



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Raphael Fortes Infante Gomes

Teletransporte Quântico na Presença de Ruído

São Carlos
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Raphael Fortes Infante Gomes

Teletransporte Quântico na Presença de Ruído

Esta tese contém as correções e alterações
sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa
realizada por Raphael Fortes Infante Gomes em 01/04/2016.

Universidade Federal de São Carlos.

Departamento de Física.

Área de Concentração: Física Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin.

São Carlos

2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G633t Gomes, Raphael Fortes Infante
 Teletransporte quântico na presença de ruído /
Raphael Fortes Infante Gomes. -- São Carlos :
UFSCar, 2016.
 155 p.

 Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2016.

 1. Teletransporte quântico. 2. Informação quântica.
3. Emaranhamento. 4. Decoerência. I. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Física

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado do candidato Raphael Fortes Infante Gomes, realizada em 01/04/2016:

Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin
UFSCar

Prof. Dr. Celso Jorge Villas Boas
UFSCar

Prof. Dr. Alex Eduardo de Bernardini
UFSCar

Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussa
USP

Prof. Dr. Marcos Cesár de Oliveira
UNICAMP

Agradecimentos

Agradeço de coração aos meus pais, Regina e Ricardo, e ao meu irmão, Bernardo, pelo carinho, solidariedade, compreensão, pelo apoio incondicional em todos os momentos, e, novamente, por me fazerem acreditar que sonhos são possíveis. Sem eles, este trabalho também não existiria.

Ao professor Gustavo Garcia Rigolin, pela oportunidade de desenvolver este trabalho, pelo conhecimento transmitido e pelo investimento na minha formação intelectual e profissional durante os últimos anos.

Ao amigo Alexandre Cury, não só pelo auxílio imediato com todas as questões técnicas mas principalmente pela amizade, motivação e pelos conselhos valiosos.

Aos amigos Leonardo Guimarães, Thiago Freire, Leonardo Rosa, Marcelo Sirimarco, Matheus Piva, Flávio Lazzarotto, Diego Martins, Luís Fernando Magnanini, Rafael Salla, Richard Neil, Marcelo Leite, Bruno Grüninger, Vivaldo Lopes, Jaldair Nóbrega, Fernando de Souza e Emanuel Diniz, pela amizade verdadeira, pela ajuda com questões relevantes e pelo suporte em momentos difíceis.

Aos familiares, pelo incentivo, pela união e pela sensação de proximidade mesmo em grandes distâncias.

Aos amigos David Tanganelli, Fabiano Nunes, André de Souza e Paulo Carvalho, pela amizade, pelos ensinamentos, pelo entusiasmo e por momentos de alegria inesquecíveis.

À Bianca Rantin, pelo carinho, incentivo, pela compreensão em momentos cruciais e pelo suporte constante ao longo dos últimos meses.

Aos professores Gilmar Eugênio Marques, Celso Villas-Bôas e Fernando M. Araujo-Moreira, pela inspiração como excelentes professores, pela amizade e pelo apoio correspondido em todos os momentos requisitados.

Aos professores João Chafi, João Batista de Oliveira, Luiz Henrique Barbosa, José Carlos Grizendi, Nelson Ragazzi, Nilciléa Peixoto, Carlos Eduardo Noguères e Fabrício, pela motivação e inspiração atribuídas no início desta jornada.

Aos entes queridos que não estão mais conosco e que participaram desta história.

Aos amigos, professores e colegas na Universidade que não tiveram seus nomes citados.

E à Capes, pelo auxílio financeiro durante os quatro anos de doutorado.

A imaginação é mais importante do que o conhecimento.
(Albert Einstein)

Resumo

O foco do presente trabalho consiste em explorar a viabilidade de se realizar o teletransporte de estados quânticos arbitrários em cenários onde a presença de um ambiente externo reduz a pureza do estado de entrada e do canal de transmissão de informação. Para investigar o comportamento destes protocolos em condições realistas, selecionamos os principais mapas de decoerência registrados na literatura relativos à descrição deste fenômeno, incluindo a representação de estados mistos através dos operadores de Kraus e de sistemas em equilíbrio térmico cujo Hamiltoniano é descrito pelo modelo de Heisenberg. Neste contexto, provamos que existem casos nos quais a influência de fatores externos (como o aumento da temperatura e das taxas de decoerência) e a imersão de *qubits* em ambientes distintos contribui para aumentar a semelhança entre as propriedades da informação original e as do estado teletransportado. Além disso, estudamos o método de teletransporte probabilístico sob a influência dos mesmos tipos de ruídos analisados para o protocolo determinístico, e os resultados aqui apresentados demonstram que o primeiro processo é capaz de aumentar ainda mais o valor esperado da fidelidade média do estado teletransportado.

Palavras-chave: Teletransporte Quântico. Informação Quântica. Emaranhamento. Decoerência.

Abstract

The main focus of this work is to explore the feasibility of conducting the teleportation protocol in scenarios where the presence of an external environment reduces the purity of the input state and the transmission channel. To investigate the behavior of these protocols under realistic conditions, we selected the main decoherence maps reported in the literature concerning the description of this phenomenon, including the representation of mixed states through the Kraus operators and systems in thermal equilibrium whose Hamiltonian is described by the Heisenberg model. In this context, we proved that there are cases in which the influence of external factors (such as increasing temperature and decoherence rates) and the immersion of those qubits in distinct environments help increasing the similarity between the properties of the original information and the teleported state. In addition, we studied the probabilistic teleportation protocol under the influence of the same noise conditions analysed for the deterministic protocol, and the results here obtained show that the first process can outperform the expected value of the average fidelity of the teleported state.

Keywords: Quantum Teleportation. Quantum Information. Entanglement. Decoherence.

Sumário

| | |
|--|--------------|
| Lista de Figuras | xiii |
| Lista de Tabelas | xxiii |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Considerações Preliminares | 2 |
| 1.2 Objetivos | 2 |
| 1.3 Contribuições | 3 |
| 1.4 Organização do Trabalho | 3 |
| 2 Fundamentos de Informação Quântica | 5 |
| 2.1 Qubits e Sistemas de Dois Níveis | 5 |
| 2.2 O Operador Densidade | 8 |
| 2.2.1 O Operador Densidade para um Qubit | 12 |
| 2.2.2 O Operador Densidade para Sistemas Compostos | 14 |
| 2.3 A Decomposição de Schmidt | 16 |
| 2.4 Purificação | 21 |
| 2.5 Os Operadores de Kraus | 23 |
| 2.6 Entropia | 28 |
| 2.6.1 A Entropia de Shannon | 29 |
| 2.6.2 A Entropia de Von Neumann | 32 |
| 2.7 Concentração de Emaranhamento | 35 |
| 2.8 Separabilidade | 38 |
| 2.9 Decoerência | 40 |
| 2.9.1 Inversão de Bit | 47 |
| 2.9.2 Inversão de Fase | 49 |
| 2.9.3 Inversão de Bit e Fase | 50 |
| 2.9.4 Despolarização | 51 |
| 2.9.5 Atenuação de Fase | 52 |
| 2.9.6 Atenuação de Amplitude | 55 |
| 2.10 Redução de Emaranhamento | 57 |
| 2.11 Mecânica Estatística | 58 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.12 | O Gato de Schrödinger | 61 |
| 3 | Teletransporte Quântico Direto | 63 |
| 3.1 | Teletransporte de Estados Arbitrários através de Canais Puros | 63 |
| 3.1.1 | O Protocolo Original | 63 |
| 3.2 | Teletransporte de Estados Arbitrários através de Canais Mistos | 67 |
| 3.2.1 | O Modelo Geral | 67 |
| 3.2.2 | Canais Mistos com Decoerência Homogênea | 72 |
| 3.2.3 | Canais Mistos com Decoerência Heterogênea | 80 |
| 3.3 | Análise do Valor Esperado da Fidelidade Média Total | 80 |
| 3.3.1 | Entrada Pura em Canais com Decoerência Homogênea | 80 |
| 3.3.2 | Entrada Mista em Canais com Decoerência Homogênea | 88 |
| 3.3.3 | Entrada Pura em Canais com Decoerência Heterogênea | 92 |
| 3.3.4 | Entrada Mista em Canais com Decoerência Heterogênea | 94 |
| 4 | Teletransporte Quântico Condicional | 97 |
| 4.1 | Entrada Pura em Canais com Decoerência Homogênea e Heterogênea | 99 |
| 4.2 | Entrada Mista em Canais com Decoerência Homogênea e Heterogênea | 105 |
| 5 | Teletransporte Quântico em Cadeias de Spin | 111 |
| 5.1 | Teletransporte Direto | 113 |
| 5.1.1 | O Modelo XY | 113 |
| 5.1.2 | O Modelo XXZ | 120 |
| 5.2 | Teletransporte Condicional | 125 |
| 5.2.1 | O Modelo XYZ | 125 |
| 6 | Conclusões | 127 |
| A | Vetores, Operadores e Matrizes | 131 |
| A.1 | Vetores | 131 |
| A.1.1 | Introdução | 131 |
| A.1.2 | Independência Linear | 131 |
| A.1.3 | O Produto Escalar | 132 |
| A.1.4 | Normalização | 132 |
| A.1.5 | Ortonormalidade | 132 |
| A.1.6 | O Produto Tensorial | 133 |
| A.2 | Operadores | 134 |
| A.2.1 | Introdução | 134 |
| A.2.2 | A Relação de Completeza | 134 |
| A.2.3 | Comutadores e Anticomutadores | 135 |
| A.2.4 | Autovalores e Autovetores | 135 |

| | | |
|----------|---|------------|
| A.2.5 | Operadores Hermitianos | 135 |
| A.2.6 | O Produto Tensorial | 136 |
| A.3 | Representação Matricial | 137 |
| A.3.1 | Introdução | 137 |
| A.3.2 | O Operador Inverso | 139 |
| A.3.3 | O Produto Tensorial | 139 |
| A.3.4 | Operadores Hermitianos | 140 |
| A.3.5 | As Matrizes de Pauli | 141 |
| A.3.6 | Comutadores e Anti-Comutadores | 142 |
| B | Os Postulados da Mecânica Quântica | 143 |
| B.1 | Postulado I | 143 |
| B.2 | Postulado II | 144 |
| B.3 | Postulado III | 146 |
| C | Portas Lógicas Quânticas | 149 |
| C.0.1 | Portas de um <i>Qubit</i> | 149 |
| C.0.2 | Portas de dois <i>Qubits</i> | 150 |
| | Referências Bibliográficas | 153 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 2.1 | Representação de $ \Psi\rangle$ na Esfera de Bloch. <i>Fonte:</i> Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011. | 6 |
| 2.2 | Representação esquemática de um circuito que simula o processo de decoerência sobre um estado de entrada arbitrário ρ | 23 |
| 2.3 | Entropia de Shannon para um sistema binário. <i>Fonte:</i> Figura adaptada de Benenti et al., 2007. | 30 |
| 2.4 | Exemplo de um par estados não-ortogonais. <i>Fonte:</i> Figura adaptada de Benenti et al., 2007. | 34 |
| 2.5 | Entropia de Von Neumann do operador densidade relativo ao par de estados não-ortogonais $ \tilde{0}\rangle$ e $ \tilde{1}\rangle$ em função de θ . Os respectivos índices de 1 a 5 estão associados aos valores de $\theta = \{0; 0.2\frac{\pi}{4}; 0.4\frac{\pi}{4}; 0.6\frac{\pi}{4}$ e $0.8\frac{\pi}{4}\}$. <i>Fonte:</i> Figura adaptada de Benenti et al., 2007. | 35 |
| 2.6 | Representação esquemática de um circuito que simula o processo de decoerência mais simples possível que pode atuar sobre um estado de entrada arbitrário ρ : a porta $C_{NOT_{a,b}}$. O círculo preenchido no qubit de controle denota que a ativação da porta ocorre quando o estado de entrada é igual a $ 1\rangle$ | 41 |
| 2.7 | Representação esquemática de um circuito que simula o processo completo de decoerência sobre um qubit arbitrário ρ . Os círculos vazios e preenchidos denotam que a ativação das portas σ_x , σ_y e σ_z ocorre quando os estados dos qubits de controle são respectivamente iguais a $ 00\rangle$, $ 01\rangle$ e $ 10\rangle$ | 45 |
| 2.8 | Efeito do mapa de Inversão de Bit na esfera de Bloch para $p=0.3$. Apenas o eixo x não sofre contração. <i>Fonte:</i> Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011. | 48 |
| 2.9 | Efeito do mapa de Inversão de Fase na esfera de Bloch para $p=0.3$. Apenas o eixo z não sofre contração. <i>Fonte:</i> Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011. | 50 |
| 2.10 | Efeito do mapa de Inversão de Bit e Fase na esfera de Bloch para $p=0.3$. Apenas o eixo y não sofre contração. <i>Fonte:</i> Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011. | 51 |

2.11 Efeito do mapa de Despolarização na esfera de Bloch para $p=0.3$.
 Os eixos x , y e z são contraídos de forma simétrica.
Fonte: Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011. 53

2.12 Efeito do mapa de Atenuação de Amplitude na esfera de Bloch para $p=0.3$.
 Os eixos x , y e z contraem-se na direção do ponto $(0,0,1)$ que representa o estado $|0\rangle$.
Fonte: Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011. 56

2.13 Representação esquemática de um circuito que simula o processo de decoerência sobre apenas um dos qubits do estado ρ 57

3.1 Teletransporte de informação quântica entre dois pontos distintos através de um estado emaranhado de dois qubits. As cores vermelha e azul referem-se respectivamente a Alice e Bob, e a barra intermediária representa o canal gerado pelo emaranhamento entre estes qubits. 64

3.2 Canal gerado pelo emaranhamento (representado pelo sinal ondulatório em verde) entre os qubits de Alice (vermelho) e Bob (azul). À esquerda, a informação original de Alice (representada pela cor amarela). 64

3.3 Elementos necessários para a realização de um teletransporte quântico: os cabos de conexão e os monitores representam respectivamente a base de medidas utilizada por Alice e o resultado obtido após a realização das mesmas. 65

3.4 Confirmação do resultado da medida de Alice através de um canal clássico: Bob manipula seu estado de forma que o mesmo torna-se idêntico à informação original enviada por Alice. 66

3.5 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$ e $p_a = p_b = 1$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IF}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados ao modelo $0|IF|IF$ 81

3.6 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$ e $p_a = p_b = 1$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IB}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados ao modelo $0|IB|IB$ 82

3.7 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$ e $p_a = p_b = 0.95$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|D}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$. Nenhuma das curvas atinge o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os resultados associados ao modelo $0|D|D$ são inferiores aos do modelo $0|0|D$ 83

- 3.8 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $p_a = 0.5$ e $p_b = 0.82$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. O valor máximo de ambas as funções para (a) $\theta = 0.7$ supera os resultados exibidos para (b) $\theta = \pi/4$, e os melhores resultados estão associados ao modelo $0|AA|AA$ 84
- 3.9 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $p_a = 0.1$ e $p_b = 0.3$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $0|AA|AA$; (b) $0|IB|IB$ e (c) $0|IF|IF$. . . 85
- 3.10 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de p_b para $p_a = 0.1$ e $\phi = \pi/4$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $0|AA|AA$; (b) $0|IB|IB$ e (c) $0|IF|IF$. . . 86
- 3.11 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de $p_a = p_b = p$ para $\phi = \pi/4$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $0|AA|AA$; (b) $0|IB|IB$ e (c) $0|IF|IF$. . . 87
- 3.12 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$, $p_0 = p_a = 0.8$ e $p_b = 0.2$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{IB|IB|IB}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados ao modelo $IB|IB|IB$. 88
- 3.13 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$, $p_0 = 0.2$ e $p_a = p_b = 1$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IF}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{IF|IF|IF}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados aos modelos $0|IF|IF$ e $IF|IF|IF$ 88
- 3.14 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$, $p_0 = 0.4$ e $p_a = p_b = 1$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IB}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{IB|IB|IB}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados aos modelos $0|IB|IB$ e $IB|IB|IB$ 89

3.15 Gráfico de $\langle \overline{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$, $p_0 = 0.5$ e $p_a = p_b = 0.95$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente a $\langle \overline{F} \rangle_{0|0|D}$, $\langle \overline{F} \rangle_{0|D|D}$ e $\langle \overline{F} \rangle_{D|D|D}$. Nenhuma das curvas atinge o limite clássico correspondente a $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$. Os resultados associados aos modelos $0|D|D$ e $D|D|D$ são inferiores aos do modelo $0|0|D$ 89

3.16 Gráfico de $\langle \overline{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$, $p_0 = 0.3$, $p_a = 0.5$ e $p_b = 0.82$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente a $\langle \overline{F} \rangle_{0|0|AA}$, $\langle \overline{F} \rangle_{0|AA|AA}$ e $\langle \overline{F} \rangle_{AA|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados aos modelos $0|AA|AA$ e $0|0|AA$ 90

3.17 Comparação entre modelos que possuem entradas mistas e canais homogêneos onde o estado de entrada é mantido inalterado. As figuras exibem os gráficos de $\langle \overline{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $IF|AA|AA$; (b) $IB|AA|AA$; (c) $D|AA|AA$ e (d) $AA|IF|IF$ 90

3.18 Comparação entre modelos que possuem entradas mistas e canais homogêneos onde o canal é mantido inalterado. As figuras exibem os gráficos de $\langle \overline{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $AA|IF|IF$; (b) $AA|IB|IB$; (c) $AA|D|D$ e (d) $IF|AA|AA$ 91

3.19 Comparação entre modelos que possuem entradas puras e canais heterogêneos onde o qubit de Alice no canal é mantido inalterado. As figuras exibem os gráficos de $\langle \overline{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $0|IF|AA$; (b) $0|IB|AA$; (c) $0|D|AA$ e (d) $0|AA|IB$, $0|AA|D$ e $0|AA|IF$ 92

3.20 Comparação entre modelos que possuem entradas mistas e canais heterogêneos onde o qubit de Alice no canal e o estado de entrada são mantidos inalterados. As figuras exibem os gráficos de $\langle \overline{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $IF|IF|AA$; (b) $IB|IB|AA$; (c) $D|D|AA$ e (d) $AA|AA|IF$ 94

- 3.21 Comparação entre modelos que possuem entradas mistas e canais heterogêneos onde o qubit de Bob no canal é mantido inalterado. As figuras exibem os gráficos de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $AA|AA|IF$; (b) $AA|AA|IB$; (c) $AA|AA|D$ e (d) $IF|IF|AA$ 95
- 4.1 Gráficos de p_i (na coluna à esquerda) e $\langle \bar{F} \rangle$ (na coluna à direita) em função de ϕ para $p_a = p_b = 0.2$. As linhas horizontais tracejadas representam respectivamente $p_i = 1/4$ e o limite clássico correspondente à $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Para $\theta = \pi/4$, todas as probabilidades são iguais e a função $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$ é idêntica aos pares $\langle \bar{F} \rangle_I / \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II} / \langle \bar{F} \rangle_{III}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo $0|IF|IF$. Para $\theta \neq \pi/4$, os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais. 101
- 4.2 Gráficos de p_i (na coluna à esquerda) e $\langle \bar{F} \rangle$ (na coluna à direita) em função de (a-b) ϕ e (c-f) θ para $p_a = p_b = 0.2$. As linhas horizontais tracejadas representam respectivamente $p_i = 1/4$ (à esquerda) e o limite clássico correspondente à $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$ (à direita). Para $\theta = \pi/4$, todas as probabilidades são iguais, embora a função $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA}$ e os pares $\langle \bar{F} \rangle_I / \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II} / \langle \bar{F} \rangle_{III}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo $0|0|AA$ exibam comportamentos distintos. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais. 103
- 4.3 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $p_a = 0.1$ e $p_b = 0.3$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente às medidas de $|\Phi_\phi^+\rangle$ e $|\Psi_\phi^-\rangle$ relativas ao teletransporte condicional dos modelos $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais dos modelos (a) $0|AA|AA$, (b) $0|IB|IB$; $0|IF|IF$ e (c) $0|IF|IF$ 104
- 4.4 Gráficos de p_i (na coluna à esquerda) e $\langle \bar{F} \rangle$ (na coluna à direita) em função de ϕ para $p_0 = p_a = p_b = 0.25$. As linhas horizontais tracejadas representam respectivamente $p_i = 1/4$ (à esquerda) e o limite clássico correspondente à $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$ (à direita). Para $\phi \neq \pi/4$ e $\theta \neq \pi/4$, as quatro fidelidades condicionais são distintas. Para $\theta = \pi/4$, a função $\langle \bar{F} \rangle_{AA|IF|IF}$ e os pares $\langle \bar{F} \rangle_I / \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II} / \langle \bar{F} \rangle_{III}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo $AA|IF|IF$ exibem comportamentos distintos. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais. 106

- 4.5 Gráficos de p_i (na coluna à esquerda) e $\langle \bar{F} \rangle$ (na coluna à direita) em função de θ para $p_0 = p_a = p_b = 0.25$. As linhas horizontais tracejadas representam respectivamente $p_i = 1/4$ (à esquerda) e o limite clássico correspondente à $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$ (à direita). Para $\phi \neq \pi/4$ e $\theta \neq \pi/4$, as quatro fidelidades condicionais são distintas. Para $\phi = \pi/4$, a função $\langle \bar{F} \rangle_{AA|IF|IF}$ e os pares $\langle \bar{F} \rangle_I / \langle \bar{F} \rangle_{II}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{III} / \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo $AA|IF|IF$ exibem comportamentos distintos. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais. 107
- 4.6 Gráficos de p_i (na coluna à esquerda) e $\langle \bar{F} \rangle$ (na coluna à direita) em função de ϕ para $p_0 = p_a = p_b = 0.25$. As linhas horizontais tracejadas representam respectivamente $p_i = 1/4$ (à esquerda) e o limite clássico correspondente à $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$ (à direita). Para $\phi \neq \pi/4$ e $\theta \neq 0.96$, as quatro fidelidades condicionais são distintas. Para $\theta \approx 0.96$, a função $\langle \bar{F} \rangle_{AA|AA|AA}$ e os pares $\langle \bar{F} \rangle_I / \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II} / \langle \bar{F} \rangle_{III}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo $AA|AA|AA$ exibem comportamentos distintos. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais. 108
- 4.7 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = 0.5$, $p_0 = p_a = 0.8$ e $p_b = 0.2$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente às medidas de $|\Phi_\phi^+\rangle$ e $|\Psi_\phi^-\rangle$ relativas ao teletransporte condicional dos modelos $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{IB|IB|IB}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais do modelo $IB|IB|IB$ 109
- 4.8 Comparação entre modelos com entradas mistas em diversos cenários: (a) canais homogêneos onde o estado de entrada é mantido inalterado; (b) canais homogêneos onde o canal é mantido inalterado; (c) canais heterogêneos onde o qubit de Alice no canal e o estado de entrada são mantidos inalterados e (d) canais heterogêneos onde o qubit de Bob no canal é mantido inalterado. As figuras exibem os gráficos de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $IF|AA|AA$; (b) $AA|IF|IF$; $IB|IF|IF$; (c) $IF|IF|AA$ e (d) $AA|AA|IF$; $IB|IB|IF$ 109
- 5.1 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$ e $j_y = 10$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $j_x = -1$, $j_x = -2$ e $j_x = -3$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é inversamente proporcional à temperatura. 115

- 5.2 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ em função de j_x para $\phi = 3\pi/4$ e $j_y = -40$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $kT = 4$, $kT = 8$ e $kT = 16$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é proporcional à constante de acoplamento j_x 116
- 5.3 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$ e $j_y = -0.05$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $j_x = -1$, $j_x = -5$ e $j_x = -10$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é proporcional à temperatura na região $0 < kT < kT_c$ para um determinado valor crítico T_c . 117
- 5.4 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ em função de h_z para $\phi = \pi/4$, $j_x = -10$ e $j_y = 10$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $kT = 1$, $kT = 2.5$ e $kT = 5$. Todas as curvas superam o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A relação de proporcionalidade entre a fidelidade e o campo magnético depende da temperatura. 118
- 5.5 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ em função de ϕ para $kT = 5$, $j_x = -10$ e $j_y = -0.01$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente aos valores de $h_z = 0$, $h_z = 5$, $h_z = 7.5$ e $h_z = 10$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é máxima para $\phi = \pi/4$ 119
- 5.6 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ em função de j_x para $\phi = 3\pi/4$, $kT = 5$ e $j_y = -10$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente aos valores de $h_z = 0$, $h_z = 5$, $h_z = 7.5$ e $h_z = 10$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é proporcional à constante de acoplamento j_x 119
- 5.7 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$, $j_x = -20$, $j_y = -0.1$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente aos valores de $h_z = 0$, $h_z = 0.6$, $h_z = 0.7$ e $h_z = 0.71$. Todas as curvas superam o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é proporcional à temperatura na região $0 < kT < kT_c$ e no intervalo $0 < h_z < h_{z_c}$ para determinados valores críticos T_c e h_{z_c} 120
- 5.8 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$, $j = 2$ e $j_z = -10$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente aos valores de $\Delta = 0$, $\Delta = -0.5$, $\Delta = -1$ e $\Delta = -1.5$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é inversamente proporcional à temperatura. 123

5.9 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z}$ em função de j_z para $\phi = \pi/4$, $kT = 1$ e $\Delta = -0.5$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $j = 1$, $j = 1.5$ e $j = 2$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é inversamente proporcional à constante de acoplamento j_z 123

5.10 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$, $j = -10$ e $\Delta = -0.1$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $j_z = -9.6$, $j_z = -9.7$ e $j_z = -9.8$. Todas as curvas superam o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é diretamente proporcional à temperatura na região $0 < kT < kT_c$ para um determinado valor crítico T_c . 124

5.11 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z,h_z}$ em função de h_z para $\phi = \pi/4$, $j = -9.5$, $j_z = -10$ e $\Delta = -0.2$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $kT = 1.5$, $kT = 2$ e $kT = 2.5$. Todas as curvas superam o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A relação de proporcionalidade entre a fidelidade e o campo magnético depende da temperatura. 124

5.12 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z,h_z}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$, $j = -10$, $j_z = -9$ e $\Delta = -0.2$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente aos valores de $h_z = 0$, $h_z = 0.4$, $h_z = 0.5$ e $h_z = 0.55$. Todas as curvas superam o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é diretamente proporcional à temperatura na região $0 < kT < kT_c$ e no intervalo $0 < h_z < h_{zc}$ para determinados valores críticos T_c e h_{zc} 125

5.13 Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de kT para $\phi = 0.9$, $j_x = -10$, $j_y = 10$, $j_z = -10$ e $h_z = 1$. As cores marrom, azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$ e aos pares $\langle \bar{F} \rangle_I / \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II} / \langle \bar{F} \rangle_{III}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo geral XYZ . Todas as curvas superam o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade se mantém estável na região $0 < kT < kT_c$ para um determinado valor crítico T_c e torna-se inversamente proporcional à temperatura para $T > T_c$ 126

C.1 Portas simples que atuam sobre um qubit, suas respectivas nomenclaturas e representações matriciais. **Fonte:** Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011. 150

C.2 Figura esquemática para portas de dois qubits. Em (a): controle no primeiro qubit. Em (b): controle no segundo qubit. O círculo menor preenchido no qubit de controle denota que a ativação da porta ocorre quando o estado de entrada é igual a $|1\rangle$, e o círculo menor vazio no qubit de controle representa a ativação da porta quando o estado de entrada é igual a $|0\rangle$. **Fonte:** Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011. 151

| | | |
|-----|---|-----|
| C.3 | Portas que atuam sobre dois qubits, suas respectivas nomenclaturas e representações matriciais. <i>Fonte:</i> Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011. | 151 |
| C.4 | Construindo portas de dois qubits a partir de portas de um qubit. Em (a): a porta C_{NOT} com controle no segundo qubit. Em (b): a porta Sw . Em (c): a porta $Z-Controlada$ com controle no primeiro qubit. <i>Fonte:</i> Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011. | 152 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Resultados associados às medidas de Alice e as respectivas correções que devem ser aplicadas por Bob. | 66 |
| 3.2 | Índices associados aos estados da Base de Bell Generalizada. | 72 |

Capítulo 1

Introdução

A hipótese de que a física quântica poderia atuar sensivelmente sobre o processamento de informações em sistemas digitais (Bennett and Brassard, 1984; Ekert, 1991; Shor, 1996 e Grover, 1996) foi elaborada décadas após o surgimento da teoria da informação clássica e do avanço da computação digital em larga escala, até ser definitivamente estabelecida no final do século anterior. Sua origem pode ser atribuída a John Von Neumann, que introduziu a noção de entropia quântica através de um operador densidade vinte anos antes de Claude Shannon, e seu desenvolvimento é fruto do trabalho de pesquisadores renomados como Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, Erhard Schmidt, John Bell, Karl Kraus, Richard Feynman, Charles Bennett, Alexander Holevo, William Wootters, David Deutsch, Arthur Ekert, Peter Shor, Lov Grover, Asher Peres, David DiVincenzo e Guifre Vidal, dentre outros.

Neste campo de conhecimento, a Teoria da Informação Quântica aborda conceitos relacionados a estados quânticos, canais e medidas, e o teletransporte quântico - um mecanismo de transmissão de estados quânticos - sobressai-se como uma das linhas de pesquisa mais relevantes. A idéia básica por trás deste procedimento é a codificação e a divisão do conteúdo original da mensagem em duas partes, as quais são enviadas separadamente por um canal quântico (um par de *qubits* emaranhados) e outro clássico, sendo este último nada mais do que um meio de comunicação comum (como *e-mail*, telefone, etc;) pelo qual emissor e receptor podem intercambiar informações. Aliado a isto, é necessário que exista um aparato de medidas específico e um conjunto de correções unitárias que possibilitem a reconstrução do estado original no final do processo.

Durante algum tempo, acreditou-se que o teletransporte seria uma mera conjectura, já que existem observáveis que são não-comutativos e que, portanto, não poderiam ser medidos simultaneamente em uma única cópia de um estado quântico (Einstein et al., 1935). Contudo, Bennett, Brassard, Crepeau, Jozsa, Peres, and Wootters demonstraram a viabilidade do teletransporte quântico em Bennett et al., 1993 ao utilizar um estado da base de Bell para simular o canal de transmissão de informação, cuja realização experimental foi verificada por Bouwmeester et al., 1998 e Boschi et al., 1998. Todavia, quando este canal é implementado em sistemas reais, o par emaranhado presente

em sua estrutura torna-se vulnerável à ação do ambiente que o circunda, e o emaranhamento deste sistema é gradativamente destruído pelo fenômeno conhecido como decoerência. Por este motivo, priorizamos neste trabalho o uso de estados mistos na composição do estado de entrada e do canal de transmissão de informação, visto que pretendemos investigar os mecanismos de teletransporte em cenários realistas.

1.1 Considerações Preliminares

Neste trabalho, visamos não só aprimorar procedimentos específicos de teletransporte quântico como também construir novos protocolos utilizando canais quânticos mistos, cujos mecanismos de decoerência podem ser descritos pelos operadores de Kraus (capítulo 3) ou por cadeias de *spin* (capítulo 5). Além de aplicar o método de teletransporte padrão para cenários ainda não explorados, nenhum destes modelos havia sido analisado pelo método de teletransporte probabilístico (capítulo 4), e, até o presente momento, não há registro de mecanismos de teletransporte que utilizem canais mistos cujo estado final tenha alcançado fidelidade um ao término do processo (Oh et al., 2002 e Taketani et al., 2012). Por outro lado, segundo Massar and Popescu, 1995, estes mecanismos podem ser substituídos por procedimentos clássicos de transmissão de informação quando o valor da fidelidade for menor ou igual a $2/3$. Portanto, após o encerramento destes protocolos, vamos comparar os resultados obtidos através das referidas abordagens para determinar os métodos mais eficientes em cenários onde a fidelidade assuma valores entre $2/3$ e 1.

1.2 Objetivos

Construiremos protocolos de teletransporte quântico onde o estado teletransportado e o canal de transmissão de informação serão expostos a processos de decoerências baseados na ação dos operadores de Pauli (Apêndices A e C), que podem ser divididos em duas categorias distintas:

- (1) Na primeira etapa, analisaremos os principais modelos de decoerência utilizados para representar ações externas do ambiente sobre sistemas quânticos, como:
 - (1.a) Inversão de Fase ou Atenuação de Fase, associado à ocorrência da operação σ_z ;
 - (1.b) Inversão de Bit, associado à ocorrência da operação σ_x ;
 - (1.c) Despolarização, associado à ocorrência simultânea das operações σ_x , σ_y e σ_z , de forma que a polaridade do sistema seja reduzida equitativamente até que este se aproxime de um estado completamente misto;
 - (1.d) Atenuação de Amplitude, responsável por dissipar energia de um estado excitado do sistema para o ambiente.

- (2) Em seguida, aplicaremos conceitos de Mecânica Estatística para sistemas em equilíbrio térmico sob a perspectiva do modelo de Heisenberg. O canal de transmissão de informação será formado por dois elétrons cujos *spins* interagem através das constantes de acoplamento j_i sob a presença de um campo magnético externo h_z , cujo Hamiltoniano obedece à equação geral dada por

$$H^{A,B} = j_x(S_x^A \otimes S_x^B) + j_y(S_y^A \otimes S_y^B) + j_z(S_z^A \otimes S_z^B) + h_{z_a}(S_z^A \otimes I^B) + h_{z_b}(I^A \otimes S_z^B),$$

onde $S_x \equiv (\hbar/2)\sigma_x$, $S_y \equiv (\hbar/2)\sigma_y$ e $S_z \equiv (\hbar/2)\sigma_z$ são os operadores de Spin.

Ambas as propostas serão analisadas pelos métodos de teletransporte direto (determinístico) e condicional (probabilístico). Enquanto o primeiro segue a sequência de passos introduzida em [Bennett et al., 1993](#) e adotada como padrão na maioria dos procedimentos de teletransporte quântico, o segundo prioriza os resultados associados a uma das quatro medidas projetivas efetuadas por Alice em seu subsistema. O objetivo principal deste trabalho consiste em encontrar cenários onde a presença de decoerência e o ajuste dos parâmetros específicos de cada modelo maximizem o cálculo da fidelidade média do estado final de Bob em relação à informação original enviada por Alice.

1.3 Contribuições

O enfoque nas propriedades dos principais modelos de decoerência documentados na literatura e a análise subsequente dos processos de teletransporte que utilizam canais quânticos mistos revela aspectos fundamentais para a compreensão deste mecanismo de transmissão de informação. Parte dos resultados originais elaborados nesta tese pode ser encontrada em [Fortes and Rigolin, 2015](#) e [Fortes and Rigolin, 2016](#).

1.4 Organização do Trabalho

As ferramentas matemáticas e os conceitos necessários para a compreensão deste trabalho segundo o formalismo adotado na Teoria da Informação Quântica serão desenvolvidos no capítulo 2. A estrutura do protocolo de teletransporte original será a referência para os modelos descritos pelos operadores de Kraus elaborados no capítulo 3, e a proposta para o protocolo de teletransporte condicional e suas respectivas aplicações serão introduzidas no capítulo 4. No capítulo 5, adaptaremos os métodos apresentados nos capítulos precedentes para construir novos protocolos de teletransporte, onde estados puros serão enviados através de canais cujos Hamiltonianos são descritos pelo modelo de Heisenberg. Os resultados mais relevantes obtidos ao longo do trabalho serão destacados no capítulo 6. Nos Apêndices A, B e C, revisaremos respectivamente fundamentos básicos de Álgebra Linear, os postulados da Mecânica Quântica e as principais portas lógicas quânticas utilizadas para operações sobre até dois *qubits*.

Capítulo 2

Fundamentos de Informação Quântica

Neste capítulo, abordaremos temas específicos da área de Informação Quântica (Nielsen and Chuang, 2011; Benenti et al., 2007 e Mermin, 2007) e discutiremos sobre os tópicos mais relevantes em cada seção para que, de posse destas informações, estejamos aptos a desenvolver os protocolos de transmissão de informação apresentados nos capítulos seguintes.

2.1 Qubits e Sistemas de Dois Níveis

A contração da expressão *quantum-bit* (empregada para distinguir *bits* quânticos de sua contraparte clássica) originou o termo *Qubit*. Em sistemas computacionais, um *bit* é representado pelos dígitos binários discretos 0 e 1 e equivale à menor unidade de informação que pode ser utilizada em um determinado procedimento, enquanto um *qubit* pertence a uma faixa contínua de valores contida nas diversas configurações que um sistema físico de dois níveis pode assumir. Exemplos de *qubits* em sistemas reais são encontrados nos mais variados cenários, como na restrição das energias do átomo de hidrogênio ao conjunto que engloba seu estado fundamental e o primeiro estado excitado, nos diferentes arranjos para a transmissão de fótons polarizados em eixos perpendiculares e em propriedades intrínsecas da matéria (como as orientações *up* e *down* do spin de um elétron em uma determinada direção quando este é submetido à presença de um campo magnético).

A descrição matemática de um *qubit* é caracterizada por um vetor de duas dimensões expresso em função de estados de base ortonormais, os quais, por sua vez, estão associados a um espaço de Hilbert. Sua representação matricial padrão é dada por

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

e, portanto, qualquer *qubit* pode ser descrito como uma combinação dos estados de base da Eq. (2.1) como

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.2)$$

onde os coeficientes α e β obedecem à condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ prevista pela Eq (B.7).

Note que o fato de a normalização da Eq. (2.2) ser semelhante à relação $\cos^2 x + \sin^2 x \equiv 1$ para um parâmetro real x arbitrário permite que α e β possam ser substituídos pelas funções trigonométricas *seno* e *co-seno* se em pelo menos uma destas houver um fator de fase acoplado que não contribua para o cálculo do quadrado de seu respectivo módulo. Assim,

$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle \quad (2.3)$$

é uma das representações adotadas para descrever um *qubit* em função de parâmetros associados a grandezas geométricas como θ e ϕ , onde a opção pela dependência em relação a $\theta/2$ em detrimento de θ é necessária para que $|\Psi\rangle$ pertença ao grupo de simetria $SU(2)$.

Por outro lado, mostramos no final da seção B.2 que estados proporcionais entre si por um fator de fase global descrevem sistemas idênticos. Dito isto, outra representação igualmente válida é obtida ao multiplicar a função de onda da Eq. (2.3) pelo fator $e^{-\frac{i\phi}{2}}$, e

$$|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\phi}{2}} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\phi}{2}} |1\rangle \quad (2.4)$$

é a forma mais utilizada para representar um *qubit* em função de θ e ϕ dada a simetria entre seus coeficientes em relação a estes ângulos.

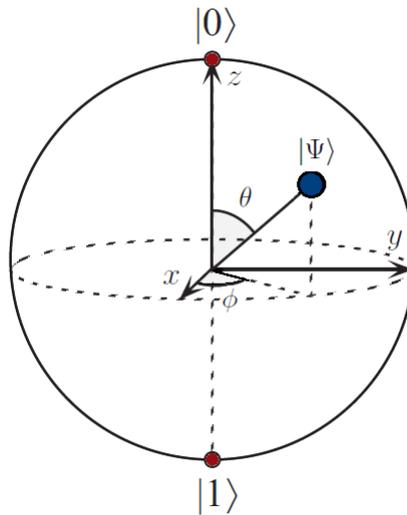


Figura 2.1: Representação de $|\Psi\rangle$ na Esfera de Bloch.

Fonte: Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011.

Na figura 2.1 é possível visualizar a representação geométrica das Eqs. (2.3) e (2.4) na superfície conhecida como a esfera de Bloch, onde a posição de $|\Psi\rangle$ pode ser determinada pelos parâmetros reais θ e ϕ (localizados via coordenadas esféricas) ou pelo

vetor geométrico \vec{r} (expresso em função das coordenadas cartesianas x , y e z). Repare que os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ estão posicionados como vetores orientados em sentidos opostos sobre um mesmo eixo e que todos os estados ortogonais encontram-se defasados de $\theta = \pi$, em analogia direta com a descrição do comportamento de um sistema de *spin* 1/2 no experimento de Stern-Gerlach (Feynman et al., 1963).

Ao longo deste trabalho, notaremos que a comparação entre dois sistemas quânticos específicos será essencial para a compreensão dos resultados que serão apresentados nos capítulos seguintes, e um dos modos de se obter informações relativas a esta análise reside no estudo da função denominada de fidelidade, a qual pode ser classificada como uma medida da "similaridade" entre estes estados. Para exemplificar, considere dois estados puros $|\Psi^{inicial}\rangle$ e $|\Psi^{final}\rangle$, onde o primeiro é um estado arbitrário e o último é a configuração assumida pelo estado anterior após uma determinada transformação. Neste cenário, a fidelidade é definida como

$$\begin{aligned} F &= \langle \Psi_{inicial} | \hat{P}_{final} | \Psi_{inicial} \rangle = \langle \Psi_{inicial} | (|\Psi_{final}\rangle \langle \Psi_{final}|) | \Psi_{inicial} \rangle \\ &= |\langle \Psi_{inicial} | \Psi_{final} \rangle|^2 = |\langle \Psi_{final} | \Psi_{inicial} \rangle|^2 = \langle \Psi_{final} | \hat{P}_{inicial} | \Psi_{final} \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ao observar esta expressão, constatamos que a fidelidade assumirá os valores $F = 0$ quando $|\Psi_{inicial}\rangle$ e $|\Psi_{final}\rangle$ forem ortogonais e $F = 1$ se os mesmos forem idênticos, e, de forma intuitiva, seria razoável supor que qualquer outra configuração se enquadraria em algum valor intermediário entre estes extremos. De fato, se definirmos os estados

$$|\Psi'_{inicial}\rangle = |0\rangle \text{ e } |\Psi'_{final}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle \quad (2.6)$$

em relação à base computacional padrão e recorrermos às representações matriciais de ambos, notaremos que a fidelidade resultante será dada por

$$F = |\langle \Psi'_{inicial} | \Psi'_{final} \rangle|^2 = \left| \begin{bmatrix} 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{bmatrix} \right|^2 = \left| \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \right|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2.7)$$

Visto que $0 < \cos^2 \frac{\theta}{2} < 1$ e que qualquer sistema arbitrário de coordenadas pode ser adaptado para descrever os estados exibidos na Eq. (2.6), conclui-se que $0 \leq F \leq 1$.

As Eqs. (2.2) e (2.3) definem a representação completa de um *qubit* em função de apenas dois parâmetros: α e β ou θ e ϕ . Para descrever sistemas que possuem mais de um *qubit*, é necessário dispor de uma expressão geral que leve em conta todos os elementos presentes contidos neste cenário, e, neste caso, um sistema com N -*qubits* é representado por um produto tensorial através da expressão

$$|x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes \dots \otimes |x_N\rangle = |x_1\rangle |x_2\rangle, \dots, |x_N\rangle = |x_1 x_2 \dots x_N\rangle. \quad (2.8)$$

A representação deste produto em sua forma expandida será empregada apenas quando julgarmos necessário, e, por conseguinte, a notação condensada mostrada no último termo da Eq. (2.8) será adotada como padrão no presente trabalho.

A Eq. (2.8) também pode ser utilizada para representar números inteiros em forma de matrizes. Para isso, basta escrever o número em questão em sua forma binária correspondente e efetuar o produto tensorial de todos os bits. Para exemplificar, vamos converter o número 5 (expresso na base decimal) para a base binária através da relação $|5\rangle_{10} \equiv |101\rangle_2 = |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_2 \otimes |1\rangle_2$, onde a ordem de cada base é indicada respectivamente pelos índices 10 e 2. Ao efetuar o produto tensorial entre as matrizes $|1\rangle_2$, $|0\rangle_2$ e $|1\rangle_2$, obtém-se a matriz coluna denotada por

$$|5\rangle_{10} = \left(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \right)_2^T, \quad (2.9)$$

onde T indica a transposição da matriz cujo único elemento não-nulo encontra-se na sexta linha. Por extensão, a transcrição de um número inteiro N para sua forma matricial correspondente é dada por

$$|N\rangle_{10} = \left(0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0 \right)_2^T, \quad (2.10)$$

onde o dígito 1 é precedido por N dígitos nulos. Ao todo, um conjunto de N bits na base binária permite a representação de 2^N números inteiros entre 0 e $2^N - 1$.

Uma outra aplicação relevante para a Eq. (2.8) está implícita na representação que distingue *qubits* emaranhados de estados separáveis (seções 2.3, 2.7 e 2.8). Um estado puro é dito emaranhado se não puder ser escrito a menos de uma constante multiplicativa sob a forma reduzida de

$$|\Psi\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes \dots \otimes |x_N\rangle, \quad (2.11)$$

onde os estados $|x_i\rangle$ residem em espaços de Hilbert independentes. Assim, enquanto um estado da forma $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A\rangle \otimes |0_B\rangle + |1_A\rangle \otimes |0_B\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A\rangle + |1_A\rangle) \otimes |0_B\rangle$ é separável, o sistema $|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A\rangle \otimes |0_B\rangle + |1_A\rangle \otimes |1_B\rangle)$ está emaranhado.

2.2 O Operador Densidade

Deste ponto em diante, abordaremos sistemas sobre os quais não há informação suficiente para determinar com exatidão seu vetor de estado, como, por exemplo, uma máquina térmica que produz l estados aleatórios quaisquer $|\Psi_a\rangle, |\Psi_b\rangle, \dots, |\Psi_l\rangle$ não necessariamente ortonormais. Em cenários como este, que chamamos de mistura estatística, só é permitido supor que há uma probabilidade não-nula de que o sistema se encontre em algum dos possíveis estados $|\Psi_k\rangle$, e, portanto, é preciso descrevê-lo como uma combinação entre estes diferentes estados dispondo apenas do conhecimento da probabilidade

p_k associada a $|\Psi_k\rangle$. Para isso, vamos introduzir o operador densidade

$$\rho = p_1|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + p_2|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + \dots + p_l|\Psi_l\rangle\langle\Psi_l| = \sum_{k=1}^l p_k|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|, \quad (2.12)$$

onde p_k representa a chance de o sistema ser encontrado em $|\Psi_k\rangle$. Se a informação relativa a este estado estiver completa - ou seja, $p_k = 1$ - o operador densidade é reduzido a $\rho = |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|$ e o sistema assume as características de um estado puro.

Embora aparentemente a expressão que defina ρ seja mais complicada do que a de um estado $|\Psi\rangle$ expresso em termos de suas componentes, as propriedades discutidas nos Postulados do Apêndice B continuam sendo válidas para esta configuração. Se aplicarmos um operador sobre o sistema e mensurarmos a probabilidade de obter o resultado s_{u_i} associado a algum estado de base, a probabilidade total e o valor esperado das medidas relacionadas a este operador podem ser calculados e expressos em função de ρ , como mostraremos a seguir.

Quando o estado do sistema é igual a $|\Psi_k\rangle$, sabemos da Eq. (B.16) que

$$p_{u_i} = \langle\Psi_k|\hat{P}_{u_i}|\Psi_k\rangle \quad (2.13)$$

é a probabilidade de se obter o valor s_{u_i} como resultado de uma determinada medida e o sistema colapsar para o estado $|u_i\rangle$. Portanto, ao considerar que a chance de o estado do sistema em algum momento ser igual a $|\Psi_k\rangle$ é dada por p_k , a probabilidade total de s_{u_i} ser o resultado da medida ao serem considerados todos os l estados $|\Psi_k\rangle$ equivale a

$$p_i = \sum_{k=1}^l p_k p_{u_i} = \sum_{k=1}^l p_k \langle\Psi_k|\hat{P}_{u_i}|\Psi_k\rangle. \quad (2.14)$$

Expressão idêntica é obtida através do cálculo do traço total sobre $\rho\hat{P}_{u_i}$, pois

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho\hat{P}_{u_i}) &= \sum_{j=1}^n \langle u_j|\rho\hat{P}_{u_i}|u_j\rangle = \sum_{j=1}^n \langle u_j| \left(\sum_{k=1}^l p_k|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k| \right) \hat{P}_{u_i}|u_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^l p_k \langle u_j|\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|\hat{P}_{u_i}|u_j\rangle \right) = \sum_{k=1}^l \left(\sum_{j=1}^n p_k \langle\Psi_k|\hat{P}_{u_i}|u_j\rangle\langle u_j|\Psi_k\rangle \right) \\ &= \sum_{k=1}^l p_k \langle\Psi_k|\hat{P}_{u_i} \left(\sum_{j=1}^n |u_j\rangle\langle u_j| \right) |\Psi_k\rangle = \sum_{k=1}^l p_k \langle\Psi_k|\hat{P}_{u_i}|\Psi_k\rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

e, portanto, $p_i = \text{Tr}(\rho\hat{P}_{u_i})$.

Por sua vez, de acordo com as Eqs. (2.15) e (B.17), o valor esperado de um operador arbitrário \hat{O} é dado por

$$\begin{aligned} \langle\hat{O}\rangle &= \sum_{i=1}^n s_{u_i} p_i = \sum_{i=1}^n s_{u_i} \left(\sum_{k=1}^l p_k \langle\Psi_k|\hat{P}_{u_i}|\Psi_k\rangle \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^l p_k s_{u_i} \langle\Psi_k|\hat{P}_{u_i}|\Psi_k\rangle \right) \\ &= \sum_{k=1}^l p_k \left(\sum_{i=1}^n s_{u_i} \langle\Psi_k|\hat{P}_{u_i}|\Psi_k\rangle \right) = \sum_{k=1}^l p_k \langle\Psi_k|\hat{O}|\Psi_k\rangle, \end{aligned} \quad (2.16)$$

e, ao calcular o traço do operador $\rho\hat{O}$, constata-se que

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\rho\hat{O}) &= \sum_{i=1}^n \langle u_i | \rho\hat{O} | u_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u_i | \left(\sum_{k=1}^l p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k| \right) \hat{O} | u_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^l p_k \langle u_i | \Psi_k \rangle \langle \Psi_k | \hat{O} | u_i \rangle \right) = \sum_{k=1}^l \left(\sum_{i=1}^n p_k \langle \Psi_k | \hat{O} | u_i \rangle \langle u_i | \Psi_k \rangle \right) \\ &= \sum_{k=1}^l p_k \langle \Psi_k | \hat{O} \left(\sum_{i=1}^n | u_i \rangle \langle u_i | \right) | \Psi_k \rangle = \sum_{k=1}^l p_k \langle \Psi_k | \hat{O} | \Psi_k \rangle = \langle \hat{O} \rangle.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Logo, continuamos aptos a realizar previsões sobre o comportamento do sistema calculando grandezas como as probabilidades p_i e o valor esperado de \hat{O} (introduzidos nas seções B.2 e B.3) através das relações $p_i = \text{Tr}(\rho\hat{P}_{u_i})$ e $\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\rho\hat{O})$.

De forma semelhante, existem expressões análogas para a equação de Schrödinger (Eq. (B.1)) e para a expressão que fornece a evolução no tempo de um estado $|\Psi(t_0)\rangle$ em $t = t_0$ para $|\Psi(t)\rangle$ em $t = t$ (Eq. (B.2)) discutidas na seção B.1. A dinâmica do operador ρ (Neumann, 1955) obedece à relação

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = [H, \rho(t)], \quad (2.18)$$

e a evolução temporal de $|\Psi(t_0)\rangle$ quando este é submetido à ação de um operador unitário $U(t, t_0)$ é dada por

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \sum_{k=1}^l p_k |\Psi_k(t)\rangle\langle\Psi_k(t)| = \sum_{k=1}^l p_k U(t, t_0) |\Psi_k(t_0)\rangle\langle\Psi_k(t_0)| U(t, t_0)^\dagger \\ &= U(t, t_0) \left(\sum_{k=1}^l p_k |\Psi_k(t_0)\rangle\langle\Psi_k(t_0)| \right) U(t, t_0)^\dagger = U(t, t_0) \rho(t_0) U(t, t_0)^\dagger.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Visto que a presença de $U(t, t_0)$ não altera a probabilidade de colapso da função de onda para os autoestados do sistema (Eq. (A.25)), o mesmo se reflete para os coeficientes s_{u_i} dos estados de base $|u_i\rangle\langle u_i|$ que compõem a representação diagonal de ρ , os quais, neste caso, são os próprios autovalores do sistema.

Existe ainda uma analogia com a Eq. (B.13) que revela o que ocorre quando o sistema é medido: neste caso, a nova configuração assumida por ρ é igual a

$$\rho'(t) = \frac{\hat{P}_{u_i} \rho(t) \hat{P}_{u_i}}{\text{Tr}(\rho \hat{P}_{u_i})}, \quad (2.20)$$

e assim, se a informação disponível sobre o sistema no instante t estiver restrita ao conhecimento dos coeficientes p_k associados a $|\Psi_k\rangle$ na Eq. (2.12), o resultado obtido com a medida de um projetor \hat{P}_{u_i} sobre o operador $\rho(t)$ é suficiente para determinar a estrutura de $\rho'(t)$.

A seguir, demonstraremos as principais propriedades do operador densidade que nos permitirão distinguir sistemas puros de estados mistos.

(1) ρ é hermitiano (consulte a Eq. (A.22)):

$$\rho^\dagger = \left(\sum_{k=1}^l p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k| \right)^\dagger = \sum_{k=1}^l p_k (|\Psi_k\rangle)^\dagger (\langle\Psi_k|)^\dagger = \sum_{k=1}^l p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k| = \rho. \quad (2.21)$$

(2) $\text{Tr}\rho = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle u_i | \rho | u_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle u_i | \left(\sum_{k=1}^l p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k| \right) | u_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^l p_k \langle u_i | \Psi_k \rangle \langle \Psi_k | u_i \rangle \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^l p_k |\langle u_i | \Psi_k \rangle|^2 \right) = \sum_{i=1}^n p_i = 1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

(3) ρ é um operador não-negativo:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(t) | \rho | \Phi(t) \rangle &= \langle \Phi(t) | \left(\sum_{k=1}^l p_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k| \right) | \Phi(t) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^l p_k \langle \Phi(t) | \Psi_k \rangle \langle \Psi_k | \Phi(t) \rangle = \sum_{k=1}^l p_k |\langle \Phi(t) | \Psi_k \rangle|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde $|\Phi(t)\rangle$ representa um estado geral arbitrário com coeficientes que dependem do tempo. De posse destas informações, mostraremos que a análise das propriedades (1), (2) e (3) na matriz que representa o operador densidade de um sistema qualquer é suficiente para classificar seu grau de pureza.

Considere a decomposição espectral de ρ em termos de seus autoestados $|u_i\rangle$ tal que $\rho = \sum_{i=1}^n s_{u_i} |u_i\rangle\langle u_i|$. De acordo com a Eq. (2.23), $\langle \Phi(t) | \rho | \Phi(t) \rangle \geq 0$ para qualquer estado arbitrário. Então, se $|\Phi(t)\rangle = |u_i\rangle$, $\langle u_i | \rho | u_i \rangle \geq 0$ e disto segue que

$$s_{u_i} \geq 0 \quad (2.24)$$

para qualquer autovalor de ρ , cuja representação matricial expressa em função da base $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_N\rangle$ é dada por

$$\rho = \begin{bmatrix} s_{u_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{u_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{u_N} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Como $\text{Tr}\rho = 1$, seus autovalores estão restritos ao vínculo $\sum_{i=1}^n s_{u_i} = 1$, e visto que $s_{u_i} \geq 0$ segundo a Eq. (2.24), então

$$0 \leq s_{u_i} \leq 1. \quad (2.26)$$

Por outro lado,

$$\rho^2 = \begin{bmatrix} s_{u_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{u_2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{u_N}^2 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

e, de acordo com a Eq. (2.26),

$$\text{Tr}\rho^2 = \sum_{i=1}^n s_{u_i}^2 \leq 1. \quad (2.28)$$

Assim, observe o que ocorre na Eq. (2.28) para $\text{Tr}\rho^2 = 1$: neste caso, $s_{u_i} = 1$ e $s_{u_j} = 0$ para $i \neq j$, e, como há somente um autovalor não-nulo, o sistema será necessariamente um estado puro, pois $\rho = |u_i\rangle\langle u_i|$. Visto que o traço é uma propriedade independente da representação matricial em questão, o resultado do cálculo de $\text{Tr}\rho^2$ é suficiente para revelar se um sistema é puro ou uma mistura estatística: enquanto o primeiro caso está restrito à condição $\text{Tr}\rho^2 = 1$, o segundo apresenta $\text{Tr}\rho^2 < 1$.

No próximo tópico aplicaremos as propriedades do operador densidade para sistemas de um *qubit*.

2.2.1 O Operador Densidade para um Qubit

Mostramos na Eq. (2.3) que uma das possíveis representações para um *qubit* em função dos parâmetros θ e ϕ era equivalente a

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|1\rangle, \quad (2.29)$$

e, portanto, a matriz de seu respectivo operador densidade é dada por

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{bmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Na Eq. (A.42), por sua vez, demonstramos que qualquer matriz pode ser expressa como uma combinação de I , σ_x , σ_y e σ_z . Desta forma, a Eq. (2.30) pode ser escrita como

$$\rho = a(I) + b(\sigma_x) + c(\sigma_y) + d(\sigma_z); \quad (2.31)$$

e, visto que $\text{Tr}\rho = 1$, $\text{Tr}(I) = 2$ e $\text{Tr}(\sigma_x) = \text{Tr}(\sigma_y) = \text{Tr}(\sigma_z) = 0$, conclui-se que o coeficiente a deve ser obrigatoriamente igual a $1/2$. Logo, ρ pode ser reescrita em termos

dos parâmetros x , y e z das matrizes de Pauli como

$$\rho = \frac{1}{2} \{I + x(\sigma_x) + y(\sigma_y) + z(\sigma_z)\}, \quad (2.32)$$

onde $x = 2b$, $y = 2c$ e $z = 2d$, e sua forma matricial se reduz a

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Por sua vez, o cálculo do determinante da expressão (2.33) resulta em

$$\det \rho = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2 - z^2), \quad (2.34)$$

e, lembrando que o vetor \vec{r} da esfera de Bloch de raio unitário (Fig. 2.1) está associado às coordenadas x , y e z tal que $|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, então

$$\det \rho = \frac{1}{4}(1 - |\vec{r}|^2) \quad (2.35)$$

descreve a Eq. (2.34) de forma mais compacta.

Por outro lado, de acordo com a Eq. (2.24), os autovalores s_{u_1} e s_{u_2} de ρ nunca são negativos, e como a representação matricial em (2.25) implica em $\det \rho = s_{u_1} \times s_{u_2}$, segue que $\det \rho \geq 0$ e $0 \leq |\vec{r}| \leq 1$. Logo, o conhecimento das coordenadas de \vec{r} permite que qualquer estado quântico seja identificado na esfera de Bloch. Se o sistema for somente um estado puro, então $s_{u_1} = 1$ e $s_{u_2} = 0$ (ou o inverso) e $|\vec{r}| = 1$, mas, de um modo geral, $\det \rho > 0$ e $0 < |\vec{r}| < 1$. Em suma, estados puros são representados por pontos situados na superfície na esfera de Bloch, e sistemas mistos são descritos por vetores cujos módulos são menores do que o raio desta esfera.

Considere agora um caso especial. Suponha que exista uma probabilidade não-nula de que o *qubit* esteja em qualquer um dos estados arbitrários associados aos parâmetros θ e ϕ . Neste caso, a matriz do operador densidade para um sistema no qual todas as configurações são igualmente prováveis só poderia ser determinada se a Eq. (2.30) fosse integrada sobre todas as direções do espaço via

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \propto \frac{1}{2} I, \quad (2.36)$$

onde o termo $1/4\pi$ garante a normalização de ρ em relação ao parâmetro ϕ .

Repare que a Eq. (2.36) implica em $\rho^2 = \frac{1}{4} I \Rightarrow \text{Tr} \rho^2 < 1$ e $x = y = z = 0$ em (2.33), revelando que o sistema em questão resume-se a um ponto localizado no centro da esfera de Bloch. Se calcularmos o valor esperado de qualquer um dos operadores de

Pauli sobre ρ para este cenário, veremos que

$$\langle \sigma_k \rangle = \text{Tr}(\rho \sigma_k) = \text{Tr}\left(\frac{1}{2} I \sigma_k\right) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_k) = 0, \quad (2.37)$$

e, neste caso, dizemos que o sistema está despolarizado. Um sistema polarizado é aquele em que pelo menos uma das componentes $\langle \sigma_k \rangle$ (onde $k = x, y, z$) não é nula.

Para um estado qualquer descrito pela Eq. (2.32), o valor esperado do operador σ_k é dado por

$$\langle \sigma_k \rangle = \text{Tr}(\rho \sigma_k) = \text{Tr}\left\{\frac{1}{2}(I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)\sigma_k\right\} = k. \quad (2.38)$$

Observe com atenção o resultado da Eq. (2.38) e note que $\langle \sigma_k \rangle$ é igual à própria componente k . Deste modo, se vários estados descritos pelo mesmo operador densidade sobre o qual não há nenhuma informação disponível forem preparados de forma idêntica, é possível obter os valores das componentes x , y e z e determinar ρ com boa aproximação após a realização de um extenso número de medidas aleatórias para $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$ e $\langle \sigma_z \rangle$.

No próximo tópico discutiremos a relação do operador densidade com sistemas que possuem mais de um *qubit*.

2.2.2 O Operador Densidade para Sistemas Compostos

Finalizaremos esta seção analisando a estrutura do operador densidade para sistemas compostos de mais de um *qubit*. Sejam os operadores lineares e os estados de base $\{\hat{O}^A; |u_i\rangle\} \in H_A$ e $\{\hat{O}^B; |w_l\rangle\} \in H_B$, e seja $|\Psi\rangle$ o vetor de estado do sistema em $H_{A,B} \equiv H_A \otimes H_B$ tal que $|\Psi\rangle = \sum_{l=1}^{N_B} \sum_{i=1}^{N_A} D_{i,l}(|u_i\rangle \otimes |w_l\rangle)$, onde N_A e N_B são as respectivas dimensões dos espaços vetoriais H_A e H_B . O operador densidade deste sistema é dado por

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{j,p=1}^{N_A, N_B} \sum_{i,l=1}^{N_A, N_B} D_{i,l} D_{j,p}^* |u_i\rangle \otimes |w_l\rangle \langle u_j| \otimes \langle w_p|, \quad (2.39)$$

mas, para que todas as expressões sejam exibidas em uma notação mais compacta, omitiremos os limites indicados nas somas e condensaremos o produto tensorial $|\cdot\rangle \otimes |\cdot\rangle$ na forma $|\cdot\rangle|\cdot\rangle$. Logo, se definirmos o coeficiente $D_{i,l} D_{j,p}^*$ como

$$D_{i,l} D_{j,p}^* \equiv \rho_{il,jp}, \quad (2.40)$$

a Eq. (2.39) pode ser reescrita como

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{j,p} \sum_{i,l} \rho_{il,jp} |u_i\rangle |w_l\rangle \langle u_j| \langle w_p|. \quad (2.41)$$

Agora, suponha que apliquemos sobre o sistema um operador $\hat{O} \in H$ que

atua somente sobre os vetores que residem em H_A . Sob esta restrição, \hat{O} pode ser expresso como

$$\hat{O} = \hat{O}^A \otimes I^B, \quad (2.42)$$

onde \hat{O}^A atua apenas nos estados relativos ao subsistema H_A e I^B mantém inalterados os vetores pertencentes a H_B . Considere ainda que seja necessário calcular o valor esperado de \hat{O}^A , e observe que

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}^A \rangle &= \langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{O}) = \sum_{k,q} \langle u_k | \langle w_q | \rho \hat{O} | u_k \rangle | w_q \rangle \\ &= \sum_{k,q} \langle u_k | \langle w_q | \left(\sum_{j,p} \sum_{i,l} \rho_{il,jp} |u_i\rangle |w_l\rangle \langle u_j| \langle w_p| \right) (\hat{O}^A \otimes I^B) |u_k\rangle |w_q\rangle. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Como $\langle u_k | u_i \rangle = \delta_{k,i}$, $\langle w_q | w_l \rangle = \delta_{q,l}$ e $\langle w_p | w_q \rangle = \delta_{p,q}$, a Eq. (2.43) se reduz a

$$\langle \hat{O}^A \rangle = \sum_{i,j,l} \rho_{il,jl} \langle u_j | \hat{O}^A | u_i \rangle. \quad (2.44)$$

Neste ponto, faremos uma breve digressão para introduzir o conceito de traço parcial. Em um sistema cujos estados de base sejam combinações de vetores pertencentes a espaços vetoriais distintos A e B , o operador densidade relativo ao subsistema A é definido como

$$\rho^A \equiv \text{Tr}_B \rho = \sum_q \langle w_q | \rho | w_q \rangle, \quad (2.45)$$

e, analogamente, o operador densidade relativo ao subsistema B é definido como

$$\rho^B \equiv \text{Tr}_A \rho = \sum_i \langle u_i | \rho | u_i \rangle. \quad (2.46)$$

Por outro lado, segundo as Eqs. (2.41) e (2.45), o elemento de matriz $\rho_{i,j}^A$ é dado por

$$\begin{aligned} \rho_{i,j}^A &= \langle u_i | \rho^A | u_j \rangle = \langle u_i | \left(\sum_q \langle w_q | \rho | w_q \rangle \right) | u_j \rangle \\ &= \langle u_i | \left\{ \sum_q \langle w_q | \left(\sum_{j,p} \sum_{i,l} \rho_{il,jp} |u_i\rangle |w_l\rangle \langle u_j| \langle w_p| \right) |w_q\rangle \right\} | u_j \rangle = \sum_l \rho_{il,jl}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Com os resultados fornecidos pelas Eq. (2.47), podemos retornar à Eq. (2.44) e calcular o valor esperado de \hat{O}^A através de

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}^A \rangle &= \sum_{i,j,l} \rho_{il,jl} \langle u_j | \hat{O}^A | u_i \rangle = \sum_{i,j} \langle u_i | \rho^A | u_j \rangle \langle u_j | \hat{O}^A | u_i \rangle \\ &= \sum_i \langle u_i | \rho^A \left(\sum_j |u_j\rangle \langle u_j| \right) \hat{O}^A | u_i \rangle = \sum_i \langle u_i | \rho^A \hat{O}^A | u_i \rangle = \text{Tr}(\rho^A \hat{O}^A), \end{aligned} \quad (2.48)$$

e, de forma semelhante, $\langle \hat{O}^B \rangle = \text{Tr}(\rho^B \hat{O}^B)$.

Portanto, se pretendemos reduzir o operador densidade de um sistema para que este fique somente em função do subsistema A , calculamos a expressão dada por

$$\rho^A = \text{Tr}_B \rho = \sum_q \langle w_q | \rho | w_q \rangle \quad (2.49)$$

sobre os estados de base $|w_q\rangle$ de B . Se, por outro lado, desejarmos saber a probabilidade de este sistema reduzido estar associado a algum dos estados de base $|u_i\rangle$ de A , computamos

$$p_i = \langle u_i | \rho^A | u_i \rangle, \quad (2.50)$$

e, finalmente, se quisermos calcular o valor esperado de um operador \hat{O}^A que atua somente em estados pertencentes ao espaço vetorial H_A , basta efetuar a operação

$$\langle \hat{O}^A \rangle = \text{Tr}(\rho^A \hat{O}^A). \quad (2.51)$$

Note que os subsistemas A e B também podem ser compostos, pois em momento algum mencionamos que estes são formados por estados de base de apenas um *qubit*. Estas propriedades serão fundamentais para o cálculo das probabilidades associadas aos sistemas compostos que serão analisados nos próximos capítulos.

2.3 A Decomposição de Schmidt

Sistemas puros compostos de dois *qubits* podem ser descritos de uma forma particularmente elegante descoberta pelo matemático alemão Erhard Schmidt. Mostraremos ao longo da seção que, se p_i é um número real positivo que satisfaz a condição $\sum_{i=1}^{i=k} p_i = 1$ e $|\Psi\rangle$ é um estado puro bipartite tal que $|\Psi\rangle \in H_{A,B} \equiv H_A \otimes H_B$, podemos expandir este estado em função de um conjunto particular de bases ortonormais $|u_i\rangle \in H_A$ e $|u'_i\rangle \in H_B$ como

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{i=k} \sqrt{p_i} |u_i\rangle_a |u'_i\rangle_b = \sqrt{p_1} |1\rangle_a |1'\rangle_b \dots + \sqrt{p_k} |k\rangle_a |k'\rangle_b, \quad (2.52)$$

cuja expressão é denominada de *decomposição de Schmidt*.

Dado um estado arbitrário $|\Psi\rangle \in H_{A,B} \equiv H_A \otimes H_B$, é sempre possível expressá-lo em termos de estados de base $|u_i\rangle \in H_A$ e $|w_l\rangle \in H_B$ como

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,l} D_{i,l} |u_i\rangle_a |w_l\rangle_b, \quad (2.53)$$

ou, de forma mais compacta,

$$|\Psi\rangle = \sum_i |u_i\rangle_a |\tilde{u}_i\rangle_b, \quad (2.54)$$

onde $|\tilde{u}_i\rangle_b \equiv \sum_l D_{i,l} |w_l\rangle_b$. Embora o conjunto de todos os estados do tipo $|u_i\rangle_a |w_l\rangle_b$ seja uma base ortonormal, não devemos esperar que a mesma propriedade permaneça válida para a combinação dos pares $|u_i\rangle_a |\tilde{u}_i\rangle_b$ (salvo em casos particulares).

Como ainda não fixamos nenhuma restrição para a escolha dos estados de base, selecionaremos $|u_i\rangle_a$ admitindo que a representação de ρ^A seja diagonal nesta base. Logo,

$$\rho^A = \sum_{i=1}^{i=k} p_i |u_i\rangle_{aa} \langle u_i|, \quad (2.55)$$

e, lembrando que operadores densidade são hermitianos, não-negativos e possuem traço unitário (Eqs. (2.21), (2.22) e (2.23)), então $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{i=k} p_i = 1$.

Visto que ρ^A é a matriz densidade reduzida para o subsistema A obtida através do cálculo de $\text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$, a Eq. (2.55) deve ser idêntica a

$$\begin{aligned} \rho^A &= \text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|) \\ &= \sum_q {}_b\langle w_q | \left(\sum_{i,j} |u_i\rangle_a |\tilde{u}_i\rangle_b \langle u_j| {}_b\langle \tilde{u}_j | \right) |w_q\rangle_b = \sum_q |u_i\rangle_{aa} \langle u_j| \left(\sum_{i,j} {}_b\langle w_q | \tilde{u}_i\rangle_b \langle \tilde{u}_j | w_q\rangle_b \right) \\ &= \sum_{i,j} |u_i\rangle_{aa} \langle u_j| \left(\sum_q {}_b\langle \tilde{u}_j | w_q\rangle_b \langle w_q | \tilde{u}_i\rangle_b \right) = \sum_{i,j} |u_i\rangle_{aa} \langle u_j| {}_b\langle \tilde{u}_j | \left(\sum_q |w_q\rangle_{bb} \langle w_q| \right) |\tilde{u}_i\rangle_b \\ &= \sum_{i,j} |u_i\rangle_{aa} \langle u_j| {}_b\langle \tilde{u}_j | \tilde{u}_i\rangle_b = \sum_{i,j} {}_b\langle \tilde{u}_j | \tilde{u}_i\rangle_b |u_i\rangle_{aa} \langle u_j|, \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde $|w_q\rangle_b$ é uma base ortonormal em H_B . Logo, a relação ${}_b\langle \tilde{u}_j | \tilde{u}_i\rangle_b \equiv p_i \delta_{i,j}$ deve ser satisfeita, e, portanto, os estados $|\tilde{u}_i\rangle_b$ serão ortogonais (mas não ortonormais).

Se os últimos forem expressos em função de um fator de normalização $|u'_i\rangle_b$ tal que $|u'_i\rangle_b \equiv |\tilde{u}_i\rangle_b / \sqrt{p_i}$, a Eq. (2.54) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_{i=1}^{i=k} |u_i\rangle_a |\tilde{u}_i\rangle_b = \sum_{i=1}^{i=k} |u_i\rangle_a (\sqrt{p_i} |u'_i\rangle_b) = \sum_{i=1}^{i=k} \sqrt{p_i} |u_i\rangle_a |u'_i\rangle_b \\ &= \sqrt{p_1} |1\rangle_a |1'\rangle_b \dots + \sqrt{p_k} |k\rangle_a |k'\rangle_b, \end{aligned} \quad (2.57)$$

e a demonstração está completa.

Ao analisar a matriz

$$\rho^B = \text{Tr}_A(\rho) = \text{Tr}_A \left(\sum_{i,j} \sqrt{p_i} \sqrt{p_j} |u_i\rangle_a |u'_i\rangle_b \langle u_j| {}_b\langle u'_j| \right) = \sum_{i=1}^{i=k} p_i |u'_i\rangle_{bb} \langle u'_i|, \quad (2.58)$$

constatamos que o número de autovalores não-nulos k é idêntico ao de ρ^A . Esta é uma propriedade de sistemas bipartites puros denominada de *número de Schmidt* do estado

$|\Psi\rangle$, o qual é invariante por transformações unitárias locais e cujo valor é utilizado para distinguir estados separáveis de sistemas emaranhados. Observe na Eq. (2.57) que a função de onda descrita por $|\Psi\rangle$ é expressa por um estado separável quando o número de Schmidt é igual a um, e que para $k > 1$ e $p_i \neq 1$ o sistema bipartite em questão sempre estará emaranhado. Mostraremos a seguir um exemplo de aplicação da decomposição de Schmidt ao reformular a demonstração da Eq. (2.52) para um estado bipartite puro de dois *qubits*.

Se um sistema bipartite puro e arbitrário de dois *qubits* for descrito por

$$|\Psi\rangle_{a,b} = a|00\rangle_{a,b} + b|01\rangle_{a,b} + c|10\rangle_{a,b} + d|11\rangle_{a,b} \quad (2.59)$$

e sua respectiva matriz densidade for expressa como

$$\rho^{A,B} = \begin{bmatrix} |a|^2 & ba^* & ca^* & da^* \\ ab^* & |b|^2 & cb^* & db^* \\ ac^* & bc^* & |c|^2 & dc^* \\ ad^* & bd^* & cd^* & |d|^2 \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

a matriz densidade relativa ao subsistema A será equivalente a

$$\rho^A = \text{Tr}_B(\rho^{A,B}) = \begin{bmatrix} |a|^2 + |b|^2 & ca^* + db^* \\ ac^* + bd^* & |c|^2 + |d|^2 \end{bmatrix}; \quad (2.61)$$

onde $\{a, b, c, d\}$ são coeficientes complexos e $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$.

Na demonstração da validade da decomposição de Schmidt, escolhemos uma base apropriada para a qual a representação matricial de ρ^A seria diagonal (Eq. (2.55)). Porém, como o objetivo deste exemplo é o de construir um procedimento geral para qualquer vetor de estado de dois *qubits*, não estabeleceremos valores iniciais para os parâmetros $\{a, b, c, d\}$, salvo o fato de que os últimos serão considerados como números reais (sem perda de generalidade) para simplificar os cálculos subseqüentes.

Posto isto, é necessário conhecer os autovalores e autovetores associados ao subsistema A para que este possa ser reescrito em função de uma base diagonal. O cálculo de $\det(\rho^A - s_{u_i}I) \equiv 0$ fornece o par de autovalores

$$s_{u_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4(ad - bc)^2} \right) \quad \text{e} \quad s_{u_1} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4(ad - bc)^2} \right) \quad (2.62)$$

e os respectivos autovetores dados por

$$|u_0\rangle = (N_{u_0}) \begin{bmatrix} \frac{1 - 2(c+d)^2 - \sqrt{1 - 4(ad - bc)^2}}{2(ac + bd)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |u_1\rangle = (N_{u_1}) \begin{bmatrix} \frac{1 - 2(c+d)^2 + \sqrt{1 - 4(ad - bc)^2}}{2(ac + bd)} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (2.63)$$

onde os coeficientes N_{u_0} e N_{u_1} são equivalentes a

$$N_{u_0} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + \left(\frac{1-2(c+d)^2 - \sqrt{1-4(ad-bc)^2}}{ac+bd} \right)^2} \quad \text{e} \quad N_{u_1} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + \left(\frac{1-2(c+d)^2 + \sqrt{1-4(ad-bc)^2}}{ac+bd} \right)^2}. \quad (2.64)$$

O processo de diagonalização que utilizaremos nesta etapa (Griffiths, 2005) torna-se factível quando existe uma matriz unitária e invertível S (a matriz de diagonalização) para a qual a matriz equivalente ao produto $S\rho^A S^{-1}$ seja diagonal. Enquanto a matriz inversa S^{-1} é construída de forma que cada coluna contenha os autovetores da matriz que será diagonalizada como

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} {}_a\langle 0|u_0\rangle_a & {}_a\langle 0|u_1\rangle_a \\ {}_a\langle 1|u_0\rangle_a & {}_a\langle 1|u_1\rangle_a \end{bmatrix}; \quad (2.65)$$

S pode ser determinada utilizando-se os cofatores da matriz inversa ou via regra de Cramer.

Com isso, a representação diagonal de ρ^A é dada por

$$S\rho^A S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4(ad - bc)^2} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4(ad - bc)^2} \right) \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

na qual, como esperado, os elementos da diagonal principal são os próprios autovalores s_{u_0} e s_{u_1} (uma vez que a nova base de ρ^A é formada pelos autovetores $|u_0\rangle$ e $|u_1\rangle$). De posse destas informações, podemos reescrever o estado global ρ em função dos estados de base $|u_i\rangle_a$ e repetir a seqüência de passos adotada na dedução da decomposição de Schmidt.

A relação entre as bases $\{|u_0\rangle_a, |u_1\rangle_a\}$ e $\{|0\rangle_a, |1\rangle_a\}$ implica em um sistema linear simples de quatro incógnitas dado por

$$\begin{cases} |u_0\rangle = y_1|0\rangle + y_2|1\rangle; \\ |u_1\rangle = y_3|0\rangle + y_4|1\rangle; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |0\rangle = x_1|u_0\rangle + x_2|u_1\rangle; \\ |1\rangle = x_3|u_0\rangle + x_4|u_1\rangle; \end{cases} \quad (2.67)$$

onde $y_1 = {}_1\langle 0|u_0\rangle_1$, $y_2 = {}_1\langle 1|u_0\rangle_1$, $y_3 = {}_0\langle 0|u_1\rangle_1$, $y_4 = {}_1\langle 1|u_1\rangle_1$ e $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ são os coeficientes que devem ser determinados. Como os parâmetros $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ são reais, as relações $x_1 = {}_1\langle u_0|0\rangle_1 = y_1^*$, $x_2 = {}_1\langle u_1|0\rangle_1 = y_3^*$, $x_3 = {}_1\langle u_0|1\rangle_1 = y_2^*$ e $x_4 = {}_1\langle u_1|1\rangle_1 = y_4^*$ também fornecem soluções reais e permitem que o estado inicial seja reescrito como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{a,b} &= (ax_1 + cx_3)|u_0\rangle_a|0\rangle_b + (bx_1 + dx_3)|u_0\rangle_a|1\rangle_b \\ &+ (ax_2 + cx_4)|u_1\rangle_a|0\rangle_b + (bx_2 + dx_4)|u_1\rangle_a|1\rangle_b. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ao denotar os coeficientes associados aos novos estados de base por $D_{0,0} = ax_1 + cx_3$, $D_{0,1} = bx_1 + dx_3$, $D_{1,0} = ax_2 + cx_4$ e $D_{1,1} = bx_2 + dx_4$, recorreremos à ex-

pressão $|\Psi\rangle = \sum_{i,l} D_{i,l}|u_i\rangle_a|w_l\rangle_b$ fornecida pela Eq. (2.53) e efetuamos a substituição das combinações $\sum_l D_{i,l}|w_l\rangle_b$ por $|\tilde{u}_i\rangle_b \equiv \sum_l D_{i,l}|w_l\rangle_b$, gerando o conjunto de estados $|\tilde{u}_0\rangle_b = D_{0,0}|0\rangle_2 + D_{0,1}|1\rangle_b$ e $|\tilde{u}_1\rangle_b = D_{1,0}|0\rangle_2 + D_{1,1}|1\rangle_b$. Como previsto, os estados

$$|\tilde{u}_0\rangle_b = \begin{bmatrix} D_{0,0} \\ D_{0,1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |\tilde{u}_1\rangle_b = \begin{bmatrix} D_{1,0} \\ D_{1,1} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

são ortogonais, visto que ${}_b\langle\tilde{u}_0|\tilde{u}_0\rangle_b = s_{u_0}$, ${}_b\langle\tilde{u}_0|\tilde{u}_1\rangle_b = 0$, ${}_b\langle\tilde{u}_1|\tilde{u}_0\rangle_b = 0$ e ${}_b\langle\tilde{u}_1|\tilde{u}_1\rangle_b = s_{u_1}$.

Deste modo, se introduzirmos um novo conjunto de estados ortonormais $|u'_i\rangle_b \equiv |\tilde{u}_i\rangle_b/\sqrt{p_i}$ onde

$$p_0 = s_{u_0} \quad \text{e} \quad p_1 = s_{u_1}, \quad (2.70)$$

$|\Psi\rangle$ pode finalmente ser representado através da decomposição de Schmidt em função dos estados de base $|u_i\rangle_a|u'_i\rangle_b$ como

$$|\Psi\rangle = \sqrt{p_0}|u_0\rangle_a|u'_0\rangle_b + \sqrt{p_1}|u_1\rangle_a|u'_1\rangle_b, \quad (2.71)$$

onde os últimos satisfazem a condição necessária ${}_a\langle u_i|u_j\rangle_a \equiv {}_b\langle u'_i|u'_j\rangle_b \equiv \delta_{i,j}$.

Antes de encerrar, mostraremos que existe uma relação direta entre o número de Schmidt e a grandeza $C(|\Psi\rangle)$ denominada de *concorrência*, a qual está associada ao conceito de *emaranhamento de formação* (Wootters, 1998). Para o exemplo em questão, a concorrência é dada por

$$C(|\Psi\rangle) = 2|ad - bc|, \quad (2.72)$$

o que, por sua vez, permite que os autovalores de ρ^A possam ser expressos como

$$s_{u_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - C(|\Psi\rangle)^2} \right) \quad \text{e} \quad s_{u_1} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - C(|\Psi\rangle)^2} \right), \quad (2.73)$$

onde $s_{u_0} < s_{u_1}$.

É evidente que apenas o autovalor s_{u_0} pode ser nulo (uma vez que o valor mínimo de s_{u_1} é igual a $1/2$), e tal condição é satisfeita quando

$$1 - \sqrt{1 - C(|\Psi\rangle)^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - C(|\Psi\rangle)^2} = 1 \Rightarrow C(|\Psi\rangle) = 0, \quad (2.74)$$

o que é possível apenas se $s_{u_1} = 1$ e $ad = bc$. A última condição implica no desmembramento de $|\Psi\rangle_{a,b}$ como um produto de dois estados puros $|\phi\rangle_a = z_0|0\rangle_a + z_1|1\rangle_a$ e

$|\varphi\rangle_b = w_0|0\rangle_b + w_1|1\rangle_b$, de forma que

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{a,b} &= |\phi\rangle_a |\varphi\rangle_b = (z_0|0\rangle_a + z_1|1\rangle_a)(w_0|0\rangle_b + w_1|1\rangle_b) \\ &\equiv a|00\rangle_{a,b} + b|01\rangle_{a,b} + c|10\rangle_{a,b} + d|11\rangle_{a,b}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

onde $a = z_0w_0$, $b = z_0w_1$, $c = z_1w_0$ e $d = z_1w_1$ garantem a igualdade $ad = bc$ e refletem a ausência de emaranhamento do estado bipartite.

A grandeza $C(|\Psi\rangle)$ também pode ser analisada em função dos autovalores s_{u_0} e s_{u_1} . Segundo a Eq. (2.73),

$$C(|\Psi\rangle) = \sqrt{1 - (1 - 2s_{u_0})^2} = \sqrt{1 - (1 - 2s_{u_1})^2}, \quad (2.76)$$

e, como pudemos constatar, $C(|\Psi\rangle) = 0$ para $s_{u_0} = 0$ ou $s_{u_1} = 1$. Como $0 \leq s_{u_0} \leq 1/2$ e $1/2 \leq s_{u_1} \leq 1$, a concorrência é uma função contínua situada no intervalo $[0, 1]$, cujo valor máximo $C(|\Psi\rangle) = 1$ ocorre para $s_{u_0} = s_{u_1} = 1/2$. Note que a dependência de $C(|\Psi\rangle)$ é diretamente proporcional a s_{u_0} e exibe comportamento inverso em relação a s_{u_1} , e, de fato, a primeira associação será válida sempre que $C(|\Psi\rangle)$ estiver expressa em termos do menor autovalor do sistema sob análise (Wootters, 1998).

Todas as propriedades demonstradas nesta seção são válidas para sistemas bipartite cujos estados de base $|k\rangle_a |k'\rangle_b$ possuam dimensão $N \geq 2$. Em suma, o sistema ρ^A admite somente um autovalor não-nulo e o estado $|\Psi\rangle_{a,b}$ será separável se e apenas se o número de Schmidt for igual a um, cenário no qual a concorrência $C(|\Psi\rangle)$ é nula. Do contrário, o estado bipartite estará emaranhado, e, quando o número de Schmidt for máximo e os autovalores do sistema forem idênticos entre si, $|\Psi\rangle_{a,b}$ será um estado maximamente emaranhado.

2.4 Purificação

A purificação de sistemas arbitrários está relacionada aos conceitos discutidos na seção 2.3 sobre a decomposição de Schmidt. Seja ρ^A o sistema de interesse e ρ^B um sistema independente que será convenientemente associado ao primeiro. Mostraremos que é sempre possível escolher ρ^B de modo que o sistema bipartite resultante seja um estado puro $|\Psi\rangle$ e a condição $\rho^A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi|$ seja satisfeita no processo de *purificação de estados quânticos*.

Vimos que a Eq. (2.53) descreve de forma geral um estado puro de dois *qubits* como

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,l=1}^{N_A, N_B} D_{i,l} |u_i\rangle_a |w_l\rangle_b, \quad (2.77)$$

onde $|u_i\rangle \in H_A$ e $|w_l\rangle \in H_B$. Por sua vez, a Eq. (2.39) apresenta a expressão geral para a

matriz densidade deste estado dada por

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{j,p=1}^{N_A, N_B} \sum_{i,l=1}^{N_A, N_B} D_{i,l} D_{j,p}^* (|u_i\rangle|w_l\rangle)\langle u_j|\langle w_p|, \quad (2.78)$$

permitindo que ρ^A seja calculado através da expressão

$$\begin{aligned} \rho^A &= \text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_q \langle w_q| \left(\sum_{j,p} \sum_{i,l} D_{i,l} D_{j,p}^* (|u_i\rangle|w_l\rangle)\langle u_j|\langle w_p| \right) |w_q\rangle \\ &= \sum_l \sum_{i,j} D_{i,l} D_{j,l}^* |u_i\rangle\langle u_j|. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Se dispusermos de um sistema arbitrário expresso por $\rho^A = \sum_{i,j} \rho_{i,j}^A |u_i\rangle\langle u_j|$ e quisermos associá-lo a um vetor de estado $|\Psi\rangle$ para o qual $\rho^A = \text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$, basta encontrar os coeficientes $D_{i,l}$ e $D_{j,l}^*$ que satisfaçam a relação $\rho_{ij}^A \equiv \sum_l D_{i,l} D_{j,l}^*$, e, de fato, tal solução sempre existirá se H_B possuir dimensão igual ou superior à de H_A (Benenti et al., 2007). Comprovaremos esta afirmação no próximo exemplo, no qual o sistema ρ^A será descrito por um *qubit*.

Sabendo que os elementos ρ_{ij}^A obedecem à relação

$$\begin{aligned} \rho_{00}^A &= D_{00} D_{00}^* + D_{01} D_{01}^*, \quad \rho_{01}^A = D_{00} D_{10}^* + D_{01} D_{11}^*, \\ \rho_{10}^A &= D_{10} D_{00}^* + D_{11} D_{01}^*, \quad \rho_{11}^A = D_{10} D_{10}^* + D_{11} D_{11}^* \end{aligned} \quad (2.80)$$

e que ρ_{00}^A e ρ_{11}^A sempre podem ser descritos como elementos reais através de transformações unitárias adequadas, escolheremos $D_{01} = 0$ para simplificar o cálculo dos elementos restantes e consideraremos D_{10} e D_{11} como números reais. Assim, para

$$D_{00} = \sqrt{\rho_{00}^A}, \quad D_{10} = \frac{(\rho_{01}^A)^* = \rho_{10}^A}{\sqrt{\rho_{00}^A}} \quad \text{e} \quad D_{11} = \sqrt{\frac{\rho_{00}^A \rho_{11}^A - |\rho_{01}^A|^2}{\rho_{00}^A}}, \quad (2.81)$$

o estado purificado resultante se resume a

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\rho_{00}^A} |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \frac{(\rho_{01}^A)^*}{\sqrt{\rho_{00}^A}} |1\rangle_1 |0\rangle_2 + \sqrt{\frac{\rho_{00}^A \rho_{11}^A - |\rho_{01}^A|^2}{\rho_{00}^A}} |1\rangle_1 |1\rangle_2. \quad (2.82)$$

Como a escolha dos elementos $D_{i,l}$ e $D_{j,l}$ não invalida a relação $\rho_{ij}^A = \sum_l D_{i,l} D_{j,l}^*$, a Eq. (2.82) representa um método de purificação que é válido para qualquer sistema descrito por ρ^A . Quando este último estiver expresso em sua representação diagonal $\rho^A = \sum_i p_i |u_i\rangle\langle u_i| = \rho_{00}^A |u_0\rangle\langle u_0| + \rho_{11}^A |u_1\rangle\langle u_1|$, o cálculo dos coeficientes $D_{i,l}$ e $D_{j,l}^*$ fica ainda mais simplificado: $D_{00} = \sqrt{\rho_{00}^A}$, $D_{11} = \sqrt{\rho_{11}^A}$ e $D_{01} = D_{10} = 0$. Com isso, se o últimos forem redefinidos como $\rho_{00}^A \equiv p_0$ e $\rho_{11}^A \equiv p_1$, o estado purificado da Eq.

(2.82) passa a ser dado por

$$|\Psi\rangle = \sqrt{p_0}|0\rangle_a|0\rangle_b + \sqrt{p_1}|1\rangle_a|1\rangle_b = \sum_{i=0}^1 \sqrt{p_i}|u_i\rangle_a|u'_i\rangle_b, \quad (2.83)$$

expressão semelhante à apresentada na Eq. (2.52). Como afirmamos no início desta seção, há uma relação direta entre a decomposição de Schmidt e a purificação de estados quânticos.

2.5 Os Operadores de Kraus

Os operadores de Kraus desempenham um papel fundamental no desenvolvimento dos modelos de decoerência que apresentaremos nos capítulos seguintes. Inicialmente, suponha que estejamos interessados em descrever um sistema ρ^A que coexiste sem interagir com $\rho^B = |0\rangle_{bb}\langle 0|$ em algum instante de tempo t_0 , assumindo *a priori* que o último represente o ambiente externo à ρ^A . Se, em um dado momento, um operador unitário $U^{A,B}(t_0, t)$ atuar sobre todo o sistema global descrito por $\rho^{A,B} = \rho^A \otimes |0\rangle_{bb}\langle 0|$, a dinâmica resultante será dada por

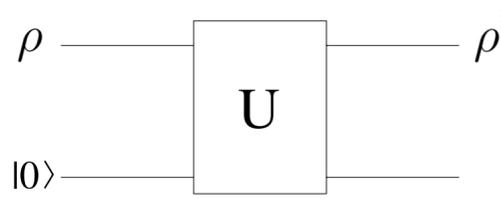


Figura 2.2: Representação esquemática de um circuito que simula o processo de decoerência sobre um estado de entrada arbitrário ρ .

$$\rho'^{A,B} = U\rho^{A,B}U^\dagger = U(\rho^A \otimes |0\rangle_{bb}\langle 0|)U^\dagger, \quad (2.84)$$

onde U é a forma contraída de $U^{A,B}(t_0, t)$. A Fig. 2.2 ilustra o modelo simplificado de um circuito que simula a Eq. (2.84) para um estado de entrada arbitrário ρ .

Observe que a escolha de $|0\rangle_{bb}\langle 0|$ não acarreta perda de generalidade, pois, de acordo com a discussão na seção 2.4, o processo de purificação permite que qualquer estado possa ser acoplado a uma escolha adequada de um *qubit* auxiliar onde a associação de ambos resulte em um estado puro de dois *qubits*. Logo, se ρ^B fosse um estado misto, poderíamos purificá-lo e associar a notação $|0\rangle_{bb}\langle 0|$ ao par resultante.

Como ρ^A é o sistema cuja análise nos interessa, precisamos saber de que modo sua dinâmica evolui após a ação de $U^{A,B}(t_0, t)$. Ao computar

$$\rho'^A = \text{Tr}_B(\rho'^{A,B}) = \text{Tr}_B [U(\rho^A \otimes |0\rangle_{bb}\langle 0|)U^\dagger] = \sum_k {}_b \langle w_k | U | 0 \rangle_b \rho^A {}_b \langle 0 | U^\dagger | w_k \rangle_b, \quad (2.85)$$

o físico alemão Karl Kraus (Kraus et al., 1983) atribuiu as notações E_k e E_k^\dagger para a

expressão ${}_b\langle w_k|U|0\rangle_b$ e seu respectivo complexo conjugado ${}_b\langle 0|U^\dagger|w_k\rangle_b$, compactando a Eq. (2.85) para

$$\rho'^A = \sum_k E_k \rho^A E_k^\dagger, \quad (2.86)$$

ou, de forma explícita,

$$\rho'^A(t) = \sum_k E_k(t_0, t) \rho^A(t_0) E_k^\dagger(t_0, t). \quad (2.87)$$

Por este motivo, os termos E_k e E_k^\dagger foram batizados de *operadores de Kraus*.

O cálculo de $\sum_k E_k^\dagger E_k$ revela uma das propriedades mais importantes associadas aos termos E_k . Como a transformação U é unitária,

$$\sum_k E_k^\dagger E_k = \sum_k {}_b\langle 0|U^\dagger|w_k\rangle_b {}_b\langle w_k|U|0\rangle_b = {}_b\langle 0|U^\dagger U|0\rangle_b = {}_b\langle 0|0\rangle_b = I, \quad (2.88)$$

também conhecida como a Relação de Completeza para os operadores de Kraus. Outra característica relevante consiste na preservação das propriedades que caracterizam ρ^A (apresentadas nas Eqs. (2.21), (2.22) e (2.23)) após o mapeamento de ρ^A na transformação $S: \rho^A \rightarrow \rho'^A = \sum_k E_k \rho^A E_k^\dagger$, visto que

(1) ρ'^A é hermitiano:

$$\left(\rho'^A\right)^\dagger = \left(\sum_k E_k \rho^A E_k^\dagger\right)^\dagger = \sum_k \left(E_k^\dagger\right)^\dagger \left(\rho^A\right)^\dagger E_k = \sum_k E_k \rho^A E_k^\dagger = \rho'^A; \quad (2.89)$$

(2) a unitariedade do traço é preservada:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho'^A) &= \text{Tr}\left(\sum_k E_k \rho^A E_k^\dagger\right) = \sum_k \text{Tr}\left(\rho^A E_k^\dagger E_k\right) \\ &= \text{Tr}\left(\rho^A \sum_k E_k^\dagger E_k\right) = \text{Tr}(\rho^A) = 1; \end{aligned} \quad (2.90)$$

(3) ρ'^A é não-negativo:

$${}_a\langle \Psi|\rho'^A|\Psi\rangle_a = \sum_k {}_a\langle \Psi|E_k \rho^A E_k^\dagger|\Psi\rangle_a = \sum_k {}_a\langle \Phi_k|\rho^A|\Phi_k\rangle_a \geq 0; \quad (2.91)$$

onde $|\Psi\rangle_a \in H_A$ e $|\Phi_k\rangle_a \equiv E_k^\dagger|\Psi\rangle_a$.

Desta forma, os requisitos necessários para que um sistema seja classificado como um operador densidade são preservados na conversão de ρ^A para ρ'^A .

As Eqs. (2.85) e (2.86) revelam que a evolução unitária de um sistema composto gera uma representação via operador-soma que pode ser simplificada com a

adoção dos operadores de Kraus. Se o raciocínio que leva à Eq. (2.86) for elaborado no sentido inverso, as propriedades e conclusões subseqüentes continuarão sendo válidas, como mostraremos a seguir.

Considere um operador de evolução U que atua sobre os estados $|\Psi\rangle_a$ e $|0\rangle_b$ sob as seguintes hipóteses:

$$U|\Psi\rangle_a|0\rangle_b \equiv \sum_k E_k|\Psi\rangle_a|w_k\rangle_b \text{ e } E_k^\dagger E_k = I. \quad (2.92)$$

Note que a ação de U consiste em transformar o estado inicial $|\Psi\rangle_a|0\rangle_b$ em um estado emaranhado equivalente a $\sum_k E_k|\Psi\rangle_a|w_k\rangle_b$, onde a única informação disponível sobre os estados E_k e E_k^\dagger é a de que a relação de completeza $E_k^\dagger E_k = I$ da Eq. (2.88) é satisfeita. Ao calcular o produto escalar ${}_a\langle\Psi|{}_b\langle 0|U^\dagger U|\Psi\rangle_a|0\rangle_b$, verificamos que

$$\begin{aligned} {}_a\langle\Psi|{}_b\langle 0|U^\dagger U|\Psi\rangle_a|0\rangle_b &= (\sum_p {}_a\langle\Psi|{}_b\langle w_p|E_p^\dagger)(\sum_l E_l|\Psi\rangle_a|w_l\rangle_b) \\ &= \left(\sum_{l,p} {}_a\langle\Psi|E_p^\dagger E_l|\Psi\rangle_a {}_b\langle w_p|w_l\rangle_b\right) = \sum_l {}_a\langle\Psi|E_l^\dagger E_l|\Psi\rangle_a = {}_a\langle\Psi|\Psi\rangle_a = 1; \end{aligned} \quad (2.93)$$

e, portanto, U é um operador unitário em relação ao estado $|\Psi\rangle_a|0\rangle_b$.

Se desejarmos estender esta análise para um operador densidade geral ρ^A , basta lembrar que o mesmo pode ser representado por $\rho^A = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle_a {}_a\langle\Psi_i|$, de acordo com a Eq. (2.12). Assim,

$$\begin{aligned} \rho'^A &= \text{Tr}_B (\sum_i U(\rho^A \otimes \rho^B)U^\dagger) \\ &= \text{Tr}_B (\sum_i U(p_i |\Psi_i\rangle_a {}_a\langle\Psi_i|)(|0\rangle_b {}_b\langle 0|)U^\dagger) = \text{Tr}_B (\sum_i p_i U|\Psi_i\rangle_a|0\rangle_b {}_a\langle\Psi_i|{}_b\langle 0|U^\dagger) \\ &= \sum_q {}_b\langle w_q| \left(\sum_i p_i (\sum_l E_l |\Psi_i\rangle_a |w_l\rangle_b) (\sum_p {}_a\langle\Psi_i|{}_b\langle w_p|E_p^\dagger)\right) |w_q\rangle_b \\ &= \sum_i p_i \sum_k E_k |\Psi_i\rangle_a {}_a\langle\Psi_i|E_k^\dagger = \sum_k \sum_i E_k (p_i |\Psi_i\rangle_a {}_a\langle\Psi_i|)E_k^\dagger = \sum_k E_k \rho^A E_k^\dagger, \end{aligned} \quad (2.94)$$

cujos resultados são idênticos aos da Eq. (2.86); logo, ρ^A pode ser mapeado por operadores que satisfazem as mesmas propriedades obedecidas pelos operadores de Kraus através da relação $\rho'^A \rightarrow \sum_k E_k \rho^A E_k^\dagger$. A seguir, introduziremos um teorema fundamental associado a estes operadores que não será demonstrado, e, para mais informações, consulte [Benenti et al., 2007](#).

Teorema da representação de Kraus: Se um mapa $S : \rho^A \rightarrow \rho'^A$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) é linear: $S(p_1 \rho^A + p_2 \rho^B) = p_1 S(\rho^A) + p_2 S(\rho^B)$;
- (2) preserva a hermiticidade do sistema;
- (3) preserva o traço do sistema;
- (4) é completamente positivo;

então este mapa possui representações via operador-soma e evolução unitária (Eqs. (2.86) e (2.92), respectivamente).

Deste modo, O Teorema da representação de Kraus garante a validade de todas as equações deduzidas ao longo desta seção quando os requisitos (1 – 4) forem satisfeitos pelo mapa responsável pela transição $\rho^A \rightarrow \rho'^A$ contida no espaço composto $H_{A,B} = H_A \otimes H_B$. Para o caso da Eq. (2.92), podemos supor sem perda de generalidade que não havia emaranhamento entre os sistemas ρ^A e ρ^B antes da ação de S , como mostraremos a seguir.

Considere o sistema composto de dois *qubits* $\rho^{A,B} = \rho^A \otimes \rho^B = \rho^A \otimes |0\rangle_{bb}\langle 0|$ e um operador geral U que atua no espaço $H \equiv H_A \otimes H_B$, o qual satisfaz os requisitos estabelecidos pelo Teorema da representação de Kraus. Se representarmos as matrizes associadas a estes objetos de forma explícita em função do subsistema B , $\rho^{A,B}$ e U podem ser descritos como

$$\begin{aligned} \rho^{A,B} &= (\rho_{00}^A |0\rangle_{aa}\langle 0| + \rho_{01}^A |0\rangle_{aa}\langle 1| + \rho_{10}^A |1\rangle_{aa}\langle 0| + \rho_{11}^A |1\rangle_{aa}\langle 1|) \otimes |0\rangle_{bb}\langle 0| \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} \rho_{00}^A & \rho_{01}^A & 0 & 0 \\ \rho_{10}^A & \rho_{11}^A & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{c|c} \rho^A & \mathbf{0} \\ \hline - & - \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \text{ e} \\ U &= \mathbf{A} \otimes |0\rangle_{bb}\langle 0| + \mathbf{B} \otimes |0\rangle_{bb}\langle 1| + \mathbf{C} \otimes |1\rangle_{bb}\langle 0| + \mathbf{D} \otimes |1\rangle_{bb}\langle 1| \equiv \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline - & - \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right], \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde ρ^A , $\mathbf{0}$, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes 2x2 associadas ao subsistema A (sendo $\mathbf{0}$ constituída apenas de elementos nulos). Repare que a representação das matrizes $\rho^{A,B}$ e U na Eq. (2.95) não segue o ordenamento da base computacional padrão.

Sabendo que a dinâmica de ρ^A após a ação de U sobre o sistema global é dada por $\text{Tr}_B(U\rho^A U^\dagger)$, então

$$\begin{aligned} \rho'^A &= \text{Tr}_B \left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \rho^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}^\dagger & \mathbf{C}^\dagger \\ \mathbf{B}^\dagger & \mathbf{D}^\dagger \end{array} \right] \right) = \text{Tr}_B \left(\left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}\rho^A\mathbf{A}^\dagger & \mathbf{A}\rho^A\mathbf{C}^\dagger \\ \mathbf{C}\rho^A\mathbf{A}^\dagger & \mathbf{C}\rho^A\mathbf{C}^\dagger \end{array} \right] \right) \\ &= \mathbf{A}\rho^A\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{C}\rho^A\mathbf{C}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Por hipótese, U é um operador que se enquadra no Teorema da representação de Kraus e satisfaz todos os itens propostos pelo mesmo. Neste caso, o item 3 afirma que a unitarie-

dade do traço deve ser preservada, e, portanto,

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\rho^A) &= \text{Tr}(\rho'^A) = \text{Tr}(\mathbf{A}\rho^A\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{C}\rho^A\mathbf{C}^\dagger) \\ &= \text{Tr}(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\rho^A + \mathbf{C}^\dagger\mathbf{C}\rho^A) = \text{Tr}\{(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} + \mathbf{C}^\dagger\mathbf{C})\rho^A\};\end{aligned}\quad (2.97)$$

o que implica em $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} + \mathbf{C}^\dagger\mathbf{C} \equiv I$ (onde I é a matriz Identidade 2×2). Com isso, duas informações importantes surgem desta análise. A primeira é que a Eq. (2.86) implica que A e C devem ser classificados como operadores de Kraus, e a segunda é decorrente do resultado fornecido pela Eq. (2.97), ao revelar que dois operadores de Kraus geram o mapa mais simples possível associado a transformações sobre um único *qubit* (excluindo-se a hipótese de uma evolução unitária dada por um operador do tipo $U^\dagger U \equiv I$).

Vejamos um outro exemplo que ilustra a aplicação dos operadores de Kraus. Seja a transformação unitária U dada por

$$U = \cos \alpha (I^A \otimes I^B) + i \sin \alpha (\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B), \quad (2.98)$$

onde α é um parâmetro real. Ao longo deste trabalho, transcreveremos vetores e operadores para suas respectivas formas matriciais sempre que tal escolha acarretar uma simplificação dos cálculos subsequentes. Assim, a representação dos produtos tensoriais $I^A \otimes I^B$ e $\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B$ na base computacional padrão como

$$I^A \otimes I^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_x^A \otimes \sigma_x^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

possibilita a conversão de U e U^\dagger para as matrizes

$$U = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & i \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha & i \sin \alpha & 0 \\ 0 & i \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ i \sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U^\dagger = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 & -i \sin \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -i \sin \alpha & 0 \\ 0 & -i \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -i \sin \alpha & 0 & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Por sua vez, se considerarmos a escolha usual de $\rho^B = |0\rangle_{bb}\langle 0|$ e a expressão mais geral possível associada a ρ^A como

$$\rho^A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

onde $a + d = 1$, o estado inicial do sistema global (representado na base computacional

padrão) será dado por

$$\rho^{A,B} = \rho^A \otimes |0\rangle_{bb}\langle 0| = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

Assim, a aplicação do operador U sobre $\rho^{A,B}$ gera o estado

$$\rho'^{A,B} = U\rho^{A,B}U^\dagger = \begin{bmatrix} a \cos^2 \alpha & -ib \cos \alpha \sin \alpha & b \cos^2 \alpha & -ia \cos \alpha \sin \alpha \\ ic \cos \alpha \sin \alpha & d \sin^2 \alpha & id \cos \alpha \sin \alpha & c \sin^2 \alpha \\ c \cos^2 \alpha & -id \cos \alpha \sin \alpha & d \cos^2 \alpha & -ic \cos \alpha \sin \alpha \\ ia \cos \alpha \sin \alpha & b \sin^2 \alpha & ib \cos \alpha \sin \alpha & a \sin^2 \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.103)$$

e sabemos que, se quisermos mapear ρ'^A após a transformação $\rho^{A,B} \rightarrow \rho'^{A,B}$, basta computar $\rho'^A = \text{Tr}_B(\rho'^{A,B})$, cujo resultado será dado por

$$\rho'^A = \begin{bmatrix} a \cos^2 \alpha + d \sin^2 \alpha & b \cos^2 \alpha + c \sin^2 \alpha \\ c \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha & a \sin^2 \alpha + d \cos^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Por outro lado, sejam

$$E_0 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \sin \alpha \\ i \sin \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

os dois operadores de Kraus obtidos através das expressões $E_0 = {}_b\langle 0|U|0\rangle_b$ e $E_1 = {}_b\langle 1|U|0\rangle_b$. Ao utilizar a representação via operador-soma para o sistema ρ^A , obtemos como resultado a relação

$$E_0\rho^A E_0^\dagger + E_1\rho^A E_1^\dagger = \begin{bmatrix} a \cos^2 \alpha + d \sin^2 \alpha & b \cos^2 \alpha + c \sin^2 \alpha \\ c \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha & a \sin^2 \alpha + d \cos^2 \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.106)$$

a qual concorda com a Eq. (2.104).

Com este exemplo, encerramos a seção destacando novamente a eficiência atribuída ao uso dos operadores de Kraus e de suas respectivas representações para calcular mapas do tipo $\rho^A \rightarrow \rho'^A$.

2.6 Entropia

O conceito de entropia foi formulado pelo físico e matemático alemão Rudolph Clausius em 1865 durante o desenvolvimento da teoria de reversibilidade de processos termodinâmicos cíclicos, e tem sido continuamente aprimorado e empregado em áreas tão diversas quanto Física Estatística, Química e Teoria da Informação. No pri-

meiro exemplo, a entropia está relacionada à previsão das propriedades macroscópicas mais prováveis que um sistema poderá apresentar a partir das possíveis configurações assumidas por seus microestados, mas, no segundo exemplo, o conceito de entropia está associado principalmente à estabilidade de arranjos moleculares e reações químicas. Por sua vez, no último exemplo, utiliza-se a idéia de entropia para quantificar a informação acessível em processos que envolvam transmissão de informação, seja esta clássica ou quântica. Nesta seção, apresentaremos as formulações de entropia propostas por Shannon e Von Neumann, incluindo o conceito introduzido pelo último que relaciona a perda de informação útil em tarefas computacionais à variação da entropia total do sistema.

2.6.1 A Entropia de Shannon

O matemático, engenheiro e criptógrafo americano Claude Shannon revolucionou a ciência da Teoria da Informação ao elaborar um algoritmo que não só quantifica a razão entre a informação acessível e o conteúdo original de uma determinada mensagem como também fornece o número mínimo de *bits* necessários para a transmissão de qualquer mensagem codificada. Com o intuito de formular uma grandeza que expressasse a ignorância em relação à informação útil contida no sistema, Shannon construiu sua função (denominada de entropia) considerando as seguintes premissas, onde p_i é a probabilidade de ocorrência de uma determinada variável a_i :

- (1) $S \geq 0$;
- (2) a entropia de eventos distintos seria acumulativa, ou seja, $S(p_1, p_2) \equiv S(p_1) + S(p_2)$;
- (3) $S(p_i)$ deveria ser monotônica e contínua em p_i ;
- (4) $S(1) = 0$; visto que para $p_i = 1$ não haveria dúvida sobre a ocorrência do estado a_i .

Observe que o item 2 sugere que tal grandeza deveria ter uma dependência logarítmica em relação à p_i , enquanto o item 1 impõe a condição de positividade para S . Visando atender a todas as premissas e considerando $0 \leq p_i \leq 1$, Shannon concluiu que $S(p_i)$ deveria ser proporcional a $-\log(p_i)$ e à própria probabilidade atrelada à aparição do carácter a_i . Desse modo, a entropia de um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ para o qual a_i ocorre com probabilidade p_i foi definida como

$$S(p_1, p_2, \dots, p_k) \equiv -p_1 \log_2(p_1) - p_2 \log_2(p_2) - \dots - p_k \log_2(p_k) = -\sum_{i=1}^k p_i \log_2(p_i), \quad (2.107)$$

onde $S(p_1, p_2, \dots, p_k)$ é conhecida como a entropia de Shannon.

O significado da Eq. (2.107) pode ser depreendido de um exemplo simples para um sistema binário que admita apenas as taxas $p_1 = p$ e $p_2 = 1 - p$ relativas a $A = \{a_1, a_2\}$. Considerando $\lim_{x \rightarrow 0} x \log_2(x) \equiv 0$, a entropia $S(p_1, p_2)$ é dada por

$$S(p_1, p_2) = -p_1 \log_2(p_1) - p_2 \log_2(p_2) = -p \log_2(p) - (1 - p) \log_2(1 - p), \quad (2.108)$$

sendo nula para $p = 0$ ou $p = 1$ e máxima para $p = 1/2$, como mostra a Fig. 2.3. No

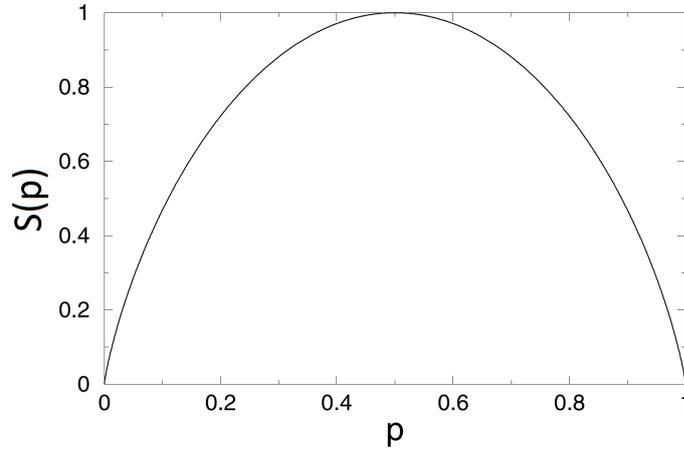


Figura 2.3: Entropia de Shannon para um sistema binário.

Fonte: Figura adaptada de Benenti et al., 2007.

primeiro caso, a ocorrência dos eventos a_1 e a_2 é única e não há ignorância associada à presença destes caracteres. À medida que o valor de p se aproxima de $1/2$, a informação disponível para a ocorrência de a_1 e a_2 diminui até se tornar nula para $p_1 = p_2 = 1/2$, cenário em que estes elementos serão equiprováveis e $S(p_1, p_2)$ atinge seu valor máximo. Para conjuntos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ de dimensão $k > 2$, $S(p_1, p_2, \dots, p_k) = 0$ se $p_i = 1$ e $S(p_1, p_2, \dots, p_k) = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log_2(\frac{1}{k}) = \log_2(k)$ para $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1/k$. Logo, os valores de $S(p_1, p_2, \dots, p_k)$ estão restritos ao intervalo $[0, \log_2(k)]$.

Em seguida, Shannon considerou uma mensagem composta de N registros clássicos onde cada um conteria um único elemento de um conjunto A dado por

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}, \quad (2.109)$$

onde a_i é uma seleção de l bits que pode ocorrer com probabilidade p_i em cada registro mas que, em média, encontra-se distribuída ao longo dos N registros com a frequência aproximada de Np_i . Logo, a probabilidade de uma mensagem de $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ registros conter uma distribuição particular com elementos de A é dada por

$$p(x_1, x_2, \dots, x_N) = p(x_1 = a_i)p(x_2 = a_j) \dots p(x_N = a_h) = p_i p_j \dots p_h \quad (2.110)$$

para cada ordenação distinta de um total equivalente a

$$\frac{N!}{\prod_{i=1}^k (Np_i)!}, \quad (2.111)$$

uma vez que $N!$ inclui seqüências semelhantes $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ geradas pela permutação de $(Np_i)!$ elementos a_i .

Após esta análise, Shannon prosseguiu com a investigação do número mínimo de caracteres necessários para a transmissão completa de uma mensagem codificada em N registros preenchidos com um único elemento de $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ e descobriu que este valor é dado por $NS(p_1, p_2, \dots, p_k)$. Não provaremos este resultado (que pode ser encontrado em [Cover and Thomas, 2006](#)), mas discutiremos suas implicações.

Se calcularmos

$$\log_2 \left(\frac{N!}{\prod_{i=1}^k (Np_i)!} \right) \quad (2.112)$$

e recorrermos à aproximação de Stirling para a qual $\log_2(N!) = N \log_2(N) - N/\ln(2) + O(\log_2(N))$, observaremos que

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{N!}{\prod_{i=1}^k (Np_i)!} \right) &= \log_2(N!) - \log_2 \left(\prod_{i=1}^k (Np_i)! \right) = \log_2(N!) - \sum_{i=1}^k \log_2(Np_i)! \\ &\approx N \log_2(N) - \frac{N}{\ln(2)} - \sum_{i=1}^k \left(Np_i \log_2(Np_i) - \frac{Np_i}{\ln(2)} \right) \\ &= N \log_2(N) - \frac{N}{\ln(2)} - \sum_{i=1}^k Np_i \log_2(N) - \sum_{i=1}^k Np_i \log_2(p_i) + \frac{N}{\ln(2)} \\ &= N \log_2(N) - N \log_2(N) - N \sum_{i=1}^k p_i \log_2(p_i) = NS(p_1, p_2, \dots, p_k). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Desta forma, de acordo com os resultados fornecido pelas Eqs. (2.110) e (2.111), existem

$$\frac{N!}{\prod_{i=1}^k (Np_i)!} \approx 2^{NS(p_1, p_2, \dots, p_k)} \quad (2.114)$$

combinações distintas para uma determinada configuração dos x_1, x_2, \dots, x_N registros, e, por conseguinte, cada seqüência particular x'_1, x'_2, \dots, x'_N desta configuração pode ocorrer com uma probabilidade condicional igual a

$$(p_{cond}|p_{ini}) = p(x'_1, x'_2, \dots, x'_N) = \frac{1}{2^{NS(p_1, p_2, \dots, p_k)}} = 2^{-NS(p_1, p_2, \dots, p_k)}, \quad (2.115)$$

onde p_{ini} é dada pela Eq. (2.110). De acordo com Shannon, NS caracteres são suficientes para identificar estas seqüências, e, portanto, qualquer mensagem que satisfaça as considerações prévias pode ser codificada com este número.

A Eq. (2.115) implica que $S(p_1, p_2, \dots, p_k)$ também pode ser relacionada aos fatores $p(x'_i)$: de fato,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N} \log_2(2^{-NS(p_1, p_2, \dots, p_k)}) &\equiv -\frac{1}{N} \log_2\{p(x'_1, x'_2, \dots, x'_N)\} = -\frac{1}{N} \log_2\{p(x'_1)p(x'_2) \dots p(x'_N)\} \\ &\Rightarrow S(p_1, p_2, \dots, p_k) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log_2\{p(x'_i)\}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Exploraremos estes conceitos com mais detalhes no exemplo a seguir.

Considere uma mensagem com quatro registros $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ que deve ser codificada da forma mais compacta possível com caracteres cuja probabilidade de ocorrência é conhecida previamente como $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ e $p_3 = p_4 = \frac{1}{8}$; e seja $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ o conjunto destes caracteres. Uma tentativa de solucionar este problema seria codificar os registros $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ na base computacional $\{00, 01, 10, 11\}$ e utilizar dois *bits* por registro para identificá-los. Tal método, contudo, só otimizaria a codificação se todos os p_i fossem iguais, pois, ao calcular a entropia associada ao conjunto A , constatamos que

$$-\sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \log_2 \left(\frac{1}{4} \right) = 2 \quad \text{e} \quad S(p_1, p_2, p_3, p_4) = -\sum_{i=1}^4 p_i \log_2(p_i) = \frac{7}{4}, \quad (2.117)$$

e, portanto, deve existir uma seqüência que exija um número médio de *bits* por registro aproximadamente igual a $7/4 \approx 1.75$.

Uma solução efetiva surge quando definimos

$$a_1 \equiv 0, \quad a_2 \equiv 00, \quad a_3 \equiv 000 \quad \text{e} \quad a_4 \equiv 001, \quad (2.118)$$

onde os respectivos números de bits $l_1 = 1$, $l_2 = 2$ e $l_3 = l_4 = 3$ foram escolhidos de forma que $l_i \equiv \log(p_i)$. Com isso, são necessários em média menos do que dois *bits* para a transmissão da mensagem codificada, uma vez que $\sum_{i=1}^4 p_i l_i = \frac{7}{4} = S(p_1, p_2, p_3, p_4)$. De uma forma geral, salvo o caso em que $p_1 = p_2 = \dots = p_k$, a codificação ótima ocorre quando relegamos um número maior de *bits* para os elementos a_i que possuem a menor freqüência p_i , e assim sucessivamente. Para este exemplo, o número médio de *bits* por registro coincide com o valor previsto pela entropia de Shannon.

2.6.2 A Entropia de Von Neumann

O matemático húngaro John Von Neumann contribuiu para o surgimento da Teoria da Informação Quântica ao adaptar as idéias desenvolvidas por Shannon para a análise de sistemas quânticos. Ao propor que um estado ρ possuiria uma entropia associada dada por

$$S(\rho) \equiv -\text{Tr}\{\rho \log_2(\rho)\}, \quad (2.119)$$

Von Neumann transpôs o conceito sobre a razão entre a informação útil disponível e o conteúdo original de uma determinada mensagem (seção 2.6.1) para a relação entre a pureza de um estado quântico e a estrutura de seu respectivo operador densidade.

Se a decomposição espectral de ρ estiver expressa na forma diagonal dada

por $\rho = \sum_{i=1}^N s_{u_i} |u_i\rangle\langle u_i|$, a Eq. (2.119) se traduz em

$$\begin{aligned} S(\rho) &= - \sum_{k=1}^N \langle u_k | \left(\sum_{i=1}^N s_{u_i} |u_i\rangle\langle u_i| \right) \log_2 \left(\sum_{j=1}^N s_{u_j} |u_j\rangle\langle u_j| \right) |u_k\rangle \\ &= - \sum_{i,j,k=1}^N s_{u_i} \log_2(s_{u_j}) \langle u_k | u_i \rangle \langle u_i | u_j \rangle \langle u_j | u_k \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^N s_{u_i} \log_2(s_{u_i}) = S(s_{u_1}, s_{u_2}, \dots, s_{u_N}), \end{aligned} \quad (2.120)$$

e, visto que o cálculo do traço é independente da base de estados escolhida, a grandeza $S(\rho)$ é equivalente ao cálculo da entropia de Shannon para os autovalores do sistema em questão. Conseqüentemente, a entropia de Von Neumann satisfaz propriedades semelhantes às discutidas na seção 2.6.1, como

- (1) $S(\rho) \geq 0$;
- (2) $S(\rho^A, \rho^B) \equiv S(\rho^A) + S(\rho^B)$;
- (3) $S(\rho)$ é contínua em ρ ;
- (4) $S(\rho) = 0$ para $s_{u_j} = 1$, pois $-\sum_{i=1}^N s_{u_i} \log_2(s_{u_i}) = s_{u_j} \log_2(s_{u_j}) = 0$;
- (5) $0 \leq S(\rho) \leq \log_2(N)$;
- (6) $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$.

Repare que o resultado do item 5 é idêntico ao limite máximo calculado para a entropia de Shannon, pois, para $0 \leq s_{u_i} \leq 1$ e $s_{u_1} = s_{u_2} = \dots = s_{u_N} = \frac{1}{N}$, $S = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log_2(\frac{1}{N}) = \log_2(N)$. Já o item 6 decorre das propriedades de operações unitárias discutidas após a Eq. (2.19): como o mapeamento de U sobre ρ preserva seus autovalores, a expressão $S(\rho) = S(s_{u_1}, s_{u_2}, \dots, s_{u_N})$ permanece inalterada.

De forma análoga ao exemplo analisado na seção 2.6.1, calcularemos a entropia de Von Neumann para um sistema simples de um *qubit*. Em sua forma diagonal, ρ é representado por

$$\rho = p_0 |0\rangle\langle 0| + p_1 |1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix}, \quad (2.121)$$

onde p_0 e p_1 são os autovalores associados ao sistema. Logo, a entropia $S(\rho)$ para este modelo equivale a

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -\text{Tr}\{\rho \log_2(\rho)\} = -\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log_2(p_0) & 0 \\ 0 & \log_2(p_1) \end{bmatrix} \right) \\ &= -\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} p_0 \log_2(p_0) & 0 \\ 0 & p_1 \log_2(p_1) \end{bmatrix} \right) = -p_0 \log_2(p_0) - p_1 \log_2(p_1), \end{aligned} \quad (2.122)$$

cujos resultados coincide com $S(p_0, p_1)$ e confirma a Eq. (2.120).

Se utilizássemos o *qubit* da Eq. (2.121) para transmitir uma mensagem entre duas localidades distintas, obteríamos o mesmo resultado de (2.122) ao substituir este procedimento por um protocolo clássico no qual p_0 e p_1 seriam as respectivas probabilidades de um dado receptor obter os *bits* 0 e 1 (graças à ortogonalidade dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$). Analisaremos este cenário no exemplo a seguir ao comparar a relação entre protocolos quânticos e clássicos para estados não-ortogonais.

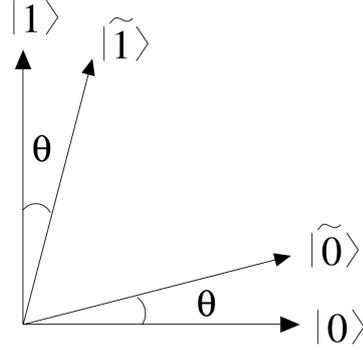


Figura 2.4: Exemplo de um par estados não-ortogonais.
Fonte: Figura adaptada de *Benenti et al., 2007*.

Sejam $p_0 = p$ e $p_1 = 1 - p$ a probabilidade de se obter os respectivos estados não-ortogonais $|\tilde{0}\rangle$ e $|\tilde{1}\rangle$ indicados na Fig. 2.4 e dados por

$$|\tilde{0}\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle \quad \text{e} \quad |\tilde{1}\rangle = \sin\theta|0\rangle + \cos\theta|1\rangle, \quad (2.123)$$

cujos produtos internos $\langle\tilde{0}|\tilde{1}\rangle = \sin 2\theta$ é nulo apenas para $\theta = 0$. Para este exemplo, consideraremos $0 \leq \theta \leq \pi/4$ sem perda de generalidade. O operador densidade relativo a estes estados é expresso por

$$\rho = p|\tilde{0}\rangle\langle\tilde{0}| + (1-p)|\tilde{1}\rangle\langle\tilde{1}| = \begin{bmatrix} \sin^2\theta + p\cos 2\theta & \sin 2\theta/2 \\ \sin 2\theta/2 & \cos^2\theta - p\cos 2\theta \end{bmatrix}, \quad (2.124)$$

e seus autovalores resultam em

$$s_{u_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)\cos^2 2\theta} \right) \quad \text{e} \quad s_{u_1} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4p(1-p)\cos^2 2\theta} \right), \quad (2.125)$$

cujas respectivas entropias de Von Neumann dadas por $S(\rho) = -s_{u_0} \log_2(s_{u_0}) - s_{u_1} \log_2(s_{u_1})$ está ilustrada na Fig. 2.5 em função de p para diferentes valores de θ .

A análise do gráfico revela que $S(\rho) = S(p_0, p_1)$ se e apenas se $\theta = 0$ (condição na qual os estados $|\tilde{0}\rangle$ e $|\tilde{1}\rangle$ são ortogonais), e que, à medida que o valor deste ângulo aumenta, a entropia do sistema diminui até atingir $S(\rho) = 0$ para $\theta = \pi/4$, cenário no qual não há informação útil transmitida (visto que os estados $|\tilde{0}\rangle$ e $|\tilde{1}\rangle$ não podem ser distinguidos entre si). Por este motivo, não existem procedimentos clássicos que repliquem

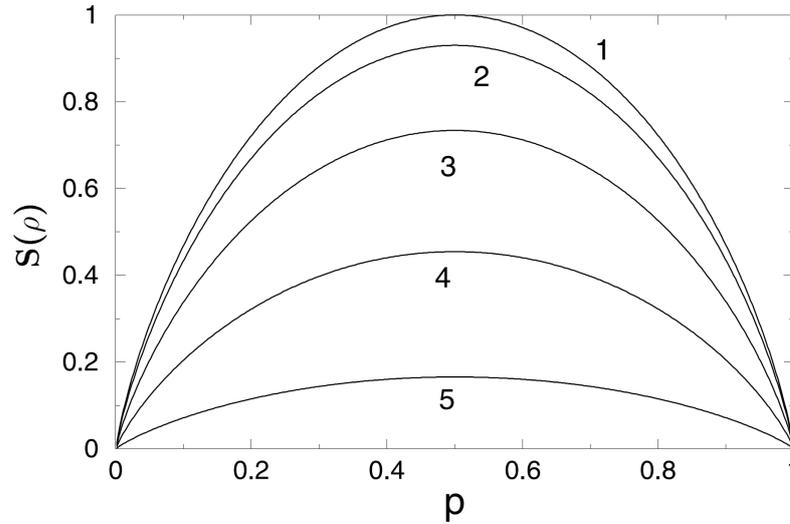


Figura 2.5: Entropia de Von Neumann do operador densidade relativo ao par de estados não-ortogonais $|\tilde{0}\rangle$ e $|\tilde{1}\rangle$ em função de θ . Os respectivos índices de 1 a 5 estão associados aos valores de $\theta = \{0; 0.2\frac{\pi}{4}; 0.4\frac{\pi}{4}; 0.6\frac{\pi}{4} \text{ e } 0.8\frac{\pi}{4}\}$.

Fonte: Figura adaptada de *Benenti et al., 2007*.

a transmissão de estados quânticos não-ortogonais.

Outra contribuição de Von Neumann para a Teoria da Informação Clássica e Quântica baseia-se na estimativa da entropia gerada no momento em que a informação de um sistema sofre uma determinada alteração (Neumann, 1955). Não há mudança de entropia quando o processo é reversível, como na substituição do valor de um *bit* após a ação de uma porta *NOT* (Apêndice C). Entretanto, para processos irreversíveis (como o ato de "apagar" um *bit* na memória de um registro clássico), a entropia do universo que circunda o sistema em questão sofre um aumento equivalente a

$$S = k \ln(2), \quad (2.126)$$

onde $k \approx 1,38 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{Kg/s}^2 \cdot \text{K}$ é a constante de Boltzmann. Com esta análise, concluímos o estudo da entropia associada a estados clássicos e quânticos, e nas próximas seções (2.7 e 2.8) discorreremos sobre as propriedades específicas de sistemas emaranhados.

2.7 Concentração de Emaranhamento

Os avanços tecnológicos introduzidos com a adoção de sistemas quânticos em tarefas informacionais refletem-se principalmente no aumento da velocidade de processamento de dados e na redução do número total de *bits* necessários para a implementação de algoritmos específicos, graças à existência de uma propriedade imprescindível para a execução da maioria destas tarefas: o **emaranhamento**. Neste contexto, uma das condições necessárias para otimizar os principais protocolos de comunicação quântica é a de que o emaranhamento entre os estados quânticos utilizados nestes processos deva ser máximo,

ou, em outras palavras, que os coeficientes de Schmidt destes estados sejam idênticos (seção 2.3). Para sistemas bipartite, existem quatro combinações possíveis que se enquadram nesta condição:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\Phi^-\rangle = \frac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\Psi^+\rangle = \frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\Psi^-\rangle = \frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}; \quad (2.127)$$

onde o conjunto de estados $|\Phi^+\rangle$, $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$ e $|\Psi^-\rangle$ foi denominado de base de Bell em homenagem às contribuições do físico irlandês John. S. Bell, também conhecido pelo teorema da desigualdade de Bell (Bell et al., 1964). Note que qualquer estado de dois *qubits* maximamente emaranhado pode ser equivalente a um dos quatro estados da Eq. 2.127 a menos de uma fase global ou transformações unitárias locais.

Todavia, o equilíbrio entre o emaranhamento destes coeficientes é extremamente difícil de ser mantido em sistemas reais para escalas de tempo da ordem de milissegundos, e estes, caso não sejam transformados em estados mistos, sofrem alterações que reduzem o grau de emaranhamento destes sistemas (Li et al., 2000). Um exemplo deste caso ocorre na transição do estado $|\Phi^+\rangle$ para

$$|\Phi^+\rangle \rightarrow |\Phi_n^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}|00\rangle + \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}|11\rangle, \quad (2.128)$$

onde o parâmetro $0 < n < 1$ indica que $|\Phi_n^+\rangle$ é um estado parcialmente emaranhado. Repare que a condição $n \approx 1$ aproxima os coeficientes dos estados $|00\rangle$ e $|11\rangle$ e contribui para o limite $|\Phi_n^+\rangle \approx |\Phi^+\rangle$, e que, à medida que os valores de n decrescem, o emaranhamento entre estes estados diminui e $|\Phi_n^+\rangle$ se aproxima de $|00\rangle$. Observe ainda que a generalidade da Eq. (2.128) é independente do parâmetro n : estados para os quais os coeficientes associados a $|11\rangle$ são superiores aos do estado $|00\rangle$ podem ser obtidos aplicando-se uma porta *NOT* (Apêndice C) em cada *qubit* de $|\Phi_n^+\rangle$.

Graças à fragilidade associada ao emaranhamento destes sistemas e à necessidade de executar os principais protocolos de transmissão de informação de modo fiel à sua formulação original, fez-se necessário o desenvolvimento de métodos que convertessem estados parcialmente emaranhados em algum dos estados da Eq. (2.127). Com este intuito, apresentaremos nesta seção o procedimento da *destilação de qubits*, e mostraremos como converter sistemas semelhantes aos da Eq. (2.128) em estados maximamente emaranhados. Antes de prosseguir, é necessário ressaltar que a substituição do parâmetro n por coeficientes complexos não altera o resultado das probabilidades calculadas a seguir.

Sob estas considerações, os *qubits* do estado que será destilado expresso por

$$|\Phi_n^+\rangle_{2,3} = \frac{|00\rangle_{2,3}}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{n|11\rangle_{2,3}}{\sqrt{1+n^2}} \quad (2.129)$$

serão indicados pelos índices 2 e 3 e, paralelamente, introduziremos um *qubit* auxiliar

associado ao índice 1 com coeficientes semelhantes aos de $|\Phi_n^+\rangle_{2,3}$ descrito por

$$|\phi\rangle_1 = \frac{|0\rangle_1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{n|1\rangle_1}{\sqrt{1+n^2}}. \quad (2.130)$$

Conseqüentemente, existirá um sistema global $|\Psi\rangle_{1,2,3}$ formado pelo produto tensorial entre $|\phi\rangle_1$ e $|\Phi_n^+\rangle_{2,3}$ tal que

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{1,2,3} &= |\phi\rangle_1 |\Phi_n^+\rangle_{2,3} = \left(\frac{1}{1+n^2}\right) (|0\rangle_1 + n|1\rangle_1) (|00\rangle_{2,3} + n|11\rangle_{2,3}) \\ &= \left(\frac{1}{1+n^2}\right) |000\rangle_{1,2,3} + n|011\rangle_{1,2,3} + n|100\rangle_{1,2,3} + n^2|111\rangle_{1,2,3}. \end{aligned} \quad (2.131)$$

Em seguida, podemos submeter os *qubits* 1 e 2 à ação de uma porta $C_{NOT_{1,2}}$ (Apêndice C) de forma que

$$C_{NOT_{1,2}}|\Psi\rangle_{1,2,3} = \frac{1}{1+n^2} \{ |000\rangle_{1,2,3} + n|011\rangle_{1,2,3} + n|110\rangle_{1,2,3} + n^2|101\rangle_{1,2,3} \} \quad (2.132)$$

e reescrever o estado global $|\Psi\rangle_{1,2,3}$ como $|\Psi\rangle_{2,1,3}$. Com isso, permitimos que o mesmo possa ser expresso como a soma de um produto entre os estados separáveis do sistema 2 e o novo par emaranhado formado pelos *qubits* 1 e 3 dado por

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{2,1,3} &= \frac{1}{1+n^2} \{ |000\rangle_{2,1,3} + n|101\rangle_{2,1,3} + n|110\rangle_{2,1,3} + n^2|011\rangle_{2,1,3} \} \\ &= \frac{\sqrt{1+n^4}}{1+n^2} |0\rangle_2 \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{1+n^4}} |00\rangle_{1,3} + \frac{n^2}{\sqrt{1+n^4}} |11\rangle_{1,3} \right) + \frac{\sqrt{2n}}{1+n^2} |1\rangle_2 \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle_{1,3} + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle_{1,3} \right). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Logo, se o subsistema 2 for medido na base computacional, o estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle_{2,3} + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle_{2,3} \equiv |\Psi^+\rangle_{2,3} \quad (2.134)$$

pode ser obtido com probabilidade igual a

$$P_{suc} = \left(\frac{\sqrt{2n}}{1+n^2} \right)^2 = \frac{2n^2}{(1+n^2)^2}, \quad (2.135)$$

caso a medição provoque o colapso deste subsistema para o estado $|1\rangle_2$. Note que P_{suc} é nula para $n = 0$ e máxima para $n = 1$.

É importante ressaltar que é possível reverter o processo de destilação para gerar um estado imperfeito a partir de um par de *qubits* maximamente emaranhado, e que o limite máximo previsto para a probabilidade de sucesso de destilação em sistemas bipartite emaranhados (Vidal, 1999) é dado por $P_{suc} = 2n^2/1+n^2$ (cujo resultado é superior ao obtido na Eq. (2.135) para $0 < n < 1$).

Para encerrar, discorreremos brevemente sobre a relação existente entre a destilação de estados emaranhados e a entropia de Von Neumann. Se $l_{<}$ é o número

mínimo de estados idênticos aos da Eq. (2.128) que podem ser obtidos a partir de N estados perfeitamente emaranhados e $l_>$ é o número máximo de estados da base de Bell que podem ser destilados em um total de N cópias de $|\Phi_n^+\rangle_{a,b}$, então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{l_<}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{l_>}{N} = S(\rho^A) = S(\rho^B) = E(|\psi\rangle_{a,b}), \quad (2.136)$$

onde a grandeza $E(|\psi\rangle_{a,b}) \in [0, 1]$ é denominada de *emaranhamento de formação* de um estado puro bipartite. Neste caso, os respectivos valores mínimo e máximo de $E(|\psi\rangle_{a,b})$ ocorrem para estados separáveis e pares de *qubits* maximamente emaranhados (Benenti et al., 2007). Mostraremos nos capítulos seguintes que a extensão desta análise para estados mistos não é trivial, uma vez que a complexidade do emaranhamento e de suas propriedades em sistemas deste tipo exige uma compreensão maior do que a necessária para a análise de estados puros.

2.8 Separabilidade

Retomaremos a discussão abordada nas seções 2.3 e 2.7 para analisar métodos que permitem distinguir estados separáveis de sistemas quânticos emaranhados. Dado um sistema bipartite composto de dois subsistemas independentes A e B e contido em $H_{A,B} \equiv H_A \otimes H_B$, dizemos que ele é separável se existir uma representação equivalente a

$$|\Psi\rangle_{a,b} = |\alpha\rangle_a \otimes |\beta\rangle_b \quad (2.137)$$

se o sistema for descrito por um estado puro ou

$$\rho^{A,B} = \sum_k p_k (\rho_k^A \otimes \rho_k^B) \quad (2.138)$$

quando $\rho^{A,B}$ for um estado misto, onde $p_k \geq 0$ e $\sum p_k = 1$.

Sistemas desta natureza sempre satisfazem a desigualdade de Bell e podem ser criados via operações locais e comunicação clássica, e determinar se um dado estado misto possui decomposição semelhante à Eq. (2.138) não é uma tarefa trivial para a maioria dos casos. Felizmente, o físico israelita Asher Peres (considerado um dos primeiros a mesclar a Mecânica Quântica com a Teoria da Relatividade e um dos pioneiros na Teoria da Informação Quântica) desenvolveu um método prático que dispensa tal investigação.

Considere um sistema $\rho^{A,B}$ e uma base ortonormal $|u_i\rangle|w_l\rangle$ contida no espaço composto $H_{A,B} \equiv H_A \otimes H_B$, onde o elemento de matriz $\rho_{i,l;j,p}^{A,B}$ é dado por

$$\rho_{i,l;j,p}^{A,B} = \langle u_i | \langle w_l | \rho^{A,B} | u_j \rangle | w_p \rangle. \quad (2.139)$$

Visto que os autovalores de qualquer matriz densidade são não-negativos e supondo que

$\rho^{A,B}$ seja expressa pela Eq. (2.138), Peres observou que a matriz

$$(\rho^{A,B})^{T_A} = \sum_k p_k \{(\rho_k^A)^T \otimes \rho_k^B\} \quad (2.140)$$

também deveria ser separável, onde os elementos

$$\{(\rho^{A,B})^{T_A}\}_{i,l;j,p} = \rho_{j,l;i,p}^{A,B} \quad (2.141)$$

que compõem a matriz $(\rho^{A,B})^{T_A}$ são fruto da transposição dos coeficientes de $\rho^{A,B}$ em relação aos projetores $|u_i\rangle\langle u_j|$ e $|u_j\rangle\langle u_i|$ atrelados ao subsistema A . Logo, a existência de pelo menos um autovalor negativo para a matriz da Eq. (2.140) implicaria que $\rho^{A,B}$ não seria separável, e que, portanto, o sistema estaria emaranhado.

Mostraremos um exemplo com a aplicação do critério de Peres para o estado de Werner dado por

$$\rho^{A,B} = \frac{1}{4}(1-p)I^{A,B} + p|\Psi^-\rangle_{a,b} \langle\Psi^-|, \quad (2.142)$$

onde $I^{A,B}$ é a matriz Identidade associada ao espaço $H_{A,B}$, $|\Psi^-\rangle_{a,b}$ pertence à base de Bell apresentada na Eq. (2.127) e $0 \leq p \leq 1$. A representação matricial de $\rho^{A,B}$ na base computacional padrão e sua matriz transposta em relação ao subsistema A são dadas respectivamente por

$$\rho^{A,B} = \begin{bmatrix} \frac{1-p}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+p}{4} & -\frac{p}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{p}{2} & \frac{1+p}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-p}{4} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (\rho^{A,B})^{T_A} = \begin{bmatrix} \frac{1-p}{4} & 0 & 0 & -\frac{p}{2} \\ 0 & \frac{1+p}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+p}{4} & 0 \\ -\frac{p}{2} & 0 & 0 & \frac{1-p}{4} \end{bmatrix}, \quad (2.143)$$

onde os autovalores da última são iguais a $s_{u_0} = \frac{1-3p}{4}$ e $s_{u_1} = s_{u_2} = s_{u_3} = \frac{1+p}{4} > 0$. Como $s_{u_0} < 0$ para $1/3 < p \leq 1$, concluímos que o estado de Werner está emaranhado.

Aliado às contribuições de Horodecki (Peres, 1996, Horodecki et al., 1996), demonstrou-se que o critério de Peres consolida-se como condição necessária e suficiente para determinar a separabilidade de estados mistos em sistemas de dimensões 2x2 e 2x3. Há sistemas com dimensões superiores chamados de estados emaranhados ligados (*bound entangled states*) que não podem ser destilados via operações locais e comunicação clássica e cujas matrizes densidade parcialmente transpostas não possuem autovalores negativos. Para estes estados, o critério de Peres obviamente falha; todavia, sua abrangência não deve ser subestimada, visto que existem estados emaranhados que são detectados por este critério e que não violam a desigualdade de Bell.

2.9 Decoerência

Uma das principais características que distingue a Mecânica Quântica da Mecânica Clássica é o fato de um sistema quântico poder se apresentar como uma superposição de estados ortogonais, os quais, por sua vez, estão associados a resultados específicos de medidas de grandezas físicas. Se ρ' é um operador densidade tal que

$$\rho' = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{bmatrix}, \quad (2.144)$$

onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ e $\{\alpha, \beta\} \neq 0$, é possível gerar amostras que contenham apenas os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ distribuídos com as respectivas frequências $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ sem que ocorra superposição entre os mesmos; logo, sistemas mistos podem ser relacionados a configurações específicas de estados clássicos que são descritos por misturas estatísticas. Entretanto, se $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são estados ortogonais associados a autovalores reais, não há modo de reproduzir o estado

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.145)$$

empregando somente conceitos clássicos, e, portanto, estados puros como o da Eq. (2.145) são essencialmente quânticos.

Os elementos que não pertencem à diagonal principal da matriz de um operador densidade são denominados de termos de coerência (ou termos coerentes), e sua estrutura auxilia a identificar o caráter quântico do sistema em questão. Note que a adição dos fatores $(\alpha\beta^*)|0\rangle\langle 1|$ e $(\alpha^*\beta)|1\rangle\langle 0|$ à Eq. (2.144) reconstrói a superposição $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e recupera o estado $|\psi\rangle$, visto que

$$\begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (2.146)$$

A Eq. (2.146) revela que a pureza de um sistema depende diretamente da presença e da forma pela qual se apresentam os termos coerentes. À medida que a magnitude destes elementos se aproxima de zero, o sistema tende a assumir as características de um estado completamente misto, e, no cenário particular em que estes termos são nulos, sempre existirá uma representação diagonal para este sistema dada por $\rho = s_{u_i}|u_i\rangle\langle u_i|$, onde ρ é uma mistura estatística que pode ser utilizada para descrever um conjunto de estados clássicos u_i distribuídos com frequência s_{u_i} .

Quando um sistema puro interage com um meio externo e as informações relativas ao estado $|\psi\rangle$ são expostas a este meio, ocorre um fenômeno que afeta o estado global no qual este sistema está inserido e destrói a pureza da função de onda original: a **decoerência**. Por este motivo, dedicaremos esta seção à análise dos principais tipos

de mapas associados ao fenômeno responsável pela supressão do caráter quântico de sistemas puros, e, neste contexto, o modelo mais simples que se enquadra nesta categoria manifesta-se na interação entre dois *qubits* através de uma porta C_{NOT} (Apêndice C), como mostraremos a seguir.

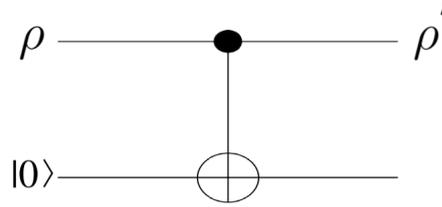


Figura 2.6: Representação esquemática de um circuito que simula o processo de decoerência mais simples possível que pode atuar sobre um estado de entrada arbitrário ρ : a porta $C_{NOT_{a,b}}$. O círculo preenchido no qubit de controle denota que a ativação da porta ocorre quando o estado de entrada é igual a $|1\rangle$.

Seja $|\psi\rangle_a = \alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a \in H_A$ o sistema de interesse e considere um ambiente descrito por $|0\rangle_b \in H_B$ (seções 2.4 e 2.5) tal que o estado global $|\Psi\rangle_{inicial}$ seja dado por

$$|\Psi\rangle_{inicial} = |\psi\rangle_a \otimes |0\rangle_b = (\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a)|0\rangle_b = \alpha|00\rangle_{a,b} + \beta|01\rangle_{a,b}. \quad (2.147)$$

Se o mecanismo que representa a ação de uma porta $C_{NOT_{a,b}}$ (ilustrado na Fig. (2.6)) operar sobre $|\Psi\rangle_{inicial}$, o par de *qubits* inicialmente independentes passa a existir sob a forma não separável dada por

$$|\Psi\rangle_{final} = \alpha|00\rangle_{a,b} + \beta|11\rangle_{a,b}, \quad (2.148)$$

onde $|\Psi\rangle_{final} \in H \equiv H_A \otimes H_B$ é um estado puro emaranhado cujo operador densidade é descrito por

$$\begin{aligned} \rho_{final} &= |\alpha|^2|00\rangle_{a,b} \langle 00| + (\alpha\beta^*)|00\rangle_{a,b} \langle 11| + (\alpha^*\beta)|11\rangle_{a,b} \langle 00| + |\beta|^2|11\rangle_{a,b} \langle 11| \\ &= \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & \alpha\beta^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^*\beta & 0 & 0 & |\beta|^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Ao investigar o mapa $\rho^A \rightarrow \rho'^A$ implícito na Eq. (2.149), constatamos que

$$\begin{aligned} \rho'^A &= \text{Tr}_B(\rho_{final}) = (I^A \otimes_b \langle 0|) \rho_{final} (I^A \otimes_b |0\rangle) + (I^A \otimes_b \langle 1|) \rho_{final} (I^A \otimes_b |1\rangle) \\ &= |\alpha|^2|0\rangle_{aa}\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle_{aa}\langle 1| = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.150)$$

é um estado misto, e que, portanto, a pureza relativa a $|\psi\rangle_a$ foi destruída. O mesmo pode ser afirmado para o subsistema B , uma vez que o operador

$$\begin{aligned}\rho'^B &= \text{Tr}_A(\rho_{final}) = ({}_a\langle 0| \otimes I^B) \rho_{final} (|0\rangle_a \otimes I^B) + ({}_a\langle 1| \otimes I^B) \rho_{final} (|1\rangle_a \otimes I^B) \\ &= |\alpha|^2 |0\rangle_{bb}\langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle_{bb}\langle 1| = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.151)$$

é matematicamente idêntico a ρ'^A . Por este motivo, uma outra maneira de interpretar o conceito de decoerência seria associá-lo a uma evolução unitária que provoca a interação entre sistemas quânticos inicialmente isolados, reduzindo a pureza individual de cada subsistema deste conjunto para gerar um estado global emaranhado.

Quando a transformação que rege a dinâmica do sistema não for conhecida *a priori*, o estado

$$\rho'^A = \frac{1}{2}(I + r' \cdot \sigma) \quad (2.152)$$

e suas respectivas coordenadas na esfera de Bloch

$$\vec{r}' \equiv (x', y', z') \quad (2.153)$$

apresentadas nas Eqs. (2.32) e (2.35) podem ser obtidos através de um mapa linear gerado por matrizes de rotação M e deslocamento Δ tal que

$$\vec{r}' = M\vec{r} + \Delta \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{bmatrix}. \quad (2.154)$$

Neste caso, a configuração do sistema ρ'^A passa a depender não só das coordenadas de \vec{r} como também dos elementos M_{jk} e Δ_j .

Ao longo desta seção, mostraremos que a relação (2.154) pode ser analisada através de dois tipos de abordagens distintas para que x' , y' e z' sejam expressos somente em função das coordenadas análogas de \vec{r} : na primeira, M_{jk} e Δ_j serão construídos a partir dos coeficientes implícitos nos operadores de Kraus, e na segunda estimaremos estes elementos através de realizações experimentais específicas.

Inicialmente, suponha que o mecanismo de decoerência possa ser modelado por uma representação via operador-soma (seção 2.5) como

$$\rho'^A = S(\rho^A) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger, \quad (2.155)$$

onde os termos E_k são os operadores de Kraus sujeitos ao vínculo $\sum_k E_k^\dagger E_k = I$. Se estes

termos forem expressos em função das matrizes de Pauli (Eq. (A.41)), a relação

$$E_k = \sum_{l=1}^3 a_{kl} \sigma_l + b_k I \quad (2.156)$$

onde $\sigma_1 \equiv \sigma_x$, $\sigma_2 \equiv \sigma_y$ e $\sigma_3 \equiv \sigma_z$ permite que as matrizes M e Δ sejam construídas em função dos coeficientes a_{kl} e b_k como (Benenti et al., 2007)

$$M_{jk} = \sum_{l=1}^3 \left[a_{lj} a_{lk}^* + a_{lj}^* a_{lk} + \left(|b_l|^2 - \sum_{p=1}^3 |a_{lp}|^2 \right) \Delta_{jk} + i \sum_{p=1}^3 \epsilon_{jkp} (b_l a_{lp}^* - b_l^* a_{lp}) \right]$$

e $\Delta_j = 2i \sum_{k,l,m=1}^3 \epsilon_{ljm} a_{kl} a_{km}^*$.

(2.157)

Neste caso, \vec{r}' passa a depender apenas das coordenadas de \vec{r} na Eq. (2.154).

Quando não há meios de se obter informações sobre a_{kl} e b_k na Eq. (2.156), os elementos M_{jk} e Δ_j devem ser calculados através de medidas experimentais. Ao comparar os coeficientes associados às duas representações padrão de ρ^A (Eqs. (2.33) e (2.146)) em

$$\rho^A \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix}, \quad (2.158)$$

observamos que as coordenadas de \vec{r}' relacionam-se aos termos α e β como

$$\frac{1}{2}(1+z) = |\alpha|^2, \quad \frac{1}{2}(1-z) = |\beta|^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(x-iy) = (\alpha\beta)^*. \quad (2.159)$$

Desse modo, se orientações específicas do estado $|\psi\rangle_a$ forem enviadas em número suficiente para que o resultado das medidas de \vec{r}' pertença a uma distribuição estatística confiável, M_{jk} e Δ_j surgem como soluções do sistema de equações condicionado à escolha dos coeficientes iniciais α e β . Como veremos a seguir, estas relações podem ser simplificadas se definirmos $|\psi\rangle_a$ como um vetor situado em algum eixos cartesianos da esfera de Bloch.

Suponha que a função de onda esteja alinhada na direção do eixo $r \equiv (0, 0, z)$ em duas configurações possíveis:

$$(1) \quad |\psi\rangle_a = |0\rangle \Rightarrow \alpha = 1 \quad \text{e} \quad \beta = 0 \Rightarrow (x)_1 = (y)_1 = 0, \quad (z)_1 = 1 \quad \text{e}$$

$$\begin{cases} M_{13} + c_x = (x')_1; \\ M_{23} + c_y = (y')_1; \\ M_{33} + c_z = (z')_1. \end{cases} \quad (2.160)$$

$$(2) \quad |\psi\rangle_a = |1\rangle \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{e} \quad \beta = 1 \Rightarrow (x)_2 = (y)_2 = 0, \quad (z)_2 = -1 \quad \text{e}$$

$$\begin{cases} -M_{13} + c_x = (x')_2; \\ -M_{23} + c_y = (y')_2; \\ -M_{33} + c_z = (z')_2. \end{cases} \quad (2.161)$$

De imediato, a resolução dos sistemas (2.160) e (2.161) fornece as três componentes do vetor c e os elementos da primeira coluna da matriz M . Se $|\psi\rangle_a$ for enviado sobre os eixos $r \equiv (1, 0, 0)$ e $r \equiv (0, 1, 0)$ tal que

$$(3) |\psi\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (x)_3 = 1 \ (y)_3 = (z)_3 = 0 \text{ e}$$

$$\begin{cases} -M_{11} + c_x = (x')_3; \\ -M_{21} + c_y = (y')_3; \\ -M_{31} + c_z = (z')_3; \end{cases} \quad (2.162)$$

$$(4) |\psi\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ e } \beta = \frac{i}{\sqrt{2}} \Rightarrow (x)_4 = 0, \ (y)_4 = 1 \ (z)_4 = 0 \text{ e}$$

$$\begin{cases} -M_{12} + c_x = (x')_4; \\ -M_{22} + c_y = (y')_4; \\ -M_{32} + c_z = (z')_4; \end{cases} \quad (2.163)$$

os seis elementos restantes que compõem M surgem como solução do novo par de sistemas lineares gerados pelas hipóteses (3) e (4). Com isso, as incógnitas x' , y' e z' podem ser obtidas através da Eq. (2.154) para qualquer condição inicial $\{x, y, z\}$, permitindo que ρ'^A seja determinado como

$$\rho'^A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + z' & x' - iy' \\ x' + iy' & 1 - z' \end{bmatrix}, \quad (2.164)$$

de acordo com a Eq. (2.152).

De uma forma geral, o mecanismo dos mapas de decoerência é mais avançado do que o do exemplo para o modelo C_{NOT} , e a ação do ambiente é fruto de uma interação complexa com o sistema inicial ρ^A . Contudo, mostramos na Eq. (A.42) que os operadores de Pauli e a matriz Identidade formam um conjunto linearmente independente de matrizes 2×2 e que as mesmas podem ser combinadas para descrever qualquer mapa unitário que atue sobre um sistema de dois níveis, como mostra a Fig. (2.7). Se quisermos incluir estes operadores em uma transformação arbitrária geral, o resultado do traço sobre os estados de base do sistema ambiente implícito no estado global deve ser igual à soma de quatro elementos distintos, e, por isso, a matriz associada ao operador densidade do ambiente deve possuir dimensão 4×4 .

Assim, podemos imaginar que este subsistema seja formado por um par de *qubits* como

$$|\Phi\rangle_{b,c} = \alpha|00\rangle_{b,c} + \beta|01\rangle_{b,c} + \gamma|10\rangle_{b,c} + \delta|11\rangle_{b,c}, \quad (2.165)$$

onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$. Logo, seu respectivo operador densidade e o estado inicial

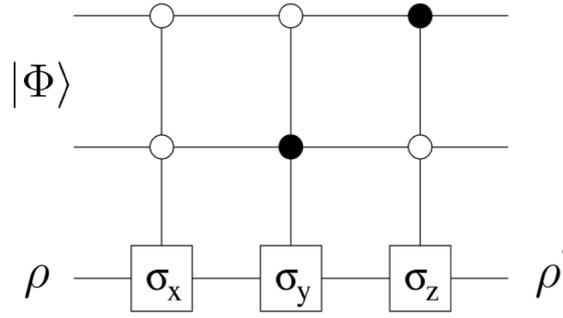


Figura 2.7: Representação esquemática de um circuito que simula o processo completo de decoerência sobre um qubit arbitrário ρ . Os círculos vazios e preenchidos denotam que a ativação das portas σ_x , σ_y e σ_z ocorre quando os estados dos qubits de controle são respectivamente iguais a $|00\rangle$, $|01\rangle$ e $|10\rangle$.

do sistema global corresponderão respectivamente a

$$\begin{aligned}
 \rho^{B,C} &= |\Phi\rangle_{b,c} \langle \Phi| \\
 &= |\alpha|^2 |00\rangle_{b,c} \langle 00| + |\beta|^2 |01\rangle_{b,c} \langle 01| + |\gamma|^2 |10\rangle_{b,c} \langle 10| + |\delta|^2 |11\rangle_{b,c} \langle 11| + \dots \\
 &= \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & |\beta|^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & |\gamma|^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & |\delta|^2 \end{bmatrix} \quad (2.166)
 \end{aligned}$$

$$\text{e } \rho_{\text{inicial}} = \rho^{B,C} \otimes \rho^A = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 \rho^A & \dots & \dots & \dots \\ \dots & |\beta|^2 \rho^A & \dots & \dots \\ \dots & \dots & |\gamma|^2 \rho^A & \dots \\ \dots & \dots & \dots & |\delta|^2 \rho^A \end{bmatrix}, \quad (2.167)$$

onde ρ^A é o sistema de interesse e \dots indicam elementos fora da diagonal principal.

Por sua vez, se o mapa da evolução que atua sobre todo o sistema for expresso em função dos estados de base do subsistema $\{B,C\}$, a matriz $U^{B,C,A}$ deve conter os elementos σ_i e I^A de forma que

$$U^{B,C,A} = \begin{bmatrix} \sigma_x^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I^A \end{bmatrix}, \quad (2.168)$$

e, considerando a hermiticidade dos operadores de Pauli ($\sigma_i^\dagger = \sigma_i$), o estado final do

sistema global será equivalente a

$$\begin{aligned} \rho_{final} &= U^{B,C,A} \rho_{inicial} U^{\dagger B,C,A} \\ &= \begin{bmatrix} |\alpha|^2 \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A & \dots & \dots & \dots \\ \dots & |\beta|^2 \sigma_y^A \rho^A \sigma_y^A & \dots & \dots \\ \dots & \dots & |\gamma|^2 \sigma_z^A \rho^A \sigma_z^A & \dots \\ \dots & \dots & \dots & |\delta|^2 \rho^A \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Neste caso, a análise do mapa

$$\begin{aligned} \rho'^A &= S(\rho^A) = \text{Tr}_{B,C}(\rho_{final}) \\ &= |\alpha|^2 \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A + |\beta|^2 \sigma_y^A \rho^A \sigma_y^A + |\gamma|^2 \sigma_z^A \rho^A \sigma_z^A + |\delta|^2 (I^A) \rho^A (I^A) \end{aligned} \quad (2.170)$$

revela que os operadores σ_i^A e I^A estão atrelados aos coeficientes do estado inicial do subsistema B, C na Eq. (2.165). Como o módulo quadrático destes coeficientes indica a probabilidade de ocorrência dos mesmos, ρ^A pode ser submetido a uma determinada operação sempre que o respectivo coeficiente associado a mesma na Eq. (2.170) for não-nulo. Repare que a semelhança desta equação com a representação via operador-soma da Eq. (2.86) possibilita a definição de

$$E_0 \equiv |\delta| I^A, \quad E_1 \equiv |\alpha| \sigma_x^A, \quad E_2 \equiv |\beta| \sigma_y^A \quad \text{e} \quad E_3 \equiv |\gamma| \sigma_z^A, \quad (2.171)$$

permitindo que os operadores de Kraus sejam associados ao mapa mais geral possível para descrever decoerências arbitrárias que atuam sobre um *qubit*.

Se expandirmos as matrizes da Eq. (2.170) em função de seus parâmetros internos como

$$\begin{aligned} \rho^A &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{bmatrix}, \quad \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-z & x+iy \\ x-iy & 1+z \end{bmatrix}, \\ \sigma_y^A \rho^A \sigma_y^A &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-z & -(x+iy) \\ -(x-iy) & 1+z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_z^A \rho^A \sigma_z^A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & -(x-iy) \\ -(x+iy) & 1-z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.172)$$

a condição $|\delta|^2 = 1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2$ implica que ρ'^A equivale a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (|\alpha|^2 + |\beta|^2)(1-z) + (|\gamma|^2 + |\delta|^2)(1+z) & (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(x+iy) + (-|\gamma|^2 + |\delta|^2)(x-iy) \\ (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(x-iy) + (-|\gamma|^2 + |\delta|^2)(x+iy) & (|\alpha|^2 + |\beta|^2)(1+z) + (|\gamma|^2 + |\delta|^2)(1-z) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \{1 - 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\} z & \{1 - 2(|\beta|^2 + |\gamma|^2)\} x - i \{1 - 2(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)\} y \\ \{1 - 2(|\beta|^2 + |\gamma|^2)\} x + i \{1 - 2(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)\} y & 1 - \{1 - 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\} z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.173)$$

e revela que x' , y' e z' podem ser expressos como transformações lineares dos parâmetros

análogos em ρ^A antes da ação de $U^{B,C,A}$. Logo, as relações

$$x' = \{1 - 2(|\beta|^2 + |\gamma|^2)\}x; \quad y' = \{1 - 2(|\alpha|^2 + |\gamma|^2)\}y \quad \text{e} \quad z' = \{1 - 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\}z \quad (2.174)$$

não só quantificam a contração que os respectivos eixos cartesianos da esfera de Bloch sofrem após a modificação do sistema de interesse como também descrevem todos os tipos de decoerência existentes que atuam sobre um *qubit*, de forma semelhante à Eq. (2.171).

Nos tópicos a seguir, destacaremos os modelos mais relevantes associados aos mapas descritos pela Eq. (2.170).

2.9.1 Inversão de Bit

O primeiro modelo a ser analisado será o do mapa conhecido como Inversão de Bit. Vimos no Apêndice A que os autovalores dos operadores de Pauli possuem módulo unitário e mostramos no Apêndice C que estes operadores podem ser empregados para simular operações lógicas sobre *qubits*. Por ora, basta dizer que os autoestados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ do operador σ_x podem ser decompostos como

$$|+\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \text{e} \quad |-\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle), \quad (2.175)$$

onde $\sigma_x|+\rangle = |+\rangle$, $\sigma_x|-\rangle = -|-\rangle$ e $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são os autoestados do operador σ_z tal que $\sigma_x|0\rangle = |1\rangle$ e $\sigma_x|1\rangle = |0\rangle$.

Neste exemplo, a ação de σ_x sobre estes estados é equivalente à operação clássica de inversão de bit efetuada pela porta lógica *NOT*. Para $|\beta| = |\gamma| = 0$ na Eq. (2.170), o sistema de interesse se reduz a

$$\rho'^A = S(\rho^A) = |\alpha|^2 \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A + |\delta|^2 \rho^A, \quad (2.176)$$

onde $|\alpha|^2$ e $|\delta|^2$ são as respectivas probabilidades de ρ^A sofrer a ação do operador σ_x ou de permanecer inalterado. Se reescrevermos estes coeficientes em função de um único parâmetro $0 < p < 1$ tal que $|\alpha|^2 = p$ e $|\delta|^2 = 1 - p$, a Eq. (2.174) se resume a

$$x' = x, \quad y' = (1 - 2p)y \quad \text{e} \quad z' = (1 - 2p)z, \quad (2.177)$$

e a representação dos operadores de Kraus em (2.171) resulta em

$$E_0 = \left(\sqrt{1-p}\right) I^A \quad \text{e} \quad E_1 = \left(\sqrt{p}\right) \sigma_x^A, \quad (2.178)$$

comprovando que σ_x^A e I^A podem atuar sobre ρ^A com probabilidades respectivamente iguais a p e $1 - p$.

A Eq. (2.177) e a Fig (2.8) mostram que a coordenada x é a única que não sofre contração com a transformação induzida pelo mapeamento $\rho^A \rightarrow \rho'^A$. De fato,

quando ρ^A for semelhante a algum dos autoestados de σ_x e visto que $\sigma_x|+\rangle\langle+|_{\sigma_x} = |+\rangle\langle+|$, $\sigma_x|-\rangle\langle-|_{\sigma_x} = |-\rangle\langle-|$ e $|\alpha|^2 + |\delta|^2 = 1$, a Eq. (2.176) prediz que

$$S(|+\rangle_{aa}\langle+|) = |+\rangle_{aa}\langle+| \text{ e } S(|-\rangle_{aa}\langle-|) = |-\rangle_{aa}\langle-|, \quad (2.179)$$

e que, portanto, a transformação $U^{B,C,A}$ não afeta sistemas orientados sobre o eixo x . Ao mesmo tempo, a Eq. (2.177) revela que as coordenadas y e z sofrem contrações idênticas geradas pelo fator $(1 - 2p)$, e, por conseguinte, o modelo de Inversão de Bit restringe o mapeamento da esfera de Bloch a um elipsóide situado sobre o eixo x para $p \in]0, 1[$, como ilustra a Fig (2.8) para $p = 0.3$. Note ainda que a condição $p = 0$ reproduz o instante

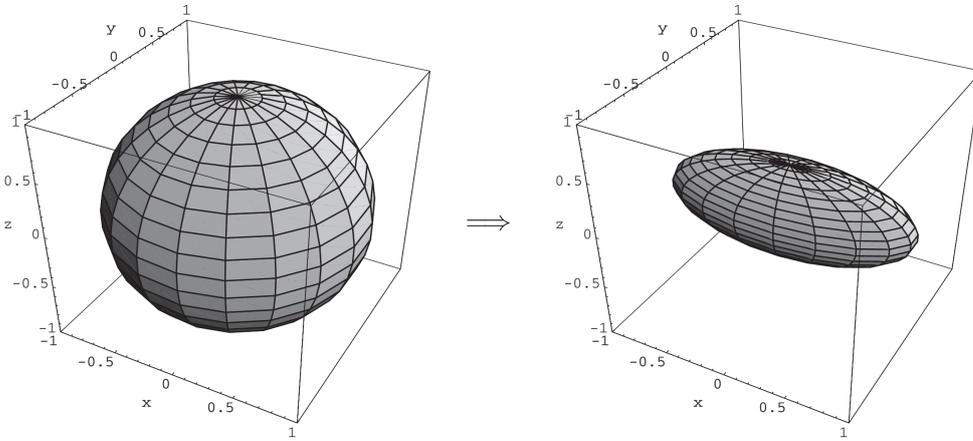


Figura 2.8: Efeito do mapa de Inversão de Bit na esfera de Bloch para $p=0.3$. Apenas o eixo x não sofre contração.

Fonte: Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011.

em que não há decoerência atuando sobre o sistema, enquanto que em $p = 1$ o estado original ρ^A é submetido apenas à ação do operador σ_x , e, tal qual em um cenário clássico, o mesmo pode ser recuperado após a aplicação de uma segunda operação de inversão de bit.

Por sua vez, configurações intermediárias do parâmetro p na Eq. (2.176) sempre geram estados mistos, pois

$$\begin{aligned} (\rho'^A)^2 &= (p)^2 \sigma_x^A (\rho^A)^2 \sigma_x^A + (p)(1-p) \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A \rho^A + (p)(1-p) \rho^A \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A + (1-p)^2 (\rho^A)^2 \\ &\Rightarrow \text{Tr}(\rho'^A)^2 = (p)^2 \text{Tr}\{(\rho^A)^2 \sigma_x^A \sigma_x^A\} + 2(p)(1-p) \text{Tr}(\rho^A \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A) + (1-p)^2 \text{Tr}(\rho^A)^2 \\ &= (1 - 2p + 2p^2) \text{Tr}(\rho^A)^2 + 2(p)(1-p) \text{Tr}(\rho^A \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A)^2, \end{aligned} \quad (2.180)$$

de onde depreende-se que ρ'^A seria um estado puro apenas se a condição (seção 2.2)

$$\text{Tr}(\rho^A)^2 = \text{Tr}(\rho^A \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A)^2 = 1 \Rightarrow \text{Tr}(\rho'^A)^2 = 1 - 2p + 2p^2 + 2p - 2p^2 = 1 \quad (2.181)$$

fosse satisfeita.

Embora não haja restrição quanto à pureza do sistema inicial que impeça a hipótese $\text{Tr}(\rho^A)^2 = 1$, o produto dos termos ρ^A e $\sigma_i^A \rho^A \sigma_i^A$ explicitados na Eq. (2.172) gera estados como $\rho^A \sigma_i^A \rho^A \sigma_i^A$ para os quais $\text{Tr}(\rho^A \sigma_i^A \rho^A \sigma_i^A)^2 < 1$, e, portanto, $\text{Tr}(\rho'^A)^2 < 1$. Obtém-se conclusão idêntica com a análise do raio \vec{r}' associado aos coeficientes da Eq. (2.177) para $|\vec{r}'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}$, visto que $|\vec{r}'| < 1$ para $0 < p < 1$. Argumento análogo prova que os modelos de Inversão de Fase e Inversão de Bit e Fase geram estados mistos para $p \neq \{0, 1\}$.

2.9.2 Inversão de Fase

As conclusões obtidas para o modelo de Inversão de Bit podem ser estendidas para o mapa de Inversão de Fase com a simples permutação dos eixos x e z e seus respectivos coeficientes na Eq. (2.176). Assim, considerando que os autoestados de σ_z formam a base computacional padrão e obedecem à relação $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$ e $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$, a escolha de $\alpha = \beta = 0$ na Eq. (2.170) gera o estado misto

$$\rho'^A = S(\rho^A) = |\gamma|^2 \sigma_z^A \rho^A \sigma_z^A + |\delta|^2 \rho^A, \quad (2.182)$$

onde a parametrização de $|\gamma|^2 = p$ e $|\delta|^2 = 1 - p$ define as coordenadas

$$x' = (1 - 2p)x, \quad y' = (1 - 2p)y \quad \text{e} \quad z' = z \quad (2.183)$$

e permite a construção do par de operadores de Kraus dados por

$$E_0 = (\sqrt{1-p}) I^A \quad \text{e} \quad E_1 = (\sqrt{p}) \sigma_z^A. \quad (2.184)$$

De forma análoga ao modelo de Inversão de Bit, as probabilidades de o sistema inicial sofrer inversão de fase ou de permanecer inalterado são respectivamente iguais a p e $1 - p$.

Conforme o esperado, a Eq. (2.183) estabelece que apenas o eixo z é preservado na transformação $\rho^A \rightarrow \rho'^A$, ilustrada na Fig. (2.9) para $p = 0.3$. As relações

$$S(|0\rangle_{aa}\langle 0|) = |0\rangle_{aa}\langle 0| \quad \text{e} \quad S(|1\rangle_{aa}\langle 1|) = |1\rangle_{aa}\langle 1| \quad (2.185)$$

também confirmam a invariância de $S(\rho^A)$ para os autoestados de σ_z , e, do mesmo modo, enquanto a condição $p = 0$ reflete a ausência de decoerência em ρ'^A , sua configuração em $p = 1$ permite que o sistema original seja recuperado com uma nova aplicação da operação σ_z . Obviamente, tal cenário não pode ser reproduzido para estados clássicos, uma vez que estes últimos não exibem fatores de fase do tipo $e^{i\theta}$ para $\theta \neq 0$.

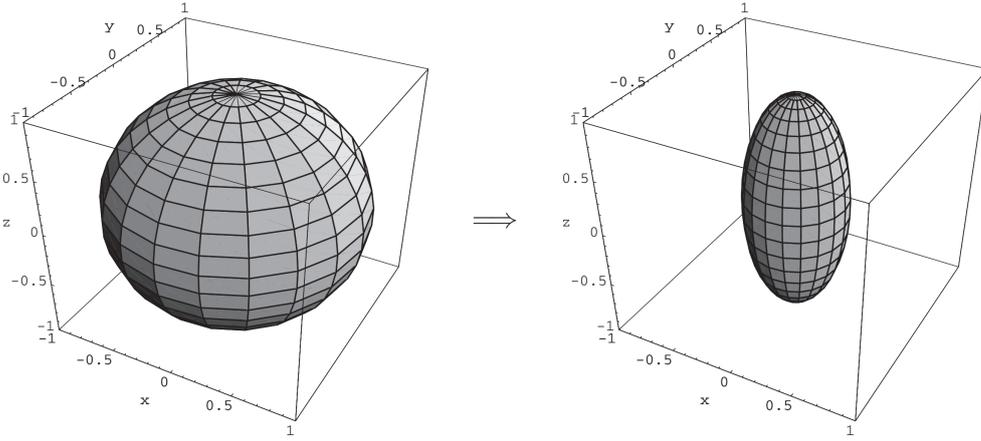


Figura 2.9: Efeito do mapa de Inversão de Fase na esfera de Bloch para $p=0.3$. Apenas o eixo z não sofre contração.

Fonte: Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011.

2.9.3 Inversão de Bit e Fase

O modelo de Inversão de Bit e Fase é obtido da Eq. (2.170) para $\alpha = \gamma = 0$, cujo mapa

$$\rho'^A = S(\rho^A) = |\beta|^2 \sigma_y^A \rho^A \sigma_y^A + |\delta|^2 \rho^A \quad (2.186)$$

corresponde à ação dos operadores σ_y^A e I^A associados às respectivas probabilidades $|\beta|^2 = p$ e $|\delta|^2 = 1 - p$. Por sua vez, os operadores de Kraus são expressos como

$$E_0 = (\sqrt{1-p}) I^A \quad \text{e} \quad E_1 = (\sqrt{p}) \sigma_y^A, \quad (2.187)$$

e, assim como nos modelos de Inversão de Bit e Inversão de Fase, a transformação $\rho^A \rightarrow \rho'^A$ afeta apenas dois dos eixos cartesianos representados na esfera de Bloch. Como previsto, a Eq. (2.174) garante a preservação do eixo y , uma vez que as coordenadas de ρ'^A são dadas por

$$x' = (1 - 2p)x, \quad y' = y \quad \text{e} \quad z' = (1 - 2p)z, \quad (2.188)$$

cuja transformação encontra-se representada na Fig. (2.10) para $p = 0.3$.

Como os autoestados $|\otimes\rangle$ e $|\odot\rangle$ de σ_y podem ser expressos em função de $|0\rangle$ e $|1\rangle$ segundo as relações

$$|\otimes\rangle = \frac{1}{2} (|0\rangle + i|1\rangle) \quad \text{e} \quad |\odot\rangle = \frac{1}{2} (|0\rangle - i|1\rangle), \quad (2.189)$$

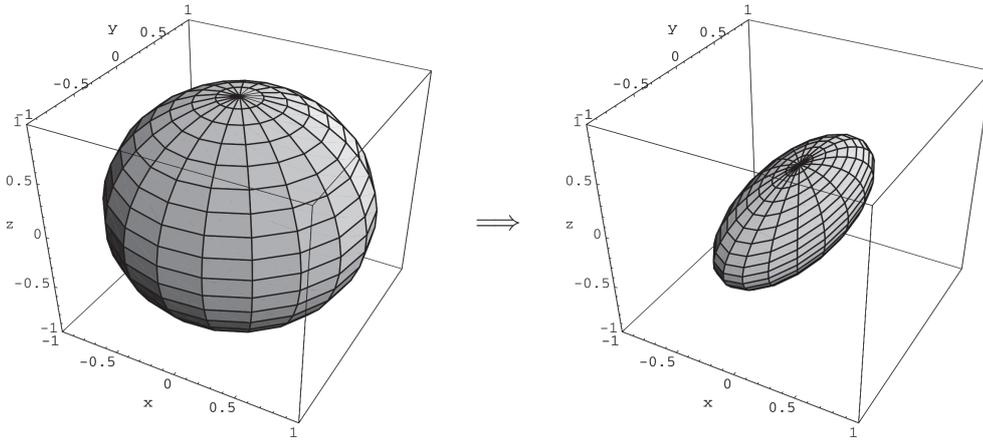


Figura 2.10: Efeito do mapa de Inversão de Bit e Fase na esfera de Bloch para $p=0.3$. Apenas o eixo y não sofre contração.

Fonte: Figura adaptada de *Nielsen and Chuang, 2011*.

para as quais $\sigma_y|\otimes\rangle = |\otimes\rangle$ e $\sigma_y|\odot\rangle = -|\odot\rangle$, o mapa

$$S(|\otimes\rangle_{aa}\langle\otimes|) = |\otimes\rangle_{aa}\langle\otimes| \text{ e } S(|\odot\rangle_{aa}\langle\odot|) = |\odot\rangle_{aa}\langle\odot| \quad (2.190)$$

também confirma a Eq. (2.188). Tal qual nos modelos precedentes, a transformação $S(\rho^A)$ efetuada para $p = 1$ permite que uma nova aplicação de σ_y restaure o sistema inicial, e, de forma semelhante ao argumento utilizado para o modelo de Inversão de Fase, o mapa de Inversão de Bit e Fase não possui correspondentes clássicos.

2.9.4 Despolarização

O processo de Despolarização é um fenômeno no qual o sistema ambiente induz ρ^A para o estado misto ρ'^A segundo a relação

$$\rho'^A = S(\rho^A) = (p)\frac{I}{2} + (1-p)\rho^A, \quad (2.191)$$

onde $0 < p < 1$, indicando que há uma probabilidade não-nula dada por $1-p$ de o sistema inicial não sofrer nenhum tipo de decoerência e p de ρ^A ser transformado no estado completamente misto dado por $I/2$; cenário no qual o sistema encontra-se despolarizado (seção 2.2).

A Eq. (2.191) sugere que o mapa de Despolarização inclui de forma equitativa as transformações associadas aos modelos de Inversão de Bit, Inversão de Fase e Inversão de Bit e Fase, uma vez que o estado final não apresenta qualquer informação relativa aos operadores de Pauli. De fato, visto que

$$\frac{\sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A + \sigma_y^A \rho^A \sigma_y^A + \sigma_z^A \rho^A \sigma_z^A + \rho^A}{4} \equiv \frac{I}{2} \quad (2.192)$$

segundo a Eq. (2.172), a transformação dada por $S(\rho^A)$ também pode ser descrita como

$$\rho'^A = S(\rho^A) = \left(\frac{p}{4}\right) \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A + \left(\frac{p}{4}\right) \sigma_y^A \rho^A \sigma_y^A + \left(\frac{p}{4}\right) \sigma_z^A \rho^A \sigma_z^A + \left(1 - \frac{3p}{4}\right) \rho^A, \quad (2.193)$$

ou, de forma mais compacta,

$$\rho'^A = S(\rho^A) = \left(\frac{p'}{3}\right) \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A + \left(\frac{p'}{3}\right) \sigma_y^A \rho^A \sigma_y^A + \left(\frac{p'}{3}\right) \sigma_z^A \rho^A \sigma_z^A + \left(1 - p'\right) \rho^A, \quad (2.194)$$

para $p' = 3p/4$ e $0 < p' < 3/4$.

Assim, de acordo com a Eq. (2.193), o conjunto dos operadores de Kraus para o modelo de despolarização é descrito por

$$E_0 = \left(\sqrt{1 - \frac{3p}{4}}\right) I^A, \quad E_1 = \left(\sqrt{\frac{p}{4}}\right) \sigma_x^A, \quad E_2 = \left(\sqrt{\frac{p}{4}}\right) \sigma_y^A \quad \text{e} \quad E_3 = \left(\sqrt{\frac{p}{4}}\right) \sigma_z^A, \quad (2.195)$$

e as coordenadas cartesianas da Eq. (2.174) são dadas por

$$x' = (1 - p)x, \quad y' = (1 - p)y \quad \text{e} \quad z' = (1 - p)z. \quad (2.196)$$

Como os coeficientes associados às matrizes de Pauli na Eq. (2.195) são idênticos entre si, os eixos perpendiculares descritos na Eq. (2.196) sofrem contração uniforme em todas as direções e preservam a estrutura esférica da esfera de Bloch original.

A Fig. (2.11) apresenta um exemplo da transição $\rho^A \rightarrow \rho'^A$ para $p = 0.3$, onde o raio $|\vec{r}'|$ é inversamente proporcional à magnitude de p . À medida que esta aumenta, o sistema aproxima-se gradativamente de um estado completamente misto e os três eixos se contraem na direção da origem até o valor limite correspondente a $p = 1$, onde, de acordo com a Eq (2.192), o colapso para

$$\rho'^A = \left(\frac{1}{4}\right) \sigma_x^A \rho^A \sigma_x^A + \left(\frac{1}{4}\right) \sigma_y^A \rho^A \sigma_y^A + \left(\frac{1}{4}\right) \sigma_z^A \rho^A \sigma_z^A + \left(\frac{1}{4}\right) \rho^A = \frac{I}{2} \quad (2.197)$$

torna impossível a recuperação do estado inicial (visto que toda a informação contida originalmente em ρ^A seria absorvida pelo ambiente). Conseqüentemente, a restrição $p > 0$ é suficiente para impedir a reversão do processo de despolarização e garantir que ρ'^A jamais retorne à configuração inicial assumida pelo estado puro ρ^A .

2.9.5 Atenuação de Fase

O modelo de Atenuação de Fase descreve a decoerência de sistemas que perdem informações relativas à fase de seus autoestados através de processos não-dissipativos, como, por exemplo, o espalhamento de um único fóton que viaja em uma guia de onda ou a perturbação de estados eletrônicos de um átomo devido à interação com cargas elétri-

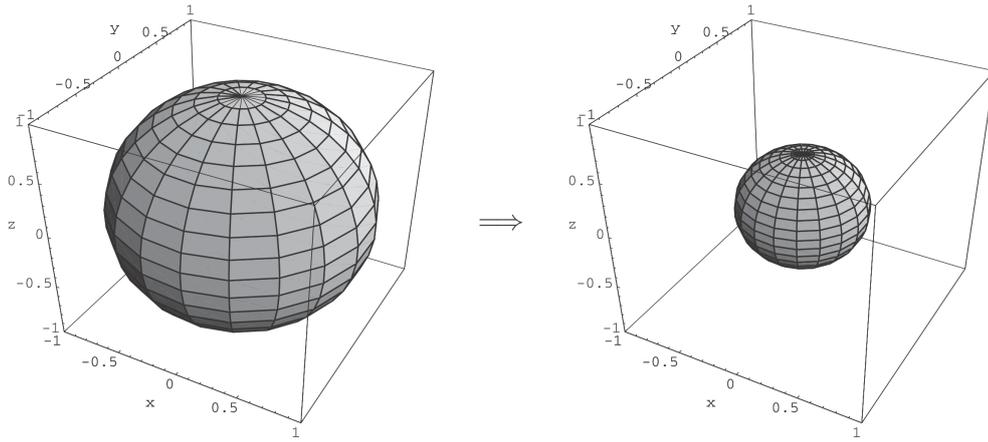


Figura 2.11: Efeito do mapa de Despolarização na esfera de Bloch para $p=0.3$. Os eixos x , y e z são contraídos de forma simétrica.

Fonte: Figura adaptada de *Nielsen and Chuang, 2011*.

cas externas distantes do mesmo (Nielsen and Chuang, 2011). Como a ação do ambiente sobre estes sistemas ocorre de forma aleatória, cada evento pode ser descrito por uma transformação do tipo

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}, \quad (2.198)$$

a qual, por sua vez, pode ser associada a uma distribuição gaussiana como

$$p(\theta) = \frac{e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}}}{\sqrt{4\pi\lambda}} \quad (2.199)$$

para $0 < \lambda < 1$, onde $R_z(\theta)$ representa uma rotação da esfera de Bloch por um ângulo θ arbitrário em torno do eixo z .

Se considerarmos o sistema inicial da Eq. (2.145) cujo operador densidade é dado por

$$\rho^A = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (2.200)$$

e que o mapa $\rho^A \rightarrow \rho'^A$ é equivalente à transformação $p(\theta)R_z^A(\theta)\rho^A R_z^{\dagger A}(\theta)$ para todos os valores possíveis de θ , então

$$\begin{aligned} \rho'^A &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta)R_z^A(\theta)\rho^A R_z^{\dagger A}(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}} \right) \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & (e^{-i\theta})\alpha\beta^* \\ (e^{i\theta})\alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix} d\theta = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & (e^{-\lambda})\alpha\beta^* \\ (e^{-\lambda})\alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Note que a única diferença entre as Eqs. (2.201) e (2.200) é a presença do fator de fase

$e^{-\lambda}$ adquirido pelos termos de coerência.

Visto que o mapa (2.201) só afeta os elementos situados fora da diagonal principal de (2.200), sua ação sobre o sistema ρ^A após N transformações sucessivas durante um período de tempo t finito gera um fator de fase igual a $e^{-\lambda N}$. Por sua vez, se t é uma variável resultante da soma de incrementos de tempo Δt tal que $t = N\Delta t$, então, para $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} e^{-\frac{\lambda t}{\Delta t}} = 0. \quad (2.202)$$

Logo, os termos de coerência tendem a desaparecer com o decorrer do tempo, enquanto o estado final do sistema aproxima-se de

$$\rho'^A = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{bmatrix}, \quad (2.203)$$

tal qual a Eq. (2.200).

Repare que a Eq. (2.159) implica na igualdade das Eqs. (2.183) e (2.201), e, por conseguinte, na equivalência entre os modelos de Atenuação de Fase e Inversão de Fase, visto que a variação dos eixos x e y é homogênea e que somente a coordenada z é preservada na transformação $\rho^A \rightarrow \rho'^A$. A mesma relação pode ser estendida aos primeiros mapas de decoerência apresentados nesta seção, uma vez que os modelos de Inversão de Bit e Inversão de Bit e Fase podem ser construídos de forma semelhante ao de Atenuação de Fase (com a simples permutação de $R_z(\theta)$ na Eq. (2.198) por rotações equivalentes a $R_x(\theta)$ ou $R_y(\theta)$ em torno dos eixos x e y , respectivamente).

Além disso, o Teorema da Liberdade Unitária na Representação de Operador-Soma (Nielsen and Chuang, 2011) permite que qualquer mapa seja representado por conjuntos de operadores de Kraus distintos se a ação dos mesmos gerar resultados idênticos para o sistema final. Assim, embora os operadores

$$E'_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{1-p} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix} \text{ e } E'_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} \end{bmatrix} \quad (2.204)$$

apresentados em (2.184) satisfaçam as Eqs. (2.201) e (2.203) respectivamente para $1-2p \equiv e^{-\lambda}$ e $p = 1/2$, a representação adotada como padrão para descrever o mapa de Atenuação de Fase é dada por

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{bmatrix} \text{ e } E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (2.205)$$

onde

$$\rho'^A = \sum_k E_k \rho^A (E_k)^\dagger = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & (\sqrt{1-\lambda}) \alpha \beta^* \\ (\sqrt{1-\lambda}) \alpha^* \beta & |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (2.206)$$

e $p = (1 - \sqrt{1-\lambda})/2$ garantem a equivalência entre as Eqs. (2.183) e (2.201) no regime $0 < p < 1/2$. Contudo, a restrição $0 < \lambda < 1$ impossibilita a recuperação do sistema inicial como no mapa de Inversão de Fase, e qualquer semelhança entre os dois modelos extingui-se para o intervalo $1/2 < p < 1$.

Para finalizar, observe que, de acordo com a Eq. (2.206), a ação individual de cada operador E_k é dada por

$$E_0|0\rangle_a = |0\rangle_a, \quad E_0|1\rangle_a = \sqrt{1-\lambda}|1\rangle_a \quad \text{e} \quad E_1|1\rangle_a = \sqrt{\lambda}|1\rangle_a, \quad (2.207)$$

e, portanto, um *qubit* com energia no nível fundamental $|0\rangle_a$ não poderia sofrer atenuação de fase. Por outro lado, um sistema excitado $|1\rangle_a$ teria sua amplitude de probabilidade reduzida pelos fatores $1 - \lambda$ ou λ , cujo resultado final dependeria da ação dos respectivos operadores E_0 ou E_1 . Como não há transição entre os estados $|0\rangle_a$ e $|1\rangle_a$, processos deste tipo ocorrem sem perda de energia.

2.9.6 Atenuação de Amplitude

Vimos que os processos implícitos na transformação $\rho^A \rightarrow \rho'^A$ para o mapa de Atenuação de Fase são conservativos, e, portanto, reversíveis. O modelo de Atenuação de Amplitude, por sua vez, é utilizado para descrever processos irreversíveis, onde a perda de informação dos autoestados do sistema de interesse ocorre com dissipação de energia para o ambiente através de dinâmicas não-unitárias.

A representação padrão dos operadores de Kraus para o mapa de Atenuação de Amplitude baseia-se na discussão que encerra a análise do modelo de Atenuação de Fase, com a substituição do termo $\sqrt{\lambda}|1\rangle\langle 1|$ em (2.205) por $\sqrt{p}|0\rangle\langle 1|$ de forma que

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.208)$$

onde os mesmos obedecem às relações

$$E_0|0\rangle_a = |0\rangle_a, \quad E_0|1\rangle_a = \sqrt{1-\lambda}|1\rangle_a \quad \text{e} \quad E_1|1\rangle_a = \sqrt{\lambda}|0\rangle_a. \quad (2.209)$$

Neste caso, nenhuma alteração ocorrerá sobre *qubits* cujos estados estejam situados no nível fundamental $|0\rangle_a$, mas sistemas excitados como $|1\rangle_a$ terão sua amplitude de probabilidade reduzida devido à ação destes operadores. Na demonstração a seguir, provaremos que E_1 é responsável pelo decaimento $|1\rangle_a \rightarrow |0\rangle_a$.

O estado misto ρ'^A pode ser calculado através da representação via operador-soma como

$$\rho'^A = \sum_k E_k \rho^A (E_k)^\dagger = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 + (p) |\beta|^2 & (\sqrt{1-p}) \alpha \beta^* \\ (\sqrt{1-p}) \alpha^* \beta & (1-p) |\beta|^2 \end{bmatrix}, \quad (2.210)$$

onde ρ^A e E_k são fornecidos respectivamente pela Eqs. (2.145) e (2.208). Observe que as coordenadas modificadas relacionam-se com as originais via

$$x' = (\sqrt{1-p}) x, \quad y' = (\sqrt{1-p}) y \quad \text{e} \quad z' = p + (1-p) z, \quad (2.211)$$

e que o coeficiente associado ao projetor $|1\rangle_{aa}\langle 1|$ após N aplicações sucessivas deste mapa é dado por

$$(\rho_{11}^A)^N = (1-p)^N |\beta|^2. \quad (2.212)$$

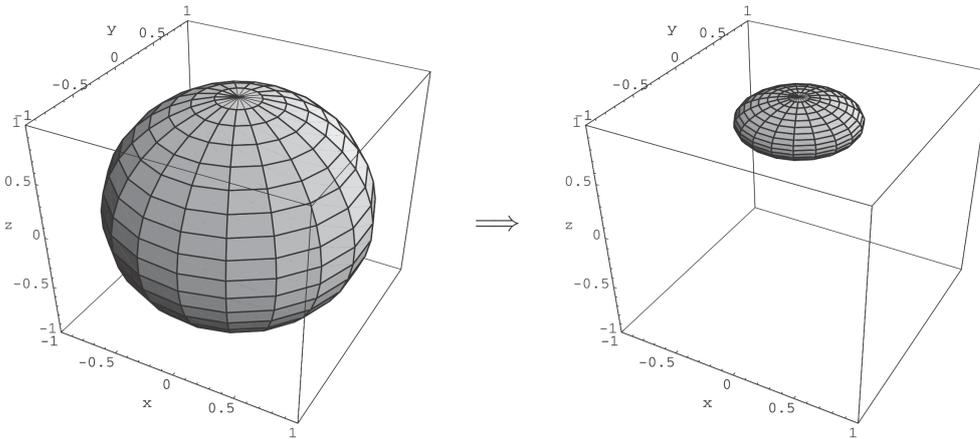


Figura 2.12: Efeito do mapa de Atenuação de Amplitude na esfera de Bloch para $p=0.3$. Os eixos x , y e z contraem-se na direção do ponto $(0,0,1)$ que representa o estado $|0\rangle$.

Fonte: Figura adaptada de *Nielsen and Chuang, 2011*.

De acordo com a Eq. (2.202) e considerações precedentes, a parametrização de $p = M\Delta t$ e $t = N\Delta t$ para $\{M, N\} \rightarrow \infty$ resulta em

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 - M\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{-Mt} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (\rho_{11}^A)^N \propto \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-Mt} = 0, \quad (2.213)$$

confirmando que aplicações contínuas da Eq. (2.210) sobre o sistema inicial eliminariam as superposições associadas às excitações do estado fundamental até que ρ'^A se estabilizasse sobre o mesmo e toda a energia fosse dissipada.

A Fig. (2.12) exhibe um exemplo desta transição para $p = 0.3$. Note que a contração da esfera de Bloch ocorre na direção do ponto que representa o estado $|0\rangle_a$.

2.10 Redução de Emaranhamento

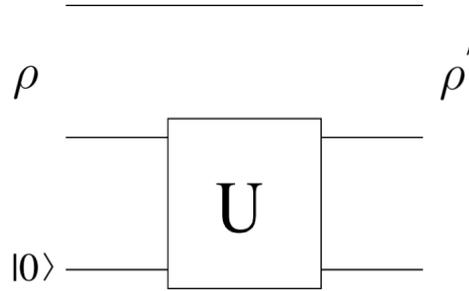


Figura 2.13: Representação esquemática de um circuito que simula o processo de decoerência sobre apenas um dos qubits do estado ρ .

Se um estado emaranhado puro possui ao menos um *qubit* exposto à ação de um sistema externo, o processo de decoerência não só reduz a amplitude das superposições existentes entre todos os seus constituintes como também afeta o grau de emaranhamento entre os mesmos. Como não pretendemos demonstrar esta afirmação para um caso geral, comprovaremos sua validade em um exemplo para um sistema de dois *qubits* sujeito à ação do mapa de Atenuação de Fase.

Considere um ambiente representado por $|0\rangle_c \in H^C$ e que o sistema inicial seja descrito pelo operador densidade do estado $|\Phi^+\rangle_{a,b} \in H^{A,B}$ (Eq. (2.127)) como

$$\rho^{A,B} = |\Phi^+\rangle_{a,b} \langle\Phi^+| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.214)$$

Se os operadores de Kraus apresentados na Eq. (2.205) atuarem apenas sobre o subsistema B , os mesmos podem ser expressos como

$$E_0^{A,B} \equiv I^A \otimes E_0^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{bmatrix} \text{ e } E_1^{A,B} \equiv I^A \otimes E_1^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (2.215)$$

e o estado final do sistema exibido na Fig. (2.13) será equivalente a

$$\begin{aligned} \rho'^{A,B} &= \sum_{k=0}^1 E_k^{A,B} \rho^{A,B} (E_k^{A,B})^\dagger = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{1-\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\lambda} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle_{a,b} \langle 00| + \sqrt{1-\lambda} |00\rangle_{a,b} \langle 11| + \sqrt{1-\lambda} |11\rangle_{a,b} \langle 00| + |11\rangle_{a,b} \langle 11|). \end{aligned} \quad (2.216)$$

Repare que $\rho'^{A,B}$ se aproxima de uma mistura estatística clássica à medida que a magnitude do parâmetro λ aumenta, visto que os termos de coerência da Eq. (2.216) tendem a desaparecer. Como a condição $0 < \lambda < 1$ está implícita na Eq. (2.205), e a relação

$$\rho'^{A,B} = \rho^{A,B} = \frac{1}{2} (|00\rangle_{a,b} \langle 00| + |00\rangle_{a,b} \langle 11| + |11\rangle_{a,b} \langle 00| + |11\rangle_{a,b} \langle 11|) \quad (2.217)$$

só é satisfeita para $\lambda = 1$ (condição na qual os dois sistemas encontram-se maximamente emaranhados), conclui-se que o grau de emaranhamento de $\rho'^{A,B}$ é inferior ao de $\rho^{A,B}$.

A análise deste exemplo pode ser estendida para outros mapas de decoerência e sistemas composto de ordem superior a dois, para os quais é possível mostrar que a perda de coerência em estados quânticos emaranhados sempre acarreta a redução do emaranhamento existente entre seus subsistemas.

2.11 Mecânica Estatística

Os fenômenos de decoerência que ocorrem em um determinado sistema quando este interage com um meio externo também podem ser analisados sob a ótica dos conceitos da Mecânica Estatística. Neste contexto, considere um sistema inicialmente isolado de influências externas contendo um conjunto de N partículas (cuja interação mútua pode ser desprezada). Se cada partícula possuir uma determinada energia E_i , a energia total do sistema será constante e igual a

$$E = \sum_{i=1}^{i=N} n_i E_i, \quad (2.218)$$

onde n_i é o número de partículas que apresentam energia semelhante. Na condição de equilíbrio, a distribuição de energia entre estes componentes é independente do tempo (Callen, 1985) e proporcional à grandeza $e^{-\frac{E_i}{kT}}$, e, neste caso, o sistema assume a configuração mais provável dentre os possíveis cenários permitidos pelos microestados relativos à temperatura T em questão, onde k é a constante de Boltzmann apresentada na Eq. (2.126).

Se estes constituintes forem indistinguíveis, a probabilidade clássica de uma única partícula possuir o valor específico de energia E_i é equivalente a

$$p_i = \frac{1}{Z} n_i e^{-\frac{E_i}{kT}}, \quad (2.219)$$

onde a função de partição Z dada por

$$Z = \sum_{i=1}^{i=N} n_i e^{-\frac{E_i}{kT}}. \quad (2.220)$$

é uma constante que engloba todos os valores possíveis de energia que podem ser assumidos por cada elemento do sistema.

Visto que a descrição de um sistema quântico deve conter todas as informações relativas às configurações que cada partícula pode assumir individualmente, um operador densidade expresso em uma base ortonormal de autoestados $|u_{g_i}\rangle$ com degenerescência n_i poderia ser utilizado para este fim, o qual, neste caso, seria dado por

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{g_1=1}^{g_1=n_1} \left(\frac{1}{Z} e^{-\frac{E_1}{kT}} \right) |u_{g_1}^{n_1}\rangle \langle u_{g_1}^{n_1}| + \sum_{g_2=1}^{g_2=n_2} \left(\frac{1}{Z} e^{-\frac{E_2}{kT}} \right) |u_{g_2}^{n_2}\rangle \langle u_{g_2}^{n_2}| \\ &\dots + \sum_{g_N=1}^{g_N=n_N} \left(\frac{1}{Z} e^{-\frac{E_N}{kT}} \right) |u_{g_N}^{n_N}\rangle \langle u_{g_N}^{n_N}| = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{g_i=1}^{g_i=n_i} e^{-\frac{E_i}{kT}} |u_{g_i}^{n_i}\rangle \langle u_{g_i}^{n_i}| \\ &= \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} e^{-\frac{E_1}{kT}} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{-\frac{E_2}{kT}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & e^{-\frac{E_N}{kT}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.221)$$

Repare que $p_i = \text{Tr}(\rho \hat{P}_{u_i}) = \frac{1}{Z} n_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$ satisfaz as Eqs. (2.15) e (2.219) quando o subespaço n_i está contido em \hat{P}_{u_i} . Observe ainda que a condição imposta pela Eq. (2.22) preserva a Eq. (2.220), visto que

$$\text{Tr} \rho = 1 \Rightarrow Z = \sum_{i=1}^{i=N} n_i e^{-\frac{E_i}{kT}}. \quad (2.222)$$

A notação associada a ρ pode ser simplificada se notarmos que as grandezas E_i estão relacionadas aos autovalores do operador Hamiltoniano que rege a evolução temporal do sistema, de acordo com as Eqs. (B.4) e (B.8). Se os vetores $|u_{g_i}\rangle$ são autoestados de H de forma que

$$\langle u_{g_i} | \left(\frac{1}{Z} e^{-\frac{\mathbf{H}}{kT}} \right) | u_{g_j} \rangle = \langle u_{g_i} | \left(\frac{1}{Z} e^{-\frac{E_j}{kT}} \right) | u_{g_j} \rangle = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_j}{kT}} \langle u_{g_i} | u_{g_j} \rangle = (\delta_{i,j}) \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_j}{kT}}, \quad (2.223)$$

a Eq. (2.221) se resume a

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\mathbf{H}}{kT}}, \quad (2.224)$$

cujos coeficientes $\rho_{i,j} = \langle u_{g_i} | \rho | u_{g_j} \rangle$ são fornecidos diretamente pela Eq. (2.223). Tal qual nas seções precedentes, mostraremos como aplicar estes conceitos com um exemplo simples.

Suponha que a energia de um par de *qubits* seja proveniente da interação

entre os *spins* destes subsistemas de forma que o operador Hamiltoniano seja descrito por

$$H^{A,B} = j(\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B), \quad (2.225)$$

onde j é a variável que representa o acoplamento entre os referidos *spins*. De imediato, a representação de H na base computacional padrão como

$$H^{A,B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & j \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.226)$$

e a solução de $\det(H^{A,B} - s_{u_i}I) \equiv 0$ fornecem os autovalores duplamente degenerados j e $-j$, os quais, por sua vez, estão associados respectivamente aos estados da base de Bell (Eq. (2.127)) na seguinte ordem:

$$|u_0\rangle = |\Phi^+\rangle_{a,b}, \quad |u_1\rangle = |\Phi^-\rangle_{a,b}, \quad |u_2\rangle = |\Psi^+\rangle_{a,b} \quad \text{e} \quad |u_3\rangle = |\Psi^-\rangle_{a,b}. \quad (2.227)$$

Se reescrevermos $H^{A,B}$ segundo a ordenação exibida na Eq. (2.227) como

$$H^{A,B} = \begin{bmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{bmatrix}, \quad (2.228)$$

então, de acordo com a Eq. (2.224), $\rho'^{A,B}$ pode ser expressa diretamente em função dos autoestados de $H^{A,B}$ como

$$\rho'^{A,B} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} e^{-\frac{j}{kT}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{j}{kT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{j}{kT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{j}{kT}} \end{bmatrix}, \quad (2.229)$$

onde $Z = 2(e^{-\frac{j}{kT}} + e^{\frac{j}{kT}}) = 4 \cosh(j/kT)$.

Por sua vez, se os projetores relativos à base de Bell forem decompostos em

função da base computacional padrão (Eq. (2.214)) como

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle_{a,b} \langle\Phi^+| &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & |\Phi^-\rangle_{a,b} \langle\Phi^-| &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ |\Psi^+\rangle_{a,b} \langle\Psi^+| &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & |\Psi^-\rangle_{a,b} \langle\Psi^-| &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.230)$$

o operador densidade da Eq. (2.229) pode ser descrito nesta mesma base como

$$\begin{aligned} \rho'^{A,B} &= \frac{1}{Z} \left\{ e^{-\frac{j}{kT}} (|\Phi^+\rangle_{a,b} \langle\Phi^+| + |\Psi^+\rangle_{a,b} \langle\Psi^+|) + e^{\frac{j}{kT}} (|\Phi^-\rangle_{a,b} \langle\Phi^-| + |\Psi^-\rangle_{a,b} \langle\Psi^-|) \right\} \\ &= \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} \cosh(j/kT) & 0 & 0 & -\sinh(j/kT) \\ 0 & \cosh(j/kT) & -\sinh(j/kT) & 0 \\ 0 & -\sinh(j/kT) & \cosh(j/kT) & 0 \\ -\sinh(j/kT) & 0 & 0 & \cosh(j/kT) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.231)$$

No capítulo 5, analisaremos subsistemas formados por pares de *qubits* em equilíbrio térmico com um ambiente externo para simular canais mistos em protocolos de teletransporte quântico, e mostraremos que, nestes casos, a substituição do formalismo adotado na representação dos operadores de Kraus da seção 2.5 por sistemas semelhantes aos da Eq. (2.231) simplifica a descrição destes modelos.

2.12 O Gato de Schrödinger

Encerraremos este capítulo analisando o famoso experimento mental elaborado pelo físico austríaco Erwin Schrödinger denominado de **O Gato de Schrödinger**. Suponha que exista uma caixa opaca que abriga um gato e um mecanismo composto de um martelo, um frasco contendo veneno, um detector e uma amostra de um elemento químico radioativo. Considere ainda que o dispositivo seja preparado para acionar o martelo na direção do frasco caso o detector capte qualquer sinal de radioatividade, liberando uma dose de veneno suficiente para provocar a morte do animal. Desse modo, enquanto não houver decaimento espontâneo por parte do composto químico, o sistema interno formado pelo mesmo e o gato pode ser representado em $t = 0$ por

$$|\Psi\rangle_{a,b} = |1\rangle_a |\text{Vivo}\rangle_b, \quad (2.232)$$

onde $\{|0\rangle_a; |1\rangle_a\} \in H^A$ e $\{|\text{Vivo}\rangle_b; |\text{Morto}\rangle_b\} \in H^B$ são os estados de base associados respectivamente à atividade do referido elemento e à vida do gato (a qual depende exclu-

sivamente da transição $|1\rangle_a \rightarrow |0\rangle_a$.

Por outro lado, se o intervalo de tempo decorrido coincidir com a meia-vida do composto radioativo, supõe-se que o sistema evolua para o estado

$$|\Psi\rangle_{a,b} = \frac{|1\rangle_a|\text{Vivo}\rangle_b + |0\rangle_a|\text{Morto}\rangle_b}{\sqrt{2}}, \quad (2.233)$$

o qual apresenta um operador densidade semelhante ao exibido na Eq. (2.214), e, neste cenário, a perspectiva de um observador externo para os dois subsistemas corresponderia às probabilidades $p_0 = p_1 = 1/2$ de o gato ser encontrado vivo ou morto. Há, portanto, uma contradição: o ato de observar equivale a efetuar uma medida sobre o sistema que provoca o colapso do mesmo para um de seus estados de base, determinando assim o estado final associado à vida do gato. Contudo, antes de qualquer perturbação externa, a Eq. (2.233) prevê que o último existiria em uma superposição e, portanto, nem vivo e nem morto. Teria sido a Mecânica Quântica vítima de uma contradição imposta por seus próprios postulados (Apêndice B)?

Aparentemente, o paradoxo pode ser solucionado de forma simples e elegante quando o ambiente é considerado como parte integrante do sistema global que envolve a caixa. Ao representá-lo por estados de base como $\{|0\rangle_c; |1\rangle_c\} \in H^C$, a expressão

$$|\Psi\rangle_{a,b,c} = \frac{|1\rangle_a|\text{Vivo}\rangle_b|1\rangle_c + |0\rangle_a|\text{Morto}\rangle_b|0\rangle_c}{\sqrt{2}} \quad (2.234)$$

substitui a Eq. (2.233) e permite que o subsistema composto A, B seja derivado do cálculo de

$$\begin{aligned} \rho^{A,B} &= \text{Tr}_C \rho^{A,B,C} = \frac{1}{2} (|1\rangle_a|\text{Vivo}\rangle_b \langle 1|_a \langle \text{Vivo}| + |0\rangle_a|\text{Morto}\rangle_b \langle 0|_a \langle \text{Morto}|) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.235)$$

Desta forma, os estados que representam a vida do gato obedeceriam a uma mistura estatística exclusivamente clássica (sem superposição e emaranhamento) antes da realização da medida sobre os estados de base do subsistema ambiente, eliminando o paradoxo inicial. Contudo, o problema persistiria se o mesmo argumento fosse aplicado para descrever um sistema ambiente de dimensão infinita, pois tornaria-se necessário considerar sempre um novo estado de base para que os anteriores não fossem descritos por superposições. Até o presente momento, não há explicação que solucione esta questão de forma definitiva.

Capítulo 3

Teletransporte Quântico Direto

Iniciaremos este capítulo adaptando o protocolo original de teletransporte quântico (elaborado por Charles Bennett e colaboradores) para o formalismo que descreve estados quânticos através de seus respectivos operadores densidade, assumindo que todos os *qubits* envolvidos no processo representem estados puros e que o emaranhamento do canal seja máximo. Para canais parcialmente emaranhados, mostramos em [Fortes, 2012](#) que, embora a pureza do estado de entrada não tenha relação direta com grandezas tais como a probabilidade de sucesso e a fidelidade associada ao estado obtido por Bob ao final do processo, o mesmo não ocorre para os *qubits* que compõem o canal. Sob este aspecto, introduziremos considerações adicionais e estenderemos estes conceitos na próxima seção para construir um modelo geral que pode ser aplicado em qualquer mecanismo de teletransporte, considerando que todos os estados envolvidos no processo possuam algum grau de impureza.

3.1 Teletransporte de Estados Arbitrários através de Canais Puros

3.1.1 O Protocolo Original

O protocolo original de teletransporte quântico criado por Charles Bennett e colaboradores em [Bennett et al., 1993](#) e discutido em [Rigolin, 2005](#) envolve apenas sistemas que podem ser associados a vetores de estado. Nesta seção, revisaremos este procedimento sob a ótica do formalismo de operadores densidade, adotando a notação convencional que relaciona os índices 1 e 2 para os qubits de Alice e 3 para o de Bob. Com isso, podemos descrever respectivamente o estado de entrada e o canal perfeitamente emaranhado (ilustrados nas Figs. 3.1 e 3.2) como

$$|\Psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1 \rightarrow (|\Psi\rangle\langle\Psi|)_1 = \{|\alpha|^2(|0\rangle\langle 0|) + (\alpha\beta^*)|0\rangle\langle 1| + (\alpha^*\beta)|1\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|\}_1 \quad (3.1)$$

$$\text{e } |\Phi^+\rangle_{2,3} = \frac{|00\rangle_{2,3} + |11\rangle_{2,3}}{\sqrt{2}} \rightarrow (|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|)_{2,3} = \frac{1}{2} (|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)_{2,3}, \quad (3.2)$$

os quais, por sua vez, compõem o estado global descrito por

$$\begin{aligned}
 \rho &= (|\Psi\rangle\langle\Psi|)_1 (|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|)_{2,3} \\
 &= \frac{1}{2}|\alpha|^2 \{ |000\rangle\langle 000| + |000\rangle\langle 011| + |011\rangle\langle 000| + |011\rangle\langle 011| \}_{1,2,3} + \\
 &\quad \frac{1}{2}(\alpha\beta^*) \{ |000\rangle\langle 100| + |000\rangle\langle 111| + |011\rangle\langle 100| + |011\rangle\langle 111| \}_{1,2,3} + \\
 &\quad \frac{1}{2}(\alpha^*\beta) \{ |100\rangle\langle 000| + |100\rangle\langle 011| + |111\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 011| \}_{1,2,3} + \\
 &\quad \frac{1}{2}|\beta|^2 \{ |100\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 100| + |111\rangle\langle 111| \}_{1,2,3}. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

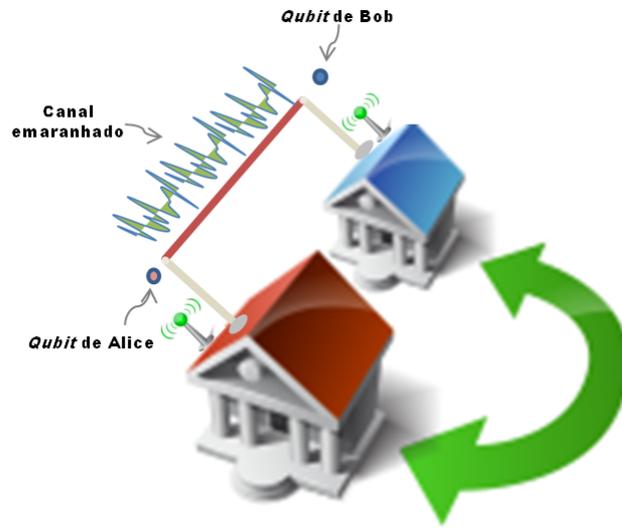


Figura 3.1: Teletransporte de informação quântica entre dois pontos distintos através de um estado emaranhado de dois qubits. As cores vermelha e azul referem-se respectivamente a Alice e Bob, e a barra intermediária representa o canal gerado pelo emaranhamento entre estes qubits.

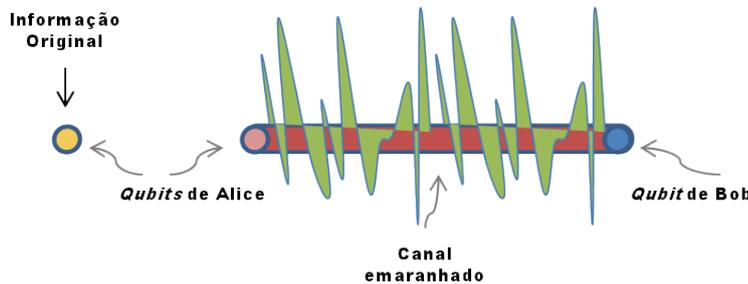


Figura 3.2: Canal gerado pelo emaranhamento (representado pelo sinal ondulatorio em verde) entre os qubits de Alice (vermelho) e Bob (azul). À esquerda, a informação original de Alice (representada pela cor amarela).

Note que a substituição da base computacional associada aos índices 1 e 2 (Eq. (3.3)) pelos projetores correspondentes da base de Bell (Eq. (2.127)) permite que ρ

seja reescrito como

$$\begin{aligned}
\rho = & \frac{1}{4}(|\Phi^+\rangle_{1,2} \langle\Phi^+|)(\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) \\
& + \frac{1}{4}(|\Phi^-\rangle_{1,2} \langle\Phi^-|)(\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3)(\alpha^*\langle 0| - \beta^*\langle 1|) \\
& + \frac{1}{4}(|\Psi^+\rangle_{1,2} \langle\Psi^+|)(\beta|0\rangle_3 + \alpha|1\rangle_3)(\beta^*\langle 0| + \alpha^*\langle 1|) \\
& + \frac{1}{4}(|\Psi^-\rangle_{1,2} \langle\Psi^-|)(-\beta|0\rangle_3 + \alpha|1\rangle_3)(-\beta^*\langle 0| + \alpha^*\langle 1|) \\
& + \text{termos cruzados do tipo } |\Phi^+\rangle_{2,3} \langle\Phi^-|, |\Phi^-\rangle_{2,3} \langle\Phi^+|, \dots; \tag{3.4}
\end{aligned}$$

cujas implicações exploraremos no exemplo a seguir.

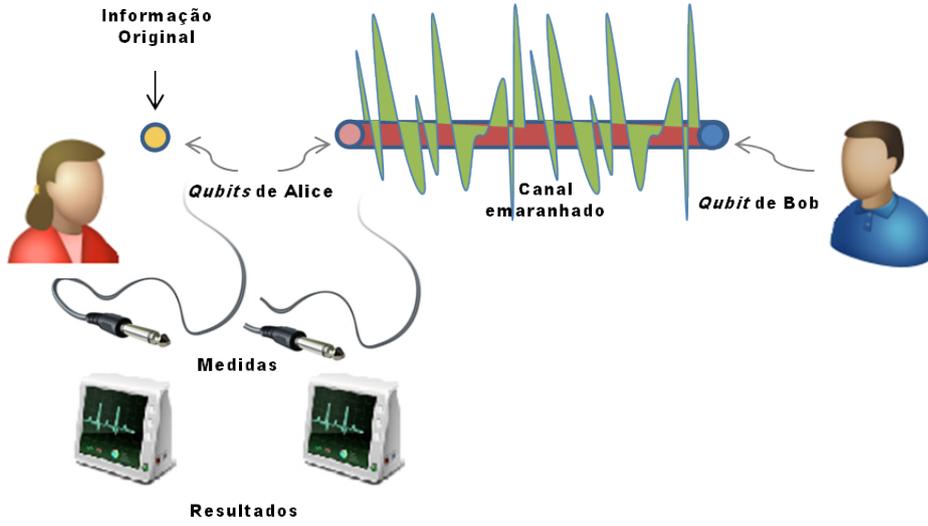


Figura 3.3: Elementos necessários para a realização de um teletransporte quântico: os cabos de conexão e os monitores representam respectivamente a base de medidas utilizada por Alice e o resultado obtido após a realização das mesmas.

De acordo com a Eq. (2.20), o sistema global colapsa para

$$\rho' = \frac{P_i \rho P_i}{\text{Tr}(\rho P_i)} \tag{3.5}$$

após a realização de uma medida arbitrária (Fig. 3.3) associada ao projetor P_i . Assim, suponha que Alice tenha obtido o estado $|\Phi^+\rangle_{1,2}$ ao medir o primeiro par de *qubits* na base de Bell: Logo, se $P_i = |\Phi^+\rangle_{1,2} \langle\Phi^+|$, então $P_i \rho P_i = (\frac{1}{4}) \{|\Phi^+\rangle \langle\Phi^+|\}_{1,2} \otimes \{(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|)\}_3$ e $\text{Tr}(\rho P_i) = 1/4$, e, por conseguinte, $\rho' = \{|\Phi^+\rangle \langle\Phi^+|\}_{1,2} \otimes \{(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|)\}_3$. Neste caso, a informação contida no estado original é transferida para o *qubit* de Bob com fidelidade um.

Todavia, se o resultado da medida sobre os *qubits* 1 e 2 pertencer a alguma das três possibilidades restantes, o estado final será diferente da informação enviada por Alice e Bob precisará efetuar transformações específicas para corrigir seu *qubit* (Apêndice C). Para isso, basta que ambos se comuniquem enviando dois *bits* através de um canal

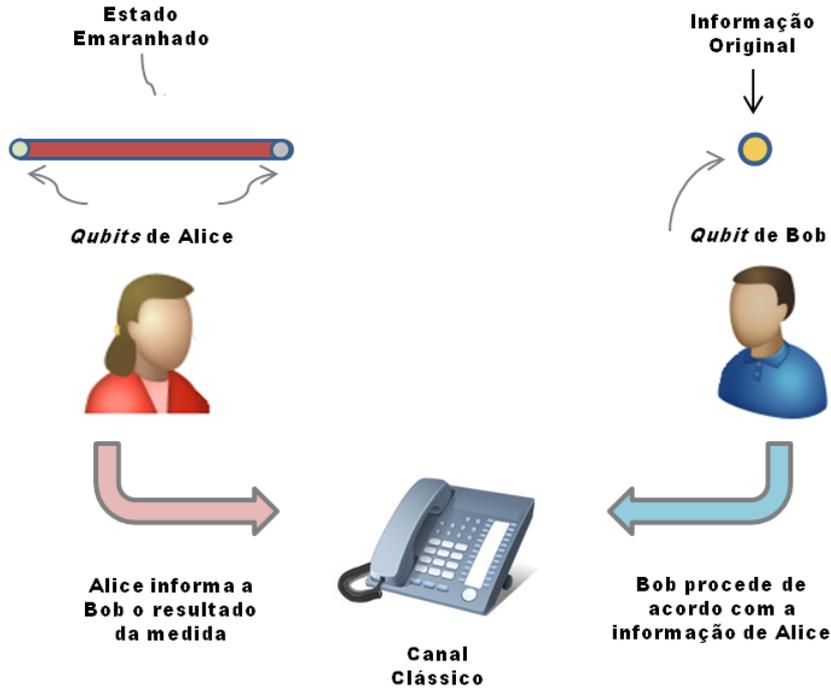


Figura 3.4: *Confirmação do resultado da medida de Alice através de um canal clássico: Bob manipula seu estado de forma que o mesmo torna-se idêntico à informação original enviada por Alice.*

| Resultado obtido por Alice | <i>Qubit</i> de Bob | Correção |
|----------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| $ \Phi^+\rangle$ | $\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$ | I |
| $ \Phi^-\rangle$ | $\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$ | σ_z |
| $ \Psi^+\rangle$ | $\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$ | σ_x |
| $ \Psi^-\rangle$ | $\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle$ | $i\sigma_y$ ou $\sigma_z\sigma_x$ |

Tabela 3.1: *Resultados associados às medidas de Alice e as respectivas correções que devem ser aplicadas por Bob.*

clássico (Fig. 3.4) segundo a relação

$$00 \equiv |\Phi^+\rangle, \quad 01 \equiv |\Phi^-\rangle, \quad 10 \equiv |\Psi^+\rangle \quad \text{e} \quad 11 \equiv |\Psi^-\rangle, \quad (3.6)$$

e, em seguida, Bob aplique as respectivas operações listadas na tabela 3.1.

Observe que a confirmação deste resultado através de um canal clássico é parte imprescindível do processo, uma vez que Bob não possui informações adicionais até que Alice as revele. Se assim não o fosse, o primeiro teria que considerar todos os resultados como igualmente prováveis, e seu *qubit* seria descrito por

$$\rho^3 = {}_{1,2}\langle\Phi^+|\rho|\Phi^+\rangle_{1,2} + {}_{1,2}\langle\Phi^-|\rho|\Phi^-\rangle_{1,2} + {}_{1,2}\langle\Psi^+|\rho|\Psi^+\rangle_{1,2} + {}_{1,2}\langle\Psi^-|\rho|\Psi^-\rangle_{1,2} = \frac{1}{2}I. \quad (3.7)$$

Visto que ρ^3 é um estado completamente misto (seção 2.2), seria impossível estabelecer

qualquer relação entre o mesmo e a informação original enviada por Alice. Repare ainda que, embora o estado de Bob seja alterado instantaneamente após a medida sobre os dois primeiros *qubits*, a informação transmitida nesta etapa é sempre aleatória (pois o processo de medição é probabilístico), o que, por sua vez, preserva os princípios da relatividade geral (Einstein, 1916).

O cálculo das probabilidades relativas a estes cenários revela que

$$\text{Tr}(\rho|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|) = \text{Tr}(\rho|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|) = \text{Tr}(\rho|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|) = \frac{1}{4}, \quad (3.8)$$

e que - como esperado - todas possuem o mesmo valor, uma vez que o canal e os estados da base de medidas são maximamente emaranhados. Assim, com as informações contidas na tabela 3.1 e os resultados das Eqs. (3.6) e (3.8), Bob sempre irá dispor de meios para obter a configuração inicial enviada por Alice, e, por isso, o protocolo opera com fidelidade e probabilidade total de sucesso iguais a um.

3.2 Teletransporte de Estados Arbitrários através de Canais Mistos

3.2.1 O Modelo Geral

As funções relativas à fidelidade e à probabilidade total de sucesso associadas ao envio do estado inicial só podem atingir simultaneamente os limites $F = 1$ e $F_{suc}^{total} = 1$ ao final de um mesmo procedimento se o par de *qubits* inserido no canal for um estado puro maximamente emaranhado. Por sua vez, o emprego de estados puros parcialmente emaranhados garante a obtenção da fidelidade máxima mas limita o alcance da probabilidade total (Li et al., 2000; Agrawal and Pati, 2002; Rigolin, 2009 e Fortes and Rigolin, 2013), e, até o presente momento, não há registro de qualquer procedimento que utilize canais mistos no qual seja possível obter fidelidade um ao longo do processo. Todavia, a fidelidade média total é uma grandeza que pode ser analisada como um indicativo da proximidade entre os resultados previstos pelo método em questão e o protocolo original, e sua estrutura depende unicamente do tipo de decoerência que atua sobre o sistema considerado. Com isso em mente, construiremos nesta seção um modelo geral de teletransporte de estados quânticos arbitrários considerando que os mapas de decoerência atuem de forma independente em cada componente do sistema.

Mostramos na seção 2.5 que o cenário mais simples possível ocorre quando um *qubit* sofre uma redução de pureza provocada por algum tipo de decoerência que modifica seu operador densidade (Eq. (2.86)) para

$$\rho' = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger, \quad (3.9)$$

onde E_k^\dagger são os operadores de Kraus que representam a ação do ambiente sobre o sistema

em questão. Desta forma, se $N > 1$ *qubits* estiverem expostos a mecanismos independentes de decoerência, cada operador E_k atuará somente em seu respectivo subsistema e a dinâmica global que rege ρ' será equivalente à ação individual de cada mapa sobre um único *qubit*.

Assim, sejam $\rho^{A,B} \in H_{A,B} = H_A \otimes H_B$ a descrição de um sistema bipartite em um instante inicial t_0 , $E_l^A \in H_A$ e $E_p^B \in H_B$ os operadores de Kraus que simulam a ação de dois ambientes distintos e $\tilde{\rho}^{A,B}$ o estado subsequente a $\rho^{A,B}$ após a atuação de um mapa arbitrário sobre apenas um de seus constituintes em $t > t_0$. Para descrever este procedimento, vamos considerar que o processo de decoerência ocorre inicialmente no *qubit* B (já que tal escolha é irrelevante para a determinação de $\rho^{A,B}$) e que operadores do tipo $I^A \otimes E_p^B \in H_{A,B}$ não afetam o subsistema A em

$$\tilde{\rho}^{A,B} = \sum_p \{I^A \otimes E_p^B\} \rho^{A,B} \{I^A \otimes (E_p^B)^\dagger\}. \quad (3.10)$$

Visto que a ação dos mapas ocorre de forma independente, raciocínio semelhante deve ser empregado para a transformação sobre o *qubit* A , e o estado final do sistema após a exposição de seus constituintes a mecanismos de decoerência distintos é dado por

$$\begin{aligned} \rho'^{A,B} &= \sum_l \{E_l^A \otimes I^B\} \left[\sum_p \{I^A \otimes E_p^B\} \rho^{A,B} \{I^A \otimes (E_p^B)^\dagger\} \right] \{(E_l^A)^\dagger \otimes I^B\} \\ &= \sum_{l,p} \{E_l^A \otimes E_p^B\} \rho^{A,B} \{(E_l^A)^\dagger \otimes (E_p^B)^\dagger\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Se desconsiderarmos a dimensão dos sistemas analisados e os índices associados às respectivas somatórias para definirmos o operador

$$E_{l,p} \equiv E_l^A \otimes E_p^B \quad (3.12)$$

onde $E_{l,p} \in H_{A,B}$, a Eq. (3.11) pode ser exibida tal qual a Eq. (2.86) como

$$\rho'^{A,B} = \sum_{l,p} E_{l,p} \rho^{A,B} E_{l,p}^\dagger. \quad (3.13)$$

Logo, argumento semelhante pode ser estendido para a análise de um sistema tripartite $\rho^{A,B,C}$: se $E_k \in H_A$, $E_l \in H_B$ e $E_p \in H_C$ são operadores de Kraus independentes, o estado final do sistema é dado por

$$\begin{aligned} \rho'^{A,B,C} &= \sum_{k,l,p} \{E_k^A \otimes E_l^B \otimes E_p^C\} \rho^{A,B,C} \{(E_k^A)^\dagger \otimes (E_l^B)^\dagger \otimes (E_p^C)^\dagger\} \\ &= \sum_{k,l,p} E_{k,l,p} \rho^{A,B,C} E_{k,l,p}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $E_{k,l,p} \equiv E_k^A \otimes E_l^B \otimes E_p^C$ representa a estrutura de um operador geral que atua simultaneamente nos três *qubits*.

É importante ressaltar que as Eqs. (3.13) e (3.14) permanecem válidas mesmo que um ou mais de seus constituintes não sofram decoerência: para tanto, é só igualar os operadores de Kraus em questão à operação de Identidade e fixar a respectiva soma em apenas um termo. Se quisermos simular o estado $\rho^{A,B,C}$ antes da ação dos referidos mapas, por exemplo, basta definir um único operador $E_{k,l,p} \equiv I^A \otimes I^B \otimes I^C$ e restringir as somatórias à condição $k = l = p = 0$.

Ao longo das próximas seções, apresentaremos sistemas bipartite mistos que obedecem à Eq. (3.13) e que podem ser utilizados como canais de teletransporte para diferentes combinações dos operadores $E_{l,p}$ e dos mapas discutidos na seção 2.9. As análises subseqüentes serão divididas em dois grupos: no primeiro, os mecanismos de decoerência atuarão uniformemente sobre um par de *qubits* imersos em um único meio externo, e no segundo os constituintes do canal serão corrompidos por operadores de Kraus heterogêneos. Com isso, o estado global do sistema exibido em (3.2) e descrito por

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_{2,3} \quad (3.15)$$

passa a depender apenas da informação inicial de Alice, e, para que o enfoque sob as referidas análises seja o mais geral possível, abordaremos cenários em que ρ_1 possa ser descrito tanto estados puros como por sistemas mistos.

Por sua vez, a representação dos canais e da base de medidas será adaptada de modo a simplificar ao máximo os cálculos envolvidos nestes processos. Por conveniência, considere um sistema bipartite puro inicialmente isolado cuja função de onda no instante t_0 seja descrita respectivamente por

$$|\Phi_\theta^+\rangle_{a,b} = \cos \theta |00\rangle_{a,b} + \sin \theta |11\rangle_{a,b}, \quad (3.16)$$

onde $0 < \theta < \pi$ e $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \equiv 1$. Neste contexto, assumiremos que o operador densidade

$$\rho^{A,B} = (|\Phi_\theta^+\rangle\langle\Phi_\theta^+|)_{a,b} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & 0 & 0 & \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & 0 & 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

descreverá a estrutura do canal de teletransporte sempre que não houver interação entre este e o ambiente que o circunda.

De forma semelhante, para $0 < \phi < \pi$ e $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \equiv 1$, a base de

medidas formada pelos estados

$$\begin{aligned} |\Phi_\phi^+\rangle &= \cos \phi |00\rangle + \sin \phi |11\rangle, & |\Phi_\phi^-\rangle &= \sin \phi |00\rangle - \cos \phi |11\rangle, \\ |\Psi_\phi^+\rangle &= \cos \phi |01\rangle + \sin \phi |10\rangle & \text{e } |\Psi_\phi^-\rangle &= \sin \phi |01\rangle - \cos \phi |10\rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

pode ser utilizada para determinar o subsistema de Bob (Eq. (2.20)) se considerarmos que as medidas projetivas P_i^ϕ sejam expressas como

$$P_i^\phi \equiv \hat{O}_{1,2} \otimes I_3, \quad (3.19)$$

onde $\hat{O}_{1,2}$ é um operador que atua apenas nos *qubits* relativos ao subsistema de Alice.

Ao descrever o protocolo de teletransporte original, demonstramos que as funções relativas à probabilidade total de sucesso e à fidelidade do estado de Bob eram iguais a um (visto que o emaranhamento da base de medidas era máximo e que não havia decoerência sobre o canal), e, portanto, independentes dos coeficientes da informação original descrita por

$$|\Psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1. \quad (3.20)$$

Logo, deste ponto em diante, pautaremos nosso objetivo inicial na busca de expressões que dependam das probabilidades p_0 , p_a e p_b (associadas respectivamente ao tempo de exposição do estado de entrada e dos *qubits* do canal $\rho^{A,B}$ à decoerência induzida pelo ambiente) e dos parâmetros θ e ϕ (que definem respectivamente os graus de emaranhamento do canal e da base de medidas), mas que sejam independentes dos coeficientes α e β . Neste sentido, se considerarmos que Alice gera um novo estado descrito pela Eq. (3.20) cada vez que o protocolo é executado, é razoável assumir que seus coeficientes obedeçam à distribuições aleatórias equiprováveis restritas aos intervalos $0 \leq \alpha \leq 1$ e $0 \leq \beta \leq 1$, e, sob este aspecto, mostraremos que é possível estimar o valor esperado de qualquer termo proporcional a $|\alpha|$ e $|\beta|$ para construir funções que não dependam do valor arbitrário destes coeficientes.

Seja $f(x)$ uma função associada a uma variável x no intervalo $a \leq x \leq b$ tal que a frequência de sua distribuição esteja condicionada à função $p(x)$. Neste caso, o valor esperado de $f(x)$ é dado por

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\sum_{x=a}^{x=b} p(x) f(x)}{\sum_{x=a}^{x=b} p(x)} \quad (3.21)$$

se x é uma variável discreta ou

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_{x=a}^{x=b} p(x) f(x) dx}{\int_{x=a}^{x=b} p(x) dx} \quad (3.22)$$

quando a distribuição de x for contínua, onde $p(x)dx$ é a densidade de probabilidade associada à ocorrência da mesma.

Quando a frequência $p(x)$ for constante e independente do valor específico de x , a Eq. (3.22) se resume a

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_{x=a}^{x=b} p(x)f(x)dx}{\int_{x=a}^{x=b} p(x)dx} = \frac{p(x) \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx}{p(x) \int_{x=a}^{x=b} dx} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx}{b-a}, \quad (3.23)$$

e, para o caso especial em que $\sum_{x=a}^{x=b} p(x) \equiv \int_{x=a}^{x=b} p(x)dx = 1$, as Eqs. (3.21) e (3.22) serão respectivamente equivalentes a

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{x=a}^{x=b} p(x)f(x) \quad \text{e} \quad \langle f(x) \rangle = \int_{x=a}^{x=b} p(x)f(x)dx. \quad (3.24)$$

Visto que não consideramos a presença de fatores externos que privilegiem a ocorrência de valores específicos para α e β , podemos supor que as distribuições relativas a estes coeficientes e as estimativas associadas ao colapso da função de onda $|\Psi\rangle_1$ na base computacional satisfaçam a Eq. (3.23). Assim, considere que

$$|\alpha|^2 = x \quad \text{e} \quad |\beta|^2 = 1 - x \quad (3.25)$$

sejam as probabilidades associadas respectivamente ao colapso de uma configuração específica do *qubit* original de Alice para os estados $|0\rangle_1$ e $|1\rangle_1$. Se computarmos os valores de $0 \leq x \leq 1$ para todas as configurações possíveis que $|\Psi\rangle_1$ pode assumir, esperamos que seu valor esperado seja igual a $1/2$. De fato, visto que $\int_{x=0}^{x=1} dx = 1$,

$$\langle x \rangle = \int_{x=0}^{x=1} |\alpha|^2 dx = \int_{x=0}^{x=1} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}, \quad (3.26)$$

e, de modo semelhante, $\int_{x=0}^{x=1} |\beta|^2 dx = \int_{x=0}^{x=1} (1-x) dx = 1/2$. Com isso, o raciocínio empregado na Eq. (3.26) pode ser aplicado para calcular o valor esperado de qualquer termo proporcional a $|\alpha|$ e $|\beta|$, considerando que x assume todos os valores possíveis no intervalo $[0, 1]$ para $|\alpha| = \sqrt{x}$ e $|\beta| = \sqrt{1-x}$.

Ao longo das próximas seções, mostraremos que o conhecimento dos resultados fornecidos pelas relações

$$\begin{aligned} \langle |\alpha|^2 \rangle &= \langle |\beta|^2 \rangle = 1/2, \quad \langle |\alpha|^4 \rangle = \langle |\beta|^4 \rangle = 1/3 \\ \text{e} \quad \langle |\alpha|^2 |\beta|^2 \rangle &= \langle |\alpha|^2 (1 - |\alpha|^2) \rangle = \langle (1 - |\beta|^2) |\beta|^2 \rangle = 1/6 \end{aligned} \quad (3.27)$$

é suficiente para calcular o valor esperado das funções apresentadas nos capítulos 3, 4 e 5.

| Base de Bell Generalizada | Índice |
|-----------------------------|------------|
| $ \Phi_{\theta}^{+}\rangle$ | <i>I</i> |
| $ \Phi_{\theta}^{-}\rangle$ | <i>II</i> |
| $ \Psi_{\theta}^{+}\rangle$ | <i>III</i> |
| $ \Psi_{\theta}^{-}\rangle$ | <i>IV</i> |

Tabela 3.2: Índices associados aos estados da Base de Bell Generalizada.

3.2.2 Canais Mistos com Decoerência Homogênea

Inversão de Fase

Iniciaremos a descrição de canais que apresentam decoerência homogênea analisando o comportamento de dois *qubits* sob a influência de um meio simulado pelo mapa de Inversão de Fase. De acordo com a Eq. (2.184), se em um determinado instante $t > t_0$ o sistema $\rho^{A,B}$ apresentado na Eq. (3.17) for submetido à influência de um ambiente externo cujos operadores de Kraus sejam dados por

$$E_0^A = (\sqrt{1-p_a}) I^A, \quad E_1^A = (\sqrt{p_a}) \sigma_z^A, \quad E_0^B = (\sqrt{1-p_b}) I^B \quad \text{e} \quad E_1^B = (\sqrt{p_b}) \sigma_z^B \quad (3.28)$$

para $0 < \{p_a, p_b\} < 1$, as expressões $E_{l,p} \equiv E_l^A \otimes E_p^B$ e $\sum_{l,p=0}^1 E_{l,p} \rho^{A,B} E_{l,p}^\dagger$ relativas respectivamente às Eqs. (3.12) e (3.13) prevêm que $\rho^{A,B}$ seja modificado para

$$\rho'_{IF|IF}{}^{A,B} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & 0 & 0 & 2(p_a - \frac{1}{2})(p_b - \frac{1}{2}) \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2(p_a - \frac{1}{2})(p_b - \frac{1}{2}) \sin 2\theta & 0 & 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde adotamos o índice $IF|IF$ para destacar o tipo de decoerência que atua em cada *qubit*.

Repare que p_a e p_b impõem restrições a $\rho'_{IF|IF}{}^{A,B}$ semelhantes às que o parâmetro p exerce para o modelo de um *qubit*: se por um lado o sistema inicial só pode ser recuperado caso as condições $p_a = p_b = 0$ ou $p_a = p_b = 1$ sejam atingidas, por outro seu estado final torna-se completamente misto para $p_a = p_b = 1/2$.

Se utilizarmos o operador densidade da Eq. (3.29) para representar um canal de comunicação real, podemos construir modelos de teletransporte distintos para cada configuração específica do estado de entrada. Assim, consideraremos inicialmente que a informação inicial seja um estado puro arbitrário descrito por

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

e, analogamente ao procedimento descrito na seção 3.1.1, adotaremos a notação introduzida com a tabela 3.2 supondo que Alice tenha obtido o estado $|\Phi_\theta^+\rangle_{1,2}$ após a realização de uma medida sobre seu par de *qubits* (indicado pelos índices 1 e 2). Desta forma, o projetor P_I^ϕ referente à Eq. (3.19) será expresso em função de $\hat{O}_{1,2} = (|\Phi_\phi^+\rangle\langle\Phi_\phi^+|)_{1,2}$, e o estado de Bob será dado por

$$\rho'_3 = P_I^\phi \rho P_I^\phi / \text{Tr}(\rho P_I^\phi) = 1/\text{Tr}(\rho P_I^\phi) \times \begin{bmatrix} |\alpha|^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi & (p_a - \frac{1}{2})(p_b - \frac{1}{2})(\alpha\beta^*) \sin 2\theta \sin 2\phi \\ (p_a - \frac{1}{2})(p_b - \frac{1}{2})(\alpha^*\beta) \sin 2\theta \sin 2\phi & |\beta|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

onde $\text{Tr}(\rho P_I^\phi) = |\alpha|^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + |\beta|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi$.

De acordo com a Eq. (2.5), a fidelidade relativa aos estados das Eqs. (3.20) e (3.31) é equivalente a

$$F_I = {}_1\langle\Psi|\rho'_3|\Psi\rangle_1 = 1/\text{Tr}(\rho P_I^\phi) \times \{|\alpha|^4 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{1}{2}(p_a - \frac{1}{2})(p_b - \frac{1}{2})|\alpha|^2|\beta|^2 \sin 2\theta \sin 2\phi + |\beta|^4 \sin^2 \theta \sin^2 \phi\}, \quad (3.32)$$

e, se empregarmos raciocínio semelhante para o cálculo das funções F_i associadas às medidas projetivas restantes, constataremos que a fidelidade média total $\bar{F}_{0|IF|IF}$ obedece à Eq. (3.24) através da relação

$$\bar{F}_{0|IF|IF} = \sum_{i=1}^{i=4} p_i F_i = |\alpha|^4 + |\beta|^4 + 8|\alpha|^2|\beta|^2 \left(p_a - \frac{1}{2}\right) \left(p_b - \frac{1}{2}\right) \sin 2\theta \sin 2\phi, \quad (3.33)$$

onde o índice $0|IF|IF$ realça a ausência de decoerência no estado de entrada e $p_i = \text{Tr}(\rho P_i^\phi)$.

Com isso, podemos obter o valor esperado da função deduzida na Eq. (3.33) se substituirmos diretamente os coeficientes $|\alpha|^4$, $|\beta|^4$ e $|\alpha|^2|\beta|^2$ pelos valores calculados na Eq. (3.27). Para o modelo em questão, a associação entre estas relações implica em

$$\langle\bar{F}\rangle_{0|IF|IF} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + 2 \left(p_a - \frac{1}{2}\right) \left(p_b - \frac{1}{2}\right) \sin 2\theta \sin 2\phi \right\}. \quad (3.34)$$

Observe que o limite clássico $\langle\bar{F}\rangle = 2/3$ discutido em [Massar and Popescu, 1995](#) pode ser reproduzido tanto para $\theta = \pi/2$ ou $\phi = \pi/2$ (casos em que não há emaranhamento no canal ou na base de medidas) bem como para $p_a = 1/2$ ou $p_b = 1/2$ (cenários em que o canal apresenta-se como um estado completamente misto).

Vejam agora o que ocorreria se houvésemos considerado um cenário no qual o estado de entrada fosse misto. Suponha que ρ_1 tenha sido exposto a um tipo de

decoerência semelhante à que modificara a estrutura do canal tal que

$$\tilde{\rho}_1 = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & -2(p_0 - \frac{1}{2})\alpha\beta^* \\ -2(p_0 - \frac{1}{2})\alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

onde p_0 define o grau de pureza de $\tilde{\rho}_1$. Após o cálculo de $F_i = {}_1\langle\Psi|\rho'_3|\Psi\rangle_1$ para os quatro resultados associados à medida de Alice em relação a $\rho = \tilde{\rho}_1 \otimes \rho_{2,3}$, conclui-se que

$$\begin{aligned} \overline{F}_{IF|IF|IF} &= \sum_{i=1}^{i=4} p_i F_i = |\alpha|^4 + |\beta|^4 \\ &- 16|\alpha|^2|\beta|^2(p_0 - \frac{1}{2})(p_a - \frac{1}{2})(p_b - \frac{1}{2})\sin 2\theta \sin 2\phi, \end{aligned} \quad (3.36)$$

e, nesse caso, o valor esperado da fidelidade média total é dado por

$$\langle\overline{F}\rangle_{IF|IF|IF} = \frac{2}{3} \left\{ 1 - 4 \left(p_0 - \frac{1}{2} \right) \left(p_a - \frac{1}{2} \right) \left(p_b - \frac{1}{2} \right) \sin 2\theta \sin 2\phi \right\}, \quad (3.37)$$

onde o índice $IF|IF|IF$ reforça que todos os *qubits* sofreram decoerência de inversão de fase. Uma vez que as expressões (3.34) e (3.37) diferem entre si apenas pela presença do fator $2(p_0 - \frac{1}{2})$, deduz-se que p_0, p_a e p_b satisfazem propriedades semelhantes às discutidas na Eq. (3.34) para os dois últimos parâmetros.

Inversão de Bit

Os operadores de Kraus do mapa de Inversão de Bit para um sistema bipartite podem ser construídos a partir de (2.178) e de modo análogo à Eq. (3.28) como

$$E_0^A = (\sqrt{1-p_a}) I^A, \quad E_1^A = (\sqrt{p_a}) \sigma_x^A, \quad E_0^B = (\sqrt{1-p_b}) I^B \quad \text{e} \quad E_1^B = (\sqrt{p_b}) \sigma_x^B, \quad (3.38)$$

e, de acordo com as Eqs. (3.12) e (3.13), sua ação sobre o estado da Eq. (3.17) produziria um operador densidade igual a

$$\rho'_{IB|IB}{}^{A,B} = \begin{bmatrix} (1-p_s)\cos^2\theta + p_p & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-p_s + 2p_p)\sin 2\theta \\ 0 & (p_\Delta)\sin^2\theta + p_b - p_p & \frac{1}{2}(p_s - 2p_p)\sin 2\theta & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(p_s - 2p_p)\sin 2\theta & (-p_\Delta)\sin^2\theta + p_a - p_p & 0 \\ \frac{1}{2}(1-p_s + 2p_p)\sin 2\theta & 0 & 0 & (1-p_s)\sin^2\theta + p_p \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

para $0 < \{p_a, p_b\} < 1$, $p_s = p_a + p_b$, $p_p = p_a p_b$ e $p_\Delta = p_a - p_b$. Tal qual na Eq. (3.29), o grau de pureza do sistema $\rho'_{IB|IB}{}^{A,B}$ é máximo para $p_a = p_b = 0$ ou $p_a = p_b = 1$ e nulo para $p_a = p_b = 1/2$.

Para os cálculos subseqüentes, adotaremos o mesmo procedimento utilizado na descrição do modelo de Inversão de Fase, considerando inicialmente um estado de entrada idêntico ao da Eq. (3.30). Neste caso, quando o sistema de Alice colapsar para

$|\Phi_\theta^+\rangle_{1,2}$, o estado final de Bob será dado por $\rho'_3 = 1/\text{Tr}(\rho P_I^\phi) \begin{bmatrix} \rho'_{300} & \rho'_{301} \\ \rho'_{310} & \rho'_{311} \end{bmatrix}$, onde

$$\begin{aligned} \rho'_{300} &= \{(1 - p_a - p_b) \cos^2 \theta + p_a p_b\} |\alpha|^2 \cos^2 \phi + \{p_a \cos^2 \theta + p_b \sin^2 \theta - p_a p_b\} |\beta|^2 \sin^2 \phi, \\ \rho'_{301} &= \frac{1}{4}(\alpha\beta^*) \sin 2\theta \sin 2\phi, \quad \rho'_{310} = \frac{1}{4}(\alpha^*\beta) \sin 2\theta \sin 2\phi, \\ \rho'_{311} &= \{p_a \sin^2 \theta + p_b \cos^2 \theta - p_a p_b\} |\alpha|^2 \cos^2 \phi + \{(1 - p_a - p_b) \sin^2 \theta + p_a p_b\} |\beta|^2 \sin^2 \phi \\ &\text{e } \text{Tr}(\rho P_I^\phi) = p(I) = 1 + (1 - 2p_a) \cos 2\theta(1 - 2|\beta|^2 + \cos 2\phi) + (1 - 2|\beta|^2) \cos 2\phi. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Note que, ao contrário do estado apresentado na Eq. (3.35), apenas os termos da diagonal principal sofrem modificações.

O cálculo de F_i para cada uma das três possibilidades de medidas restantes revela que a fidelidade média total é igual a

$$\begin{aligned} \overline{F}_{0|IB|IB} &= \sum_i p_i F_i = 1 - p_b + 4(p_b - \frac{1}{2}) |\beta|^2 - 4(p_b - \frac{1}{2}) |\beta|^4 \\ &\quad + 2p_a (p_b - \frac{1}{2}) (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 - 2|\alpha|^2 |\beta|^2 \sin 2\theta \sin 2\phi, \end{aligned} \quad (3.41)$$

e, utilizando os valores fornecidos pela Eq. (3.27), deduz-se que o valor esperado de \overline{F} na Eq. (3.41) é dado por

$$\langle \overline{F} \rangle_{0|IB|IB} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (-p_a - p_b + 2p_a p_b + \sin 2\theta \sin 2\phi) \right\}. \quad (3.42)$$

A discussão subsequente à Eq. (3.34) relativa aos parâmetros p_a , p_b , θ e ϕ pode ser adaptada para a Eq. (3.42) sob outro enfoque: repare que as escolhas concomitantes de $p_a = 1/2$, $p_b = 1/2$ e $\theta = \phi = \pi/8$ ou $p_a = 1$, $p_b = 1$ e $\theta = \pi/2$ (ou $\phi = \pi/2$) para dois cenários distintos igualam esta função ao limite clássico $\langle \overline{F} \rangle_{0|IB|IB} = 2/3$ apresentado em [Massar and Popescu, 1995](#).

Se a decoerência responsável pela transformação do canal também houvesse atuado sobre o primeiro *qubit*, este seria descrito por

$$\tilde{\rho}_1 = \begin{bmatrix} (1 - p_0) |\alpha|^2 + (p_0) |\beta|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & (p_0) |\alpha|^2 + (1 - p_0) |\beta|^2 \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

e o valor esperado da fidelidade total resultaria em

$$\begin{aligned} \langle \overline{F} \rangle_{IB|IB|IB} &= \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (-p_0 - p_a - p_b \right. \\ &\quad \left. + 2(p_0 p_a + p_0 p_b + p_a p_b) - 4p_0 p_a p_b + \sin 2\theta \sin 2\phi) \right\}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

a qual, por sua vez, pode ser expressa de forma mais compacta como

$$\langle \overline{F} \rangle_{IB|IB|IB} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (-\tilde{p}_s + 2(p_0 p_a + p_0 p_b + p_a p_b)) - 4\tilde{p}_p + \sin 2\theta \sin 2\phi \right\}, \quad (3.45)$$

onde $\tilde{p}_s = p_0 + p_a + p_b$ e $\tilde{p}_p = p_0 p_a p_b$.

É interessante comparar o efeito dos mapas de Inversão de Fase e Inversão de Bit sobre o sistema puro da Eq. (3.30) com os estados de entrada apresentados nas Eqs. (3.35) e (3.35). Observe que o parâmetro p_0 afeta apenas os termos situados nas diagonais principal ou secundária e que, em ambos os casos, o grau de pureza é mínimo para $p_0 = 1/2$ e máximo para $p_0 = 0$ ou $p_0 = 1$; condição na qual o estado original ainda poderia ser recuperado com as correções unitárias listadas na tabela 3.1.

Despolarização

O mapa de Despolarização representa um fenômeno irreversível resultante da atuação homogênea das operações σ_x , σ_y e σ_z (seção 2.9.4). Assim, seu efeito sobre um sistema de dois *qubits* é descrito pelo conjunto de operadores de Kraus dado por

$$\begin{aligned} E_0^A &= \left(\sqrt{1 - \frac{3p_a}{4}} \right) I^A, & E_1^A &= \left(\sqrt{\frac{p_a}{4}} \right) \sigma_x^A, & E_2^A &= \left(\sqrt{\frac{p_a}{4}} \right) \sigma_y^A, & E_3^A &= \left(\sqrt{\frac{p_a}{4}} \right) \sigma_z^A, \\ E_0^B &= \left(\sqrt{1 - \frac{3p_b}{4}} \right) I^B, & E_1^B &= \left(\sqrt{\frac{p_b}{4}} \right) \sigma_x^B, & E_2^B &= \left(\sqrt{\frac{p_b}{4}} \right) \sigma_y^B, & E_3^B &= \left(\sqrt{\frac{p_b}{4}} \right) \sigma_z^B, \end{aligned} \quad (3.46)$$

para $0 < \{p_a, p_b\} < 1$. Se adotarmos a notação introduzida na Eq. (3.39) para $p_s = p_a + p_b$ e $p_p = p_a p_b$, a ação dos termos E_j^A e E_k^B sobre o sistema bipartite apresentado na Eq. (3.17) modifica este para o estado expresso por

$$\rho'_{D|D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \cos^2 \theta - p_s \cos^2 \theta + \frac{1}{2} p_p & 0 & 0 & (1-p_a)(1-p_b) \sin 2\theta \\ 0 & p_a \sin^2 \theta + p_b \cos^2 \theta - \frac{1}{2} p_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_a \cos^2 \theta + p_b \sin^2 \theta - \frac{1}{2} p_p & 0 \\ (1-p_a)(1-p_b) \sin 2\theta & 0 & 0 & 2 \sin^2 \theta - p_s \sin^2 \theta + \frac{1}{2} p_p \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

cujo grau de pureza atinge seu valor máximo apenas para $p_a = p_b = 0$ e decresce à medida que p_a e p_b se aproximam de 1.

Os resultados fornecidos pelas Eqs. (3.31) e (3.40) sugerem que se o estado puro da Eq. (3.30) for enviado em um processo de teletransporte através de um canal descrito pela Eq. (3.47), todos os termos relativos ao subsistema de Bob serão afetados, independentemente do resultado da medida de Alice. De fato, quando consideramos o cenário em que os dois primeiros *qubits* assumem a configuração $|\Phi_\theta^+\rangle_{1,2}$, o estado de Bob

colapsa para $\rho'_3 = 1/\text{Tr}(\rho P_I^\phi) \begin{bmatrix} \rho'_{300} & \rho'_{301} \\ \rho'_{310} & \rho'_{311} \end{bmatrix}$, onde

$$\begin{aligned} \rho'_{300} &= \{(4 - 2p_s) \cos^2 \theta + p_p\} |\alpha|^2 \cos^2 \phi + \{2p_a \cos^2 \theta + 2p_b \sin^2 \theta - p_p\} |\beta|^2 \sin^2 \phi, \\ \rho'_{301} &= \frac{1}{2} (1 - p_a) (1 - p_b) (\alpha\beta^*) \sin 2\theta \sin 2\phi, \quad \rho'_{310} = \frac{1}{2} (1 - p_a) (1 - p_b) (\alpha^*\beta) \sin 2\theta \sin 2\phi, \\ \rho'_{311} &= \{2p_a \sin^2 \theta + 2p_b \cos^2 \theta - p_p\} |\alpha|^2 \cos^2 \phi + \{(4 - 2p_s) \sin^2 \theta + p_p\} |\beta|^2 \sin^2 \phi \\ &\text{e } \text{Tr}(\rho P_I^\phi) = p(I) = \frac{1}{2} \{|\alpha|^2 (2 \cos^2 \theta - p_a \cos 2\theta) \cos^2 \phi + |\beta|^2 (2 \sin^2 \theta + p_a \cos 2\theta) \sin^2 \phi\}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Note que nenhum dos quatro termos da matriz ρ'_3 na Eq. (3.48) está imune à decoerência induzida pelo mapa da Eq. (3.46), e efeito semelhante ocorre quando os *qubits* de Alice colapsam para os estados $|\Phi_\theta^-\rangle_{1,2}$, $|\Psi_\theta^+\rangle_{1,2}$ e $|\Psi_\theta^-\rangle_{1,2}$.

De acordo com a Eq. (3.27), o cálculo de F_i para cada uma destas possibilidades gera a função

$$\begin{aligned} \overline{F}_{0|D|D} &= \sum_i p_i F_i = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} (p_a + p_b) + \frac{3}{2} p_a p_b \\ &\quad - 2(1 - p_a) (1 - p_b) (1 - \sin(2\theta) \sin(2\phi)) (|\beta|^2 - |\beta|^4), \end{aligned} \quad (3.49)$$

cujos valor esperado é dado por

$$\langle \overline{F} \rangle_{0|D|D} = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{4} (p_a + p_b - p_a p_b) + \frac{1}{2} (1 - p_a) (1 - p_b) \sin(2\theta) \sin(2\phi) \right\}. \quad (3.50)$$

Observe que a condição $p_a = p_b = 1$ corresponde ao limite clássico $\langle \overline{F} \rangle_{0|D|D} = 2/3$ (Massar and Popescu, 1995).

De modo semelhante aos modelos de Inversão de Fase e Inversão de Bit, o cenário no qual o estado de entrada sofre decoerência semelhante à que atua nos *qubits* do canal aumenta ligeiramente a complexidade da expressão final de $\langle \overline{F} \rangle_{0|D|D}$. Se a informação inicial de Alice for igual a

$$\tilde{\rho}_1 = \begin{bmatrix} (1 - \frac{p_0}{2}) |\alpha|^2 + (\frac{p_0}{2}) |\beta|^2 & (1 - p_0) \alpha\beta^* \\ (1 - p_0) \alpha^*\beta & (\frac{p_0}{2}) |\alpha|^2 + (1 - \frac{p_0}{2}) |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

para $0 < p_0 < 1$, o valor esperado da fidelidade total será equivalente a

$$\begin{aligned} \langle \overline{F} \rangle_{D|D|D} &= \frac{2}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{4} (p_0 + p_a + p_b - p_0 p_a - p_0 p_b - p_a p_b + p_0 p_a p_b) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (1 - p_0) (1 - p_a) (1 - p_b) \sin(2\theta) \sin(2\phi) \right\}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde a combinação dos elementos p_i , p_j e p_k segue estrutura semelhante à distribuição dos termos p_i e p_j em (3.50).

Atenuação de Amplitude

Encerraremos esta seção analisando o modelo de Atenuação de Amplitude, o qual, tal como o mapa de Despolarização, apresenta-se como um processo irreversível cuja dinâmica afeta todos os coeficientes do sistema inicial.

Se adaptarmos a Eq. (2.208) para um sistema de dimensão 2×2 , observaremos que

$$E_0^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p_a} \end{bmatrix}, \quad E_1^A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p_a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_0^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p_b} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_1^B = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p_b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

representam os operadores de Kraus do modelo de Atenuação de Amplitude para um sistema bipartite, onde $0 < \{p_a, p_b\} < 1$. Conseqüentemente,

$$\rho'_{AA|AA} = \begin{bmatrix} 1 - (1-p_a p_b) \sin^2 \theta & 0 & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{(1-p_a)(1-p_b)} \sin 2\theta \\ 0 & p_a(1-p_b) \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-p_a)p_b \sin^2 \theta & 0 \\ \frac{1}{2} \sqrt{(1-p_a)(1-p_b)} \sin 2\theta & 0 & 0 & (1-p_a)(1-p_b) \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

é o estado final do canal de teletransporte após a ação deste mapa sobre o sistema da Eq. (3.17).

Tal qual no modelo anterior, todos os elementos $\rho'_{3_{ij}}$ do subsistema de Bob sofrem alguma modificação em relação aos respectivos termos $\rho_{3_{ij}}$ presentes na Eq.(3.30). Se Alice obtém o estado $|\Phi_\theta^+\rangle_{1,2}$ como resultado após a medição do primeiro par de *qubits*, por exemplo, o estado final de Bob é dado por $\rho'_3 = 1/\text{Tr}(\rho P_I^\phi) \begin{bmatrix} \rho'_{3_{00}} & \rho'_{3_{01}} \\ \rho'_{3_{10}} & \rho'_{3_{11}} \end{bmatrix}$, onde

$$\begin{aligned} \rho'_{3_{00}} &= \{1 - (1-p_a p_b) \sin^2 \theta\} |\alpha|^2 \cos^2 \phi + \{(1-p_a)p_b \sin^2 \theta\} |\beta|^2 \sin^2 \phi, \\ \rho'_{3_{01}} &= \frac{1}{4} \sqrt{(1-p_a)(1-p_b)} (\alpha\beta^*) \sin 2\theta \sin 2\phi, \quad \rho'_{3_{10}} = \frac{1}{4} \sqrt{(1-p_a)(1-p_b)} (\alpha^*\beta) \sin 2\theta \sin 2\phi, \\ \rho'_{3_{11}} &= \{p_a(1-p_b) \sin^2 \theta\} |\alpha|^2 \cos^2 \phi + \{(1-p_a)(1-p_b) \sin^2 \theta\} |\beta|^2 \sin^2 \phi \\ \text{e} \quad \text{Tr}(\rho P_I^\phi) &= p(I) = \{1 - (1-p_a \sin^2 \theta)\} |\alpha|^2 \cos^2 \phi + (1-p_a \sin^2 \theta) |\beta|^2 \sin^2 \phi. \end{aligned} \quad (3.55)$$

O cálculo das funções p_i e F_i para as quatro possibilidades de medidas aliado aos resultados da Eq. (3.27) fornece a função

$$\begin{aligned} \langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA} &= \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (-p_a - p_b + 2p_a p_b) \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sqrt{(1-p_a)(1-p_b)} \sin 2\theta \sin 2\phi \right\}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

cujos limites clássicos $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA} = 2/3$ (Massar and Popescu, 1995) pode ser obtido para $p_a = p_b = 1$. Por sua vez, se analisarmos o caso em que a informação inicial de Alice

também é exposta à decoerência induzida pelo mapa de Atenuação de Amplitude tal que

$$\tilde{\rho}_1 = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 + (p_0) |\beta|^2 & \sqrt{1-p_0} (\alpha\beta^*) \\ \sqrt{1-p_0} (\alpha^*\beta) & (p_0) |\beta|^2 \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

constataremos que a função $\langle \bar{F} \rangle_{AA|AA|AA}$ é igual a

$$\begin{aligned} \langle \bar{F} \rangle_{AA|AA|AA} &= \frac{2}{3} \left\{ 1 - \frac{p_0}{4} + \frac{1}{2} (1 - p_0) (-p_a - p_b + 2p_a p_b) \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sqrt{(1-p_0)(1-p_a)(1-p_b)} \sin 2\theta \sin 2\phi \right\}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Repare que a maximização das funções $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{AA|AA|AA}$ ocorre para $\phi = \pi/4$, mas, ao contrário dos resultados obtidos para os modelos de Inversão de Fase, Inversão de Bit e Despolarização, as Eqs. (3.56) e (3.58) apresentam fatores proporcionais ao termo $\sin^2 \theta$, os quais, por sua vez, impedem que o valor máximo destas funções ocorra para $\theta = \pi/4$.

De fato, quando o grau de emaranhamento da base de medidas é máximo ($\phi = \pi/4$), as soluções das equações $\partial \langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA} / \partial \theta = 0$ e $\partial \langle \bar{F} \rangle_{AA|AA|AA} / \partial \theta = 0$ são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}}{\partial \theta} = 0 &\Rightarrow \tan(2\theta)_{0|AA|AA} = \frac{2\sqrt{(1-p_a)(1-p_b)}}{p_a + p_b - 2p_a p_b} \text{ e} \\ \frac{\partial \langle \bar{F} \rangle_{AA|AA|AA}}{\partial \theta} = 0 &\Rightarrow \tan(2\theta)_{AA|AA|AA} = \frac{2\sqrt{(1-p_a)(1-p_b)}}{\sqrt{1-p_0}(p_a + p_b - 2p_a p_b)}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Como $0 < p_0 < 1$ e, portanto, $\sqrt{1-p_0} \neq 0$, a condição $\theta = \pi/4$ em (3.59) implica em

$$\tan(2\theta) = \tan \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty \Rightarrow p_a + p_b - 2p_a p_b = 0. \quad (3.60)$$

Por outro lado, a relação

$$p_a + p_b - 2p_a p_b \geq p_a^2 + p_b^2 - 2p_a p_b = (p_a - p_b)^2 \geq 0 \quad (3.61)$$

é sempre válida para $0 < p_a < 1$ e $0 < p_b < 1$. Visto que a igualdade da Eq. (3.61) só pode ser satisfeita para $p_a = p_b = p$, a verificação desta hipótese na Eq. (3.60) mostra que

$$2p - 2p^2 = 0 \Rightarrow p(1-p) = 0 \quad (3.62)$$

possui solução apenas para $p = 0$ ou $p = 1$. Logo, as funções $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{AA|AA|AA}$ só atingem seus respectivos valores máximos quando os canais são parcialmente emaranhados ($\theta \neq \pi/4$).

Nas próximas seções, mostraremos que todas as funções associadas ao modelo de Atenuação de Amplitude atingem seu valor máximo para $\theta \neq \pi/4$, e exploraremos

as conseqüências desta importante propriedade ao comparar estes modelos em cenários com canais parcialmente emaranhados.

3.2.3 Canais Mistos com Decoerência Heterogênea

Os quatro mapas analisados para os modelos de canais com decoerência homogênea podem ser permutados entre os operadores E_l^A e E_p^B da Eq. (3.11) dada por

$$\rho'^{A,B} = \sum_{l,p} \{E_l^A \otimes E_p^B\} \rho^{A,B} \{(E_l^A)^\dagger \otimes (E_p^B)^\dagger\}, \quad (3.63)$$

gerando doze combinações distintas de pares heterogêneos neste sistema: $0|IF|IB$, $0|IF|D$, $0|IF|AA$, $0|IB|IF$, $0|IB|D$, $0|IB|AA$, $0|D|IF$, $0|D|IB$, $0|D|AA$, $0|AA|IF$, $0|AA|IB$ e $0|AA|D$. Como as expressões relativas à fidelidade média total e seu respectivo valor esperado são obtidas através do mesmo procedimento descrito na seção 3.2.2, evitaremos a repetição dos referidos cálculos para destacar as propriedades e implicações mais relevantes destas funções na próxima seção.

3.3 Análise do Valor Esperado da Fidelidade Média Total

Ao longo deste capítulo, discutiremos o comportamento do valor esperado da fidelidade média total para os seguintes cenários:

- (1) Canais que sofrem um único tipo de decoerência (canais homogêneos), independentemente do grau de pureza e do mapa que atua sobre o estado de entrada;
- (2) Canais com mecanismos de decoerência distintos (canais heterogêneos), com considerações idênticas às do item (1) em relação ao estado de entrada;
- (3) Configurações nas quais os *qubits* de Alice (referentes ao estado de entrada e à respectiva metade do canal) sejam corrompidos por um único tipo de decoerência e de forma distinta ao processo que atua sobre o *qubit* de Bob.

3.3.1 Entrada Pura em Canais com Decoerência Homogênea

Mostramos nas seções 3.2.2 e 3.2.3 que os mapas apresentados em 2.9 geram quatro possibilidades onde um par de *qubits* pode sofrer decoerência homogênea e doze casos de sistemas bipartite cujos *qubits* apresentam decoerências oriundas de fontes distintas. Como todos os estados se enquadram nos requisitos necessários para simular canais mistos em procedimentos de teletransporte quântico, a unicidade de cada modelo será determinada pela configuração do estado de entrada e pelos valores atribuídos a cada parâmetro.

Assim, considere inicialmente um protocolo no qual apenas o subsistema de Bob sofre decoerência, enquanto os *qubits* 1 e 2 de Alice permanecem isolados e com seu

grau de pureza mantido intacto. Neste caso, o canal de teletransporte será descrito pela Eq. (3.10) como

$$\tilde{\rho}^{2,3} = \sum_p \{I^2 \otimes E_p^3\} \rho^{2,3} \{I^2 \otimes (E_p^3)^\dagger\}, \quad (3.64)$$

onde p_b é o parâmetro que controla a ação do ambiente sobre o canal. Se substituirmos os termos E_p^3 pelos operadores de Kraus discutidos na seção 2.5, podemos comparar o comportamento de $\langle \bar{F} \rangle$ para os modelos da Eq. (3.64) (cujos canais sofrem decoerência parcial) com os quatro canais homogêneos analisados na seção 3.2.2, como mostraremos a seguir.

Na seção 2.9.2, vimos que a tendência da atuação do mapa de Inversão de Fase sobre um *qubit* isolado é a de restaurar a configuração original dos coeficientes do estado corrompido para $p \rightarrow 1$. Todavia, o canal descrito por $\tilde{\rho}^{2,3}$ na Eq. (3.64) é formado por um par emaranhado, e o estado do sistema depende das propriedades simultâneas de ambos os *qubits*. Neste caso, quando a condição $\sin 2\theta \sin 2\phi > 0$ for satisfeita, a função obtida da Eq. (3.34) para $p_a = 0$ e dada por

$$\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IF} = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(p_b - \frac{1}{2} \right) \sin 2\theta \sin 2\phi \right\} \quad (3.65)$$

decrece à medida que p_b aumenta, onde o índice $0|0|IF$ destaca que o referido mapa atua apenas sobre o *qubit* de Bob.

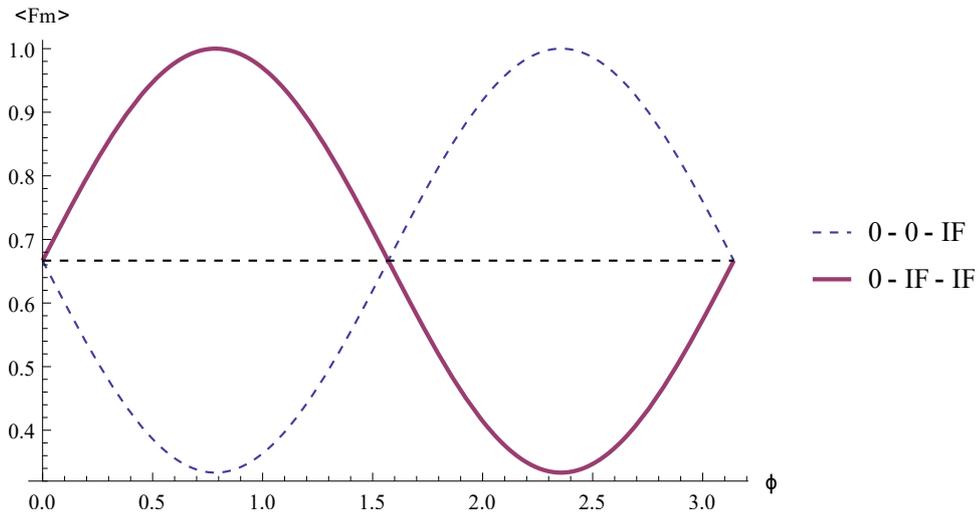


Figura 3.5: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$ e $p_a = p_b = 1$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IF}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados ao modelo $0|IF|IF$.

A Fig. (3.5) mostra a dependência de $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IF}$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$ e $p_a = p_b = 1$. Como $0 < \theta < \pi/2$ e $p_b > 1/2$, a Eq. (3.65) revela que o

valor de $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IF}$ deve diminuir à medida que ϕ se aproxima de $\pi/4$, e, em contrapartida, a Eq. (3.34) prediz que $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$ seguirá o caminho inverso, visto que $\{p_a; p_b\} > 1/2$. De fato, repare que as duas curvas atingem respectivamente seus valores máximo ($\langle \bar{F} \rangle = 1$) e mínimo ($\langle \bar{F} \rangle = 1/3$) para $\phi = \pi/4$ e que a segunda supera a primeira em todos os pontos no intervalo $0 < \phi < \pi/2$, aumentando significativamente o valor de $\langle \bar{F} \rangle$. Deste

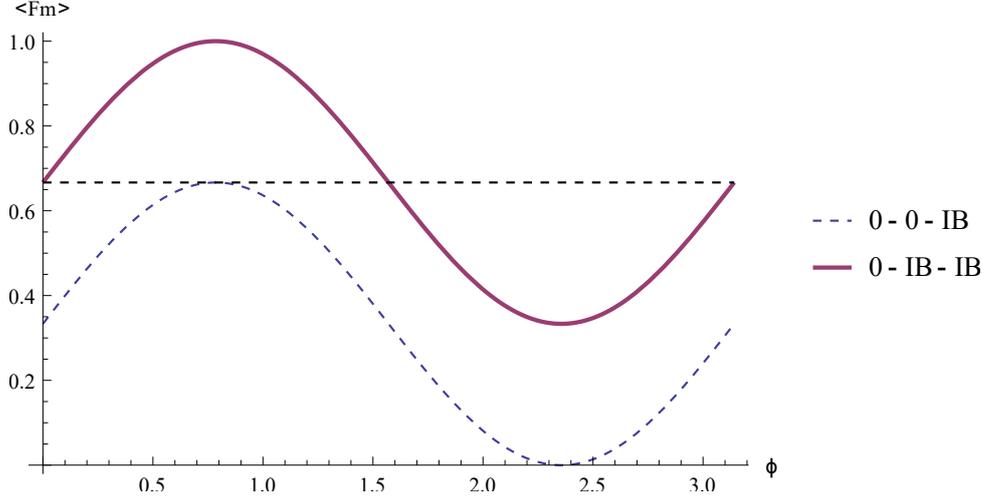


Figura 3.6: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$ e $p_a = p_b = 1$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IB}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados ao modelo $0|IB|IB$.

modo, sempre que o produto dos fatores $\sin 2\theta$ e $\sin 2\phi$ for igual a um número positivo, a dependência de $\langle \bar{F} \rangle$ em relação à p_b só poderá ser estritamente crescente se o *qubit* de Alice no canal estiver exposto ao mesmo tipo de decoerência que atua sobre o subsistema de Bob.

A aplicação do mapa de Inversão de Bit sobre os dois componentes do canal também promove melhorias para $\langle \bar{F} \rangle$ em relação à Eq. (3.64) quando os coeficientes E_p^3 apresentam decoerência semelhante à dos termos exibidos em (2.178). De modo análogo ao mapa de Inversão de Fase, a função $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IB}$ pode ser derivada da Eq. (3.42) para $p_a = 0$ como

$$\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IB} = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (p_b - \sin 2\theta \sin 2\phi) \right\}, \quad (3.66)$$

e a Fig. 3.6 simula a comparação entre esta e a função $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$ para os mesmos parâmetros exibidos na Fig. 3.5. Note que, embora a magnitude de $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IB}$ sempre decresça com o aumento de p_b , sua distribuição ocorre de forma inversa à da função $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IF}$, uma vez que não há acoplamento entre os parâmetros p_b e ϕ na Eq. (3.66). Logo, para $0 < \theta < \pi/2$, a curva relativa à função $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IB}$ é sempre crescente quando ϕ se aproxima de $\pi/4$.

Já a adaptação da Eq. (3.50) para $p_a = 0$ gera a função

$$\langle \bar{F} \rangle_{0|0|D} = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{4}p_b + \frac{1}{2}(1 - p_b) \sin(2\theta) \sin(2\phi) \right\}, \quad (3.67)$$

a qual, como esperado, é sempre superior a $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ para $2/3 < \langle \bar{F} \rangle_{0|D|D} < 1$, uma vez que o processo de decoerência induzido pelo mapa de Despolarização é irreversível. Embora seja possível encontrar cenários em que $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ seja ligeiramente superior a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|D}$ para determinados valores de θ , em nenhum destes casos estas funções encontram-se acima do limite $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A Fig. 3.7 ilustra o exemplo próximo ao estágio final de despolarização destes modelos para $\theta = \pi/4$ e $p_a = p_b = 0.95$. Repare que a distribuição de $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ em torno do ponto $\langle \bar{F} \rangle = 0.5$ (configuração na qual os estados tornam-se completamente mistos) é praticamente constante.

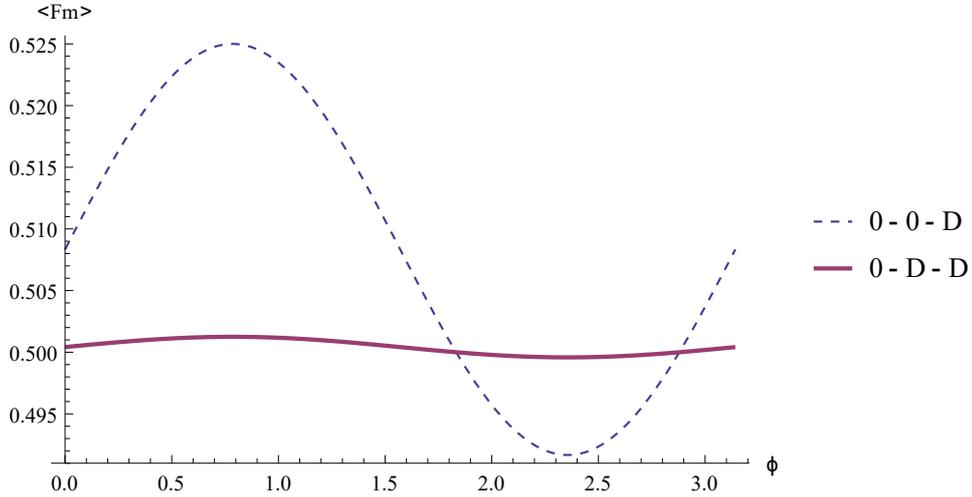


Figura 3.7: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$ e $p_a = p_b = 0.95$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|D}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$. Nenhuma das curvas atinge o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os resultados associados ao modelo $0|D|D$ são inferiores aos do modelo $0|0|D$.

Se por um lado as Eqs. (3.65), (3.66) e (3.67) atingem seus respectivos valores máximo e mínimo para $\theta = \phi = \pi/4$, o cenário envolvendo o mapa de Atenuação de Amplitude é mais sutil. Considere a função $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA}$ adaptada da Eq (3.56) para $p_a = 0$ e descrita por

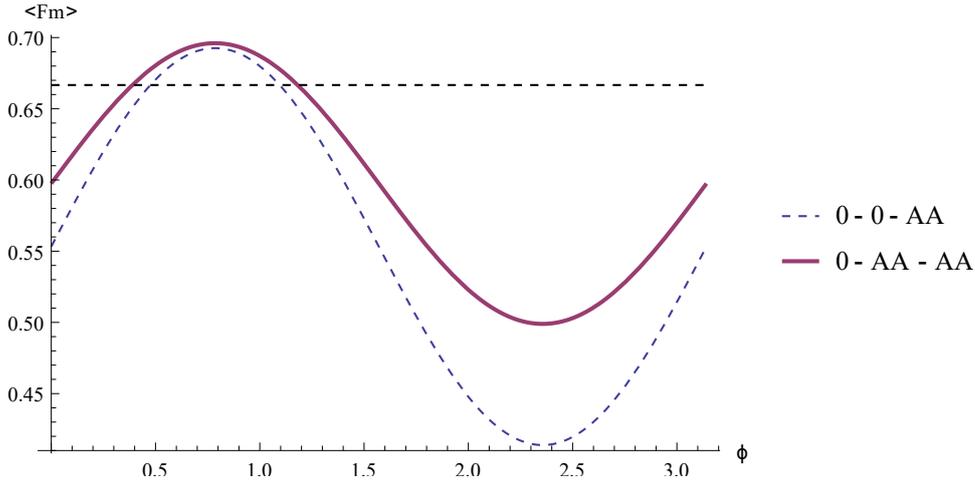
$$\langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(-p_b \sin^2 \theta + \sqrt{(1 - p_b)} \sin 2\theta \sin 2\phi \right) \right\}, \quad (3.68)$$

e observe que o aumento de p_b também implica na redução de $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA}$. Por sua vez, a

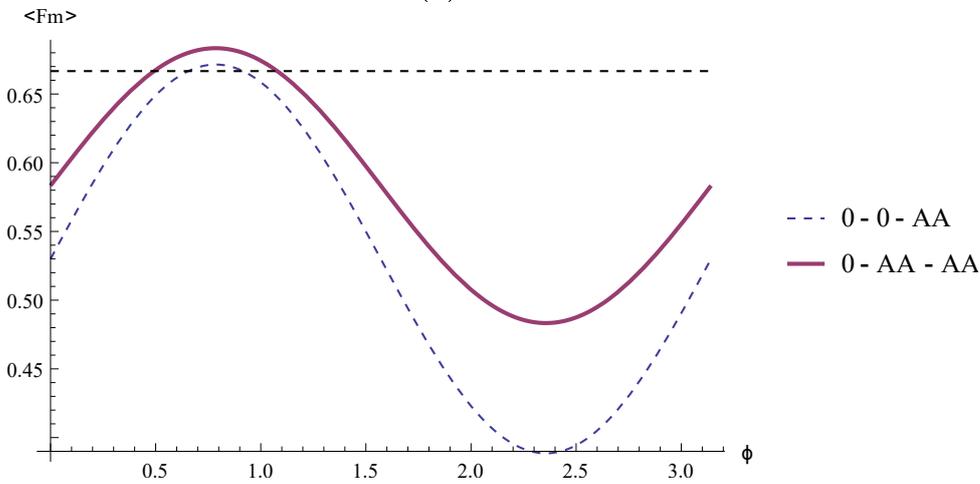
função dada por

$$\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left((-p_a - p_b + 2p_a p_b) \sin^2 \theta + \sqrt{(1-p_a)(1-p_b)} \sin 2\theta \sin 2\phi \right) \right\} \quad (3.69)$$

contém fatores semelhantes aos da Eq. (3.68), exceto pelo coeficiente associado ao termo $\sin^2 \theta$.



(a) $\theta = 0.7$.



(b) $\theta = \pi/4$.

Figura 3.8: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $p_a = 0.5$ e $p_b = 0.82$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. O valor máximo de ambas as funções para (a) $\theta = 0.7$ supera os resultados exibidos para (b) $\theta = \pi/4$, e os melhores resultados estão associados ao modelo $0|AA|AA$.

O cálculo de $\partial \langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA} / \partial \theta = 0$ para $\phi = \pi/4$ fornece a solução dada por

$$\frac{\partial \langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \tan(2\theta)_{0|0|AA} = \frac{2\sqrt{1-p_b}}{p_b}, \quad (3.70)$$

e, graças à presença do fator $\sin^2 \theta$, a condição $\theta = \pi/4$ é satisfeita somente para $p_b = 0$ (de forma análoga à Eq. (3.59)). Conseqüentemente, para que a função $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA}$ atinja seu valor máximo, o canal também deve ser parcialmente emaranhado e, neste caso, é possível que $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$ supere $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA}$ para valores específicos de p_a e p_b . Para o exemplo das Figs. 3.8a e 3.8b, $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA} > \langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA}$ para $p_a = 0.5$, $p_b = 0.82$ e $\theta = \{0.7; \pi/4\}$; e, nestes cenários, os valores das fidelidades relativas aos canais parcialmente emaranhados ($\theta = 0.7$) são superiores aos resultados de um experimento simulado nas mesmas condições para canais perfeitamente emaranhados ($\theta = \pi/4$).

Como a presença de decoerência no *qubit* de Alice no canal consegue aumentar a magnitude de $\langle \bar{F} \rangle$ para combinações específicas dos parâmetros ϕ , θ , p_a e p_b em relação à Eq. (3.64), os canais relativos aos modelos $0|IF|IF$, $0|IB|IB$, $0|D|D$ e $0|AA|AA$ também podem ser comparados com o intuito de maximizar a fidelidade do estado de saída ρ^3 . Nestes casos, a escolha do canal mais adequado depende sensivelmente da configuração particular dos parâmetros mencionados, como mostram as Figs. 3.9a, 3.9b e 3.9c.

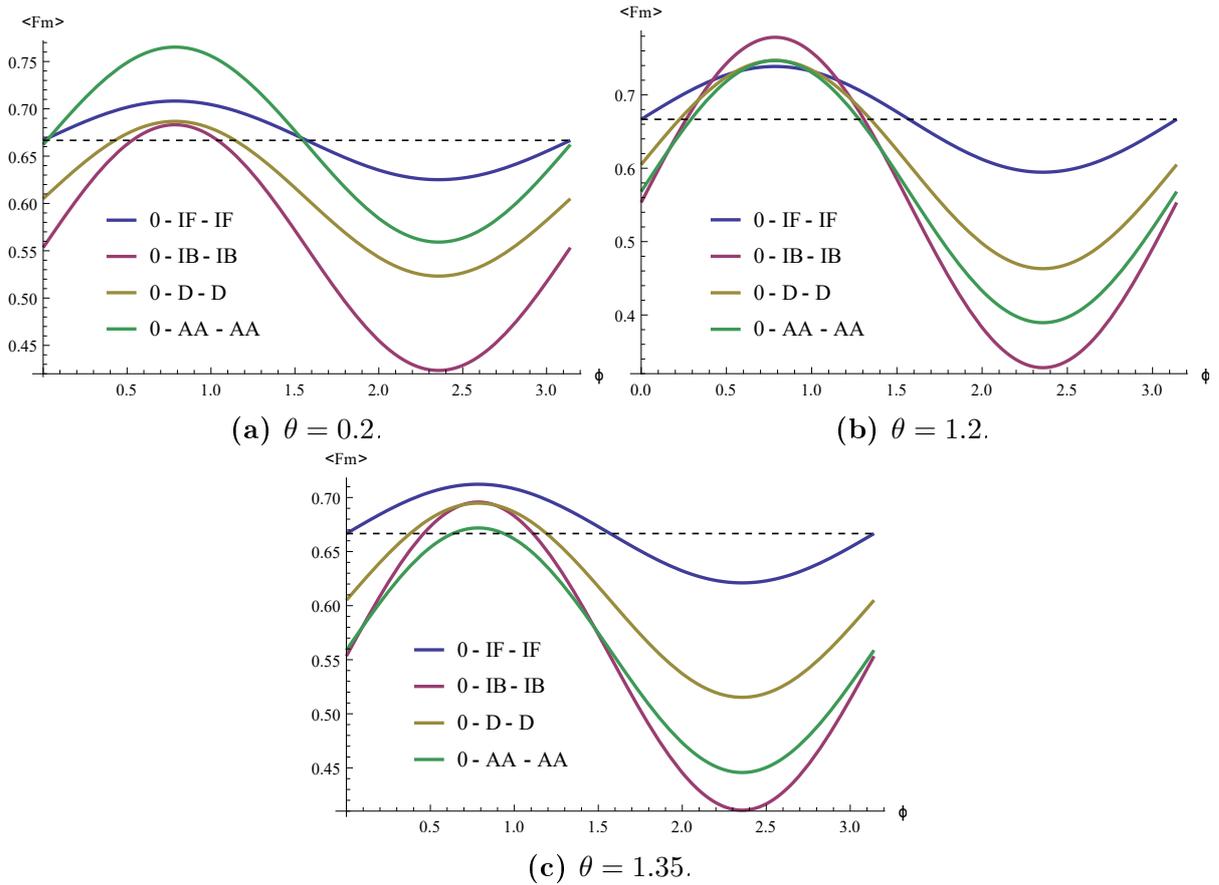


Figura 3.9: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $p_a = 0.1$ e $p_b = 0.3$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $0|AA|AA$; (b) $0|IB|IB$ e (c) $0|IF|IF$.

Suponha inicialmente que Alice tenha fixado a decoerência sobre seu *qubit*

no canal em $p_a = 0.1$ e que Bob tenha interrompido um processo semelhante sobre o seu estado em $p_b = 0.3$. Para $\theta = 0.2$ e $0 < \phi < \pi/2$, a curva descrita pela função $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$ na Fig. 3.9a é notoriamente superior às três concorrentes e atinge valores acima de $\langle \bar{F} \rangle = 0.75$. Porém, à medida que o grau de emaranhamento do canal se aproxima de $\theta = \pi/2 \approx 1.57$, há um revezamento na hierarquia que define os canais mais eficientes: observe nas Figs. 3.9b e 3.9c que $0|IB|IB$ revela-se como a melhor opção para $\theta = 1.2$ no intervalo próximo a $0.5 < \phi < 1.3$, enquanto o canal $0|IF|IF$ apresenta-se claramente como a melhor escolha para $\theta = 1.35$.

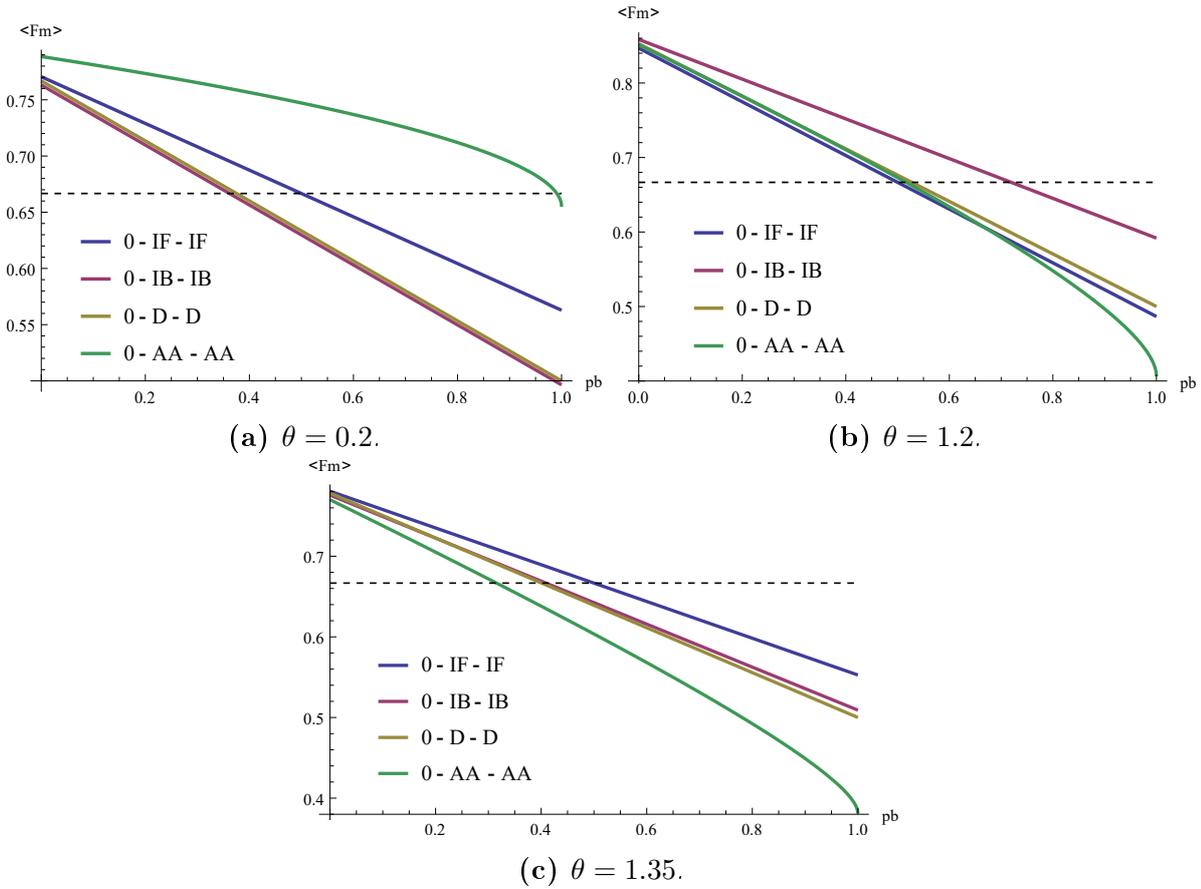


Figura 3.10: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de p_b para $p_a = 0.1$ e $\phi = \pi/4$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $0|AA|AA$; (b) $0|IB|IB$ e (c) $0|IF|IF$.

A comparação entre estes sistemas também pode ser analisada sob aspectos além da manipulação dos graus de emaranhamento do canal e da base de medidas. Suponha novamente que a decoerência sobre o *qubit* de Alice no canal tenha atuado até $p_a = 0.1$ e que ela e Bob concordem em utilizar a mesma base de medidas em todos os eventos. Visto que todas as expressões relativas a $\langle \bar{F} \rangle$ atingem seu valor máximo para $\phi = \pi/4$, é natural que o grau de emaranhamento das medidas seja pré-determinado com esta configuração. Assim, se o valor de θ for conhecido previamente, o referido cenário

permite que Bob adquira a liberdade de interromper o processo de decoerência sobre seu estado no momento em que julgar conveniente, como mostram respectivamente os resultados das Figs. 3.10a, 3.10b e 3.10c para $\theta = 0.2$, $\theta = 1.2$ e $\theta = 1.35$. Repare que o aumento de p_b reduz o valor geral de $\langle \bar{F} \rangle$ e que $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$ é a única curva que não apresenta comportamento linear, graças à competição entre os fatores proporcionais a p_b e $\sqrt{1-p_b}$ implícitos na Eq. (3.56). Observe ainda que raramente há superposição entre as curvas.

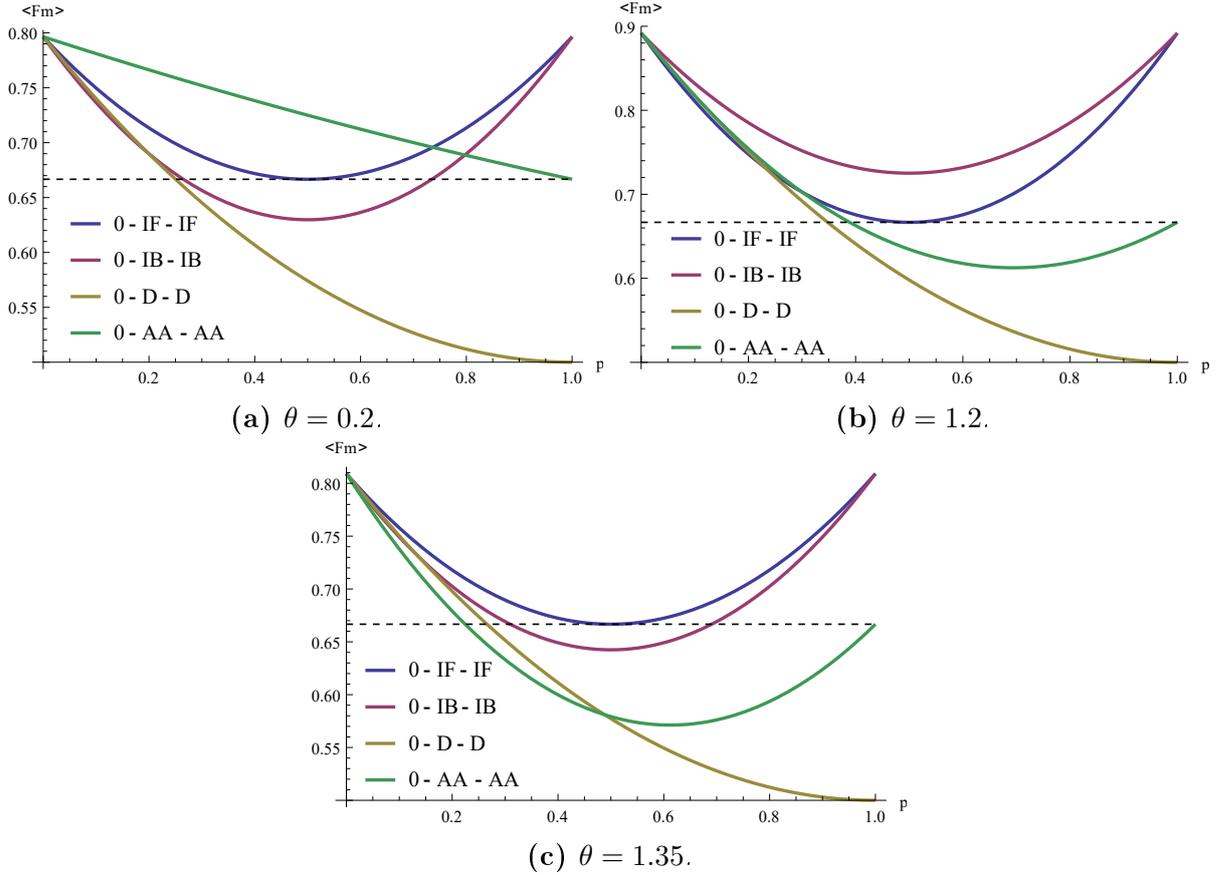


Figura 3.11: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de $p_a = p_b = p$ para $\phi = \pi/4$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $0|AA|AA$; (b) $0|IB|IB$ e (c) $0|IF|IF$.

Suponha agora que exista um mecanismo que controle a ação dos mapas E_t^A e E_p^B sobre os *qubits* do canal tal que $p_a = p_b = p$. Cenários deste tipo ocorrem quando o ambiente interage simultaneamente com estes *qubits*, de forma que Alice e Bob não conseguem isolar a ação do meio externo sobre um respectivo estado sem afetar o processo de decoerência sobre o outro constituinte do canal. Para $\theta = 0.2$, a Fig. 3.11a mostra que $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$ supera as outras funções enquanto as probabilidades de decoerência não atingem o valor $p \approx 0.7$, tornando-se significativamente inferior a $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$ para valores de p acima deste ponto. Na Fig. 3.11b, a última função supera todas as outras

para $\theta = 1.2$ e não há sobreposição entre esta e as curvas restantes, tal qual na Fig. 3.11a. A Fig. 3.11c, por sua vez, revela que o canal $0|IF|IF$ apresenta-se como a melhor opção para $\theta = 1.35$.

Na próxima seção analisaremos a fidelidade de modelos que possuem canais homogêneos e entradas mistas.

3.3.2 Entrada Mista em Canais com Decoerência Homogênea

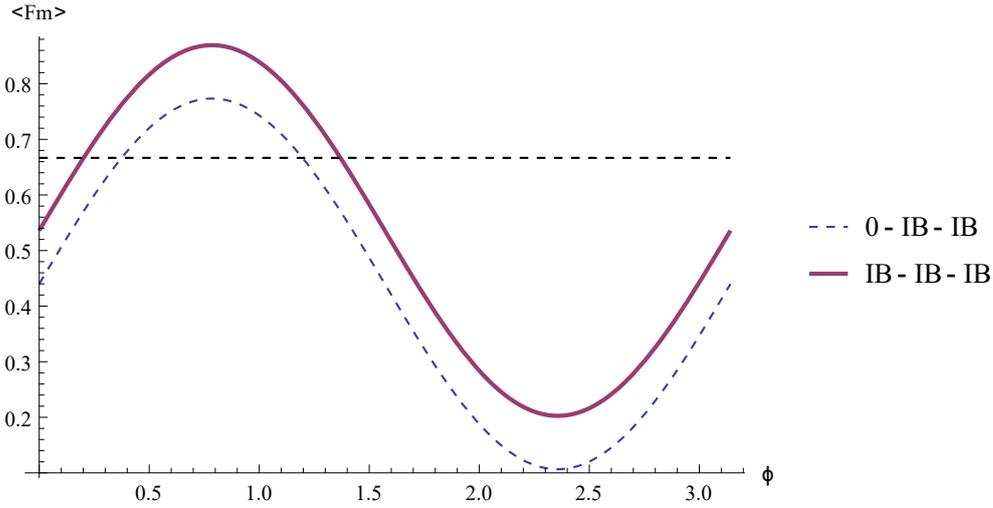


Figura 3.12: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$, $p_0 = p_a = 0.8$ e $p_b = 0.2$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{IB|IB|IB}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados ao modelo $IB|IB|IB$.

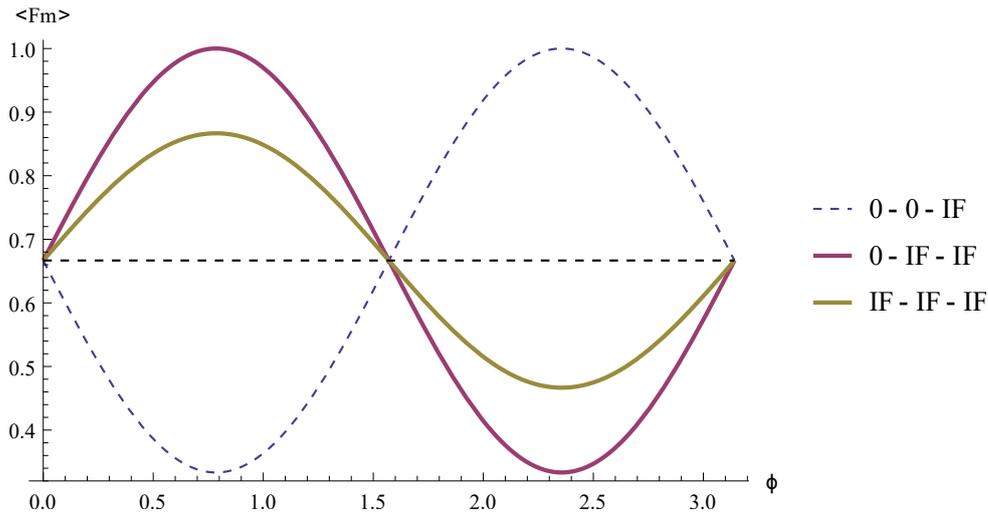


Figura 3.13: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$, $p_0 = 0.2$ e $p_a = p_b = 1$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IF}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{IF|IF|IF}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados aos modelos $0|IF|IF$ e $IF|IF|IF$.

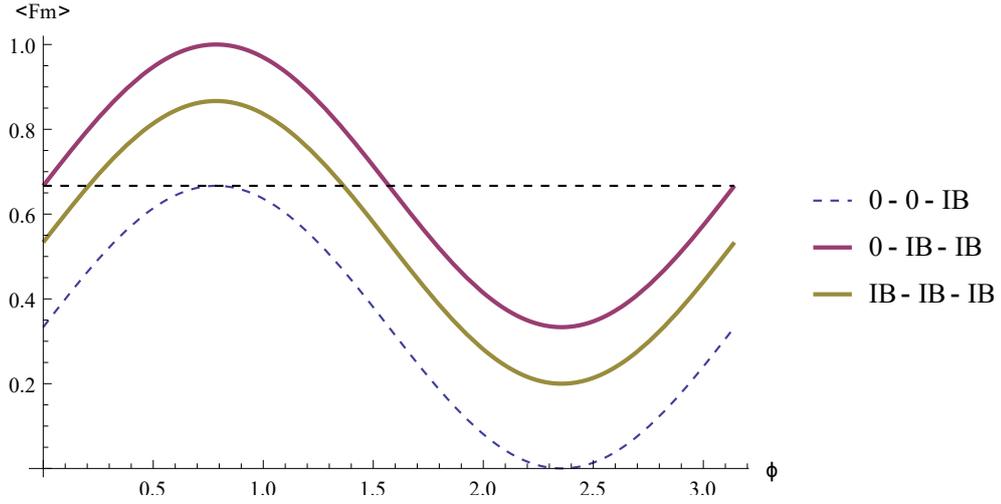


Figura 3.14: Gráfico de $\langle \overline{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$, $p_0 = 0.4$ e $p_a = p_b = 1$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente a $\langle \overline{F} \rangle_{0|0|IB}$, $\langle \overline{F} \rangle_{0|IB|IB}$ e $\langle \overline{F} \rangle_{IB|IB|IB}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados aos modelos $0|IB|IB$ e $IB|IB|IB$.

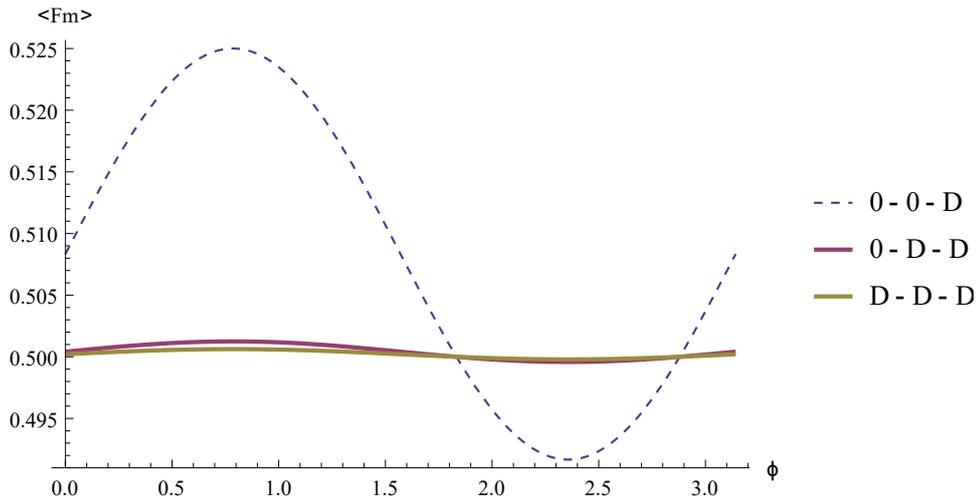


Figura 3.15: Gráfico de $\langle \overline{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$, $p_0 = 0.5$ e $p_a = p_b = 0.95$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente a $\langle \overline{F} \rangle_{0|0|D}$, $\langle \overline{F} \rangle_{0|D|D}$ e $\langle \overline{F} \rangle_{D|D|D}$. Nenhuma das curvas atinge o limite clássico correspondente a $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$. Os resultados associados aos modelos $0|D|D$ e $D|D|D$ são inferiores aos do modelo $0|0|D$.

O primeiro fato relevante decorrente da comparação entre entradas puras e mistas pode ser constatado observando-se as curvas exibidas na Fig. 3.12: o de que é possível aumentar a eficiência de um determinado processo destruindo-se a pureza do estado de entrada. A manifestação deste fenômeno ocorre para o modelo $IB|IB|IB$ sempre que apenas uma das condições $\{p_a; p_b\} > 1/2$ é satisfeita, e o aumento de p_0 contribui para ampliar a defasagem entre as funções $\langle \overline{F} \rangle_{IB|IB|IB}$ e $\langle \overline{F} \rangle_{0|IB|IB}$.

Contudo, o cenário anterior é uma exceção em relação aos demais processos, pois, de uma forma geral, a manifestação de decoerência sobre o estado de entrada reduz o valor esperado da fidelidade média total. Assim, embora as Figs. 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16

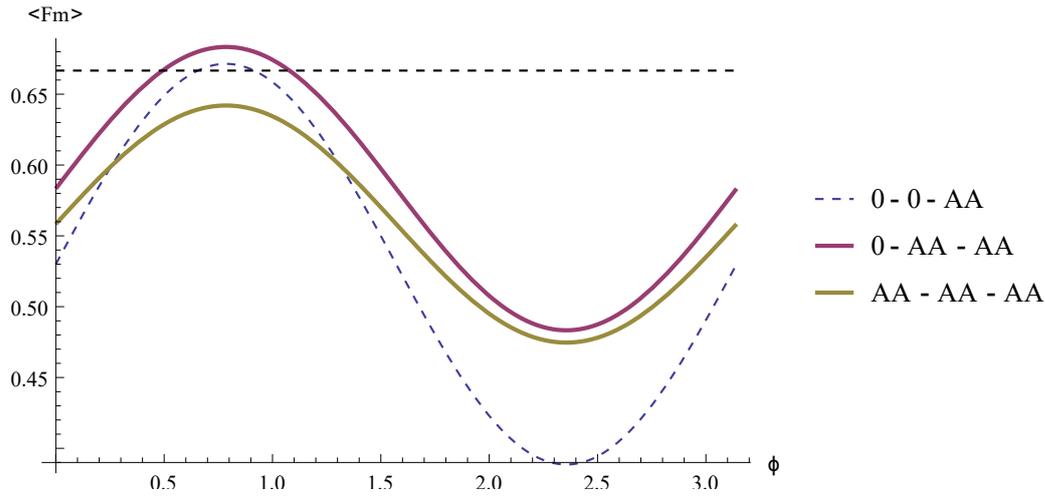


Figura 3.16: Gráfico de $\langle \overline{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = \pi/4$, $p_0 = 0.3$, $p_a = 0.5$ e $p_b = 0.82$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente a $\langle \overline{F} \rangle_{0|0|AA}$, $\langle \overline{F} \rangle_{0|AA|AA}$ e $\langle \overline{F} \rangle_{AA|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados aos modelos $0|AA|AA$ e $0|0|AA$.

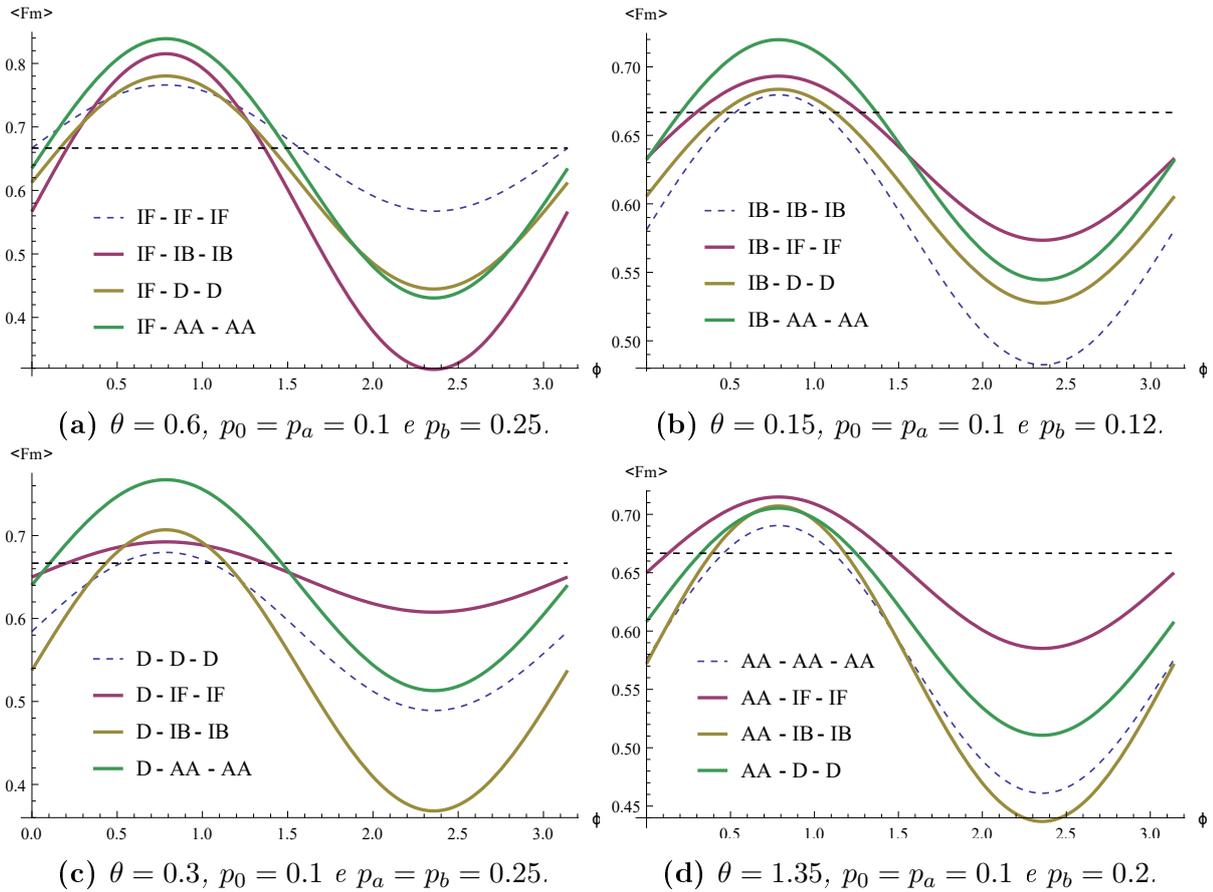


Figura 3.17: Comparação entre modelos que possuem entradas mistas e canais homogêneos onde o estado de entrada é mantido inalterado. As figuras exibem os gráficos de $\langle \overline{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $IF|AA|AA$; (b) $IB|AA|AA$; (c) $D|AA|AA$ e (d) $AA|IF|IF$.

revelam que a inserção das funções (3.37), (3.44), (3.52) e (3.58) nos gráficos 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8a provoque o decréscimo de $\langle \bar{F} \rangle$, a inclusão do estado de entrada no contexto de estados mistos ainda é válida, pois aproxima estes protocolos de cenários mais realistas e gera novos tipos de análises e comparações relevantes para os modelos em questão.

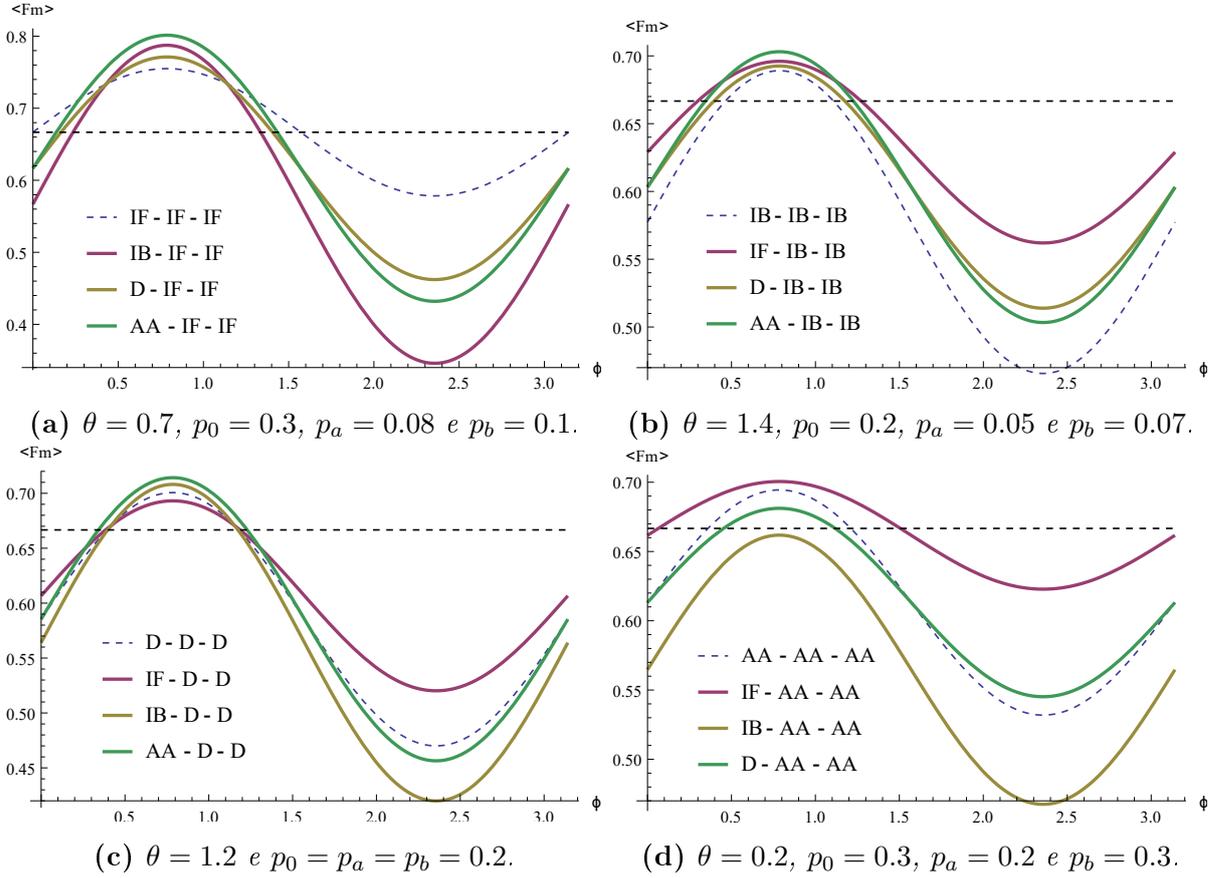


Figura 3.18: Comparação entre modelos que possuem entradas mistas e canais homogêneos onde o canal é mantido inalterado. As figuras exibem os gráficos de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $AA|IF|IF$; (b) $AA|IB|IB$; (c) $AA|D|D$ e (d) $IF|AA|AA$.

Deste modo, tal qual nas Figs. 3.9a, 3.9b e 3.9c, suponha inicialmente que o estado inicial de Alice $\tilde{\rho}_1$ seja pré-determinado e que ela e Bob desejem escolher o canal que maximiza a fidelidade total ao final do processo. As Figs. 3.17a, 3.17b, 3.17c e 3.17d resgatam respectivamente as Eqs. (3.35), (3.43), (3.51) e (3.57) para reproduzir o estado de entrada em cenários nos quais o emprego de canais com decoerência uniforme de natureza distinta à de $\tilde{\rho}_1$ supera os modelos onde um único mapa atua sobre todos os *qubits*. Repare que o valor máximo de todas as funções ocorre para $\phi = \pi/4$ e que cada gráfico mostra uma configuração na qual a troca de canal é sempre vantajosa para o conjunto de parâmetros selecionados. Observe ainda que a magnitude de $\langle \bar{F} \rangle$ foi expandida em até 10% em relação ao valor original nas Figs. 3.17a, 3.17b e 3.17d, chegando a ultrapassá-lo em até 20% deste valor para o exemplo da Fig. 3.17c.

Por outro lado, a comparação entre processos simulados com um único canal para os quatro tipos de entrada possíveis também gera conclusões interessantes. As Figs. 3.18a e 3.18b apresentam respectivamente cenários nos quais as funções $\langle \bar{F} \rangle_{IF|IF|IF}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{IB|IB|IB}$ são ultrapassadas pelos modelos onde a decoerência do canal é distinta à do sistema de entrada, e fenômeno semelhante ocorre na Fig. 3.18c para a função $\langle \bar{F} \rangle_{D|D|D}$ quando $\tilde{\rho}_1$ é igual a IB ou AA . Na Fig. 3.18d, por sua vez, a permuta do mapa AA por IF em $\tilde{\rho}_1$ constitui-se como a única alteração vantajosa em relação a $\langle \bar{F} \rangle_{AA|AA|AA}$.

Assim, verificamos sob dois pontos de vista distintos que a combinação de mecanismos de decoerência independentes geram funções que superam o valor de $\langle \bar{F} \rangle$ em relação à ação de um único mapa sobre todo o sistema. De uma forma geral, a troca de canais em relação a um estado de entrada previamente escolhido gera resultados mais significativos do que o processo inverso.

3.3.3 Entrada Pura em Canais com Decoerência Heterogênea

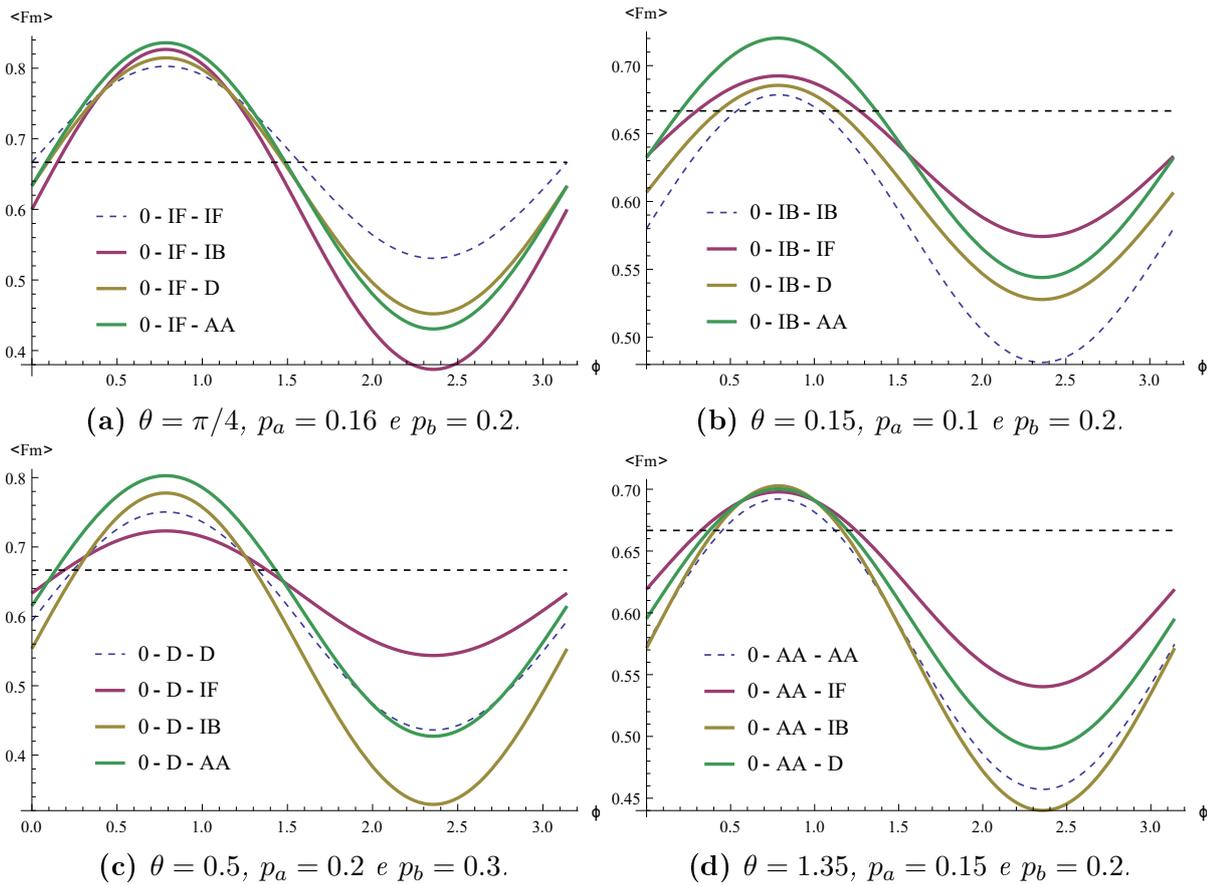


Figura 3.19: Comparação entre modelos que possuem entradas puras e canais heterogêneos onde o qubit de Alice no canal é mantido inalterado. As figuras exibem os gráficos de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $0|IF|AA$; (b) $0|IB|AA$; (c) $0|D|AA$ e (d) $0|AA|IB$, $0|AA|D$ e $0|AA|IF$.

Na análise dos protocolos discutidos nas seções 3.3.1 e 3.3.2 para canais com decoerência homogênea, estabelecemos comparações para uma configuração fixa da informação original (em relação aos quatro tipos de canais) e para mecanismos com estados de entrada distintos (sujeitos a um canal de transmissão pré-estabelecido). Nesta seção, adaptaremos estas análises para o subsistema de Bob em processos que possuem canais com decoerência heterogênea.

A figura 3.19a exibe os gráficos de $\langle \bar{F} \rangle$ para procedimentos de teletransporte com entrada pura nos quais a decoerência do *qubit* de Alice no canal é descrita pelo mapa de Inversão de Fase, enquanto o estado de Bob é exposto aos modelos analisados na seção 3.2.1. Observe que os valores relativos aos canais heterogêneos $0|IF|IB$, $0|IF|D$ e $0|IF|AA$ são superiores aos do canal $0|IF|IF$ para a maior parte do intervalo contido em $0 < \phi < \pi/2$ e que, nas condições especificadas pela simulação, Alice e Bob devem descartar a hipótese de realizar o processo de teletransporte com um canal homogêneo.

Argumento semelhante pode ser aplicado quando permutamos os índices IF e IB : observe na Fig. 3.19b que a exposição do terceiro *qubit* aos mapas de Inversão de Fase, Despolarização e Atenuação de Amplitude pode aumentar em até 10% o valor máximo de $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$.

Por sua vez, as propriedades do mapa de Despolarização e os resultados exibidos nas seções 3.3.1 e 3.3.2 indicam que a troca de decoerência em pelo menos um *qubit* do canal também deve promover melhorias em relação a $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ (para alguma configuração específica dos parâmetros envolvidos no processo), e a Fig. 3.19c apresenta um exemplo onde os mapas IB e AA satisfazem esta premissa.

A substituição do último *qubit* do canal $0|AA|AA$ por IF , IB ou D também pode ser vantajosa, embora tal configuração ocorra para uma faixa restrita de valores em relação aos parâmetros θ , p_a e p_b . Assim como em outros cenários onde havia a presença do mapa de Atenuação de Amplitude em algum dos componentes do sistema (Figs. 3.17d e 3.18d), o ganho final em relação a $\langle \bar{F} \rangle$ é sutil se comparado às Figs. 3.19a, 3.19b e 3.19c. Repare que o valor máximo de $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$ na Fig. 3.19d é acrescido de aproximadamente 1% na comparação com a função $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|IB}$.

Deste modo, quando a informação original é descrita por um estado puro, mostramos que é possível aumentar a fidelidade total de canais que sofrem decoerência homogênea se alterarmos o ambiente que atua sobre o *qubit* de Bob. Na próxima seção, finalizaremos este capítulo analisando cenários onde o estado de entrada e o *qubit* de Alice no canal sofrem o mesmo tipo de decoerência, para os quais apresentaremos novos exemplos onde a substituição do estado de Bob (e do subsistema de Alice) superam a fidelidade de protocolos que possuem um único tipo de decoerência.

3.3.4 Entrada Mista em Canais com Decoerência Heterogênea

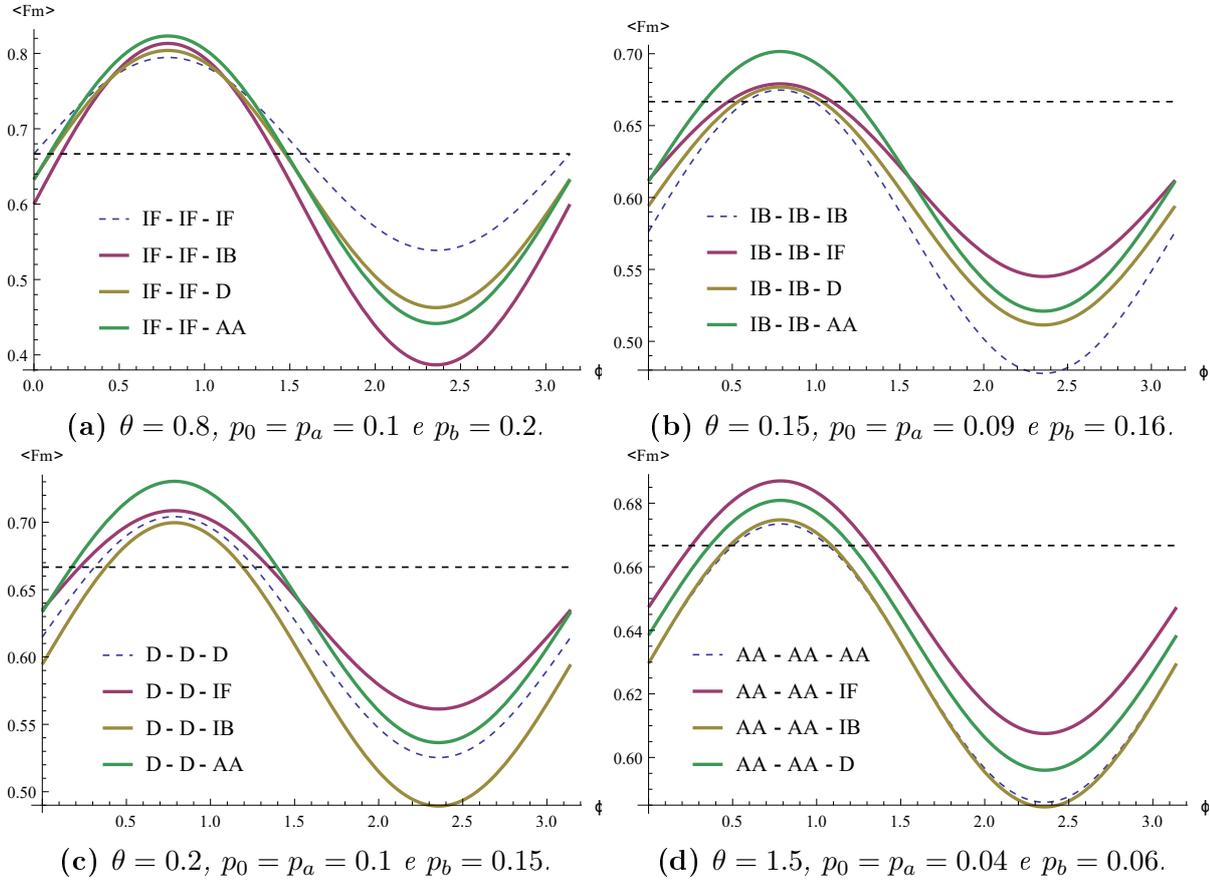


Figura 3.20: Comparação entre modelos que possuem entradas mistas e canais heterogêneos onde o qubit de Alice no canal e o estado de entrada são mantidos inalterados. As figuras exibem os gráficos de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $IF|IF|AA$; (b) $IB|IB|AA$; (c) $D|D|AA$ e (d) $AA|AA|IF$.

Encerraremos este capítulo com dois tipos de análises situadas em cenários mais realistas do que os apresentados nas seções 3.3.2, 3.3.3 e 3.3.3. Suponha que um único meio envolve todo o sistema de Alice, enquanto o *qubit* de Bob é descrito por um mapa independente do primeiro par. Se considerarmos que a decoerência do estado de entrada $\tilde{\rho}_1$ é semelhante à do *qubit* de Alice no canal e adaptarmos as comparações exibidas na seção 3.3.3, obteremos resultados como os das Figs. 3.20a, 3.20b, 3.20c e 3.20d, comprovando que a alteração do ambiente que atua sobre o *qubit* de Bob pode ser vantajosa em relação aos modelos analisados. Repare que os valores assumidos por estas funções e a diferença entre as mesmas assemelham-se ligeiramente aos resultados exibidos respectivamente nas Figs. 3.19a, 3.19b, 3.19c e 3.19d.

Visto que Bob pode determinar o tipo de decoerência mais adequado para melhorar a fidelidade relativa a um determinado procedimento, podemos conceder à Alice liberdade de escolha semelhante. Assim, enquanto o *qubit* de Bob no canal é mantido inalterado, Alice pode adaptar seu sistema para a configuração que julgar conveniente. As

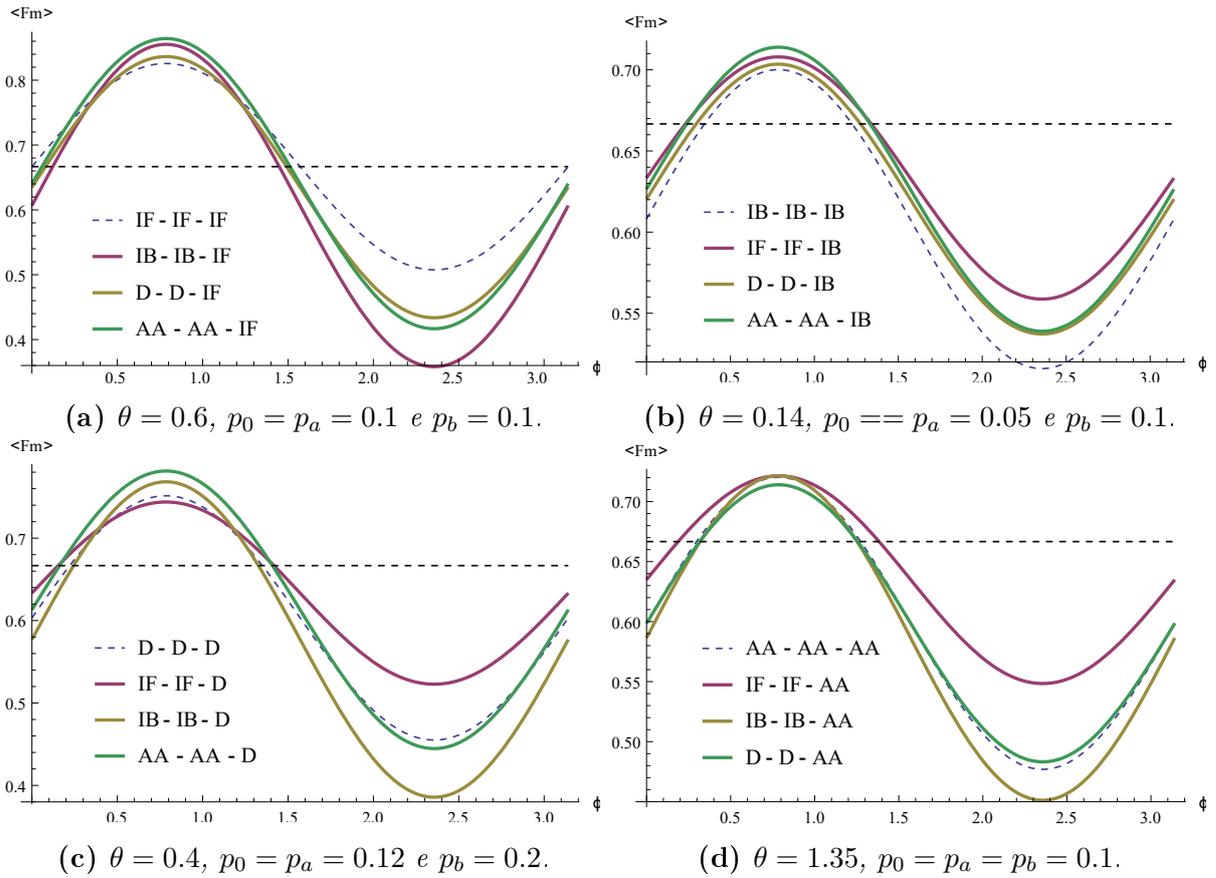


Figura 3.21: Comparação entre modelos que possuem entradas mistas e canais heterogêneos onde o qubit de Bob no canal é mantido inalterado. As figuras exibem os gráficos de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $AA|AA|IF$; (b) $AA|AA|IB$; (c) $AA|AA|D$ e (d) $IF|IF|AA$.

Figs. 3.21a, 3.21b, 3.21c e 3.21d mostram cenários onde o emprego de canais heterogêneos consegue otimizar os procedimentos baseados na ação de um único tipo de ambiente sobre todo o sistema. Com isso, concluímos este capítulo provando que a distribuição de mapas de decoerência distintos em relação ao estado de entrada e ao canal de transmissão de informação pode melhorar a fidelidade de protocolos onde um único mapa atua sobre todo o sistema.

Capítulo 4

Teletransporte Quântico Condicional

O modelo geral de teletransporte quântico introduzido na seção 3.2.1 para descrever os protocolos analisados no capítulo 3 pode ser denominado de "teletransporte quântico direto", visto que os participantes não interferem na execução do processo até que o resultado da medida sobre o sistema de Alice seja revelado. Neste contexto, mostramos que esta informação é obtida de forma aleatória com probabilidade p_i , e que as possibilidades de medidas associadas aos projetores P_i^ϕ estão incluídas no cálculo da fidelidade média e de seu respectivo valor esperado, satisfazendo as condições $\sum P_i^\phi \equiv I$ e $\sum_{i=1}^{i=4} p_i = 1$. Porém, como o resultado de $\bar{F} = \sum_{i=1}^{i=4} p_i F_i$ na Eq. (3.24) depende da distribuição dos valores específicos de $0 < p_i < 1$, a fidelidade total será sempre menor do que o valor máximo associado a uma ou mais funções particulares F_i . Com isso em mente, abordaremos neste capítulo a análise do método de teletransporte condicional, no qual serão considerados apenas os resultados de medidas que maximizem as fidelidades parciais em um mesmo procedimento para investigar funções que superem a fidelidade total associada ao teletransporte direto.

Antes de prosseguir, contudo, é importante revisar as expressões mais relevantes apresentadas nos capítulos anteriores. Assim, suponha inicialmente que o par de qubits de Alice tenha colapsado para algum dos estados da Eq. (3.18). Logo, segundo as Eqs. (2.20) e (3.19), o estado final de Bob será descrito em função de uma medida projetiva específica P_i^ϕ e do sistema global ρ como

$$\rho'_3 = P_i^\phi \rho P_i^\phi / \text{Tr}(\rho P_i^\phi), \quad (4.1)$$

e o cálculo de sua respectiva fidelidade será baseado na comparação entre ρ'_3 e o estado puro da Eq. (3.1) dado por

$$|\Psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1. \quad (4.2)$$

Por sua vez, de acordo com a Eq. (3.25), a ocorrência dos autoestados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ em (4.2) está atrelada aos coeficientes α e β de acordo com as frequências $|\alpha|^2 = x$ e

$|\beta^2| = 1 - x$ tal que

$$|\alpha| = \sqrt{x} \text{ e } |\beta| = \sqrt{1 - x}, \quad (4.3)$$

onde $0 \leq x \leq 1$. Desse modo, de acordo com as Eqs. (2.15) e (2.5), a probabilidade de colapso de ρ'_3 em relação ao projetor P_i^ϕ será equivalente a

$$p_i(x) = \text{Tr}(\rho P_i^\phi), \quad (4.4)$$

e sua fidelidade será dada por

$$F_i(x) = {}_1\langle \Psi | \rho'_3 | \Psi \rangle_1, \quad (4.5)$$

onde o índice i, x indica que (4.4) e (4.5) dependem explicitamente de P_i^ϕ e do valor de x em (4.3).

A idéia central do teletransporte condicional é simples: de posse das informações anteriores, Alice e Bob prosseguirão na execução de um determinado protocolo até o fim somente se o resultado da medida de Alice sobre o primeiro par de *qubits* obedecer à escolha prévia de um estado em particular. Baseando-se neste conceito e nas Eqs. (4.1-4.5), podemos remodelar o protocolo de teletransporte direto e descartar as informações relativas a três das quatro medidas projetivas de Alice, condicionando a realização do processo somente à obtenção do estado desejado. Assim, embora a condição $\sum_{i=1}^{i=4} p_i(x) = 1$ continue sendo válida e esteja implícita em todos os eventos, o cálculo de p_i e F_i em relação aos coeficientes α e β para cada valor de $0 \leq x \leq 1$ será efetuado apenas para o subsistema independente descrito pelo projetor P_i^ϕ . Neste caso, a probabilidade final de sucesso será dada por

$$p_i = \int_{x=0}^{x=1} p_i(x) dx, \quad (4.6)$$

onde $\sum_{i=1}^{i=4} p_i = 1$, e a fidelidade média relativa a um evento particular será igual à própria fidelidade calculada para o estado em questão de forma que

$$\overline{F}_i(x) = F_i(x). \quad (4.7)$$

Por sua vez, de acordo com as Eqs. (3.22) e (4.6), a função que descreve o valor esperado da fidelidade média é fornecida pelo cálculo de

$$\langle \overline{F} \rangle_i = \frac{\int_{x=0}^{x=1} p_i(x) F_i(x) dx}{\int_{x=0}^{x=1} p_i(x) dx} = \frac{\int_{x=0}^{x=1} p_i(x) F_i(x) dx}{p_i}, \quad (4.8)$$

e, com isso, as funções p_i e $\langle \overline{F} \rangle_i$ serão independentes dos valores específicos de $|\alpha|$ e $|\beta|$,

sendo expressas somente em função dos parâmetros que governam as taxas de decoerência sobre o sistema e os graus de emaranhamento do canal e da base de medidas.

Observe que a soma do produto entre as grandezas p_i e $\langle \bar{F} \rangle_i$ da Eq. (4.8) é igual a

$$\sum_{i=1}^{i=4} p_i \langle \bar{F} \rangle_i = \sum_{i=1}^{i=4} \left(\int_{x=0}^{x=1} p_i(x) F_i(x) dx \right) = \int_{x=0}^{x=1} \left(\sum_{i=1}^{i=4} p_i(x) F_i(x) \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \bar{F} dx = \langle \bar{F} \rangle, \quad (4.9)$$

e que, portanto, a média ponderada das fidelidades condicionais associadas aos subsistemas independentes P_i^ϕ é idêntica ao resultado obtido para o valor de $\langle \bar{F} \rangle$ no método de teletransporte direto. Desta forma, a relação exibida na Eq. (4.9) conecta as probabilidades e fidelidades calculadas em ambos os processos e revela que p_i e $\langle \bar{F} \rangle_i$ serão inversamente proporcionais entre si quando o valor de $\langle \bar{F} \rangle$ for mantido constante. As implicações desta propriedade serão fundamentais para a análise dos modelos que desenvolveremos nas próximas seções.

4.1 Entrada Pura em Canais com Decoerência Homogênea e Heterogênea

Tal qual no Capítulo 3, considere novamente que a informação inicial seja descrita pela Eq. (3.30) como

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

e suponha que o sistema de Alice colapse para o estado $\hat{O}_{1,2} = (|\Phi_\phi^+\rangle\langle\Phi_\phi^+|)_{1,2}$ em um processo de teletransporte cujos *qubits* do canal sofrem decoerência homogênea de Inversão de Fase (Eq. (3.29)). Vimos na seção 3.2.2 que a probabilidade associada a este resultado é igual a

$$p_{I,x} = \text{Tr}(\rho P_I^\phi) = |\alpha|^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + |\beta|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi, \quad (4.11)$$

mas, neste caso, vamos considerar apenas a fidelidade parcial implícita no resultado da Eq. (3.33) dada por

$$\bar{F}_{I,x} = \frac{|\alpha|^4 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + |\beta|^4 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + 2|\alpha|^2 |\beta|^2 \left(p_a - \frac{1}{2}\right) \left(p_b - \frac{1}{2}\right) \sin 2\theta \sin 2\phi}{|\alpha|^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + |\beta|^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi}. \quad (4.12)$$

Suponha ainda que o número de repetições deste procedimento seja suficiente para que o parâmetro x relativo aos coeficientes $|\alpha|$ e $|\beta|$ das Eqs. (4.11) e (4.12) assumam todos os valores possíveis dentro do intervalo $0 < x < 1$, e que a conclusão de cada

processo esteja condicionada somente à obtenção do estado $\hat{O}_{1,2} = (|\Phi_\phi^+\rangle\langle\Phi_\phi^+|)_{1,2}$. Logo, segundo as Eqs. (3.27) e (4.4), a probabilidade total associada a este evento é igual a

$$p_I = \int_{x=0}^{x=1} p_{I,x} dx = \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta \cos 2\phi), \quad (4.13)$$

e o cálculo da fidelidade média total através da Eq. (4.8) resulta em

$$\langle \bar{F} \rangle_I = \frac{\int_{x=0}^{x=1} F_{I,x} p_{I,x} dx}{p_I} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{2(p_a - \frac{1}{2})(p_b - \frac{1}{2}) \sin 2\theta \sin 2\phi}{(1 + \cos 2\theta \cos 2\phi)} \right\}. \quad (4.14)$$

Observe que a função calculada em (3.34) e descrita por

$$\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + 2 \left(p_a - \frac{1}{2} \right) \left(p_b - \frac{1}{2} \right) \sin 2\theta \sin 2\phi \right\} \quad (4.15)$$

difere da Eq. (4.14) pela presença do denominador $1 + \cos 2\theta \cos 2\phi$ no último termo, e que ambas serão idênticas apenas se a condição

$$\cos 2\theta \cos 2\phi = 0 \Rightarrow \theta = \pi/4 \text{ ou } \phi = \pi/4 \quad (4.16)$$

for satisfeita. O mesmo argumento pode ser aplicado para as funções associadas aos estados $|\Phi_\phi^-\rangle_{1,2}$, $|\Psi_\phi^+\rangle_{1,2}$ e $|\Psi_\phi^-\rangle_{1,2}$, visto que $\langle \bar{F} \rangle_{IV} = \langle \bar{F} \rangle_I$ e

$$\langle \bar{F} \rangle_{II} = \langle \bar{F} \rangle_{III} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{2(p_a - \frac{1}{2})(p_b - \frac{1}{2}) \sin 2\theta \sin 2\phi}{(1 - \cos 2\theta \cos 2\phi)} \right\}; \quad (4.17)$$

e, portanto, conclui-se que os métodos de teletransporte direto e condicional relativos ao modelo $0|IF|IF$ só serão equivalentes quando o canal e a base de medidas estiverem perfeitamente emaranhados.

Por outro lado, para os cenários que obedecem à condição $\langle \bar{F} \rangle_i \neq \langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, a relação demonstrada na Eq. (4.9) para

$$\langle \bar{F} \rangle = \sum_{i=1}^{i=4} p_i \langle \bar{F} \rangle_i \quad (4.18)$$

prevê que o valor de $\langle \bar{F} \rangle$ será inferior a um dos pares das fidelidades condicionais e superior ao outro quando os valores dos parâmetros destes sistemas forem mantidos fixos. De fato, o cálculo das expressões p_{II} , p_{III} e p_{IV} de modo semelhante ao da Eq. (4.13) revela que

$$p_I = p_{IV} = \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta \cos 2\phi) \text{ e } p_{II} = p_{III} = \frac{1}{4} (1 - \cos 2\theta \cos 2\phi), \quad (4.19)$$

e permite que as fidelidades sejam expressas como

$$\langle \bar{F} \rangle_i = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{(p_a - \frac{1}{2})(p_b - \frac{1}{2}) \sin 2\theta \sin 2\phi}{2p_i} \right\}, \quad (4.20)$$

provando que a condição $\langle \bar{F} \rangle_i > \langle \bar{F} \rangle$ ocorre para $p_i < 1/4$.

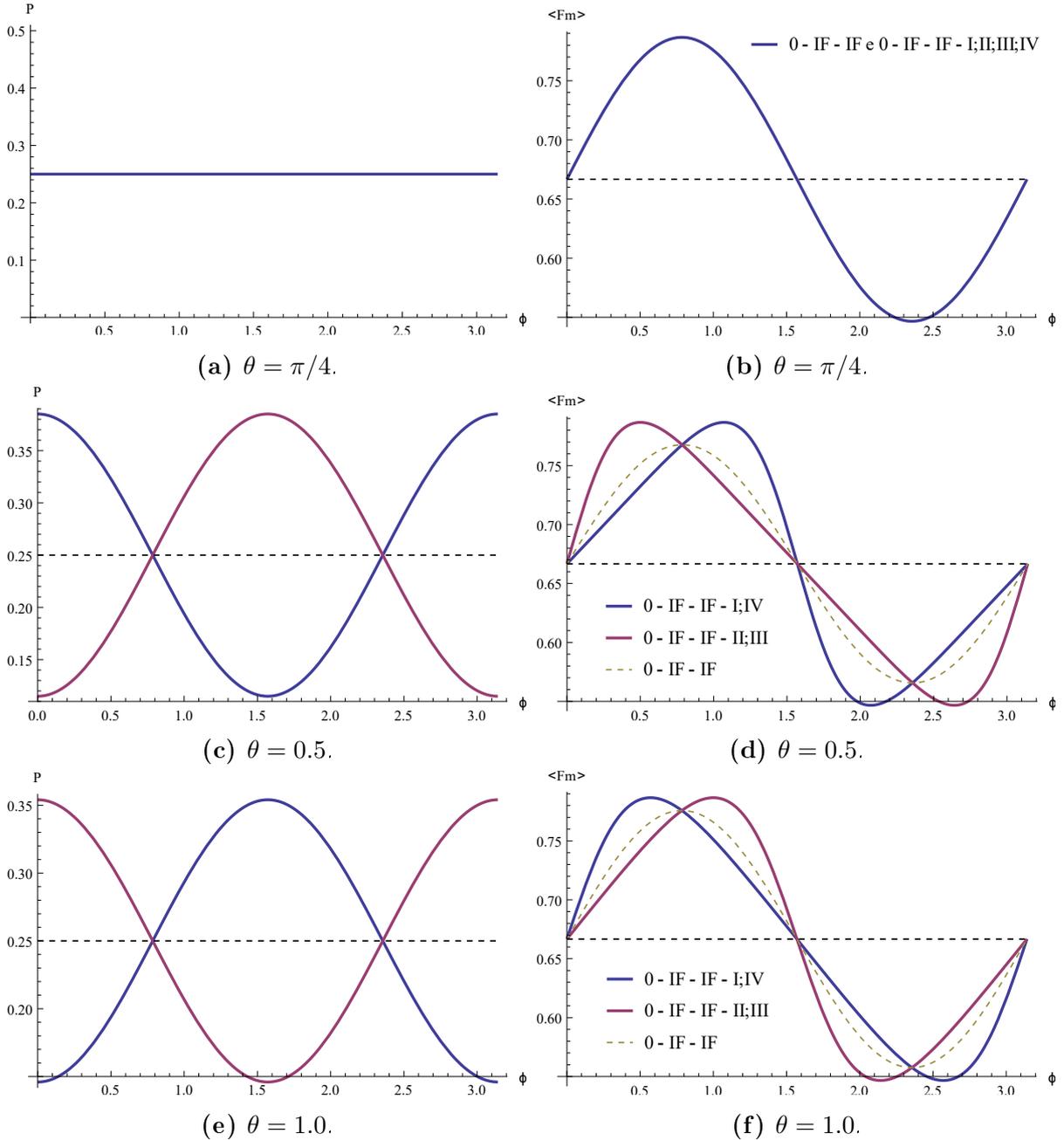


Figura 4.1: Gráficos de p_i (na coluna à esquerda) e $\langle \bar{F} \rangle$ (na coluna à direita) em função de ϕ para $p_a = p_b = 0.2$. As linhas horizontais tracejadas representam respectivamente $p_i = 1/4$ e o limite clássico correspondente à $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Para $\theta = \pi/4$, todas as probabilidades são iguais e a função $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$ é idêntica aos pares $\langle \bar{F} \rangle_I / \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II} / \langle \bar{F} \rangle_{III}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo $0|IF|IF$. Para $\theta \neq \pi/4$, os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais.

Note que as probabilidades parciais da Eq. (4.19) não dependem de p_a e p_b e que as mesmas só serão equivalentes para $\theta = \phi = \pi/4$, tal qual suas respectivas fidelidades condicionais. Como estas classes de funções são inversamente proporcionais entre si, a probabilidade total associada ao par que possui a maior fidelidade é dada por

$$P_{suc} = 2 \times \frac{1}{4} (1 - |\cos 2\theta \cos 2\phi|) = \frac{1}{2} - \frac{|\cos 2\theta \cos 2\phi|}{2}. \quad (4.21)$$

Assim, embora o resultado da Eq. (4.21) não ultrapasse o valor de $1/2$ e seja, portanto, inferior ao valor $P_{suc} = \sum_{i=1}^{i=4} p_i(x) = 1$ associado a teletransportes diretos, a escolha das medidas condicionais relativas a $P_{suc} < 1/2$ não só aumenta a fidelidade média total como economiza recursos práticos quando associada à demanda de menos emaranhamento no canal, como mostram as Figs. 4.1a-4.1f. Repare que as curvas não podem ser distinguidas para $\theta = \pi/4$ e que há simetria reflexiva em torno dos eixos $\phi = \pi/4$ e $\phi = 3\pi/4$ para os pares $\langle \bar{F} \rangle_I / \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II} / \langle \bar{F} \rangle_{III}$ ao longo do intervalo $0 < \phi < \pi$. Observe ainda que p_i e $\langle \bar{F} \rangle_i$ são inversamente proporcionais, como previsto pela Eq. (4.9).

As Eqs. (4.16), (4.19) e (4.21) e os resultados apresentados para o teletransporte condicional do canal $0|IF|IF$ coincidem com os dos modelos de canais com decoerência parcial (Eq. (3.64)) quando o *qubit* de Bob sofre a ação dos mapas de Inversão de Fase, Inversão de Bit e Despolarização. Para o canal $0|0|IF$, por exemplo, as fidelidades parciais expressas por

$$\langle \bar{F} \rangle_i = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \frac{(p_b - \frac{1}{2}) \sin 2\theta \sin 2\phi}{(1 \pm \cos 2\theta \cos 2\phi)} \right\}, \quad (4.22)$$

onde os sinais $+$ e $-$ definem respectivamente as funções $\langle \bar{F} \rangle_I = \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II} = \langle \bar{F} \rangle_{III}$, só podem ser idênticas à Eq. (3.65) onde

$$\langle \bar{F} \rangle_{0|0|IF} = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(p_b - \frac{1}{2} \right) \sin 2\theta \sin 2\phi \right\} \quad (4.23)$$

se $\theta = \phi = \pi/4$. Este resultado é válido para todos os modelos que não possuem a presença do mapa de Atenuação de Amplitude no estado de entrada ou nos *qubits* do canal, e o comportamento exibidos pelas curvas das fidelidades parciais destes cenários é idêntico ao das Figs. 4.1b, 4.1d e 4.1f.

Por outro lado, compare a fidelidade obtida na Eq. (3.68) e descrita por

$$\langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA} = \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(-p_b \sin^2 \theta + \sqrt{(1-p_b)} \sin 2\theta \sin 2\phi \right) \right\} \quad (4.24)$$

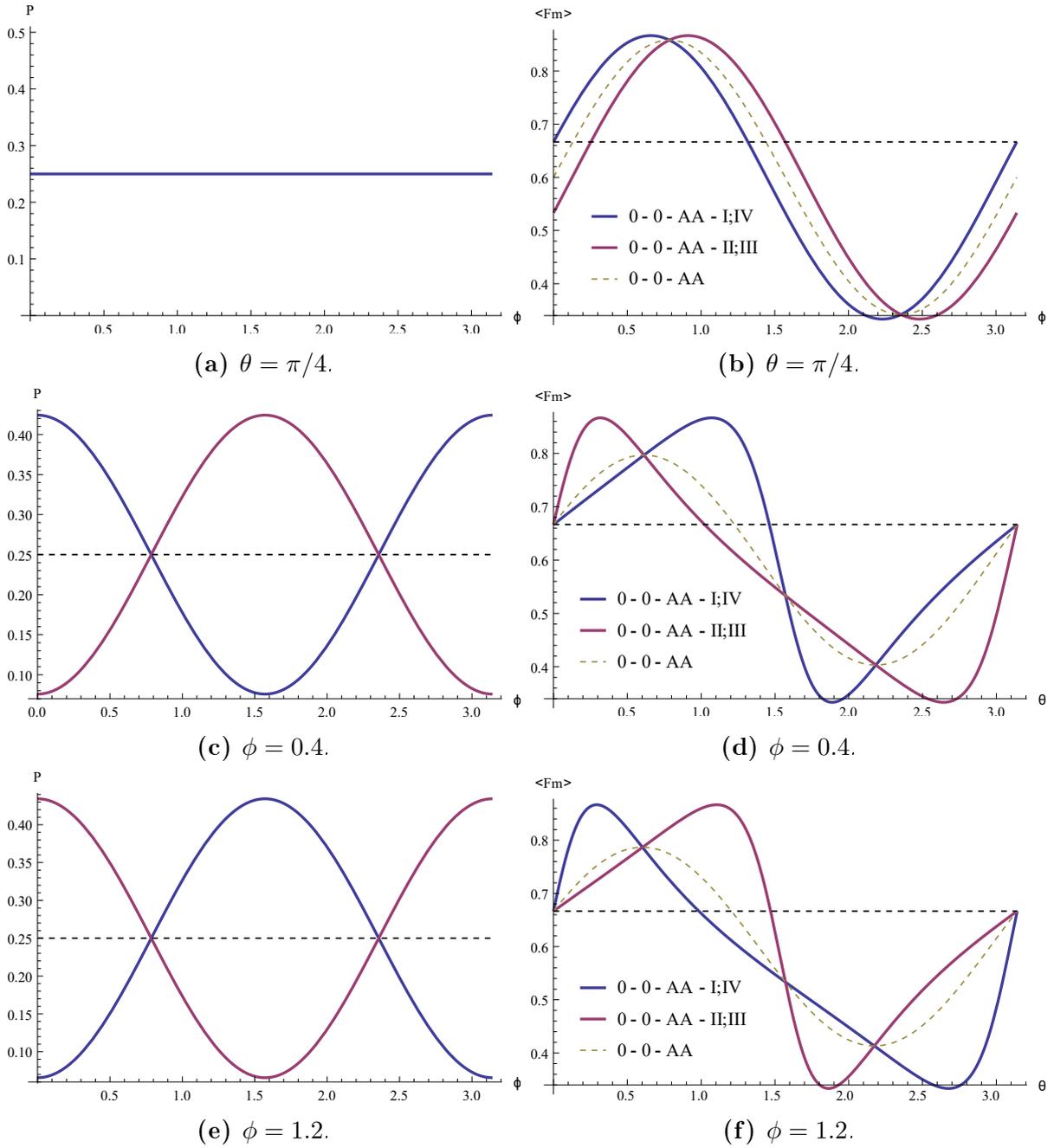


Figura 4.2: Gráficos de p_i (na coluna à esquerda) e $\langle \bar{F} \rangle$ (na coluna à direita) em função de (a-b) ϕ e (c-f) θ para $p_a = p_b = 0.2$. As linhas horizontais tracejadas representam respectivamente $p_i = 1/4$ (à esquerda) e o limite clássico correspondente à $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$ (à direita). Para $\theta = \pi/4$, todas as probabilidades são iguais, embora a função $\langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA}$ e os pares $\langle \bar{F} \rangle_I / \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II} / \langle \bar{F} \rangle_{III}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo $0|0|AA$ exibam comportamentos distintos. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais.

com as expressões relativas ao canal $0|0|AA$ dadas por

$$\langle \bar{F} \rangle_i = \frac{2}{3} \left\{ \frac{2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + (2 - p_b) \sin^2 \theta \sin^2 \phi + (1/2) \sqrt{(1 - p_b) \sin 2\theta \sin 2\phi}}{(1 \pm \cos 2\theta \cos 2\phi)} \right\}, \quad (4.25)$$

onde os sinais $+$ e $-$ referem-se respectivamente a $i = I, IV$ e $i = II, III$. Como a solução de $\langle \bar{F} \rangle_i \equiv \langle \bar{F} \rangle_{0|0|AA}$ só é satisfeita para $\phi = \pi/4$ e $\theta = \pi/2$ (condição na qual não há emaranhamento no canal), um dos pares das fidelidades condicionais sempre estará situado acima da curva relativa ao teletransporte direto para $0 < \theta < \pi/2$ e $\phi \neq \pi/4$. As Figs. 4.2b, 4.2d e 4.2f mostram que a ausência de simetria em relação ao parâmetro θ - característica de modelos que possuem a presença do mapa AA em pelo menos um dos *qubits* do canal - também se manifesta na comparação entre as fidelidades parciais, e, conseqüentemente, o mesmo padrão é encontrado nos modelos de teletransporte condicional para os canais $0|AA|AA$, $0|IF|AA$, $0|IB|AA$, $0|D|AA$, $0|AA|IF$ e $0|AA|IB$ e $0|AA|D$.

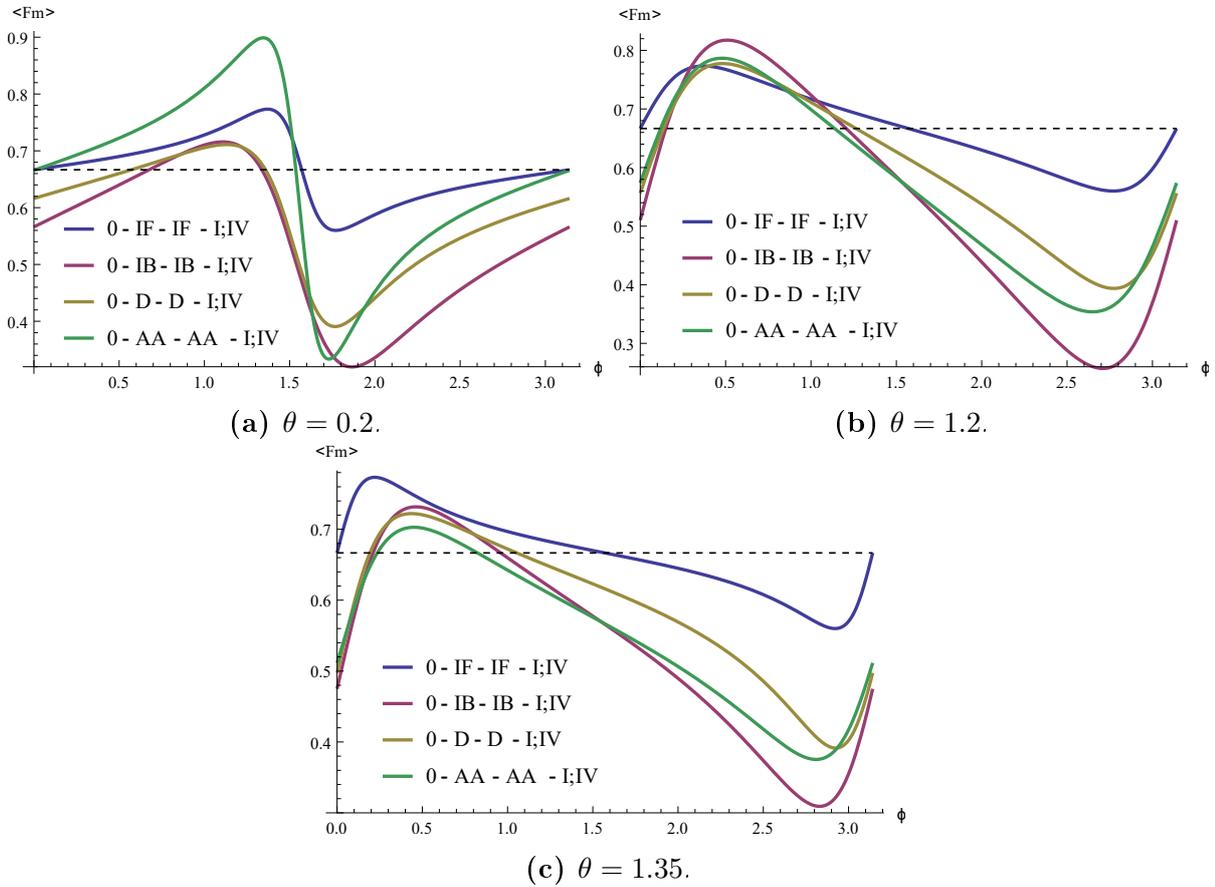


Figura 4.3: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $p_a = 0.1$ e $p_b = 0.3$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente às medidas de $|\Phi_\phi^+\rangle$ e $|\Psi_\phi^-\rangle$ relativas ao teletransporte condicional dos modelos $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais dos modelos (a) $0|AA|AA$, (b) $0|IB|IB$; $0|IF|IF$ e (c) $0|IF|IF$.

A simetria observada para as fidelidades parciais dos modelos $0|0|X$ e $0|X|X$ em relação ao parâmetro ϕ permite que canais distintos sejam comparados em análises semelhantes às discutidas na seção 3.3.1 nos cenários em que estas funções descrevem os resultados obtidos para uma medida projetiva P_i^ϕ em comum. As Figs. 4.3a-4.3c ilustram esta idéia ao comparar as fidelidades relativas às medidas de $|\Phi_\phi^+\rangle$ e $|\Psi_\phi^-\rangle$ entre os modelos

$\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$, $\langle \bar{F} \rangle_{0|D|D}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{0|AA|AA}$ para o mesmo conjunto de parâmetros utilizados nas Figs. 3.9a-3.9c. Note que o padrão inicial relativo à ordem entre as curvas é mantido, embora o valor máximo de cada função oscile entre pontos distantes dos eixos $\phi = \pi/4$ e $\phi = 3\pi/4$. Em particular, quando θ ou ϕ assumem estes valores, devemos observar resultados idênticos aos obtidos em teletransportes diretos.

4.2 Entrada Mista em Canais com Decoerência Homogênea e Heterogênea

Os resultados da comparação entre as fidelidades parciais dos modelos de teletransporte condicional que possuem entrada mista não diferem dos apresentados na seção 4.1 se a decoerência sobre o estado de entrada for descrita pelos mapas de Inversão de Fase, Inversão de Bit ou Despolarização. Por sua vez, os modelos onde o processo de Atenuação de Amplitude atua sobre o *qubit* inicial geram funções unívocas para as fidelidades condicionais $\langle \bar{F} \rangle_i$ e, portanto, suas propriedades devem ser analisadas individualmente.

Este fenômeno interessante pode ser visto nas Figs. 4.4a-4.4f na simulação do modelo condicional $AA|IF|IF$: observe que as funções $\langle \bar{F} \rangle_I$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II}$ alternam-se respectivamente com as curvas relativas a $\langle \bar{F} \rangle_{II}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{III}$ na transição entre $\theta < \pi/4$ e $\theta > \pi/4$ e que todas as fidelidades parciais superam o valor máximo da curva descrita pela função $\langle \bar{F} \rangle_{AA|IF|IF}$. Repare ainda que a sobreposição em pares volta a ocorrer para $\theta = \pi/4$ e $\phi = \pi/4$, embora com uma ligeira diferença: para a última condição, são as curvas relativas às medidas de $|\Phi_\phi^+\rangle$ e $|\Psi_\phi^+\rangle$ que coincidem respectivamente com as funções $|\Phi_\phi^-\rangle$ e $|\Psi_\phi^-\rangle$ (Figs. 4.5a e 4.5b). Os resultados deste exemplo são compatíveis com todos os protocolos de estados mistos do tipo $AA|X|Y$, onde $\{X; Y\} \in \{IF, IB, D\}$.

Considere agora um protocolo de teletransporte condicional onde o mapa de Atenuação de Amplitude esteja presente sobre o estado original e em pelo menos um dos *qubits* do canal. Além de gerar funções independentes para cada uma das fidelidades parciais, modelos deste tipo não apresentarão qualquer superposição entre as curvas quando o canal for maximamente emaranhado. Este fato pode ser observado nas Figs. 4.6a-4.6f, onde as funções $\langle \bar{F} \rangle_I$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II}$ só coincidem respectivamente com $\langle \bar{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{III}$ para $\theta \approx 0.96$ (Figs. 4.6c e 4.6d).

Por sua vez, o teletransporte condicional do modelo $IB|IB|IB$ herda propriedades semelhantes às discutidas no início da seção 3.3.2. Independentemente do grau de emaranhamento do canal, o gráfico de uma das fidelidades parciais de $\langle \bar{F} \rangle_{IB|IB|IB}$ irá sobrepujar integralmente a função $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$ relativa à mesma medida condicional sempre que as relações $p_a > 1/2$ e $p_b < 1/2$ (ou o inverso) forem satisfeitas, e a distância entre ambas será favorecida com o aumento de p_0 . A Fig. 4.7 ilustra um exemplo para $\theta = 0.5$ e os mesmos valores de p_0 , p_a e p_b exibidos na Fig. 3.12.

Para finalizar, retomaremos o argumento utilizado nas Figs. 4.3a, 4.3b e 4.3c na comparação entre modelos que possuem canais mistos de naturezas distintas.

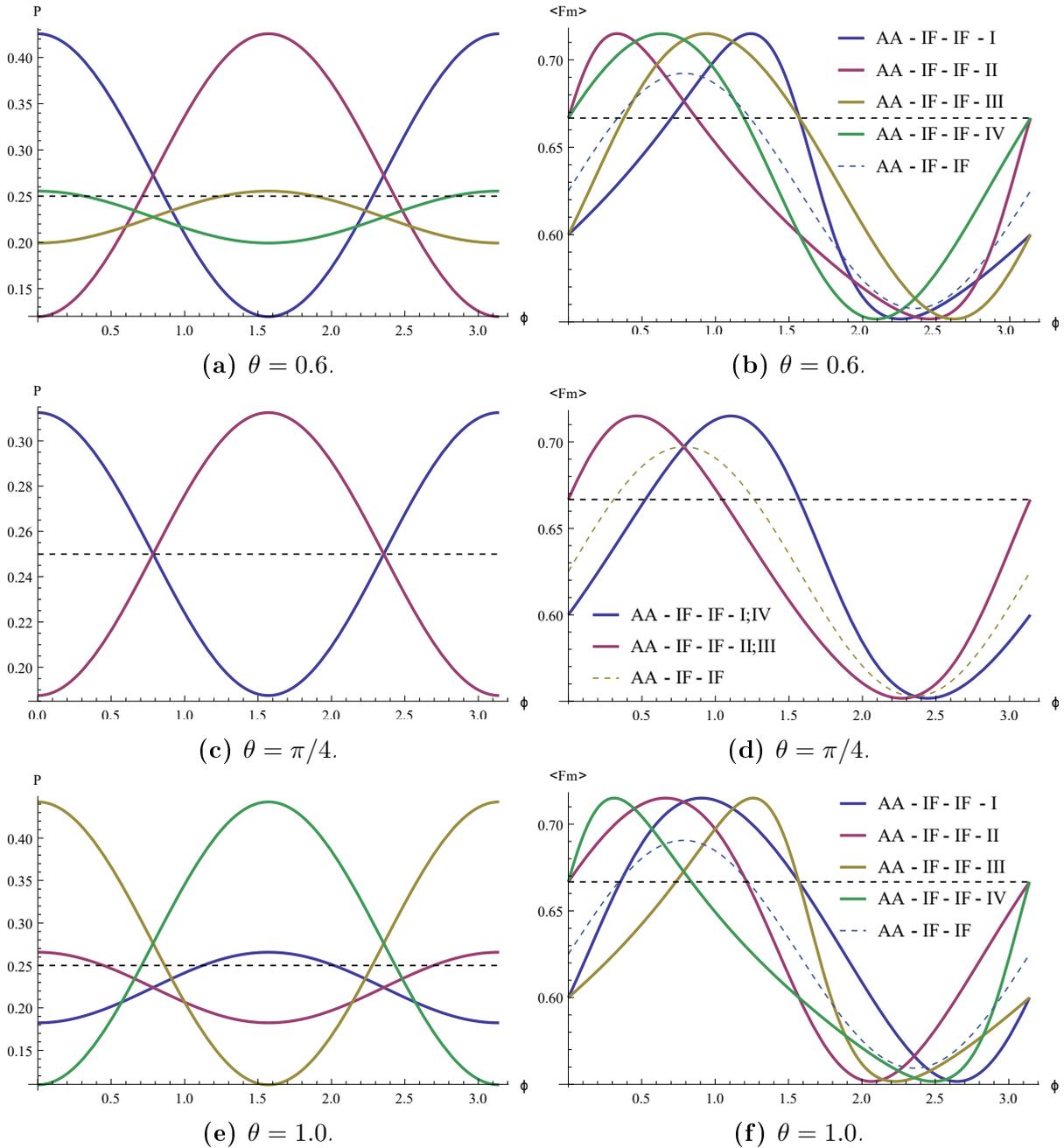


Figura 4.4: Gráficos de p_i (na coluna à esquerda) e $\langle \overline{F} \rangle$ (na coluna à direita) em função de ϕ para $p_0 = p_a = p_b = 0.25$. As linhas horizontais tracejadas representam respectivamente $p_i = 1/4$ (à esquerda) e o limite clássico correspondente à $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$ (à direita). Para $\phi \neq \pi/4$ e $\theta \neq \pi/4$, as quatro fidelidades condicionais são distintas. Para $\theta = \pi/4$, a função $\langle \overline{F} \rangle_{AA|IF|IF}$ e os pares $\langle \overline{F} \rangle_I / \langle \overline{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \overline{F} \rangle_{II} / \langle \overline{F} \rangle_{III}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo $AA|IF|IF$ exibem comportamentos distintos. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais.

As Figs. 4.8a e 4.8b exibem as fidelidades relativas às medidas de $|\Phi_\phi^+\rangle$ e $|\Psi_\phi^-\rangle$ para quatro sistemas diferentes e apresentam resultados semelhantes aos das Figs. 3.17a e 3.18a, comprovando a eficácia das trocas em relação ao modelo $IF|IF|IF$ por outros tipos de canal com decoerência homogênea ou pela alteração do estado de entrada ρ_1' .

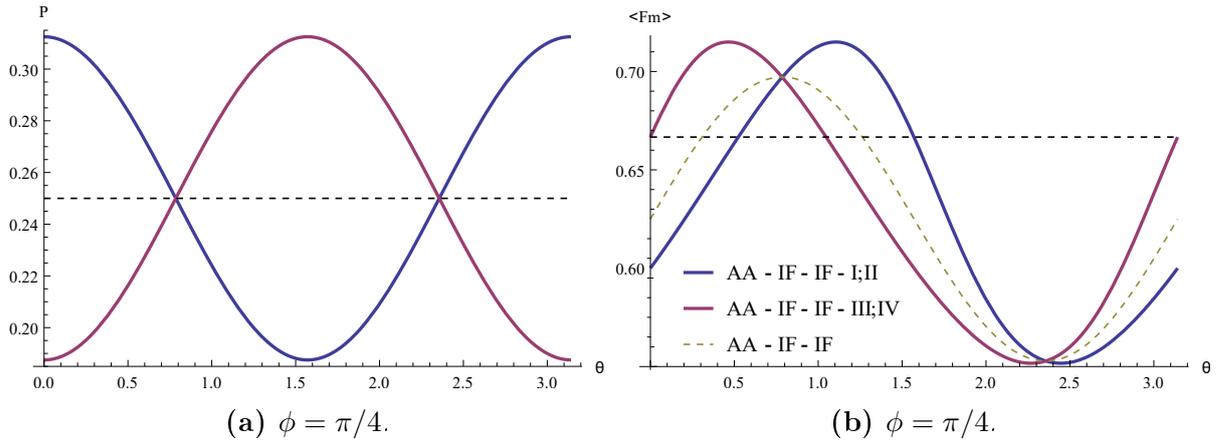


Figura 4.5: Gráficos de p_i (na coluna à esquerda) e $\langle \bar{F} \rangle$ (na coluna à direita) em função de θ para $p_0 = p_a = p_b = 0.25$. As linhas horizontais tracejadas representam respectivamente $p_i = 1/4$ (à esquerda) e o limite clássico correspondente à $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$ (à direita). Para $\phi \neq \pi/4$ e $\theta \neq \pi/4$, as quatro fidelidades condicionais são distintas. Para $\phi = \pi/4$, a função $\langle \bar{F} \rangle_{AA|IF|IF}$ e os pares $\langle \bar{F} \rangle_I / \langle \bar{F} \rangle_{II}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{III} / \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo $AA|IF|IF$ exibem comportamentos distintos. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais.

Nas Figs. 4.8c e 4.8d, por sua vez, a comparação do modelo $IF|IF|IF$ com alterações envolvendo respectivamente os *qubits* de Alice ou de Bob para sistemas de canais com decoerência heterogênea mostra que estas alterações se revelam vantajosas através de resultados semelhantes aos obtidos nas Figs. 3.20a e 3.21a.

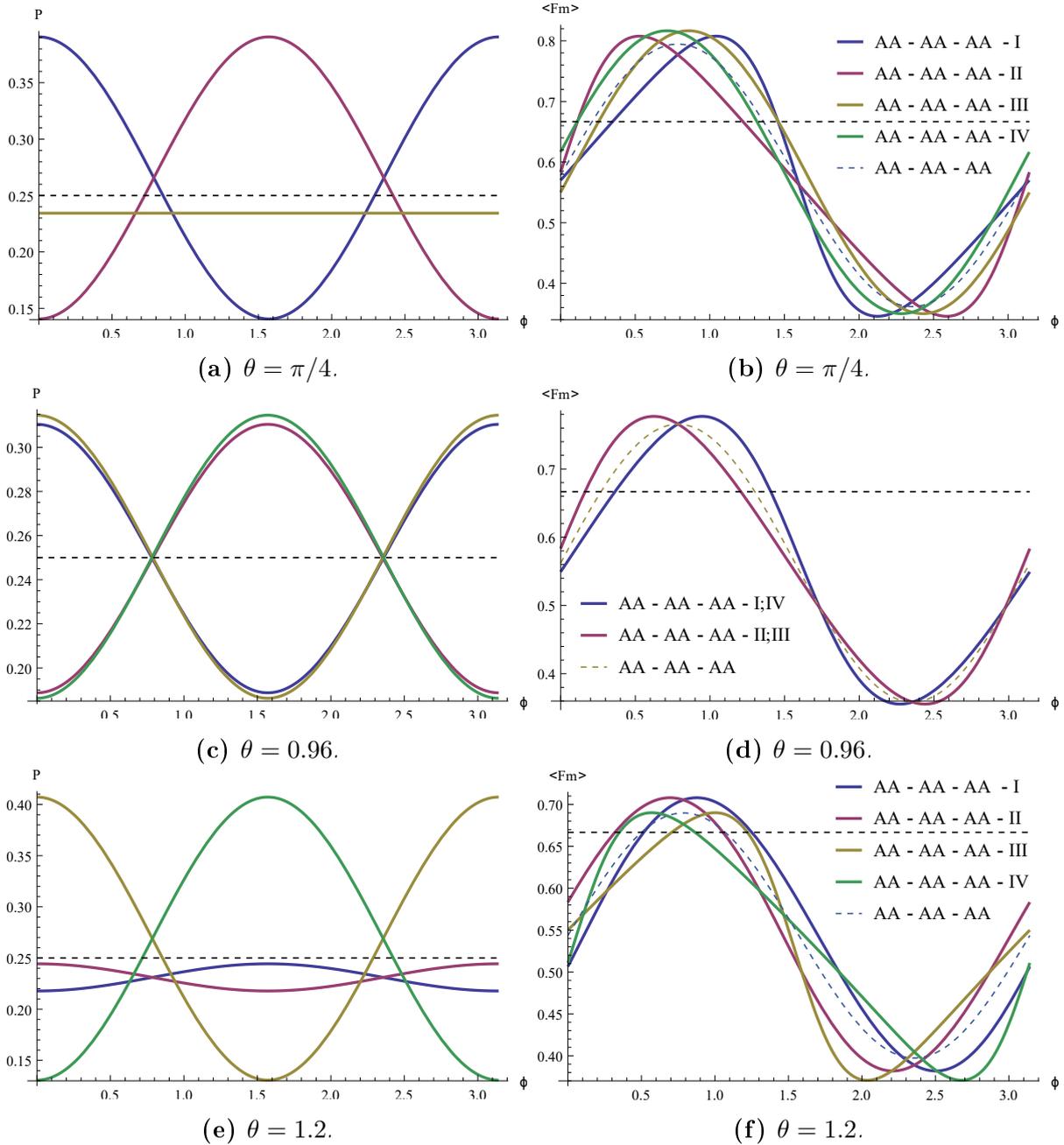


Figura 4.6: Gráficos de p_i (na coluna à esquerda) e $\langle \overline{F} \rangle$ (na coluna à direita) em função de ϕ para $p_0 = p_a = p_b = 0.25$. As linhas horizontais tracejadas representam respectivamente $p_i = 1/4$ (à esquerda) e o limite clássico correspondente à $\langle \overline{F} \rangle = 2/3$ (à direita). Para $\phi \neq \pi/4$ e $\theta \neq 0.96$, as quatro fidelidades condicionais são distintas. Para $\theta \approx 0.96$, a função $\langle \overline{F} \rangle_{AA|AA|AA}$ e os pares $\langle \overline{F} \rangle_I / \langle \overline{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \overline{F} \rangle_{II} / \langle \overline{F} \rangle_{III}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo $AA|AA|AA$ exibem comportamentos distintos. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais.

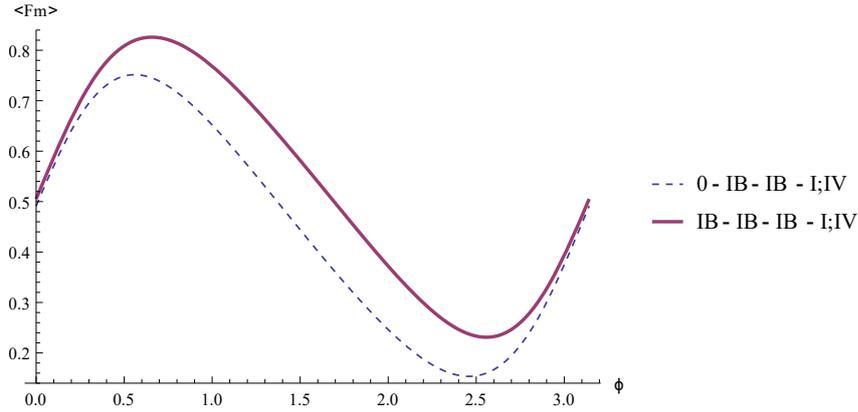
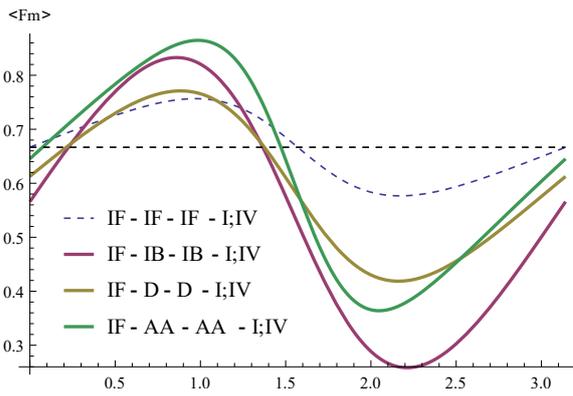
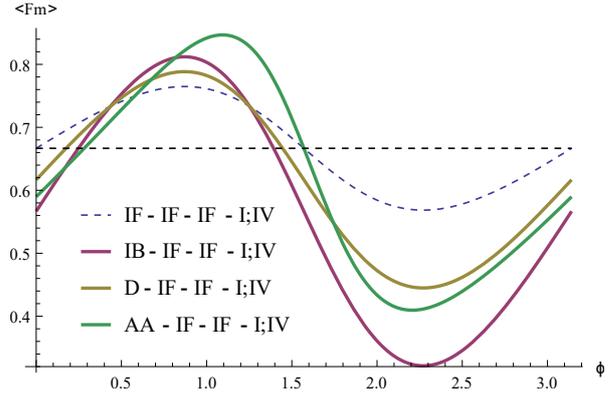


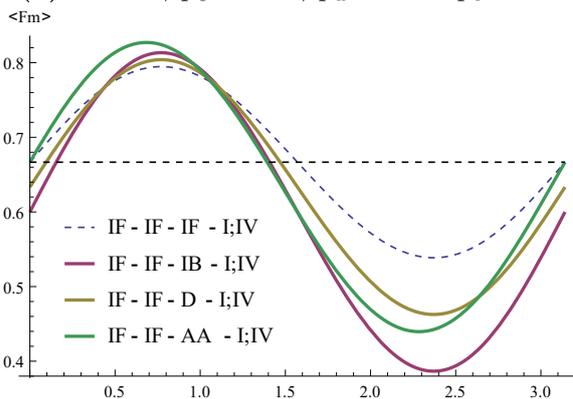
Figura 4.7: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ para $\theta = 0.5$, $p_0 = p_a = 0.8$ e $p_b = 0.2$. As cores azul e vermelha referem-se respectivamente às medidas de $|\Phi_\phi^+\rangle$ e $|\Psi_\phi^-\rangle$ relativas ao teletransporte condicional dos modelos $\langle \bar{F} \rangle_{0|IB|IB}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{IB|IB|IB}$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados às fidelidades condicionais do modelo $IB|IB|IB$.



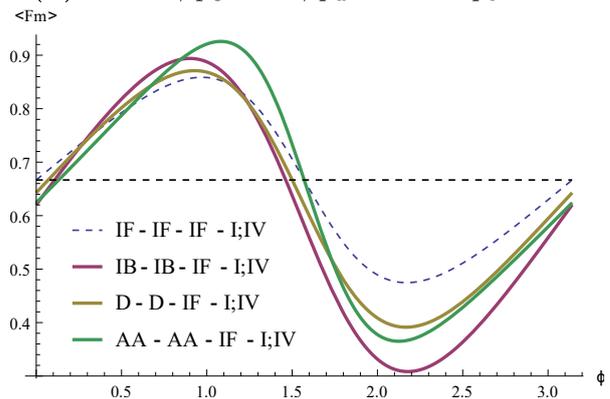
(a) $\theta = 0.6$, $p_0 = 0.05$, $p_a = 0.2$ e $p_b = 0.25$.



(b) $\theta = 0.7$, $p_0 = 0.3$, $p_a = 0.05$ e $p_b = 0.1$.



(c) $\theta = 0.8$, $p_0 = p_a = 0.1$ e $p_b = 0.2$.



(d) $\theta = 0.6$, $p_0 = p_a = 0.1$ e $p_b = 0.05$.

Figura 4.8: Comparação entre modelos com entradas mistas em diversos cenários: (a) canais homogêneos onde o estado de entrada é mantido inalterado; (b) canais homogêneos onde o canal é mantido inalterado; (c) canais heterogêneos onde o qubit de Alice no canal e o estado de entrada são mantidos inalterados e (d) canais heterogêneos onde o qubit de Bob no canal é mantido inalterado. As figuras exibem os gráficos de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de ϕ e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. Os melhores resultados estão associados respectivamente aos modelos (a) $IF|AA|AA$; (b) $AA|IF|IF$; $IB|IF|IF$; (c) $IF|IF|AA$ e (d) $AA|AA|IF$; $IB|IB|IF$.

Capítulo 5

Teletransporte Quântico em Cadeias de Spin

Os mecanismos de decoerência que atuam sobre sistemas arbitrários de dois níveis (seção 2.1) abordados nos capítulos 3 e 4 são baseados em observações experimentais, e, por isso, os resultados apresentados para $\langle \bar{F} \rangle$ podem ser obtidos em fenômenos físicos completamente distintos se as grandezas associadas aos *qubits* forem adequadas para o cenário em questão. Todavia, embora a ação do ambiente seja descrita pelo formalismo dos operadores de Kraus, mostramos na seção 2.11 que é possível simplificar a análise da decoerência sobre um sistema puro em equilíbrio térmico com um ambiente externo quando a descrição do Hamiltoniano deste sistema incluir a temperatura de equilíbrio do meio. Cenários como estes são encontrados em regimes específicos de determinados materiais (como em um gás de partículas fracamente interagentes confinadas em um recipiente fechado), e o estado final do sistema é descrito pela Eq. (2.224) como

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H}{kT}}, \quad (5.1)$$

onde Z é a função de partição que inclui as probabilidades associadas às possíveis configurações dos microestados deste sistema, H é o Hamiltoniano que define a dinâmica destes constituintes, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura de equilíbrio do meio.

O propósito central deste capítulo consiste em mostrar que é possível manipular um estado como o da Eq. (5.1) que possua um Hamiltoniano pré-determinado para construir um canal de teletransporte quântico misto e, com isso, investigar regimes onde a fidelidade total possa ser melhorada com o controle adequado dos parâmetros intrínsecos em H e ρ . Para isso, utilizaremos apenas sistemas de spin 1/2, e consideraremos que o Hamiltoniano total pode ser aproximado pela soma da interação entre átomos vizinhos numa cadeia de *spins* segundo o modelo de Heisenberg dado por

$$H^{A,B} = j_x(S_x^A \otimes S_x^B) + j_y(S_y^A \otimes S_y^B) + j_z(S_z^A \otimes S_z^B) + h_{z_a}(S_z^A \otimes I^B) + h_{z_b}(I^A \otimes S_z^B), \quad (5.2)$$

onde os índices A e B referem-se a átomos adjacentes, $S_i = (\hbar/2)\sigma_i$, j_x , j_y e j_z representam

as constantes de acoplamento entre os *spins* destes subsistemas e h_{z_a} e h_{z_b} denotam a presença de campos magnéticos externos direcionados de forma independente para cada átomo.

Neste contexto, portanto, podemos analisar um par de átomos que esteja termalizado com o ambiente externo e identificá-lo como um canal quântico misto descrito por

$$\rho'^{A,B} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\mathbf{H}^{A,B}}{kT}}, \quad (5.3)$$

e, para fins de simplicidade, assumiremos que a constante \hbar estará implícita nos valores dos parâmetros j_x , j_y e j_z e que os campos magnéticos podem ser regulados para atuar com a mesma intensidade sobre cada *qubit* tal que $h_{z_a} = h_{z_b} = h_z$. Desta forma, a Eq. (5.2) é reduzida a

$$H^{A,B} = \frac{j_x}{4}(\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B) + \frac{j_y}{4}(\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B) + \frac{j_z}{4}(\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B) + \frac{h_z}{2}(\sigma_z^A \otimes I^B + I^A \otimes \sigma_z^B), \quad (5.4)$$

e, com o auxílio das notações $\Sigma \equiv j_x + j_y$ e $\Delta \equiv j_x - j_y$, podemos escrever a matriz associada a $H^{A,B}$ na Eq. (5.4) como

$$H^{A,B} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} \frac{j_z}{4} + h_z & 0 & 0 & \frac{\Delta}{4} \\ 0 & -\frac{j_z}{4} & \frac{\Sigma}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\Sigma}{4} & -\frac{j_z}{4} & 0 \\ \frac{\Delta}{4} & 0 & 0 & \frac{j_z}{4} - h_z \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Se introduzirmos a notação $\eta \equiv \sqrt{16h_{z_a}^2 + \Delta^2}$, os autovalores de (5.5) serão descritos por

$$s_{u_0} = \frac{j_z + \eta}{4}, \quad s_{u_1} = \frac{j_z - \eta}{4}, \quad s_{u_2} = \frac{\Sigma - j_z}{4} \quad \text{e} \quad s_{u_3} = -\frac{\Sigma + j_z}{4}, \quad (5.6)$$

os quais, por sua vez, estarão associados aos respectivos vetores não normalizados

$$|\tilde{\varphi}^+\rangle_{a,b} = \left(\frac{4h_z + \eta}{\Delta} \right) |00\rangle_{a,b} + |11\rangle_{a,b}, \quad |\tilde{\varphi}^-\rangle_{a,b} = \left(\frac{4h_z - \eta}{\Delta} \right) |00\rangle_{a,b} + |11\rangle_{a,b} \quad (5.7)$$

e aos estados $|\Psi^+\rangle_{a,b}$ e $|\Psi^-\rangle_{a,b}$ da base de Bell apresentada em (2.127). Logo, os autoestados de $H^{A,B}$ podem ser relacionados à base ortonormal definida por

$$|u_0\rangle = \frac{|\tilde{\varphi}^+\rangle_{a,b}}{|\tilde{\varphi}^+\rangle_{a,b}}, \quad |u_1\rangle = \frac{|\tilde{\varphi}^-\rangle_{a,b}}{|\tilde{\varphi}^-\rangle_{a,b}}, \quad |u_2\rangle = |\Psi^+\rangle_{a,b} \quad \text{e} \quad |u_3\rangle = |\Psi^-\rangle_{a,b}, \quad (5.8)$$

onde $|\tilde{\varphi}^+\rangle_{a,b} = \sqrt{\left(\frac{4h_z + \eta}{\Delta}\right)^2 + 1}$ e $|\tilde{\varphi}^-\rangle_{a,b} = \sqrt{\left(\frac{4h_z - \eta}{\Delta}\right)^2 + 1}$.

Por sua vez, segundo a Eq. (2.221), o canal de teletransporte $\rho'^{A,B}$ pode ser

representado em função dos estados $|u_{g_i}\rangle$ de (5.8) pela matriz dada por

$$\rho'^{A,B} = \left(\frac{1}{Z} e^{-\frac{su_i}{kT}}\right) |u_{g_i}\rangle\langle u_{g_i}| = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} e^{-\frac{jz+\eta}{kT}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{jz-\eta}{kT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{-\Sigma+jz}{kT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{\Sigma+jz}{kT}} \end{bmatrix},$$

onde $Z = 2 \left\{ e^{\frac{jz}{4kT}} \cosh\left(\frac{\Sigma}{4kT}\right) + e^{-\frac{jz}{4kT}} \cosh\left(\frac{\eta}{4kT}\right) \right\}$. (5.9)

Deste modo, quando os projetores $|u_{g_i}\rangle\langle u_{g_i}|$ forem decompostos em função da base computacional padrão de forma semelhante ao procedimento utilizado na Eq. (2.230), a estrutura final do canal será descrita nesta base por

$$\rho'^{A,B} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} e^{-\tau} \left\{ \cosh(\chi) - \left(\frac{4h_z}{\eta}\right) \sinh(\chi) \right\} & 0 & 0 & \left(\frac{\Delta}{\eta}\right) e^{-\tau} \sinh(\chi) \\ 0 & e^{\tau} \cosh(\omega) & -e^{\tau} \sinh(\omega) & 0 \\ 0 & -e^{\tau} \sinh(\omega) & e^{\tau} \cosh(\omega) & 0 \\ \left(\frac{\Delta}{\eta}\right) e^{-\tau} \sinh(\chi) & 0 & 0 & e^{-\tau} \left\{ \cosh(\chi) + \left(\frac{4h_z}{\eta}\right) \sinh(\chi) \right\} \end{bmatrix},$$

(5.10)

onde $\tau = \frac{jz}{4kT}$, $\omega = \frac{\Sigma}{4kT}$ e $\chi = \frac{\eta}{4kT}$.

Com isso, para construir mecanismos de teletransporte com canais semelhantes ao modelo da Eq. (5.10), basta escolher um cenário físico específico e atribuir valores para os parâmetros contidos na Eq. (5.5). Se aplicarmos os métodos apresentados na seção 3.2.2 para o estado de entrada puro arbitrário da Eq. (3.30), o valor esperado da fidelidade média total para o caso geral será dado pela função

$$\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,Z,h_z} = \frac{e^{2\tau} \eta \{ \cosh(\omega) - \sin(2\phi) \sinh(\omega) \} - \Delta \sin(2\phi) \sinh(\chi) + 2\eta \cosh(\chi)}{3\eta \{ \cosh(\chi) + e^{2\tau} \cosh(\omega) \}},$$

(5.11)

o que, por sua vez, possibilita que a fidelidade relativa a cada modelo seja analisada diretamente em função dos parâmetros ϕ , τ , ω e χ .

5.1 Teletransporte Direto

5.1.1 O Modelo XY

O modelo XY é utilizado para descrever a Eq. (5.3) em cenários onde os *spins* dos *qubits* interagem em pares através de acoplamentos anisotrópicos restritos ao plano XY. Embora os autoestados $|u_{g_i}\rangle$ definidos na Eq. (5.8) permaneçam inalterados para este modelo, as condições $j_x \neq j_y$ e $j_z = 0$ implicam que o operador Hamiltoniano $H^{A,B}$ e seus autovalores exibidos respectivamente nas Eqs. (5.4) e (5.6) sejam expressos

como

$$\begin{aligned}
H^{A,B} &= \frac{j_x}{4} (\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B) + \frac{j_y}{4} (\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B) + \frac{h_z}{2} (\sigma_z^A \otimes I^B + I^A \otimes \sigma_z^B) \\
&= \begin{bmatrix} h_z & 0 & 0 & \frac{\Delta}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\Sigma}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\Sigma}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\Delta}{4} & 0 & 0 & -h_z \end{bmatrix} e \\
s_{u_0} &= \eta/4, \quad s_{u_1} = -\eta/4, \quad s_{u_2} = \Sigma/4 \quad e \quad s_{u_3} = -\Sigma/4.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Repare que não há degenerescência entre os autovalores s_{u_i} , visto que $\{j_x; j_y\} \neq 0$.

Segundo as Eqs. (5.9) e (5.10), a representação do canal de teletransporte $\rho'^{A,B}$ na base dos autoestados de $H^{A,B}$ como

$$\rho'^{A,B} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} e^{-\frac{\eta}{4kT}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{\eta}{4kT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{\Sigma}{4kT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{\Sigma}{4kT}} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

fornece a função de partição dada por $Z = 2 \left\{ \cosh\left(\frac{\Sigma}{4kT}\right) + \cosh\left(\frac{\eta}{4kT}\right) \right\}$, e, por sua vez, a conversão de (5.13) para a base computacional como

$$\rho'^{A,B} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} \cosh(\chi) - \left(\frac{4h_z}{\eta}\right) \sinh(\chi) & 0 & 0 & \left(\frac{\Delta}{\eta}\right) \sinh(\chi) \\ 0 & \cosh(\omega) & \sinh(\omega) & 0 \\ 0 & \sinh(\omega) & \cosh(\omega) & 0 \\ \left(\frac{\Delta}{\eta}\right) \sinh(\chi) & 0 & 0 & \cosh(\chi) + \left(\frac{4h_z}{\eta}\right) \sinh(\chi) \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

e sua respectiva aplicação em protocolos que utilizam entradas puras gera a função

$$\langle \overline{F} \rangle_{X,Y,h_z} = \frac{\eta \{ \cosh(\omega) - \sin(2\phi) \sinh(\omega) \} - \Delta \sin(2\phi) \sinh(\chi) + 2\eta \cosh(\chi)}{3\eta \{ \cosh(\chi) + \cosh(\omega) \}}, \tag{5.15}$$

de acordo com a Eq. (5.11). Como a decoerência sobre o canal pode ser analisada em função dos efeitos que o campo magnético externo induz sobre este sistema, discutiremos inicialmente a fidelidade total de *qubits* que interagem somente através de acoplamentos entre seus *spins*, analisando o modo como a combinação dos parâmetros da Eq. (5.15) influencia a dependência de $\langle \overline{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ em relação aos mesmos.

A condição $h_z = 0$ e a manipulação das variáveis ω , χ e τ permitem que a Eq. (5.15) seja expressa diretamente em função dos parâmetros relativos à base de medidas

e às constantes de acoplamento como

$$\langle \bar{F} \rangle_{X,Y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \tanh \left(\frac{j_x}{4kT} \right) \left\{ 2 \sin(2\phi) + \tanh \left(\frac{j_y}{4kT} \right) \right\}. \quad (5.16)$$

Se investigarmos as condições necessárias para que $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ atinja seu valor máximo, concluiremos que o sinal global atribuído aos produtos $2 \sin(2\phi) \tanh(j_x/4kT)$ e $\tanh(j_x/4kT) \tanh(j_y/4kT)$ deve ser necessariamente positivo, e que, neste caso, o sinal relativo ao valor de j_x será oposto aos sinais de $\sin(2\phi)$ e j_y . Visto que a contribuição do primeiro produto é máxima para $|\sin(2\phi)| = 1$, podemos adaptar a Eq. (5.16) para este cenário como

$$\langle \bar{F} \rangle_{X,Y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left| \tanh \left(\frac{j_x}{4kT} \right) \right| + \frac{1}{6} \left| \tanh \left(\frac{j_x}{4kT} \right) \tanh \left(\frac{j_y}{4kT} \right) \right|. \quad (5.17)$$

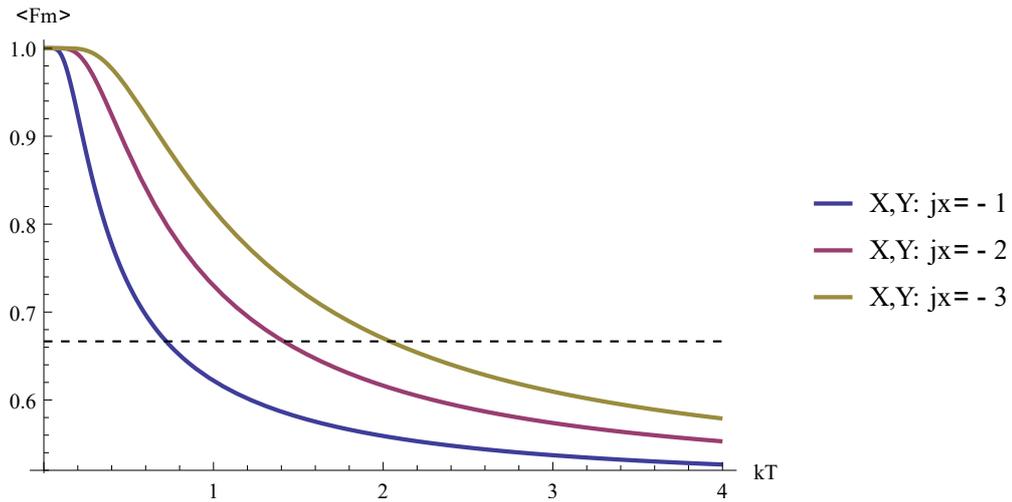


Figura 5.1: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$ e $j_y = 10$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $j_x = -1$, $j_x = -2$ e $j_x = -3$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é inversamente proporcional à temperatura.

Por sua vez, a variação de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ em relação às constantes de acoplamento é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{F} \rangle_{X,Y}}{\partial j_x} &= - \left(\frac{1}{24kT} \right) \left\{ 2 \sin(2\phi) + \tanh \left(\frac{j_y}{4kT} \right) \right\} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{j_x}{4kT} \right) \\ \text{e } \frac{\partial \langle \bar{F} \rangle_{X,Y}}{\partial j_y} &= - \left(\frac{1}{24kT} \right) \left\{ \tanh \left(\frac{j_x}{4kT} \right) \right\} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{j_y}{4kT} \right); \text{ logo,} \\ &\frac{\partial \langle \bar{F} \rangle_{X,Y}}{\partial j_i} \propto \operatorname{sech}^2 \left(\frac{j_i}{4kT} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

para $i = x; y$. Desta forma, os valores de j_x e j_y que maximizam a fidelidade total surgem

como solução da condição

$$\frac{\partial \langle \bar{F} \rangle_{X,Y}}{\partial j_i} = 0 \Rightarrow \operatorname{sech}^2 \left(\frac{j_i}{4kT} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\exp \left(\frac{j_i}{4kT} \right) + \exp \left(-\frac{j_i}{4kT} \right)} = 0 \Rightarrow |j_i| \rightarrow \infty. \quad (5.19)$$

Deste ponto em diante, assumiremos que os valores adimensionais apresentados nos próximos exemplos representam grandezas que podem ser reproduzidas em cenários reais.

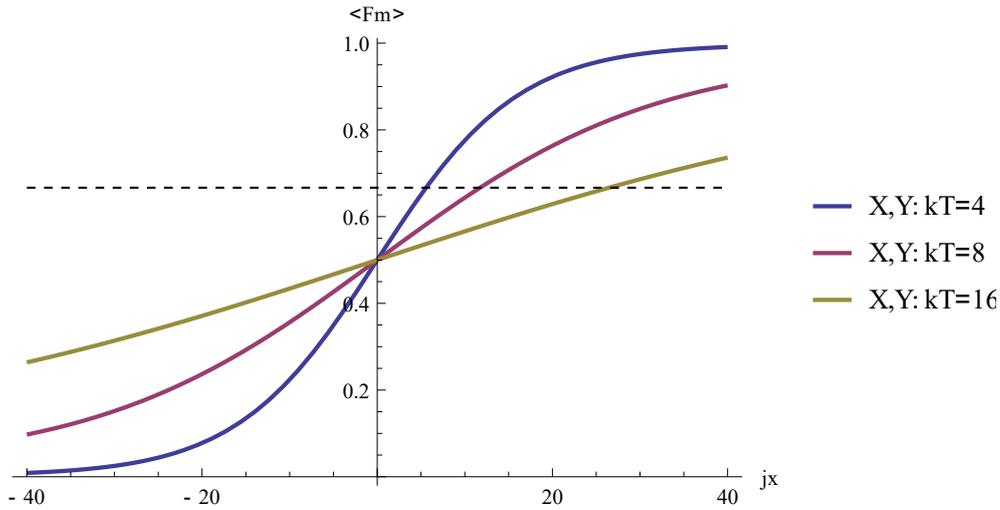


Figura 5.2: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ em função de j_x para $\phi = 3\pi/4$ e $j_y = -40$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $kT = 4$, $kT = 8$ e $kT = 16$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é proporcional à constante de acoplamento j_x .

A Fig. 5.1 comprova que a função descrita pela Eq. (5.17) é inversamente proporcional à temperatura, e a Fig. 5.2 apresenta um exemplo no qual a proporção entre a magnitude dos valores de $|j_x|$ e $|j_y|$ e a ordem de kT é suficiente para simular a aproximação que maximiza a fidelidade total dada por $|j_i| \rightarrow \infty$. Observe que as dependências de $\partial \langle \bar{F} \rangle_{X,Y} / \partial j_i$ em relação a j_x e j_y na Eq. (5.18) diferem entre si apenas em relação à constante multiplicativa associada a $\operatorname{sech}^2(j_i/4kT)$, e que, portanto, o gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ em função de j_y apresentará um padrão idêntico ao de j_x se as curvas forem comparadas em determinados regimes específicos associados a temperaturas distintas.

Por outro lado, se analisarmos a Eq. (5.16) sob outro enfoque, podemos encontrar regimes onde a ação do ambiente consegue melhorar o valor da fidelidade total. Neste sentido, observe que o aumento da temperatura tem um impacto maior sobre o produto $\tanh(j_x/4kT) \tanh(j_y/4kT)$ do que sobre $2 \sin(2\phi) \tanh(j_x/4kT)$, já que os dois termos $\tanh(j_i/4kT)$ dependem da variável T . Conseqüentemente, o fato de a combinação dos referidos termos atingir valores próximos de zero antes do segundo produto faz com que sua contribuição para o valor final da fidelidade seja menos relevante. Além disso, repare que o valor seguinte de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ é necessariamente menor do que o anterior quando

o sinal global de cada produto é positivo, e que a fidelidade é sempre menor do que $1/2$ quando ambos os sinais são negativos. Visto que os cenários de interesse só podem ser encontrados quando os sinais destes produtos forem opostos e que $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ deve estar acima de $2/3$, o sinal global associado ao produto $2 \sin(2\phi) \tanh(j_x/4kT)$ deve ser positivo, pois $|2 \sin(2\phi)|_{\text{máx}} = 2 > |\tanh(j_y/4kT)|_{\text{máx}} = 1$. Neste caso, os sinais de j_x e j_y serão idênticos e opostos ao de $\sin(2\phi)$ e, assim, a Eq. (5.16) pode ser reescrita neste contexto como

$$\langle \bar{F} \rangle_{X,Y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left| \tanh\left(\frac{j_x}{4kT}\right) \right| - \frac{1}{6} \left| \tanh\left(\frac{j_x}{4kT}\right) \tanh\left(\frac{j_y}{4kT}\right) \right|. \quad (5.20)$$

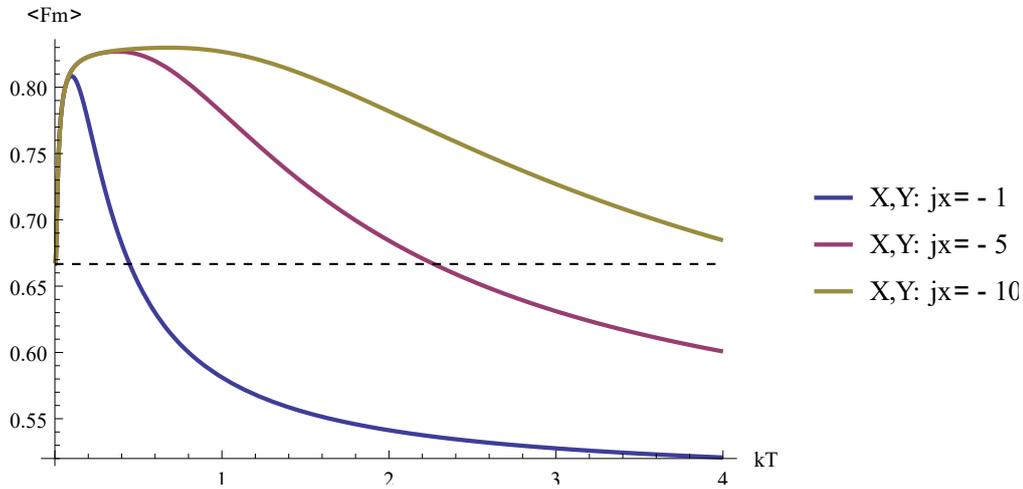


Figura 5.3: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$ e $j_y = -0.05$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $j_x = -1$, $j_x = -5$ e $j_x = -10$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é proporcional à temperatura na região $0 < kT < kT_c$ para um determinado valor crítico T_c .

O cenário apresentado na Eq. (5.20) implica que a fidelidade irá superar o valor inicial de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y} = 1/2$ e atingir um determinado valor limite se a temperatura aumentar de $T = 0$ até um ponto crítico $T = T_c$, o qual surge como solução da condição

$$\frac{\partial \langle \bar{F} \rangle_{X,Y}}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{2 \sin(2\phi) \cosh^2\left(\frac{j_y}{4kT_c}\right) + \sinh\left(\frac{j_y}{4kT_c}\right)}{\sinh\left(\frac{j_x}{2kT_c}\right)} = -\frac{j_y}{2j_x}. \quad (5.21)$$

Neste estágio, como a contribuição do produto $|\tanh(j_x/4kT) \tanh(j_y/4kT)|$ torna-se praticamente nula, $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ é aproximadamente igual ao termo $|\tanh(j_x/4kT)|$, e, portanto, inversamente proporcional a T . O regime inicial pode ser estendido à medida que as constantes de acoplamento se aproximam dos limites $|j_x| \rightarrow \infty$ e $|j_y| \rightarrow 0$, mas a fidelidade

estará sempre aquém do valor máximo correspondente a $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y} = 1$, visto que

$$\lim_{|j_x| \rightarrow \infty, |j_y| \rightarrow 0} \langle \bar{F} \rangle_{X,Y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \lim_{|j_x| \rightarrow \infty} \left| \tanh \left(\frac{j_x}{4kT} \right) \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \approx 0.83. \quad (5.22)$$

O exemplo da Fig. 5.3 confirma estas previsões. Note que, embora o valor máximo da fidelidade situe-se próximo a $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y} \approx 0.83$, o gráfico de sua função exibe o efeito desejado nos intervalos $0 < kT < kT_c$ para um determinado valor crítico T_c . Observe ainda que o aumento na magnitude de $|j_x|$ expande a região de proporcionalidade da fidelidade em relação à temperatura.

Considere agora os cenários nos quais os *qubits* do canal sofrem a ação de um campo magnético externo. Note que as propriedades de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ na Eq. (5.15) passam a depender sensivelmente do valor de h_z implícitos nas variáveis η e χ , e que, à exceção dos resultados obtidos para ϕ , a variação da fidelidade em relação aos parâmetros restantes torna-se mais complexa.

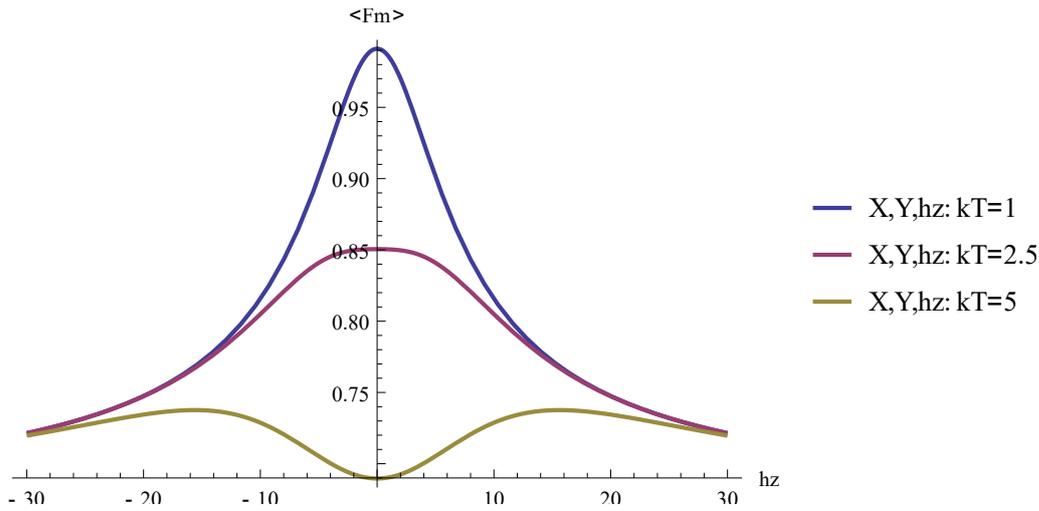


Figura 5.4: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ em função de h_z para $\phi = \pi/4$, $j_x = -10$ e $j_y = 10$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $kT = 1$, $kT = 2.5$ e $kT = 5$. Todas as curvas superam o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A relação de proporcionalidade entre a fidelidade e o campo magnético depende da temperatura.

O exemplo da Fig. 5.4 mostra a dependência da fidelidade calculada na Eq. (5.15) em função do campo magnético. Repare que as curvas se aproximam de um valor em comum à medida que a magnitude de h_z aumenta e que a elevação da temperatura altera o comportamento de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ em relação ao respectivo campo, transitando entre regimes onde esta dependência é estritamente decrescente para outros onde $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ é proporcional a h_z . Deste modo, existem cenários onde o ajuste dos parâmetros ϕ , T , j_x e j_y possibilita que o aumento na intensidade do campo magnético externo incremente os resultados associados à fidelidade total, como mostram as Figs. 5.5 e 5.6. Note que o valor máximo de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ chega a ser 20% maior do que a fidelidade correspondente a $h_z = 0$.

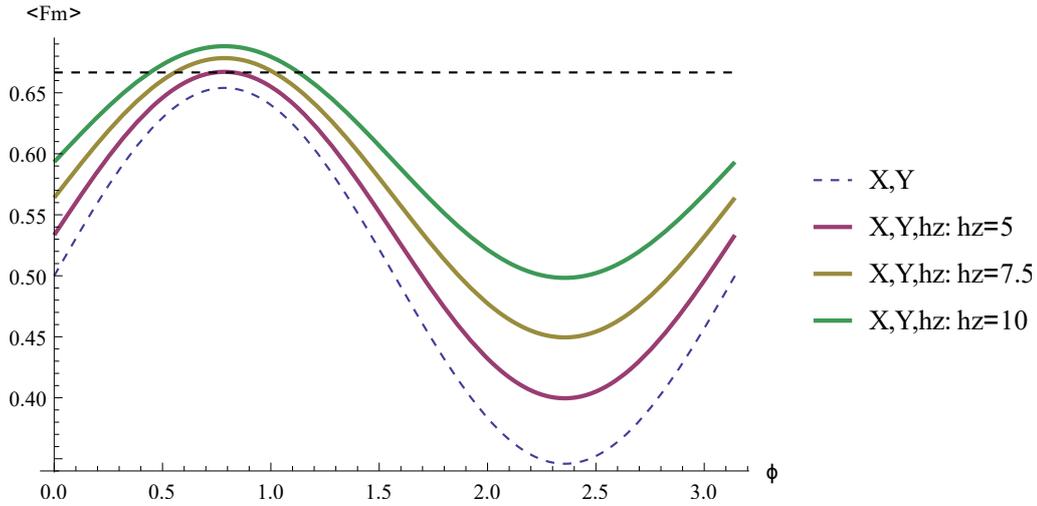


Figura 5.5: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ em função de ϕ para $kT = 5$, $j_x = -10$ e $j_y = -0.01$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente aos valores de $h_z = 0$, $h_z = 5$, $h_z = 7.5$ e $h_z = 10$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é máxima para $\phi = \pi/4$.

A variação de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ com a temperatura também é influenciada pelo campo magnético, e o valor de h_z determina se o comportamento do sistema situa-se mais próximo do previsto em (5.17) ou em (5.20). Assim, é possível ajustar a intensidade do campo para obter regimes onde a fidelidade seja proporcional à temperatura, como mostra a Fig. 5.7. Observe que pequenas variações na magnitude de h_z aumentam o valor de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ na região que abrange os valores mais baixos de kT , e que a fidelidade torna-se inversamente proporcional à temperatura acima de um valor crítico h_{z_c} . Com

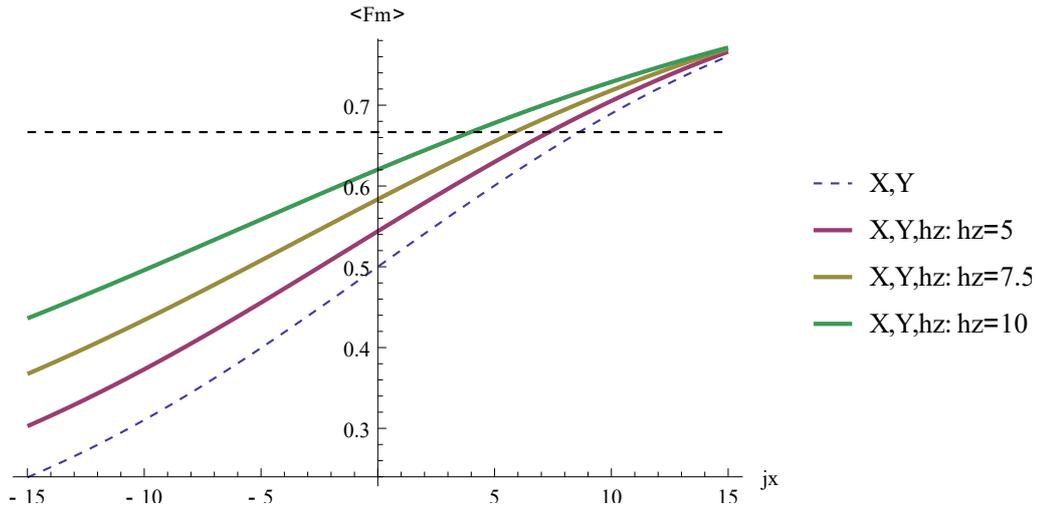


Figura 5.6: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ em função de j_x para $\phi = 3\pi/4$, $kT = 5$ e $j_y = -10$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente aos valores de $h_z = 0$, $h_z = 5$, $h_z = 7.5$ e $h_z = 10$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é proporcional à constante de acoplamento j_x .

estes exemplos, provamos que é possível intensificar a ação de fatores externos associados ao meio ambiente (como a temperatura e o campo magnético externo) para favorecer o

processo de teletransporte de estados puros em canais do tipo XY .

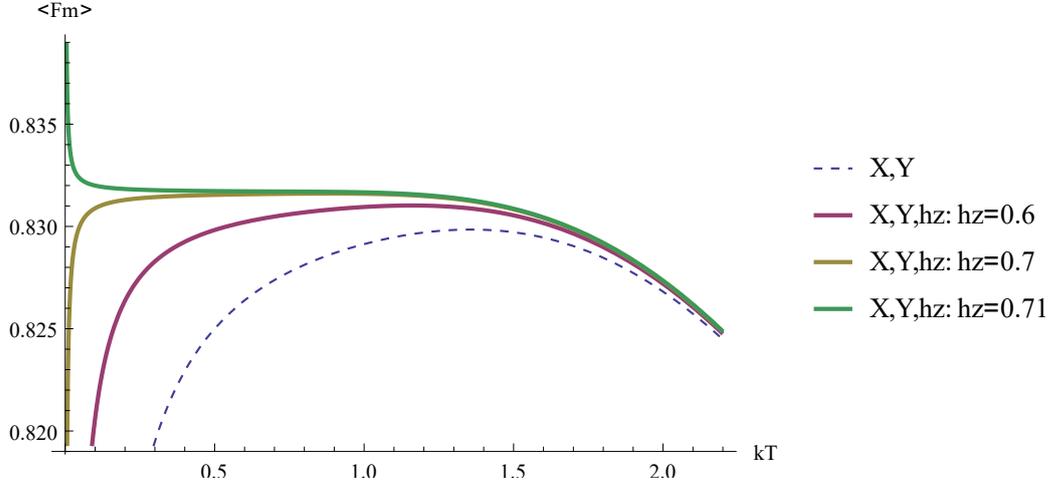


Figura 5.7: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,h_z}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$, $j_x = -20$, $j_y = -0.1$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente aos valores de $h_z = 0$, $h_z = 0.6$, $h_z = 0.7$ e $h_z = 0.71$. Todas as curvas superam o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é proporcional à temperatura na região $0 < kT < kT_c$ e no intervalo $0 < h_z < h_{zc}$ para determinados valores críticos T_c e h_{zc} .

5.1.2 O Modelo XXZ

O modelo XXZ aborda cenários onde os *spins* dos sistemas bipartites descritos pela Eq. (5.3) interagem no espaço tridimensional de forma que o acoplamento associado ao eixo Z seja anisotrópico em relação ao plano XY . Neste caso, as condições $j_x = j_y = j$ e $j_z \neq j$ definem respectivamente o Hamiltoniano e os autovalores de (5.4) e (5.6) como

$$\begin{aligned}
 H^{A,B} &= \frac{j}{4} (\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B + \sigma_y^A \otimes \sigma_y^B) + \frac{j_z}{4} (\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B) + \frac{h_z}{2} (\sigma_z^A \otimes I^B + I^A \otimes \sigma_z^B) \\
 &= \begin{bmatrix} j_z + 2h_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j_z & 2j & 0 \\ 0 & 2j & -j_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_z - 2h_z \end{bmatrix} \text{ e} \\
 s_{u_0} &= j_z + 2h_z, \quad s_{u_1} = j_z - 2h_z, \quad s_{u_2} = 2j - j_z \quad \text{e} \quad s_{u_3} = -2j - j_z; \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

associando os últimos aos respectivos estados $|00\rangle_{a,b}$, $|11\rangle_{a,b}$, $|\Psi^+\rangle_{a,b}$ e $|\Psi^-\rangle_{a,b}$, de acordo com a Eq. (2.127). Note que há degenerescência entre s_{u_0} e s_{u_1} para $h_z = 0$.

O canal de teletransporte pode ser descrito em função dos autoestados de

$H^{A,B}$ de acordo com a Eq. (5.9) como

$$\rho'^{A,B} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} e^{-\frac{jz+2h_z}{kT}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{jz-2h_z}{kT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{-2j+jz}{kT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{2j+jz}{kT}} \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

onde $Z = 2 \left\{ e^{\frac{jz}{kT}} \cosh(2j/kT) + e^{-\frac{jz}{kT}} \cosh(2h_z/kT) \right\}$, ou transcrito em relação aos estados restantes da base computacional padrão como

$$\rho'^{A,B} = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} e^{-\frac{jz+2h_z}{kT}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{jz}{kT}} \cosh(2j/kT) & -e^{-\frac{jz}{kT}} \sinh(2j/kT) & 0 \\ 0 & -e^{-\frac{jz}{kT}} \sinh(2j/kT) & e^{\frac{jz}{kT}} \cosh(2j/kT) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{jz-2h_z}{kT}} \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

segundo a Eq. (5.10).

Ao aliar os resultados de (5.11) e (5.25) às restrições impostas às constantes de acoplamento, determinamos a função relativa ao valor esperado da fidelidade média total para o caso geral como

$$\langle \bar{F} \rangle_{X,X,Z,h_z} = \frac{2 \cosh(h_z/2kT) + e^{\frac{jz}{2kT}} \{ \cosh(j/2kT) - \sin(2\phi) \sinh(j/2kT) \}}{3 \left\{ \cosh(h_z/2kT) + e^{\frac{jz}{2kT}} \cosh(j/2kT) \right\}}, \quad (5.26)$$

onde a condição $h_z = 0$ resulta em

$$\langle \bar{F} \rangle_{X,X,Z} = \frac{2 + e^{\frac{jz}{2kT}} \{ \cosh(j/2kT) - \sin(2\phi) \sinh(j/2kT) \}}{3 \left\{ 1 + e^{\frac{jz}{2kT}} \cosh(j/2kT) \right\}}. \quad (5.27)$$

A discussão sobre os valores do parâmetro ϕ que maximizam a função $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y}$ em (5.17) tal que $|\sin(2\phi)| = 1$ também é válida para o modelo XXZ , de forma que a função

$$\langle \bar{F} \rangle_{X,X,Z,h_z} = \frac{2 \cosh(h_z/2kT) + e^{\frac{jz}{2kT}} \{ \cosh(j/2kT) + |\sinh(j/2kT)| \}}{3 \left\{ \cosh(h_z/2kT) + e^{\frac{jz}{2kT}} \cosh(j/2kT) \right\}} \quad (5.28)$$

resume o comportamento da Eq. (5.26) para pontos próximos do valor limite de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X,Z,h_z}$. Entretanto, a ausência de anisotropia no plano XY impede que a Eq. (5.28) sequer ultrapasse o limite clássico $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$, pois a minimização da variação de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X,Z,h_z}$ em

relação a j_z fornece a solução

$$\frac{\partial \langle \bar{F} \rangle_{X,X,Z,h_z}}{\partial j_z} = 0 \Rightarrow e^{\frac{j_z}{2kT}} \cosh\left(\frac{h_z}{kT}\right) \left\{ \cosh\left(\frac{j}{2kT}\right) + \left| \sinh\left(\frac{j}{2kT}\right) \right| \right\} = 0 \Rightarrow j_z \rightarrow -\infty, \quad (5.29)$$

e, neste caso, a fidelidade é igual a

$$\lim_{j_z \rightarrow -\infty, h_z=0} \langle \bar{F} \rangle_{X,X,Z,h_z} = 2 \cosh(h_z/2kT)/3 \cosh(h_z/2kT) = 2/3. \quad (5.30)$$

De fato, a inequação

$$\begin{aligned} \langle \bar{F} \rangle_{X,X,Z,h_z} > 2/3 &\Rightarrow e^{\frac{j_z}{2kT}} \left| \sinh(j/2kT) \right| > e^{\frac{j_z}{2kT}} \cosh(j/2kT) \\ &\Rightarrow \left| e^{\frac{j}{2kT}} - e^{-\frac{j}{2kT}} \right| > e^{\frac{j}{2kT}} + e^{-\frac{j}{2kT}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

prova que esta hipótese jamais será satisfeita.

Contudo, se acrescentarmos uma pequena anisotropia em uma das constantes de acoplamento do plano XY em (5.11) tal que $j_y = j$ e $j_x = j + \Delta$ para $-|\epsilon| < \Delta < |\epsilon|$ e $\epsilon \rightarrow 0$, a função $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,Z,h_z}$ pode ser modificada para

$$\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z,h_z} = \frac{2\eta \cosh(\eta/4kT) + e^{\frac{j_z}{2kT}} \eta \{ \cosh(2j+\Delta/4kT) - \sin(2\phi) \sinh(2j+\Delta/4kT) \} - \Delta \sin(2\phi) \sinh(\eta/4kT)}{3\eta \left\{ \cosh(\eta/4kT) + e^{\frac{j_z}{2kT}} \cosh(2j+\Delta/4kT) \right\}}, \quad (5.32)$$

cujas aproximação na ausência do campo h_z resulta em

$$\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z} \approx \frac{2 + e^{\frac{j_z}{2kT}} \{ \cosh(2j+\Delta/4kT) - \sin(2\phi) \sinh(2j+\Delta/4kT) \} - \sin(2\phi)(\Delta/4kT)}{3 \left\{ 1 + e^{\frac{j_z}{2kT}} \cosh(2j+\Delta/4kT) \right\}}, \quad (5.33)$$

onde consideramos $\cosh(\Delta/4kT) \approx 1$ e $\sinh(\Delta/4kT) \approx \Delta/4kT$. Neste caso, a condição

$$\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z,h_z} > 2/3 \Rightarrow |\Delta \sinh(\eta/4kT)| > e^{\frac{j_z}{2kT}} \eta \{ \cosh(2j + \Delta/4kT) - |\sinh(2j + \Delta/4kT)| \} \quad (5.34)$$

pode ser satisfeita para determinados valores de T , j , j_z , h_z e Δ .

Assim, as Eqs. (5.32) e (5.33) superam o valor de $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$ quando os parâmetros $\sin(2\phi)$ e Δ apresentam sinais opostos, e a respectiva contribuição dos termos proporcionais a $\sinh(\eta/4kT)$ e $\sinh(\Delta/4kT)$ para $j_z \rightarrow -\infty$ permite que o sistema exiba resultados semelhantes aos analisados para o modelo XY . Note que mudanças significativas no valor destas funções só irão ocorrer se Δ assumir valores comparáveis aos de j , aumentando a defasagem entre j_x e j_y . A análise destas propriedades e os resultados obtidos para este modelo serão discutidos a seguir.

A Fig. 5.8 apresenta cenários onde a anisotropia da Eq. (5.33) gera funções que ultrapassam o limite clássico $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$ e alcançam $\langle \bar{F} \rangle = 1$ para $kT \approx 0$, de forma análoga aos resultados da Fig. 5.3. Observe que a fidelidade é proporcional à magnitude

de Δ e que a ordem dos valores desta variável é próxima à de j .

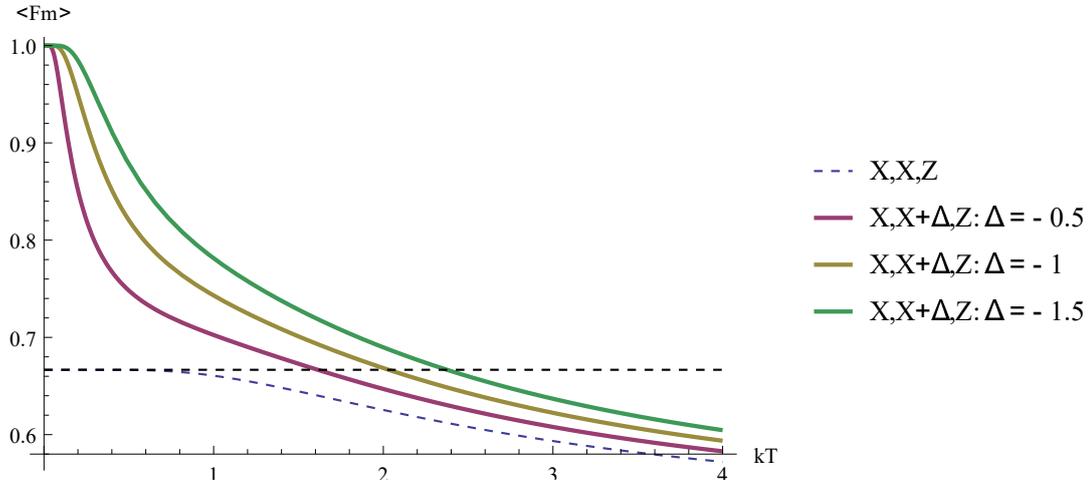


Figura 5.8: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$, $j = 2$ e $j_z = -10$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente aos valores de $\Delta = 0$, $\Delta = -0.5$, $\Delta = -1$ e $\Delta = -1.5$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é inversamente proporcional à temperatura.

Na seqüência, o exemplo da Fig. 5.9 mostra a relação entre a maximização de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z}$ e a constante de acoplamento j_z . Todas as curvas convergem em direção a um mesmo valor para $j_z \rightarrow -\infty$, e, como a ordem de Δ é dez vezes inferior à de j , o limite destas funções é inferior a $\langle \bar{F} \rangle = 1$.

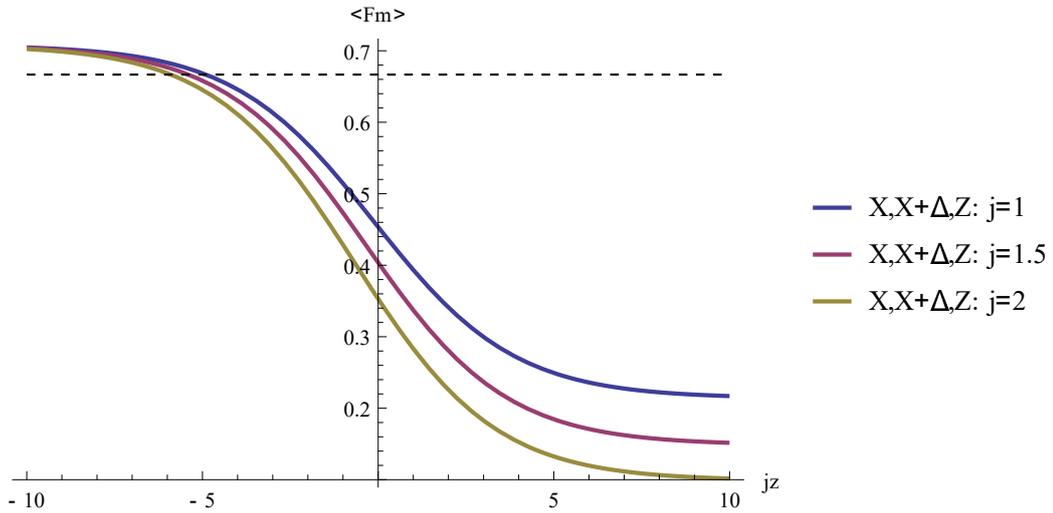


Figura 5.9: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z}$ em função de j_z para $\phi = \pi/4$, $kT = 1$ e $\Delta = -0.5$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $j = 1$, $j = 1.5$ e $j = 2$, e a linha horizontal tracejada representa o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é inversamente proporcional à constante de acoplamento j_z .

No exemplo da Fig. 5.10, por sua vez, observamos regimes onde a função $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z,h_z}$ é proporcional à temperatura no intervalo $0 < kT < kT_c$ para um valor crítico T_c e supera o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$, tal qual nas Figs. 5.3 e 5.7. Note que a anisotropia relativa às diferenças $j_x - j_z$ e $j_y - j_z$ é da ordem de Δ .

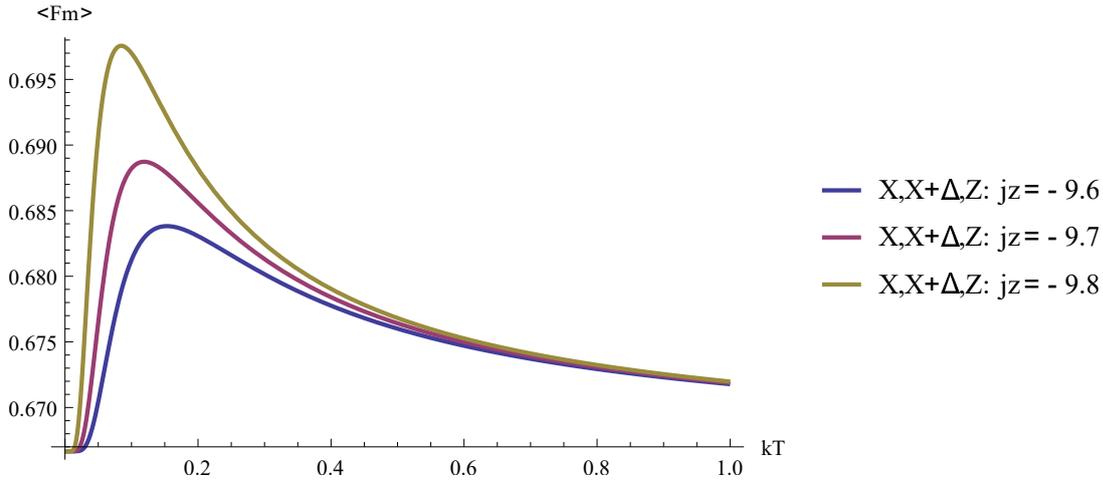


Figura 5.10: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$, $j = -10$ e $\Delta = -0.1$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $j_z = -9.6$, $j_z = -9.7$ e $j_z = -9.8$. Todas as curvas superam o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é diretamente proporcional à temperatura na região $0 < kT < kT_c$ para um determinado valor crítico T_c .

O modelo $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z,h_z}$ também apresenta resultados semelhantes aos do modelo XY na presença de um campo magnético externo. Repare que a discussão relativa à Fig. 5.4 é válida para o exemplo da Fig 5.11, e que, portanto, devemos encontrar cenários como os da Fig. 5.12, onde a fidelidade é proporcional a h_z e à temperatura. Observe ainda que a relação apresentada na Fig. 5.9 entre $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z}$ e j_z também é válida para a Eq. (5.32), independentemente do valor de h_z .

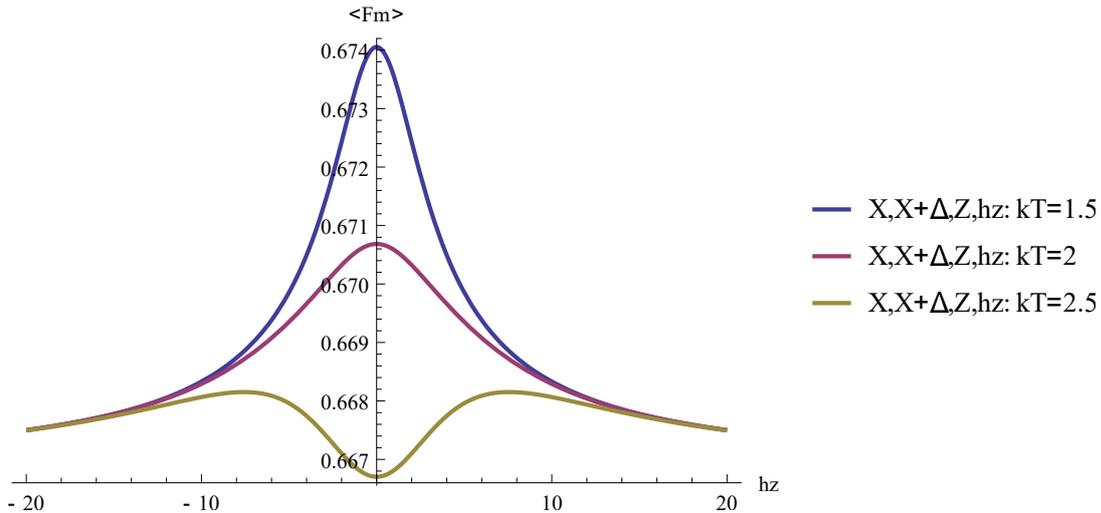


Figura 5.11: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X,X+\Delta,Z,h_z}$ em função de h_z para $\phi = \pi/4$, $j = -9.5$, $j_z = -10$ e $\Delta = -0.2$. As cores azul, vermelha e marrom referem-se respectivamente aos valores de $kT = 1.5$, $kT = 2$ e $kT = 2.5$. Todas as curvas superam o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A relação de proporcionalidade entre a fidelidade e o campo magnético depende da temperatura.

Desta forma, concluímos que os protocolos baseados em canais descritos pelo

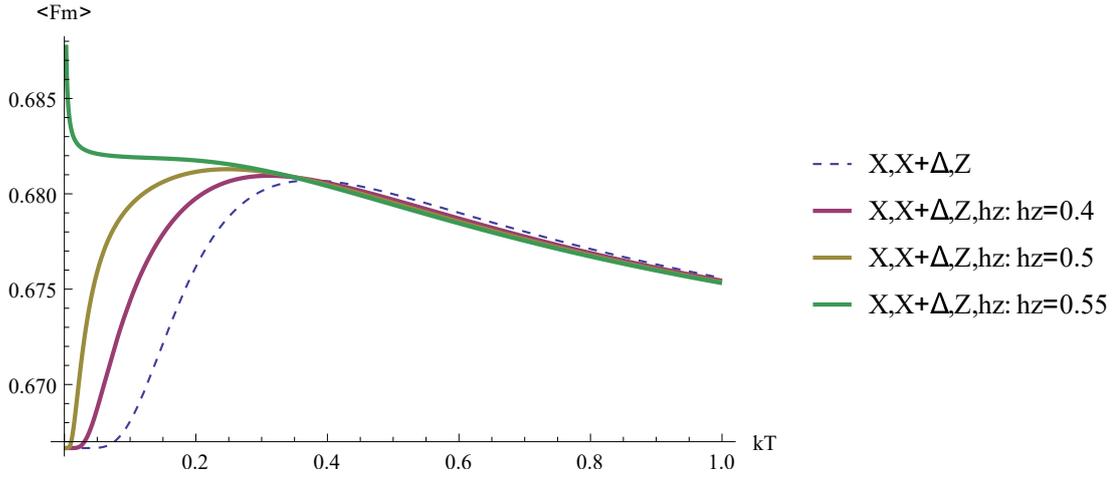


Figura 5.12: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle_{X, X+\Delta, Z, h_z}$ em função de kT para $\phi = \pi/4$, $j = -10$, $j_z = -9$ e $\Delta = -0.2$. As cores azul, vermelha, marrom e verde referem-se respectivamente aos valores de $h_z = 0$, $h_z = 0.4$, $h_z = 0.5$ e $h_z = 0.55$. Todas as curvas superam o limite clássico correspondente à $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade é diretamente proporcional à temperatura na região $0 < kT < kT_c$ e no intervalo $0 < h_z < h_{zc}$ para determinados valores críticos T_c e h_{zc} .

modelo XXZ são ineficientes quanto ao propósito de substituir mecanismos clássicos de transmissão de informação, visto que o patamar relativo a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$ jamais é superado. Porém, provamos que a modificação nos valores das constantes de acoplamento através de uma pequena anisotropia no plano XY altera as propriedades destes sistemas, permitindo que todos os parâmetros possam ser ajustados para fornecer resultados semelhantes aos obtidos nos cenários mais relevantes do modelo XY . Com isso, mostramos novamente que é possível intensificar a ação de fatores do ambiente para otimizar o teletransporte de estados puros através de canais descritos pelos modelos de Heisenberg.

5.2 Teletransporte Condicional

5.2.1 O Modelo XYZ

Encerraremos este capítulo com a aplicação do método de teletransporte condicional (apresentado no capítulo 4) para o modelo geral XYZ , considerando que as constantes de acoplamento j_x , j_y e j_z possam assumir qualquer valor arbitrário. Neste contexto, a transmissão dos estados puros arbitrários de (3.30) através de canais descritos pela Eq. (5.10) fornece as probabilidades

$$p_i = \frac{1}{4} \mp \frac{\cos(2\phi) \sinh(\chi) h_z}{\eta \{ \cosh(\chi) + e^{2j_z} \cosh(\omega) \}} \quad (5.35)$$

e as respectivas fidelidades condicionais

$$\langle \bar{F} \rangle_i = \frac{2\eta \cosh(\chi) + \sinh(\chi) \{ -\Delta \sin(2\phi) \mp 8h_z \cos(2\phi) \} + \eta e^{2j_z} \{ \cosh(\omega) - \sin(2\phi) \sinh(\omega) \}}{3\{ \eta \cosh(\chi) \mp 4h_z \cos(2\phi) \cosh(\chi) + \eta e^{2j_z} \cosh(\omega) \}}, \quad (5.36)$$

onde o índice i e a ordem dos sinais $-$ e $+$ referem-se respectivamente às notações dos pares I/IV e II/III introduzidas na tabela 3.2.

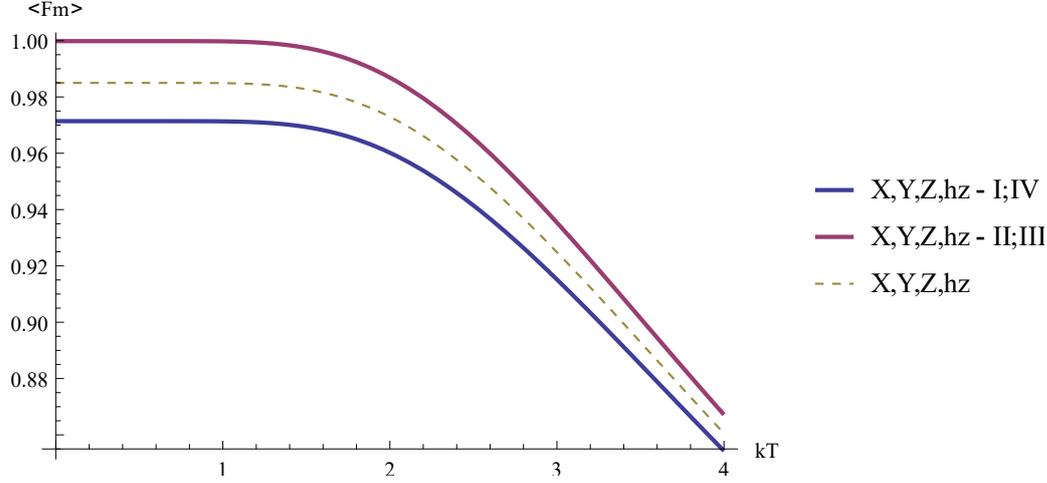


Figura 5.13: Gráfico de $\langle \bar{F} \rangle$ em função de kT para $\phi = 0.9, j_x = -10, j_y = 10, j_z = -10$ e $h_z = 1$. As cores marrom, azul e vermelha referem-se respectivamente a $\langle \bar{F} \rangle_{0|IF|IF}$ e aos pares $\langle \bar{F} \rangle_I / \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ e $\langle \bar{F} \rangle_{II} / \langle \bar{F} \rangle_{III}$ relativos ao teletransporte condicional do modelo geral XYZ. Todas as curvas superam o limite clássico correspondente a $\langle \bar{F} \rangle = 2/3$. A fidelidade se mantém estável na região $0 < kT < kT_c$ para um determinado valor crítico T_c e torna-se inversamente proporcional à temperatura para $T > T_c$.

Note que as probabilidades p_i da Eq. (5.35) serão iguais quando o campo magnético externo for nulo ou o emaranhamento da base de medidas for máximo, tal que $h_z = 0$ ou $\cos(2\phi) = 0$. Neste cenário, de acordo com as Eqs. (4.9) e (5.11), os resultados obtidos para as fidelidades condicionais coincidirão com os gerados pela função $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,Z,h_z}$ se os valores dos parâmetros de ambos os modelos forem idênticos (veja o exemplo da Fig. 4.1b). Logo, basta que as condições $\phi \neq \{\pi/4; 3\pi/4\}$ e $h_z \neq 0$ sejam satisfeitas para que as funções $\langle \bar{F} \rangle_I = \langle \bar{F} \rangle_{IV}$ ou $\langle \bar{F} \rangle_{II} = \langle \bar{F} \rangle_{III}$ superem a fidelidade associada ao método de teletransporte direto. Além disso, mostramos em (4.9) que cada função $\langle \bar{F} \rangle_i$ atinge seu valor máximo quando a respectiva probabilidade p_i é mínima, o que ocorre quando as condições $|\cos(2\phi)| = 1$ e $j_z \rightarrow -\infty$ são satisfeitas em (5.35). Neste caso, p_i se resume a

$$p_i = \frac{1}{4} - |h_z| \frac{\tanh(\chi)}{\eta}, \quad (5.37)$$

cujo valor mínimo ocorre para $|h_z| \rightarrow \infty$. Observe a Fig. (5.13) e repare que a função $\langle \bar{F} \rangle_{X,Y,Z,h_z}$ encontra-se simetricamente distribuída entre os ramos superior e inferior dos pares $\langle \bar{F} \rangle_i$, e que a magnitude de h_z é suficiente para que as quatro fidelidades condicionais atinjam seus respectivos valores máximos para baixas temperaturas.

Capítulo 6

Conclusões

A hipótese central que permeia todos os modelos apresentados ao longo desta tese se baseia na premissa de que o canal quântico misto pode ser descrito como o produto da exposição de um par de *qubits* emaranhados - e inicialmente puro - a um ambiente externo que gradativamente reduz a pureza e o grau de emaranhamento deste sistema. Inicialmente, consideramos que estes canais seriam descritos pela Eq. (3.10) como

$$\tilde{\rho}^{A,B} = \sum_p \{I^A \otimes E_p^B\} \rho^{A,B} \{I^A \otimes (E_p^B)^\dagger\},$$

onde os termos E_k foram definidos na seção 2.5 como os operadores de Kraus. Com base neste conceito, construímos diversos modelos associados à combinação de fenômenos de decoerência pré-estabelecidos a partir de um conjunto específico de parâmetros: os graus de emaranhamento do canal (θ) e da base de medidas (ϕ), e as respectivas probabilidades (p_0 , p_a e p_b) relacionadas ao tempo de exposição dos *qubits* ρ_1 e $\rho_{2,3}$ à presença do ambiente em questão. Em princípio, consideramos que estes parâmetros poderiam ser arbitrariamente ajustados por um agente externo à exceção de θ , visto que a manipulação do emaranhamento do canal é um procedimento extremamente delicado e que tentativas com este propósito poderiam perturbar seu estado, modificando-o para uma configuração completamente desconhecida.

Com isso em mente, adaptamos o protocolo original discutido no capítulo 3 e expandimos este conceito ao aplicar o formalismo dos operadores de Kraus na descrição dos três *qubits* envolvidos neste processo. Para os procedimentos executados com estados de entrada puros através de canais com decoerência homogênea, mostramos que a comparação entre os quatro modelos é indispensável para a escolha do procedimento mais adequado, uma vez que a ordem de sucessão entre estes canais depende sensivelmente da configuração particular dos valores de todos os parâmetros. Vimos também que se houver decoerência sobre o estado de entrada quando todos os *qubits* sofrem a ação de um único tipo de mapa, a fidelidade deste cenário pode ser superada quando ρ_1 e $\rho_{2,3}$ são imersos em ambientes distintos, e que efeito semelhante pode ser obtido quando os *qubits* de Alice diferem do estado de Bob em canais com decoerência heterogênea, independentemente do

grau de pureza da informação original. Além disso, apresentamos exemplos para os quais a substituição de canais com decoerência parcial (onde apenas um dos *qubits* é afetado) por canais com decoerência homogênea aumentavam o valor da fidelidade total, e constatamos que os resultados gerados pelo modelo $IB/IB/IB$ podem superar os valores associados ao envio de um estado puro através de um canal com decoerência semelhante.

No capítulo 4, introduzimos o conceito de teletransporte condicional e reavaliámos os modelos discutidos no capítulo anterior. Vimos que os protocolos gerados na ausência de ambientes descritos pelo mapa de Atenuação de Amplitude são simétricos em relação aos parâmetros θ e ϕ e que, nestes casos, as funções relativas às medidas de $|\Phi_\phi^+\rangle$ e $|\Phi_\phi^-\rangle$ coincidem respectivamente com as de $|\Psi_\phi^-\rangle$ e $|\Psi_\phi^+\rangle$. Por outro lado, constatamos que a presença do mapa AA em pelo menos um dos *qubits* de $\rho_{2,3}$ elimina a simetria destas funções em relação a θ , e que a imersão de ρ_1 em ambientes desta natureza quebra a degenerescência entre as quatro medidas projetivas ao gerar funções unívocas. Neste contexto, comparamos as funções relativas a uma mesma medida projetiva P_i^ϕ e observamos resultados semelhantes aos discutidos no capítulo 3. Além disso, provamos que a escolha de medidas projetivas específicas cria alternativas para superar a fidelidade associada aos modelos de teletransporte direto quando os graus de emaranhamento do canal e da base de medidas situam-se aquém de seu valor máximo, e mostramos como o novo enfoque deve ser utilizado para otimizar estes resultados.

A mudança de abordagem no capítulo 5 com a substituição dos operadores de Kraus por conceitos de Mecânica Estatística permitiu que outros tipos de parâmetros pudessem ser considerados para descrever o canal quântico misto. Ao elaborar novos modelos de teletransporte, pautamos nosso objetivo na investigação das propriedades de protocolos executados com entradas puras cujo canal de transmissão $\rho_{2,3}$ era descrito pela Eq. (5.3) como

$$\rho'^{A,B} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H}{kT}^{A,B}},$$

onde k é a constante de Boltzmann, T é a temperatura de equilíbrio do meio, Z é a função de partição do sistema e H é o Hamiltoniano relativo ao modelo de Heisenberg dado por

$$H^{A,B} = j_x(S_x^A \otimes S_x^B) + j_y(S_y^A \otimes S_y^B) + j_z(S_z^A \otimes S_z^B) + h_{z_a}(S_z^A \otimes I^B) + h_{z_b}(I^A \otimes S_z^B).$$

Neste cenário, aplicamos os conceitos desenvolvidos no capítulo 3 para os modelos XY e XXZ e o método de teletransporte condicional do capítulo 4 para o caso geral XYZ , assumindo que um agente externo poderia ajustar não só a temperatura como também as constantes de acoplamento j_x , j_y e j_z e o campo magnético externo h_z de forma arbitrária. Graças à anisotropia do modelo XY no referido plano, encontramos regimes específicos

onde a fidelidade é proporcional a fatores contra-intuitivos como a temperatura do sistema e o campo magnético externo, e, na seqüência, mostramos que pequenas alterações no valor das constantes j_x e j_y são suficientes para que o modelo XXZ exiba fenômenos semelhantes ao seu antecessor. Por fim, comprovamos que as funções associadas às medidas condicionais do modelo geral XYZ apresentam um comportamento qualitativo análogo aos exemplos analisados no capítulo 4, e mostramos que a presença do campo externo h_z é necessária para que o valor da fidelidade destes modelos supere os resultados gerados pelo método de teletransporte convencional.

Apêndice A

Vetores, Operadores e Matrizes

Nesta seção, revisaremos os principais conceitos e propriedades de Álgebra Linear necessários para a compreensão dos postulados da Mecânica Quântica discutidos no Apêndice B (Cohen-Tannoudji et al., 2006; Griffiths, 2005 e Benenti et al., 2007).

A.1 Vetores

A.1.1 Introdução

Segundo a notação introduzida por Dirac, o conjunto das componentes de um vetor é definido pela representação simbólica denominada de *ket* ($|\cdot\rangle$), enquanto a transposição destas coordenadas para o espaço dual é descrita pela notação denominada de *bra* ($\langle\cdot|$). Neste contexto, se $|a\rangle$, $|b\rangle$ e $|c\rangle$ são três vetores tais que $|a\rangle = (a_1, \dots, a_N)$, $|b\rangle = (b_1, \dots, b_N)$ e $|c\rangle = |a\rangle + |b\rangle$, as relações

$$\begin{aligned}c_i &= a_i + b_i \quad (i = 1, \dots, N); \\|a\rangle + |b\rangle &= |b\rangle + |a\rangle; \quad |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle; \\m(|a\rangle + |b\rangle) &= m|a\rangle + m|b\rangle; \quad (m+n)|a\rangle = m|a\rangle + n|a\rangle \quad \text{e} \quad (mn)|a\rangle = m(n|a\rangle)\end{aligned}\tag{A.1}$$

são válidas para qualquer conjunto de coordenadas a_i , b_i e c_i ; onde c_i é a i -ésima componente do vetor $|c\rangle$ e m e n são dois números complexos quaisquer.

A.1.2 Independência Linear

Um conjunto de vetores $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_N\rangle$ forma uma base linearmente independente quando a equação

$$m_1|u_1\rangle + m_2|u_2\rangle + m_3|u_3\rangle + \dots + m_N|u_N\rangle = 0\tag{A.2}$$

é satisfeita se e somente se $m_i = 0$ ($i = 1, \dots, N$).

A.1.3 O Produto Escalar

Para dois vetores quaisquer $|a\rangle = (a_1, \dots, a_N)$ e $|b\rangle = (b_1, \dots, b_N)$, a definição de produto escalar é dada por

$$\langle a|b\rangle = a_1^*b_1 + a_2^*b_2 + a_3^*b_3 + \dots + a_N^*b_N = \sum_{i=1}^n a_i^*b_i; \quad (\text{A.3})$$

onde cada componente do vetor dual $\langle a| = (a_1^*, \dots, a_N^*)$ é igual ao complexo conjugado do respectivo elemento correspondente em $|a\rangle$. Disto segue que, para dois números complexos quaisquer m e n ,

$$\begin{aligned} \langle a|b\rangle &= \langle b|a\rangle^*; & \langle a|mb\rangle &= m\langle a|b\rangle; & \langle ma|b\rangle &= m^*\langle a|b\rangle; \\ \langle a|(m|b\rangle + n|c\rangle) &= m\langle a|b\rangle + n\langle a|c\rangle; & (\langle ma| + \langle nb|)|c\rangle &= m^*\langle a|c\rangle + n^*\langle b|c\rangle; \\ \langle a|a\rangle &\geq 0; & \langle b|b\rangle &\geq 0 \text{ e } |\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A última propriedade é conhecida como a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

A.1.4 Normalização

Visto que os postulados da Mecânica Quântica (Apêndice B) foram formulados para vetores que possuem módulo unitário, vetores não-normalizados pertencerão a casos especiais nos quais a normalização foi omitida apenas para fins de clareza nas explicações. Posto isto, todo vetor $|v\rangle = (v_1, \dots, v_N)$ contido em um espaço de dimensão N pode ser normalizado através da expressão

$$|v'\rangle = \frac{|v\rangle}{|v|}, \quad (\text{A.5})$$

onde $|v| = \sqrt{\langle v|v\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^N |v_i|^2}$ é o módulo ou norma de $|v\rangle$.

A.1.5 Ortonormalidade

Dois vetores $|a\rangle = (a_1, \dots, a_N)$ e $|b\rangle = (b_1, \dots, b_N)$ são ortogonais quando

$$\langle a|b\rangle = \sum_{i=1}^n a_i^*b_i = 0, \quad (\text{A.6})$$

e, se $\langle a|a\rangle = \langle b|b\rangle = 1$, então estes vetores são ortonormais.

Por sua vez, um conjunto de vetores $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_N\rangle$ forma uma base ortonormal quando $\langle u_i|u_j\rangle = 0$ para $i \neq j$ e $\langle u_i|u_j\rangle = 1$ para $i = j$, ou seja:

$$\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}, \quad (\text{A.7})$$

onde δ_{ij} é a delta de Kronecker. Neste caso, qualquer uma dentre as infinitas combinações

de N vetores $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_N\rangle$ que satisfazem a Eq. (A.7) gera um espaço vetorial H de dimensão N . Logo, para cada base específica, é possível expandir um vetor arbitrário $|v\rangle \in H$ em termos dos estados de base $|u_i\rangle$ através da relação

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^n C_i^u |u_i\rangle, \quad (\text{A.8})$$

onde, devido à condição de ortonormalidade $\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$, os coeficientes C_i^u são dados por

$$C_i^u = \langle u_i | v \rangle, \quad (\text{A.9})$$

também conhecidos como amplitudes de probabilidade (veja a seção B.1).

A.1.6 O Produto Tensorial

As propriedades analisadas anteriormente englobam relações entre vetores que residem em um mesmo espaço vetorial e que, portanto, possuem dimensões idênticas. Mas o que ocorre se precisarmos analisar vetores que pertençam a espaços distintos e com dimensões que não sejam necessariamente as mesmas? Neste caso, devemos utilizar o produto tensorial, cuja função reside em conectar espaços vetoriais independentes em um sistema composto sem afetar as respectivas propriedades individuais destes subsistemas.

Sejam $|v_a\rangle$ um vetor que reside em um espaço vetorial H_A com dimensão N_A e $|v_b\rangle$ um vetor que reside em um espaço vetorial H_B com dimensão N_B . Se ambos forem analisados simultaneamente, o sistema composto resultante pertencerá ao espaço $H = H_A \otimes H_B$, cuja dimensão é dada por $N = N_A \times N_B$. Assim, se $|a_a\rangle \in H_A$ e $|b_b\rangle \in H_B$, as seguintes propriedades são válidas:

$$\begin{aligned} m(|v_a\rangle \otimes |v_b\rangle) &= (m|v_a\rangle) \otimes |v_b\rangle = |v_a\rangle \otimes (m|v_b\rangle); \\ (|v_a\rangle + |a_a\rangle) \otimes |v_b\rangle &= |v_a\rangle \otimes |v_b\rangle + |a_a\rangle \otimes |v_b\rangle \quad \text{e} \\ |v_a\rangle \otimes (|b_b\rangle + |v_b\rangle) &= |v_a\rangle \otimes |b_b\rangle + |v_a\rangle \otimes |v_b\rangle; \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

para qualquer escalar complexo m .

Por sua vez, sejam os vetores compostos $|g_a\rangle = \sum_{l=1}^{N_B} \sum_{i=1}^{N_A} D_{i,l} |u_i\rangle \otimes |w_l\rangle$ e $|g_b\rangle = \sum_{p=1}^{N_B} \sum_{j=1}^{N_A} E_{j,p} |u_j\rangle \otimes |w_p\rangle$ e os conjuntos de estados de base $|u_i\rangle$ em H_A e $|w_l\rangle$ em H_B , onde $D_{i,l}$ e $E_{j,p}$ são coeficientes complexos. Neste caso, o produto escalar entre $|g_a\rangle$ e $|g_b\rangle$ é dado por

$$\langle g_a | g_b \rangle = \sum_{l=1}^{N_B} \sum_{i=1}^{N_A} D_{i,l}^* E_{i,l}; \quad (\text{A.11})$$

visto que $\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{i,j}$ e $\langle w_l | w_q \rangle = \delta_{l,p}$. Retomaremos a discussão das propriedades do

produto tensorial na seção A.3.

A.2 Operadores

A.2.1 Introdução

Um operador \hat{O} pode ser definido como uma transformação que substitui um vetor $|v\rangle \in H$ por outro vetor $|u\rangle \in H$ através do mapeamento

$$\hat{O}|v\rangle = |u\rangle, \quad (\text{A.12})$$

o qual pode ser classificado como linear ou não-linear. Para um número complexo qualquer m , \hat{O} é linear quando satisfaz as seguintes propriedades:

$$\hat{O}(|a\rangle + |b\rangle) = \hat{O}|a\rangle + \hat{O}|b\rangle \quad \text{e} \quad \hat{O}(m|a\rangle) = m\hat{O}|a\rangle. \quad (\text{A.13})$$

A.2.2 A Relação de Completeza

Em meio ao conjunto de operadores que se enquadram na Eq. (A.13), uma classe em particular se sobressai: a dos projetores \hat{P}_u , resultantes da junção de um vetor $|u\rangle$ e seu dual $\langle u|$. Neste sentido, a ação de \hat{P}_u sobre um vetor arbitrário $|v\rangle$ sempre gera um vetor proporcional ao mesmo, pois $\hat{P}_u|v\rangle = (|u\rangle\langle u|)|v\rangle = \langle u|v\rangle|u\rangle$, onde o coeficiente $\langle u|v\rangle$ é chamado de projeção de $|v\rangle$ sobre $|u\rangle$.

Logo, segundo as Eqs. (A.8) e (A.9), se $|v\rangle \in H$ e

$$\sum_{i=1}^N \hat{P}_{u_i} = \sum_{i=1}^N |u_i\rangle\langle u_i|, \quad (\text{A.14})$$

o mapeamento de $\sum_{i=1}^N \hat{P}_{u_i}$ sobre $|v\rangle$ resulta em

$$\left(\sum_{i=1}^N \hat{P}_{u_i} \right) |v\rangle = \left(\sum_{i=1}^n |u_i\rangle\langle u_i| \right) |v\rangle = \sum_{i=1}^n |u_i\rangle\langle u_i|v\rangle = \sum_{i=1}^n \langle u_i|v\rangle |u_i\rangle = \sum_{i=1}^n C_i^u |u_i\rangle = |v\rangle, \quad (\text{A.15})$$

e, por conseguinte,

$$\sum_{i=1}^n |u_i\rangle\langle u_i| = I. \quad (\text{A.16})$$

A Eq. (A.16) é conhecida como a Relação de Completeza e é válida independentemente da base de estados escolhida, uma vez que $|v\rangle$ permanece inalterado após a ação de $\sum_{i=1}^N \hat{P}_{u_i}$.

A.2.3 Comutadores e Anticomutadores

A relação de comutação entre operadores também pode ser associada a uma operação. Se \hat{O}_a , \hat{O}_b e \hat{O}_c são três operadores quaisquer, a expressão

$$[\hat{O}_a, \hat{O}_b] = \hat{O}_a \hat{O}_b - \hat{O}_b \hat{O}_a \quad (\text{A.17})$$

define o comutador de \hat{O}_a e \hat{O}_b e satisfaz as seguintes propriedades:

$$[\hat{O}_a, \hat{O}_b] = -[\hat{O}_b, \hat{O}_a] \text{ e } [\hat{O}_a \hat{O}_b, \hat{O}_c] = \hat{O}_a [\hat{O}_b, \hat{O}_c] + [\hat{O}_a, \hat{O}_c] \hat{O}_b. \quad (\text{A.18})$$

Já o anticomutador é definido como

$$\{\hat{O}_a, \hat{O}_b\} = \hat{O}_a \hat{O}_b + \hat{O}_b \hat{O}_a, \quad (\text{A.19})$$

e dizemos que \hat{O}_a e \hat{O}_b comutam se $\hat{O}_a \hat{O}_b = \hat{O}_b \hat{O}_a$ e anticomutam se $\hat{O}_a \hat{O}_b = -\hat{O}_b \hat{O}_a$. Como observaremos nos próximos capítulos, os operadores quânticos geralmente não obedecem a estas condições, mas, quando isto ocorre, surgem propriedades interessantes tais como a possibilidade de realizar medidas sem que o estado quântico em questão seja afetado (Apêndice B) e a reversibilidade de operações lógicas (Apêndice C).

A.2.4 Autovalores e Autovetores

Se o vetor gerado pelo mapeamento de \hat{O} sobre $|a\rangle \in H$ através da operação

$$\hat{O}|a\rangle = s_a|a\rangle \quad (\text{A.20})$$

for proporcional ao próprio vetor $|a\rangle$, este e o coeficiente de proporcionalidade s_a são definidos respectivamente como o autovetor e o autovalor de \hat{O} . Para um dado conjunto de N autovetores, existem no máximo N autovalores distintos associados aos primeiros, e dizemos que s_a é degenerado quando existem dois ou mais autovetores associados ao mesmo autovalor.

Na seção A.3, apresentaremos o procedimento mais comum empregado para o cálculo de autovalores, o qual é baseado na manipulação de determinantes. Veremos ainda que o conhecimento da relação entre um conjunto de vetores de uma determinada base e o operador em questão possibilita a representação de \hat{O} em função desta base, e retornaremos à discussão destas propriedades na seção B.2.

A.2.5 Operadores Hermitianos

Na seção B.2, mostraremos que as medidas de um observável são associadas a operadores hermitianos, mas, por enquanto, vamos nos concentrar apenas em sua

definição. Para qualquer operador \hat{O} , existe um operador correspondente \hat{O}^\dagger tal que

$$\langle b|\hat{O}a\rangle = \langle a\hat{O}^\dagger|b\rangle, \quad (\text{A.21})$$

onde \hat{O}^\dagger é denominado de operador adjunto ou hermitiano conjugado de \hat{O} . Além disso, para dois operadores \hat{O}^A e \hat{O}^B e dois vetores $|a\rangle$ e $|b\rangle$ quaisquer, as seguintes relações são sempre satisfeitas:

$$\begin{aligned} (\hat{O}^\dagger)^\dagger &= \hat{O}; & (\hat{O}^A\hat{O}^B)^\dagger &= \hat{O}^{\dagger B}\hat{O}^{\dagger A}; & (\hat{O}^A + \hat{O}^B)^\dagger &= \hat{O}^{\dagger B} + \hat{O}^{\dagger A} = \hat{O}^{\dagger A} + \hat{O}^{\dagger B}; \\ |a\rangle^\dagger &= \langle a|; & \langle a|^\dagger &= |a\rangle; & (|a\rangle\langle b|)^\dagger &= |b\rangle\langle a| \text{ e } |\hat{O}a\rangle^\dagger = \langle a\hat{O}^\dagger|. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Por sua vez, um operador \hat{O} é hermitiano (ou auto-adjunto) quando

$$\hat{O} = \hat{O}^\dagger, \quad (\text{A.23})$$

e um caso particular relevante ocorre quando este também é unitário. Um operador U é dito unitário se

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I, \quad (\text{A.24})$$

ou, de forma mais sucinta, $U^\dagger = U^{-1}$.

Observe que o produto escalar entre dois vetores quaisquer não é afetado quando um operador unitário U atua sobre ambos. De fato, se $|a'\rangle = U|a\rangle$ e $|b'\rangle = U|b\rangle$,

$$\langle a'|b'\rangle = \langle aU^\dagger|Ub\rangle = \langle a|I|b\rangle = \langle a|b\rangle; \quad (\text{A.25})$$

e, conseqüentemente, a norma entre estes vetores também permanece inalterada, independentemente das características que definem a transformação unitária em questão. Exploraremos esta propriedade na seção B.2 ao analisarmos a evolução de estados quânticos no tempo e nas propriedades das portas lógicas reversíveis discutidas no Apêndice C.

A.2.6 O Produto Tensorial

A noção de produto tensorial foi introduzida no final da seção A.1, onde apresentamos as propriedades relacionadas a vetores que residiam em espaços vetoriais independentes H_A e H_B cujas respectivas dimensões eram N_A e N_B . Agora, mostraremos como se comportam os operadores que atuam em um sistema composto no espaço $H_{A,B} \equiv H_A \otimes H_B$ com dimensão $N = N_A \times N_B$.

Sejam os estados de base $|u_i\rangle \in H_A$ e $|w_l\rangle \in H_B$ e dois operadores lineares $\hat{O}^A \in H_A$ e $\hat{O}^B \in H_B$. Neste caso, a ação simultânea destes operadores sobre um estado

composto $|g_a\rangle = \sum_{l=1}^{N_B} \sum_{i=1}^{N_A} D_{i,l}(|u_i\rangle \otimes |w_l\rangle)$ é expressa por

$$(\hat{O}^A \otimes \hat{O}^B)|g_a\rangle = \sum_{l=1}^{N_B} \sum_{i=1}^{N_A} D_{i,l}(\hat{O}^A|u_i\rangle \otimes \hat{O}^B|w_l\rangle), \quad (\text{A.26})$$

onde cada operador atua apenas no estado de base de seu respectivo espaço vetorial. Na próxima seção, mostraremos como representar vetores e operadores através de matrizes e abordaremos novamente as propriedades do produto tensorial.

A.3 Representação Matricial

A.3.1 Introdução

Nas seções anteriores, introduzimos o conceito de vetores e operadores como objetos com propriedades bem definidas e mostramos como se comportam suas componentes quando submetidas à operações algébricas. Nesta seção, mostraremos que é possível analisar estas propriedades sob a ótica da álgebra matricial.

Considere novamente a definição de vetores introduzida no início da seção A.1 e repare que cada *ket* pode ser representado por uma matriz coluna, assim como seu vetor dual *bra* pode ser expresso como uma matriz linha (ambos com dimensão N). Logo, um vetor $|a\rangle = (a_1, \dots, a_N)$ e seu dual $\langle a| = (a_1^*, \dots, a_N^*)$ podem ser descritos como

$$|a\rangle \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \langle a| \equiv [a_1^*, a_2^*, a_3^*, \dots, a_N^*], \quad (\text{A.27})$$

e é fácil verificar que todas as propriedades descritas na seção A.1 são compatíveis com a definição apresentada em (A.27). Para exemplificar, note que o produto escalar entre dois vetores quaisquer $|a\rangle = (a_1, \dots, a_N)$ e $|b\rangle = (b_1, \dots, b_N)$ dado por

$$\langle a|b\rangle = [a_1^*b_1 + a_2^*b_2 + a_3^*b_3 + \dots + a_N^*b_N] = \left[\sum_{i=1}^n a_i^*b_i \right] \quad (\text{A.28})$$

concorda com a Eq. (A.3).

Por sua vez, os operadores apresentados na seção A.2 serão descritos por matrizes quadradas, cuja representação particular será fruto da escolha de um conjunto de vetores associados a uma base específica. Logo, se um operador \hat{O} atua sobre um vetor

com dimensão N , sua matriz possuirá $N \times N = N^2$ elementos em

$$\hat{O} \equiv \begin{bmatrix} \hat{O}_{1,1} & \hat{O}_{1,2} & \cdots & \hat{O}_{1,N} \\ \hat{O}_{2,1} & \hat{O}_{2,2} & \cdots & \hat{O}_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{O}_{N,1} & \hat{O}_{N,2} & \cdots & \hat{O}_{N,N} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

e, por conseguinte, um elemento contido na linha i e coluna j de (A.29) será determinado pela expressão $\hat{O}_{i,j} = \langle u_i | \hat{O} u_j \rangle$, onde $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_N\rangle$ são os vetores que compõem a base em questão.

Se adaptarmos a Eq. (A.20) para a álgebra matricial como

$$\hat{O}|a\rangle = s_a|a\rangle \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{O}_{1,1} & \hat{O}_{1,2} & \cdots & \hat{O}_{1,N} \\ \hat{O}_{2,1} & \hat{O}_{2,2} & \cdots & \hat{O}_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{O}_{N,1} & \hat{O}_{N,2} & \cdots & \hat{O}_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = s_a \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

o autovalor s_a será obtido como solução da equação

$$\det \begin{bmatrix} \hat{O}_{1,1} - s_a & \hat{O}_{1,2} & \cdots & \hat{O}_{1,N} \\ \hat{O}_{2,1} & \hat{O}_{2,2} - s_a & \cdots & \hat{O}_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{O}_{N,1} & \hat{O}_{N,2} & \cdots & \hat{O}_{N,N} - s_a \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{A.31})$$

Como afirmamos na seção A.2, cada autoestado está associado a um autovalor correspondente, e nada impede que autoestados distintos possuam o mesmo autovalor. Na seção B.2, veremos que esta característica é conhecida como degenerescência, e discutiremos suas propriedades na definição dos postulados da Mecânica Quântica.

Um operador também pode ser descrito através de objetos semelhantes aos projetores: se associarmos o operador $|u_i\rangle\langle u_j|$ a cada elemento $\hat{O}_{i,j}$ da Eq. (A.29), podemos descrever esta matriz como

$$\hat{O} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \hat{O}_{i,j} |u_i\rangle\langle u_j|, \quad (\text{A.32})$$

cuja expressão é denominada de decomposição espectral de \hat{O} .

Por sua vez, se existir uma representação diagonal para \hat{O} em (A.29) tal

que

$$\hat{O} \equiv \begin{bmatrix} \hat{O}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{O}_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{O}_{N,N} \end{bmatrix} \equiv \sum_{i=1}^N s_{u_i} |u_i\rangle \langle u_i|, \quad (\text{A.33})$$

sua decomposição espectral será função apenas de seus autovalores, onde cada vetor $|u_i\rangle$ é um autoestado de \hat{O} associado a um autovalor s_{u_i} .

A.3.2 O Operador Inverso

Um operador inverso \hat{O}^{-1} é aquele que satisfaz as relações

$$\hat{O}\hat{O}^{-1} = \hat{O}^{-1}\hat{O} = I \text{ e } \det \hat{O}^{-1} = 1/\det \hat{O} \quad (\text{A.34})$$

para $\det \hat{O} \neq 0$, independentemente da representação matricial em questão. Mostraremos no Apêndice C que os operadores inversos e as matrizes de Pauli estão intrinsecamente ligados ao conceito de portas lógicas de circuitos quânticos.

A.3.3 O Produto Tensorial

Neste tópico, mostraremos como descrever o produto tensorial entre vetores (seção A.1) e operadores (seção A.2) através de matrizes. Sejam os estados de base $|u_i\rangle \in H_A$ e $|w_l\rangle \in H_B$ e dois operadores lineares quaisquer $\hat{O}^A \in H_A$ e $\hat{O}^B \in H_B$. Neste caso, o produto $\hat{O} = \hat{O}^A \otimes \hat{O}^B$ pode ser representado pela matriz dada por

$$\begin{bmatrix} \langle u_1 | \hat{O}^A u_1 \rangle (\hat{O}^B) & \langle u_1 | \hat{O}^A u_2 \rangle (\hat{O}^B) & \cdots & \langle u_1 | \hat{O}^A u_{N_a} \rangle (\hat{O}^B) \\ \langle u_2 | \hat{O}^A u_1 \rangle (\hat{O}^B) & \langle u_2 | \hat{O}^A u_2 \rangle (\hat{O}^B) & \cdots & \langle u_2 | \hat{O}^A u_{N_a} \rangle (\hat{O}^B) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle u_{N_a} | \hat{O}^A u_1 \rangle (\hat{O}^B) & \langle u_{N_a} | \hat{O}^A u_2 \rangle (\hat{O}^B) & \cdots & \langle u_{N_a} | \hat{O}^A u_{N_a} \rangle (\hat{O}^B) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.35})$$

a qual será expressa em função de uma base gerada por todas as combinações contidas no conjunto $|u_i\rangle \otimes |w_l\rangle$. Assim, se as dimensões de H_A e H_B forem respectivamente iguais a N_A e N_B , a matriz da Eq. (A.35) possuirá $N = N_A \times N_B$ estados de base compostos e N^2 elementos.

A mesma analogia pode ser estendida para sistemas de vetores compostos. Se $|v_1\rangle \in H_A$ e $|v_2\rangle \in H_B$ são dois vetores quaisquer tais que $|v_1\rangle = \sum_{i=1}^{N_A} C_{u_i} |u_i\rangle$ e $|v_2\rangle = \sum_{l=1}^{N_B} D_{w_l} |w_l\rangle$, o vetor composto $|v\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle$ será representado pela matriz

coluna dada por

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} C_{u_1} \begin{pmatrix} D_{w_1} \\ \vdots \\ D_{w_{N_b}} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ C_{u_{N_a}} \begin{pmatrix} D_{w_1} \\ \vdots \\ D_{w_{N_b}} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

onde $|v\rangle$ possui $N = N_A \times N_B$ elementos.

Veremos aplicações do produto tensorial no Apêndice C, ao analisar as transformações que atuam sobre estados quânticos que residem em sistemas independentes.

A.3.4 Operadores Hermitianos

O conceito de operadores hermitianos foi introduzido na seção A.2 sem maiores detalhes sobre a relação entre estes objetos e sua contraparte auto-adjunta. Neste tópico, mostraremos como construir a matriz do operador auto-adjunto \hat{O}^\dagger através de sua própria definição e de propriedades subseqüentes.

Segundo as Eqs. (A.21) e (A.23), um operador \hat{O} é hermitiano quando satisfaz as relações

$$\langle a|\hat{O}b\rangle = \langle a\hat{O}^\dagger|b\rangle = \langle b|\hat{O}^\dagger a\rangle^*. \quad (\text{A.37})$$

Se \hat{O} estiver expresso em termos de vetores $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_N\rangle$ pertencentes a uma base específica, os elementos que compõem a matriz hermitiana podem ser determinados a partir dos constituintes deste operador de acordo com a expressão

$$\langle u_i|\hat{O}u_j\rangle = \langle u_i\hat{O}^\dagger|u_j\rangle \Rightarrow \langle u_i|\hat{O}u_j\rangle = \langle u_j|\hat{O}^\dagger u_i\rangle^* \Rightarrow \hat{O}_{i,j} = (\hat{O}_{j,i}^\dagger)^* \Rightarrow (\hat{O}_{i,j})^* = \hat{O}_{j,i}^\dagger. \quad (\text{A.38})$$

Desse modo, cada termo $\hat{O}_{j,i}^\dagger$ da matriz \hat{O}^\dagger corresponderá ao complexo conjugado do elemento $\hat{O}_{i,j}$ de \hat{O} , e, portanto,

$$\hat{O}^\dagger = (\hat{O}^T)^*. \quad (\text{A.39})$$

Por sua vez, os elementos da diagonal principal de \hat{O} e \hat{O}^T são idênticos entre si e, como $\hat{O}_{i,i} = (\hat{O}_{i,i}^T)^* \Rightarrow \hat{O}_{i,i} = \hat{O}_{i,i}^*$, estes serão descritos por números reais. Logo, se o conjunto $|u_i\rangle$ for escolhido de modo que cada vetor corresponda a um autoestado de \hat{O} , os autovalores s_{u_i} obedecerão à relação $\hat{O}|u_i\rangle = s_{u_i}|u_i\rangle$, e os elementos da diagonal

principal serão dados por $\langle u_i \hat{O} | u_i \rangle = s_{u_i} \langle u_i | u_i \rangle = s_{u_i}$, de acordo com a Eq. (A.33). Visto que o último é uma grandeza invariante quanto à representação matricial, os autovalores de um operador hermitiano sempre serão descritos por números reais.

Vimos ainda na Eq. (A.25) que o produto escalar entre dois vetores não é afetado pela ação de operadores unitários. Desse modo, se analisarmos esta propriedade para os estados $|u_i\rangle$ e $|u'_i\rangle$ tal que $|u'_i\rangle = \hat{O}|u_i\rangle = s_{u_i}|u_i\rangle$, constataremos que

$$\langle u'_i | u'_i \rangle = \langle u_i \hat{O}^\dagger | \hat{O} u_i \rangle = \langle u_i | (s_{u_i})^* (s_{u_i}) | u_i \rangle = |s_{u_i}|^2 \langle u_i | u_i \rangle. \quad (\text{A.40})$$

Visto que $\langle u'_i | u'_i \rangle$ e $\langle u_i | u_i \rangle$ devem ser iguais, a relação $|s_{u_i}|^2 = 1$ implica que os autovalores de operadores hermitianos unitários possuem módulo um, e, portanto, $s_{u_i} = \pm 1$.

A.3.5 As Matrizes de Pauli

Há uma classe especial de operadores unitários que está presente na maioria dos protocolos de transmissão de informação quântica: as matrizes de Pauli. Denotadas por σ_x , σ_y e σ_z , estas matrizes podem ser combinadas para representar transformações unitárias que podem atuar sobre *qubits* (seção 2.1) sob os mais diversos fins, como mostraremos no Apêndice (C). Por ora, apresentaremos apenas algumas propriedades relacionadas a estes operadores.

A representação matricial padrão das matrizes de Pauli é dada por

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.41})$$

Neste caso, se a regra que define um conjunto de vetores linearmente independentes for adaptada para a álgebra matricial, observaremos que a condição $a(\sigma_x) + b(\sigma_y) + c(\sigma_z) + d(I) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -ib \\ ib & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c+d & a-ib \\ a+ib & -c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

só pode ser satisfeita para $a = b = c = d = 0$. Logo, as três matrizes de Pauli e a matriz Identidade são linearmente independentes entre si, e, portanto, as mesmas podem ser empregadas para representar qualquer matriz que possua dimensão 2×2 .

Os operadores de Pauli também satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I; \quad \sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z, \\ \sigma_y \sigma_z &= -\sigma_z \sigma_y = i\sigma_x \text{ e } \sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z = i\sigma_y. \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

De forma mais compacta, as mesmas podem ser reduzidas a

$$\sigma_k^2 = I \text{ e } \sigma_k \sigma_l = \epsilon_{klm} i\sigma_m, \quad (\text{A.44})$$

onde ϵ_{klm} é o símbolo de Levi-Civita relativo ao ordenamento $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 2$ e $z \rightarrow 3$. Neste caso, $\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1$, $\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$ e $\epsilon_{klm} = 0$ quando dois ou mais índices são iguais.

Observe as Eqs. (A.42) e (A.44) e repare que as matrizes de Pauli são hermitianas e idênticas à respectiva matriz inversa, e que, portanto, também são unitárias. Além disso, todas apresentam relações de anticomutatividade, conceito que retomaremos na próximo tópico.

A.3.6 Comutadores e Anti-Comutadores

Outra característica que reforça a associação entre operadores na Mecânica Quântica e sua representação matricial deve-se ao fato de que geralmente duas matrizes aleatórias não obedecem às relações de comutatividade e anti-comutatividade. Para comprovar esta afirmação, basta efetuar os produtos $M_a M_b$ e $M_b M_a$ para duas matrizes M_a e M_b quaisquer e conferir o resultado. Quando dois operadores comutam, é possível encontrar uma base cujos estados sejam autoestados de ambos os operadores, e, neste caso, os mesmos podem ser representados como matrizes em função desta base em comum.

Na seção B.3 discutiremos o Princípio da Incerteza, e as relações de comutatividade serão essenciais para entendermos este conceito.

Apêndice B

Os Postulados da Mecânica Quântica

B.1 Postulado I

O estado S de um sistema físico é completamente descrito por um vetor unitário $|\Psi\rangle$ que reside no espaço de Hilbert H_s associado ao sistema. Este vetor é conhecido como vetor de estado ou função de onda, cuja evolução temporal é governada pela equação de Schrödinger dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle, \quad (\text{B.1})$$

onde H é um operador auto-adjunto que representa o Hamiltoniano do sistema e $\hbar = h/2\pi$, sendo h a constante de Planck determinada experimentalmente como $h \approx 6,626 \times 10^{-34} \text{ J.s}$.

Como a Eq. (B.1) é uma equação diferencial linear de primeira ordem, qualquer combinação linear de soluções particulares também é uma solução desta equação. Isto indica que H pode ser associado a um operador linear se a função de onda $|\Psi\rangle$ apresentar características típicas de um vetor ordinário, e, de fato, todas as propriedades discutidas para vetores e operadores no Apêndice (A) são compatíveis com a Eq. de Schrödinger e suas soluções.

O físico alemão (e compatriota de Erwin Schrödinger) Werner Heisenberg foi um dos primeiros a observar que a dinâmica proposta na Eq. (B.1) poderia ser descrita por uma álgebra matricial (cuja proposta ficou conhecida posteriormente como Mecânica Matricial), mas, no início, houve rejeição desta abordagem pela comunidade científica sob a alegação de que a mesma seria incompatível com a interpretação da Mecânica Quântica proveniente da formulação de Schrödinger. Sob o incentivo do matemático alemão David Hilbert, foram necessários alguns anos de espera até que o próprio Schrödinger e o físico americano Carl Eckart demonstrassem a equivalência entre estas descrições, provando que as mesmas explicavam fenômenos idênticos.

A natureza da função de onda pode ser definida em um espaço de Hilbert em termos de variáveis discretas ou contínuas. Para o primeiro caso, $|\Psi\rangle$ possuiria dimensão finita e o número de coordenadas que o definiria seria limitado, e, dessa forma, seria

possível associar à função de onda as mesmas propriedades associadas a vetores discutidas na seção A.1. Para o segundo, entretanto, $|\Psi\rangle$ é visto como uma função contínua de parâmetros específicos (como as coordenadas espaciais em um sistema tridimensional) e o espaço de Hilbert assume dimensão infinita (Messiah, 1961; Braunstein and Kimble, 1998; Braunstein and Van Loock, 2005 e Vaidman, 1994). O foco do presente trabalho está no primeiro caso, ou seja, em sistemas com dimensão finita e coordenadas bem definidas. Deste ponto em diante, portanto, assumiremos que nosso espaço de Hilbert H_s é sempre limitado. Vejamos então como determinar a função de onda sob estas restrições.

Todo sistema quântico é governado por uma dinâmica intrínseca ao mesmo que rege seu comportamento ao longo do tempo através da relação (Benenti et al., 2007)

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\Psi(t_0)\rangle, \quad (\text{B.2})$$

onde $U(t, t_0)$ é denominado de operador de evolução temporal e $|\Psi(t_0)\rangle$ é o estado do sistema em algum instante $t_0 < t$. De uma forma geral, como as características de $|\Psi(t)\rangle$ dependem da relação entre $|\Psi(t_0)\rangle$ e $U(t, t_0)$, não há como prever a estrutura da função de onda sem dispor de informações que caracterizem seu estado inicial e o operador em questão.

Quando H é independente do tempo, a solução da Eq. (B.1) é dada por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathbf{H}}|\Psi(t_0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0) \right)^n (H)^n |\Psi(t_0)\rangle, \quad (\text{B.3})$$

onde $U(t, t_0) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathbf{H}}$. Deste modo, o cenário mais simples associado às Eqs. (B.2) e (B.3) ocorre quando o sistema é estacionário: $U(t, t_0) \propto I$ e $|\Psi(t)\rangle \propto |\Psi(t_0)\rangle$. Contudo, quando os parâmetros implícitos no Hamiltoniano dependem do tempo decorrido entre t_0 e t , é necessário recorrer a outros tipos de técnicas para o cálculo de $|\Psi(t)\rangle$. Uma delas, por exemplo, consiste em obter aproximações da matriz H através de métodos semelhantes à expansão de funções em séries de Taylor.

O próximo postulado relaciona os coeficientes que caracterizam um estado quântico às probabilidades de se obter o estado associado a este coeficiente como resultado de uma determinada medida.

B.2 Postulado II

A cada observável O , associa-se um operador auto-adjunto \hat{O} que reside em um espaço de Hilbert H_s . Se uma medida de O for realizada sobre um sistema, os únicos resultados possíveis serão os autovalores s_{u_i} do operador \hat{O} segundo a relação

$$\hat{O}|u_i\rangle = s_{u_i}|u_i\rangle, \quad (\text{B.4})$$

onde $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots$ é uma base ortonormal de autoestados de \hat{O} . Se o vetor de estado do sistema for expandido sobre esta base como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_i C_{u_i}(t)|u_i\rangle, \quad (\text{B.5})$$

a probabilidade de s_{u_i} ser o resultado de uma medida do observável \hat{O} em um instante t é dada por

$$p(s_{u_i}|t) = |\langle u_i|\Psi(t)\rangle|^2 = |C_{u_i}(t)|^2. \quad (\text{B.6})$$

A unitariedade de $|\Psi\rangle$ imposta pelo Postulado I agora pode ser compreendida. Repare que a probabilidade associada ao resultado de uma das medidas de \hat{O} está relacionada ao coeficiente $C_{u_i}(t)$ (também chamado de amplitude de probabilidade), e que, se considerarmos o conjunto de todos os resultados possíveis, a soma das probabilidades relacionadas a estes eventos deve ser necessariamente igual a um. Como $p(s_{u_i}|t) = |\langle u_i|\Psi(t)\rangle|^2 = |C_{u_i}(t)|^2$, a condição

$$|\Psi(t)|^2 = \sum_i |C_{u_i}(t)|^2 = 1 \quad (\text{B.7})$$

deve ser satisfeita. Logo, se $|\Psi(t)\rangle$ representa o estado de um sistema, ele é obrigatoriamente unitário.

Os valores de observáveis previstos nas medidas associadas a operadores quânticos são análogos às grandezas descritas por variáveis dinâmicas clássicas, como posição, energia, momentos linear e angular, dentre outras. Contudo, a medida dos autovalores segue uma distribuição probabilística, e estes não podem ser confundidos com parâmetros intrínsecos do sistema: carga elétrica e massa, por exemplo, são invariantes em relação ao referencial de observação em situações não-relativísticas. Por outro lado, há observáveis quânticos que não possuem análogos clássicos (como o operador de *spin* S), sendo este um dos fatores que contribuem para que a Mecânica Quântica forneça uma descrição mais completa da natureza do que a Mecânica Clássica.

Vimos na seção anterior que se o Hamiltoniano for independente do tempo, a solução para $|\Psi(t)\rangle$ na Eq. (B.1) é dada por $|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathbf{H}}|\Psi(t_0)\rangle$ (Eq. (B.3)). Como o Postulado II afirma que os possíveis resultados associados a um operador são equivalentes aos seus respectivos autovalores, podemos expressar $|\Psi(t)\rangle$ em termos dos autoestados de H e simplificar a expressão (B.3). Neste sentido, os autoestados e os autovalores de H podem ser representados respectivamente por $|N\rangle$ e E_N , onde N é o parâmetro que define a energia E_N do sistema. Deste modo,

$$H|N\rangle = E_N|N\rangle \quad \text{para } N \in \mathbb{N}, \quad (\text{B.8})$$

e, por conseguinte,

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0) \right)^N (H)^N |N\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(-\frac{i}{\hbar}(t-t_0) \right)^N (E_N)^N |N\rangle = e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar} E_N} |N\rangle. \quad (\text{B.9})$$

Ao expandir o estado inicial da função de onda como $|\Psi(t_0)\rangle = \sum_N C_N(t_0)|N\rangle$ e submetê-lo à ação do operador H , observamos que

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mathbf{H}} |\Psi(t_0)\rangle = \sum_N C_N(t_0) e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar} E_N} |N\rangle, \quad (\text{B.10})$$

e que, portanto, $|\Psi(t)\rangle$ pode ser expresso em função dos valores de energia E_N que surgem como solução das Eqs. (B.2) e (B.8). Para o caso particular no qual o estado inicial coincide com um dos autoestados de H tal que $|\Psi(t_0)\rangle = |N\rangle$, o estado final da função de onda é dado por

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar} E_N} |N\rangle, \quad (\text{B.11})$$

e, como $|e^{i\theta}| \equiv 1$ para qualquer parâmetro real θ , a norma de $|\Psi(t)\rangle$ é equivalente a

$$\| |\Psi(t)\rangle \| = \left| e^{-\frac{i(t-t_0)}{\hbar} E_N} \right| \times \| |N\rangle \| = \| |N\rangle \|. \quad (\text{B.12})$$

A invariância da norma de $|\Psi(t)\rangle$ em relação ao tempo na Eq. (B.12) implica que a transformação $U(t) \propto I$ é unitária (Eq. A.25), e que, portanto, a probabilidade $|C_N(t)|^2$ de o sistema ser encontrado no autoestado estacionário $|N\rangle$ durante o intervalo de tempo decorrido entre t_0 e t é constante. Neste caso, a analogia da ação do operador \hat{H} com o conceito clássico de conservação de energia é válida, visto que qualquer medida sobre $|\Psi(t)\rangle$ revela sempre o mesmo valor de energia E_N . Repare ainda que sistemas que diferem pelo fator $e^{i\theta}$ são equivalentes, já que as previsões relativas às probabilidades de colapso para um determinado estado são idênticas para ambos. Assim, dizemos que dois sistemas $|\Psi(t)\rangle$ e $|\Psi'(t)\rangle$ são semelhantes se a única diferença entre eles for um fator de fase igual a $e^{i\theta}$, onde θ é um parâmetro que pode ser associado a um número real qualquer.

O postulado seguinte analisa a relação entre os resultados obtidos após uma determinada medida sobre o sistema e o colapso da função de onda para um dos autoestados do operador associado a esta medição.

B.3 Postulado III

Quando a medida de um observável \hat{O} sobre um sistema descrito inicialmente pelo vetor de estado $|\Psi\rangle$ fornece o resultado s_{u_i} , o estado deste sistema passa a ser

descrito por

$$\frac{\hat{P}_{u_i}|\Psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle\Psi(t)|\hat{P}_{u_i}|\Psi(t)\rangle}} \quad (\text{B.13})$$

imediatamente após a realização desta medida, onde \hat{P}_{u_i} é o operador de projeção relativo ao subespaço correspondente a s_{u_i} .

Iniciaremos a análise do terceiro postulado considerando que os autovalores s_{u_i} de \hat{O} não sejam degenerados, e lembrando que a expressão $\hat{O}|u_i\rangle = s_{u_i}|u_i\rangle$ é válida para qualquer autoestado $|u_i\rangle$ de \hat{O} . Assim, quando a medida deste operador sobre o sistema fornecer o autovalor s_{u_i} como resultado, as Eqs. (B.5) e (B.6) prevêm que o sistema sofrerá um colapso para $|u_i\rangle$. Se compararmos esta premissa com a Eq. (B.13), concluiremos que ambas são equivalentes, pois, como s_{u_i} não é degenerado, $|u_i\rangle$ será o único estado contido no projetor \hat{P}_{u_i} associado a este autovalor. Ao substituir o termo $\hat{P}_{u_i} = |u_i\rangle\langle u_i|$ em (B.13), constatamos que

$$\frac{\hat{P}_{u_i}|\Psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle\Psi(t)|\hat{P}_{u_i}|\Psi(t)\rangle}} = \frac{|u_i\rangle\langle u_i|\Psi(t)\rangle}{\sqrt{|\langle u_i|\Psi(t)\rangle|^2}} = \frac{\langle u_i|\Psi(t)\rangle}{|\langle u_i|\Psi(t)\rangle|}|u_i\rangle = e^{i\theta_i}|u_i\rangle, \quad (\text{B.14})$$

o que comprova a afirmação de que o sistema se encontra no estado unitário $|u_i\rangle$ a menos de uma fase global θ_i , de acordo com a Eq. B.12.

Mas e se o autovalor s_{u_i} for degenerado? Neste caso, há um subespaço de \hat{O} associado a s_{u_i} e o projetor \hat{P}_{u_i} é dado por $\hat{P}_{u_i} = \sum_{g=1}^k |u_{g_i}\rangle\langle u_{g_i}|$, onde k é o número de degenerescências associado a este autovalor. A Eq. (B.13) pode então ser expressa como

$$\frac{\hat{P}_{u_i}|\Psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle\Psi(t)|\hat{P}_{u_i}|\Psi(t)\rangle}} = \frac{\left(\sum_{g_i=1}^{k_i} |u_{g_i}\rangle\langle u_{g_i}|\right)|\Psi(t)\rangle}{\sqrt{\left(\sum_{g_i=1}^{k_i} \langle\Psi(t)|u_{g_i}\rangle\langle u_{g_i}|\Psi(t)\rangle\right)}} = \frac{\sum_{g_i=1}^{k_i} \langle u_{g_i}|\Psi(t)\rangle|u_{g_i}\rangle}{\sqrt{\sum_{g_i=1}^{k_i} |\langle u_{g_i}|\Psi(t)\rangle|^2}}, \quad (\text{B.15})$$

e o novo sistema será um vetor unitário formado pela combinação de estados proporcionais a $|u_{g_i}\rangle$.

Note na Eq. (B.15) que a probabilidade de o sistema colapsar para $|u_{g_i}\rangle$ é dada por

$$p_{u_i} = \sum_{g_i=1}^{k_i} |\langle u_{g_i}|\Psi(t)\rangle|^2 = \langle\Psi(t)|\hat{P}_{u_i}|\Psi(t)\rangle, \quad (\text{B.16})$$

e que as Eqs. (A.33) e (B.16) podem ser utilizadas para calcular o valor esperado sobre

todos os resultados possíveis da medida do operador \hat{O} sobre o estado $|\Psi\rangle$, visto que

$$\begin{aligned}\langle\hat{O}\rangle &= \sum_{i=1}^N s_{u_i} p_{u_i} = \sum_{i=1}^N s_{u_i} \langle\Psi(t)|\hat{P}_{u_i}|\Psi(t)\rangle = \sum_{i=1}^N s_{u_i} \langle\Psi(t)|\left(\sum_{g_i=1}^{k_i} |u_{g_i}\rangle\langle u_{g_i}|\right)|\Psi(t)\rangle \\ &= \langle\Psi(t)|\left(\sum_{i=1}^N \sum_{g_i=1}^{k_i} s_{u_i} |u_{g_i}\rangle\langle u_{g_i}|\right)|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(t)|\hat{O}|\Psi(t)\rangle.\end{aligned}\quad (\text{B.17})$$

Repare ainda que (B.16) e (B.17) concordam respectivamente com (2.14) e (2.16).

Encerraremos a análise destes Postulados discutindo a precisão dos resultados que podem ser obtidos através de medidas de grandezas arbitrárias. Por definição, a descrição de uma variável implícita em um sistema quântico deve estar associada a um erro intrínseco que não depende do resultado da realização de medidas sobre este sistema. Assim, se um observável \hat{O} é utilizado para descrever os resultados associados a uma determinada variável arbitrária, $\Delta\hat{O}$ é o erro intrínseco desta grandeza dado por

$$\Delta\hat{O} = \sqrt{\langle\hat{O}^2\rangle - \langle\hat{O}\rangle^2}, \quad (\text{B.18})$$

onde $\langle\hat{O}\rangle$ e $\langle\hat{O}^2\rangle$ são dados pela Eq. (B.17).

Por sua vez, se quisermos medir dois parâmetros associados a operadores \hat{O}_a e \hat{O}_b simultaneamente e saber o quão confiável é o resultado final, a expressão

$$\Delta\hat{O}_a\Delta\hat{O}_b = \frac{|\langle\Psi|[\hat{O}_a, \hat{O}_b]|\Psi\rangle|}{2} \quad (\text{B.19})$$

fornece o limite mínimo do produto dos desvios padrão destes operadores, onde $[\hat{O}_a, \hat{O}_b]$ é o comutador dos operadores \hat{O}_a e \hat{O}_b (seção A.2). A Eq. (B.19) é conhecida como o *Princípio da Incerteza*.

Logo, se \hat{O}_a e \hat{O}_b comutam ($\Delta\hat{O}_a\Delta\hat{O}_b = 0$), é possível realizar medidas para estes operadores sem alterar a função de onda associada ao estado do sistema. Contudo, se $[\hat{O}_a, \hat{O}_b] \neq 0 \Rightarrow \Delta\hat{O}_a\Delta\hat{O}_b \neq 0$, os resultados associados as duas medidas não poderão ser obtidos simultaneamente sem a presença de algum erro intrínseco. Neste caso, quanto maior a informação obtida sobre uma das medidas, maior será a incerteza associada a outra. Como exemplo, podemos citar a relação entre o momento linear de uma partícula e a posição da mesma sobre um determinado eixo espacial. Visto que o resultado é válido para qualquer escolha de coordenadas, podemos supor que o eixo em questão seja relativo ao das coordenadas z . Assim, o Princípio da Incerteza nos diz que

$$\Delta\hat{z}\Delta\hat{p}_z \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (\text{B.20})$$

e, portanto, o valor mínimo associado ao produto das respectivas incertezas de \hat{z} e \hat{p}_z é igual a $\hbar/2$. Desse modo, qualquer resultado obtido com a medida destas grandezas implica na existência de uma determinada margem de erro não-nula associada a este valor.

Apêndice C

Portas Lógicas Quânticas

Apresentaremos neste apêndice as principais operações lógicas utilizadas para alterar o conteúdo de estados quânticos compostos por um ou dois *qubits*, utilizando como referência a respectiva atuação das mesmas sobre os sistemas arbitrários descritos pelos estados $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e $\alpha'|00\rangle_{a,b} + \beta'|01\rangle_{a,b} + \gamma'|10\rangle_{a,b} + \delta'|11\rangle_{a,b}$. A seqüência entre os tópicos de cada seção foi escolhida de acordo com a complexidade dos sistemas abordados, e, por isso, iniciaremos esta discussão demonstrando a relação direta entre os operadores de Pauli e as portas elementares de um *qubit*. Ao longo das próximas seções, mostraremos que todas as portas são reversíveis e que cada transformação linear determina o estado final do sistema de forma unívoca.

C.0.1 Portas de um *Qubit*

Os Operadores de Pauli:

A representação das matrizes de Pauli na base computacional padrão foi introduzida na Eq. (A.41) sem maiores discussões sobre o modo como as mesmas atuavam sobre os autoestados de σ_z . Vejamos então como estes operadores descrevem a ação das portas lógicas X , Y e Z .

Porta X (NOT): tal como sua análoga clássica, a porta X (ou *NOT*) inverte o conteúdo de um *qubit* ao intercambiar os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

$$\sigma_x|0\rangle = |1\rangle \text{ e } \sigma_x|1\rangle = |0\rangle \Rightarrow \sigma_x(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle. \quad (\text{C.1})$$

Porta Z: a porta Z mantém o *qubit* $|0\rangle$ inalterado e inverte o sinal do fator de fase atrelado ao estado $|1\rangle$.

$$\sigma_z|0\rangle = |0\rangle \text{ e } \sigma_z|1\rangle = -|1\rangle \Rightarrow \sigma_z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle. \quad (\text{C.2})$$

Porta Y: a porta Y introduz o fator de fase i e inverte o conteúdo dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$. No caso do último, o sinal relativo às constantes multiplicativas $+1$ ou

-1 também sofre inversão.

$$\sigma_y|0\rangle = i|1\rangle \text{ e } \sigma_y|1\rangle = -i|0\rangle \Rightarrow \sigma_y(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = i\alpha|1\rangle - i\beta|0\rangle. \quad (\text{C.3})$$

Como complemento aos operadores de Pauli, merecem destaque duas operações essenciais para a manipulação de *qubits* individuais: as portas *Hadamard* e *Fase*.

Hadamard: a porta H gera uma superposição simétrica entre os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$.

$$H|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \text{ e } H|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow H(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right). \quad (\text{C.4})$$

Fase: a porta de *Fase* mantém o *qubit* $|0\rangle$ inalterado e acrescenta o fator de fase i ao estado $|1\rangle$.

$$S|0\rangle = |0\rangle \text{ e } S|1\rangle = i|1\rangle \Rightarrow S(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + i\beta|1\rangle. \quad (\text{C.5})$$

A Fig. C.1 mostra o diagrama das principais portas simples que podem atuar sobre um *qubit*, com suas respectivas nomenclaturas e representações matriciais.

| | | |
|----------|-----------------|--|
| Hadamard | — \boxed{H} — | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ |
| Pauli-X | — \boxed{X} — | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ |
| Pauli-Y | — \boxed{Y} — | $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ |
| Pauli-Z | — \boxed{Z} — | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ |
| Fase | — \boxed{S} — | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ |

Figura C.1: Portas simples que atuam sobre um *qubit*, suas respectivas nomenclaturas e representações matriciais.

Fonte: Figura adaptada de *Nielsen and Chuang, 2011*.

C.0.2 Portas de dois *Qubits*

As portas que atuam sobre dois *qubits* operam no espaço que contém os estados $|0\rangle|0\rangle$, $|0\rangle|1\rangle$, $|1\rangle|0\rangle$ e $|1\rangle|1\rangle$. Quando uma porta é classificada como "controlada", o estado final do par de *qubits* só é alterado quando o *qubit* de controle está ativo, como mostra o exemplo da Fig. C.2 para a porta C_{NOT} . Observe que o círculo menor está posicionado sobre o *qubit* de controle e que o mecanismo de operação da porta está

condicionado ao preenchimento deste símbolo: para o círculo vazio, a porta entra em ação quando o estado de controle é igual a $|0\rangle$, e para o círculo cheio a ativação ocorre quando o estado de controle é igual a $|1\rangle$. Neste trabalho, adotamos a notação indicada na primeira ilustração, assumindo que as portas são ativadas quando o primeiro *qubit* encontra-se no estado $|1\rangle$.

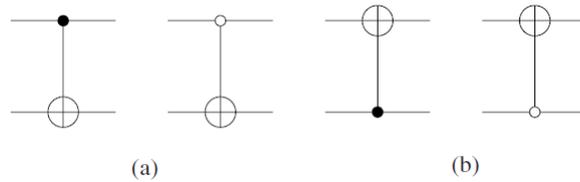


Figura C.2: Figura esquemática para portas de dois qubits. Em (a): controle no primeiro qubit. Em (b): controle no segundo qubit. O círculo menor preenchido no qubit de controle denota que a ativação da porta ocorre quando o estado de entrada é igual a $|1\rangle$, e o círculo menor vazio no qubit de controle representa a ativação da porta quando o estado de entrada é igual a $|0\rangle$.

Fonte: Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011.

Not-Controlada: a porta C_{NOT} inverte o conteúdo do segundo *qubit* quando o estado do *qubit* de controle é igual a $|1\rangle$.

$$\begin{aligned}
 C_{NOT_{a,b}}|0\rangle|0\rangle &= |0\rangle|0\rangle; C_{NOT_{a,b}}|0\rangle|1\rangle = |0\rangle|1\rangle; C_{NOT_{a,b}}|1\rangle|0\rangle = |1\rangle|1\rangle; C_{NOT_{a,b}}|1\rangle|1\rangle = |1\rangle|0\rangle. \\
 \Rightarrow C_{NOT_{a,b}}(\alpha'|00\rangle_{a,b} + \beta'|01\rangle_{a,b} + \gamma'|10\rangle_{a,b} + \delta'|11\rangle_{a,b}) \\
 &= \alpha'|00\rangle_{a,b} + \beta'|01\rangle_{a,b} + \gamma'|11\rangle_{a,b} + \delta'|10\rangle_{a,b}.
 \end{aligned}
 \tag{C.6}$$

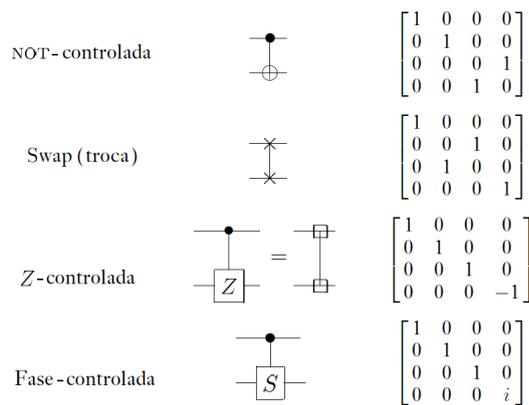


Figura C.3: Portas que atuam sobre dois qubits, suas respectivas nomenclaturas e representações matriciais.

Fonte: Figura adaptada de Nielsen and Chuang, 2011.

Sw(Troca): a porta Sw permuta o conteúdo dos dois *qubits*.

$$\begin{aligned}
 (Sw)_{a,b}|0\rangle|0\rangle &= |0\rangle|0\rangle; (Sw)_{a,b}|0\rangle|1\rangle = |1\rangle|0\rangle; (Sw)_{a,b}|1\rangle|0\rangle = |0\rangle|1\rangle; (Sw)_{a,b}|1\rangle|1\rangle = |1\rangle|1\rangle. \\
 \Rightarrow (Sw)_{a,b}(\alpha'|00\rangle_{a,b} + \beta'|01\rangle_{a,b} + \gamma'|10\rangle_{a,b} + \delta'|11\rangle_{a,b}) \\
 &= \alpha'|00\rangle_{a,b} + \beta'|10\rangle_{a,b} + \gamma'|01\rangle_{a,b} + \delta'|11\rangle_{a,b}.
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

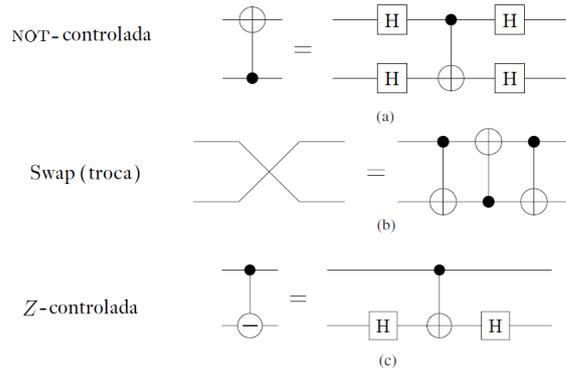


Figura C.4: Construindo portas de dois *qubits* a partir de portas de um *qubit*. Em (a): a porta C_{NOT} com controle no segundo *qubit*. Em (b): a porta Sw . Em (c): a porta Z – Controlada com controle no primeiro *qubit*.

Fonte: Figura adaptada de *Nielsen and Chuang, 2011*.

Z-Controlada: a porta Z inverte o sinal global entre os dois *qubits* quando o controle e o alvo são iguais a $|1\rangle$.

$$\begin{aligned}
 Z_{a,b}|0\rangle|0\rangle &= |0\rangle|0\rangle; Z_{a,b}|0\rangle|1\rangle = |0\rangle|1\rangle, Z_{a,b}|1\rangle|0\rangle = |1\rangle|0\rangle; Z_{a,b}|1\rangle|1\rangle = -|1\rangle|1\rangle. \\
 Z_{a,b}(\alpha'|00\rangle_{a,b} + \beta'|01\rangle_{a,b} + \gamma'|10\rangle_{a,b} + \delta'|11\rangle_{a,b}) \\
 &= \alpha'|00\rangle_{a,b} + \beta'|01\rangle_{a,b} + \gamma'|10\rangle_{a,b} - \delta'|11\rangle_{a,b}.
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Fase-Controlada: a porta de *Fase* acrescenta a fase i entre os dois *qubits* quando o controle e o alvo são iguais a $|1\rangle$.

$$\begin{aligned}
 S_{a,b}|0\rangle|0\rangle &= |0\rangle|0\rangle; S_{a,b}|0\rangle|1\rangle = |0\rangle|1\rangle, S_{a,b}|1\rangle|0\rangle = |1\rangle|0\rangle; S_{a,b}|1\rangle|1\rangle = i|1\rangle|1\rangle. \\
 S_{a,b}(\alpha'|00\rangle_{a,b} + \beta'|01\rangle_{a,b} + \gamma'|10\rangle_{a,b} + \delta'|11\rangle_{a,b}) \\
 &= \alpha'|00\rangle_{a,b} + \beta'|01\rangle_{a,b} + \gamma'|10\rangle_{a,b} + i\delta'|11\rangle_{a,b}.
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

A Fig. C.1 mostra o diagrama das principais portas de dois *qubits* com suas respectivas nomenclaturas e representações matriciais, e a Fig. C.4 revela que as mesmas podem ser construídas a partir da combinação entre portas C_{NOT} e portas simples de um *qubit*.

Referências Bibliográficas

- Agrawal, P. and Pati, A. K. (2002), ‘Probabilistic quantum teleportation’, *Physics Letters A* **305**, 12–17. [67](#)
- Bell, J. S. et al. (1964), ‘On the einstein-podolsky-rosen paradox’, *Physics* **1**(3), 195–200. [36](#)
- Benenti, G., Casati, G. and Strini, G. (2007), *Principles of Quantum Computation And Information: Basic Tools And Special Topics*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, USA. [xiii](#), [5](#), [22](#), [25](#), [30](#), [34](#), [35](#), [38](#), [43](#), [131](#), [144](#)
- Bennett, C. H. and Brassard, G. (1984), Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing, *in* ‘Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing’, IEEE Press, New York, pp. 175–179. [1](#)
- Bennett, C. H., Brassard, G., Crepeau, C., Jozsa, R., Peres, A. and Wootters, W. K. (1993), ‘Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels’, *Physical Review Letters* **70**, 1895–1899. [1](#), [3](#), [63](#)
- Boschi, D., Branca, S., De Martini, F., Hardy, L. and Popescu, S. (1998), ‘Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels’, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121–1125. [1](#)
- Bouwmeester, D., Pan, J. W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H. and Zeilinger, A. (1998), ‘Experimental quantum teleportation’, **356**, 1733. [1](#)
- Braunstein, S. L. and Kimble, H. J. (1998), ‘Teleportation of continuous quantum variables’, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 869–872. [144](#)
- Braunstein, S. L. and Van Loock, P. (2005), ‘Quantum information with continuous variables’, *Reviews of Modern Physics* **77**, 513–577. [144](#)
- Callen, H. B. (1985), *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics; 2nd ed.*, Wiley, New York, NY. [58](#)
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloe, F. and Dui, B. (2006), *Quantum Mechanics (2 vol. set)*, Wiley-Interscience. [131](#)

- Cover, T. M. and Thomas, J. A. (2006), *Elements of Information Theory (Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing)*, Wiley-Interscience. 31
- Einstein, A. (1916), ‘The foundation of the general theory of relativity’, *Annalen der Physik* **49**(7), 769–822. 67
- Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. (1935), ‘Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?’, *Physical Review* **47**, 777–780. 1
- Ekert, A. K. (1991), ‘Quantum cryptography based on bell’s theorem’, *Physical Review Letters* **67**, 661–663. 1
- Feynman, R., Leighton, R. and Sands, M. (1963), *The Feynman Lectures on Physics*, The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley. 7
- Fortes, R. (2012), Estados parcialmente emaranhados em comunicação quântica, Master’s thesis, Universidade Federal de São Carlos. 63
- Fortes, R. and Rigolin, G. (2013), ‘Improving the efficiency of single and multiple teleportation protocols based on the direct use of partially entangled states’, *Annals of Physics* **336**, 517–539. 67
- Fortes, R. and Rigolin, G. (2015), ‘Fighting noise with noise in realistic quantum teleportation’, *Phys. Rev. A* **92**, 012338. 3
- Fortes, R. and Rigolin, G. (2016), ‘Probabilistic quantum teleportation in the presence of noise’, *eprint arXiv:quant-ph/1604.04644* . 3
- Griffiths, D. (2005), *Introduction to Quantum Mechanics*, Pearson Prentice Hall. 19, 131
- Grover, L. K. (1996), ‘A fast quantum mechanical algorithm for database search’, *eprint arXiv:quant-ph/9605043* . 1
- Horodecki, M., Horodecki, P. and Horodecki, R. (1996), ‘Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions’, *eprint arXiv:quant-ph/9605038* . 39
- Kraus, K., Böhm, A., Dollard, J. and Wootters, W. (1983), *States, effects, and operations: fundamental notions of quantum theory: lectures in mathematical physics at the University of Texas at Austin*, Lecture notes in physics, Springer-Verlag. 23
- Li, W.-L., Li, C.-F. and Guo, G.-C. (2000), ‘Probabilistic teleportation and entanglement matching’, *Phys. Rev. A* **61**, 034301. 36, 67
- Massar, S. and Popescu, S. (1995), ‘Optimal extraction of information from finite quantum ensembles’, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1259–1263. 2, 73, 75, 77, 78

- Mermin, N. D. (2007), *Quantum Computer Science: An Introduction*, Cambridge University Press, New York, NY, USA. 5
- Messiah, A. (1961), *Quantum Mechanics Volumes I and II*, Elsevier Science B.V. 144
- Neumann, J. V. (1955), *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Investigations in physics, Princeton University Press. 10, 35
- Nielsen, M. A. and Chuang, I. L. (2011), *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*, 10th edn, Cambridge University Press, New York, NY, USA. xiii, xiv, xx, xxi, 5, 6, 48, 50, 51, 53, 54, 56, 150, 151, 152
- Oh, S., Lee, S. and Lee, H.-w. (2002), ‘Fidelity of quantum teleportation through noisy channels’, *Phys. Rev. A* **66**, 022316. 2
- Peres, A. (1996), ‘Separability criterion for density matrices’, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413–1415. 39
- Rigolin, G. (2005), Estados Quânticos Emaranhados, PhD thesis, Instituto de Física Gleb Wataghin. 63
- Rigolin, G. (2009), ‘Unity fidelity multiple teleportation using partially entangled states’, *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics* **42**, 235504. 67
- Shor, P. W. (1996), Fault-tolerant quantum computation, in ‘Proceedings of the 37th Annual Symposium on Foundations of Computer Science’, FOCS ’96, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, pp. 56–. 1
- Taketani, B. G., de Melo, F. and de Matos Filho, R. L. (2012), ‘Optimal teleportation with a noisy source’, *Phys. Rev. A* **85**, 020301. 2
- Vaidman, L. (1994), ‘Teleportation of quantum states’, *Phys. Rev. A* **49**, 1473–1476. 144
- Vidal, G. (1999), ‘Entanglement of pure states for a single copy’, *Physics Review Letters* **83**, 1046–1049. 37
- Wootters, W. K. (1998), ‘Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits’, *Physical Review Letters* **80**, 2245–2248. 20, 21