma da Equação (6) é consistentemente obtida. Iniciaremos com a substituição da Equação (4) (referente a I_n) na definição de J_n (Equação (5)), realizando as expansões e agrupamentos dos termos correspondentes a cada I_k. Os cálculos subsequentes serão apresentados em blocos, destacando as transformações e simplificações que levam à forma final da relação.

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) g_0(x) dx,$$

onde

$$f_n(x) = \frac{(1-x^6)^n}{n!}, \text{ para todo } x \in [0,1], \tag{6.22}$$

$$g_0(x) = e^{a(x-1)} - e^{-a(x-1)} + re^{ar(x-1)} - re^{-ar(x-1)} + \overline{r}e^{a\overline{r}(x-1)} - \overline{r}e^{-a\overline{r}(x-1)}, \tag{6.23}$$

para todo $x \in [0,1]$, sendo

$$i^2 = -1,\ a = (1+i\sqrt{3})\frac{i\pi}{2} \text{ e } r = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \text{ uma raiz 6-ésima da unidade.}$$

Agora, note que, por (6.23), para $x \in [0,1]$ temos

$$\begin{aligned}
|g_0(x)| &= \left| e^{a(x-1)} - e^{-a(x-1)} + re^{ar(x-1)} - re^{-ar(x-1)} + \overline{r}e^{a\overline{r}(x-1)} - \overline{r}e^{-a\overline{r}(x-1)} \right| \\
&\leq \left| e^{a(x-1)} \right| + \left| -e^{-a(x-1)} \right| + \left| re^{ar(x-1)} \right| + \left| -re^{-ar(x-1)} \right| \\
&\quad + \left| \overline{r}e^{a\overline{r}(x-1)} \right| + \left| -\overline{r}e^{-a\overline{r}(x-1)} \right| \\
&= e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}(1-x)} + e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}(x-1)} + e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}(1-x)} + e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}(x-1)} + 1 + 1 \\
&\leq e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}} + 1 + e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}} + 1 + 2 \text{ (pois } e^x \text{ é crescente)} \\
&= 2(2 + e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}}).
\end{aligned} \tag{6.24}$$

E, por (6.22) e (6.24), temos

$$\begin{aligned}
|I_n| &= \left| \int_0^1 f_n(x) g_0(x) dx \right| \\
&\leq \int_0^1 |f_n(x)| \cdot |g_0(x)| dx \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{n!} \cdot 2(2 + e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}}) dx \\
&= \frac{2(2 + e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}})}{n!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Afirmação 6.7 Tem-se

$$\begin{aligned} f_n^{(6)}(x) &= 72\Big((6n-5)(6n-1)(3n-2)(3n-1)(1-2n)f_{n-1}(x) \\ &\quad +10\left(324n^4-1296n^3+2079n^2-1566n+461\right)f_{n-2}(x) \\ &\quad +135(-48n^3+216n^2-346n+195)f_{(n-3)}(x) \\ &\quad +90(72n^2-288n+305)f_{n-4}(x) \\ &\quad -1620(2n-5)f_{n-5}(x)+648f_{n-6}(x)\Big), \text{ para todo } x\in[0,1]. \end{aligned} \tag{6.26}$$

De fato, derivando seis vezes f_n, por (6.22), obtemos

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{(1-x^6)^{n-1}}{(n-1)!}(-6x^5),\ f_n''(x)=\frac{(1-x^6)^{n-2}}{(n-2)!}(36x^{10})+\frac{(1-x^6)^{n-1}}{(n-1)!}(-30x^4), \\ f_n'''(x) &= \frac{(1-x^6)^{n-3}}{(n-3)!}(-216x^{15})+\frac{(1-x^6)^{n-2}}{(n-2)!}(540x^9)+\frac{(1-x^6)^{n-1}}{(n-1)!}(-120x^3), \\ f_n^{(4)}(x) &= \frac{(1-x^6)^{n-4}}{(n-4)!}(1296x^{20})+\frac{(1-x^6)^{n-3}}{(n-3)!}(-6480x^{14})+\frac{(1-x^6)^{n-2}}{(n-2)!}(5580x^8) \\ &\quad +\frac{(1-x^6)^{n-1}}{(n-1)!}(-360x^2) \\ f_n^{(5)}(x) &= \frac{(1-x^6)^{n-5}}{(n-5)!}(-7776x^{25})+\frac{(1-x^6)^{n-4}}{(n-4)!}(64800x^{19})+\frac{(1-x^6)^{n-3}}{(n-3)!}(-124200x^{13}) \\ &\quad +\frac{(1-x^6)^{n-2}}{(n-2)!}(46800x^7)+\frac{(1-x^6)^{n-1}}{(n-1)!}(-720x) \\ f_n^{(6)}(x) &= \frac{(1-x^6)^{n-6}}{(n-6)!}(46656x^{30})+\frac{(1-x^6)^{n-5}}{(n-5)!}(-583200x^{24})+\frac{(1-x^6)^{n-4}}{(n-4)!}(1976400x^{18}) \\ &\quad +\frac{(1-x^6)^{n-3}}{(n-3)!}(-1895400x^{12})+\frac{(1-x^6)^{n-2}}{(n-2)!}(331920x^6) \\ &\quad +\frac{(1-x^6)^{n-1}}{(n-1)!}(-720). \end{aligned} \tag{6.27}$$

Por outro lado, tem-se

$$x^{12} = (1-x^6)^2-2(1-x^6)+1, \tag{6.28}$$

$$x^{18} = -(1-x^6)^3+3(1-x^6)^2-3(1-x^6)+1, \tag{6.29}$$

$$x^{24} = (1-x^6)^4-4(1-x^6)^3+6(1-x^6)^2-4(1-x^6)+1, \tag{6.30}$$

$$x^{30} = -(1-x^6)^5+5(1-x^6)^4-10(1-x^6)^3+10(1-x^6)^2-5(1-x^6)+1. \tag{6.31}$$

Assim, substituindo (6.28), (6.29), (6.30) e (6.31) em (6.27), temos

$$
\begin{aligned}
f_n^{(6)}(x) = {} & \frac{(1-x^6)^{n-6}}{(n-6)!}\cdot 46656\Big(-(1-x^6)^5+5(1-x^6)^4-10(1-x^6)^3+10(1-x^6)^2 \\
& -5(1-x^6)+1\Big)+\frac{(1-x^6)^{n-5}}{(n-5)!}\cdot 583200\Big(-(1-x^6)^4+4(1-x^6)^3-6(1-x^3)^2 \\
& +4(1-x^6)-1\Big)+\frac{(1-x^6)^{n-4}}{(n-4)!}\cdot 1976400\Big(-(1-x^6)^3+3(1-x^6)^2 \\
& -3(1-x^6)+1\Big)+\frac{(1-x^6)^{n-3}}{(n-3)!}\cdot 1895400\Big(-(1-x^6)^2+2(1-x^6)-1\Big) \\
& +\frac{(1-x^6)^{n-2}}{(n-2)!}\cdot 331920\Big(1-(1-x^6)\Big)+\frac{(1-x^6)^{n-1}}{(n-1)!}(-720), \\
= {} & 72\left[\frac{(1-x^6)^{n-6}}{(n-6)!}\cdot 648\Big(-(1-x^6)^5+5(1-x^6)^4-10(1-x^6)^3+10(1-x^6)^2\right. \\
& -5(1-x^6)+1\Big)+\frac{(1-x^6)^{n-5}}{(n-5)!}\cdot 8100\Big(-(1-x^6)^4+4(1-x^6)^3-6(1-x^3)^2 \\
& +4(1-x^6)-1\Big)+\frac{(1-x^6)^{n-4}}{(n-4)!}\cdot 27450\Big(-(1-x^6)^3+3(1-x^6)^2 \\
& -3(1-x^6)+1\Big)+\frac{(1-x^6)^{n-3}}{(n-3)}\cdot 26325\Big(-(1-x^6)^2+2(1-x^6)-1\Big) \\
& \left.+\frac{(1-x^6)^{n-2}}{(n-2)!}\cdot 4610\Big(1-(1-x^6)\Big)+\frac{(1-x^6)^{n-1}}{(n-1)!}(-10)\right] \\
= {} & 72\left[-\frac{648}{(n-6)!}(1-x^6)^{n-1}+\frac{3240}{(n-6)!}(1-x^6)^{n-2}-\frac{6480}{(n-6)!}(1-x^6)^{n-3}\right. \\
& +\frac{6480}{(n-6)!}(1-x^6)^{n-4}-\frac{3240}{(n-6)!}(1-x^6)^{n-5}+\frac{648}{(n-6)!}(1-x^6)^{n-6} \\
& -\frac{8100}{(n-5)!}(1-x^6)^{n-1}+\frac{32400}{(n-5)!}(1-x^6)^{n-2}-\frac{48600}{(n-5)!}(1-x^6)^{n-3} \\
& +\frac{32400}{(n-5)!}(1-x^6)^{n-4}-\frac{8100}{(n-5)!}(1-x^6)^{n-5}-\frac{27450}{(n-4)!}(1-x^6)^{n-1} \\
& +\frac{82350}{(n-4)!}(1-x^6)^{n-2}-\frac{82350}{(n-4)!}(1-x^6)^{n-3}+\frac{27450}{(n-4)!}(1-x^6)^{n-4} \\
& -\frac{26325}{(n-3)!}(1-x^6)^{n-1}+\frac{52650}{(n-3)!}(1-x^6)^{n-2}-\frac{26325}{(n-3)!}(1-x^6)^{n-3} \\
& \left.-\frac{4610}{(n-2)!}(1-x^6)^{n-1}+\frac{4610}{(n-2)!}(1-x^6)^{n-2}-\frac{10}{(n-1)!}(1-x^6)^{n-1}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_n^{(6)}(x) = 72\Big[\Big\{ & -648(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \\
& -8100(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - 27450(n-1)(n-2)(n-3) \\
& -26325(n-1)(n-2) - 4610(n-1) - 10\Big\} f_{n-1}(x) \\
& + \Big\{3240(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + 32400(n-2)(n-3)(n-4) \\
& \quad + 82350(n-2)(n-3) + 52650(n-2) + 4610\Big\} f_{n-2}(x) \\
& + \Big\{ -6480(n-3)(n-4)(n-5) - 48600(n-3)(n-4) \\
& \quad - 82350(n-3) - 26325\Big\} f_{n-3}(x) \\
& + \Big\{6480(n-4)(n-5) + 32400(n-4) + 27450\Big\} f_{n-4}(x) \\
& + \Big\{ -3240(n-5) - 8100\Big\} f_{n-5}(x) + 648 f_{n-6}(x)\Big]
\end{aligned} \tag{6.32}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
& -648(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) - 8100(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \\
& -27450(n-1)(n-2)(n-3) - 26325(n-1)(n-2) - 4610(n-1) - 10 \\
& = -648(n^5 - 15n^4 + 85n^3 - 225n^2 + 274n - 120) - 8100(n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 50n + 24) \\
& -27450(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) - 26325(n^2 - 3n + 2) - 4610n + 4610 - 10 \\
& = (6n-5)(6n-1)(3n-2)(3n-1)(1-2n),
\end{aligned} \tag{6.33}
$$

$$
\begin{aligned}
& 3240(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + 32400(n-2)(n-3)(n-4) + 82350(n-2)(n-3) \\
& + 52650(n-2) + 4610 \\
& = 3240(n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120) + 32400(n^3 - 9n^2 + 26n - 24) \\
& + 82350(n^2 - 5n + 6) + 52650n - 105300 + 4610 \\
& = 3240n^4 - 12960n^3 + 20790n^2 - 15660n + 4610 \\
& = 10[324n^4 - 1296n^3 + 2079n^2 - 1566n + 461],
\end{aligned} \tag{6.34}
$$

$$
\begin{aligned}
& -6480(n-3)(n-4)(n-5) - 48600(n-3)(n-4) - 82350(n-3) - 26325 \\
& = -6480(n^3 - 12n^2 + 47n - 60) - 48600(n^2 - 7n + 12) - 82350n + 247050 - 26325 \\
& = -6480n^3 + 29160n^2 - 46710n + 26325 \\
& = 135[-48n^3 + 216n^2 - 346n + 195],
\end{aligned} \tag{6.35}
$$

$$
\begin{aligned}
&6480(n-4)(n-5)+32400(n-4)+27450\\
&=6480(n^2-9n+45)+32400n-129600+27450\\
&=6480n^2-25920n+27450\\
&=90[72n^2-288n+305],
\end{aligned}
\tag{6.36}
$$

$$
-3240(n-5)-8100=-3240n+8100=-1620(2n-5). \tag{6.37}
$$

Assim, substituindo (6.33), (6.34), (6.35), (6.36) e (6.37) em (6.32) obtemos (6.26).

Afirmação 6.8 Tem-se

$$
\begin{aligned}
g_k(x)=\frac{1}{a^k}\Bigg(&e^{a(x-1)}+(-1)^{k-1}e^{-a(x-1)}+\left(\frac{1}{r}\right)^{k-1}e^{ar(x-1)}+\left(-\frac{1}{r}\right)^{k-1}e^{-ar(x-1)}\\
&+\left(\frac{1}{\overline{r}}\right)^{k-1}e^{a\overline{r}(x-1)}+\left(-\frac{1}{\overline{r}}\right)^{k-1}e^{-a\overline{r}(x-1)}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

onde

$$
g_k(x)=\int g_{k-1}(x)dx,\ k=1,2,3,\ldots \text{(sem considerar constantes).}
$$

De fato, a prova segue por indução sobre k.

Para $k=1$, tem-se

$$
\begin{aligned}
g_1(x)&=\int g_0(x)dx\\
&=\int\left[e^{a(x-1)}-e^{-a(x-1)}+re^{ar(x-1)}-re^{-ar(x-1)}+\overline{r}e^{a\overline{r}(x-1)}-\overline{r}e^{-a\overline{r}(x-1)}\right]dx\\
&=\frac{e^{a(x-1)}}{a}-\frac{e^{-a(x-1)}}{-a}+\frac{re^{ar(x-1)}}{ar}-\frac{re^{-ar(x-1)}}{-ar}+\frac{\overline{r}e^{a\overline{r}(x-1)}}{a\overline{r}}-\frac{\overline{r}e^{-a\overline{r}(x-1)}}{-a\overline{r}}\\
&=\frac{1}{a}\Big(e^{a(x-1)}+e^{-a(x-1)}+e^{ar(x-1)}+e^{-ar(x-1)}+e^{a\overline{r}(x-1)}+e^{-a\overline{r}(x-1)}\Big)
\end{aligned}
$$

verifica a equação (6.38). Suponhamos que equação (6.38) seja valida para k. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
g_{k+1}(x)&=\int g_k(x)dx\\
&=\int\frac{1}{a^k}\Bigg(e^{a(x-1)}+(-1)^{k-1}e^{-a(x-1)}+\left(\frac{1}{r}\right)^{k-1}e^{ar(x-1)}+\left(-\frac{1}{r}\right)^{k-1}e^{-ar(x-1)}\\
&\qquad+\left(\frac{1}{\overline{r}}\right)^{k-1}e^{a\overline{r}(x-1)}+\left(-\frac{1}{\overline{r}}\right)^{k-1}e^{-a\overline{r}(x-1)}\Bigg)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{k+1}(x) &= \frac{1}{a^k}\left[\frac{e^{a(x-1)}}{a} + \frac{(-1)^{k-1}e^{-a(x-1)}}{-a} + \left(\frac{1}{r}\right)^{k-1}\frac{e^{ar(x-1)}}{ar} + \left(-\frac{1}{r}\right)^{k-1}\frac{e^{-ar(x-1)}}{-ar}\right.\\
&\qquad \left. + \left(\frac{1}{\overline{r}}\right)^{k-1}\frac{e^{a\overline{r}(x-1)}}{a\overline{r}} + \left(-\frac{1}{\overline{r}}\right)^{k-1}\frac{e^{-a\overline{r}(x-1)}}{-a\overline{r}}\right]\\
&= \frac{1}{a^{k+1}}\left[e^{a(x-1)} + (-1)^k e^{-a(x-1)} + \left(\frac{1}{r}\right)^{k} e^{ar(x-1)} + \left(-\frac{1}{r}\right)^{k} e^{-ar(x-1)}\right.\\
&\qquad \left. + \left(\frac{1}{\overline{r}}\right)^{k} e^{a\overline{r}(x-1)} + \left(-\frac{1}{\overline{r}}\right)^{k} e^{-a\overline{r}(x-1)}\right]
\end{aligned}
$$

satisfaz a equação (6.38) para $k+1$.

Por outro lado, por (6.38) e (6.23), temos

$$
\begin{aligned}
g_6(x) &= \frac{1}{a^6}\left(e^{a(x-1)} + (-1)^5 e^{-a(x-1)} + \left(\frac{1}{r}\right)^{5} e^{ar(x-1)} + \left(-\frac{1}{r}\right)^{5} e^{-ar(x-1)}\right.\\
&\qquad \left. + \left(\frac{1}{\overline{r}}\right)^{5} e^{a\overline{r}(x-1)} + \left(-\frac{1}{\overline{r}}\right)^{5} e^{-a\overline{r}(x-1)}\right)\\
&= \frac{1}{a^6}\Big(e^{a(x-1)} - e^{-a(x-1)} + re^{ar(x-1)} - re^{-ar(x-1)} + \overline{r}e^{a\overline{r}(x-1)} - \overline{r}e^{-a\overline{r}(x-1)}\Big)\\
&= \frac{g_0(x)}{a^6}. \qquad (6.39)
\end{aligned}
$$

Note também que $g_1(1) = \frac{6}{a}$ e $g_1(0) = -\frac{2}{a}$.

Afirmação 6.9 Para $n \geq 6$ tem-se

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{2}{(n!)a} + \frac{72}{a^6}\Big((6n-5)(6n-1)(3n-2)(3n-1)(1-2n)I_{n-1}\\
&\quad + 10(324n^4 - 1296n^3 + 2079n^2 - 1566n + 461)I_{n-2}\\
&\quad - 135(48n^3 - 216n^2 + 346n - 195)I_{n-3} + 90(72n^2 - 288n + 305)I_{n-4}\\
&\qquad - 1620(2n-5)I_{n-5} + 648I_{n-6}\Big). \qquad (6.40)
\end{aligned}
$$

De fato, basta fazer seis vezes integração por partes, temos

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 f_n(x)g_0(x)dx\\
&= \underbrace{\Big[f_n(x)g_1(x)\Big]_0^1}_{-\frac{g_1(0)}{n!}} - \int_0^1 f_n'(x)g_1(x)dx \text{ (pois } f_n(1) = 0 \text{ e } f_n(0) = \frac{1}{n!})\\
&= -\frac{g_1(0)}{n!} - \underbrace{\Big[f_n'(x)g_2(x)\Big]_0^1}_{0} + \int_0^1 f_n''(x)g_2(x)dx \text{ (pois } f_n'(1) = f_n'(0) = 0 \text{ para } n \geq 6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_n &= -\frac{g_1(0)}{n!} + \underbrace{\Big[f_n''(x)g_3(x)\Big]_0^1}_{0} - \int_0^1 f_n'''(x)g_3(x)dx \text{ (pois } f_n''(1) = f_n''(0) = 0 \text{ para } n \geq 6) \\
&= -\frac{g_1(0)}{n!} - \underbrace{\Big[f_n'''(x)g_4(x)\Big]_0^1}_{0} + \int_0^1 f_n^{(4)}(x)g_4(x)dx \text{ (pois } f_n'''(1) = f_n'''(0) = 0 \text{ para } n \geq 6) \\
&= -\frac{g_1(0)}{n!} + \underbrace{\Big[f_n^{(4)}(x)g_5(x)\Big]_0^1}_{0} - \int_0^1 f_n^{(5)}(x)g_5(x)dx \text{ (pois } f_n^{(4)}(1) = f_n^{(4)}(0) = 0 \text{ para } n \geq 6) \\
&= -\frac{g_1(0)}{n!} - \underbrace{\Big[f_n^{(5)}(x)g_6(x)\Big]_0^1}_{0} + \int_0^1 f_n^{(6)}(x)g_6(x)dx \text{ (pois } f_n^{(5)}(1) = f_n^{(5)}(0) = 0 \text{ para } n \geq 6) \\
&= -\frac{g_1(0)}{n!} + \int_0^1 f_n^{(6)}(x)g_6(x)dx. \qquad (6.41)
\end{aligned}
$$

Substituindo (6.39) em (6.41) obtemos

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{2}{(n!)a} + \frac{1}{a^6}\int_0^1 f_n^{(6)}(x)g_0(x)dx \\
&= \frac{2}{(n!)a} + \frac{72}{a^6}\int_0^1 \Big((6n-5)(6n-1)(3n-2)(3n-1)(1-2n)f_{n-1}(x) \\
&\qquad + 10\left(324n^4 - 1296n^3 + 2079n^2 - 1566n + 461\right) f_{n-2}(x) \\
&\qquad + 135(-48n^3 + 216n^2 - 346n + 195)f_{(n-3)}(x) \\
&\qquad + 90(72n^2 - 288n + 305)f_{n-4}(x) \\
&\qquad - 1620(2n-5)f_{n-5}(x) + 648f_{n-6}(x)\Big)g_0(x)dx \\
&= \frac{2}{(n!)a} + \frac{72}{a^6}\Big((6n-5)(6n-1)(3n-2)(3n-1)(1-2n)\int_0^1 f_{n-1}(x)g_0(x)dx \\
&\qquad + 10\left(324n^4 - 1296n^3 + 2079n^2 - 1566n + 461\right)\int_0^1 f_{n-2}(x)g_0(x)dx \\
&\qquad + 135(-48n^3 + 216n^2 - 346n + 195)\int_0^1 f_{(n-3)}(x)g_0(x)dx \\
&\qquad + 90(72n^2 - 288n + 305)\int_0^1 f_{n-4}(x)g_0(x)dx \\
&\qquad - 1620(2n-5)\int_0^1 f_{n-5}(x)g_0(x)dx + 648\int_0^1 f_{n-6}(x)g_0(x)dx\Big)
\end{aligned}
$$

o que verifica a equação (6.40).

Com o intuito de eliminar o termo $\frac{2}{(n!)a}$ definamos

$$J_n = (n+1)I_{n+1} - I_n. \qquad (6.42)$$

Afirmação 6.10 Para $n \geq 6$ tem-se

$$J_n = \frac{72}{a^6}\Big(A_nJ_{n-1} + B_nJ_{n-2} + C_nJ_{n-3} + D_nJ_{n-4} + E_nJ_{n-5} + 648J_{n-6}\Big), \qquad (6.43)$$

onde

$$A_n = -648n^5 - 1620n^4 - 9630n^3 + 20475n^2 - 33212n + 15405,$$

$$B_n = 5(648n^4 + 648n^3 - 702n^2 + 3528n - 3083),$$

$$C_n = -45(144n^3 - 144n^2 + 210n - 197), \qquad D_n = 90(72n^2 - 108n + 35),$$

$$E_n = -1620(2n - 3).$$

Para $n \geq 6$, por (6.40) e (6.42), tem-se

$$\begin{aligned}
J_n = (n+1)\Bigg[&\frac{2}{((n+1)!)a} + \frac{72}{a^6}\Big((6n+5)(6n+1)(3n+2)(3n+1)(-1-2n)I_n \\
&+ 10(324n^4 + 135n^2 + 2)I_{n-1} - 135(48n^3 - 72n^2 + 58n - 17)I_{n-2} \\
&+ 90(72n^2 - 144n + 89)I_{n-3} - 1620(2n-3)I_{n-4} + 648I_{n-5}\Big)\Bigg] \\
&- \frac{2}{(n!)a} - \frac{72}{a^6}\Big((6n-5)(6n-1)(3n-2)(3n-1)(1-2n)I_{n-1} \\
&+ 10(324n^4 - 1296n^3 + 2079n^2 - 1566n + 461)I_{n-2} - 135(48n^3 - 216n^2 + 346n - 195)I_{n-3} \\
&+ 90(72n^2 - 288n + 305)I_{n-4} - 1620(2n-5)I_{n-5} + 648I_{n-6}\Big) \\
&= \frac{72}{a^6}\Big([-648n^6 - 2268n^5 - 3150n^4 - 2205n^3 - 812n^2 - 147n - 10]I_n \\
&+ [3888n^5 + 1620n^4 + 2880n^3 + 675n^2 + 157n + 10]I_{n-1} \\
&+ [-9720n^4 + 16200n^3 - 18900n^2 + 10125n - 2315]I_{n-2} \\
&+ [12960n^3 - 35640n^2 + 41760n - 18315]I_{n-3} + [-9720n^2 + 27540n - 22590]I_{n-4} \\
&+ [3888n - 7452]I_{n-5} - 648I_{n-6}\Big) \\
&= \frac{72}{a^6}\Big([-648n^6 - 2268n^5 - 3150n^4 - 2205n^3 - 812n^2 - 147n - 10]I_n \\
&+ [3888n^5 + 1620n^4 + 2880n^3 + 675n^2 + 157n + 10]I_{n-1} \\
&+ [-9720n^4 + 16200n^3 - 18900n^2 + 10125n - 2315]I_{n-2} \\
&+ [12960n^3 - 35640n^2 + 41760n - 18315]I_{n-3} + [-9720n^2 + 27540n - 22590]I_{n-4} \\
&+ [3240n - 4212]I_{n-5} + 648((n-5)I_{n-5} - I_{n-6})\Big) \\
&= \frac{72}{a^6}\Big([-648n^6 - 2268n^5 - 3150n^4 - 2205n^3 - 812n^2 - 147n - 10]I_n \\
&+ [3888n^5 + 1620n^4 + 2880n^3 + 675n^2 + 157n + 10]I_{n-1} \\
&+ [-9720n^4 + 16200n^3 - 18900n^2 + 10125n - 2315]I_{n-2} \\
&+ [12960n^3 - 35640n^2 + 41760n - 18315]I_{n-3} + [-6480n^2 + 10368n - 5742]I_{n-4} \\
&- [3240n - 4212]((n-4)I_{n-4} - I_{n-5}) + 648J_{n-6}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_n = \frac{72}{a^6}\Big([&-648n^6 - 2268n^5 - 3150n^4 - 2205n^3 - 812n^2 - 147n - 10]I_n \\
&+ [3888n^5 + 1620n^4 + 2880n^3 + 675n^2 + 157n + 10]I_{n-1} \\
&+ [-9720n^4 + 16200n^3 - 18900n^2 + 10125n - 2315]I_{n-2} \\
&+ [6480n^3 - 5832n^2 + 4914n - 1089]I_{n-3} \\
&+ [6480n^2 - 10368n + 5742]((n-3)I_{n-3} - I_{n-4}) - [3240n - 4212]J_{n-5} + 648J_{n-6}\Big) \\
= \frac{72}{a^6}\Big([&-648n^6 - 2268n^5 - 3150n^4 - 2205n^3 - 812n^2 - 147n - 10]I_n \\
&+ [3888n^5 + 1620n^4 + 2880n^3 + 675n^2 + 157n + 10]I_{n-1} \\
&+ [-3240n^4 - 2592n^3 - 2322n^2 - 792n - 137]I_{n-2} \\
&- [6480n^3 - 5832n^2 + 4914n - 1089]((n-2)I_{n-2} - I_{n-3}) \\
&+ [6480n^2 - 10368n + 5742]J_{n-4} - [3240n - 4212]J_{n-5} + 648J_{n-6}\Big) \\
= \frac{72}{a^6}\Big([&-648n^6 - 2268n^5 - 3150n^4 - 2205n^3 - 812n^2 - 147n - 10]I_n \\
&+ [648n^5 + 2268n^4 + 3150n^3 + 2205n^2 + 812n + 147]I_{n-1} \\
&- [-3240n^4 - 2592n^3 - 2322n^2 - 792n - 137]((n-1)I_{n-1} - I_{n-2}) \\
&- [6480n^3 - 5832n^2 + 4914n - 1089]J_{n-3} \\
&+ [6480n^2 - 10368n + 5742]J_{n-4} - [3240n - 4212]J_{n-5} + 648J_{n-6}\Big) \\
= \frac{72}{a^6}\Big(&- 10I_n \\
&- [648n^5 + 2268n^4 + 3150n^3 + 2205n^2 + 812n + 147](nI_n - I_{n-1}) \\
&- [-3240n^4 - 2592n^3 - 2322n^2 - 792n - 137]J_{n-2} \\
&- [6480n^3 - 5832n^2 + 4914n - 1089]J_{n-3} \\
&+ [6480n^2 - 10368n + 5742]J_{n-4} - [3240n - 4212]J_{n-5} + 648J_{n-6}\Big) \\
= \frac{72}{a^6}\Big(&- 10I_n - [648n^5 + 2268n^4 + 3150n^3 + 2205n^2 + 812n + 147]J_{n-1} \\
&+ [3240n^4 + 2592n^3 + 2322n^2 + 792n + 137]J_{n-2} \\
&- [6480n^3 - 5832n^2 + 4914n - 1089]J_{n-3} \\
&+ [6480n^2 - 10368n + 5742]J_{n-4} - [3240n - 4212]J_{n-5} + 648J_{n-6}\Big).
\end{aligned}
$$

Após a execução dos passos de substituição e reagrupamento dos termos I_k em J_n, observa-se que o coeficiente que acompanha o termo I_n não se anula. O valor deste coeficiente é -10. Este resultado, obtido por cálculos manuais e verificado computacio-

nalmente no Maple, contradiz a forma da Equação (6) apresentada em (YEGAN, 2017), a qual é uma recorrência puramente em termos de J_k, sem a presença explícita de I_k.

É crucial destacar que, enquanto todas as etapas das nossas próprias derivações foram consistentemente verificadas no Maple, a tentativa de obter a Equação (6) tal como apresentada por Yegan (2017) a partir das suas equações precedentes (4) e (5) não foi bem-sucedida no ambiente computacional. A persistência do termo I_n e a não coincidência dos coeficientes dos demais J_k (quando comparados com A_n, $B_n, \cdots, E_n$ do artigo) indicam que a Equação (6) não pode ser derivada diretamente das Equações (4) e (5) de Yegan (2017) conforme definidas, ou que a derivação requer passos ou identidades adicionais não explicitados e de difícil replicação.

Esta descoberta representa uma inconsistência na prova da irracionalidade de π^6 apresentada por Yegan (2017), tornando essa parte específica da demonstração não replicável sob as condições e equações fornecidas no artigo. A natureza exata dessa discrepância e suas implicações para a validade da prova de π^6 requerem investigação aprofundada, sendo um tópico relevante para futuros trabalhos de pesquisa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho de conclusão de curso, embarcamos em uma jornada pela natureza intrínseca do número π, desvendando suas propriedades de irracionalidade e transcendência. O problema de pesquisa inicial, que buscava encontrar e analisar demonstrações da irracionalidade e transcendência de π e compreender o impacto dessas demonstrações na matemática, foi amplamente abordado. A hipótese de que seria possível verificar essas demonstrações, contribuindo para o avanço do conhecimento, foi confirmada em sua maior parte.

No Capítulo 2, estabelecemos os fundamentos teóricos essenciais em Cálculo Real e Complexo, e Teoria dos Números, fornecendo a base para as complexas provas que se seguiram. As seções sobre funções, derivadas, integrais, séries e sequências, juntamente com os conceitos de números complexos e funções analíticas, e a teoria dos números (incluindo aritmética, números racionais/irracionais, algébricos/transcendentes, e os Princípios da Boa Ordenação e Indução), garantiram a autonomia conceitual necessária.

O Capítulo 3, dedicado ao Panorama Histórico do Número π, ilustrou a fascinante trajetória dessa constante através dos séculos, desde os métodos geométricos de Arquimedes até as representações analíticas da análise moderna, ressaltando a permanência e a evolução de π no pensamento matemático.

O Capítulo 4 aprofundou-se na irracionalidade de π, apresentando as elegantes e distintas demonstrações de Ivan Niven e Cartwright. Ambas as provas ilustraram a impossibilidade de expressar π como uma fração exata de dois inteiros, utilizando abordagens que variam desde a construção de funções auxiliares até a manipulação de integrais, consolidando a compreensão de sua natureza.

No Capítulo 5, exploramos a transcendência de π, uma propriedade ainda mais fundamental que implica que π não pode ser raiz de nenhum polinômio não trivial com coeficientes inteiros. As demonstrações de Robert E. Moritz e Ivan Niven, baseadas em conceitos de funções complexas e polinômios simétricos, foram analisadas, culminando na compreensão das profundas implicações desse resultado, dentre as quais se destaca a impossibilidade da quadratura do círculo, um problema clássico da geometria.

Finalmente, no Capítulo 6, estendemos nossa investigação para a irracionalidade de potências de π, focando na demonstração da irracionalidade de π^4 proposta por Mohammad Reza Yegan. Esta prova, que emprega identidades integrais de Hermite, demonstrou como a mesma técnica pode ser aplicada a potências superiores de π. É importante ressaltar que, durante a análise detalhada da demonstração de Yegan para a irracionalidade de π^6 (Teorema 2 do artigo), foram identificadas inconsistências críticas na derivação de uma de suas relações de recorrência principais (Equação (6) no artigo). A expansão da definição de J_n a partir da recorrência de I_n resultou em termos residuais que não se anulam, contrariando a forma homogênea da Equação (6) apresentada pelo autor. Esta discrepância foi verificada tanto por cálculos manuais quanto por rigorosos métodos computacionais via Maple, conforme detalhado na Seção 6.1. Essa descoberta, embora desafiadora, realça a importância da verificação rigorosa em pesquisa matemática e reforça a natureza dinâmica do conhecimento científico, onde mesmo resultados publicados podem ser questionados e aprimorados.

Como trabalho futuro, propõe-se uma investigação aprofundada e colaborativa sobre a discrepância encontrada na prova de Yegan para π^6. Isso poderia incluir a busca por uma correção ou generalização da derivação da Equação (6), a identificação de uma abordagem alternativa para a irracionalidade de π^6, ou até mesmo a proposição de uma nova demonstração para este resultado. Além disso, a exploração de outras constantes matemáticas e suas propriedades de irracionalidade e transcendência, bem como a aplicação dessas técnicas em outros campos da matemática e da física, representa um fértil terreno para futuras pesquisas, contribuindo para o avanço da teoria dos números e da análise matemática.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. ***Variáveis complexas e aplicações.*** 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

BLUM-SMITH, B.; COSKEY, S. The fundamental theorem on symmetric polynomials: History's first whiff of galois theory. ***The College Mathematics Journal***, v. 48, n. 1, p. 18–29, 2017.

BORWEIN, J. M.; CHAPMAN, S. T. I prefer pi: A brief history and anthology of articles in the american mathematical monthly. ***Amer. Math. Monthly***, v. 122, n. 3, 2015.

COELHO, C. P. M. S. P. ***Números, Uma Introdução à Matemática***. 3. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

FERNANDEZ, C. S.; BERNARDES, N. C. ***Introdução às funções de uma variável complexa***. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

FIGUEIREDO, D. G. d. ***Números Irracionais e Transcendentes.*** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

GONÇALVEZ, A. ***Introdução à Álgebra***. 5. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2013.

GUIDORIZZI, H. L. ***Um curso de cálculo: volume 1***. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

GUIDORIZZI, H. L. ***Um curso de cálculo: volume 2***. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

GUIDORIZZI, H. L. ***Um curso de cálculo: volume 4***. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2023.

HERMITE, C. ***Sur la fonction exponentielle.*** 1. ed. Paris: Gauthier-Villars, 1874.

JEFFREYS, H. ***Scientific Inference***. 3rd. ed. Great Britain: Cambridge University Press, 1973.

LAMBERT, J. Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. ***Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin***, v. 17, p. 265–276, 1761.

LIMA, E. L. ***Análise Real***. 12. ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2018.

LINDEMANN, F. Über die Zahl Pi. ***Math. Ann.***, v. 20, p. 213–225, 1882.

MOREIRA, C. N.; CABRAL, M. A. P. ***Curso de Análise Real***. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Instituto de Matemática, 2021.

NETO, A. L. ***Funções de uma variável complexa.*** 2. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2008.

NIVEN, I. The transcendence of π. ***Amer. Math. Monthly***, v. 46, n. 8, p. 469–471, 1939.

NIVEN, I. M. A simple proof that π is irrational. ***Bulletin of the American Mathematical Society***, v. 53, n. 6, p. 509, 1947.

SPIVAK, M. ***Calculus***. 3rd. ed. Texas: Publish or Perish, 1980.

SPIVEY, M. Z. ***The art of proving binomial identities.*** 1. ed. Boca Raton: Discrete Mathematics and its Applications, CRC Press, 2019.

THOMAS, J. G. B.; FINNEY, R. L. ***Calculus and Analytic Geometry***. 9th. ed. New York: Addison-Wesley, 1996.

YEGAN, M. R. On the irrationality of π^4 and π^6. ***J. Number Theory***, v. 178, p. 5–10, 2017.