

**EXATAS E DA TERRA**

# O TEOREMA DE WEIERSTRASS SOBRE APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS POR POLINÔMIOS

**LINHARES, Yasmine Fialho.**

Estudante do Curso de Engenharia de Energias Renováveis – ILATIT – UNILA;

E-mail: [yasmine.linhares@aluno.unila.edu.br](mailto:yasmine.linhares@aluno.unila.edu.br);

**MAURO, Patricia Couto Gonçalves**

Docente/pesquisador do curso de Licenciatura em Matemática – ILACVN – UNILA.

E-mail: [patricia.mauro@unila.edu.br](mailto:patricia.mauro@unila.edu.br).

## 1 Introdução

O teorema de Weierstrass afirma que toda função real contínua definida em um intervalo  $[a,b]$  de  $\mathbb{R}$  pode ser aproximada uniformemente em  $[a,b]$  por uma sequência de polinômios. Em outras palavras, dada uma função contínua  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $r > 0$  qualquer, existe um polinômio  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f(x) - p(x)| < r$ , para todo  $x$  em  $[a,b]$ ; isto significa que, para  $r > 0$  tão pequeno quanto queiramos, o valor de  $f(x)$  pode ser calculado aproximadamente pelo valor de  $p(x)$  com erro menor do que  $r$ , independentemente de  $x$  em  $[a,b]$ . Como polinômios são funções simples que podem ser facilmente calculadas por computadores, este teorema tem tanto relevância teórica como prática.

Para chegar à compreensão do enunciado deste teorema e de sua demonstração, é preciso estudar alguns conceitos matemáticos ligados a funções e sequências de funções. Existem diversas versões de demonstração deste teorema, algumas construtivas e outras mais teóricas. As construtivas permitem obter uma sequência concreta de polinômios que pode ser utilizada até mesmo na implementação de programas de computador para aproximação.

## 2 Metodologia

O trabalho foi realizado da seguinte maneira: foram feitos encontros semanais onde a discente podia tirar dúvidas sobre o objeto de estudo da semana. Posteriormente passamos também a fazer encontros em forma de seminário onde a discente expunha no quadro em formato de apresentação cada passo do teorema estudado.

### 3 Fundamentação teórica

Funções aparecem em todo problema de modelagem matemática; normalmente, devido a complexidade do problema que se está estudando, estas funções são difíceis de trabalhar. Por outro lado, as funções polinomiais são um tipo simples de função e computadores podem efetuar cálculos com elas facilmente. O teorema principal que foi estudado neste projeto diz que toda função contínua pode ser aproximada por um polinômio (fixado um erro). Assim, do ponto de vista prático, estudar este teorema trouxe ferramentas para melhorar a implementação de programas de modelagem matemática. Do ponto de vista teórico, este é um teorema fundamental no estudo de aproximação de funções em contextos mais gerais.

A principal bibliografia usada neste projeto está descrita a seguir.

- 1) BARTLE, Robert G. *The elements of real analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 1976.
- 2) DAVIDSON, K.; DONSIG, A. *Real analysis with real applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J., 2002.
- 3) NERI, Cássio. *Curso de Análise Real*. Editora da UFRJ. 2011.
- 4) RUDIN, Walter. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, 1976.
- 5) STONE, M. H. Applications of the theory of boolean rings to general topology. *Translations of the American Mathematical Society* **41** (3): 375-481, 1937.
- 6) STONE, M. H. The generalized Weierstrass approximation theorem. *Mathematics Magazine* **21** (21): 167-184 and **21** (5): 237-254, 1948.
- 7) WEIERSTRASS, K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1885 (11).

### 4 Resultados

Pudemos compreender como é possível aproximar uma função contínua por uma sequência de polinômios. A discente conseguiu compreender todos os passos para o entendimento do teorema principal e ainda implementou este resultado para algumas funções simples.

### 5 Conclusões

Com este trabalho a discente compreendeu que fazer uma demonstração matemática é uma tarefa bem difícil e requer um estudo sistemático de vários conceitos e muita maturidade para a compreensão de cada passo. Além disso os seminários foram muito interessantes como forma de praticar apresentações perante uma banca, o que é muito importante para o seu crescimento profissional.

## **6 Principais referências bibliográficas**

- 1) BARTLE, Robert G. *The elements of real analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 1976.
- 2) NERI, Cássio. *Curso de Análise Real*. Editora da UFRJ. 2011.
- 3) RUDIN, Walter. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, 1976.
- 4) WEIERSTRASS, K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1885 (11).