



UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA
INSTITUTO LATINO AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

**Aspectos geométricos da analogia óptico-mecânica
de geodésicas em espaços curvos com simetrias esféricas**

Angelo Cezar Lucizani

Orientador: Prof. Dr. Luís Antonio Cabral

Coorientador: Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza

Foz do Iguaçu-Paraná

2019

Aspectos geométricos da analogia óptico-mecânica de geodésicas em espaços curvos com simetrias esféricas

Angelo Cezar Lucizani

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada da Universidade Federal da Integração Latino-Americana (PPGFISA-UNILA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antonio Cabral

Coorientador: Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza

Banca Examinadora

Prof. Dr. Luís Antonio Cabral

Prof. Dr. Carlos Henrique Coimbra Araújo

Prof. Dra. Dafni Fernanda Zenedin Marchioro

Foz do Iguaçu-Paraná

2019

Catálogo elaborado pela Divisão de Apoio ao Usuário da Biblioteca Latino-Americana
Catálogo de Publicação na Fonte. UNILA - BIBLIOTECA LATINO-AMERICANA

L939a

Lucizani, Angelo Cezar.

Aspectos geométricos da analogia óptico-mecânica
de geodésicas em espaços curvos com simetrias esféricas /
Angelo Cezar Lucizani. - Foz do Iguaçu, 2019.
103f.: il.

Universidade Federal da Integração Latino-Americana,
Instituto Latino Americano de Ciências da Vida e da Natureza,
Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada.
Orientador: Prof. Dr. Luís Antonio Cabral.

1. óptica geométrica. 2. Astronomia geodésica. I. Cabral,
Luís Antonio. II. Título.

CDU 53:514

*“Aos amores da minha vida,
meus pais Clarice e Gilmar ”*

Resumo

O desvio da luz, ao passar sobre uma massa gravitacional, pode ser calculado de várias formas diferentes. Entretanto, neste trabalho, o estudo foi feito através da descrição da trajetória do raio de luz monocromático, usando uma abordagem do meio óptico. Inicialmente, para estabelecer essa abordagem, fez-se necessário mostrar a analogia da equação da geodésica e a eikonal. Para obtenção desta analogia, precisou-se descrever o caminho geométrico da luz por meio de formalismo métrico, permitindo, assim, calcular a trajetória do raio de luz comparando o feixe de luz monocromático no espaço-tempo com um raio de luz propagando em um meio óptico. Deste modo, comparando o índice de refração com algumas configurações de índice de refração da lente GRIN, possibilitando, representar de maneira genérica a deflexão da luz. A geodésica pôde ser expressa por meio do formalismo lagrangiano, resultando em uma solução para descrever a trajetória do raio de luz. Nesse formalismo, determinamos quantidades conservadas não triviais por métodos analíticos e numéricos. Este método baseou-se no cálculo de tensores Stackel-Killing (SKT), que forneceu vários procedimentos relevantes.

Palavras-Chaves: Lente GRIN, óptica geométrica, raio de luz, tensor de Killing.

Abstract

The deviation of light, when passing over a gravitational mass, can be calculated in several different ways. However, in this work, the study was made through the description of the trajectory of the monochromatic light beam, using an optical approach. Initially, to establish this approach, it was necessary to show the analogy of the geodesic and eikonal equations. To obtain this analogy, it was necessary to describe the geometric path of light by means of metric formalism, thus allowing to calculate the trajectory of the ray of light by comparing the monochromatic light beam in spacetime with a ray of light that propagated in an optical medium. Thus, comparing the refractive index with some configurations of the refractive index of the GRIN lens, allowing to represent in a generic way the light deflection. The geodesic could be expressed by means of Lagrangian formalism. The geodesic could be expressed through Hamiltonian formalism. In this formalism, we determined non-trivial conserved quantities by analytical and numerical methods. This method was based on the calculation of Stackel-Killing tensors (SKT), which provided several relevant procedures.

Key words:: GRIN lenses, geometrical optics, light beam , Killing tensor.

*“Aos amores da minha vida,
meus pais Clarice e Gilmar ”*

Tudo aquilo que o homem ignora, não existe para ele.

*Por isso o Universo de cada um, se
resume no tamanho de seu saber.*

Albert Einstein

Agradecimentos

Inicialmente, gostaria de agradecer imensamente meu orientador Luís Antonio Cabral, pela confiança, paciência, dedicação em transmitir seu conhecimento e por prontamente me ajudar sempre que precisei, mesmo à distância.

Agradeço ao meu co-orientador Abraão Jessé Capistrano de Souza, também pela confiança, pelo incentivo, apoio e por seus valiosos ensinamentos. Eu realmente aprendi muito com suas aulas de Relatividade Geral.

Agradeço aos membros da banca examinadora pela disponibilidade para avaliar minha dissertação.

Aos Professores do PPGFISA, agradeço por todo conhecimento transmitido, o que foi essencial para a conclusão desta etapa da minha vida. Agradeço à Roberta Markellyn Manfrin Nami e ao Newton por me ajudarem sempre que precisei.

Agradeço aos meus pais Gilmar Lucizani e Clarice da Silva Franciscato Lucizani por todo o aprendizado, apoio, força e coragem para nunca desistir dos meus sonhos. À minha irmã Monique Franciscato Lucizani e ao meu cunhado Marcio, pelos conselhos e por estarem sempre apoiando minhas decisões. À minha sobrinha Letícia por proporcionar muitos momentos de alegria. Quero agradecer às famílias Lucizani e Franciscato, em especial ao meu avô Alcides e à minha avó Andrelina.

Aos meus amigos que de forma direta ou indireta me incentivaram. Em especial, quero deixar registrado todo meu carinho e admiração ao Elias, Patricia, Nelson, Juliana, Evelin, Ana, Josieli, Leonice, Igor.

A todos os meus amigos do PPGFISA, Lara, Débora, Cristian, Samah, Rafael, Matheus, Paola, Nathalie, com os quais tive o prazer de conviver, pela troca de aprendizado. Em especial quero agradecer ao meu amigo Sérgio, pelos conselhos e por me

incentivar a entrar no PPGFISA.

Agradeço, ainda, à CAPES e ao Programa de Demanda Social UNILA, pela concessão da bolsa.

Sumário

Introdução	p. 1
1 Óptica Geométrica e Lente GRIN(Gradient-Index optics)	p. 4
1.1 Propriedades básicas do eletromagnetismo clássico	p. 4
1.1.1 Equações de Maxwell e meios dielétricos	p. 5
1.1.2 Propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo	p. 7
1.2 Lente GRIN e óptica geométrica	p. 11
1.2.1 Propagação do raio de luz	p. 11
1.2.2 Equação dos raios de luz	p. 13
1.2.3 Equação eikonal	p. 14
1.2.4 Lente GRIN	p. 16
2 Teoria da Relatividade Geral	p. 20
2.1 A matemática da Teoria da Relatividade Geral	p. 20
2.1.1 Vetores e tensores	p. 21
2.1.2 Geometria Riemanniana	p. 23
2.1.3 Derivada covariante	p. 25
2.1.4 Equação da geodésica	p. 27
2.1.5 Tensor de curvatura	p. 28

2.2	Teoria da Relatividade Especial	p. 29
2.2.1	Espaço de Minkowski e as transformações de Lorentz	p. 30
2.3	Teoria da Relatividade Geral	p. 33
2.3.1	Equação de Einstein	p. 34
2.3.2	O escalar de Kretschmann	p. 36
3	Equações de Maxwell no Espaço Curvo e Meios Dielétricos	p. 37
3.1	Tensor do campo eletromagnético	p. 38
3.2	Versão geométrica das equações de Maxwell	p. 42
3.3	Analogia entre meios ópticos e o tensor do campo eletromagnético . .	p. 44
4	Analogia Óptico-Mecânica de Geodésicas	p. 46
4.1	Analogia matemática entre a equação da geodésica e a equação eikonal	p. 46
4.2	Analogia entre a trajetória da luz definida pela geodésica e pela equação eikonal	p. 49
5	O Deslocamento do Raio de Luz em Meios com Índice de Refração Variável	p. 52
5.1	Grupo de isometria e tensor de Killing	p. 52
5.1.1	Simetrias e grandezas conservadas	p. 52
5.1.2	Tensores de Killing e tensores de Killing-Yano	p. 55
5.2	Solução das equações de Killing para a métrica óptica	p. 58
5.3	Lente GRIN e a métrica óptica	p. 61
5.4	Grandezas conservadas ao longo da geodésica	p. 61
5.5	Trajetória do raio de luz em lente GRIN	p. 64

5.6	Aplicação do tensor de Killing: métrica dual óptica	p. 69
Conclusão e Perspectivas		p. 72
Apêndice A – Símbolos de Christoffel		p. 74
A.1	Símbolos de Christoffel para métrica óptica isotrópica	p. 74
Apêndice B – Vetor de Killing		p. 75
B.1	Solução do vetor Killing para a métrica óptica	p. 75
Apêndice C – Cálculo da trajetória do raio de luz para as componentes r e u		p. 77
C.1	Para r :	p. 77
C.2	Para u :	p. 78
Apêndice D – Aplicação dos índices de refração na expressão da equação (5.65)		p. 80
D.1	Para $A(r) = n(r) = n_0\sqrt{1 + a/r(\phi)^2}$:	p. 80
D.2	Para $A(r) = n(r) = n_0(1 + a/r(\phi)^2)$:	p. 81
D.3	Para $A(r) = n(r) = n_0(1 + a/r(\phi)^2)^2$:	p. 81
D.4	Para $A(r) = n(r) = n_0\sqrt{1 + br(\phi)^2}$:	p. 81
D.5	Para $A(r) = n(r) = n_0(1 + br(\phi)^2)$:	p. 82
Apêndice E – Cálculo do escalar de Kretschmann		p. 83
E.1	Resultado do escalar de Kretschmann original	p. 83
E.2	Resultado do escalar de Kretschmann dual	p. 84

Introdução

O estudo do desvio da trajetória do raio de luz ao passar em torno da massa gravitacional foi uma das primeiras previsões da Teoria da Relatividade Geral a ser testada. Esse fenômeno, conhecido como deflexão da luz, acontece quando a propagação do raio de luz de uma estrela distante sofre um desvio ao passar próximo ao Sol, de tal maneira a alterar a posição aparente desta estrela. No entanto, o cálculo da deflexão da luz já havia sido proposto por Newton em seu tratamento sobre a óptica. Para Einstein, porém, essas formulações tinham limitações. Assim, o cientista elaborou uma nova teoria para campo gravitacional, apresentada pela Relatividade Geral. Em 1911, Einstein publicou um artigo, deduzindo o cálculo de flexão da luz ao passar por um corpo celeste. A primeira observação da deflexão da luz, foi realizada em um observatório brasileiro em 1919. A observação desse fenômeno é complicada, pois existem vários fatores que podem interferir a posição aparente do raio de luz antes de chegar ao observador. Diante disso, seria interessante pensar: qual modelo análogo podemos utilizar para representar a deflexão do raio de luz?

Nesse sentido, antes de responder a essa pergunta, é relevante iniciar os estudos mostrando a equivalência entre as equações geodésicas nulas e a equação da óptica geométrica (equação eikonal) em meios com índice de refração variável. As equações diferenciais da aproximação eikonal da óptica exploram essa tal variação, fazendo um mapeamento análogo entre as métricas de espaços curvos e índices de refração de meios materiais e partindo do conceito do princípio de Fermat, que diz que a luz percorre o menor caminho óptico. Este princípio admite a possibilidade do raio luminoso desempenhar uma trajetória curva caso o meio de propagação seja não homogêneo. Em contrapartida, na geometria de Riemann, o menor comprimento entre dois extremos de uma curva é representado pela geodésica. Assim, para descrever espaços curvos, precisamos usar os aspectos matemáticos da Relatividade Geral. Sendo assim, se estabe-

lece uma analogia matemática entre as trajetórias dos raios luminosos monocromáticos nesses meios, e as trajetórias definidas por geodésicas nulas. Partindo dessa ideia, podemos determinar outros meios equivalentes que descrevem a trajetória da luz, como, por exemplo, a lente GRIN.

A partir daí, a ideia principal é utilizar uma lente GRIN (Gradient index lenses), para descrever a propagação do raio de luz. Esse material tem características interessantes e possui uma variação controlada do índice de refração na sua constituição. Como o índice de refração depende do valor da distância ao longo do material, podemos determinar uma construção equivalente a uma métrica do espaço. Assim, a lente GRIN pode ser usada para representar de maneira análoga o efeito de reflexão da luz, desde que seja comparada uma métrica com o índice de refração.

Como forma de organizar estruturalmente esta dissertação, no primeiro capítulo será apresentada uma breve revisão sobre óptica geométrica e a lente GRIN. A ideia inicial é resgatar alguns conceitos básicos do eletromagnetismo clássico, alinhando com a óptica geométrica. Este capítulo está dividido em duas seções. Na seção 1.1, fazemos uma breve revisão da teoria do eletromagnetismo clássico. Na seção 1.2, abordamos as propriedades básicas da lente GRIN e a óptica geométrica.

O segundo capítulo é dedicado à Teoria da Relatividade Geral (TRG). Para o desenvolvimento do estudo proposto, é essencial introduzir o conceito de espaços curvos. Então, é importante tratarmos os conceitos da Teoria da Relatividade Geral. Vamos realizar uma breve revisão sobre a TRG, iniciando pelas ferramentas matemáticas, para a compreensão dos formalismos que vamos apresentar durante esta dissertação. Vamos apresentar a Teoria da Relatividade Especial, mostrando os postulados e as equações fundamentais. Em seguida a essas apresentações, finalmente, introduziremos a Teoria da Relatividade Geral e a equação de Einstein.

O terceiro capítulo é a nossa motivação para usar uma métrica para descrever o raio de luz se propagando no espaço-tempo. Assim, iniciamos o capítulo, reescrevendo as equações de Maxwell na sua forma tensorial. Mostraremos a analogia entre o tensor de campo eletromagnético e os meios ópticos.

No quarto capítulo, nos dedicamos a apresentar a analogia entre equação da geo-

désica e a equação da eikonal. Por meio do formalismo matemático da RG, podemos realizar cálculos, com o intuito de relacionar a equação da geodésica nula em métrica do espaço curvo, por meio da óptica geométrica em meio material. Esses cálculos têm por intuito envolver o trajeto do raio de luz sob o efeito do campo gravitacional, atuando analogamente a um meio óptico com índice de refração variável. Esta relação acontece quando consideramos o surgimento da métrica isotrópica (que chamamos de métrica óptica), e a restrição $A = 1/B$. Assim, usando o método das geodésicas nulas, obtemos as soluções de ângulo de deflexão.

No quinto capítulo, abordamos a trajetória do raio de luz, usando o formalismo métrico. Neste sentido, buscamos construir uma solução que descreve a propagação do raio de luz em lente GRIN, utilizando as equações das geodésicas, em vez de usar a equação do raio. Deste modo, pudemos considerar a propagação da luz como sendo geodésica nula. Expressamos, então, o elemento de linha em uma forma isotrópica e calculamos o índice de refração para uma dada configuração de lente GRIN. Neste sentido, com base na solução encontrada, por meio dos vetores de Killing e tensores de Killing, chegamos em alguns aspectos interessantes, que conterão as grandezas convertidas. Enfim, comparamos o resultado com trajetórias de raios de luz em uma lente GRIN. O uso da ferramenta computacional Maple e do pacote para cálculo tensorial(GrTensor) foram de grande relevância para confirmar os cálculos analíticos realizados.

1 Óptica Geométrica e Lente GRIN(Gradient-Index optics)

Para o estudo de uma lente de índice de gradiente variável, é muito importante resgatar algumas propriedades do eletromagnetismo clássico e da óptica geométrica. Este capítulo se inicia com uma breve apresentação das equações Maxwell, pois são fundamentais para o eletromagnetismo. É de suma importância fazer uma revisão dos princípios básicos das equações de Maxwell, pois além de descreverem fenômenos elétricos e magnéticos, essas equações também desempenham um papel importante na caracterização dos conceitos básicos da óptica geométrica.

1.1 Propriedades básicas do eletromagnetismo clássico

Nesta seção, vamos rever alguns conceitos fundamentais do eletromagnetismo. Para tanto, é essencial começarmos pelas equações de Maxwell. Isso se dá porque tais conhecimentos são os pilares da teoria, bem como são fundamentais para o desenvolvimento da pesquisa. Essas equações fazem parte de um grupo simétrico de equações diferenciais parciais formuladas por James Clark Maxwell. Por meio do formalismo matemático, as formulações de Maxwell podem ser reestruturadas de várias maneiras, sem modificar os fenômenos físicos, como veremos no decorrer deste capítulo.

1.1.1 Equações de Maxwell e meios dielétricos

Em meados do século XIX, James Clerk Maxwell introduziu um grupo de equações. Ficaram conhecidas como o conjunto de equações de Maxwell e descrevem os principais fenômenos eletromagnéticos clássicos. A seguir, vamos apresentar as equações de Maxwell no seu formalismo diferencial e pontual:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

O grupo de equações acima é descrito a seguir: Lei de Gauss (1), Lei de Gauss do Magnetismo (2), Lei de Faraday-Lenz (3), Lei de Ampère-Maxwell (4) [1, 3]. As grandezas vetoriais \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} e \mathbf{H} definem o campo eletromagnético e são conhecidas como: \mathbf{D} a densidade de fluxo elétrico ou campo de deslocamento elétrico, \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{B} é a indução magnética, \mathbf{H} o campo magnético. Temos também, a densidade de corrente \mathbf{J} e a densidade de carga ρ [1,2,5,6]. A eq.(1.1) indica que as linhas de fluxo elétrico têm como fonte ρ , isto é, a carga total contida no volume é determinada pelo número de linhas de fluxo elétrico, e a eq.(1.2) mostra que não é possível existir polos magnéticos isolados, ou seja, ocorrem sempre aos pares e não divergem de uma fonte pontual. Por meio da Lei de Faraday-Lenz (1.3) [5], notamos que o fluxo de campo magnético é variável no tempo através de uma espira, gerando um campo elétrico com sentido rotacional e com direção oposta [5]. A Lei de Ampère-Maxwell (1.4) afirma que corrente elétrica induz campos magnéticos e relaciona o \mathbf{B} com \mathbf{E} variável no tempo [5].

Os meios dielétricos, também conhecidos como isolantes, são materiais compostos de átomos e moléculas neutras, que tornam-se polarizados quando estão sob influência do campo elétrico. As cargas atômicas sofrem mudança na posição de equilíbrio [5], ou seja, as partículas carregadas mudam rapidamente sua posição, as cargas positivas se deslocam no sentido do campo e as cargas negativas no sentido oposto. Para meios dielétricos, isotrópicos, homogêneos e lineares, temos as relações envolvendo \mathbf{D} com \mathbf{E}

e \mathbf{B} com \mathbf{H} , ou seja,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} , \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} , \quad (1.6)$$

onde ϵ é a permissividade dielétrica e μ é a permeabilidade magnética do meio material [1–3]. As relações (1.5) e (1.6), definem a relação entre o campos eletromagnéticos e a óptica ondulatória, que podem ser decorrentes das equações de Maxwell. O valores para as constantes no vácuo são: $\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ F/m e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m [1]. Num meio material dielétrico as constantes μ e ϵ são superiores a μ_0 e ϵ_0 [1, 2]. Outra expressão importante, é a densidade de polarização \mathbf{P} , dada por:

$$\mathbf{P} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} , \quad (1.7)$$

onde χ é a susceptibilidade elétrica [1–3]. Outra equação importante é a relação que envolve \mathbf{D} com o \mathbf{P} :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad (1.8)$$

substituindo a eq.(1.7) na eq.(1.8), obtemos:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} , \quad (1.9)$$

onde,

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) , \quad (1.10)$$

então,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} . \quad (1.11)$$

Nesse caso, substituindo a eq.(1.6) e eq.(1.11) nas eq.(1.1) à eq.(1.4), e considerando meios dielétricos e no vácuo, onde, $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$ [1], obtemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 , \quad (1.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Estas são o grupo de equações de Maxwell descrito em espaços livres. Estas equações descrevem a atuação dos campos elétricos e magnéticos em regiões sem fontes, ou seja, no espaço livre [1]. Estamos percebendo que, por meio do formalismo matemático, podemos escrever as equações de Maxwell de formas diferentes.

Assim, o conjunto das equações de Maxwell são essenciais para fundamentar a teoria do eletromagnetismo. Como visto, as equações podem se modificar conforme a análise em questão, ou seja, as equações podem descrever efeitos em que cargas e correntes elétricas atuam como fontes ou sem fonte para os campos elétricos e magnéticos. Veremos na próxima seção que a dedução das equações de Maxwell implicam existências de ondas eletromagnéticas que se propagam na velocidade da luz.

1.1.2 Propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo

As soluções das equações de Maxwell nos levam a uma gama de fenômenos elétricos e magnéticos. Uma das principais consequências é a propagação de ondas eletromagnéticas. Possuindo características especiais, as ondas eletromagnéticas não precisam necessariamente de meios que forneçam suporte para a propagação, diferentemente das ondas mecânicas e sonoras.

Considerando a propagação de ondas eletromagnéticas no espaço livre, de modo que, $\mu = \mu_0$ e $\epsilon = \epsilon_0$, utilizando as equações de Maxwell para um meio sem fonte [1, 5], vamos calcular o rotacional da eq.(1.14),

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Antes de continuar o cálculo, vale ressaltar que o rotacional é comutável com as derivadas temporais [4], ou seja,

$$\nabla \times \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \times \nabla. \quad (1.17)$$

Outra definição importante, é a identidade vetorial. Para \mathbf{A} , obtém-se,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} . \quad (1.18)$$

Aplicando a identidade (1.18) na eq.(1.16), obtemos:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) . \quad (1.19)$$

Usando a eq.(1.12) e a eq.(1.15) na eq.(1.19), obtemos, finalmente, a equação de onda para o campo elétrico:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} , \quad (1.20)$$

onde, a eq.(1.20) pode ser expandida, da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial^2 E(x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 E(y)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 E(z)}{\partial t^2} \right) . \quad (1.21)$$

De maneira análoga, podemos obter a equação de ondas para o campo magnético. Tomando o rotacional da eq.(1.15), e aplicando a identidade (1.18), obtemos:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} , \quad (1.22)$$

então,

$$\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B(z)}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial^2 H(x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 H(y)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 H(z)}{\partial t^2} \right) . \quad (1.23)$$

onde as equações (1.20) e (1.22) satisfazem a equação de Helmholtz como veremos no decorrer desta seção. As expressões (1.21) e (1.23) representam as componentes escalares das equações de Helmholtz das ondas eletromagnéticas. A propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo, ocorre por meio da indução da variação temporal do campo elétrico e magnético. Cada componente de \mathbf{E} e \mathbf{H} satisfaz a equação de onda. Vale ressaltar que, a velocidade de propagação das ondas é expressa pela equação $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ [1–3]. Para um espaço vazio, a velocidade v é igual a velocidade da luz c ,

ou seja,

$$c = v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s} . \quad (1.24)$$

Isso significa que a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas, resultante das quantidades do eletromagnetismo, é idêntica à velocidade da luz no vácuo [2]. Essas quantidades foram obtidas por Maxwell por meio de medidas empíricas fornecidas pela indutância e capacitância. Esses valores foram substituídos em μ e ϵ , obtendo, assim uma relação entre o eletromagnetismo e a luz. Esse feito revolucionou o mundo científico, pois relacionou o eletromagnetismo com a óptica.

Ressaltando que, para obtenção das equações de onda para o campo elétrico (1.20) e magnético (1.22), utilizamos equações de Maxwell para o meio isotrópico. Contudo, as equações de Maxwell no vácuo devem satisfazer a equação de onda, mas, o oposto não é verdadeiro [5].

Para verificar, é preciso obter o resultado para campos elétrico e magnético. Considerando que uma onda eletromagnética também é uma onda monocromática plana, que possui forma senoidal de frequência angular ω que varia no tempo [4, 5]. Para fazer uma análise da onda eletromagnética, vamos considerar o campo elétrico e magnético:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (1.25)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} , \quad (1.26)$$

onde o campo elétrico e magnético são variáveis complexas e $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ são os campos físicos, ou seja, as partes reais dos campos, sendo proporcionais a $\cos(\omega t + \phi)$ em que ϕ é a fase dos campos elétricos e magnético [3, 4]. Substituindo a eq.(1.25) e eq.(1.26) na eq.(1.20) e eq.(1.22), obtemos:

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t}(\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})) &= e^{-i\omega t}(\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})) , \\ \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) , \end{aligned} \quad (1.27)$$

e

$$e^{-i\omega t}(\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r})) = e^{-i\omega t}(\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}))$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) , \quad (1.28)$$

Seja uma onda plana propagando-se em apenas uma direção, e supondo que esta direção seja em z , tal que, z não dependa de x ou y [5]. Nessa situação, assume-se que $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ e $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \omega/c$ [3]. Assim, substituindo as condições nas equações (1.27) e (1.28), temos que:

$$\begin{aligned} \nabla^2 E(z) &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E , \\ \frac{d^2 E(z)}{dz^2} &= -k_0^2 E , \end{aligned} \quad (1.29)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla^2 H(z) &= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 H , \\ \frac{d^2 H(z)}{dz^2} &= -k_0^2 H , \end{aligned} \quad (1.30)$$

onde o parâmetro k_0 é o número de onda no vácuo. As expressões (1.29) e (1.30), são equações vetoriais de Helmholtz. Resolvendo as equações (1.29) e (1.30), obtemos:

$$E(z) = E_0 e^{\pm i k_0 z} , \quad (1.31)$$

$$B(z) = B_0 e^{\pm i k_0 z} , \quad (1.32)$$

levando em consideração a parte real dos campos elétricos e magnéticos, ou seja,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t \pm k_0 z) , \quad (1.33)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t \pm k_0 z) , \quad (1.34)$$

onde z é a direção de propagação de uma onda senoidal e k_0 nesse caso caracteriza o período espacial [5]. As equações (1.33) e (1.34), mostram que são funções periódicas, com comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k_0$ e com frequência da onda de $f = \omega/2\pi$ [5]. Reescrevendo-a $\lambda \Rightarrow k_0 = 2\pi/\lambda$ e $f \Rightarrow \omega = 1/2\pi f$, substituindo o número de onda no vácuo, obtemos:

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} , \quad (1.35)$$

ainda podemos reescrever a equação acima, de modo que:

$$c = \lambda f , \quad (1.36)$$

onde c nesse caso é velocidade de fase da onda, ou seja, $c = v$. Lembrando que λ é inversamente proporcional a f , pois, a medida que a frequência aumenta, o comprimento diminui e vice-versa.

Como podemos perceber, as propriedades das ondas eletromagnéticas são desenvolvidas completamente a partir das relações de Maxwell. Além disso, é importante frisar que, com seus cálculos, Maxwell determinou uma relação entre as ondas eletromagnéticas e a óptica. Essa relação tem uma grande importância no estudo da luz, como veremos nos próximos tópicos.

1.2 Lente GRIN e óptica geométrica

Tendo já descrito de maneira geral os fundamentos básicos da propagação das ondas eletromagnéticas, podemos introduzir os conceitos da lente GRIN (GRIN, abreviatura em inglês para "Gradient index lenses") e da óptica geométrica. Inicialmente, vamos relembrar alguns conceitos fundamentais da óptica geométrica, como, por exemplo, o estudo da propagação da luz, o Princípio de Fermat e a Equação eikonal.

1.2.1 Propagação do raio de luz

A luz, ao se propagar, obedece uma série de princípios, que podem ser analisados geometricamente. Para realizar essa interpretação, vamos considerar que a luz se comporta como raios luminosos retilíneos, independentes entre si, com seu comprimento de onda tendendo a zero. Assim, o raio de luz obedece alguns princípios, que são descritos abaixo:

- a luz é entendida como raios;
- o raio percorre diferentes meios ópticos com diferentes velocidades;

- um raio viaja de um ponto a outro em um tempo mínimo (Princípio de Fermat) [1, 8, 12, 13].

O Princípio de Fermat é muito utilizado para determinar expressões que descrevem a trajetória dos raios em meios não homogêneos e homogêneos. Para determinar o caminho que o raio óptico percorre de um extremo a outro, em relação à vizinhança, utilizamos a equação variacional de Fermat [1, 8, 12, 13]. É importante considerar que o caminho percorrido por um raio de luz do ponto A até B é representado por meio da equação variacional de Fermat,

$$\delta L_p = \int_A^B n(\mathbf{r}) ds = 0, \quad (1.37)$$

onde a lagrangiana L_p descreve o comprimento do caminho percorrido pelo raio, n é o índice de refração e a posição é dada por r , e a trajetória do raio é representada pelo comprimento diferencial ds [1, 8, 12, 13, 16].

A propagação da luz em superfícies refletoras ou refratoras é constituída por um sistema óptico centrado, onde os raios percorrem ângulos pequenos ao redor do eixo óptico [2]. Nos componentes ópticos centrados, conforme um raio passa próximo do eixo óptico, forma um pequeno ângulo de incidência com a reta normal [2]. Essa situação é conhecida como raios paraxiais, que se fundamenta a óptica paraxial.

Vale ressaltar que a propagação da luz em meios homogêneos possui comportamento diferente dos meios não homogêneos [1, 8, 12, 13]. Para meios homogêneos, os raios viajam em linha reta e os índices de refração não têm dependência da posição r , ou seja, n é constante. Entretanto, o índice de refração não é constante em meios não homogêneos, pois n depende da posição, e sua trajetória pode descrever uma curva [1, 12, 13]. No decorrer deste trabalho, investigamos a propagação de raios de luz em materiais não homogêneos, que terão grande importância para a realização de interpretações geométricas do raio de luz.

1.2.2 Equação dos raios de luz

De acordo com princípio de Fermat, a trajetória dos raios de luz é curvilínea em meios não homogêneos. Nesses materiais o índice de refração n está em função da posição r . Assim, para descrever estas trajetórias, vamos considerar o caminho que o raio óptico percorre, que é uma trajetória em termos das coordenadas cartesianas, descrita pelas componentes $x(s)$, $y(s)$ e $z(s)$. Assumindo que, o elemento de linha é expresso por $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, e colocando dz em evidência [1, 2, 12, 13], temos:

$$ds = dz\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (1.38)$$

onde $\dot{x} = dx/dz$ e $\dot{y} = dy/dz$. Assumindo que n esteja variando em três direções e aplicando o cálculo variacional na eq.(1.50), temos [8]:

$$\delta \int_A^B n(x, y, z)\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}dz = 0. \quad (1.39)$$

sendo que,

$$f = n(x, y, z)\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}dz. \quad (1.40)$$

Note que, na eq.(1.39) ocorre uma situação da mecânica clássica, que leva às equações Euler-Lagrange [2, 8, 16]:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (1.41)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (1.42)$$

Resolvendo as derivadas da eq.(1.39), assumindo a equação paraxial do raio $ds \cong dz$, obtemos:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} \quad (1.43)$$

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad (1.44)$$

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (1.45)$$

o que leva à forma geral da equação diferencial dos raios

$$\frac{d}{ds} \left(n(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n(\mathbf{r}) . \quad (1.46)$$

Esta equação fornece as características do trajeto percorrido por um raio de luz monocromático, que se propaga em um meio com índice de refração dependente da posição. Para meios homogêneos, n é constante, então a eq.(1.46) reduz para

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0 , \quad (1.47)$$

onde, a eq.(1.47) mostra que para meios homogêneos os raios se propagam em linhas retas.

1.2.3 Equação eikonal

A equação eikonal é obtida a partir do limite óptico (limite entre a óptica física e a óptica geométrica). Esse limite acontece quando o comprimento de onda é muito pequeno $\lambda \rightarrow 0$. Neste ponto, o caráter ondulatório é desconsiderado. A solução dessa equação expressa a trajetória de um feixe de luz.

Assumindo que, o raio de luz monocromático está se propagando de um ponto A até B , com índice de refração variando ponto a ponto em relação ao comprimento de onda λ , a equação de Helmholtz de onda (1.27), pode ser reescrita como [2, 15]:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{n^2(\mathbf{r})\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 . \quad (1.48)$$

A função eikonal $S(\mathbf{r})$ é uma função escalar real, constante, que depende da posição \mathbf{r} . As frentes de ondas estão contidas na função eikonal, que viajam na direção para qual $S(\mathbf{r})$ varia o mais rapidamente. Deste modo, a função $S(\mathbf{r})$ está alinhada com a direção e perpendicular às superfícies de fase constante.

Levando em consideração, a não dependência temporal da equação de onda e a amplitude complexa, podemos expressar a eq.(1.33) da seguinte maneira [15]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{(ik_0 S(\mathbf{r}))} , \quad (1.49)$$

onde, $k_0 = 2\pi n(r)/\lambda_0$, sendo o λ_0 definido como o comprimento de onda no vácuo. Substituindo a eq.(1.49) na eq.(1.48), obtemos:

$$\nabla^2 [\mathbf{E}_0 \exp(ik_0 S(\mathbf{r}))] + \frac{n^2(\mathbf{r})\omega^2}{c^2} [\mathbf{E}_0 \exp(ik_0 S(\mathbf{r}))] = 0 , \quad (1.50)$$

substituindo a velocidade da luz $c = \omega/k_0$ na eq.(1.50), obtêm-se [15]:

$$\frac{1}{k_0^2} \nabla^2 [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp(ik_0 S(\mathbf{r}))] + n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0 \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) = 0 , \quad (1.51)$$

calculando o gradiente da componente x e tomando seu Laplaciano, obtêm-se [15]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla [E_{0x}(\mathbf{r}) \exp(ik_0 S(\mathbf{r}))] &= (\nabla^2 E_{0x} - k_0^2 E_{0x} [\nabla S(\mathbf{r})] + ik_0 E_{0x} \\ &[\nabla^2 S(\mathbf{r})] + 2ik_0 \nabla E_{0x}(\mathbf{r}) [\nabla S(\mathbf{r}) e^{(ik_0 S(\mathbf{r}))}] , \end{aligned} \quad (1.52)$$

combinando componentes do vetor $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$, a eq.(1.52) pode ser expressa como [15]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 [\mathbf{E}_0 \exp(ik_0 S(\mathbf{r}))] &= (\nabla^2 \mathbf{E}_0(r) - k_0^2 E_0 [\nabla S(\mathbf{r})] [\nabla S(\mathbf{r})] \\ &+ ik_0 \mathbf{E}_0 [\nabla^2 S(\mathbf{r})] + 2ik_0 [\hat{x} [\nabla E_{0x} \nabla S(\mathbf{r})] \\ &+ \hat{y} [\nabla E_{0y} \nabla S(\mathbf{r})] + \hat{z} [E_{0z} \nabla S(\mathbf{r})]]) \exp(ik_0 S(\mathbf{r})) . \end{aligned} \quad (1.53)$$

Logo após calcular o Laplaciano, reorganizando a eq.(1.53), temos que:

$$\begin{aligned} [\nabla S(\mathbf{r}) \cdot \nabla S(\mathbf{r}) - n^2(\mathbf{r})] \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= \frac{\nabla^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r})}{k_0^2} + \frac{i}{k_0} \nabla^2 S(\mathbf{r}) + \frac{2i}{k_0} \mathbf{x} \nabla E_{0x}(\mathbf{r}) \\ &\cdot \nabla S(r) + \frac{2i}{k_0} \mathbf{y} \nabla E_{0y}(\mathbf{r}) \nabla S(r) + \frac{2i}{k_0} \\ &\mathbf{z} \nabla E_{0z}(\mathbf{r}) \nabla S(\mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (1.54)$$

Neste ponto, é preciso considerar o limite óptico, ou seja, $\lambda_0 \rightarrow 0$. Portanto, como k_0 depende do λ_0 , podemos desprezar todo lado direito. Assim, a eq.(1.54), é expressa [15]:

$$[\nabla S(\mathbf{r})] \cdot [\nabla S(\mathbf{r})] = n^2(\mathbf{r}) . \quad (1.55)$$

A eq.(1.54), pode ser reescrita em termos das componentes das coordenadas cartesianas, ou seja [15],

$$|\nabla S|^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2. \quad (1.56)$$

1.2.4 Lente GRIN

A lente do índice de gradiente (GRIN) é um material não homogêneo com índice de refração variável, diferente da lente tradicional. Podemos encontrar exemplos dessas lentes na natureza, tais como: o olho humano, miragem, etc. Elas são formadas por múltiplas folhas de fase nas superfícies planas de entrada e saída dos raios, favorecendo combinações de alguns componentes ópticos [11]. Em um material GRIN, os raios percorrem trajetórias curvas, ou seja, a mídia GRIN modifica a propagação dos raios [14, 16]. A propagação de vários feixes nesse meio material pode ser estudada utilizando a abordagem da Transformação de Fourier, assumindo uma aproximação óptica específica [11]. Essencialmente, três tipos de índice de gradientes básicos foram estudados, a saber: axial, radial e esférica [14].

O primeiro pesquisador a descrever uma lente com simetria esférica e com meios não homogêneos foi Maxwell, em 1854 [14]. Ela ficou conhecida como o "olho de peixe de Maxwell". Em 1905, com a técnica de imersão, o pesquisador Wood produziu uma lente cilíndrica de gelatina que variava seu índice de refração. Com uma simetria axial, a lente de Wood possuía um comportamento convergente ou divergente, dependendo da relação da variação do índice de refração e da posição r [14]. Luneburg, em 1964, descreveu a propagação de feixes de raios em meios não homogêneos, e também estudou a propagação dos raios de luz em lente GRIN. Após as descobertas sobre esse materiais, vários cientistas se voltaram para encontrar novos métodos e técnicas para a fabricação desse material. [14].

O processo de fabricação da lente GRIN, pode ser realizado por vários métodos diferentes. No entanto, a técnica mais utilizada é de difusão de íons [11, 14]. Esse processo acontece quando o vidro é levado para um banho de sal que dura várias horas. Como resultado da difusão, as partículas de íons de sódio se movimentam na superfície do vidro. Assim, desloca-se de uma região mais concentrada para um meio menos

concentrado, formando as múltiplas folhas de fase, gerando a lente GRIN [11, 14].

Inicialmente vamos determinar o índice de refração variável em coordenadas cartesianas, e em um meio não homogêneo. A equação variacional da integral da trajetória do raio de luz monocromático é [14]:

$$\delta S = \int_{z_0}^z L dz , \quad (1.57)$$

com

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}; z) = n(x, y, z) \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} , \quad (1.58)$$

onde a derivada \dot{x} é em relação a z . Substituindo a Lagrangiana (1.58) na eq.(1.57), obtemos [14]:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{n\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right] = \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (1.59)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{n\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right] = \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{\partial n}{\partial y} . \quad (1.60)$$

podemos reescrever as equações (1.59) e (1.60) de tal forma que [14]:

- Para eq.(1.59)

$$n\ddot{x} = (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \dot{x} \frac{\partial n}{\partial z} \right) \quad (1.61)$$

$$\frac{n\ddot{x}}{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)} = \left(\frac{\partial n}{\partial x} - \dot{x} \frac{\partial n}{\partial z} \right) , \quad (1.62)$$

- Para eq.(1.60), temos

$$n\ddot{y} = (1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) \left(\frac{\partial n}{\partial y} - \dot{y} \frac{\partial n}{\partial z} \right) \quad (1.63)$$

$$\frac{n\ddot{y}}{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)} = \left(\frac{\partial n}{\partial y} - \dot{y} \frac{\partial n}{\partial z} \right) . \quad (1.64)$$

Considerando as quantidades [14],

$$\cos \alpha = \frac{n\dot{x}}{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)} , \quad (1.65)$$

$$\cos \beta = \frac{\dot{y}}{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)}, \quad (1.66)$$

$$\cos \tilde{\gamma} = \frac{1}{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)}, \quad (1.67)$$

assumindo que, $p = n \cos \alpha$, $q = n \cos \beta$ e $l = n \cos \gamma$, então, $\dot{x} = -\partial l / \partial p$ e $\dot{y} = -\partial l / \partial q$. Substituindo p , q e l nas equações (1.65), obtemos como resultados as equações canônicas [14]. Para uma Lente GRIN, temos que: $\partial n / \partial z = 0$, assim, se $l = 0$, então, l é constante [14]. Desse modo, foi preciso usar outra ferramenta matemática para encontrar uma solução para o n . Expandindo soluções em série MacLaurin [14] e, considerando meios dielétricos, em que a propagação ocorre ao longo do eixo z , $x = y = 0$. O índice para a lente GRIN, é [14]:

$$n(x, y, z) = n_0(z) \left[1 \pm \frac{a(z)}{2} (x^2 + y^2) \right], \quad (1.68)$$

onde $a(z)$ é uma função para a lente GRIN [14].

A lente GRIN, possui um índice de refração n , que pode ser reformulado de acordo com a coordenada a ser analisada. [15–17]. Para um comprimento do arco de um gradiente esférico, o índice está em função das coordenadas r, θ e ϕ , ou seja, $n = n(r, \theta, \phi)$. No entanto, para a lente GRIN em coordenada esférica, o índice varia para fora do eixo óptico [17]. Assim, n é puramente radial, isto é, $n = n(r, \theta, \phi) = n = n(r)$.

A lente GRIN têm varias aplicações nas mais diferentes áreas. Neste caso, é interessante ressaltar que a propagação dos raios de luz pode seguir uma trajetória curva. Devido a essa situação, podemos utilizar as geodésicas para descrever a propagação da luz, como veremos no capítulo 5. Assim, podemos fazer uma analogia entre a equação eikonal e a geodésica, como mostraremos no capítulo 4. Porém, para mostrar essa equivalência, primeiramente precisamos introduzir o conceito de espaços curvos. Assim, é essencial introduzir o conceito da Relatividade Geral, para compreender a ideia de espaços curvos. Com essa ideia, podemos considerar a equivalência do fenômeno de reflexão da luz com a lente GRIN, como mostram as figuras a seguir

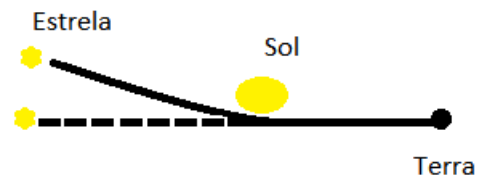


Figura 1: Deflexão da luz. Fonte: O autor (2019).

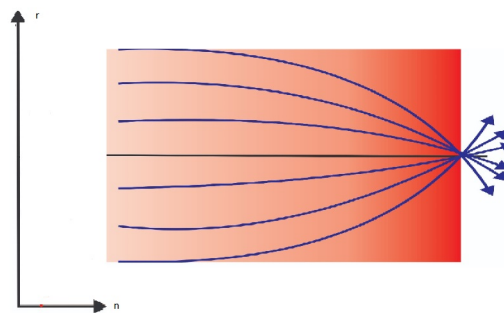


Figura 2: Trajetória do raio de luz em uma lente GRIN. Fonte: O autor (2019).

2 *Teoria da Relatividade Geral*

Neste capítulo, vamos introduzir os conceitos básicos da Teoria da gravitação de Einstein, conhecida como Teoria da Relatividade Geral (TRG). Formada por um conjunto de hipóteses, a Teoria da Relatividade Geral descreve as propriedades geométricas do espaço-tempo, unificando a Teoria da Relatividade Especial (TRE) e a gravidade. Para o desenvolvimento do nosso estudo, inicialmente, vamos abordar algumas propriedades matemática da TRG, e alguns conceitos da TRE, assim, introduzir os princípios da TRG.

2.1 A matemática da Teoria da Relatividade Geral

Na Relatividade Geral, o tratamento matemático tem base nos conceitos da geometria diferencial. Para descrever o espaço-tempo curvo, vamos usar o conceito de variedade. Podemos definir uma variedade M como um espaço topológico que localmente é parecido com o \mathbb{R}^4 [20, 37]. Se U é subconjunto aberto em que $U \subset M$, tal que, $M = \mathbb{R}^m$, com cada ponto $p \in U$ tem-se $p = \phi(p) = (\phi^0, \phi^1 \dots \phi^{m-1})$, com uma vizinhança homeomórfica, ou seja, $\phi : U \rightarrow \phi(U)$. Considerando um ponto $p \in M$ e as coordenadas locais $\phi^\mu \in M^4$: seja um atlas máximo \mathfrak{A} de classe C^k em M é uma variedade diferenciável, se M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável.

2.1.1 Vetores e tensores

Na Teoria da Relatividade Geral, as equações matemáticas das leis físicas devem ser invariantes sob uma transformação de coordenadas arbitrária, como veremos mais adiante. Devido ao cumprimento desta condição, a Relatividade Geral é formulada utilizando a linguagem tensorial. Sendo objetos geométricos, os tensores são representados numericamente, e não dependem do sistema de coordenadas. De modo geral, estes objetos são generalizações dos vetores, covetores (vetores cotangentes), operadores lineares e forma bilinear. Estas entidades geométricas são caracterizadas por um posto, *rank* ou ordem, que é um número real positivo.

Estamos familiarizados com a definição de vetores. Vistos como grandezas matemáticas, os vetores são representados por um sentido, direção e módulo. No entanto, iremos apresentar o conceito de vetores a partir de derivada direcional.

Considerando uma curva parametrizada $\gamma(\lambda) : \mathbb{R} \rightarrow M$. Se esta curva passa por um ponto p tal que, $p \in M$, existe uma função f definida no espaço M , em que $M \supset \gamma(\lambda)$. Uma aplicação de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em M , quando f é derivável em todos os pontos, ou seja, podemos definir um operador de derivadas direcionais [18, 30]

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (2.1)$$

que mapeia todos os pontos ao longo da curva.

De modo geral, todas as curvas que passam por um ponto p , estão relacionadas com as derivadas direcionais, formando um espaço vetorial em p . Este espaço vetorial é conhecido como espaço tangente T_p [18, 19, 30]. Assim como um operador derivada direcional, os vetores \mathbf{V} mapeiam funções em um número real. Desta forma, podemos definir que $\mathbf{V} = d/d\lambda$, tal que, $\mathbf{V} : f \rightarrow \mathbb{R}$. As derivadas parciais (∂_μ ou $\partial/\partial x^\mu$) podem ser consideradas como elementos de base coordenada no espaço tangente, de acordo com a eq.(2.1) $\partial_\mu \equiv \mathbf{e}_\mu$. Se $\mathbf{V} \in T_p$, então podemos expressar como [18]:

$$\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{V} é chamado de vetor contravariante, $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$ é a componente e $\mathbf{e}_\mu = \partial_\mu$ é a base vetorial [18, 19]. Realizando uma transformação de coordenadas $\mu \rightarrow \mu'$, na eq.(2.2). Pela regra da cadeia obtemos [18, 30]:

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu , \quad (2.3)$$

então, obtemos novos vetores de base. Isto mostra que o \mathbf{V} não depende do sistema de coordenada, então a transformação é invariante [18, 39],

$$\mathbf{V} = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = V^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu , \quad (2.4)$$

logo, a transformada é

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu . \quad (2.5)$$

Existe um espaço vetorial dual para T_p chamado de espaço cotangente, denotado como T_p^* . Um elemento ω é uma função linear de T_p , ou seja, $\omega : T_p \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos considerar ω um vetor cotangente(ou vetor covariante), definido como 1 – *forma* [18].

Definidos os conceitos de \mathbf{V} , T_p e T_p^* , podemos introduzir a noção de tensores. Estruturas multilineares, os tensores T transformam vetores em número real. Seja um tensor T de tipo (l, k) tal que, l é componente do T_p^* e k componente do T_p , a aplicação multilinear é [18]:

$$T : \underbrace{T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{l\text{-vezes}} \times \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_{k\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R} . \quad (2.6)$$

Considerando um tensor arbitrário T de posto (a, b) , escrito na forma [18, 39]

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_l}_{\nu_1 \dots \nu_k} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_l}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_k} , \quad (2.7)$$

as componentes do tensor T se transformam na forma contravariante como [18, 21]:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_i} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_i}}{\partial x^{\mu_i}} T^{\mu_1 \dots \mu_i} , \quad (2.8)$$

na forma covariante [21],

$$T_{\nu'_1 \dots \nu'_k} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_k}}{\partial x^{\nu'_k}} T_{\nu_1 \dots \nu_k} , \quad (2.9)$$

e no caso mais geral, conhecido como tensor misto que possui ambos índices, se transforma [18, 39]

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_i}_{\nu'_1 \dots \nu'_k} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_i}}{\partial x^{\mu_i}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_k}}{\partial x^{\nu'_k}} T^{\mu_1 \dots \mu_i}_{\nu_1 \dots \nu_k} , \quad (2.10)$$

obedecendo a lei de transformação, válida para qualquer sistema de coordenadas. Resumidamente, podemos construir tensores a partir dos espaços tangente e cotangente no ponto p . Os vetores, por exemplo, são tensores de posto $(1, 0)$, já os escalares são de posto $(0, 0)$, e os tensores superiores são de ordem (m, n) .

2.1.2 Geometria Riemanniana

Uma variedade arbitrária não determina a priori a variação de objetos geométricos de um ponto a outro, ou seja, não mede o comprimento de uma curva por exemplo. Diante deste procedimento vamos acrescentar uma geometria à variedade. A geometria Riemanniana envolve o produto interno sobre T_p , que varia suavemente a cada ponto. Isso permite definir diversas noções métricas, como de comprimento de curvas, ângulos, curvatura, entre outras grandezas.

Inicialmente, vamos considerar o produto interno de uma métrica Riemanniana g_p em M_p . Este produto interno é definido como um mapa bilinear simétrico $\langle, \rangle: T_p \times T_p \rightarrow \mathbb{R}$ [18]. Assumindo um sistema de coordenadas locais e dois vetores arbitrários \mathbf{U} e \mathbf{V} pertencentes ao espaço tangente. Temos que [22],

$$g_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu , \quad (2.11)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é chamado de tensor métrico. Os componentes de $g_{\mu\nu}$ em uma base arbitrária

e_μ são [22]

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \langle e_\mu, e_\nu \rangle . \quad (2.12)$$

Quando um espaço é considerado métrico é possível definir a distância de uma curva [39]. A distância infinitesimal entre dois pontos é

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (2.13)$$

Precisamos destacar algumas propriedades importantes do tensor métrico. A primeira definição é a norma do vetor. A norma de um vetor contravariante é definida como,

$$V^2 = g(V, V) = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu , \quad (2.14)$$

onde o resultando é um número real que equivale ao comprimento desse vetor. Outra propriedade importante que vale ressaltar, é a matriz inversa de $g_{\mu\nu}$. Dada pelo tensor $g^{\mu\nu}$. Se considerar $g_{\mu\nu}$ como uma matriz, $g = \det(g_{\mu\nu})$ e cofator $\Delta^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ [18, 22, 39], então $g^{\mu\nu}$ é dado como

$$g^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g} , \quad (2.15)$$

consequentemente obtemos a seguinte relação tensorial:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda . \quad (2.16)$$

onde δ_ν^μ é chamado delta de Kronecker¹ δ_ν^μ . Ação dos tensores $g^{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}$ é abaixar e levantar índices, ou seja,

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} T_\rho^\nu , \quad (2.17)$$

e

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} T_\nu^\rho , \quad (2.18)$$

¹ $\delta_\nu^\mu=1$ se $\mu = \nu$ ou 0 se $\mu \neq \nu$.

onde o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é usado para manipular tensores ordinários.

2.1.3 Derivada covariante

Como visto na seção anterior, foram atribuídos dados geométricos às variedades, por meio de uma métrica riemanniana. Sendo assim, podemos introduzir algumas características usando o transporte paralelo. Em um espaço riemanniano o transporte paralelo tem função de transportar paralelamente um vetor de um ponto ao outro da curva em uma variedade. No decorrer deste processo, o ângulo formado pelo vetor tangente e a curva permanece constante.

Em espaços curvos, o transporte paralelo pode definir a diferença entre dois vetores tangentes separados em uma curva [27]. Para esta situação é preciso deslocar um vetor até o outro e, assim, calcular a diferença entre eles [27]. O movimento paralelo do vetor é fornecido por uma derivada covariante ∇_α . Considerando que o vetor \mathbf{V}^μ está sendo transportado infinitesimalmente de um ponto (x^α) até o ponto $(x^\alpha + dx^\alpha)$ de uma curva. A variação de um vetor, sobre a coordenada (x^α) , equivale a: $dV^\mu = V^\mu(x^\alpha + dx^\alpha) - V^\mu(x^\alpha) = d((\partial x^\mu / \partial x^\nu) V^\nu)$. Obtemos pela regra da cadeia [18, 27, 30]

$$dV^\mu = d\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}\right) V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} dV^\nu . \quad (2.19)$$

Pela regra da transformação obtemos [18, 27, 30]:

$$dV'^\mu = \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} V^\nu dx^\alpha + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dV^\nu , \quad (2.20)$$

o V'_μ não se transforma como um vetor. Para contornar essa situação, precisamos determinar [18, 27, 30],

$$(\nabla_\alpha V^\mu) dx^\alpha = V^\mu(x^\alpha + dx^\alpha) - (V^\mu + \delta V^\mu) , \quad (2.21)$$

tal que,

$$\delta V^\mu \equiv -\Gamma_{\alpha\lambda}^\mu dx^\alpha V^\lambda , \quad (2.22)$$

onde $\Gamma_{\alpha\lambda}^\mu$ é conhecido como conexão afim ou símbolos de Christoffell. Esta conexão,

contém informações sobre a geometria local [27, 28]. O $\Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu}$ é definido como:

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}(\partial_{\alpha}g_{\nu\mu} + \partial_{\mu}g_{\alpha\nu} - \partial_{\nu}g_{\alpha\mu}) . \quad (2.23)$$

Então aplicando o diferencial na eq.(2.21), obtemos a derivada contravariante

$$\nabla_{\alpha}V^{\mu} = \partial_{\alpha}V^{\mu} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu}V^{\lambda} . \quad (2.24)$$

Para que a eq.(2.24) realmente seja um tensor, basta fazer a transformação de coordenada [18]. Inicialmente, vamos considerar a lei de transformação, $\nabla_{\alpha'}V^{\mu'} = X_{,\alpha'}^{\alpha} X_{,\mu'}^{\mu} \nabla_{\alpha}V^{\mu}$. Aplicando esta transformação na derivada ∇_{α}^{μ} , então

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha'}V^{\mu'} &= \partial_{\alpha'}V^{\mu'} + \Gamma_{\alpha'\lambda'}^{\mu'} \\ \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \nabla_{\alpha}V^{\mu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \partial_{\alpha}V^{\mu} + \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} V^{\mu} \\ &+ \Gamma_{\lambda'\alpha'}^{\mu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} V^{\lambda} , \end{aligned} \quad (2.25)$$

substituindo a eq.(2.24) na expressão(2.25), podemos obter a lei de transformação para conexão,

$$\Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \Gamma_{\alpha'\nu}^{\mu} - \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\lambda}} . \quad (2.26)$$

O símbolo de Christoffel perante a lei de transformação nos mostra que não é um tensor [18].

Como visto no começo da seção, a derivada de um vetor não é invariante sob transformação. Para contornar a situação foi utilizado o transporte paralelo. No entanto, as derivadas simples do escalar se transformam como um tensor, ou seja, $\partial_{\mu'}\phi'(x') = X_{,\nu'}^{\mu'} \partial_{\nu}\phi(x)$ [18]. Deste modo, vamos definir a derivada covariante de um escalar ($\nabla_{\mu}\phi(x) = \partial_{\mu}\phi(x)$). Então a derivada a covariante é definida como:

$$\nabla_{\mu}A_{\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}A_{\lambda} . \quad (2.27)$$

Tendo definido a derivada covariante, podemos generalizar para os tensores,

$$\nabla_{\mu}T^{\nu\dots\rho}_{\lambda\dots\tau} \equiv \partial_{\mu}T^{\nu\dots\rho}_{\lambda\dots\tau} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_\mu T^{\nu\dots\rho}_{\lambda\dots\tau} + \Gamma_{\mu\eta}^\nu T^{\eta\dots\rho}_{\lambda\dots\tau} + \dots + \Gamma_{\mu\eta}^\nu T^{\eta\dots\rho}_{\lambda\dots\tau} \\
&- \Gamma_{\mu\eta}^\nu T^{\eta\dots\rho}_{\lambda\dots\tau} - \dots - \Gamma_{\mu\eta}^\nu T^{\eta\dots\rho}_{\lambda\dots\tau} .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

2.1.4 Equação da geodésica

Uma vez apresentada a definição do transporte paralelo, podemos expor uma aplicação muito importante na Relatividade Geral, a equação geodésica. As geodésicas são uma classe de curvas que minimizam a distância entre dois pontos no espaço [16]. Considerando o transporte paralelo de um vetor \mathbf{V} tangente ao longo de si mesmo, ou seja, a sua variação obedece a expressão

$$\nabla_V \mathbf{V} = 0 . \tag{2.30}$$

Considerando inicialmente, um vetor \mathbf{V} sendo transportado paralelamente ao longo da curva geodésica $\gamma(\lambda)$. A curva $\gamma(\lambda) \in M$, onde localmente a geodésica define uma extensão de “linha reta”. A eq.(2.30) obedece a regra

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\nu V^\rho = 0 . \tag{2.31}$$

Assim, podemos obter algumas informações sobre as geodésicas, quando reescrevemos a eq.(2.31) em termos de uma base coordenada (x^μ) [18, 26, 27, 30]. Antes de obter essas informações, precisamos definir as componentes do vetor tangente $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$. Então temos [18, 26, 27, 30]:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 , \tag{2.32}$$

essa equação é definida como equação da geodésica, onde Γ depende somente da métrica adotada.

A geodésica na Relatividade Geral pode determinar a trajetória de uma partícula pontual livre. Para expressar esta trajetória, porém, é preciso conhecer a métrica do espaço-tempo, como veremos no decorrer deste trabalho.

2.1.5 Tensor de curvatura

O objeto geométrico que tem a finalidade de descrever a curvatura intrínseca do espaço é chamado de tensor de curvatura ou tensor de Riemann. Na Relatividade Geral, esse objeto é muito importante, pois caracteriza a curvatura do espaço-tempo. Esse tensor, juntamente com o transporte paralelo e a derivada covariante, é utilizado para definir a curvatura intrínseca do espaço.

Assumindo uma geodésica nula como uma curvatura fechada, e considerando a metricidade da conexão $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$: supondo que, um vetor qualquer é transportado paralelamente de um ponto a outro de uma curva fechada [18,23,26,48]. Se o transporte inverso desse vetor, não é necessariamente paralelo ao inicial, essa variação é medida pelo tensor de Riemann. Portanto, podemos definir o tensor de curvatura,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\beta = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\beta = R_{\rho\mu\nu}^\beta V^\rho . \quad (2.33)$$

Podemos observar que os índices da derivada covariante não permutam. Expandindo, temos [22]:

$$R_{\rho\mu\nu}^\beta \equiv \partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\beta - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\beta + \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \Gamma_{\rho\nu}^\alpha - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \Gamma_{\rho\mu}^\alpha . \quad (2.34)$$

Como estamos percebendo, o tensor de curvatura está em função dos coeficientes da conexão afim. Para ser considerado um espaço curvo, pelo menos um ponto do espaço não deve ser nulo. Se o tensor zera, então a variedade é plana. O tensor de curvatura apresenta algumas propriedades que são relevantes para a Relatividade Geral, como [26,39]:

- Propriedade de simetria,

$$R_{\mu\nu\rho}^\beta = R_{\rho\beta\mu}^\nu , \quad (2.35)$$

$$R_{\mu\nu\rho}^\beta = -R_{\nu\mu\rho}^\beta , \quad (2.36)$$

$$R_{\nu\mu\rho}^\beta = -R_{\beta\nu\rho}^\mu , \quad (2.37)$$

$$R_{\mu\nu\rho}^\beta + R_{\rho\mu\nu}^\beta + R_{\nu\rho\mu}^\beta = 0 . \quad (2.38)$$

- O tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R_{\rho\mu\nu}^{\rho} = g^{\rho\beta} R_{\rho\beta\mu\nu} , \quad (2.39)$$

formado pela contração do tensor de curvatura.

- Escalar de curvatura,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (2.40)$$

- Identidades de Bianchi que está relacionadas às derivadas covariantes,

$$\nabla_{\mu} R_{\rho\beta\eta}^{\nu} + \nabla_{\eta} R_{\rho\mu\beta}^{\nu} + \nabla_{\beta} R_{\rho\eta\mu}^{\nu} = 0 . \quad (2.41)$$

Multiplicando a expressão (2.41) por $g^{\nu\beta}$, obtemos a seguinte relação [26],

$$\nabla_{\mu} R_{\rho\eta} + \nabla_{\eta} R_{\rho\mu} + \nabla_{\beta} R_{\rho\eta\mu}^{\beta} = 0 , \quad (2.42)$$

podemos ainda contrair os índices usando $g^{\rho\eta}$, resultando em

$$\nabla_{\mu} - 2\nabla_{\eta} R_{\mu}^{\eta} = 0 \quad (2.43)$$

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.44)$$

em que [26],

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R , \quad (2.45)$$

é chamado de Tensor de Einstein, que depende somente de $g_{\mu\nu}$. Este tensor simétrico tem um papel muito importante na Relatividade Geral, como veremos na próxima seção.

2.2 Teoria da Relatividade Especial

A Teoria da Relatividade Especial (ou Restrita), proposta por Einstein, pesquisa o comportamento das leis da natureza aplicada em diferentes referenciais inerciais com movimento relativo. Vale acrescentar que uma parte dessa teoria já estava elaborada

pelo físico, matemático e astrônomo Galileu Galilei. Através das suas observações com relação ao movimento da Terra, provou-se que a visão geocêntrica estava errada, ou seja, a Terra não era um referencial absoluto e imóvel. Galileu foi mais além e introduziu o princípio da relatividade, ao observar que, para descrever o movimento de uma partícula é preciso adotar um ponto de referência. Segundo o princípio da relatividade de Galileu, as Leis da mecânica são invariantes para qualquer referencial inercial [23, 32, 39].

Einstein, em 1905, publicou a Teoria da Relatividade Especial (TRE), baseada em observações empíricas, apresentando dois postulados:

- (i) As leis físicas mantêm a mesma forma independente do referencial inercial adotado;
- (ii) A velocidade da luz c no vácuo é mesma para qualquer referencial inercial.

Os postulados são conhecidos como: (i) Princípio da Relatividade; (ii) Princípio da Constância da Velocidade da Luz. Note que, o postulado (i) é generalizado do Princípio da Relatividade de Galileu.

2.2.1 Espaço de Minkowski e as transformações de Lorentz

Quando estudamos a mecânica newtoniana, consideramos o espaço tridimensional e o tempo independente. Para Newton, o espaço absoluto era visto como um espaço imóvel (como se fosse um palco contendo todos os objetos), onde aconteciam todos os fenômenos físicos. Newton acreditava que tempo absoluto fluía uniformemente para qualquer acontecimento físico [23, 24]. Com a física moderna as ideias de Newton foram substituídas pela ideia da Teoria Relatividade Especial (TRE) de Einstein. Na TRE, o espaço é combinado com o tempo, formando uma quantidade quadridimensional para representar uma estrutura conhecida como espaço-tempo de Minkowski. Formalmente, o espaço-tempo de Minkowski (ou métrica de Minkowski) também conhecido como espaço pseudo-euclidiano, não degenerada¹, com uma forma bilinear simétrica,² e com assinatura métrica³ (+ - - -) ou (+ + + -) [25, 26].

¹Métrica não degenerada possui determinante diferente de 0.

²A forma bilinear definida no espaço vetorial, é um tensor do tipo(0,2).

³Assinatura da métrica está relacionada com o sinal do produto interno de Minkowski.

Um ponto ou acontecimento, no espaço-tempo, é chamado de evento. Cada evento tem quatro componentes $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x^i)$. Considerando que, os eventos A e B , estejam em um intervalo do espaço-tempo, expresso em coordenadas cartesianas. Assim, o elemento de linha ds^2 pode ser escrito como [25, 29]:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 , \quad (2.46)$$

onde c é a velocidade da luz. Os intervalos do espaço-tempo podem ser positivos, negativos ou nulos [29, 29], ou seja, tipo tempo $ds^2 > 0$, tipo espaço $ds^2 < 0$ e tipo luz $ds^2 = 0$. A métrica pode ser representada de forma compacta, ou seja,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (2.47)$$

e os componentes do tensor métrico de Minkowski na forma matricial é [25, 31]:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (2.48)$$

Minkowski introduziu o conceito de tempo próprio (τ), ao considerar a medida feita pelo relógio que se move em relação a um referencial inercial. Por exemplo, supondo que um relógio esteja se movendo junto com um referencial A em relação a um referencial em repouso B . O tempo gasto medido do relógio que está se movendo, é [25, 32, 34]:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \frac{1}{c^2} ds^2 \\ d\tau &= \left[\frac{1}{c^2} (-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ d\tau &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \gamma dt , \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Considerando que o intervalo (2.47) se mostra invariante numa transformação de

mudança de coordenada, devemos considerar a transformação da seguinte forma [30]:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda_{\nu'}^{\mu'} x^\nu, \quad (2.50)$$

onde as componentes do tensor $\Lambda_{\nu'}^{\mu'}$, podem ser invariantes através da expressão $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$ (conhecidas como transformações de Lorentz) [26]. Precisamos certificar que essas transformadas preservam o segundo postulado de Einstein. Então o intervalo (2.47) tem que atender a esta condição

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu'\nu'} x^{\mu'} x^{\nu'}. \quad (2.51)$$

substituindo a eq.(2.50) na eq.(2.51), temos:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu &= \eta_{\mu'\nu'} \Lambda_{\tau'}^{\mu'} x^{\mu'} \Lambda_{\rho'}^{\nu'} x^{\rho'} \\ \eta_{\mu\nu} &= \eta_{\mu'\nu'} \Lambda_{\tau'}^{\mu'} \Lambda_{\rho'}^{\nu'}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Uma transformação interessante é a transformação rotacional que envolve uma dimensão espacial e outra temporal. Nesse caso, no plano y e z não há movimento, a rotação envolve $x - t$, sendo assim [25, 39],

$$\Lambda_{\mu}^{\mu'} = \begin{bmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

a partir dessa transformação podemos obter as relações da transformação⁴,

$$t' = t \cosh \phi - x \sinh \phi; y' = y; \quad (2.54)$$

$$x' = -t \sinh \phi + x \cosh \phi; z' = z. \quad (2.55)$$

Vamos resolver para ponto de origem $x' = 0$. Para encontrar a velocidade, então:

$$dx \cosh \phi = dt \sinh \phi \Rightarrow v = \frac{x}{t} = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \tanh \phi, \quad (2.56)$$

⁴considerando $c=1$.

se considerar $\phi = \operatorname{arctanh} * v$, chegamos nas transformações [25]:

$$t' = \gamma(t - vx); \quad x' = \gamma(x - vt); \quad (2.57)$$

$$y' = y; \quad z' = z, \quad (2.58)$$

essas são as transformações de Lorentz na forma convencional.

2.3 Teoria da Relatividade Geral

A noção do movimento de uma partícula, baseada na Relatividade restrita, como apresentado anteriormente, se aplica em referenciais inerciais, com ausência de campos gravitacionais. Assim, foi necessário introduzir uma nova teoria que fosse capaz de considerar a gravidade. Em meados de 1916, Albert Einstein publicou um artigo que incluía os campos gravitacionais. Esta teoria conhecida como Teoria da Relatividade (TRG), baseada em alguns postulados que modificam consideravelmente o espaço-tempo, generalizando a relatividade restrita e o campo gravitacional. A TRG descreve a gravidade com propriedades geométricas, ou seja, efeitos gravitacionais são descritos em termos da curvatura do espaço-tempo com matéria e energia.

Antes de expor os postulados da TRG, vale ressaltar algumas das ideias propostas por Mach, que teve uma participação importante na formulação da Relatividade Geral, apresentadas como Princípio de Mach [22, 25, 26, 39]:

- a distribuição de matéria determina a geometria do Universo;
- se não há matéria, não há geometria;
- o corpo em um Universo vazio não possui propriedades inerciais.

As ideias de Mach tiveram uma grande influência para Einstein. O postulados que rege a Relatividade Geral são:

- O Princípio da Equivalência;
- O Princípio da Covariância Generalizada;

- A validade das Equações de Campo de Einstein.

O princípio da equivalência, é uma generalização da mecânica Newtoniana [39, 55]. Considerando que, a massa inercial m_i e a massa gravitacional m_g são equivalentes, ou seja,

$$m_i = m_g . \quad (2.59)$$

A aceleração da gravidade se ajusta de acordo com a massa dos corpos, ou seja, corpos massivos distorcem a gravidade [25]. Um fato interessante é sobre o desvio da luz, como veremos no capítulo 4. Quando os raios de luz passam próximos a corpos maciços sofrem um desvio causado pela distorção do espaço-tempo. O princípio da equivalência mostra que, "localmente, o comportamento da matéria num referencial acelerado não pode ser distinguido de seu comportamento em um campo gravitacional correspondente" [22].

As leis físicas devem ser escritas em termos das equações tensoriais segundo o Princípio da Covariância Generalizada. Em outras palavras, em uma transformação de coordenadas as formas de equações são invariantes.

2.3.1 Equação de Einstein

As equações de campo de Einstein evidenciam a teoria da equivalência da TRG. Estas equações, caracterizam, o campo gravitacional como uma propriedade geométrica, que se relaciona à curvatura do espaço-tempo causada pela matéria e energia. A gravidade é descrita pelo tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ (ou $T_{\mu\nu}$), que contém a densidade e a pressão da matéria, que pode ser representada como: o fluxo de densidade de energia é T^{00} ; o fluxo de momento T^{0i} ; T^{ij} são as forças que os elementos exercem em outras partículas próximas [26, 33, 36].

O tensor energia-momento resulta em 10 equações independentes, pois é um tensor simétrico 4×4 , ou seja, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. O $T^{\mu\nu}$, pode reduzir para 6 componentes, dependendo da escolha das coordenadas do espaço-tempo. Este tensor possui algumas propriedades geométricas, entre elas a conservação da energia, satisfazendo, assim, a

equação da continuidade, ou seja, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Vale considerar que o Tensor de Einstein se conserva pela identidade de Bianchi $G_{\mu\nu} = 0$. De um lado, a curvatura do espaço-tempo depende da intensidade da matéria e energia, de outro, o tensor de curvatura é proporcional ao tensor de Einstein [26]. Então, podemos relacionar $G_{\mu\nu}$ com o $T_{\mu\nu}$, ou seja,

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} , \quad (2.60)$$

onde a constante de proporcionalidade é k , conhecida como constante de acoplamento [26, 33, 36]. O k é resultante do princípio da correspondência, uma vez que a equação (2.60) deve ser reduzida para equação de Poisson no limite não-relativístico, ou seja, deve se reduzir as equações de Newton. A constante k vale, então [26, 37],

$$k = \frac{8\pi G}{c^4} , \quad (2.61)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e c a velocidade da luz. Substituindo a eq.(2.61) na eq.(2.60), podemos reescrever a eq.(2.45), da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (2.62)$$

Considerando $c = 1$, as equações de campo de Einstein têm forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} . \quad (2.63)$$

Einstein introduziu a constante cosmológica Λ em suas equações de campo, tem que uma grande importância quando tratamos da expansão do universo. Então, com a modificação, a eq.(2.63) torna-se [38]:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} . \quad (2.64)$$

As equações de Einstein são covariantes e resultam em um conjunto de 10 EDP não lineares.

2.3.2 O escalar de Kretschmann

Outro ponto interessante, que merece atenção, é o comportamento da singularidade do espaço-tempo. Para qualquer espaço, é relevante verificar se o espaço-tempo é regular ou não. O objeto geométrico que explora esse comportamento é o escalar de Kretschmann K . Este objeto tensorial é um invariante geométrico construído a partir do tensor de Riemann [26, 55], escrito como:

$$K = R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} , \quad (2.65)$$

e o seu dual \tilde{K} é

$$\tilde{K} = \tilde{R}_{\mu\nu\lambda\rho}\tilde{R}^{\mu\nu\lambda\rho} . \quad (2.66)$$

Porém, quando aplicamos, percebemos que o cálculo é muito longo. Devido a isso, usamos um método computacional [26, 55], que executa cálculos algébricos e tensoriais. Para encontrar esse escalar, inicialmente tem-se que calcular os símbolos de Christoffel, pois o resultado é de grande relevância para calcular o tensor de Riemann. Finalmente, se encontrará o resultado do escalar de Kretschmann [26, 55]. Vale ressaltar que, para o espaço-tempo de Schwarzschild o escalar de Kretschmann é dado por:

$$K_{schw} = \frac{48m^2}{r^6} . \quad (2.67)$$

Este escalar, além de descrever a singularidade do espaço-tempo, é utilizado para comprovar a invariância das propriedades de um sistema original em um sistema dual. A derivação do K inicialmente é simples. Esse objeto escalar terá uma grande importância no decorrer desta dissertação.

3 Equações de Maxwell no Espaço Curvo e Meios Dielétricos

Como foi exposto no capítulo anterior, o princípio da relatividade afirma que as leis da Física são sempre as mesmas para quaisquer referenciais inerciais. Para a mecânica newtoniana, este princípio só é válido para referenciais inerciais. Isso acontece porque as leis de Newton satisfazem as transformações de Galileu. Seria possível questionar, então, se as leis do eletromagnetismo cumprem o princípio da relatividade, por meio das transformações galileanas? Quando aplicamos esta transformação no campo eletromagnético, as equações de Maxwell não ficaram invariantes, não satisfazendo, assim, o princípio da relatividade [53]. Diante desta situação, surgiram questionamentos e dúvidas sobre a invariância das equações de Maxwell perante uma transformação.

Para responder a esses questionamentos, Einstein partiu do pressuposto de que a luz não dependia do meio para se propagar [42], diferentemente dos pensamentos de alguns cientistas. Maxwell, por exemplo, acreditava que a luz se propagava por um meio material conhecido como éter. A ideia do éter perdurou até o século XIX [42]. Como foi mostrado no capítulo 1, Maxwell mostrou que a velocidade de propagação da luz é equivalente à velocidade de ondas eletromagnéticas.

Assim, com a ideia de Maxwell, Einstein postulou a invariância da velocidade de propagação da luz. Por meio de suposições, no início do século XX, Einstein apresentou um novo formalismo para as equações de Maxwell, de modo que as leis do eletromagnetismo fossem invariantes sob transformação, satisfazendo o princípio da relatividade.

Como as equações de Maxwell, sob transformações de Galileu, não obedeceram ao princípio de Einstein, foi preciso propor uma nova transformação. Essa transformação

ficou conhecida como transformação de Lorentz [43]. Assim, foi possível mostrar que as equações de Maxwell são invariantes para todos os sistemas de coordenadas. Neste contexto, Hermann Minkowski e Max Abraham introduziram um novo formalismo matemático para o campo eletromagnético [43], descrito como um tensor quadridimensional antissimétrico de segunda ordem.

Neste capítulo, vamos mostrar que as equações de Maxwell são válidas para todos os referenciais. Também mostraremos que, por meio das transformações de Lorentz, as equações de Maxwell se transformam em duas equações tensoriais. Outro fato interessante que veremos sobre estes dois objetos matemáticos é a aplicação em meios dielétricos [44].

3.1 Tensor do campo eletromagnético

Leve-se em consideração a propagação dos campos eletromagnéticos em um espaço quadridimensional. Quando assumimos essa propagação, em termos relativísticos, temos dois vetores de polarização (graus de liberdade) [45–47]. Estes vetores são descritos por um quadrivetor, conhecido como quadripotencial A^μ , isto é,

$$A^\mu = A^\mu(x^\nu) = (\mathbf{A}, \phi). \quad (3.1)$$

onde, ϕ é o potencial escalar elétrico e \mathbf{A} é o vetor potencial magnético. O quadripotencial é expresso pela componente espacial ($A^i = A^i(x^k)$) e temporal ($A^4 = \phi(x^\nu)/c$) [45].

Um fato interessante, que será de suma importância, é a ajuda do tensor de Minkowski para subir ou descer os índices do quadripotencial [46, 49]. Para coordenadas cartesianas, temos os índices $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, e por convenção adotamos que $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ e $t = 4$.

Para determinar o tensor do campo eletromagnético, utilizamos os conceitos do vetor quadripotencial. Inicialmente, é preciso considerar as equações dos campos elétricos e magnéticos. Vale ressaltar que os campos eletromagnéticos vêm das equações de Maxwell. As equações (1.1) e (1.2) de Maxwell se reduzem à identidade de Bianchi.

Podemos relacionar o quadripotencial com o campo magnético [45, 46],

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} , \quad (3.2)$$

para o campo elétrico, temos [45, 46]:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi , \quad (3.3)$$

onde o ϕ é o potencial escalar elétrico. Note que as equações (3.2) e (3.3) estão em termos de \mathbf{A} e de ϕ . A partir destas expressões, podemos determinar as componentes do campo eletromagnético. Para determinar as componentes elétrica e magnética, vamos considerar em termos das coordenadas cartesianas. Portanto, usando a eq.(3.3), vamos obter as componentes do campo elétrico [45, 46], dadas como:

$$E_x = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\partial^4 A^1 - \partial^1 A^4 , \quad (3.4)$$

$$E_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\partial^4 A^2 - \partial^2 A^4 , \quad (3.5)$$

$$E_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\partial^4 A^3 - \partial^3 A^4 , \quad (3.6)$$

com $c = 1$. Para encontrar as componentes do campo magnético é preciso usar a eq.(3.2), ou seja,

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 , \quad (3.7)$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 , \quad (3.8)$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 . \quad (3.9)$$

Nitidamente, estamos tratando de um tensor de segunda ordem, pois estas expressões estão dependendo de dois índices. Assim, a partir dos resultados obtidos, podemos

formular uma expressão geral para este tensor de segunda ordem [44], ou seja,

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (3.10)$$

definida como tensor contravariante do campo eletromagnético. As quantidades $F^{\mu\nu}$ contêm as propriedades de simetria dos campos elétricos e magnéticos que se combinam em um tensor quadridimensional antissimétrico de segunda ordem ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ com $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$). Este tensor apresenta 6 componentes independentes, três componentes do campo elétrico e três do campo magnético. Como foi citado no começo do tópico, o tensor eletromagnético é formado por dois vetores: polar (campo elétrico)¹ e antissimétrico espacial (indução magnético)². Podemos, ainda, representar esse tensor na sua forma matricial [43, 47, 48], isto é,

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

onde, os elementos são identificados através das expressões $F^{i4} = E^i$ e $F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$ [47], com $i, j, k = 1, 2, 3, 4$. A coordenada temporal é representada por 4, e a coordenada espacial por 1, 2, 3. Note que o $F^{\mu\nu}$ fornece os componentes dos campos elétricos e magnéticos para um determinado referencial. Porém, se este referencial for modificada, os elementos do tensor eletromagnético serão modificados para modo covariante. O tensor covariante pode ser expresso da seguinte forma [43, 47, 48]:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha) A_\alpha, \end{aligned} \quad (3.12)$$

aplicando a propriedade de simetrização, na eq.(3.12), temos que, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$. Obtemos então:

$$F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (3.13)$$

¹Vetor polar é aquele não depende do sistema de coordenadas, e não inverte o sinal quando o eixo de coordenada é invertido.

²Vetor antissimétrico ou vetor axial ou pseudo-vetor depende da posição.

³onde $-\epsilon^{ijk} B^k = -\epsilon^{ijk} \epsilon_{k\alpha\beta} \partial_\alpha A^\beta - (\delta_\alpha^i \delta_\beta^j - \delta_\beta^i \delta_\alpha^j) \partial_\alpha A^\beta = \partial^j A^i - \partial^i A^j = F^{ij}$.

Podemos representar o tensor covariante na forma matricial [43, 47, 48],

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}F^{\rho\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Ainda, precisamos verificar se F é de fato invariante. Assim, é necessária uma transformação de coordenadas, ou seja, $F_{\mu\nu} \longrightarrow \bar{F}_{\mu\nu}$. Em princípio, vamos considerar uma transformação do vetor covariante $\bar{A}_\mu(\bar{x}) = \partial x^\rho / \partial \bar{x}^\mu A_\rho(x)$. Por conseguinte, fazendo a transformação na expressão (3.13), temos:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\mu\nu} &= \nabla_\mu \bar{A}_\nu - \nabla_\nu \bar{A}_\mu \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} A_\rho \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\mu} A_\gamma \right) \\ &= \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\nu} A_\rho + \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial A_\rho}{\partial \bar{x}^\mu} - \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial \bar{x}^\nu \partial \bar{x}^\mu} A_\gamma - \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial A_\gamma}{\partial \bar{x}^\nu} \\ &= \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial A_\gamma}{\partial x^\rho} \right) \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} \\ \bar{F}_{\mu\nu} &= F_{\rho\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Há também outro tensor originário do $F_{\mu\nu}$, conhecido como tensor dual do campo eletromagnético, $\tilde{F}^{\mu\nu} = 1/2\epsilon^{\mu\nu\eta\theta}F_{\eta\theta}$ ⁴ [47]. No tensor dual, os elementos do campo E são substituído por $-B$, e do campo B por E . Portanto, podemos mostrar, esta situação, por meio da matriz [43, 47, 48]:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

estes tensores descrevem o campo eletromagnético no espaço-tempo.

⁴O $\epsilon^{\mu\nu\eta\theta}$ é chamado de símbolo de Levi-Civita conhecido como símbolo da permutação, como segue: se $\epsilon^{\mu\nu\eta\theta} = 1$ se (μ, ν, η, θ) , então $(0, 1, 2, 3)$; $\epsilon^{\mu\nu\eta\theta} = -1$ se (μ, ν, η, θ) , então $(3, 2, 1, 0)$; $\epsilon^{\mu\nu\eta\theta} = 0$ se $\mu = \nu, \nu = \eta, \eta = \theta$ e $\theta = \mu$.

3.2 Versão geométrica das equações de Maxwell

Nesta seção, vamos verificar a invariância das equações de Maxwell. Nesta circunstância, as equações precisam ser as mesmas independentemente do sistema de referência a ser adotado. Com intuito de encontrar uma versão geométrica para as equações de Maxwell, tomamos como base o pressuposto já apresentando na relatividade especial sobre a invariância da luz. Nesse caso, considerando as equações de Maxwell no vácuo, ou seja, $\rho = J = 0$.

Por intermédio do cálculo tensorial, podemos escrever de maneira elegante e compacta as equações de Maxwell no espaço quadridimensional. Multiplicando os $\tilde{F}^{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$ pelo operador do espaço-tempo $\nabla_\mu = \partial/\partial x^\mu$ [46], obtemos:

$$\nabla_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.17)$$

e

$$\nabla_\rho F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\mu F_{\nu\rho} = 0. \quad (3.18)$$

Essas duas equações tensoriais são conhecidas como: equação de campo (3.17) e identidade de Bianchi (3.18) [46, 48]. Essas equações sob transformações de Lorentz, se transformam em tensores. Assim, sob transformações de Lorentz, as equações (3.17) e (3.18), tornam-se invariantes.

Como já foi ressaltado no decorrer deste capítulo, o conjunto de equações de Maxwell (1.1) à (1.4) se transformam em apenas nessas duas equações tensoriais. Mas para mostrar isto, precisamos verificar se as eq.(3.17) e eq.(3.18) são equivalentes às equações de Maxwell. Antes de fazer esta verificação, vale lembrar que ν é um índice livre na eq.(3.17) [46, 49]. Inicialmente, vamos fazer o teste para eq.(3.17). Assumindo que ν vale 4, então escrevemos:

$$\nabla_i F^{i4} = 0, \quad (3.19)$$

obtêm-se:

$$\nabla_i E_i = 0 \Rightarrow \nabla \cdot E = 0. \quad (3.20)$$

Para $\nu = j$,

$$\nabla_4 F^{4j} + \nabla_i F^{ij} = 0, \quad (3.21)$$

para encontrar a solução precisamos do tensor eletromagnético. Assim obtemos:

$$\nabla_4 E_j + \epsilon_{i,j,k} \nabla_i B_k = 0 \Rightarrow \frac{-\partial E}{\partial t} + \nabla \times B = 0. \quad (3.22)$$

Percebemos que as eq.(3.21) e (3.22) são familiares com as equações de Maxwell. Note que a primeira parte foi verificada. Agora falta verificar a eq.(3.18). Para isso, com permutação cíclica dos índices($\rho, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$), obtemos [45, 51]:

$$\partial_2 F_{41} + \partial_1 F_{24} + \partial_4 F_{12} = 0, \quad (3.23)$$

$$\partial_3 F_{41} + \partial_1 F_{34} + \partial_4 F_{13} = 0, \quad (3.24)$$

$$\partial_3 F_{42} + \partial_2 F_{34} + \partial_4 F_{23} = 0, \quad (3.25)$$

$$\partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31} + \partial_1 F_{23} = 0. \quad (3.26)$$

Com a ajuda do tensor campo eletromagnético, encontramos os seguintes resultados,

$$\partial_y E_x - \partial_x E_y + \partial_t B_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (3.27)$$

$$\partial_z E_x - \partial_x E_z + \partial_t B_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (3.28)$$

$$\partial_z E_y - \partial_y E_z + \partial_t B_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (3.29)$$

$$\partial_z B_z - \partial_y B_y + \partial_x B_x = 0 \Rightarrow \nabla \cdot B = 0. \quad (3.30)$$

De uma forma mais elegante, as equações de Maxwell foram descritas por meio de tensores. Elas permanecem inalteradas quando sofrem uma transformação de Lo-

rentz, entre sistemas de referências. Portanto, mostramos que as equações de Maxwell obedecem o princípio de Einstein, por intermédio das transformações de Lorentz.

3.3 Analogia entre meios ópticos e o tensor do campo eletromagnético

Inicialmente, considere-se o espaço-tempo de Minkowski. É importante frisar que as equações de Maxwell na forma tensorial são expressas por dois tensores, $F_{\mu\nu}$ e $G^{\mu\nu}$ [44]. Assumindo que, $G^{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem, e tem como função descrever o campo eletromagnético em um meio (conhecido como campo indução) [44]. As componentes temporais e espaciais, deste tensor, são dadas por: $G^{i0} = D^i$ e $G^{ij} = -\epsilon^{i,j,k} H_k$. Considerando a relação, [44]

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu . \quad (3.31)$$

Tem-se que os campos eletromagnéticos F e o campo eletromagnético num meio G satisfazem as eq.(3.17), eq.(3.18) e a eq.(3.31). Consideremos a propriedade da propagação das ondas eletromagnéticas no meio, portanto [44]:

$$G^{\mu\nu} = \chi^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} . \quad (3.32)$$

O tensor constitutivo χ , informa como um meio material comporta-se sob uma aplicação do campo eletromagnético. Este tensor, satisfaz a propriedade de restrição [44], ou seja,

$$\chi^{\mu\nu\alpha\beta} = \chi^{[\mu\nu][\alpha\beta]} , \quad \chi^{\mu\nu\alpha\beta} = 0 . \quad (3.33)$$

Deste modo, o tensor que possui 36 termos independentes reduz-se para 20 termos independentes, devido a propriedade de restrição. Este fato, faz com que esse tensor seja semelhante com o tensor de curvatura.

Para um caso específico, como por exemplo em um meio isotrópico, temos as se-

guintes componentes [44]:

$$\chi^{i0j0} = -\epsilon \delta^{ij} \chi^{ijkl} = \frac{1}{2\mu} (\delta^{ik} \delta^{jl} - \delta^{il} \delta^{jk}), \quad (3.34)$$

onde μ é a permeabilidade magnética, e ϵ é uma constante dielétrica. Deste modo, a eq.(3.34) é resultante da seguinte propriedade [44]:

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H, \quad (3.35)$$

assim, mostrando a analogia entre meios ópticos e as equações de Maxwell na forma tensorial [44]. Para maiores informação vide [44].

Portanto, através desta analogia, surgiu a motivação para descrever a propagação raio de luz em uma lente GRIN. Assim, se uma métrica associada a uma curvatura diferente de zero, descrita por uma propriedade do espaço-tempo, pode desviar o raio de luz, então de maneira genérica, podemos utilizar um meio não homogêneo (uma lente GRIN) para representar a deflexão da luz [44]. Como foi apresentado no capítulo 1, uma lente GRIN é um meio dielétrico. Deste modo, como foi apresentada nesta seção a equivalência dos meios dielétricos a uma métrica via eletromagnetismo em espaço curvo, podemos fazer representar o desvio de luz, utilizando uma lente GRIN.

4 *Analogia Óptico-Mecânica de Geodésicas*

Este capítulo tem o intuito de mostrar a analogia entre as equações geodésicas e a óptica geométrica (equação eikonal), no espaço tridimensional. Neste caso, a análise compara o cálculo da trajetória de um feixe de luz, com o raio de luz no espaço-tempo curvo propagando-se num meio óptico, assumindo meios que possuem índice de refração variável. Isso ocorre porque esses índices dependem da distância. Assim, podemos determinar uma construção análoga a uma métrica do espaço. Como exposto no capítulo 3, podemos associar a propagação do raio de luz em uma lente GRIN. Portanto, esse formalismo considera uma métrica isotrópica e o efeito do campo gravitacional em um feixe de luz.

4.1 *Analogia matemática entre a equação da geodésica e a equação eikonal*

Segundo a Teoria da Relatividade de Einstein, corpos massivos fazem a luz curvar-se. Quando consideramos a aproximação das ondas de luz em termos de raios, o caminho percorrido da luz no espaço-tempo, é tratada como geodésica nula. Assim, para calcular o caminho raio de luz sob um campo gravitacional, vamos considerar uma abordagem óptica e determinar a analogia entre equação da geodésica e equação eikonal [52, 53].

Inicialmente, devemos considerar uma métrica isotrópica (que vamos chamar de

métrica óptica) em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) [52, 53],

$$d\tau^2 = B(r, \theta, \phi)dt^2 - A(r, \theta, \phi)dr^2 - A(r, \theta, \phi)r^2d\theta^2 - A(r, \theta, \phi)r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (4.1)$$

Como estamos considerando uma métrica esférica e simétrica que depende somente da posição r , ou seja, $B(r, \theta, \phi) = B(r)$ e $A(r, \theta, \phi) = A(r)$. Após esta condição, podemos realizar os cálculos das equações da geodésica para as componentes da métrica isotrópica. Tais equações, dependem dos símbolos de Christoffel (A.1). Neste caso, foi essencial a utilização de um método computacional, para conferir o resultado, e assim, termos um controle analítico dos resultados. Obtemos então [52]:

- Para $x^1 = r$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial r} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{1}{2A} \left(2rA + r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) \left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 - \left(\frac{d\phi}{dp} \right)^2 \\ & \left[r \sin^2 \theta + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\ln A) \right] + \frac{1}{2A} \frac{\partial B}{\partial r} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \theta} \left(\frac{d\theta}{dp} \right) \\ & \left(\frac{dr}{dp} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \phi} \left(\frac{d\phi}{dp} \right) \left(\frac{dr}{dp} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

- Para $x^2 = \theta$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial \theta} - \sin \theta \cos \theta \left(1 + \frac{1}{2} \tan \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln A) \right) \left(\frac{d\phi}{dp} \right)^2 + \frac{1}{2Ar^2} \\ & \frac{\partial B}{\partial \theta} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 - \frac{1}{2Ar^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\ln A) \right) \left(\frac{d\theta}{dp} \right) \left(\frac{dr}{dp} \right) \\ & + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \phi} \left(\frac{d\phi}{dp} \right) \left(\frac{d\theta}{dp} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

- Para $x^3 = \phi$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\phi}{dp^2} + 2 \left(\cot \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln A) \right) \left(\frac{d\theta}{dp} \right) \left(\frac{d\phi}{dp} \right) + 2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\ln A) \right) \\ & \left(\frac{d\phi}{dp} \right) \left(\frac{dr}{dp} \right) + \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial \phi} \left(\frac{d\phi}{dp} \right)^2 + \frac{1}{2A} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial B}{\partial \phi} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 \frac{1}{2A} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \\ & \frac{\partial A}{\partial \phi} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{1}{2A} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A}{\partial \phi} \left(\frac{d\theta}{dp} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

- Para $x^4 = t$:

$$\frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \left(\frac{dt}{dp} \right) \left(\frac{dr}{dp} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \theta} \left(\frac{dt}{dp} \right) \left(\frac{d\theta}{dp} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \phi} \left(\frac{dt}{dp} \right) \left(\frac{d\phi}{dp} \right) = 0. \quad (4.5)$$

onde p é o parâmetro afim.

Podemos perceber que a eq.(4.5), é uma constante, ou seja, $B(r, \theta, \phi) dt/dp = k$. Considerando que a métrica óptica seja constante também $d\tau^2 = 0$, substituindo nas eq.(4.2) à eq.(4.5) e multiplicando por \vec{r} , $r\vec{\theta}$ e $r \sin \theta \vec{\phi}$, obtemos [52]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \left[A(r, \theta, \phi) \left(\frac{d\vec{r}}{dp} \right) \right] &= \left[\frac{1}{2AB} \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln \left(\frac{A}{B} \right) \right) \right] \vec{r} + \left[\frac{1}{2ABr^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\ln \frac{A}{B} \right) \right] r\vec{\theta} \\ &+ \left[\frac{1}{2ABr^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\ln \left(\frac{A}{B} \right) \right) \right] r \sin \theta \vec{\phi} \\ &= \frac{1}{2AB} \left[\frac{\partial}{\partial r} \vec{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\ln \left(\frac{A}{B} \right) \right) \vec{\phi} \right], \quad (4.6) \end{aligned}$$

Considerando que,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \vec{\theta} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{r \sin \theta} \vec{\phi}, \quad (4.7)$$

e assumindo a condição especial para métrica isotrópica [52],

$$A = \frac{1}{B}, \quad (4.8)$$

então, podemos escrever a eq.(4.6), da seguinte forma,

$$\frac{d}{dp} \left[A(r, \theta, \phi) \left(\frac{d\vec{r}}{dp} \right) \right] = \nabla A. \quad (4.9)$$

O raio de luz no espaço-tempo curvo, e descrito pela geodésica nula. Desse modo, se considerar que o índice efetivo de refração possui um comportamento puramente radial, ou seja, dependente somente da distância r , então $A(r) = 1/B(r) = n(r)$. Para esta situação, em que o índice de refração depende de r , a equação geodésica (2.31) é equivalente a equação eikonal (1.68) [52], isto é,

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (4.10)$$

$$\frac{d^2 x^k}{dl^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dl} \frac{dx^j}{dl} = 0 \tag{4.11}$$

$$ds^2 = n^2 dl^2 = g_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j, \tag{4.12}$$

onde o comprimento do raio é s . Note que, nesta formulação, as equações associadas às geodésicas possuem estrutura compatível às equações diferenciais do raio de luz. Assim, devido a restrição $A(r) = 1/B(r)$ para métrica isotrópica, a geodésica e equação eikonal são rigorosamente análogas.

4.2 Analogia entre a trajetória da luz definida pela geodésica e pela equação eikonal

Como foi mostrado anteriormente, um corpo massivo gera um campo gravitacional que deforma o espaço-tempo ao seu redor. A propagação da luz se curva próximo a esses corpos massivos, devido ao efeito do campo gravitacional. Como visto, na primeira seção, o caminho que luz percorre é conhecido como geodésicas nulas do campo gravitacional. A trajetória da luz pode ser descrito por algum meio óptico não homogêneo e isotrópico, com índice de refração variando.

Para o índice de refração constante, $n = A$, representa o espaço-tempo de Minkowski. Sabendo que, a velocidade da luz é $c = |dr|/dt = 1/n(r, \theta, \phi)$. Devido esta situação, a velocidade da luz no campo gravitacional é mesma para materiais com índice de refração variável $n = (r, \theta, \phi)$ [52, 53].

Na métrica óptica esfericamente simétrica, o índice de refração n está em função de r , ou seja, $n = n(r)$ [52, 54]. Deste modo, a métrica óptica, permite uma formulação compatível com algumas configurações de índice de refração da lente GRIN, como veremos no próximo capítulo.

Assim, assumimos que, $n(r, \theta, \phi) = n(r)$. Considerando que o índice de refração se conserva [52, 54], então a eq.(4.10) se torna:

$$\frac{d}{ds} \left(\mathbf{r} \times n(\mathbf{r}) \frac{dr}{ds} \right) = \mathbf{r} \times \frac{d}{ds} \left(n(\mathbf{r}) \frac{dr}{ds} \right) = \mathbf{r} \times \nabla n(r) = 0. \tag{4.13}$$

Assumindo que, a fórmula de Bouguer é $nrs \sin \alpha = C$, onde C é constante de

conservação do raio em um meio esférico [52, 54]. Seja a órbita do raio $r(\theta)$, e seu vetor unitário é (dr/ds) , temos que [52, 54]:

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \left(r\hat{\theta} + \frac{dr}{d\theta}\hat{r} \right) = \frac{r\hat{\theta} + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)\hat{r}}{\sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}, \quad (4.14)$$

onde,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}. \quad (4.15)$$

O caminho da órbita do raio é dado como: $r \times dr/ds = r \sin \alpha \hat{z} = r^2 d\theta/ds \hat{z}$. Temos então [52, 54],

$$\sin \alpha = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}} = \frac{C}{nr}, \quad (4.16)$$

se,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{C} \sqrt{n^2 r^2 - C^2}, \quad (4.17)$$

integrando,

$$\theta = C \int_{r_0=0}^r \frac{dr}{2\sqrt{r^2 n^2 - C^2}}, \quad (4.18)$$

onde $C = n(d)d = (d + 2M)$. Para o desvio da luz constante, o índice n diz que, $C = nd$. Considerando a conservação do campo gravitacional, com $G = 1$. O índice de refração é [52, 54]

$$n(\vec{r}) = A(\vec{r}) = \frac{1}{B} = \left(1 + \frac{2M}{r} \right), \quad (4.19)$$

isto mostra que, a TRG aproxima-se da mecânica Newtoniana nos limites dos campos.

O ângulo de deflexão da luz α com a trajetória é [52, 54]:

$$\Delta\alpha = \theta - \pi \quad (4.20)$$

$$\Delta\alpha = 2C \int^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{r^2 n^2 - C^2}} - \pi \quad (4.21)$$

$$\Delta\phi = 4\frac{M}{d} + 0\left(\left(\frac{M}{d}\right)^2\right), \quad (4.22)$$

onde d é o parâmetro de impacto do raio de luz em relação a um observador. Quando $n(\mathbf{r}) = 1$, então $\alpha = 0$. A eq.(4.22) é semelhante com o valor do desvio da luz pela RG ($\delta = 4M/d = 1,75$ segundos de arco) [52, 54].

Como foi visto nessa seção, o caminho da luz teve uma interpretação geométrica. Portanto, é possível fazer uma analogia entre a teoria da gravidade de Einstein e a óptica geométrica. Assim, como foi apresentando nessa seção, aplicou-se o formalismo óptico-mecânico para tratar de modo análogo a propagação da luz em espaços com métricas isotrópicas.

5 *O Deslocamento do Raio de Luz em Meios com Índice de Refração Variável*

Neste capítulo, vamos descrever a trajetória do raio de luz em uma lente GRIN via formalismo geodésico. Quando expressamos as geodésicas por meio do formalismo Hamiltoniano, podemos encontrar grandezas conservadas, através dos vetores de Killing e tensores de Killing. Para realizar essa análise, estamos considerando uma simetria esférica, assim, por meio de uma solução numérica, vamos gerar alguns gráficos, comparando a trajetória do raio de luz com diferentes configurações de índice de refração.

5.1 Grupo de isometria e tensor de Killing

Nesta presente seção, vamos revisar os conceitos gerais dos tensores de Stackel-Killing e de Killing-Yano. Estes tensores têm um papel fundamental para encontrar grandezas conservadas no movimento de uma partícula sem *spin*, quando um dado espaço-tempo admite estes tipos de tensores. Estes tensores correspondem a um grupo de geradores de isometria, que são simetrias, como veremos no decorrer deste capítulo.

5.1.1 Simetrias e grandezas conservadas

Na mecânica clássica, o estudo do movimento de uma partícula é baseado nas teorias fundamentais de Newton. No entanto, quando estudamos velocidades próximas à da luz, ou seja, velocidades relativísticas, esse formalismo não é adequado. Para contornar esta situação podemos utilizar o formalismo lagrangiano e hamiltoniano. A

mecânica Newtoniana é caracterizada por lidar com grandezas vetoriais e está associada com forças externas que atuam sobre um corpo, enquanto o formalismo de Lagrange e de Hamilton estão associados com grandezas escalares que envolvem as energias potencial e cinética. Logo, as equações de Lagrange e o princípio de Hamilton tornam-se mais simples na análise de problemas envolvendo o movimento [56].

O caminho de uma partícula pode ser representado pelo princípio da mínima ação de Hamilton e pelas equações de Euler-Lagrange. Estas equações estão associadas com o movimento, e não dependem de um sistema de coordenadas [56]. Assim, as equações de Lagrange, são essenciais quando aplicadas em um sistema de coordenadas generalizadas no espaço de configurações¹.

Consideremos que a evolução temporal de t_1 até t_2 de uma partícula, no espaço de configurações, constitui uma geodésica e fixemos os extremos desta curva, aplicando o princípio variacional na equação da mínima ação S [54, 56],

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0, \quad (5.1)$$

com,

$$L \equiv T - U = L(x^i, \dot{x}^i), \quad (5.2)$$

onde T representa a energia cinética e U é a energia potencial [54, 56]. A partir da equação variacional (5.1), podemos encontrar a equação diferencial parcial de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0, \quad (5.3)$$

em que λ é o parâmetro afim da geodésica, e L é a função de Lagrange de uma partícula.

Podemos encontrar a geodésica de uma partícula relativística, quando associamos

¹O espaço de configurações é o espaço em que ocorre todas as posições instantâneas possíveis de um sistema mecânico em uma variedade diferenciável.

a equação de Euler-Lagrange com uma métrica do espaço-tempo [26], ou seja,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0. \quad (5.4)$$

Percebemos que, o princípio variacional de Hamilton fornece um método simples para obter as soluções das equações das geodésicas.

Para aplicar as equações de Euler-Lagrange na métrica óptica (4.1), inicialmente, realizamos uma troca da variável da componente θ por $u = \cos \theta$. Assumindo a restrição (4.8), a métrica óptica (4.1) pode ser reescrita como:

$$ds^2 = A(r)dr^2 + \frac{A(r)r^2}{-u^2 + 1} du^2 + A(r)r^2(-u^2 + 1)d\phi^2 - \frac{dt^2}{A(r)}. \quad (5.5)$$

Inicialmente, vamos considerar as componentes, $x^i = x^1, x^2, x^3, x^4$, em que $x^1 = r$, $x^2 = u$, $x^3 = \phi$ e $x^4 = t$. Para um raio de luz movimentando-se em um espaço com a métrica óptica, a lagrangiana é [26, 54]:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ L &= \frac{1}{2} \left[A(r) \dot{r}^2 + \frac{A(r)r^2}{-u^2 + 1} \dot{u}^2 + A(r)r^2(-u^2 + 1) \dot{\phi}^2 - \frac{\dot{t}^2}{A(r)} \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para o espaço-tempo adotado, vamos obter quatro equações, ou seja, uma equação para cada coordenada. Substituindo a eq.(5.6) na eq.(5.3), apresentamos a seguir as equações encontradas

- Para $x^1 = r$:

$$\frac{2rA(r)}{(-u^2 + 1)} \dot{u}\dot{u} + 2A(r)r(-u^2 + 1) \dot{\phi}\dot{\phi} - \frac{d}{d\lambda} [(A(r))\dot{r}] = 0. \quad (5.7)$$

- Para $x^2 = u$:

$$\frac{2Ar^2u}{(-u^2 + 1)^2} \dot{u}\dot{u} - 2Ar^2u \dot{\phi}\dot{\phi} - \frac{d}{d\lambda} \left[\left(\frac{A(r)r^2}{-u^2 + 1} \right) \dot{u} \right] = 0 \quad (5.8)$$

- Como a métrica óptica (4.1) não depende de ϕ e t , então L não depende de ϕ e t .

Assim, para $x^3 = \phi$ e $x^4 = t$, temos:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[A(r)r^2(-u^2 + 1)\dot{\phi} - \frac{1}{A(r)}\dot{t} \right] = 0, \quad (5.9)$$

e,

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{A(r)}\dot{t} - A(r)r^2(-u^2 + 1)\dot{\phi} \right] = 0, \quad (5.10)$$

logo,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \right) = 0; \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.11)$$

Isso significa que t e ϕ são duas grandezas que se conservam ao longo da geodésica. Portanto, através da eq.(5.11), percebemos a existência de simetria. Generalizando a eq.(5.11), temos:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0. \quad (5.12)$$

Deste modo, as equações de Euler-Lagrange e o princípio de Hamilton evidenciam grandezas conservadas ao longo da trajetória de uma partícula. As grandezas conservadas que estão presentes ao longo do movimento correspondem a um grupo de simetria contínua [57]. Assim, estabeleceu-se uma conexão entre quantidades conservadas e os invariantes na mecânica Lagrangiana.

5.1.2 Tensores de Killing e tensores de Killing-Yano

No capítulo 2, mostramos que as equações das geodésicas determinam o caminho de uma partícula livre em uma dada métrica do espaço-tempo. No movimento geodésico, o objeto que fornece quantidades conservadas são conhecidos como tensores de Killing. Estes objetos, sob transformação, conservam quantidades da métrica de uma variedade, revelando simetrias não evidentes [61], que correspondem a um grupo de geradores de isometria, geradas a partir da derivada de Lie da métrica [61,62]. A derivada de Lie, com

respeito ao tensor de Stackel-Killing(SK) (ou vetor de Killing) de primeira ordem [57]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &= 0 \\
\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &= \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda g_{\mu\lambda} \\
\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &= \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \\
\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &= \nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} \\
\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} &= \xi_{(\mu;\nu)} = 0,
\end{aligned} \tag{5.13}$$

ainda podemos escrever a isometria estendida como:

$$\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0, \tag{5.14}$$

a equação generalizada do tensor de Killing é:

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu_1 \dots \nu_n)} = 0, \tag{5.15}$$

onde os parênteses são usados para representar a operação da simetrização. Nitidamente, percebemos que a eq.(5.15) depende da derivada covariante. Conseqüentemente, estas dependem dos símbolos de Christoffel. Outro aspecto importante é que a solução geral das equações de Killing envolverá constantes arbitrárias.

Além de expressar o comportamento de classes de grandezas conservadas não triviais, os tensores de Killing revelam aspectos que envolvem a geometria dual. Estes objetos simplificam as equações da relatividade sob presença de simetria [61, 62].

Com base na eq.(5.14), podemos obter as componentes do vetor de Killing para a métrica óptica. Considerando a métrica (4.1), vamos definir as EDP (equações diferenciais parciais) da isometria. Para esse procedimento foi realizado o cálculo analítico e confirmado por método computacional. Assim, obtemos 10 equações diferenciais, contidas no apêndice (B.1). Destas, somente duas componentes são diferentes de zero, como previsto nas eq.(5.11). As constantes ϕ e t são decorrentes da independência das duas coordenadas na métrica. Deste modo, as constantes de movimento estão relacionadas com os vetores de Killing, e estes à simetria, onde as grandezas que se conservam estão associadas com as componentes ϕ e t .

Para mostrar que o tensor de Stackel-Killing(SKT) descreve um comportamento de grandezas conservadas não triviais, vamos considerar a Hamiltoniana de uma partícula neutra,

$$H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}P_\mu P_\nu, \quad (5.16)$$

onde o momento canonicamente conjugado P_μ é,

$$P_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu. \quad (5.17)$$

Quando usamos a mecânica Hamiltoniana para descrever o movimento de partícula, a fórmula implicará em uma grandeza conservada,

$$\xi = \frac{1}{2}\xi^{\mu\nu}P_\mu P_\nu, \quad (5.18)$$

onde a evolução temporal é

$$\{\xi, H\} = \{p_\mu p_\nu \xi^{\mu\nu}, p_\lambda p_\rho g^{\lambda\rho}\} \quad (5.19)$$

$$= \frac{2}{3}p^\alpha p^\beta p^\lambda \nabla_{(\lambda} \xi_{\alpha\beta)} = 0, \quad (5.20)$$

onde, as grandezas conservadas estão sendo descritas por meio dos parênteses de Poisson no espaço de fase.

Uma categoria de tensor interessante, que vale ressaltar, são os tensores de Killing-Yano (representados pela sigla inglesa KYT) $Y_{[\mu\nu]}$. Estes tensores são antissimétricos, ou seja, $Y_{\mu\nu} = Y_{[\nu\mu]}$. A derivada covariante do KYT é a que segue

$$\nabla_\mu Y_\nu = \nabla_{[\mu} Y_{\nu]}, \quad (5.21)$$

satisfazendo a equação geral [64],

$$\nabla_{(\mu} Y_{\nu)\rho_1 \dots \rho_n} = \nabla_\mu Y_{\nu\rho_1 \dots \rho_n} + \nabla_\nu Y_{\mu\rho_1 \dots \rho_n} = 0. \quad (5.22)$$

Estes tensores têm um papel fundamental na integrabilidade das equações da geodésica e na separabilidade das equações de Hamilton-Jacobi [61,62,64]. Além de revelar simetrias ocultas [61,62,64], o KYT permite construir um tensor de Killing de *rank* 2,

ou seja, $k_{\mu\nu} = Y_{\mu\alpha_1\dots\alpha_n} Y_{\nu}^{\alpha_1\dots\alpha_n}$ [58,64]. Para comprovar esta situação, basta calcular a derivada covariante do $K_{\mu\nu}$, ou seja [59],

$$\nabla_{\rho}(K_{\mu\nu}) = \nabla_{\rho}(Y_{\mu\alpha_1\dots\alpha_n} Y_{\nu}^{\alpha_1\dots\alpha_n}) \quad (5.23)$$

$$= (\nabla_{\rho} Y_{\mu\alpha_1\dots\alpha_n}) Y_{\nu}^{\alpha_1\dots\alpha_n} + Y_{\mu}^{\alpha_1\dots\alpha_n} (\nabla_{\rho} Y_{\nu\alpha_1\dots\alpha_n}) \quad (5.24)$$

$$= Y_{\nu}^{\alpha_1\dots\alpha_n} \nabla_{[\rho} Y_{\mu\alpha_1\dots\alpha_n]} + Y_{\mu}^{\alpha_1\dots\alpha_n} \nabla_{[\rho} Y_{\nu\alpha_1\dots\alpha_n]}, \quad (5.25)$$

aplicando a derivada simetrizada na eq.(5.25) [59], obtemos:

$$\nabla_{(\rho} K_{\mu)\nu} = 2Y_{(\nu}^{\alpha_1\dots\alpha_n} \nabla_{[\rho} Y_{\mu)\alpha_1\dots\alpha_n]} = -2Y_{(\nu}^{\alpha_1\dots\alpha_n} \nabla_{[\mu} Y_{\rho)\alpha_1\dots\alpha_n]} = 0. \quad (5.26)$$

Notamos que, na eq.(5.26), obtivemos um resultado negativo, o que não deveria acontecer, pois estamos considerando a simetrização em μ e ρ , mas, o sinal negativo é devido à antissimetrização da eq.(5.25).

Os tensores de Killing-Yano possuem uma propriedade muito interessante. Eles servem como “ raízes quadradas ” do tensor de Killing. Estes ainda, podem ser expressos na sua forma contravariante ($Y^{\mu\nu} = Y_{\rho\gamma} g^{\rho\mu} g^{\gamma\nu}$) e mista ($Y_{\mu}^{\nu} = Y^{\nu\gamma} g_{\gamma\mu}$).

Usado em uma ampla variedade, os Tensores Stackel-Killing e Killing-Yano, podem ser aplicados em espaços-tempo em que existam simetrias. No decorrer deste capítulo, os tensores Stackel-Killing terão um papel fundamental, para demonstrar a propagação do raio de luz em um meio óptico.

5.2 Solução das equações de Killing para a métrica óptica

Operando a eq.(5.15), na métrica óptica (5.5), vamos obter as soluções das equações de Killing. Inicialmente, vamos considerar os índices λ, μ e ν variando de 1 à 4, onde $1 = r$, $2 = \theta$, $3 = \phi$ e $4 = t$. Para realizar os cálculos das derivadas covariantes simetrizadas, vamos usar método computacional. Assim, teremos um controle analítico dos resultados. Este cálculo gera 64 componentes, e destas 32 não são nulas. Como o TK é simétrico, então se reduzem em 10 elementos independentes com soluções não triviais, ou seja, que não são nulas. Obtemos 10 equações diferenciais que são resultantes

da derivada covariante simetrizada de um tensor de Killing de *rank* 2. A Solução das EDP são:

$$K_{11}(r, u)F(r) - \left(\frac{\partial K_{11}(r, u)}{\partial r} \right) A(r) = 0 , \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial K_{11}(r, u)}{\partial u} \right) A(r)r - 3K_{12}(r, u)F(r)r + 2 \left(\frac{\partial K_{12}(r, u)}{\partial r} \right) \\ & A(r)r - 4K_{12}(r, u)A(r) = 0 , \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{\partial K_{12}(r, u)}{\partial u} \right) A(r)ru^2 - 2K_{22}(r, u)F(r)ru^2 + \left(\frac{\partial K_{22}(r, u)}{\partial r} \right) \\ & A(r)ru^2 - K_{11}(r, u)F(r)r^3 - 4K_{22}(r, u)A(r)u^2 - 2K_{11}(r, u) \\ & A(r)r^2 + 2K_{12}(r, u)uA(r)r - 2 \left(\frac{\partial K_{12}(r, u)}{\partial u} \right) A(r)r + 2K_{22}(r, u) \\ & F(r)r - \left(\frac{\partial K_{22}}{\partial r} \right) A(r)r + 4K_{22}(r, u)A(r) = 0 , \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} & K_{11}(r, u)F(r)r^3u^2 + 2K_{11}(r, u)A(r)r^2u^2 - 2K_{12}uA(r)r \\ & + 2K_{33}(r, u)F(r)r - \left(\frac{\partial K_{33}(r, u)}{\partial r} \right) A(r)r + 4K_{33}(r, u)A(r) = 0 , \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\left(\frac{K_{34}(r, u)}{\partial r} \right) r + 2K_{34}(r, u) = 0 , \quad (5.31)$$

$$-\frac{2K_{44}(r, u)F(r)}{A(r)} - \frac{\partial K_{44}(r, u)}{\partial r} - \frac{K_{11}(r, u)F(r)}{A(r)^3} = 0 , \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial k_{22}(r, u)}{\partial u} \right) A(r)u^2 - K_{12}(r, u)F(r)r^2 + 2K_{22}(r, u)uA(r) \\ & - 2K_{12}(r, u)A(r)r - \left(\frac{\partial K_{22}(r, u)}{\partial u} \right) A(r) = 0 , \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} & -K_{12}(r, u)F(r)r^2u^4 + 2K_{22}(r, u)A(r)u^5 - 2K_{12}(r, u) \\ & A(r)ru^4 + 2K_{12}(r, u)F(r)r^2u^2 - 4K_{22}(r, u)A(r)u^3 \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned}
& +4k_{12}(r, u)A(r)ru^2 + \left(\frac{\partial K_{33}(r, u)}{\partial u}\right)A(r)u^2 - K_{12}(r, u) \\
& F(r)r^2 + 2K_{22}(r, u)uA(r) - 4K_{33}(r, u)uA(r) - 2K_{12}(r, u) \\
& A(r)r - \left(\frac{\partial K_{33}(r, u)}{\partial u}\right)A(r) = 0, \\
& \left(\frac{\partial K_{34}(r, u)}{\partial u}\right)u^2 - 2K_{34}(r, u)u - \frac{\partial K_{34}(r, u)}{\partial u} = 0, \tag{5.35}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial K_{44}(r, u)}{\partial u}\right)A(r) + \frac{K_{12}F(r)}{A(r)^2} = 0, \tag{5.36}$$

em que $F(r) = dA(r)/dr$ e $dB(r)/dr = -F(r)/A^2$.

A partir das 10 equações diferenciais parciais, podemos encontrar as novas componentes geradas pelo tensor de Killing. Das 10 componentes, 5 se anularam, são elas: $K_{12} = 0$, $K_{13} = 0$, $K_{14} = 0$, $K_{23} = 0$ e $K_{24} = 0$. As componentes não nulas são,

$$K_{11}(r, u) = C_1A(r), \tag{5.37}$$

$$K_{22}(r, u) = \frac{C_1r^2A(r)(C_3A(r)r^2 - 1)}{u^2 - 1}, \tag{5.38}$$

$$K_{33}(r, u) = C_1A(r)(-u^2 + 1)r^2(1 + r^2A(r)(C_4(-u^2 + 1) - C_3)), \tag{5.39}$$

$$K_{34}(r, u) = C_5(u^2 - 1)r^2, \tag{5.40}$$

$$K_{44}(r, u) = -\frac{C_1}{A(r)} + \frac{C_2}{A(r)^2}, \tag{5.41}$$

onde, temos a presença de 5 parâmetros livres $C_i = (1...5)$. Se todos os parâmetros forem diferente de zero, a métrica se torna não trivial. Note que, trabalhamos com um sistema de equações diferenciais, e assim encontramos o resultado para a isometria.

Para verificar se as componentes (5.37) a (5.41) são realmente solução do tensor de Killing, foi necessário repetir todo o procedimento, substituindo as componentes da solução de Killing, ou seja, foram refeitos os cálculos das derivadas covariantes para métrica óptica, substituindo as componentes obtidas das 10 equações diferenciais parciais (5.37) à (5.41). Nessa etapa, foi realizado o cálculo analítico e confirmado por método computacional que a solução da simetrização das derivadas covariantes é realmente válida.

5.3 Lente GRIN e a métrica óptica

Devido à restrição das expressões da métrica para $A(r) = 1/B(r) = n(r)$, o índice de refração variado n , pode ser associado à métrica óptica, desde que, n esteja em função de r . Deste modo, qualquer índice que tenha um comportamento puramente radial $n = n(r)$, produz $A(r)$, compatíveis à analogia entre geodésica e índice de refração, como foi apresentado no capítulo 3.

Conforme apresentando, estamos abordando meios com índice de refração variado, assim, podemos abordar esta situação utilizando a lente GRIN. A solução do índice de refração na lente GRIN, além de ser descrita via formalismo Hamiltoniano, pode ser matematicamente modelada. Se a análise for em coordenadas esféricas, que possui índice de refração variando radialmente, podemos então considerar $n(r, \phi, \theta) = n(\mathbf{r})$, gerando, assim, $A(\mathbf{r})$, como foi explicado inicialmente.

Devido à condição de n , podemos associar a solução da equação eikonal com o perfil do índice de refração de lente GRIN (1.81). Note que, o índice da lente GRIN, está associado com $A(r)$, escolhido para métrica óptica. A partir, desta associação, podemos por exemplo, expressar n , da seguinte forma:

$$n(r) = A(\mathbf{r}) = \frac{1}{B(\mathbf{r})} = n_0 \sqrt{1 + ar^2}, \quad (5.42)$$

onde $n(r)$ é uma das possíveis configurações do índice de refração de uma lente GRIN.

Com base na descrição da associação da geodésica via equações de Euler-Lagrange e de lente GRIN, vamos determinar nas próximas seções a trajetória do raio de luz sob um campo gravitacional, associando esta trajetória a um raio de luz propagando-se em lente GRIN. Assim, realizaremos alguns procedimentos interessantes envolvendo o raio de luz e lente GRIN.

5.4 Grandezas conservadas ao longo da geodésica

A equação de movimento que descreve o caminho percorrido por uma partícula em um espaço-tempo é conhecida como equação da geodésica. Considerando, a partí-

cula na base das coordenadas, e sujeita somente ao campo gravitacional, a equação de movimento é expressa como,

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0 . \quad (5.43)$$

Assumimos que a geodésica de uma partícula neutra está parametrizada no tempo próprio (τ), ou seja, o parâmetro λ é substituído pelo τ . Então, temos:

$$\dot{x}^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau} . \quad (5.44)$$

Um ponto importante que vale ressaltar, é a relação dos vetores de Killing e os Tensores de Killing com as geodésicas do espaço-tempo. Ambos estão fornecendo informações com relação a estrutura causal do espaço-tempo.

Consideremos que a trajetória de uma partícula em uma geodésica de um espaço-tempo contém um vetor tangente \dot{x}^μ que admite um vetor de Killing K_μ ; isso implicará em uma quantidade $Q_1 = K_\mu \dot{x}^\mu$, que se conserva ao longo deste movimento (referente a eq.(5.43)), mas com restrição em k_μ . Assim, cada vetor de Killing está relacionado a uma quantidade conservada. Por meio da equação(5.11), obtemos,

$$\dot{Q}_1 = \frac{d}{d\tau}(K_\mu \dot{x}^\mu) = \dot{K}_\mu \dot{x}^\mu + K_\mu \ddot{x}^\mu = 0 , \quad (5.45)$$

pois é conservada por hipótese. Para a eq.(5.45), simetrizando μ e ν , podemos fazer:

$$\begin{aligned} \dot{K}_\mu \dot{x}^\mu &= \partial_\nu K_\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu = \partial_\mu K_\nu \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu K_\nu + \partial_\nu K_\mu) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Usando a equação do movimento (5.43) e contraindo com k_ρ , temos,

$$K_\rho \ddot{x}^\rho + K_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 . \quad (5.47)$$

A eq.(5.45), resulta em:

$$K_\mu \ddot{x}^\mu = -K_\rho \ddot{x}^\rho = -\dot{K}_\mu \dot{x}^\mu . \quad (5.48)$$

Manuseando a eq.(5.48) em (5.47), obtemos:

$$-\dot{K}_u \dot{x}^\mu + K_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (5.49)$$

substituindo a expressão (5.46) na eq.(5.49), e multiplicando por -2 , obtemos:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu K_\nu + \partial_\nu K_\mu) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - 2K_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ (\partial_\mu K_\nu + \partial_\nu K_\mu - 2K_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0 \\ \partial_\mu K_\nu + \partial_\nu K_\mu - 2\Gamma_{\mu\nu}^\rho K_\rho &= 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Notemos que a eq.(5.50) é uma restrição sobre k_μ para que Q_1 seja conservada, ou seja, $\dot{Q}_1 = 0$. Para determinar as quantidades conservadas ao longo da geodésica, devemos considerar as derivadas covariantes ao longo da curva. Como $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ é simétrico em " $\mu\nu$ ", podemos reescrever a eq.(5.50):

$$\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0 = \nabla_{(\mu} K_{\nu)}. \quad (5.51)$$

A eq.(5.51) é a condição para que K_μ seja um vetor de Killing. Como visto na seção anterior, os parênteses representam a simetrização e os tensores de Killing são os geradores de isometrias contínuas. O K_μ demonstra localmente uma isometria de $g_{\mu\nu}$. As isometrias locais são simetrias do tipo, $\delta x^\mu = K(x, \dot{x})$ [58]. Deste modo, os KT revelam quantidades conservadas ao longo da geodésica, ou seja, cada vetor de Killing. Cabe notar que a redução da eq.(5.43) ocorre, devido ao fato de que \dot{x}^μ se restringe à combinação de (x, \dot{x}) , pois estamos tratando de transformações locais [58].

Podemos considerar uma extensão de (5.51) para tensores com $rank \geq 2$. Uma grandeza $Q_2 = k_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$, terá

$$\dot{Q}_2 = \partial_\rho k_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + k_{\mu\nu} \dot{x}^\rho (-\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta) + k_{\mu\nu} \dot{x}^\mu (-\Gamma_{\alpha\beta}^\nu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta), \quad (5.52)$$

onde os dois últimos termos da eq.(5.52) foram reescritos a partir de (5.43). Devido à simetria dos índices, podemos reescrever a eq.(5.52),

$$\begin{aligned} \dot{Q}_2 &= (\partial_\rho k_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda k_{\nu\lambda} - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda k_{\mu\lambda}) \dot{x}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ &= \nabla_\rho k_{\mu\nu} \dot{x}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 3! \nabla_{(\rho} k_{\mu\nu)} \dot{x}^\rho \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Assim, Q_2 será conservado ao longo da geodésica, se $K_{\mu\nu}$ for um tensor de Killing "rank"2. Representando como $K_{(\mu\nu;\rho)} = 0$, os tensores de Killing possuem uma simetria $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$. Para a solução dos tensores de Killing (5.37) à (5.41), a expressão (5.51) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_2 = & C_1 A(r) \dot{r}^2 + \left(\frac{C_1 r^2 A(r) (C_3 A(r) r^2 - 1)}{u^2 - 1} \right) \dot{u}^2 + (C_1 A(r) (-u^2 \\ & + 1) r^2 (1 + r^2 A(r) (C_4 (-u^2 + 1) - C_3))) \dot{\phi}^2 + C_5 (u^2 - 1) r^2 \dot{t}^2 \\ & - \left(\frac{C_1}{A(r)} + \frac{C_2}{A(r)^2} \right) \dot{t}^2 . \end{aligned} \quad (5.54)$$

Para concluir, um fato relevante sobre o tensor de Killing é que, quando reescrito em termos de um tensor Yano-Killing, existirá uma grandeza extra conservativa ímpar ao longo da geodésica.

5.5 Trajetória do raio de luz em lente GRIN

Seja um raio luminoso monocromático, propagando-se por uma geodésica nula, em um meio com índice de refração variável, descrito por um formalismo de espaço de fase. Este formalismo determina grandezas conservadas não triviais por métodos analíticos e numéricos. Para realizar essa análise de maneira simplificada, vamos expressar a geodésica em termos de quantidades conservativas, utilizando o formalismo hamiltoniano. A lagrangiana auxiliar, em termo da métrica do espaço-tempo, é dada:

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu , \quad (5.55)$$

onde, o momento conjugado relacionado a uma dada coordenada, é expresso como:

$$P_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu . \quad (5.56)$$

Conforme exposto anteriormente, quando uma métrica não depende da coordenada x^μ , o momento corresponde a uma constante de movimento. Para métrica óptica, existem duas coordenadas independentes ϕ e t , correspondentes aos momentos P_ϕ e P_t . Portanto, usando a eq.(5.4) vamos obter as duas constantes de movimento:

- Para a componente ϕ , temos:

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} A(r) r^2 (1 - u^2) = L_\phi \implies \dot{\phi} = \frac{L_\phi}{A(r) r^2 (1 - u^2)}. \quad (5.57)$$

- Para componente t , obtemos:

$$P_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \frac{-\dot{t}}{A(r)} = E \implies \dot{t} = -EA(r). \quad (5.58)$$

em que L_ϕ e E são constantes. Podemos interpretar de maneira análoga essas constantes como sendo L_ϕ o momento angular do fóton e E a energia do fóton.

Vamos obter os resultados para as componentes u e r da métrica (5.5). A resolução dos cálculos está contida no apêndice (C.1), assim, já substituindo os valores das constantes de movimento ϕ (5.57) e t (5.58), nas equações a seguir, obtemos os seguintes resultados:

- Para r ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial A(r)}{\partial r} \dot{r}^2 + \left(\frac{1}{2(1-u^2)} \left[\frac{\partial A(r)}{\partial r} r^2 + 2rA(r) \right] \right) \dot{u}^2 + \\ & + \left(\frac{(1-u^2)}{2} \left[\frac{\partial A(r)}{\partial r} r^2 + 2rA(r) \right] \right) \frac{L_\phi^2}{(A(r)r^2(1-u^2))^2} + \\ & + \frac{1}{2A(r)^2} \frac{\partial A(r)}{\partial r} (-EA(r))^2 = A(r)\ddot{r} + \frac{\partial A(r)}{\partial r} \dot{r}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

- Para u :

$$\begin{aligned} & A(r)r^2 \frac{u}{(1-u^2)^2} \dot{u}^2 - ur^2 A(r) \frac{L_\phi}{(A(r)r^2(1-u^2))^2} = \frac{dA(r)r^2}{d\tau} \\ & (1-u^2)^{-1} + A(r)r^2 [-(1-u^2)^{-2}(-2u)\dot{u}] + \frac{A(r)r^2}{1-u^2} \ddot{u}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Como estamos considerando um espaço-tempo esfericamente simétrico, podemos confinar a análise do movimento a um plano. Por conveniência, sendo um plano equatorial $\theta = \pi/2$, então, $u = \cos\theta = 0$. Deste modo, considerando que $u = 0$, então a eq.(5.60) resulta em zero. Devido a esta condição, podemos reescrever a eq.(5.59), da seguinte forma:

$$A(r)\ddot{r} + \frac{\partial A(r)}{\partial r} \dot{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial A(r)}{\partial r} \dot{r}^2 + F(r) = 0, \quad (5.61)$$

onde,

$$F(r) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial A(r)}{\partial r} E^2 + \frac{L_\phi^2}{A(r)^2 r^4} \left(\frac{\partial A(r)}{\partial r} + 2rA(r) \right) \right]. \quad (5.62)$$

Para relacionar as coordenadas r e ϕ na forma $r(\phi)$, devemos considerar que: $dr/d\tau = \dot{r}$ e $d\phi/d\tau = \dot{\phi}$ e que $\dot{r}/\dot{\phi} = dr/d\phi$. Assim, derivando em relação ϕ , temos que:

$$\dot{r} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi} = \frac{L_\phi}{A(r(\phi))r^2} \frac{dr}{d\phi} = \left(\frac{L_\phi}{A(r(\phi))r^2} \frac{d}{d\phi} \right) r, \quad (5.63)$$

e,

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{d\tau} \left(\dot{\phi} \frac{dr}{d\phi} \right) = \left(\frac{L_\phi}{A(r(\phi))r^2} \right)^2 \frac{d^2 r}{d\phi^2} + \frac{L_\phi}{A(r(\phi))r^2} \left(-L_\phi \right. \\ &\quad \left. A(r(\phi))^{-1} r^{-2} \left[A(r(\phi))^{-1} \frac{\partial A(r(\phi))}{\partial r} + 2r^{-1} \right] \frac{dr}{d\phi} \right), \end{aligned} \quad (5.64)$$

substituindo as eq.(5.63) e (5.64) na eq.(5.61), obtemos uma expressão radial,

$$\begin{aligned} &A(r) \left(\frac{L_\phi}{A(r(\phi))r^2} \right)^2 \frac{d^2 r}{d\phi^2} + \frac{L_\phi}{A(r(\phi))r^2} \left(-L_\phi A(r(\phi))^{-1} r^{-2} \right. \\ &\quad \left. \left[A(r(\phi))^{-1} \frac{\partial A(r(\phi))}{\partial r} + 2r^{-1} \right] \frac{dr}{d\phi} \right) + \frac{\partial A(r)}{\partial r} \left(\frac{L_\phi}{A(r(\phi))r^2} \right. \\ &\quad \left. \frac{d}{d\phi} \right) r - \frac{1}{2} \frac{\partial A(r)}{\partial r} \left(\left(\frac{L_\phi}{A(r(\phi))r^2} \frac{d}{d\phi} \right) r \right)^2 + F(r) = 0. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Com a ajuda da equação acima, é possível descrever a trajetória do raio de luz ao entrar em uma Lente GRIN, substituindo $A(r)$ por algumas configurações do índice de refração desta lente. Como a eq.(5.65) depende da expressão do índice de refração, vamos gerar alguns gráficos contendo 5 tipos de índices de refração $n(r)$, sendo que na ref. [14] há mais exemplos de possíveis expressões para $n(r)$. Ou seja, da forma:

$$A(r) = n(r) = n_0 \sqrt{1 + \frac{a}{r^2}}, \quad (5.66)$$

$$A(r) = n(r) = n_0 \left(1 + \frac{a}{r^2} \right), \quad (5.67)$$

$$A(r) = n(r) = n_0 \left(1 + \frac{a}{r^2} \right)^2, \quad (5.68)$$

$$A(r) = n(r) = n_0\sqrt{1 + br^2}, \quad (5.69)$$

$$A(r) = n(r) = n_0(1 + br^2) \quad (5.70)$$

Por meio da solução analítica e numérica da eq.(5.65), vamos determinar a trajetória do raio de luz em lente GRIN com simetria esférica. Em vista da complexidade da eq.(5.65), vamos apresentar uma solução numérica, e representar os resultados com um grupo de gráficos polares acerca dos valores máximos e mínimos de r referentes à trajetória do raio de luz. Vale ressaltar que, em uma superfície esférica, o raio de luz que atinge uma superfície de raio R , a depender do ângulo de incidência referente à normal ao plano tangente do plano da lente GRIN. Assim, para gerar diferentes curvas conforme o ângulo de incidência, podemos considerar $A(r(\phi)) = n(r(\phi))$, e substituir a expressão de $n(r(\phi))$ pelas eq.(5.66) à (5.70), conforme apresentando no apêndice D. Realizando alguns testes, e percebemos que variando os valores das constantes a e n_0 não foi suficiente para gerar curvas. Entretanto, ao variar os valores dos parâmetros L e E , conseguimos gerar as curvas. Com base nos dados da tabela 1 e nas equações do apêndice (D), construímos gráficos polares para representar a trajetória do raio de luz. Por meio da figura 3, podemos perceber que os resultados apresentados mostra que a distribuição do índice de refração são trechos de seções cônicas, variando de acordo com a distância do centro da lente.

Gráfico	E	L_ϕ	a, b	n_0	r
3.(a)	100	100	1	1	0.65
3.(b)	100	150	1	1	0.65
3.(c)	150	100	1	1	0.90
3.(d)	150	150	1	1	0.95
3.(e)	100	150	1	1	0.99
3.(f)	100	100	1	1	0.99

Tabela 1. Valores para as constantes da expressão contida no apêndice E.

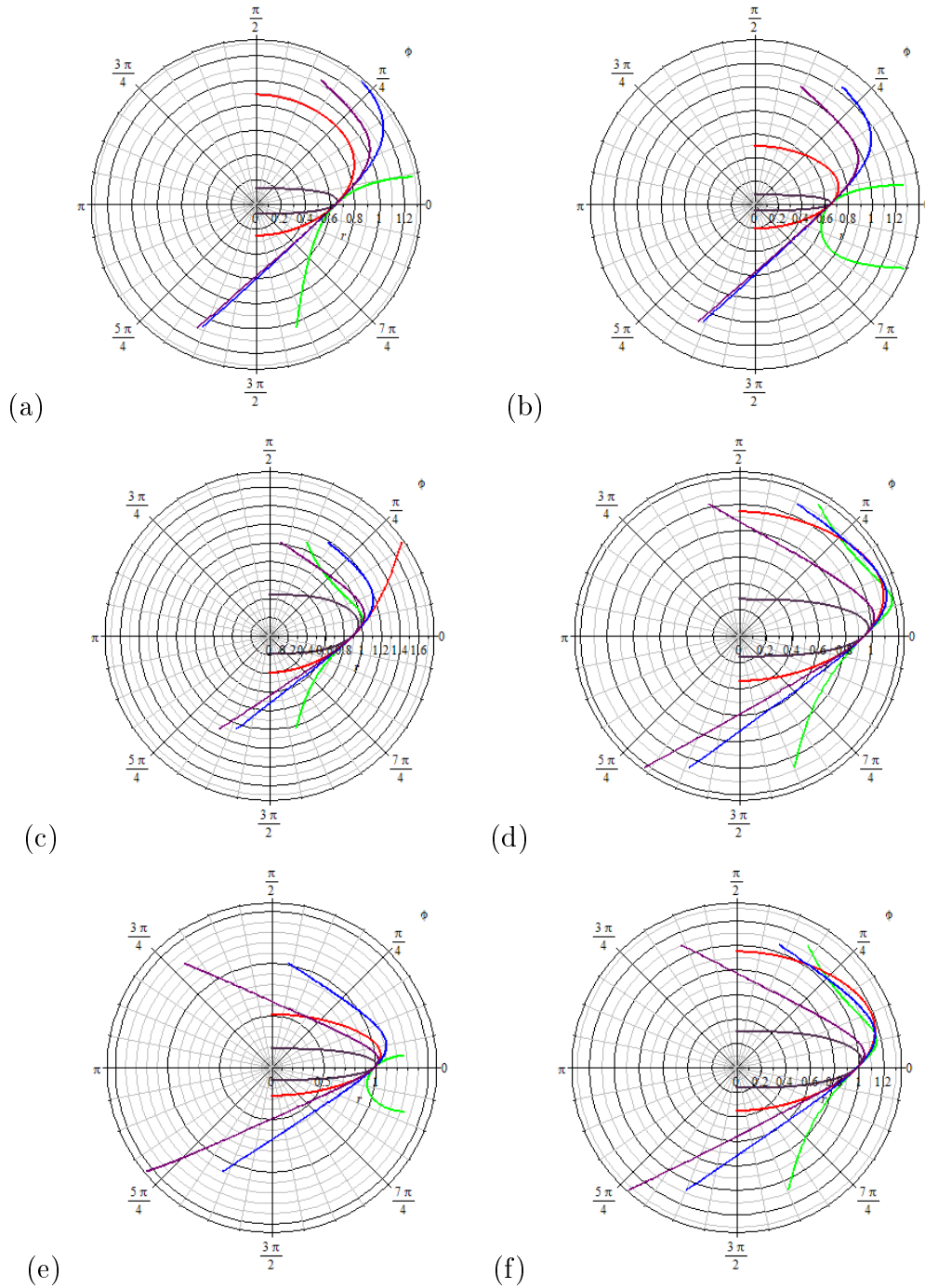


Figura 3: Trajetória do raio de luz em uma lente GRIN esférica com diferentes índices de refração. A curva verde equivale ao índice (5.66), a curva vermelha representa o índice (5.67), a curva violeta representa (0.68), a curva azul representa o índice (5.69) e a curva roxa representa o índice (6.70).

5.6 Aplicação do tensor de Killing: métrica dual óptica

Entre as propriedades dos tensores de Killing, existe uma conhecida como dualidade geométrica. Este tipo de dualidade, além de gerar uma nova métrica não-trivial associada ao espaço-tempo adotado, possibilita um mapeamento em regiões com comportamentos interessantes, não esperados para o sistema original, porém, respeitando a métrica original. Assim, por exemplo, aplicando o cálculo do tensor de Killing na métrica de Schwarzschild, obtém-se uma métrica dual. Para maiores informações sobre o procedimento vide [65].

Através do procedimento associado à métrica de Schwarzschild, um cálculo análogo foi realizado para obter o escalar de Kretschmann dual da óptica métrica. Assim, vamos considerar a métrica óptica dual como um "laboratório" para testar e interpretar a dualidade geométrica. Levando em consideração o resultado obtido do tensor de Stackel-Killing (5.37) à (5.41), e ressaltando que $K_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}$, obtemos a seguinte métrica dual generalizada:

$$\begin{aligned} \tilde{d}s^2 = & C_1 A(r) dr^2 + \frac{C_1 r^2 A(r) (C_3 A(r) r^2 - 1)}{u^2 - 1} du^2 + C_1 A(r) (-u^2 + 1) r^2 \\ & (1 + r^2 A(r) (C_4 (-u^2 + 1) - C_3)) d\phi^2 + C_5 (u^2 - 1) r^2 d\phi dt \\ & - \frac{C_1}{A(r)} + \frac{C_2}{A(r)^2} dt^2 . \end{aligned} \quad (5.71)$$

Note que a métrica dual (5.71) possui cinco parâmetros livres $C_i = (1...5)$. Devido a estas constantes, temos um conjunto de métricas duais, que torna-se não trivial quando o resultado dos parâmetros forem diferentes de zero. Considerando vamos considerar que $A(r) = n_0 \sqrt{1 + br^2}$.

Como foi mostrado no capítulo 2, o escalar de Kretschmann, além de descrever a singularidade de um sistema, também é utilizado para confirmar se um sistema dual pode realmente manter algumas propriedades do sistema original. Assim, para analisar o comportamento do escalar de Kretschmann do tensor de Killing, a métrica dual precisa ser não-degenerada². Com a ajuda da ferramenta computacional, obtemos o resultado

²A métrica é degenerada quando seu determinante é igual a zero.

do determinante da métrica dual:

$$\begin{aligned} \tilde{g} = & - \frac{1}{4} C_1^2 A(r) r^4 (A(r) C_3 r^2 - 1) [4A(r)^2 r^2 u^2 C_1^2 C_4 - 4A(r) r^2 u^2 C_1 C_2 C_4 \\ & + 4A(r)^2 r^2 C_1^2 C_3 - 4A(r)^2 r^2 C_1^2 C_4 + A(r) r^2 u^2 C_5^2 - 4A(r) r^2 C_1 C_2 C_3 \\ & + 4A(r) r^2 C_1 C_2 C_4 - C_5^2 r^2 A(r) - 4A(r) C_{21} + 4C_1 C_2] . \end{aligned} \quad (5.72)$$

Nesta situação, é importante notar que a métrica dual óptica, para ser considerada degenerada, precisa ter o determinante \tilde{g} igual a zero. Assim, esta condição é válida quando $C_1 = 0$. Esta condição é evidente, mas pode ter outras soluções não triviais que determinam uma métrica degenerada. Neste contexto, foi interessante construir gráfico do determinante dual \tilde{g} em relação a C_1 e r , como mostra a figura a seguir:

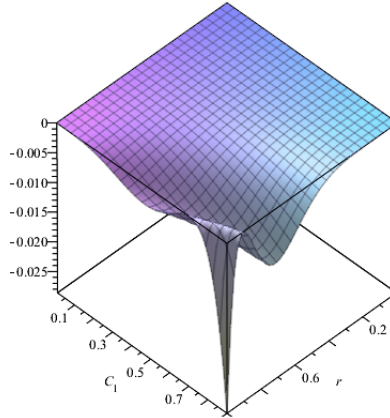


Figura 4: $\tilde{g}(C_1, r)$. Considerando $A(r) = n_0 \sqrt{1 + br^2}$, onde $b = 1$ e $n_0 = 1$.

Assim, para analisar uma métrica degenerada, neste caso, como mostra a figura 4, $C_1 \rightarrow 0$. Porém, para uma métrica não degenerada, o parâmetro $C_1 \neq 0$. Portanto, para trabalhar com o escalar de Kretschmann dual (2.66), temos que assumir essa condição. Mas, antes de calcular o objeto geométrico, vale grifar que, o determinante da métrica original (4.1) é $g = -A(r)^3 r^4 B(r)$ e o K do sistema original está contido no apêndice (E.1).

Para encontrar o invariante geométrico de Kretschmann dual (2.66), vamos utilizar um método computacional. No entanto, o \tilde{K} resulta em número muito grande de elementos, nem mesmo esta ferramenta pode exibir, pois supera 900000. Uma forma de contornar a situação, foi fixar valores para os parâmetros C_i . Fixando os valores para

as constantes $C_2 = 1, C_3 = C_4 = C_5 = 0$, podemos gerar o escalar de Kretschmann dual. Este escalar, está contido no apêndice (E.2). No entanto, para observar o comportamento da métrica, vamos deixar r e C_1 variável. Desse modo, podemos fazer uma análise do comportamento de \tilde{K} em torno da singularidade $r = 0$. Assim, foi apropriado construir gráficos com a solução da expansão em série em r ,

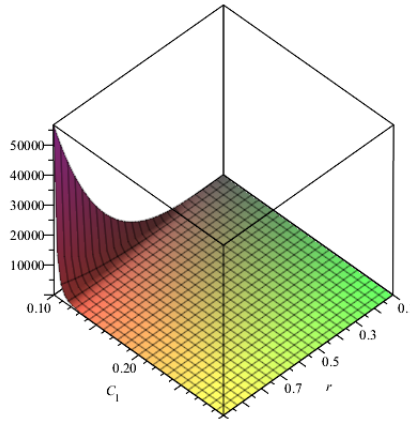


Figura 5: $\tilde{K}(r, C_1)$. Considerando $A(r) = n_0\sqrt{1 + br^2}$, onde $b = 1$ e $n_0 = 1$. Fonte: própria do autor

Podemos observar que no gráfico da figura 5, estão indicados os pontos de singularidade de C_1 . Para gerar este gráfico, assumimos os seguintes valores: $C_1 = 0.1..0.3$ e $r = 0.1..0.1$. Podemos notar que o comportamento da métrica degenerada de $C_1 \rightarrow 0$ influencia na singularidade do escalar de Kretschmann. Assim, não se altera a singularidade do K usual no espaço dual.

Conclusão e Perspectivas

A descrição da deflexão da luz ao passar por uma massa gravitacional é usualmente tratada pelo método de geodésicas nulas. No entanto, neste presente trabalho, apresentamos este fenômeno usando uma abordagem óptica, ou seja, uma abordagem de meio material. Para estabelecer esta abordagem, mostramos a analogia da equação geodésica e a equação eikonal. Assim, obtivemos o resultado do ângulo de deflexão encontrado pelo eikonal equivalente o valor obtido pela Teoria da Relatividade Geral. No procedimento descrito, utilizamos a lente GRIN como um meio óptico, para descrever de maneira genérica a deflexão da luz.

Usamos o formalismo métrico para tratar da propagação da luz, considerando a trajetória do raio de luz como sendo geodésicas nulas. O uso deste formalismo possibilitou tratar a geodésica via Lagrangiano, que revelou grandezas conservadas por meio dos tensores de Killing. Mostrou-se analiticamente a trajetória do raio de luz em lente GRIN. Através de procedimento numérico, foi interessante construir gráficos polares, para analisar a trajetória do raio de luz, utilizando diferentes configurações de índice de refração. Os gráficos mostraram comportamento análogo à deflexão da luz, assim, podemos tratar esse fenômeno utilizando a lente GRIN. Assim, mostramos que a deflexão da luz comprovada a mais de 100 anos pode ser descrita de maneira genérica utilizando as lentes GRIN.

Outro procedimento realizado foi em relação à geometria dual, apresentando um comportamento degenerado da métrica dual. Também calculamos a singularidade através do invariante geométrico, que apresentou um aspecto não trivial ao observar um comportamento singular da métrica dual, não alterando a singularidade do sistema original.

A perspectiva futura é desenvolver artigos sobre este assunto e estudar outras con-

figurações de índice de refração da lentes GRIN, bem como ampliar nossos estudos nas extensões degeneradas.

APÊNDICE A – Símbolos de Christoffel

A.1 Símbolos de Christoffel para métrica óptica isotrópica

Calculamos os símbolos de Christoffel, cujos resultados estão descritos a seguir:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} A(r) , \quad (\text{A.1})$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r^2 + A(r) r , \quad (\text{A.2})$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r^2 \sin(\theta)^2 + A(r) r \sin(\theta)^2 , \quad (\text{A.3})$$

$$\Gamma_{rt}^t = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} B(r) , \quad (\text{A.4})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r^2 - A(r) r , \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = A(r) r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) , \quad (\text{A.6})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) r^2 \sin(\theta)^2 - A(r) r \sin(\theta)^2 , \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -A(r) r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) , \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} B(r) . \quad (\text{A.9})$$

APÊNDICE B - Vetor de Killing

B.1 Solução do vetor Killing para a métrica óptica

As equações a seguir, são as equações diferenciais associadas às equações do vetor de Killing, para métrica óptica. Obtemos então via método computacional,

$$\xi_1 F - 2A(r)\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial r}\right) = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$A(r)r\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial r}\right) - \xi_2 A(r)r + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial r}\right)Ar - 2\xi_2 A(r) = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\xi_3 Fr - \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial r}\right)A(r)r + 2\xi_3 A(r) = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\xi_4 F + \left(\frac{\partial \xi_4}{\partial r}\right)A(r) = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$2\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial u}\right)A(r)u^2 - \xi_1 Fr^2 - 2\xi_1 A(r)r + 2\xi_2 uA - 2\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial u}\right)A(r) = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial u}\right)u^2 - 2\xi_3 u - \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial u}\right) = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial u} = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\xi_1 Fr^2 u^2 + 2\xi_1 A(r) r u^2 - 2\xi_2 A(r) u^3 - \xi_1 Fr^2 - 2\xi_1 A(r) r + 2\xi_2 u A(r) = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\xi_4 F + \left(\frac{\partial \xi_4}{\partial r}\right) A(r) = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\xi_1 F = 0, \quad (\text{B.10})$$

onde $F = \partial A(r)/\partial r$.

Destas equações obtemos somente duas diferentes de zero. O resultado da isometria da métrica óptica é

$$\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial u}\right) u^2 - 2\xi_3 u - \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial u}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \xi_3 = C1(u^2 - 1)r^2 A(r), \quad (\text{B.11})$$

$$\xi_4 F + \left(\frac{\partial \xi_4}{\partial r}\right) A(r) = 0 \quad \rightarrow \quad \xi_4 = \frac{C2}{A(r)}. \quad (\text{B.12})$$

APÊNDICE C - Cálculo da trajetória do raio de luz para as componentes r e u

C.1 Para r :

$$\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial r}\right) \frac{1}{2} \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} g_{\rho\nu} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} (\dot{x}^\rho \dot{x}^\nu) \right). \quad (\text{C.1})$$

Resolvendo o lado esquerdo da eq.(C.1),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} g_{\rho\nu} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} (\dot{x}^\rho \dot{x}^\nu) \right) &= \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \frac{1}{2} \dot{x}^1 \dot{x}^1 + \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \frac{1}{2} \dot{x}^2 \dot{x}^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \frac{1}{2} \dot{x}^3 \dot{x}^3 + \frac{\partial g_{44}}{\partial r} \frac{1}{2} \dot{x}^4 \dot{x}^4 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial A(r)}{\partial r} \dot{r}^2 + \frac{1}{2(1-u^2)} \left[\frac{\partial A(r)}{\partial r} r^2 + 2rA(r) \right] \dot{u}^2 \\ &+ \frac{1-u^2}{2} \left[\frac{\partial A(r)}{\partial r} r^2 + 2rA(r) \right] \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial A(r)}{\partial r} \dot{t}^2. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Vamos resolver para o lado direito. Então:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} g_{\rho\nu} \frac{\partial \dot{r}^2}{\partial \dot{r}} \right] = \frac{dA(r)\dot{r}}{d\tau} = A(r)\ddot{r} + \frac{\partial A(r)}{\partial r} \frac{dr}{d\tau}. \quad (\text{C.3})$$

Obtendo uma expressão para o lado esquerdo (C.2) e direito (C.3) da equação (C.1). Substituindo o valores de $\dot{\phi} = L_\phi / (A(r)r^2(1-u^2))^2$ e $\dot{t} = -EA(r)$, podemos reescrever

a eq.(C.1) como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial A(r)}{\partial r} \dot{r}^2 + \left(\frac{1}{2(1-u^2)} \left[\frac{\partial A(r)}{\partial r} r^2 + 2rA(r) \right] \right) \dot{u}^2 \\ & + \left(\frac{(1-u^2)}{2} \left[\frac{\partial A(r)}{\partial r} r^2 + 2rA(r) \right] \right) \frac{L_\phi^2}{(A(r)r^2(1-u^2))^2} \\ & + \frac{1}{2A(r)^2} \frac{\partial A(r)}{\partial r} (-EA(r))^2 = A(r)\ddot{r} + \frac{\partial A(r)}{\partial r} \dot{r} . \end{aligned} \quad (C.4)$$

C.2 Para u :

$$\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial u} \right) \frac{1}{2} \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu = \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} g_{\rho\nu} \frac{\partial}{\partial \dot{u}} (\dot{x}^\rho \dot{x}^\nu) \right] , \quad (C.5)$$

onde,

$$\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial u} \right) \frac{1}{2} \dot{x}^\rho \dot{x}^\nu = \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \frac{1}{2} \dot{x}^2 \dot{x}^2 + \frac{\partial g_{33}}{\partial u} \frac{1}{2} \dot{x}^3 \dot{x}^3 . \quad (C.6)$$

Para $\partial g_{22}/\partial u$, temos:

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{1-u^2} \right] A(r)r^2 \quad (C.7)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} [1-u^2]^{-1} \quad (C.8)$$

$$= -(1-u^2)^{-2} * (-2u) \quad (C.9)$$

$$= \frac{A(r)r^2 2u}{(1-u^2)^2} , \quad (C.10)$$

e para $\partial g_{33}/\partial u$, temos:

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial u} = -2ur^2 A(r) , \quad (C.11)$$

assim, o lado esquerdo da a eq.(C.5), resulta,

$$A(r)r^2 \frac{u}{(1-u^2)^2} \dot{u}^2 - ur^2 A(r) \dot{\phi}^2 . \quad (C.12)$$

Para o lado direito da eq.(C.5), temos que:

$$\frac{1}{2}g_{\rho\nu}\frac{\partial}{\partial\dot{u}}(\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu) = \frac{1}{2}\left[\frac{A(r)r^2}{1-u^2}\right]2\dot{u}, \quad (\text{C.13})$$

assim,

$$\frac{d}{d\tau}\left(\left[\frac{A(r)r^2}{1-u^2}\right]\dot{u}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{A(r)r^2}{1-u^2}\right)\dot{u} + \frac{A(r)r^2}{1-u^2}\ddot{u}, \quad (\text{C.14})$$

considerando que:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{A(r)r^2}{1-u^2}\right) = \frac{dA(r)r^2}{d\tau}(1-u^2)^{-1} + A(r)r^2[-(1-u^2)^{-2}(-2u)\dot{u}]. \quad (\text{C.15})$$

Sabendo que $\dot{\phi} = L_\phi/(A(r)r^2(1-u^2))^2$, e substituindo (C.12) e (C.14) na expressão (C.5), obtemos:

$$\begin{aligned} A(r)r^2\frac{u}{(1-u^2)^2}\dot{u}^2 - ur^2A(r)\frac{L_\phi}{(A(r)r^2(1-u^2))^2} &= \frac{dA(r)r^2}{d\tau}(1-u^2)^{-1} \\ + A(r)r^2[-(1-u^2)^{-2}(-2u)\dot{u}] + \frac{A(r)r^2}{1-u^2}\ddot{u}. & \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

APÊNDICE D - Aplicação dos índices de refração na expressão da equação(5.65)

Substituindo cada índice de refração (5.66) à (5.70) na expressão (5.65), obtemos as expressões, que foram utilizadas para a geração da trajetória. As expressões, dependentes da forma de $A(r)$, estão descritas a seguir.

D.1 Para $A(r) = n(r) = n_0\sqrt{1 + a/r(\phi)^2}$:

$$\begin{aligned} & \left(n_0\sqrt{1 + a/r(\phi)^2} \right) \left(\frac{L_\phi}{(n_0\sqrt{1 + a/r(\phi)^2})r^2} \right)^2 \frac{d^2r(\phi)}{d\phi^2} + \frac{L_\phi^2}{(n_0\sqrt{1 + a/r(\phi)^2})^2r(\phi)^4} \\ & \left(-\frac{1}{(n_0\sqrt{1 + a/r(\phi)^2})} \left(\frac{\partial n_0\sqrt{1 + a/r(\phi)^2}}{\partial(r(\phi))} - \frac{2}{r} \right) \frac{d^2r(\phi)}{d\phi^2} \right) + \frac{\partial(n_0\sqrt{1 + a/r(\phi)^2})}{\partial r(\phi)} \\ & \left(\frac{L_\phi}{(n_0\sqrt{1 + a/r(\phi)^2})r^2} \frac{dr(\phi)}{d\phi} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial(n_0\sqrt{1 + a/r(\phi)^2})}{\partial r(\phi)} \left(\frac{L_\phi}{(n_0\sqrt{1 + a/r(\phi)^2})r^2} \right)^2 \right) \\ & \left(\frac{dr(\phi)}{d\phi} \right)^2 + F(r(\phi)) = 0 ; \end{aligned}$$

D.2 Para $A(r) = n(r) = n_0(1 + a/r(\phi)^2)$:

$$\begin{aligned}
& \left(n_0(1 + a/r(\phi)^2) \right) \left(\frac{L_\phi}{(n_0(1 + a/r(\phi)^2))r(\phi)^2} \right)^2 \frac{d^2r(\phi)}{d\phi^2} + \frac{L_\phi^2}{(n_0(1 + a/r(\phi)^2))^2r(\phi)^4} \\
& \left(-\frac{1}{(n_0(1 + a/r(\phi)^2))} \frac{\partial(n_0(1 + a/r(\phi)^2))}{\partial(r(\phi))} - \frac{2}{r(\phi)} \right) \frac{d^2r(\phi)}{d\phi^2} + \left(\frac{\partial(n_0(1 + a/r(\phi)^2))}{\partial r(\phi)} \right) \\
& \left(\frac{L_\phi}{(n_0(1 + a/r(\phi)^2))r(\phi)^2} \frac{dr(\phi)}{d\phi} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial(n_0(1 + a/r(\phi)^2))}{\partial r(\phi)} \left(\frac{L_\phi}{(n_0(1 + a/r(\phi)^2))r(\phi)^2} \right)^2 \right) \\
& \left(\frac{dr(\phi)}{d\phi} \right)^2 + F(r(\phi)) = 0;
\end{aligned}$$

D.3 Para $A(r) = n(r) = n_0(1 + a/r(\phi)^2)^2$:

$$\begin{aligned}
& \left(n_0(1 + a/r(\phi)^2)^2 \right) \left(\frac{L_\phi}{(n_0(1 + a/r(\phi)^2)^2)r(\phi)^2} \right)^2 \frac{d^2r(\phi)}{d\phi^2} + \frac{L_\phi^2}{(n_0(1 + a/r(\phi)^2)^2)r(\phi)^4} \\
& \left(-\frac{1}{n_0(1 + a/r(\phi)^2)^2} \left(\frac{\partial(n_0(1 + a/r(\phi)^2)^2)}{\partial(r(\phi))} - \frac{2}{r(\phi)} \right) \frac{d^2r(\phi)}{d\phi^2} \right) + \frac{\partial(n_0(1 + a/r(\phi)^2)^2)}{\partial r(\phi)} \\
& \left(\frac{L_\phi}{(n_0(1 + a/r(\phi)^2)^2)r(\phi)^2} \frac{dr(\phi)}{d\phi} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A(n_0(1 + a/r(\phi)^2)^2)}{\partial r(\phi)} \left(\frac{L_\phi}{(n_0(1 + a/r(\phi)^2)^2)r(\phi)^2} \right)^2 \right) \\
& \left(\frac{dr(\phi)}{d\phi} \right)^2 + F(r(\phi)) = 0;
\end{aligned}$$

D.4 Para $A(r) = n(r) = n_0\sqrt{1 + br(\phi)^2}$:

$$\begin{aligned}
& \left(n_0\sqrt{1 + br(\phi)^2} \right) \left(\frac{L_\phi}{(n_0\sqrt{1 + br(\phi)^2})r(\phi)^2} \right)^2 \frac{d^2r(\phi)}{d\phi^2} + \frac{L_\phi^2}{(n_0\sqrt{1 + br(\phi)^2})^2r(\phi)^4} \\
& \left(-\frac{1}{(n_0\sqrt{1 + br(\phi)^2})} \frac{\partial(n_0\sqrt{1 + br(\phi)^2})}{\partial(r(\phi))} - \frac{2}{r(\phi)} \right) \frac{d^2r(\phi)}{d\phi^2} + \frac{\partial(n_0\sqrt{1 + br(\phi)^2})}{\partial r(\phi)}
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{L_\phi}{A(r(\phi))r(\phi)^2} \frac{dr(\phi)}{d\phi} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial(n_0\sqrt{1+br(\phi)^2})}{\partial r(\phi)} \right) \left(\left(\frac{L_\phi}{(n_0\sqrt{1+br(\phi)^2})r(\phi)^2} \frac{dr(\phi)}{d\phi} \right) \right)^2 + F(r(\phi)) = 0.$$

D.5 Para $A(r) = n(r) = n_0(1 + br(\phi)^2)$:

$$\begin{aligned} & \left(n_0(1 + br(\phi)^2) \right) \left(\frac{L_\phi}{(n_0(1 + br(\phi)^2))r^2} \right)^2 \frac{d^2r(\phi)}{d\phi^2} + \frac{L_\phi^2}{(n_0(1 + br(\phi)^2))^2 r(\phi)^4} \\ & \left(-\frac{1}{(n_0(1 + br(\phi)^2))} \frac{\partial(n_0(1 + br(\phi)^2))}{\partial r(\phi)} - \frac{2}{r(\phi)} \right) \frac{d^2r(\phi)}{d\phi^2} \\ & + \frac{\partial(n_0(1 + br(\phi)^2))}{\partial r(\phi)} \left(\frac{L_\phi}{(n_0(1 + br(\phi)^2))r(\phi)^2} \frac{dr(\phi)}{d\phi} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial(n_0(1 + br(\phi)^2))}{\partial r(\phi)} \\ & \left(\left(\frac{L_\phi}{(n_0(1 + br(\phi)^2))r(\phi)^2} \right) \left(\frac{dr(\phi)}{d\phi} \right) \right)^2 + F(r(\phi)) = 0. \end{aligned}$$

Nas eqs. D.1, D.2 e D.3 temos que $a > 0$ e $0 < r \leq R$ (Onde R é o raio da região esférica). Na eq. D3, temos que $0 < r \leq R$. Na eqs. D4 e D5, temos que $b > 0$ e $0 < r \leq R$.

APÊNDICE E - Cálculo do escalar de Kretschmann

E.1 Resultado do escalar de Kretschmann original

Resultado do escalar de Kretschmann com a métrica original:

$$\begin{aligned}
 K = & \frac{1}{4(B(r)^4 A(r)^6 r^2)} \left[4 \left(\frac{d^2}{dr^2} B(r) \right)^2 B(r)^2 A(r)^4 r^2 - 4 \left(\frac{d^2}{dr^2} B(r) \right)^2 \right. & (E.1) \\
 & \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) B(r) A(r)^4 r^2 - 4 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} B(r) \right) B(r)^2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) \\
 & A(r)^3 r^2 + \left(\frac{d}{dr} B(r) \right)^4 A(r)^4 r^2 + 2 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right)^2 B(r) \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 A(r)^2 \\
 & r^2 + 9B(r)^4 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^4 r^2 - 16B(r)^4 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 A(r) \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) r^2 + 8 \\
 & B(r)^4 A(r)^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right)^2 r^2 + 8 \left(\frac{d}{dr} B(r) \right)^2 B(r)^2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) A(r)^3 r - 8 \\
 & B(r)^4 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^3 A(r) r + 16B(r)^4 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right) A(r)^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) r + 8 \\
 & \left. \left(\frac{d}{dr} B(r) \right)^2 B(r)^2 A(r)^4 + 24B(r)^4 A(r)^2 \left(\frac{d}{dr} A(r) \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

E.2 Resultado do escalar de Kretschmann dual

Para uma métrica não degenerada, assumimos que $C_1 \neq 0$. Desta forma, obtemos o escalar de Kretschmann dual por meio do método computacional. Como o \tilde{K} tem um número muito grande, torna-se difícil de exibir, então, para contornar a situação, fixamos valores para as constantes, $C_2 = 1$ $C_3 = C_4 = C_5 = 0$:

$$\begin{aligned}
\tilde{K} = & \left(\frac{1}{4r^2 C_1^2 A(r)^6 (-4A(r)C_1^2 + 4C_1^4)} \right) \left[14336A(r)^2 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^2 C_1^4 - 14336 \right. & (E.2) \\
& A(r)^2 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^2 C_1^4 - 36864A(r)^5 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^2 C_1^7 + 63488A(r)^4 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^2 C_1^6 \\
& - 49152(A(r)^3 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^2 C_1^5 + 8192A(r)^6 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^2 C_1^8 + 29952 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^4 \\
& r^2 C_1^4 + 14336A(r)^3 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^3 r C_1^6 - 92160A(r) \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^4 r^2 C_1^5 - 16384A(r)^2 \\
& \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^3 r C_1^5 + 6144A(r) \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^3 r C_1^4 - 43008A(r)^3 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^4 r^2 C_1^7 \\
& - 4096A(r)^4 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^3 r C_1^7 + 98560(A(r)^2 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^4 r^2 C_1^6 + 6912A(r)^4 \\
& \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^4 r^2 C_1^8 - 8192 \left(\frac{d}{2dr^2 A(r)} \right) A(r)^5 \left(\frac{d}{dr}A(r)^2 r^2 C_1^8 + 4096 \left(\frac{d}{2} dr^2 A(r) \right) \right. \\
& A(r)^6 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right) r C_1^8 + 4096 \left(\frac{d}{2} dr^2 A(r) \right) A(r)^2 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right) r C_1^4 - 16384 \\
& \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) (A(r)^5 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right) r C_1^7 - 16384 \left(\frac{d}{2} dr^2 A(r) \right) A(r)^3 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right) r C_1^5 \\
& - 24576 \left(\frac{d}{2} dr^2 A(r) \right) A(r) \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^2 r^2 C_1^4 - 89088 \left(\frac{d}{2dr^2 A(r)} \right) A(r)^3 \\
& \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^2 r^2 C_1^6 + 24576 \left(\frac{d}{2} dr^2 A(r) \right) A(r)^4 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right) r C_1^6 + 77824 \\
& \left(\frac{d}{2} dr^2 A(r) \right) A(r)^2 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^2 r^2 C_1^5 - 20480 \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right)^2 A(r)^3 r^2 C_1^5 + 3072 \\
& \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right)^2 A(r)^6 r^2 C_1^8 - 14336 \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right)^2 A(r)^5 r^2 C_1^7 + 25600 \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right)^2 \\
& A(r)^4 r^2 C_1^6 + 6144 \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right)^2 A(r)^2 r^2 C_1^4 + 44032 \left(\frac{d^2}{dr^2} A(r) \right) A(r)^4 \left(\frac{d}{dr}A(r) \right)^2
\end{aligned}$$

$$r^2 C_1^7 r^2 C_1^2 \Big]. \tag{E.3}$$

Referências

- [1] ERSOY, Okan K. *Diffraction, fourier optics, and imaging*. Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2007.
- [2] ZILIO, Sergio Carlos. *Óptica Moderna: Fundamentos e Aplicações*. São Paulo: Instituto de Física de São Paulo, 2009. Disponível em: <http://www.fotonica.ifsc.usp.br/ebook/book1/Optica-Moderna.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2017.
- [3] RAYT JR, William H.; BUCK, John A. *Engineerinnng electromagnetics*. 6th ed. Books, McGraw-Hill Education, N.Y., 2011, p.608.
- [4] GRIFFITHS, David J. *Introdution to electrodynamicics*. - 3rd ed. Books, Upper Saddle, N.J. prentice Hall, 1999.
- [5] REITZ, John R.; MILFORD, Frederick J.; CHRISTY, Robert W. *Fundamentos da teoria eletromagnética*. 3.ed. Livro, Rio de Janeiro,2982.
- [6] WOLSKI, Andrzej. *Theory of Electromagnetic fields*. arXiv:1111.4354v2 [physics.acc-ph], 2014.
- [7] MACHADO, Kleber D. *Teoria do eletromagnetismo*. vol.3, Editora UEPG, 2006, 1100 p.
- [8] BORN, Max; WOLF, Emil. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7th ed. Books, [S.l.]: Cambridge University Press, 1970.
- [9] LEHNER,Günter. *Electromagnetic Field Theory for Engineers and Physicists*. 1st ed. Books, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010. p.659.
- [10] SOPHOCLES J. Orfanidis. *Electromagnetic Waves and Antenas*. 1st ed. Books, Department of Electrical and Computer Engineering-Rutgers University, 2016. p.630. Available in: www.ece.rutgers.edu/orfanidi/ewa.
- [11] KO-FAN TSAI,Shun Chun. *A Method To Calculate Arbitrary Linear Polarized Laser Beam Evolutions In GRIN Lenses*. Proceedings Volume 8637, Complex Light and Optical Forces VII; 86370N. SPIE OPTO, San Francisco, California, United States, 2013. Available in: <https://doi.org/10.1117/12.2001478>.

- [12] MAHAJAN, Virendra N. *Fundamentals of Geometrical Optics*. SPIE–The International Society for Optical Engineering, Bellingham, Washington USA, 2014. p.472.
- [13] RÖMER, Hartmann. *Theoretical Optics: An Introduction*. 2nd ed. Books, Wiley-VCH, 2009. p.388.
- [14] GOMEZ, Reino C.; PÉREZ, M.V.; BAO, C. *Gradient Index Optics*. Springer, New York, 2002. p.241.
- [15] PEATROSS, Justin; WARE, Michael. *Physics of Light and Optics*. Brigham Young University, 2012.
- [16] HECHT, Eugene. *Optics*. 4th ed. Books, Addison-Wesley; 2001. p.680.
- [17] TEICHAMAN, Jeremy; HOLZER, Jenny; BALKO, Bohdan; FISCHER, Brent; BUCKLEY, LEONARD. *Gradient Index Optics at Darpa*. Institute for defense analyses-IDA Document D-5027 log: H 13-001347, 2013. Available in: https://www.ida.org//media/Corporate/Files/Publications/IDA_Documents/STD/D-5027-FINAL.pdf
- [18] MIKIO, Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. 2nd ed. Institute of Physics Publishing, CRC Press, 2003. 596.
- [19] DAS, Anadijiban, DEBENEDICTIS, Andrew. *The General Theory of Relativity: A Mathematical Exposition*. Springer Science, N. Y, 2012. p.678.
- [20] LIMA, Elon Lages. *Variiedades Diferenciáveis*. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
- [21] SYNGE, J. L.; SCHILD, A. *Tensor Calculus*. Dover Publications, 1969. p.336.
- [22] GRON, Oyvind; HERVIK, Sigbjorn. *Einstein's General Theory of Relativity* Springer Science, 2004.
- [23] BOHM, D. *The Special Theory of Relativity*. 1st ed. Books, Routledge, 2006, p.304.
- [24] GAZZINELLI, R. *Teoria da Relatividade Especial*. 2a ed., São Paulo, Editora Blucher, 2009.
- [25] CARROLL, S. M. *Lecture Notes on General Relativity*. gr-qc/9712019V1.
- [26] D'INVERNO, Ray. *Introducing Einstein's Relativity*. United States: Oxford University Press, New York, 1999.
- [27] SABATTA, Venzo; GASPERINI, Maurizio. *Introduction to Gravitation*. 1st ed. Books, Singapore: World Scientific, 1986. p.350.

- [28] PETER K. S. Dunsby, *An introduction to Tensors and Relativity*. Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town, South Africa, 2000.
- [29] HARTLE, James B; HARTLE, J.B. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. San Francisco, EUA: Addison Wesley, 2003. p.656.
- [30] WALD, Robert M. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984. p.491.
- [31] MISNER, Charles W.; THORNE, Kip. S.; WHEELER, John A. *Gravitation*. W.H Freeman and Company, New York, 1973.
- [32] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Relativity. In: *Fundamentals of Physics*. 9a ed. United States of America: John Wiley & Sons, Inc, 2011.
- [33] JANSSEN, Bert *Teoria da Relatividade General*. Universidad de Granada, Available in: <https://www.ugr.es/~bjanssen/text/BertJanssen-RelatividadGeneral.pdf>.
- [34] SOARES, D. *Os fundamentos físicos-matemáticos da cosmologia relativista*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v.35, no.3, 3302, set. 2013.
- [35] UGAROV, V. A. *Special Theory of Relativity*. Mir Publishers, 1979.
- [36] CHENG, Ta-Pei. *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction*. 2nd ed. books, Oxford University Press, 2010. p.456.
- [37] SCHUTZ, Bernard F. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2009. p.393.
- [38] STRAUMANN, Norbert. *The History of the cosmological constant problem*. arXiv:gr-qc/0208027v1, 2002.
- [39] BARROCAS, Guilherme Ribeiro Gonçalves. *Curvas de rotação de galáxias LSB em aproximação quase-newtoniana da Teoria da Relatividade Geral*. Dissertação (Mestrado em Física Aplicada)- Instituto Latino Americano de ciências da vida e da Natureza, Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2018.
- [40] BECKER, Richard. *Electromagnetic Fields and Interactions*. Dover Publications, 1982.
- [41] MÖLLER, Christian. *The Theory of Relativity*. Oxford: Clarendon Press, 1972.
- [42] WHITTAKER, Edmund T. *A History of the Theories of Aether and Electricity*. Forgotten Books, 2016.

- [43] JACKSON, John David. *Classical Eletrodynamics*. 2nd. ed. Books, New.York: John Wiley, 1975.
- [44] GASPERINI, Maurizio. *Theory of Gravitational Interactions*. 2nd ed. New.York:Springer; 2017. p.373.
- [45] DALARSSON, Mirjana; DALARSSON, Nils. *Tensors, Relativity, and Cosmology*. 1st ed., Academic Press, 2005.
- [46] HUGHSTON L. P.; TOD, K. P. *An Introduction to General Relativity*. 1st. ed., Cambridge University Press, 1990.
- [47] REYDER, Lewis. *Introduction to General Relativity*. 1st. ed., Cambridge University Press, 2009.
- [48] RINDLER, Wolfgang. *Essential Relativity: Special, General and Cosmological*. 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1986.
- [49] HOJMAN, Sergio A. *Electromagnetic and Gravitational Interactions of Spherical Relativistic*. Top, Ph.D. thesis, Princeton University, 1975 (unpublished).
- [50] ASENJO, Felipe A.; HOJMAN, Sergio A. *Do electromagnetic waves always propagate along null geodesics?*. arXiv:1608.06572 (2016).
- [51] DARRIGOL, Oliver. *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. 1st ed., New York: Oxford University Press, 2000.
- [52] WU Xue-jun; XU Chong-Ming *Null Geodesic Equation Equivalent To the Geometric Optics Equation*. Communications in Theoretical Physics, 1988. vol.9, no. 1, p. 119-125.
- [53] ALIEV, I. N; FOMIN, I. V.; SAMEDOVA, Z. A. *OPTICAL-MECHANICAL ANALOGY OF THE GRAVITATIONAL FIELD*. Bulletin of MGOU. Series: Physics and Mathematics / 2017 ?4. p. 55-66. Available in:<https://vestnik-mgou.ru/Articles/Doc/11923>.
- [54] BRIZARD, Alain J. *An Introduction To Lagrangian Mechanics*. World Scientific Publishing Company, 2008.
- [55] CABRAL, Luís A. *Geometrical invariants, conserved currents and new symmetries in a covariant phase-space dynamics*. In: 5th INTERNATIONAL SCHOOL ON FIELD THEORY AND GRAVITATION, 20., 2009. Available in: <http://pos.sissa.it/archive/conferences/081/075/ISFTG075.pdf>.
- [56] MARION, Jerry; THORNTON, Stephen. . *Some Methods in the Calculus of Variations*. 5th ed. Books, In: Classical Dynamics of Particles and Systems . Thomson Books/Cole, USA.

- [57] CABRAL, Luís A; CAPISTRANO, Abraão J. *Conserved Quantities and Dualities for Particles in Curved Space-Time*. International Journal of Modern Physics E, vol.20, p. 188, (2011). Disponível em: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218301311040785>. Acesso em: 10 mar.2019.
- [58] SANTILLAN, Osvaldo P. *Killing-Yano tensors and some applications*. arXiv:1108.0149v2, 2011.
- [59] HANSEN, Dennis. *Killing-Yano tensors* The Niels Bohr Institute University of Copenhagen. Available in: <http://www.nbi.dk/obers/MScPhDfiles/KillingYanoProjectDennisfinal.pdf>
- [60] CARTER, B. *Hamilton-Jacobi and schrödinger of Einstein's equations*. Commun.Math.Phys,1968. no.4, 280-310.
- [61] COLLINSON, C.D. *On the relationship between Killing tensors and Killing-Yano tensors*. International Journal of Theoretical Physics, 1976. v.15, p.311-314.
- [62] SOMMERS, P. *On Killing Tensors and constants of motion* Journal of Mathematical Physics 14, 787 (1973). Available in: <https://doi.org/10.1063/1.1666395>.
- [63] CHERVONYI, Yuri; LUNIN, Oleg. *Killing(-Yano) Tensors in String Theory*. Journal of High Energy Physics, 2015. vol.09, p.182. Available in: <http://arxiv.org/pdf/1505.06154v3.pdf>.
- [64] KRTOUS, Pavel; KUBIZNAK, David; PAGE, Don N.; FROLOV, Valeri P. *Killing-Yano Tensors, Rank-2 Killing Tensors, and Conserved Quantities in Higher Dimensions*. arXiv:help-th/0612029v1, 2006.
- [65] LUCIZANI, A. C; CABRAL, L. A; SEIDEL, P. T; CAPISTRANO, A.J. *Degenerate metrics on a dual geometry of spherically symmetric space-time*. International Conference on Black Holes as Cosmic Batteries: UHECRs and Multimessenger Astronomy (BHCB2018). Available in: <https://pos.sissa.it/329/003>.