



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE  
CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA  
(ILACVN)**

**MATEMÁTICA**

**CONCEITOS MATEMÁTICOS NO ENSINO FUNDAMENTAL  
CONSTRUINDO SIGNIFICADOS POR MEIOS GEOMÉTRICOS**

**ISABELLI GUIMARÃES DA SILVA**

Foz do Iguaçu  
2023



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE  
CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA  
(ILACVN)**

**MATEMÁTICA**

**CONCEITOS MATEMÁTICOS NO ENSINO FUNDAMENTAL  
CONSTRUINDO SIGNIFICADOS POR MEIOS GEOMÉTRICOS**

**ISABELLI GUIMARÃES DA SILVA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Eralcilene Moreira Terezio

Foz do Iguaçu  
2023

ISABELLI GUIMARÃES DA SILVA

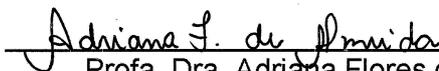
**CONCEITOS MATEMÁTICOS NO ENSINO FUNDAMENTAL:  
CONSTRUINDO SIGNIFICADOS POR MEIOS GEOMÉTRICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**



\_\_\_\_\_  
Orientadora: Profa. Dra. Eralcilene Moreira Terezio  
UNILA



\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Adriana Flores de Almeida  
UNILA



\_\_\_\_\_  
Profa. Ma. Luani Griggio Langwinski  
UNIOESTE

Foz do Iguaçu, 12 de junho de 2023.

## TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor(a): \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

	Tipo de Documento
(.....) graduação	(.....) artigo
(.....) especialização	(.....) trabalho de conclusão de curso
(.....) mestrado	(.....) monografia
(.....) doutorado	(.....) dissertação
	(.....) tese
	(.....) CD/DVD – obras audiovisuais
	(.....)
	_____
	_____

Título do trabalho acadêmico: \_\_\_\_\_

Nome do orientador(a): \_\_\_\_\_

Data da Defesa: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

### Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor(a):

a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons Licença 3.0 Unported*.

Foz do Iguaçu, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Dedico este trabalho a Deus, a minha mãe, ao meu pai, ao meu irmão e ao meu namorado, por sempre me fazerem acreditar que seria capaz de terminar essa graduação.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter sempre me fortalecido, me dado saúde e me abençoado até o final deste trabalho.

A minha professora orientadora não só pela constante orientação, mas sobretudo pela amizade que construímos nesse período. Sou muito grata por todos os ensinamentos que levarei em minha vida pessoal e profissional.

Aos professores da banca pelas orientações por aceitarem participar e avaliar o mesmo. E também aos professores do curso, pois sem eles nada seria possível, para que esse sonho de ser Graduada em Matemática se tornasse possível.

Agradeço de forma especial a minha família: meu pai, minha mãe, meu irmão e meu namorado, por sempre aguentar meus momentos de aflição, sempre me incentivando a não desistir e me fortalecendo a cada dia mais para que conseguisse concluir com êxito essa jornada de estudos.

Agradeço também aos meus amigos do curso e aos demais amigos, dos quais os primeiros se tornaram parte da minha família, pois nunca me deixaram desistir, persistimos e nos esforçamos para vencer juntos cada etapa, e foram verdadeiras batalhas em algumas disciplinas... e os segundos que de alguma forma sempre torceram para que esse sonho fosse possível e muitas vezes me acalmaram com ótimos conselhos e conhecimento para que isso se tornasse possível.

Sou muito grata por estar concluindo este curso com todos esses novos ensinamentos que levarei para minha vida e para minha profissão .

Por último, quero registrar o quanto me desenvolvi, ao persistir, ouvindo e aceitando os conselhos, quando as coisas ficaram difíceis, me fortaleci percebendo o como as pessoas que fizeram parte dessa minha trajetória sonharam junto comigo em cada passo. Entendi que ter feito o possível e o impossível para concluir esse curso valeria a pena!

*Ninguém é tão ignorante que não tenha algo a ensinar.  
Ninguém é tão sábio que não tenha algo a aprender.*  
**Blaise Pascal**

## RESUMO

A presente pesquisa vem fomentar o estudo dos conceitos matemáticos no Ensino Fundamental, especificamente nas séries de 4º a 9º anos, com vistas a ampliar o estudo da construção do conhecimento por meios geométricos, fazendo relação e conexão entre conteúdos curriculares inter-séries, cujos alunos necessitam da figura do professor para auxiliá-los nesta importante fase de crescimento linear que os pensamentos e estruturas matemáticas devem ser aprendidos. De maneira mais precisa, a pesquisa analisa as unidades temáticas propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) na área de matemática para o Ensino Fundamental, com o propósito de relacioná-las com frações, com ênfase nas suas representações gráficas. O trabalho verifica a aplicabilidade do conceito de fração equivalente na construção dos conceitos de adição, subtração e multiplicação de frações, bem como evidencia que a Base Nacional Comum Curricular trata o conceito de fração equivalente como um dos mais importantes no Ensino Fundamental.

**Palavras-chave:** construção do conhecimento; representação gráfica; fração; relação curricular inter-séries.

## RESUMEN

Esta investigación incentiva el estudio de los conceptos matemáticos en la educación básica, específicamente en los grados 4° a 9°, con miras a ampliar el estudio de la construcción del conocimiento por medios geométricos, relacionando y conectando los contenidos curriculares integrados, cuyos estudiantes necesitan la figura del maestro para ayudarlos en esta importante fase de crecimiento lineal en la que se deben aprender pensamientos y estructuras matemáticas. Específicamente, la investigación analiza las unidades temáticas propuestas por el *Base Nacional Comum Curricular* (BRASIL, 2018) en el área de matemáticas para la Enseñanza Fundamental, con el fin de relacionarlas con las fracciones, con énfasis en sus representaciones gráficas. Este trabajo verifica la aplicabilidad del concepto de fracción equivalente en la construcción de los conceptos de suma, resta y multiplicación de fracciones, además de mostrar que el *Base Nacional Comum Curricular* trata el concepto de fracción equivalente como uno de los más importantes en la Enseñanza Fundamental.

**Palabras llave:** construcción del conocimiento; representación gráfica; fracción, relación curricular integrado.

## ABSTRACT

This research encourages the study of mathematical concepts in Elementary Education, specifically in the 4th to 9th grades, with a view to expanding the study of knowledge construction by geometric means, making a relationship and connection between intergrade curricular contents, whose students need the figure of the teacher to help them in this important phase of linear growth in which mathematical thoughts and structures must be learned. Specifically, the research analyzes the thematic units proposed by the *Base Nacional Comum Curricular* (BRASIL, 2018) in the area of mathematics for Elementary School, in order to relate them to fractions, with emphasis on their graphical representations. This work verifies the applicability of the concept of equivalent fraction in the construction of the concepts of addition, subtraction and multiplication of fractions, as well as evidence that the *Base Nacional Comum Curricular* treats the concept of equivalent fraction as one of the most important in Elementary School.

Keywords: knowledge construction; graphical representation; fraction; intergrade contents.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> – Representação gráfica de $\frac{2}{3}$ como parte de um todo	15
<b>Figura 2</b> – Subconceitos relacionados aos conceitos de fração e de número racional	17
<b>Figura 3</b> – Representação geométrica e simbólica da concepção parte-todo no contínuo e no discreto, para as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ , respectivamente	18
<b>Figura 4</b> – Uma representação gráfica de $\frac{7}{16}$ como parte de um todo	18
<b>Figura 5</b> – Representação gráfica de $\frac{3}{4}$	19
<b>Figura 6</b> – Representação gráfica de $\frac{2}{7}$	19
<b>Figura 7</b> – Representação de $\frac{3}{4}$ após dividir ABCD verticalmente em 7 partes iguais	20
<b>Figura 8</b> – Representação de $\frac{2}{7}$ após dividir EFGH horizontalmente em 4 partes	20
<b>Figura 9</b> – A área do retângulo AEFD corresponde a $\frac{2}{5}$ da área do retângulo ABCD	23
<b>Figura 10</b> – Representação de $\frac{3}{4}$ da área do retângulo AEFD	24
<b>Figura 11</b> – Representação gráfica de $\frac{5}{3}$	25
<b>Figura 12</b> – $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{3}$ representadas na reta	26
<b>Figura 13</b> – Representação de números na reta numérica	26
<b>Figura 14</b> – Painel de um automóvel mostrando a quantidade de combustível no tanque	29

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries iniciais – 4º ano, elencadas na BNCC	31
<b>Quadro 2</b> – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries iniciais – 5º ano, elencadas na BNCC	33
<b>Quadro 3</b> – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries finais – 6º ano, elencadas na BNCC	35
<b>Quadro 4</b> – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries finais – 7º ano, elencadas na BNCC	37
<b>Quadro 5</b> – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries finais – 8º ano, elencadas na BNCC	38
<b>Quadro 6</b> – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries finais – 9º ano, elencadas na BNCC	40

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
2 A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	14
3 FRAÇÕES, CONCEITOS E REPRESENTAÇÕES	16
3.1 FRAÇÃO	16
3.1.1 Comparação entre frações	18
3.1.2 Frações equivalentes	21
3.1.3 Adição e subtração de frações	22
3.1.4 Multiplicações de frações	23
3.2 FRAÇÃO IMPRÓPRIA E FRAÇÃO NEGATIVA	24
3.2.1 Fração negativa	26
3.3 FRAÇÃO COMO UM QUOCIENTE	27
4 FRAÇÕES NO CURRÍCULO	29
4.1 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR	30
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	42
REFERÊNCIAS	44

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata sobre representações gráficas de frações e sua presença no currículo das escolas no Brasil. O motivo que levou à escolha do tema foi a afinidade da autora com estímulos visuais para a compreensão de conceitos matemáticos. Inicialmente, pensou-se no tema geometria na Educação Infantil ou no Ensino Fundamental, pois a geometria é o que se tem de mais concreto em matemática. Em diálogo com a orientadora, houve a percepção que algumas representações gráficas de frações são um meio geométrico utilizado como recurso na compreensão do conceito de fração. Assim, o presente estudo explora a importância dos objetos geométricos na construção de significado do conhecimento matemático.

No Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento norteador do ensino em todos os campos, que explicita o conjunto de aprendizagens essenciais que todo aluno no Brasil deve desenvolver, a fim de assegurar seus direitos de desenvolvimento como cidadão (BRASIL, 2018). O documento propõe cinco unidades temáticas na área da matemática para o Ensino Fundamental, a saber: álgebra, geometria, grandezas e medidas, números, probabilidade e estatística. Ademais, a BNCC destaca que a aprendizagem deve estar associada ao entendimento dos significados dos objetos matemáticos.

Nesse sentido, este trabalho relaciona o conteúdo de fração com os conteúdos das unidades temáticas, utilizando as formas geométricas na construção de significados de objetos matemáticos. A metodologia adotada foi a revisão bibliográfica com o intuito de nos familiarizar com o tema. A estrutura da monografia é a sugerida por (LAKATOS; MARCONI, 2017) e está organizada como segue: no Capítulo 2 abordamos algumas teorias da aprendizagem matemática, e no Capítulo 3 expomos as definições de frações e operações entre frações, utilizando representações gráficas. No Capítulo 4, analisamos as unidades temáticas propostas pela BNCC na área da matemática para o Ensino Fundamental, a fim de relacioná-las com frações. Por fim, no Capítulo 5 apresentamos nossas conclusões.

## 2 APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Ao longo dos anos, diversos autores abordaram o estudo da epistemologia, em particular as dificuldades na aprendizagem e maneiras de superá-las, por exemplo Piaget (1975), Vergnaut (2009), Duval (2003) e Duval e Egret (1993).

Piaget (1975) classifica os conhecimentos em três tipos: social, físico e lógico-matemático. O primeiro tipo diz respeito àqueles conhecimentos que podem ser transmitidos, como as informações, os nomes, os rótulos e as datas. O segundo tipo é ligado às propriedades dos objetos ou dos fenômenos, como o formato, a cor, o tamanho, a temperatura. Já o último tipo envolve as relações e os padrões entre os objetos. Em matemática, podemos dizer que os enunciados dos teoremas sintetizam um conhecimento lógico-matemático representado em língua natural.

Com um robusto embasamento teórico, incluindo o referencial piagetiano, Vergnaut (2009) propõe a Teoria dos Campos Conceituais, na qual afirma que o conhecimento está organizado em campos conceituais e o seu domínio requer do indivíduo experiência, maturidade e aprendizagem. Nesse contexto, cada conceito matemático contém um significante e um significado. O significante é um conhecimento social e pode ser transmitido. Já o significado é um conhecimento lógico-matemático, o qual requer do aprendiz um papel essencial de construção de sentido.

Outra teoria interessante é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta em matemática por Duval (2003, 2012). Tal teoria afirma que além de questionar para melhorar o aprendizado, as pessoas necessitam registrar de diversas maneiras, visto que isso contribui para a compreensão, a significação e a criação do sentido para o indivíduo, onde sua atividade é fundamental. O ponto central dessa teoria é a crença de que o entendimento de um conceito matemático inicia somente no instante em que o indivíduo é capaz de coordenar espontaneamente dois registros de representação para um mesmo objeto. Nessa circunstância, uma representação é um significante que compõe o conceito (ou objeto) matemático, a qual não é somente necessária para fim de comunicação, mas também é essencial à atividade cognitiva do pensamento. Por exemplo, Duval (2012) aponta que a geometria deve ser ensinada com demonstrações e fala, como no caso da geometria analítica que as representações utilizadas são algébricas e gráficas.

Duval (2012) também nos alerta que toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, e que de um registro ao outro não estão os mesmos aspectos do conceito que está representado. Desse modo, a distinção entre um conceito e sua representação é essencial na compreensão da matemática.

Portanto, uma abordagem pedagógica possível é a estimulação dos alunos a representarem suas compreensões de diversas formas: língua natural, registro gráfico, símbolos, entre outros, e converter uma representação em outro tipo de registro. No entanto, é necessário ter em mente que

Alunos podem, muito bem, efetuar a adição de dois números com sua expressão decimal e com sua expressão fracionária e podem não pensar em converter, se isto for necessário, a expressão decimal de um número em sua expressão fracionária (e reciprocamente), ou mesmo não conseguir efetuar a conversão. (DUVAL, 2012, p. 272).

Por outro lado, quando há congruência entre as representações a conversão é imediata e Duval (2012) considera que poderia ser entendida como um simples código. Para saber se duas representações são congruentes, Duval e Egret (1993) apresentam três critérios:

- a cada unidade significativa simples de uma representação pode-se associar uma unidade elementar;
- a cada unidade elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significativa elementar no registro da representação de chegada;
- as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações.

Como exemplo de duas representações congruentes podemos citar a expressão fracionária de uma fração própria e sua representação gráfica como parte de um todo, como ilustrado na Figura 1.

**Figura 1** – Representação gráfica de  $\frac{2}{3}$  como parte de um todo



Fonte: a autora, 2023

Valendo-se da congruência dessas duas representações de uma fração própria, usamos esse tema como fio condutor deste trabalho. Nesse contexto, pretendemos evidenciar uma conexão entre frações e conteúdos de várias unidades temáticas previstas na BNCC, por meio de diferentes registros de representação.

O próximo capítulo trata do conteúdo de frações, com a exposição das definições de frações e operações entre frações, utilizando representações gráficas.

### 3 FRAÇÕES, CONCEITOS E REPRESENTAÇÕES

Não há o que se discutir sobre a importância das frações como conhecimento matemático. Um número especial sobre este tema foi publicado pelo Boletim de Educação Matemática (Bolema) em 2008, do qual citamos os artigos (SILVA; ALMOULOU, 2008; LOPES, 2008). Silva e Almouloud (2008) refletem a respeito das operações com frações a partir da concepção parte-todo, e sugerem algumas atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula no Ensino Fundamental. Lopes (2008) defende a permanência das frações no currículo do Ensino Fundamental, mencionando ideias distintas associadas ao conceito de frações e elencando algumas inadequações no ensino-aprendizagem das mesmas.

Atualmente, o tema das frações é considerado importante no currículo do Ensino Fundamental, visto que permeia habilidades esperadas em alunos a partir do quarto ano, como está elencado no Capítulo 4.

Neste capítulo, objetivamos apresentar o conceito de frações e operações entre frações, a partir das representações gráficas das frações próprias como parte de um todo. As principais referências utilizadas aqui são (BAHIANO, 2005; SILVA; ALMOULOU, 2008; LOPES, 2008; RIPOLL; RIPOLL; SILVEIRA, 2011).

#### 3.1 FRAÇÃO

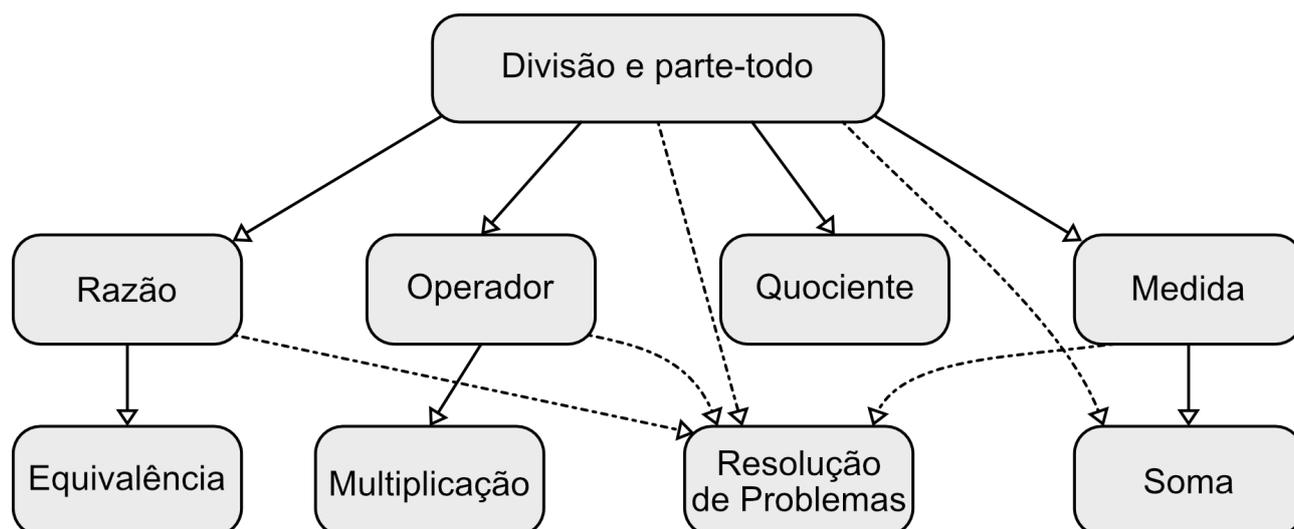
Após analisar alguns estudos, Silva e Almouloud (2008) afirmam que a partir dos anos de 1970 nos livros didáticos brasileiros, a ideia de fração é apresentada por meio de uma abordagem formal. Especificadamente, uma fração é um símbolo

$$\frac{a}{b},$$

em que  $a$  e  $b$  são números inteiros e  $b$  é maior do que zero. O número  $a$  é chamado de numerador e  $b$  de denominador da fração. Frequentemente, nos referimos a  $\frac{a}{b}$  como “ $a$  sobre o  $b$ ”.

Nesse texto, essa é a definição de fração adotada. Porém, é importante salientar que essa definição está intimamente relacionada com a noção de números racionais (Seção 3.3). Nesse sentido, Behr et al. (1983) constroem o conceito de número racional a partir de vários subconceitos, dos quais alguns tem vínculos naturais como ilustrado no diagrama da Figura 2.

**Figura 2** – Subconceitos relacionados aos conceitos de fração e de número racional



Fonte: BEHR et al., 1983

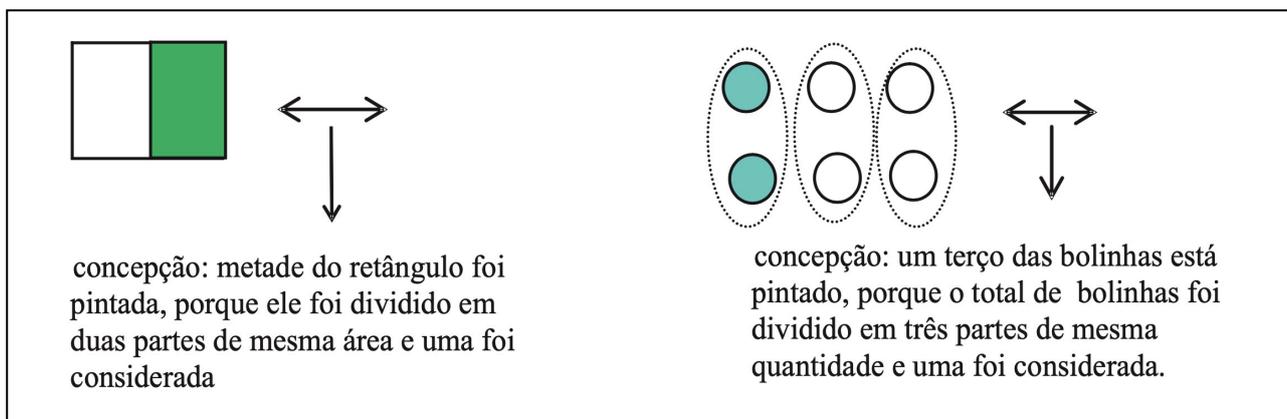
Dentro desse ambiente, Kieren (1988) concorda com Vergnaud (1983) que a concepção de medida (comparação com a unidade) é a mais adequada para proporcionar o desenvolvimento de um modelo mental para a produção de respostas corretas nos procedimentos aritméticos de frações. Além disso, em um estudo mais recente, Braithwaite, Tian e Siegler (2017) concluem que, para melhorar os procedimentos aritméticos entre frações, é necessário reaprender as bases conceituais das operações aritméticas, inicialmente aprendidas para números naturais, no contexto de frações.

Em vista disso, utilizamos representações gráficas de figuras planas e da reta numérica a fim de definir a adição, a subtração e a multiplicação de duas frações.

A concepção parte-todo de uma fração “se caracteriza por um inteiro (grandeza discreta ou contínua), do qual uma parte pode ser associada a um número fracionário e, com este intuito, as figuras se prestam como representação desse inteiro.” (SILVA; ALMOULOU, 2008, p. 58). A Figura 3 exemplifica representações geométricas da concepção parte-todo no contínuo e no discreto.

A representação geométrica no contínuo se refere às figuras que representam grandezas contínuas, tais como segmentos, polígonos e círculos. No nosso estudo, optamos por utilizar a representação geométrica no contínuo, especificamente retângulos e segmentos.

**Figura 3** – Representação geométrica e simbólica da concepção parte-todo no contínuo e no discreto, para as frações  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$ , respectivamente

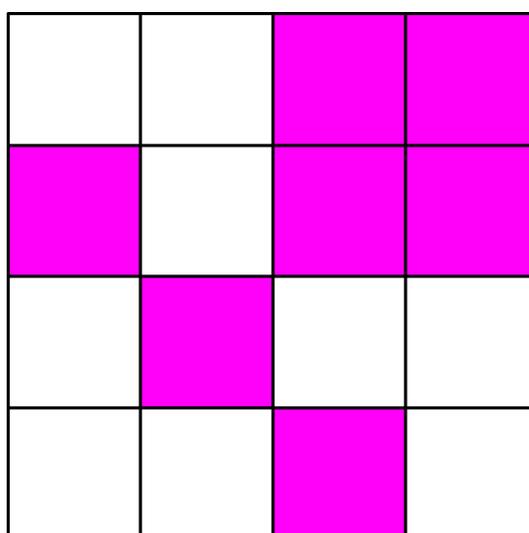


Fonte: SILVA; ALMOULOU, 2008, p. 58

### 3.1.1 Comparações entre frações

Considerando que uma fração representa um número fracionário, utilizando a concepção parte-todo, a comparação entre duas frações que possuem o mesmo denominador é bastante intuitiva. Por exemplo, 4 sobre 16 é menor do que 7 sobre 16, ou seja,  $\frac{4}{16} < \frac{7}{16}$ , porque a primeira fração representa 4 partes e a segunda 7 partes de um total de 16 partes iguais de um todo, e  $4 < 7$ . A Figura 4 traz uma representação gráfica de  $\frac{7}{16}$  como parte de um todo.

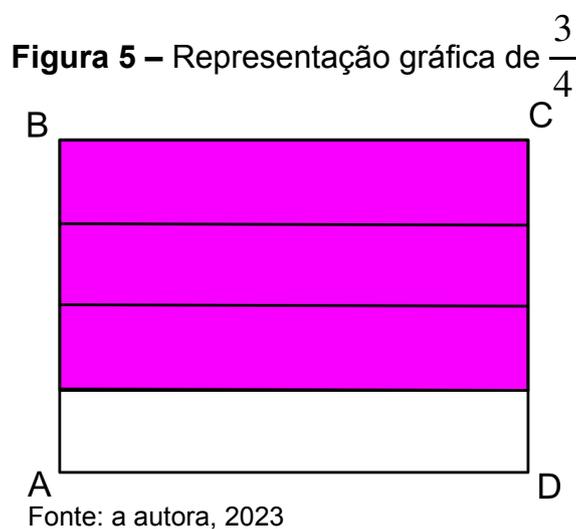
**Figura 4** – Uma representação gráfica de  $\frac{7}{16}$  como parte de um todo



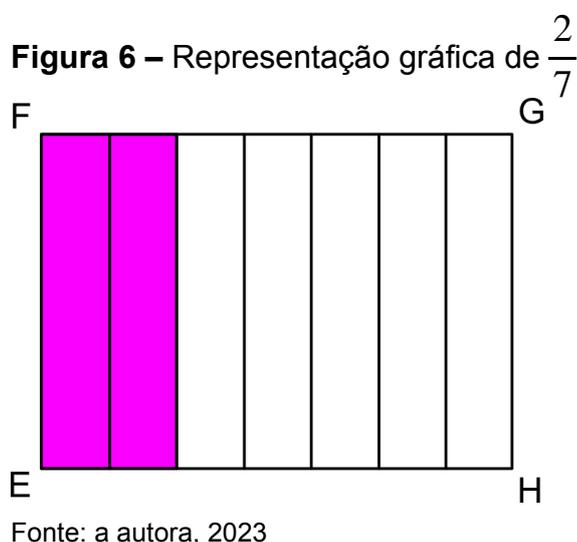
Fonte: a autora, 2023

Note que há 7 quadrados coloridos, em que 4 foram coloridos separadamente com o intuito de ficar visualmente compreensível que  $\frac{4}{16} < \frac{7}{16}$ .

A questão mais interessante é: como comparar frações com denominadores diferentes? A representação gráfica nos dá uma ideia de como responder essa pergunta levando em consideração o princípio multiplicativo de números naturais. Por exemplo, para comparar as frações  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{2}{7}$ , consideramos ABCD e EFGH dois retângulos congruentes. Dividimos horizontalmente ABCD em 4 partes iguais a fim de representar  $\frac{3}{4}$ , como apresentado na Figura 5.

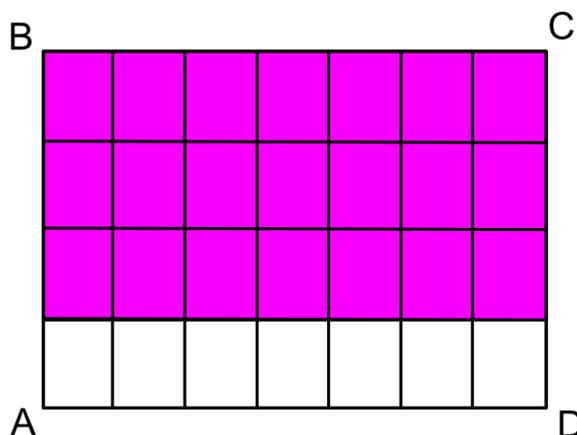


Depois dividimos EFGH verticalmente em 7 partes iguais para representar  $\frac{2}{7}$ , como apresentado na Figura 6.



Agora dividimos verticalmente ABCD em 7 partes iguais e dividimos EFGH horizontalmente em 4 partes iguais. Desse modo, pelo princípio multiplicativo os dois retângulos foram divididos em 28 partes iguais. As Figuras 7 e 8 mostram, respectivamente, como ficaram as representações de ABCD e EFGH após as divisões.

**Figura 7** – Representação de  $\frac{3}{4}$  após dividir ABCD verticalmente em 7 partes iguais

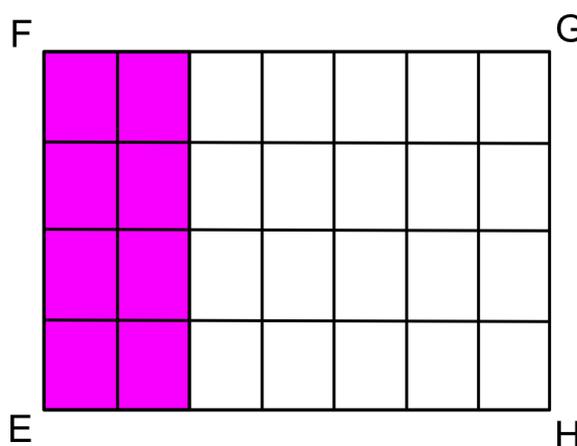


Fonte: a autora, 2023

Desse modo, a fração  $\frac{3}{4}$  representa o mesmo número fracionário que  $\frac{21}{28}$ ,

pois há 21 partes coloridas de um total de 28 partes na Figura 7. Analogamente, a fração  $\frac{2}{7}$  representa o mesmo número fracionário que  $\frac{8}{28}$ .

**Figura 8** – Representação de  $\frac{2}{7}$  após dividir EFGH horizontalmente em 4 partes iguais



Fonte: a autora, 2023

Assim, em vez de comparar  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{2}{7}$ , podemos comparar as frações  $\frac{21}{28}$  e

$\frac{8}{28}$ , as quais possuem o mesmo denominador. Portanto, como  $\frac{21}{28}$  é maior do que  $\frac{8}{28}$ ,

concluimos que:

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{7}.$$

Portanto, para comparar duas frações com denominadores diferentes, o primeiro passo é trocá-las por outras frações que representem os mesmos números fracionários e possuem o mesmo denominador. Para comparar as frações

$$(3.1) \quad \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d},$$

comparamos as frações

$$(3.2) \quad \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \quad \text{e} \quad \frac{b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Veja que multiplicamos o numerador e o denominador da primeira fração em (3.1) pelo denominador da segunda e vice-versa. Dessa maneira, algebricamente

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{se, e somente se,} \quad ad < bc.$$

Na prática, para comparar duas frações, basta comparar os numeradores das frações em (3.2).

### 3.1.2 Frações equivalentes

Note que a discussão da Subseção 3.1.1 nos trouxe a ideia de frações diferentes que representam o mesmo número fracionário (quantidade). Por exemplo,  $\frac{3}{4}$  na

Figura 5 e  $\frac{21}{28}$  na Figura 7. Em matemática, essas frações são chamadas de frações equivalentes.

**Definição 3.1** As frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{A}{B}$  são chamadas de equivalente se

$$(3.3) \quad aB = Ab.$$

Nesse caso, denotamos  $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ .

Em particular (3.1) e (3.2) representam frações equivalentes. De fato,

$$(3.4) \quad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d},$$

pois  $a(bd) = a(db) = (ad)b$ .

Observação: Neste trabalho, o símbolo “=” é utilizado tanto para significar igualdade quanto para significar equivalência. Por exemplo, em (3.3) o símbolo “=” significa que o número inteiro  $aB$  é igual ao número inteiro  $Ab$ , e em (3.4) o símbolo “=” significa que as frações são equivalentes.

### 3.1.3 Adição e subtração de frações

A adição e a subtração de duas frações são definidas a partir das mesmas operações de dois números naturais. Para frações com o mesmo denominador, a ideia é somar ou subtrair as partes do todo que cada fração representa. Por exemplo,

$$\frac{7}{16} + \frac{4}{16} = \frac{11}{16}$$

é a soma de 7 partes de um total de 16 partes iguais, representadas pela primeira fração, com 4 partes do mesmo total de partes iguais, representadas pela segunda fração. Logo, o resultado é 7 + 4 partes do total de 16 partes iguais, representado pela fração  $\frac{11}{16}$ .

Analogamente,

$$\frac{7}{16} - \frac{4}{16} = \frac{7-4}{16} = \frac{3}{16}.$$

Portanto, para somar ou subtrair frações com denominadores diferentes, recorreremos ao princípio multiplicativo e às frações equivalentes, ilustrados graficamente

na Subseção 3.1.1. Assim para subtrair  $\frac{2}{7}$  de  $\frac{3}{4}$ , podemos utilizar a Figura 7 e a Figura 8,

trocando as frações por suas equivalentes:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{21}{28} - \frac{8}{28} = \frac{13}{28}.$$

**Definição 3.2** A soma das frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  é definida como

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

E a subtração é definida como

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} := \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Note que a Definição 3.2 considera que para somar (ou subtrair) duas frações com o mesmo denominador, basta repetir o denominador e somar (ou subtrair) os numeradores, como nos exemplos ilustrados antes da definição. Além disso, foi utilizado o símbolo “:= ” que significa “é definida por”.

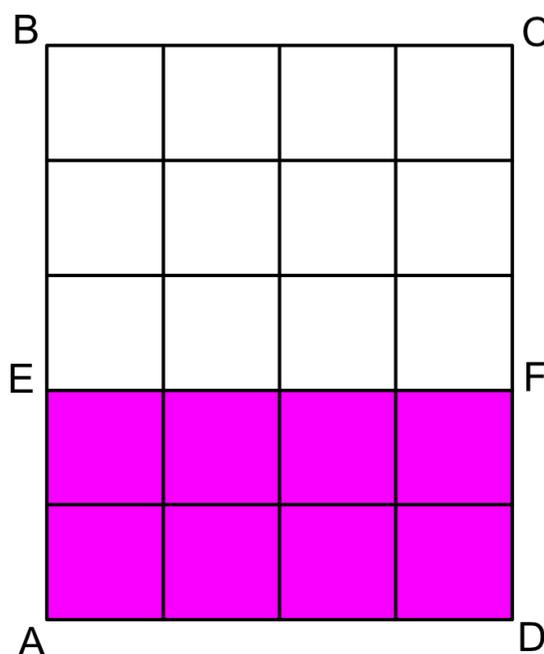
### 3.1.4 Multiplicação de frações

Para construir a noção de multiplicação de frações, podemos utilizar a representação gráfica parte-todo respondendo a seguinte pergunta: quanto é  $\frac{a}{b}$  de  $\frac{c}{d}$ ?

Por exemplo, para saber quanto é  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{2}{5}$ , primeiro dividimos um

retângulo ABCD horizontalmente em 5 partes iguais, das quais consideramos 2 partes. Após isso, dividimos ABCD verticalmente em 4 partes iguais como na Figura 9.

**Figura 9** – A área do retângulo AEFD corresponde a  $\frac{2}{5}$  da área do retângulo ABCD

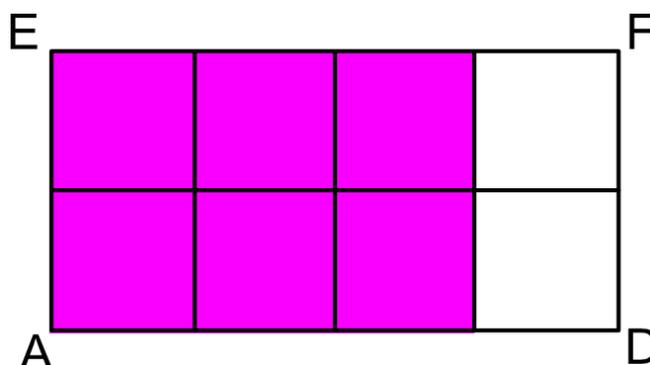


Fonte: a autora, 2023

Assim para saber quanto é  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{2}{5}$ , basta saber quanto é  $\frac{3}{4}$  da área de

AEFD, representada na Figura 10.

**Figura 10** – Representação de  $\frac{3}{4}$  da área do retângulo AEFD



Fonte: a autora, 2023

Pelas representações gráficas,  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{2}{5}$  da área do retângulo ABCD é  $\frac{6}{20}$ ,

pois consideramos 6 partes (Figura 10) de um total de 20 partes (Figura 9). Assim como na Subseção 3.1.1, o princípio multiplicativo de números naturais nos ajudou a responder a pergunta. Algebricamente, podemos escrever:

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20}.$$

**Definição 3.3** A multiplicação das frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  é definida como

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

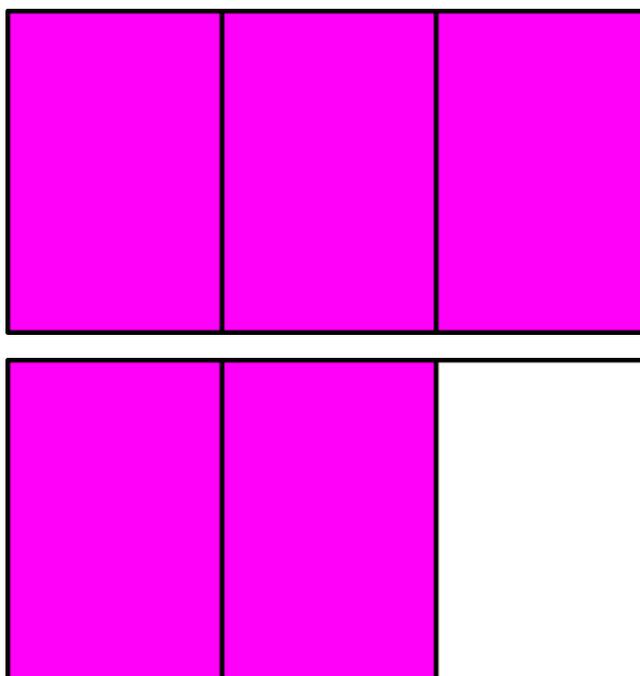
### 3.2 FRAÇÃO IMPRÓPRIA E FRAÇÃO NEGATIVA

Embora as definições de fração e de suas operações, tratadas na Seção 3.1, envolvam os números inteiros, as representações gráficas trabalhadas tratam somente das frações próprias, ou seja, frações cujo numerador é um número natural menor ou igual ao denominador. Isso acontece porque a concepção parte-todo impossibilita considerar 5 partes de um todo que foi dividido em apenas 3 partes.

Para contornar esse problema, podemos adaptar as representações gráficas utilizando a concepção de medida para fração, ou seja, considerando o todo

como a unidade e comparando a fração  $\frac{5}{3}$  com esta unidade, como representado na Figura 11.

**Figura 11** – Representação gráfica de  $\frac{5}{3}$



Fonte: a autora, 2023

Assim podemos pensar que

$$\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3}.$$

Além disso, como  $\frac{3}{3}$  representa 3 partes de um total de 3 partes iguais do todo, podemos concluir que  $\frac{3}{3}$  é o todo (ou a unidade de medida).

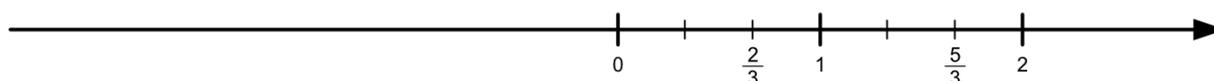
**Definição 3.4** Uma fração  $\frac{a}{b}$  é chamada de imprópria se  $a > b$ . Uma fração  $\frac{a}{b}$  é chamada de própria se  $b > a \geq 0$ .

Considerando a Definição 3.4, a fração  $\frac{b}{b}$  representa um inteiro (a unidade de medida) e, em termos numéricos, é igual a 1. Com a concepção de medida, podemos representar as frações na reta numérica. Nesse caso, a distância dos pontos

que representam 0 e 1 é a unidade de medida. Veja na Figura 12 a representação de  $\frac{2}{3}$  e

$\frac{5}{3}$  na reta numérica .

**Figura 12** –  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{5}{3}$  representadas na reta



Fonte: a autora, 2023

Para marcar  $\frac{2}{3}$  na reta numérica, dividimos a unidade em 3 partes iguais

e consideramos 2 dessas partes. Para marcar  $\frac{5}{3}$ , podemos considerar que

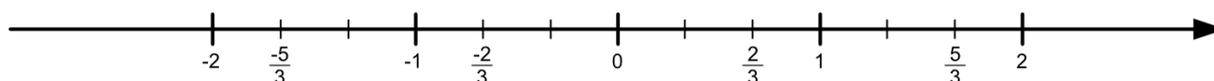
$$\frac{5}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}.$$

Assim dividimos a unidade, considerando os pontos que representam 1 e 2, em 3 partes iguais e consideramos 2 dessas partes.

### 3.2.1 Fração negativa

Na reta numérica, os inteiros negativos são marcados à esquerda de 0. Especificamente, se  $b > 0$  então  $b$  é marcado  $b$  unidades de medida à direita de 0 e  $-b$  é marcado  $b$  unidades de medida à esquerda de 0. Isso se estende para todos os números reais, incluindo os fracionários, como apresentado na Figura 13.

**Figura 13** – Representação de números na reta numérica



Fonte: a autora, 2023

Desse modo, a reta numérica permite-nos representar uma fração negativa graficamente (visualmente). Por exemplo, para ter uma representação gráfica de

$\frac{-2}{3}$ , basta dividir a unidade em 3 partes iguais e considerar somente 2, fazendo isso à esquerda de 0.

### 3.3 FRAÇÃO COMO UM QUOCIENTE

Com base no diagrama da Figura 2, proposto por Behr et al. (1983), podemos afirmar que as Seções 3.1 e 3.2 permeiam os subconceitos parte-todo, equivalência e medida. Nessa seção, objetivamos falar do subconceito quociente e para isso utilizaremos a noção de número racional.

**Definição 3.5** Um número é racional se podemos multiplicá-lo por algum número natural não-nulo e obter como resultado um número inteiro.

Segundo essa definição, 3 é um número racional porque

$$3 \cdot 1 = 3$$

é um número inteiro e 1 é um número natural não-nulo. Analogamente, todo número inteiro é um número racional. Porém, existem números não inteiros que são racionais. Por exemplo, 0,75 é um número racional pois

$$(3.5) \quad 0,75 \cdot 4 = 4 \cdot 0,75 = 0,75 + 0,75 + 0,75 + 0,75 = 3,00$$

é um número inteiro. Mais geralmente, podemos dizer que um número é racional se, e somente se, ele é um número fracionário (uma quantidade que pode ser representada por uma fração).

**Proposição 3.6** A fração  $\frac{a}{1}$  representa o número  $a$ .

Prova: Vamos utilizar a Definição 3.2 e a ideia de inteiro (unidade de medida) introduzida após a Definição 3.4. Temos

$$\frac{a}{1} = \frac{1 + \dots + 1}{1} = \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} = 1 + \dots + 1 = a,$$

em que na primeira igualdade usamos o fato de  $a$  poder ser escrito como a soma de  $a$  parcelas iguais a 1. □

**Teorema 3.7** Toda fração  $\frac{a}{b}$  representa um número racional.

Prova: Para essa demonstração precisamos da noção de multiplicação de uma fração por um número natural, a qual é somente uma extensão da ideia de multiplicação de números naturais como repetição de parcelas de uma soma. Assim, como  $b > 0$ , temos

$$\frac{a}{b} \cdot b = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b} = \frac{a + a + \dots + a}{b} = \frac{ba}{b} = \frac{a}{1} = a,$$

em que na penúltima igualdade usamos a Definição 3.1 e na última utilizamos a Proposição 3.6. Logo, o número que  $\frac{a}{b}$  representa multiplicado por um natural não-nulo  $b$

é igual ao número inteiro  $a$ . Portanto, representa um número racional.  $\square$

Logo, por (3.5) e pelo Teorema 3.7 a fração  $\frac{3}{4}$  representa o número 0,75.

Mais geralmente, como consequência do Teorema 3.7, a fração  $\frac{a}{b}$  é um quociente e o

traço “ $\div$ ” pode ser interpretado como um símbolo de divisão. De fato, como

$$\frac{a}{b} \cdot b = a,$$

multiplicando à direita ambos os lados da equação pelo inverso multiplicativo de  $b$ , denotado por  $b^{-1}$ , obtemos

$$\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) b^{-1} = a \cdot b^{-1} \Leftrightarrow \frac{a}{b} (bb^{-1}) = a \div b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = a \div b.$$

Assim, para saber qual número racional a fração  $\frac{3}{4}$  representa basta

efetuar a divisão  $3 \div 4 = 0,75$ .

**Teorema 3.8** Todo número racional é representado por uma fração.

Prova: Se  $r$  é um número racional, pela Definição 3.5 existem um inteiro  $a$  e um natural não-nulo  $b$  tais que

$$r \cdot b = a.$$

Dividindo ambos os lados da equação por  $b$  e usando a discussão anterior, obtemos

$$r = a \div b = \frac{a}{b},$$

ou seja,  $r$  pode se representado pela fração  $\frac{a}{b}$ .  $\square$

Com base nos conhecimentos de fração apresentados neste capítulo, especialmente o diagrama da Figura 2, no próximo capítulo descrevemos o que a BNCC apresenta sobre as frações.

## 4 FRAÇÕES NO CURRÍCULO

A palavra fração está relacionada a muitas ideias, podendo ser considerada um megaconceito, se subdividindo em diferentes subconceitos, que necessitam de interpretações, onde quem ensina não deve usar apenas o abstrato e o escrito para não tornar a aprendizagem pouco significativa para aquele que aprende.

Assim, o ensino de frações não pode se restringir a apenas um momento do currículo ou série, mas deve aparecer em todo o programa, aumentando o nível de complexidade. Todavia, é necessário o cuidado de não desconectar os subconceitos. Essa desconexão pode ocorrer quando são aplicados enganosamente, ou apresentados de forma desonestas ou mesmo sem cuidados com as definições e explicações. Como exemplo, podemos citar que as frações impróprias às vezes são trabalhadas antes de os alunos terem aprendido e consolidado o conceito de frações próprias. Outro cuidado é evitar o ensino de regras e macetes para se resolver as operações, pois essas resoluções devem ser incorporadas e consolidadas conforme forem aparecendo no dia-a-dia em sala de aula.

Para isso se tornar natural, os professores podem instigar seus alunos a perceberem ou procurarem como as frações são utilizadas no cotidiano. Lopes (2008) nos alerta que o mundo dos adultos é mais significativo em termos de frações, pois elas ainda resistem, por exemplo, no painel dos automóveis, como mostra a Figura 14; nos capítulos da constituição federal ou do regimento de parlamentos estaduais ou municipais; nos cálculos onde mostram-se as proporções para aprovar ou mudar alguma lei ou mesmo a constituição; podem aparecer em problemas de partilha de bens; também nos cálculos de indenizações sem justa causa; ou ainda em livros de receitas culinárias.

**Figura 14** – Painel de um automóvel mostrando a quantidade de combustível no tanque



Fonte: Auto Esporte, 2022

Por outro lado, as crianças podem consolidar conceitos por meio de objetos manipuláveis, concretos, de modo que possam perceber, observar e vivenciar aquilo que é abstrato, tornando significativa a construção dos conceitos e compreensão. Por exemplo: material dourado, dobraduras, bingos, jogos diversos e tangram. Nesse sentido, acreditamos que os docentes da Educação Infantil e do Ensino Fundamental precisam estar preparados para trabalhar de maneira lúdica e concreta os conceitos abstratos. Os professores devem considerar que os conceitos matemáticos são construídos também pelos alunos, e que eles fazem parte ativamente da construção do conhecimento.

Consoante a isso, o documento norteador dos componentes curriculares no Brasil elenca habilidades esperadas sobre o tema frações, em alunos a partir do quarto ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018). Nesse contexto, o papel do professor que ensina matemática é fundamental, de maneira a resgatar os conteúdos dos anos iniciais adequadamente a fim de introduzir, nos anos finais, novos conteúdos que dependem dos resgatados.

#### 4.1 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

No Brasil, o documento norteador dos componentes curriculares a partir do ano de 2018 é a Base Nacional Comum Curricular, construída com a participação da comunidade escolar, professores, estudiosos da área educacional e demais interessados. Houve a necessidade de efetivar a prática escolar de norte a sul do país, devido à grande expansão do território nacional e da grande migração existente no país, de modo que se a pessoa se mudar de um lugar para o outro, não ficará perdida em meio aos conteúdos curriculares, pois sua base escolar será a mesma.

A matemática, sendo um conhecimento necessário para todas as pessoas, também é uma das bases para a formação de cidadãos críticos e conscientes de suas responsabilidades sociais. O Ensino Fundamental deve ter o compromisso com o letramento matemático de todas as crianças e adolescentes sob sua responsabilidade, o qual é:

[...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e

crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2018, p. 266)

A BNCC traz em seu escopo as competências específicas para o Ensino Fundamental, que devem ser ali desenvolvidas nos alunos: reconhecer que a matemática é uma ciência humana e viva, passível de transformações, proveniente dos processos históricos das necessidades e preocupações de uma multiculturalidade; desenvolver o raciocínio lógico, a investigação e a capacidade de argumentar convincentemente; compreender as relações existentes entre os procedimentos e conceitos dos distintos campos: álgebra, aritmética, geometria, estatística e probabilidade, e de outras áreas do conhecimento, sendo capaz de utilizar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e perseverança na busca de soluções para os mais variados problemas ou situações que ocorram.

Para desenvolver essas competências, a BNCC traz cinco unidades temáticas correlacionadas. Em todas elas, a delimitação das habilidades demonstra que o professor deve considerar que as noções matemáticas devem ser revisadas a cada ano, ampliadas e aprofundadas.

Seguindo adiante, o leitor as encontrará discriminadas, relacionadas a cada uma suas habilidades, e a autora propôs algumas aplicações para elas. Estão elencadas somente algumas habilidades, as quais estão relacionadas com fração. Primeiramente, foram organizadas as séries iniciais do Ensino Fundamental – 4º e 5º anos, respectivamente, como pode ser observado nos Quadros 1 e 2.

**Quadro 1 – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries iniciais – 4º ano, elencadas na BNCC**

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	Montar os problemas usando um quadro retangular ou desenhos trabalhando. Por exemplo, fazer uma tabela de quantos alunos tem na sala. Esses dados poderiam ser observados na tabela.

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
<b>Números</b>	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais ( $1/2$ , $1/3$ , $1/4$ , $1/5$ , $1/10$ e $1/100$ ) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.	Apresentar a régua, o objeto que ela é, como podemos utilizar e trabalhar medidas, como a metade da régua ou, como caracterizamos uma metade como uma fração; escrever no quadro e ir apresentando as frações que podem ser observadas visualmente utilizando a régua.
	(EF04MA10) Reconhecer que as regras do sistema de numeração decimal podem ser estendidas para a representação decimal de um número racional e relacionar décimos e centésimos com a representação do sistema monetário brasileiro.	Pode ser ensinado usando o material dourado.
<b>Álgebra</b>	(EF04MA13) Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.	Apresentar o uso da calculadora nas contas de multiplicação, subtração, etc. Assim, os alunos terão familiaridade com a calculadora e suas diversas funções, já que ela é um objeto que todos vêem com frequência no dia a dia.
	(EF04MA14) Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.	Mostrar usando tabelas com quadradinhos, trabalhando parte-todo, ou receitas.
<b>Geometria</b>	(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de <i>softwares</i> de geometria.	Trabalhar a aula no aplicativo Geogebra, no qual os alunos conseguiriam observar a simetria, pois colocando as medidas corretas, os dois lados de um círculo ou de outra forma ficam iguais. Desse modo, os alunos estariam aprendendo com um meio tecnológico.
<b>Grandezas e medidas</b>	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.	Trabalhar a noção de parte-todo com o auxílio de um caderno quadriculado, utilizando as quatro formas geométricas básicas: quadrado, triângulo, retângulo e círculo. Note que essa habilidade diz respeito à estimativa de áreas de figuras planas por meio do uso de malha quadriculada e contagem dos quadradinhos. Isso configura um objeto geométrico interessante para trabalhar a concepção parte-todo de fração, posteriormente.

Fonte: adaptado de Brasil (2018), pp. 290 a 293; aplicações elaboradas e organizadas pela autora, 2023

**Quadro 2** – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries iniciais – 5º ano, elencadas na BNCC

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
<b>Números</b>	(EF05MA02) Ler, escrever e ordenar números racionais na forma decimal com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição e a reta numérica.	Conhecer a reta numérica, com a professora apresentando na régua como funciona as suas medidas, que vão até o número 10; depois mudar a unidade, apresentar a metade de 10 que é o 5; a existência de um traço menor entre um número e outro. Posteriormente, a reta numérica entraria no conteúdo de frações.
	(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.	Desenhar com auxílio de uma régua, separando cada centímetro dela, de modo que visualmente fique mais compreensível a noção de partetodo, ajudando no conteúdo posterior de frações equivalentes.
	(EF05MA04) Identificar frações equivalentes.	Utilizando um quadrado grande e vários pequenos, que podem ser representados como cerâmicas do chão de uma casa, é possível identificar se frações são ou não equivalentes. (Ver Subseção 3.1.2)
	(EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.	Separar e selecionar os números racionais positivos, explicar o que é o número racional, e a história do mesmo. (O traço “—” significa divisão”.)
	(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100%, respectivamente, à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.	Associar o pedaço de pizza, como sendo a porcentagem da pizza, para o ensino de porcentagem. Levar uma pizza para o entendimento de uma forma com significado aos alunos.

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
	(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	Apresentar problemas com desenhos na lousa, representando a parte e o todo dentro das formas geométricas. Por exemplo, dentro de um quadrado pois os alunos do 5º provavelmente já conhecem as formas.
<b>Álgebra</b>	(EF05MA10) Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.	Esse conteúdo pode ser trabalhado a partir da noção parte-todo, por meio de um bolo cortado em vários quadradinhos, com o intuito de fazer o aluno entender essa noção de somar e subtrair, e construir a noção de equivalência nas frações.
	(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.	O aluno tem que ter a noção de fração e divisão e saber as contas de multiplicação.
	(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.	
<b>Grandezas e medidas</b>	(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.	Apresentar o aplicativo GeoGebra, no qual a professora pode mostrar na tela de um computador um smartphone a congruência de triângulos, como se fosse em um caderno cheio de quadradinhos.

Fonte: adaptado de Brasil (2018), p. 294 a 297; aplicações elaboradas e organizadas pela autora, 2023

A maioria das habilidades listadas no Quadro 1 e no Quadro 2 permeiam os subconceitos de fração e de número racional conforme a Figura 2. Outras permeiam conteúdos importantes de serem reforçados para se trabalhar posteriormente com as frações. Por exemplo, a habilidade (EF04MA06) quando bem desenvolvida pode melhorar a capacidade de resolver procedimentos aritméticos entre frações (BRAITHWAITE; TIAN; SIEGLER, 2017). Nesse sentido, a BNCC aponta que é necessário compreender como o

conjunto das aprendizagens se conectam inter-séries, e que uma nova habilidade a ser aprendida certamente servirá de base às aprendizagens posteriores.

Na sequência, estão os anos finais do Ensino Fundamental – 6º, 7º, 8º, e 9º anos respectivamente, fase em que o professor precisará preparar os alunos para serem críticos em relação às ideias que os textos matemáticos propõem.

**Quadro 3** – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries finais – 6º ano, elencadas na BNCC

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
<b>Números</b>	(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.	Continuar usando a reta para comparar os números, não esquecendo os significados que foram iniciados também com a régua no quinto ano.
	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.	Continuar apresentando fração como parte-todo, com a utilização de um bolo para a quantidade de pedaços para cada um.
	(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.	Continuar com o significado de como se aprendeu os números racionais para poder usá-los de forma fracionária e decimal, usando a reta numérica como objeto geométrico.
	(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.	
	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.	

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
	(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.	
	(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.	
<b>Álgebra</b>	(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.	<p>Usando a concepção parte-todo em um bolo ou até mesmo em um quadrado, a cerâmica da casa com diversos quadradinhos juntos, é possível mostrar de uma maneira clara como multiplicar e subtrair frações, não perdendo esse significado que foi passado nos anos anteriores.</p> <p>Possivelmente, esta habilidade fortalece o conhecimento de igualdades e relações de equivalência.</p>
<b>Geometria</b>	(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.	Desenhar formas geométricas com quadradinhos de caderno quadriculado, representando a parte e o todo de uma fração. Esta habilidade está relacionada à fração devido à semelhança e à proporcionalidade de figuras planas.
	(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou <i>softwares</i> para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.	Usar instrumentos como a régua; porque poderia fortalecer a intuição geométrica e familiarizar o aluno com um objeto geométrico importante: a reta numérica. Pode-se ter como objeto geométrico a régua e o esquadro, trabalhando fração em uma noção geométrica.
	(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).	Trabalhar com atividades como dobraduras, pois desse modo é possível observar uma fração dando sequência às atividades que foram feitas nos anos anteriores.

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
<b>Probabilidade e estatística</b>	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.	Instigar os alunos a fazerem uma pesquisa onde trabalhariam probabilidade; tanto poderia ser feita nos anos iniciais como dar sequência nos anos finais. Por exemplo, pesquisar a quantidade de alunos que cada sala possui; pesquisar a quantidade de professores da escola; pesquisar a quantidade de alunos que comem frutas.

Fonte: adaptado de Brasil (2018), p. 294 a 297; aplicações elaboradas e organizadas pela autora, 2023

**Quadro 4 – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries finais – 7º ano, elencadas na BNCC**

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
<b>Números</b>	(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.	Como, provavelmente, os alunos já conheceram a calculadora como objeto de uso de cálculo de fração e porcentagens, podem agora aprender o conceito de calcular porcentagens de uma forma mais clara e significativa.
	(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.	Para retomar esse conteúdo, é importante lembrar da concepção parte-todo que os alunos possivelmente já aprenderam com um bolo, ou com um desenho de cerâmica. Essa concepção pode ser facilmente trocada pela concepção de grandeza (Ver Seção 3.2)
	(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes de outra grandeza.	
	(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.	

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
	(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.	
	(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.	
<b>Álgebra</b>	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.	
<b>Grandezas e medidas</b>	(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).	Essa habilidade diz respeito ao cálculo de volumes de figuras tridimensionais por meio do uso de blocos retangulares; configura um objeto geométrico interessante para tratar do assunto fração parte-todo. Repare que essa habilidade é uma generalização tridimensional da habilidade (EF04MA21) que é bidimensional.  Pode ser trabalhada com o material dourado.

Fonte: adaptado de Brasil (2018), p. 294 a 297; aplicações elaboradas e organizadas pela autora, 2023

**Quadro 5** – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries finais – 8º ano, elencadas na BNCC

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
	(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica	Diz respeito à notação científica; porque as potências de base 10 com expoentes inteiros negativos estão relacionadas com as frações decimais (cujo denominador é uma potência de 10).

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
<b>Números</b>	(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.	
	(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.	
	(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.	
<b>Álgebra</b>	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.	
<b>Geometria</b>	(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou <i>softwares</i> de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.	Como a bissetriz divide um ângulo ao meio (fração), aqui é possível usar o conceito da fração (metade) para construir o ângulo de 45 graus (bissetriz do ângulo reto). Algo parecido pode ser feito com os ângulos de 60 graus (por meio da construção de um triângulo equilátero) e 30 graus.
	(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.	O conceito intuitivo de fração pode ser bastante útil no fortalecimento dessa habilidade, porque um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros congruentes.

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
<b>Grandezas e medidas</b>	(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.	Essa habilidade tem conexão com a notação científica e frações decimais.
<b>Probabilidade e estatística</b>	(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.	O espaço amostral é um exemplo de “todo” quando fala-se de fração “parte-todo”.

Fonte: adaptado de Brasil (2018), p. 294 a 297; aplicações elaboradas e organizadas pela autora, 2023

**Quadro 6** – Objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas com os alunos do Ensino Fundamental – séries finais – 9º ano, elencadas na BNCC

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
<b>Números</b>	(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.	Se o conceito de soma de fração no aluno estiver fortalecido no nono ano, então as chances de obter êxito nessa habilidade esperada são aumentadas.
	(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.	Essa habilidade tem conexão com a notação científica e frações decimais; o cálculo com frações pode ser bastante útil para o desenvolvimento dessa habilidade.
<b>Álgebra</b>	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.	Essa questão pode ser respondida com as noções de raciocínio lógico que o aluno possui, para responder questões de frações inversamente proporcionais.

UNIDADES TEMÁTICAS	HABILIDADES	APLICAÇÕES
	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.	Com todas as noções de frações os alunos conseguem aplicar a fração proporcional na inversa para confirmar se ela é correta, isso pode acontecer com o teorema de Tales que, possivelmente, aprenderam nos anos anteriores.
<b>Geometria</b>	(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.	
<b>Grandezas e medidas</b>	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.  (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.	(EF09MA12), (EF09MA13) e (EF09MA14) tratam de proporcionalidade e teorema de Tales; (EF109MA12) trata do cálculo de perímetros e áreas de figuras planas por meio de malha quadriculada que estão relacionadas com a ideia de parte-todo.

Fonte: adaptado de Brasil (2018), p. 294 a 297; aplicações elaboradas e organizadas pela autora, 2023

A habilidade (EF07MA19) trata de proporção de figuras no plano cartesiano (veja que é a mesma malha quadriculada citada em (EF04MA19), mas aqui é esperado que o aluno já esteja familiarizado com as coordenadas cartesianas ou pares ordenados). Nesse contexto, pode ser trabalhada a concepção de razão para uma fração. A habilidade (EF08MA12) também está relacionada à concepção de razão. Já as habilidades (EF08MA01), (EF08MA02), (EF08MA04), (EF08MA05), (EF08MA15) e (EF08MA16) constituem um exemplo que ilustra a afirmação da própria BNCC: “as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes” (BRASIL, 2018, p. 299). Pois se o conceito intuitivo de fração no aluno estiver fortalecido no 8º ano, então as chances de obter êxito nessa habilidade esperada são aumentadas.

No próximo capítulo, apresentamos algumas considerações finais e a conclusão deste trabalho.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar este trabalho, percebemos o quanto necessitamos nos dedicar ao aprender e a ensinar. Ensinar não só com amor, mas com os conhecimentos adquiridos com muita garra e determinação, com atenção às maneiras e atitudes corretas para que aqueles, que estejam sob nossa responsabilidade, possam aprender de maneira a consolidar aprendizagens significativas que serão utilizadas na vida toda, profissional ou pessoal, pois afinal, o conhecimento matemático está presente em nossas ações cotidianas.

Enquanto professores, devemos procurar ensinar dentro de uma sequência adequada de conteúdos e não deixarmos que os alunos percam significados aprendidos no caminho. Não são somente os sistemas de ensino que precisam melhorar ao longo do processo histórico, mas em sala de aula, cada professor pode tomar atitudes para desenvolver e melhorar o ensino de matemática nas escolas.

É imprescindível que os vários conteúdos da mesma disciplina se conectem. Como tudo em nossa vida está inter-relacionado, assim também deve ser o aprendizado e o ensino.

Concordamos com a BNCC, quando afirma:

na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem. (BRASIL, 2018, p. 277).

Durante os estudos, não pudemos deixar de lembrar como foi o nosso aprendizado de matemática nas séries estudadas aqui, do 4º ao 9º ano do Ensino Fundamental. E a partir das sugestões de atividades apresentadas nos Quadros, percebemos como o papel do professor foi de suma importância, para a boa ou má aprendizagem. Aquele professor que se esforça em fazer um diferencial em sala de aula, que usa adequadamente os conceitos e procura estabelecer parâmetros para perceber que seus alunos estão aprendendo, não somente na hora das provas, certamente encontrará êxito e sucesso escolar no conhecimento matemático de seus alunos e estes, por consequência, incorporarão em suas vidas.

Em relação ao tema de frações, percebemos que a BNCC trata o conceito de fração equivalente como um dos mais importantes, pois este está relacionado a muitas das habilidades listadas nos Quadros 1 a 6, por exemplo

(EF04MA10), (EF05MA03), (EF05MA04), (EF05MA06), (EF06MA07), (EF07MA02), (EF08MA04), (EF09MA07), entre outras.

É claro que o trabalho restrito somente a grades retangulares é insuficiente para tratar o conceito de fração equivalente. Afinal, toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa. No entanto, acreditamos que o Capítulo 3 dessa monografia ilustra como as grades retangulares representam adequadamente o conceito de fração equivalente, e também o quanto esse conceito é importante na construção dos conceitos de adição, subtração e multiplicação de frações.

Nosso desejo é que este trabalho sirva para orientar os colegas professores, que possam utilizar nossas aplicações e estudos de modo a incorporar em suas práticas e sanar dúvidas que porventura tiverem em relação à progressão de conteúdos no ensino de frações, inter-relacionados aos demais conceitos matemáticos. Por fim, acreditamos que o conceito de soma de frações como na Definição 3.2 deve ser reforçado até o final do Ensino Fundamental e também no Ensino Médio, juntamente de boas representações como as ilustradas no Capítulo 3. Talvez isso possa evitar nos alunos a falsa ideia de que para somar frações é necessário utilizar o conceito algébrico (e, portanto, abstrato) de mínimo múltiplo comum.

## REFERÊNCIAS

- BAHIANO, C. E. N. **Números racionais e irracionais**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- BEHR, M. J. et al. Rational-number concepts. In: Lesh, R.; Landau, M. **Acquisition of mathematical concepts and processes**. New York: Academic Press, p. 91-125, 1983.
- BRAITHWAITE, D. W.; TIAN, J.; SIEGLER, R. S. Do children understand fraction addition? **Developmental Science**, [S.L.], v. 21, n. 4, p. 1-9, set. 2017. Wiley. <http://dx.doi.org/10.1111/desc.12601>.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas: Editora Papirus, p.11-34, 2003.
- DUVAL, R.; EGRET, M-A. Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. **Repères**, v. 12, p. 114-140, 1993.
- DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Trad. Méricles Thadeu. **Revemat: Revista Eletrônica de Matemática**, [S.L.], v. 7, n. 2, p. 266, dez. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>
- KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: HIEBRT, J.; BEHR, M. **Number concepts and operations in the middle grades**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, p. 162-181, 1988.
- LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 8. ed. São Paulo: Atlas S. A., 2017.
- LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 1-22, dez. 2008.
- MORE: Mecanismo online para referências, versão 2.0. Florianópolis: UFSC Rexlab, 2013. Disponível em: <http://www.more.ufsc.br/>. Acesso em: 15 jun. 2023.
- PIAGET, J. A epistemologia genética; sabedoria e ilusões da filosofia; problemas de epistemologia genética. In: CIVITA, V. **Jean Piaget**. Trad. Nathanael Caixeiro, Zilda Daer, Celia di Pietro. São Paulo: Abril Cultural, 1975. (Os Pensadores)
- RIPOLL, J. B.; RIPOLL, C. C.; SILVEIRA, J. F. P. **Números racionais, reais e complexos**. 2. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.
- SILVA, M. J. F.; ALMOULOU, S. A. A. As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 55-78, dez. 2008.
- VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Trad. Maria Lucia Faria Moro; rev. Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.
- VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: Lesh, R.; Landau, M. **Acquisition of mathematical concepts and processes**. New York: Academic Press, p. 127-174, 1983.