Ministério da Educação
Universidade Federal da Integração Latino-Americana
Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território
Centro Interdisciplinar de Tecnologia e Infraestrutura
Engenharia Civil de Infraestrutura

DIMENSIONAMENTO DE AMORTECEDORES DE MASSA SINTONIZADOS PARA LAJES MISTAS DE CONCRETO/PRFV

ABEL BANI SOSA VILLALBA

Foz do Iguaçu, PR
Março de 2025

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Ministério da Educação
Universidade Federal da Integração Latino-Americana
Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território
Centro Interdisciplinar de Tecnologia e Infraestrutura
Engenharia Civil de Infraestrutura

DIMENSIONAMENTO DE AMORTECEDORES DE MASSA SINTONIZADOS PARA LAJES MISTAS DE CONCRETO/PRFV

ABEL BANI SOSA VILLALBA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Curso de Engenharia Civil de Infraestrutura da UNILA, como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Junges

Foz do Iguaçu, PR
Março de 2025

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

ABEL BANI SOSA VILLALBA

DIMENSIONAMENTO DE AMORTECEDORES DE MASSA SINTONIZADOS PARA LALES MISTAS DE CONCRETO/PRFV

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Curso de Engenharia Civil de Infraestrutura da UNILA, como parte dos requisitos para obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Paulo Junges
UNILA

Prof. Dr. André Jecomel Torii
UNILA

Prof. Dr. Ulises Bobadilla Guadalupe
UNILA

Foz do Iguaçu, 10 de março de 2025.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, meu refúgio e sustento durante todo este processo, em quem depositei minha confiança.

À minha família pelo constante apoio e motivação, meus pais German e Blanca Lida e minhas irmãs Ana e Sara.

Aos meus amigos, que estiveram ao meu lado nos momentos de desafios e conquistas. Pela companhia, pelas palavras de incentivo e pelos momentos de descontração que tornaram essa jornada mais leve e especial. Agradeço pelo apoio incondicional, pela paciência nos momentos difíceis e por celebrarem comigo cada pequena vitória. Sem vocês, esse caminho teria sido muito mais árduo. Minha gratidão eterna por essa amizade que fez toda a diferença.

A meu orientador, professor Paulo Junges, por sua dedicação, paciência e disponibilidade. Sou imensamente grato pela sua orientação, pelo incentivo e pela confiança depositada em mim, pelo compartilhamento generoso de seu conhecimento, sempre com dedicação e apoio constantes ao longo dessa jornada.

Aos membros da banca avaliadora, Prof. André e Prof. Ulises, minha sincera gratidão pela disponibilidade, pelas valiosas sugestões e pelas considerações que contribuíram significativamente para o aprimoramento deste trabalho.

Aos meus professores da UNILA, minha sincera gratidão pelo conhecimento compartilhado, pela dedicação ao ensino e pelo incentivo ao pensamento crítico. Cada aula, orientação e conselho foram fundamentais para minha formação, contribuindo não apenas para o desenvolvimento acadêmico, mas também para meu crescimento pessoal.

Sou especialmente grato à Prof. Mara pelo acolhimento e pela proximidade ao longo da minha graduação e ao Prof. Aref, Prof. Edna e Prof. Noé pelo comprometimento em guiar e inspirar seus alunos, contribuindo para que essa caminhada, apesar dos desafios, fosse uma experiência mais valiosa.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

"O coração do homem planeja o seu caminho, mas o Senhor lhe dirige os passos."

Provérbios 16:9

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

RESUMO

Uma laje mista de concreto e perfis de Plásticos Reforçados com Fibra de Vidro (PRFV) é uma solução inovadora que combina as vantagens estruturais do concreto com as propriedades específicas dos PRFV. Estas estruturas são reconhecidas por sua leveza, alta resistência à corrosão e baixa manutenção, tornando-as uma opção vantajosa em termos de durabilidade e custo-benefício. No entanto, tendem a apresentar maior flexibilidade e menor rigidez em comparação com materiais tradicionais, como o aço, o que pode levar a vibrações consideráveis quando expostas a atividades humanas. Este estudo teve por objetivo dimensionar Amortecedores de Massa Sintonizados (AMS) para melhorar o desempenho dinâmico de um sistema de laje mista e perfis de PRFV, proposto por pesquisadores da Universidade Federal de Santa Catarina, reduzindo as vibrações significativas quando submetidas a atividades humanas. O dimensionamento dos AMS foi realizado modelando a laje mista como viga, utilizando-se o modelo finito de viga de Euler-Bernoulli, o qual leva em consideração dois graus de liberdade por nó. Além da solução algébrica, encontrada na literatura, para definir os parâmetros dos AMS, foi aplicado também o *Firefly Algorithm*, que é uma técnica de otimização amplamente utilizada. A incorporação dos AMS melhorou o desempenho dinâmico do sistema de laje estudado, resultando em reduções de amplitude entre 35% e 41%. Embora o sistema otimizado não tenha atingido as faixas restritivas de conforto humano definidas pelas curvas de referência da ISO 10137 (2007) e de Goldman (1948), os AMS contribuíram de maneira consistente para a atenuação das respostas vibratórias, reduzindo significativamente as excitações. Além disso, a utilização de múltiplos AMS na mesma posição com maiores valores de razão de massa (μ) proporcionou melhores resultados, embora não se teve ganhos expressivos em relação ao uso de um único AMS.

Palavras-chave: Laje Mista. Amortecedores de Massa Sintonizados. Elemento Finito de Viga. Conforto. Vibrações.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

ABSTRACT

A composite slab made of concrete and Glass Fiber Reinforced Polymer (GFRP) profiles represents an innovative structural solution that combines the mechanical advantages of concrete with the specific properties of GFRP materials. These systems are known for their light weight, high corrosion resistance, and low maintenance requirements, making them a cost-effective and durable option. However, they tend to exhibit greater flexibility and lower stiffness compared to traditional materials such as steel, which can lead to significant vibration levels when subjected to human-induced activities. This study aimed to design Tuned Mass Dampers (TMDs) to enhance the dynamic performance of a composite slab system with GFRP profiles, previously proposed by researchers at the Federal University of Santa Catarina, by mitigating the substantial vibrations induced by human activity. The TMD design was carried out by modeling the composite slab as a beam using the Euler–Bernoulli finite beam model, which considers two degrees of freedom per node. In addition to the analytical solution found in the literature for defining TMD parameters, the Firefly Algorithm—an optimization technique widely used in engineering applications—was also implemented. The incorporation of TMDs improved the dynamic behavior of the studied slab system, yielding amplitude reductions between 35% and 41%. Although the optimized system did not reach the restrictive human-comfort limits established by the ISO 10137 (2007) and Goldman (1948) reference curves, the TMDs consistently contributed to attenuating vibratory responses, significantly reducing the effects of external excitations. Furthermore, employing multiple TMDs at the same location with higher mass ratios (μ) provided improved results, although no substantial gains were observed compared to the use of a single TMD.

Keywords: Composite Slab, Tuned Mass Dampers, Finite Beam Element, Comfort, Vibrations.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Millennium Footbridge. 13
Figura 2 – Amortecedores de massa utilizados na Millennium Footbridge 15
Figura 3 - Croquis dos AMS de Varela (2004). 16
Figura 4 – Peças para montagem de um AMS. 17
Figura 5 – AMS instalados na estrutura. 17
Figura 6 - Escala de Goldman para medir a sensibilidade humana às vibrações. 20
Figura 7 - Curvas para o nível de vibrações na direção vertical para passarelas 21
Figura 8 - Laje mista de concreto/PRFV desenvolvida na UFSC. 23
Figura 9 - Função representativa da força do caminhar. 26
Figura 10 - Elemento finito de viga de dois nós. 27
Figura 11 – Laje mista com um AMS 30
Figura 12 – Laje mista com três AMS 30
Figura 13 – Laje mista com cinco AMS 31
Figura 14 - Fluxograma representativo da otimização da laje 35
Figura 15 - Resposta da estrutura ao caminhar experimental. 44
Figura 16 - Resposta da estrutura ao caminhar numérico. 44
Figura 17 – Aceleração e espectro sem AMS 45
Figura 18 – Velocidade e deslocamento sem AMS 45
Figura 19 – Comparativo da resposta da aceleração 46
Figura 20 – Comparativo da resposta da velocidade 47
Figura 21 – Comparativo da resposta do deslocamento 47
Figura 22 – Gráfico comparativo das reduções com modelos teóricos 50
Figura 23 – Gráfico comparativo das reduções com FA 52
Figura 24 – Aceleração ao longo do tempo com Den Hartog 56
Figura 25 – Velocidade ao longo do tempo com Den Hartog 56
Figura 26 – Deslocamento ao longo do tempo com Den Hartog 57
Figura 27 – Aceleração ao longo do tempo com Warburton 57
Figura 28 – Velocidade ao longo do tempo com Warburton 58
Figura 29 – Deslocamento ao longo do tempo com Warburton 58
Figura 30 – Aceleração ao longo do tempo com Krenk 59
Figura 31 – Velocidade ao longo do tempo com Krenk 59

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 32 – Deslocamento ao longo do tempo com Krenk.....60
Figura 33 – Aceleração ao longo do tempo com FA para 1 AMS.....60
Figura 34 – Velocidade ao longo do tempo com FA para 1 AMS.....61
Figura 35 – Deslocamento ao longo do tempo com FA para 1 AMS.....61
Figura 36 – Aceleração ao longo do tempo com FA para 3 AMS.....62
Figura 37 – Velocidade ao longo do tempo com FA para 3 AMS.....62
Figura 38 – Deslocamento ao longo do tempo com FA para 3 AMS.....63
Figura 39 – Aceleração ao longo do tempo com FA para 5 AMS.....63
Figura 40 – Velocidade ao longo do tempo com FA para 5 AMS.....64
Figura 41 – Deslocamento ao longo do tempo com FA para 5 AMS.....64

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação de vibrações com a aceleração de pico 19
Tabela 2 – Módulos de elasticidade longitudinal e transversal do PRFV. 24
Tabela 3 – Modelo algébrico-teórico ótimo dos parâmetros de projeto. 34
Tabela 4 – Parâmetros do método matemático. 41
Tabela 5 – Características dinâmicas da laje mista considerando apenas o efeito de flexão. 44
Tabela 6 – Principais características com o modelo de viga 46
Tabela 7 – Parâmetros ótimos conforme Den Hartog, Warburton e Krenk. 49
Tabela 8 – Reduções de vibração com o modelo de Den Hartog. 49
Tabela 9 – Reduções de vibração com o modelo de Warburton. 49
Tabela 10 – Reduções de vibração com o modelo de Krenk. 50
Tabela 11 – Parâmetros ótimos obtidos com a otimização FA. 51
Tabela 12 – Comparativo das reduções de vibração com a otimização FA. 52
Tabela 13 – Comparativo da sensibilidade com os modelos teóricos. 53
Tabela 14 – Comparativo da sensibilidade com a otimização FA. 54

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA 8
2 OBJETIVOS 11
2.1 Objetivo Geral 11
2.2 Objetivos Específicos 11
3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 12
3.1 Estudo do Caminhar Humano 12
3.2 Vibração Induzida por Atividade Humana 12
3.2.1 Incorporação dos AMS 14
3.3 Sensibilidade Segundo as Normas 18
4 MéTODO 23
4.1 Descrição da Laje Mista 23
4.2 Modelagem do Caminhar 24
4.3 Análise de Vibrações da Laje 27
4.3.1 Modificação das matrizes para considerar os AMS 29
4.4 Análise e Dimensionamento de Vibrações com AMS 33
4.4.1 Rotina de programação da laje mista 36
4.4.2 Descrição da função do caminhar 39
4.4.3 Rotina de otimização do Firefly Algorithm 40
5 RESULTADOS 43
5.1 Análise Dinâmica da Laje Mista com Modelo de Viga 43
5.2 Parâmetros Ótimos 48
5.3 Sensibilidade da Laje Mista com Parâmetros Ótimos 53
5.4 Comparação dos Resultados Ótimos 55
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 65
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 68
Anexos 72
ANEXO A – *Firefly Algorithm* original em MATLAB 72

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

ANEXO B – *Firefly Algorithm* adaptado para a otimização da aceleração RMS 76

ANEXO C – Função Passo. Modelagem do Caminhar 81

ANEXO D – Função Objetivo. Modelo de Viga para 1 AMS 82

ANEXO E – Função Objetivo. Modelo de Viga para 5 AMS (MAMS) 91

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

1 INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

Uma laje mista de concreto e PRFV (Plásticos Reforçados com Fibra de Vidro) é uma solução inovadora que combina as vantagens estruturais do concreto com as propriedades específicas dos PRFV. Materiais compósitos, oferecem várias vantagens em comparação com materiais tradicionais. Entre as principais vantagens estão a leveza, que reduz o peso das estruturas melhorando a eficiência e desempenho geral (SILVA, 2023). Além disso, esses materiais combinam alta resistência e durabilidade, pudendo ser moldáveis para *designs* específicos, e frequentemente têm um custo de manutenção mais baixo (SANTOS; OLIVEIRA, 2023), tendo bom desempenho estrutural inclusive em locais com agressividade ambiental (GARCIA; PINHEIRO, 2021).

A Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), em sua busca por inovações em sistemas estruturais, tem desenvolvido uma laje mista inovadora composta por uma camada de concreto reforçado com fibra aplicada sobre perfis em "I" fabricados em PRFV destinado ao uso em passarelas (JUNGES, 2010).

Segundo Junges (2010), embora as lajes mistas de concreto e PRFV ofereçam várias vantagens significativas, também é importante considerar seu comportamento dinâmico, tendo em vista a flexibilidade e esbeltez que podem apresentar. Isto leva a considerar não somente a verificação da segurança, senão também o conforto da laje sob vibrações, principalmente aquelas produzidas por atividades humanas.

Em ambientes residenciais, comerciais e de escritórios, um ambiente estável e livre de vibrações é essencial para o bem-estar dos ocupantes. Vibrações excessivas em edifícios podem causar desconforto físico e psicológico aos ocupantes. Sensações de tremores ou instabilidade podem levar a desconforto, ansiedade e até enjoo, afetando negativamente a qualidade de vida e a produtividade (HANSEN; SNYDER, 1997; ISO 2631-1:1997).

Os *Tuned Mass Dampers* (TMD) ou Amortecedores de Massa Sintonizada (AMS), são dispositivos passivos projetados para reduzir a amplitude de vibrações em estruturas, como edifícios, pontes, torres e passarelas. O princípio básico de funcionamento de um AMS envolve a adição de uma massa secundária à estrutura principal, que é conectada através de molas e amortecedores. A frequência natural do AMS é ajustada (ou 'sintonizada') para coincidir com a frequência de ressonância da

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

estrutura, de modo que, quando a estrutura é excitada, a massa secundária do AMS oscila em oposição às vibrações da estrutura, dissipando a energia vibratória (SMITH; WILLFORD, 2007).

A eficácia de um AMS depende de sua capacidade de dissipar energia. O ajuste preciso da frequência do AMS permite que ele absorva grande parte da energia vibratória, reduzindo significativamente a resposta dinâmica da estrutura. De modo geral, a redução das vibrações pode chegar a 30-40%, dependendo da configuração do sistema e das características da estrutura (KAREEM; KLINE, 1995).

Uma das estruturas mais conhecidas que utilizam um sistema AMS é o edifício Taipei 101, localizado em Taiwan, um dos edifícios mais altos do mundo. O AMS instalado nesse edifício possui uma massa de 660 toneladas suspensa entre o 87º e 91º andar. Para edificações de grande altura, o AMS é essencial para proteger a estrutura contra ventos fortes e terremotos, reduzindo a oscilação do edifício em até 40% (SMITH; WILLFORD, 2007).

Outros exemplos importantes de aplicação são a arranha-céu *One Vanderbilt* em Nova York, inaugurado em 2020. Este edifício de 427 metros utiliza um AMS para mitigar as vibrações causadas por ventos e outras forças dinâmicas, garantindo conforto e segurança aos ocupantes (SUMMIT ONE VANDERBILT, 2025). A *John Hancock Tower* em Boston também utiliza AMS como parte de suas estratégias de controle de vibrações (CAMPBELL, 1995).

A *London Millennium Footbridge*, um exemplo clássico, incorporou AMS após a sua abertura no ano 2000, quando oscilações inesperadas causadas pela marcha dos pedestres exigiram intervenções para estabilizar a estrutura (SMITH; WILLFORD, 2007). Esse tipo de intervenção demonstra como o comportamento dinâmico de passarelas pode ser significativamente influenciado por atividades humanas.

Esse fenômeno não se limita a grandes obras icônicas. Em diferentes tipos de passarelas e sistemas estruturais, o impacto das vibrações induzidas pelo tráfego de pedestres pode comprometer tanto o conforto dos usuários quanto a durabilidade da estrutura. A necessidade de mitigar essas vibrações se torna ainda mais relevante em sistemas que combinam materiais inovadores.

Nesse contexto, o foco principal desta pesquisa visa o dimensionamento de AMS que podem ser implementados para reduzir as vibrações indesejadas, para melhorar o conforto dos pedestres, aumentar a segurança estrutural e prolongar a vida útil de

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

um sistema estrutural alternativo de laje mista de concreto e perfis de PRFV para tabuleiros de passarelas.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é dimensionar Amortecedores de Massa Sintonizados (AMS) para redução das vibrações, sob ação de solicitações dinâmicas produzidas por pessoas, de um sistema de laje mista de concreto e perfis pultrudados de PRFV.

2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

a) Entender o desempenho estrutural de uma laje mista composta de concreto e perfis pultrudados de PRFV.
b) Avaliar a redução de vibrações considerando uma solução algébrica teórica para um AMS considerando o modelo de viga de Euler-Bernoulli.
c) Avaliar a redução de vibrações considerando otimização computacional por meio de algoritmos meta-heurísticos, como o *Firefly*, para vários AMS.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 Estudo do Caminhar Humano

A caminhada é um movimento periódico e, como tal, as forças resultantes da interação entre o corpo e o solo podem ser modeladas utilizando séries de Fourier. Diversos pesquisadores, como Rainer *et al*. (1988), Battista e Roitman (1990), Ebrahimpour *et al*. (1989), e Kerr (1998), têm investigado as amplitudes de força associadas aos harmônicos da série de Fourier no contexto da caminhada humana.

Estes estudos geralmente focam em como as forças de reação do solo variam ao longo do ciclo de marcha. Os coeficientes da série de Fourier são obtidos experimentalmente e refletem a magnitude das forças nos diferentes harmônicos. Os primeiros harmônicos geralmente capturam a maior parte da energia do movimento, enquanto harmônicos mais altos capturam detalhes mais finos do movimento (BATTISTA; ROITMAN, 1990; EBRAHIMPOUR *et al*., 1989; KERR, 1998; RAINER *et al*., 1988).

Silva *et al*. (2007) apresentam uma metodologia de projeto para melhor avaliar o conforto e a segurança dos usuários de passarelas. Para isso os autores apresentam quatro modelos desenvolvidos para incorporar os efeitos dinâmicos induzidos por atividades humanas na resposta dinâmica em passarelas. As forças oriundas do caminhar empregadas nesses modelos são baseadas em série de Fourier e não apresentam grande refinamento.

Nesse contexto, Figueiredo (2005) já havia ensaiado um avanço ao propor uma modelagem mais realista da força de caminhada, incluindo o efeito do impacto dos calcanhares ("*heel-strike*"). Posteriormente, esse desenvolvimento foi consolidado em Figueiredo *et al*. (2008), onde os mesmos modelos de Silva *et al*. (2007) são utilizados em conjunto com uma melhor discretização da força do caminhar, originalmente sugerida por Varela (2004).

3.2 Vibração Induzida por Atividade Humana

A vibração de passarelas induzida por atividades humanas, como caminhar, correr ou saltar, tem se tornado uma preocupação significativa na engenharia civil,

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

especialmente com o aumento da construção de estruturas mais leves e esbeltas. Este problema é central no Estado Limite de Vibrações, onde o conforto dos usuários e a integridade estrutural são os principais pontos de atenção (BACHMANN; AMMANN, 1987).

As passarelas modernas, projetadas para serem esteticamente agradáveis e eficientes em termos de material, muitas vezes apresentam problemas de vibração devido à sua baixa rigidez e massa. Estas vibrações podem ser percebidas pelos usuários, causando desconforto ou, em casos extremos, levando à necessidade de intervenções estruturais. A resposta de uma passarela à excitação induzida por pedestres depende de vários fatores, incluindo as propriedades dinâmicas da estrutura (como frequências naturais e modos de vibração), a distribuição de cargas e as características das forças geradas pela atividade humana (BACHMANN; AMMANN, 1987; DALLARD *et al.*, 2001).

Dallard *et al.* (2001) analisaram o fenômeno de vibração excessiva que ocorreu na *Millennium Footbridge* (**Figura 1)**, pouco depois de sua inauguração. A ponte, que foi projetada como uma estrutura esteticamente arrojada e inovadora, começou a apresentar vibrações laterais significativas quando um grande número de pedestres a atravessava. Este fenômeno, chamado de “excitação sincronizada”, surgiu porque os pedestres, ao tentar manter o equilíbrio na estrutura que oscilava, inconscientemente começaram a sincronizar seus passos com o movimento da ponte, amplificando as vibrações.

Figura 1 - Millennium Footbridge.

Fonte: Meinhardt *et al.* (2017).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

O estudo de Dallard *et al.* (2001) destacou que essa sincronia nas passadas dos pedestres não havia sido prevista nas análises de projeto tradicionais, o que levou à necessidade de intervenções corretivas. Os autores propuseram e implementaram o uso de AMS e Amortecedores Viscosos (AV) para reduzir as vibrações. Essas soluções foram eficazes em estabilizar a estrutura, permitindo que a *Millennium Footbridge* fosse reaberta ao público com segurança.

Živanović; Pavic; Reynolds (2005) discutem as principais fontes de excitação dinâmica em passarelas, enfatizando que a ressonância ocorre quando a frequência natural da passarela coincide com a frequência da excitação induzida por pedestres. Eles desenvolveram modelos matemáticos e experimentais para prever a resposta dinâmica de passarelas, contribuindo significativamente para o entendimento de como essas estruturas podem ser projetadas para minimizar os efeitos adversos da vibração.

Varela e Battista (2011) investigaram o controle de vibrações em uma laje mista projetada para ser utilizada em *Shopping Centers*, utilizando AMS como estratégia de mitigação. O projeto dos AMS foi baseado nas respostas dinâmicas obtidas durante os ensaios experimentais realizados na estrutura, além de estudos paramétricos conduzidos com base na experiência dos autores.

Os autores concluíram que os sistemas passivos baseados em AMS são particularmente eficientes quando há uma coincidência entre uma das componentes harmônicas do caminhar e a frequência natural da estrutura, para a qual o AMS foi sintonizado. Esse achado reforça a importância de um projeto criterioso na definição dos parâmetros do AMS, garantindo que sua atuação seja otimizada para as condições reais de utilização da estrutura. Além disso, o estudo de Varela e Battista (2011) destaca a aplicabilidade dos AMS em edifícios comerciais de grande porte, onde o fluxo contínuo de pedestres pode gerar desconforto vibratório significativo, exigindo soluções eficazes de controle dinâmico.

3.2.1 Incorporação dos AMS

Segundo Meinhardt *et al.* (2017, p. 4), a solução adotada para controlar as vibrações da *Millennium Footbridge* consistiu na instalação de 26 conjuntos de amortecedores voltados para movimentos verticais, cada qual possuindo uma massa

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

efetiva na faixa de 1 a 3 toneladas, o que corresponde a cerca de 3% a 5% da massa modal associada. Além disso, foram implementados quatro conjuntos destinados a atuar na direção lateral, cada um com massa efetiva aproximada de 2,5 toneladas, equivalente a uma razão de massa próxima de 15%. Também diversos modelos de amortecedores verticais foram projetados para atuar sobre modos de vibração situados entre 1,1 Hz e 2,2 Hz, enquanto os dispositivos laterais foram direcionados especificamente para o modo fundamental transversal, cuja frequência é de 0,48 Hz.

Os autores ressaltaram que, o maior desafio do projeto consistiu em integrar esses elementos de controle de vibração ao desenho arquitetônico da ponte, de forma a não comprometer sua estética e, simultaneamente, limitar ao mínimo possível as adições de estruturas metálicas ao tabuleiro.

Figura 2 – Amortecedores de massa utilizados na *Millennium Footbridge*

(a) AMS na direção lateral

(b) AMS atuando verticalmente

Fonte: Meinhardt *et al.* (2017).

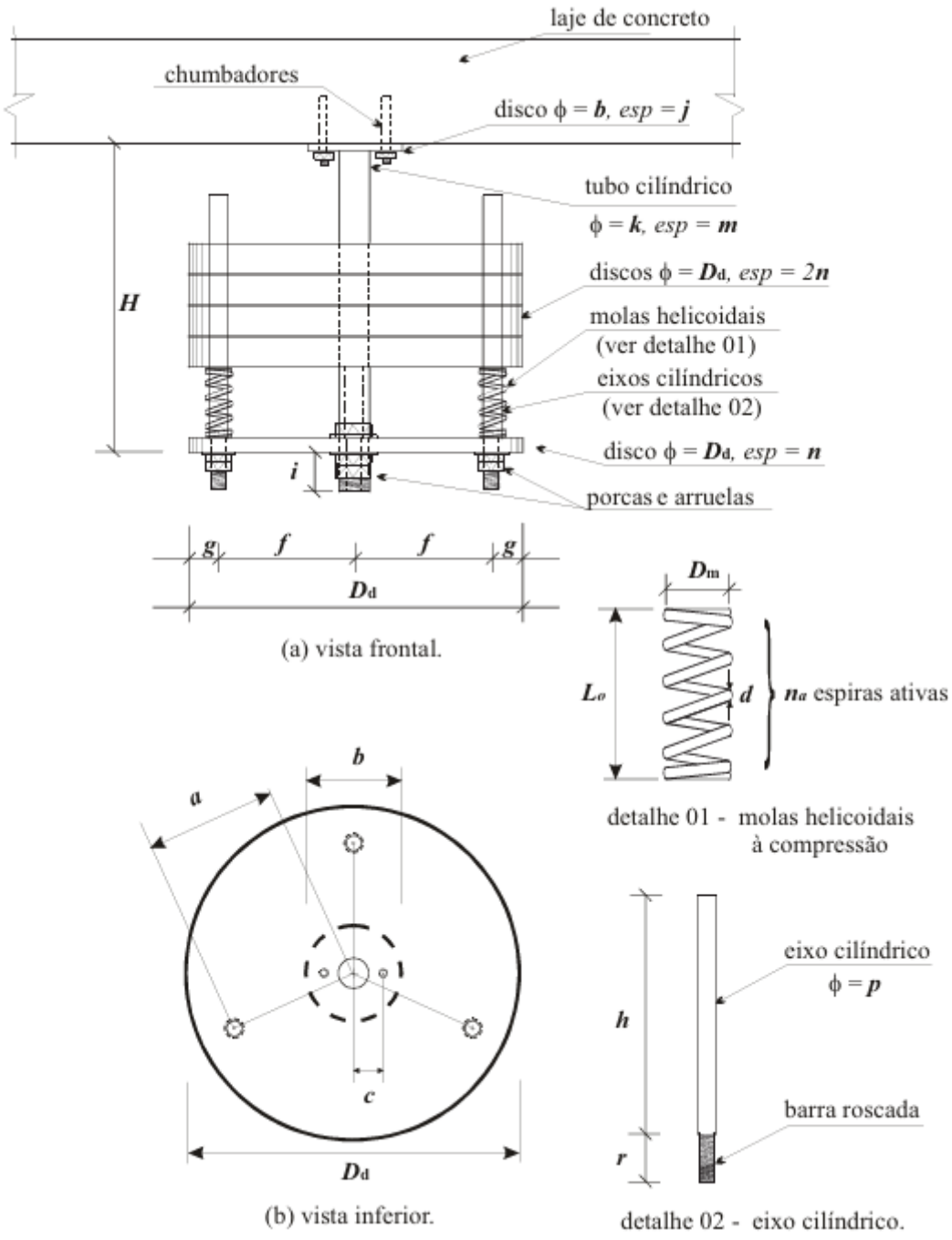
Nesse mesmo sentido, Varela (2004) apresenta dispositivos passivos simples, formados por um sistema massa–mola–amortecedor. Onde a sintonia do dispositivo pode ser ajustada pela variação do comprimento efetivo das molas ou pela alteração da massa, mediante a inclusão ou remoção de discos. Na **Figura 3**, pode-se observar o projeto dos dispositivos mecânicos simples instalados na estrutura e na **Figura 4,** as peças para montagem de um AMS.

O autor instalou dois AMS no centro da laje, conforme mostra-se na **Figura 5**, totalizando 94,4 kg de massa acoplada, com uma taxa média de amortecimento de 1,5%. Varela (2004) descreve que os AMS foram calibrados para atenuar o primeiro modo da estrutura, modo que apresenta as maiores amplitudes de respostas quando

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

a estrutura é excitada pelo caminhar das pessoas, e está na faixa de frequências na qual as pessoas mais sentem as vibrações (entre 4 e 8 Hz).

Figura 3 - Croquis dos AMS de Varela (2004).



Fonte: Varela (2004).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 4 – Peças para montagem de um AMS.

Fonte: Varela (2004).

Figura 5 – AMS instalados na estrutura.

Fonte: Varela (2004).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

3.3 Sensibilidade Segundo as Normas

A percepção humana de vibrações é um aspecto crítico no projeto de estruturas, especialmente em edifícios, passarelas e pisos que podem ser excitados por atividades cotidianas, como o movimento de pessoas. A resposta a vibrações depende de diversos fatores, como a frequência, amplitude, duração e direção da vibração, bem como a sensibilidade individual (THOMSON; DAHLEH, 1998).

De acordo com a ISO 10137 (2007), as pessoas são mais sensíveis a vibrações com frequências entre 1 e 8 Hz, particularmente em superfícies horizontais. Nessas faixas de frequência, vibrações podem ser percebidas com amplitudes relativamente pequenas, o que pode resultar em desconforto para os ocupantes, mesmo que a estrutura permaneça segura. Vibrações acima de 8 Hz tendem a ser percebidas de maneira menos intensa e podem ser toleradas em maiores amplitudes sem causar desconforto.

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2023), os deslocamentos verticais dos pisos devem atender aos limites estabelecidos na Tabela 13.3, a qual trata dos efeitos relacionados à aceitabilidade sensorial. Para o caso específico de vibrações percebidas no piso (categoria “Outro”), o deslocamento a considerar é aquele decorrente das ações acidentais, devendo ser limitado a $\frac{L}{350}$, onde L representa o vão do elemento estrutural. Esse limite tem por objetivo assegurar condições adequadas de conforto ao usuário e restringir a sensação de vibrações excessivas no piso. É importante destacar que esse limite não corresponde ao critério de flecha total previsto no Estado Limite de Serviço de deformações (ELS-F). O ELS-F envolve a avaliação da flecha imediata (devida às cargas permanentes e variáveis aplicadas no instante inicial) e da flecha diferida (resultante dos efeitos de longa duração, como fluência e retração do concreto). Já o limite Tabela 13.3 da norma, refere-se exclusivamente ao Estado Limite de Aceitabilidade Sensorial.

A norma NBR 8800 (ABNT, 2008) estabelece diretrizes para a avaliação simplificada da vibração em pisos, considerando sua frequência fundamental como principal critério. Para qualquer situação, essa frequência não deve ser inferior a 3 Hz. Em ambientes como escritórios e residências, onde há circulação constante de pessoas, a avaliação simplificada recomenda uma frequência mínima de 4 Hz. Já em locais onde ocorrem atividades rítmicas, como academias, salões de dança, ginásios

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

e estádios esportivos, a frequência fundamental deve ser de pelo menos 6 Hz, sendo aumentada para 8 Hz quando a atividade for repetitiva, a fim de evitar desconforto e riscos estruturais.

Embora esses valores limites sejam úteis para uma avaliação inicial, eles não garantem uma solução definitiva para problemas de vibração em pisos. Em projetos que exigem maior precisão, é fundamental que o engenheiro realize análises dinâmicas detalhadas, considerando fatores como o tipo de excitação gerada por atividades humanas, critérios de aceitação para o conforto dos usuários, frequência natural da estrutura, amortecimento modal e o peso efetivo da laje. Como a norma não especifica critérios para essas análises avançadas, cabe ao projetista adotar metodologias apropriadas para garantir a segurança e o desempenho adequado da estrutura (SILVA; PINTO, 2023).

Um critério utilizado para avaliar a sensibilidade humana a vibrações, classificando os níveis de aceleração percebidos pelas pessoas em diferentes faixas de conforto e desconforto é a Escala de Goldman (**Figura 6**). Esta escala é baseada na aceleração de pico (m/s² ou em termos da aceleração da gravidade "g") e na frequência da vibração (Hz), estabelecendo limites que indicam o grau de desconforto experimentado pelos indivíduos em uma estrutura sujeita a vibrações, como lajes de edifícios, passarelas e pontes.

Embora os valores exatos possam variar entre estudos (pois deve-se considerar a aceleração e a frequência), por aproximação a escala se divide conforme mostra a **Tabela 1**:

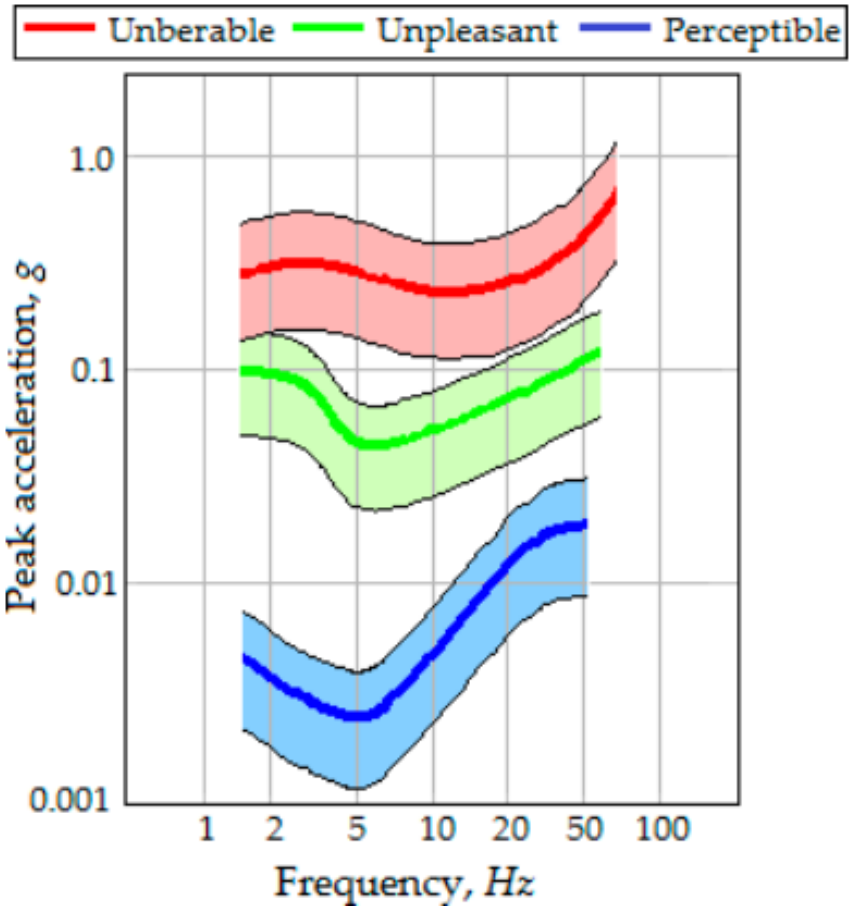
Tabela 1 – Classificação de vibrações com a aceleração de pico

Classificação	Aceleração	Observação
Imperceptível	< 0,002 g	Confortável para a maioria das pessoas
Perceptível	0,002 – 0,02 g	Algumas pessoas podem sentir a vibração, mas sem desconforto
Potencialmente desconfortável	0,02 – 0,05 g	Para parte dos ocupantes.
Desconfortável	0,05 – 0,15 g	Para a maioria das pessoas
Fortemente desconfortável	> 0,15 g	Intolerável para a maioria

Fonte: Autor (2025), adaptado de Goldman (1948).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 6 - Escala de Goldman para medir a sensibilidade humana às vibrações.



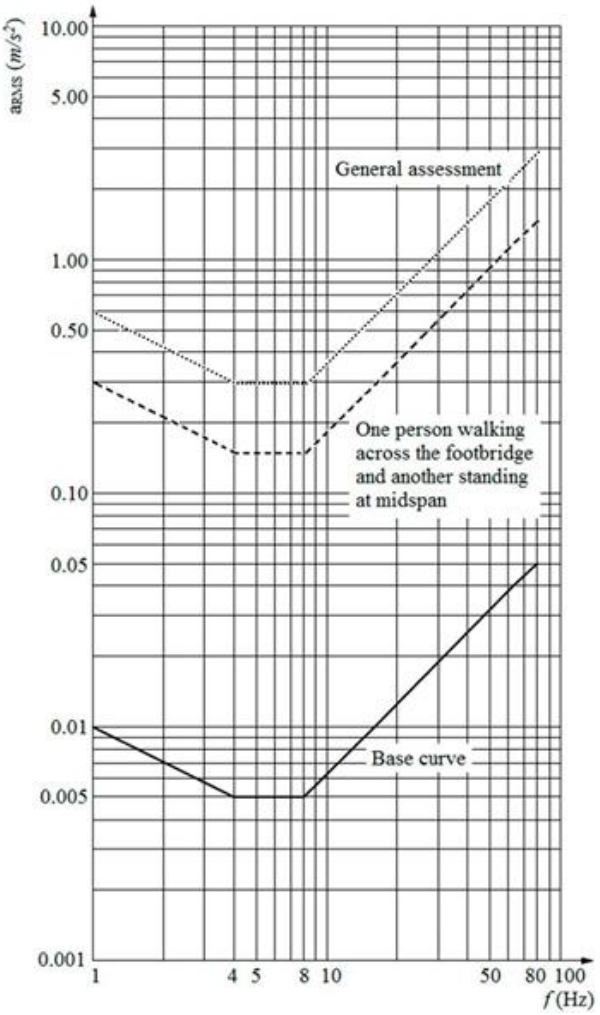
Fonte: Junges (2010), adaptado de Goldman (1948).

Além desses limites, a escala considera que a frequência da vibração também influencia a percepção humana, sendo que vibrações entre 4 Hz e 8 Hz tendem a ser mais desconfortáveis por coincidirem com a frequência natural do corpo humano.

A Escala de Goldman é frequentemente utilizada em conjunto com normas, como a ISO 10137 (2007), que define limites de aceleração e critérios para garantir que ocupantes não experimentem níveis excessivos de desconforto devido a vibrações induzidas por tráfego, máquinas, vento ou atividades humanas, como caminhar. Essa norma apresenta curvas de avaliação baseadas na resposta da estrutura e na sensibilidade humana (**Figura 7**), levando em consideração níveis aceitáveis de aceleração RMS (*Root Mean Square*) obtidos com base na raiz quadrada do erro médio quadrático, para diferentes usos da edificação.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 7 - Curvas para o nível de vibrações na direção vertical para passarelas.



Fonte: ISO10137 (2007).

Os Eurocódigos EN 1990 (CEN, 2002) e EN 1991-2 (CEN, 2003) estabelecem diretrizes baseadas nos seguintes aspectos:

a) Frequência Natural Mínima

Para passarelas, a frequência natural fundamental deve ser:

≥ 3 Hz para vibrações verticais (evitando ressonância com o passo humano, que ocorre entre 1,6 e 2,4 Hz).

≥ 1,5 Hz para vibrações laterais, para evitar fenômenos como o ocorrido na Passarela de Londres (*Millennium Footbridge*, que oscilava lateralmente devido à sincronização dos passos dos pedestres).

b) Aceleração Máxima Permitida (Critério de Conforto)

A aceleração máxima não deve exceder 5% da gravidade (0,05g) para conforto de pedestres.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

O Eurocódigo sugere a utilização de valores da ISO 10137 (2007), dependendo do uso da estrutura (residencial, escritórios, hospitais, etc.).

c) Força Dinâmica Equivalente de Pedestres (Fator de Impacto Dinâmico - β)

O EN 1991-2 define cargas dinâmicas de pedestres com base na cadência da caminhada (1,6–2,4 Hz) e corrida (~3 Hz).

Em passarelas muito flexíveis, pode ser necessário modelar essas cargas com cargas harmônicas periódicas.

d) Controle de Vibração por Amortecimento

O amortecimento estrutural (ξ) geralmente é baixo para passarelas metálicas (~0,5-1,0%).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

4 MÉTODO

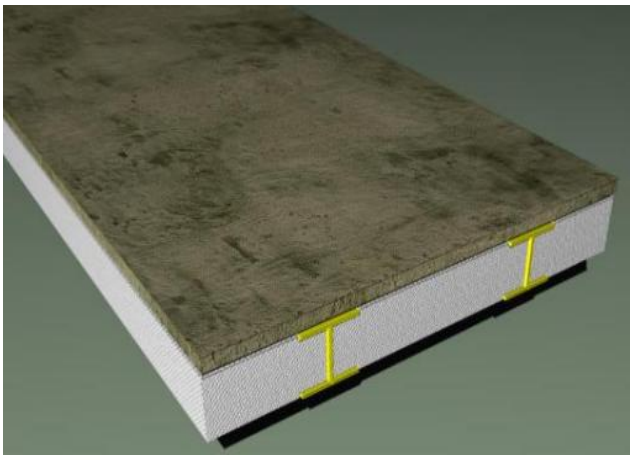
4.1 Descrição da Laje Mista

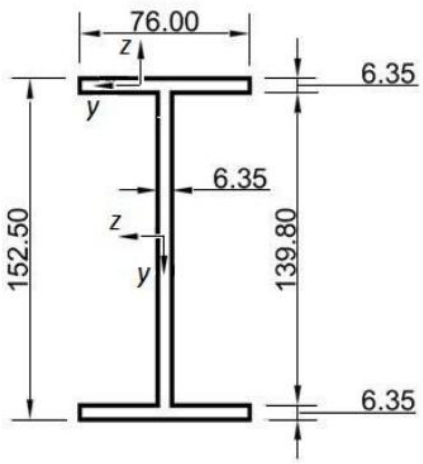
Uma laje mista é um tipo de estrutura, que usa a combinação de dois materiais diferentes, normalmente concreto e aço para otimizar as propriedades mecânicas e a eficiência estrutural (GAMBIHR, 2014). Ultimamente vem-se desenvolvendo os perfis de Plásticos Reforçados com Fibra (PRF) e concreto como outra alternativa para lajes mistas representando uma inovação no campo da engenharia civil, combinando a resistência e durabilidade do concreto com a leveza e resistência à corrosão dos PRF. As normas técnicas, como a NBR 8800 (ABNT, 2008) no Brasil ou a EN 1994 (CEN, 2005) na Europa, fornecem diretrizes específicas para o projeto e dimensionamento de estruturas mistas.

O sistema de laje mista de concreto e perfis pultrudados de Plásticos Reforçados com Fibra de Vidro (PRFV) considerado neste trabalho foi desenvolvido inicialmente na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) em um projeto de pesquisa intitulado *Laje Mista de Concreto e Perfis Pultrudados de PRFV – Aplicação em Tabuleiros de Passarelas* (JUNGES, 2010). A composição desta laje mista conforme descrito por Junges (2010) é dada por uma capa de concreto reforçado com fibras, e dois perfis I de PRF na seção que servem como apoio conforme apresentado na **Figura 8**, onde também se observa as dimensões do perfil pultrudado.

Figura 8 - Laje mista de concreto/PRFV desenvolvida na UFSC.

(a) Laje mista da UFSC (b) Dimensões do perfil pultrudado.





Fonte: Junges (2010).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

As propriedades dos perfis (**Tabela 2**) foram obtidas experimentalmente por meio de ensaios de flexão simples, utilizando uma metodologia baseada na Teoria de Vigas de Timoshenko, proposta por Bank (1989). Uma descrição mais detalhada da metodologia e do procedimento de ensaio pode ser encontrada em La Rovere e Santos Neto (2007).

Tabela 2 – Módulos de elasticidade longitudinal e transversal do PRFV.

Longitudinal	Transversal
26,21 GPa	4,29 GPa

Fonte: Junges (2010)

Este sistema foi desenvolvido para atender tanto aos Estados Limites Últimos (ELU) quanto aos Estados Limites de Serviço (ELS), proporcionando uma alta relação rigidez/peso. Para garantir o desempenho adequado da estrutura, foram adotados critérios baseados em normas internacionais, como a ISO 10137 (2007), que estabelece diretrizes para o conforto humano em estruturas sujeitas a vibrações, e o Eurocódigo EN 1990, que trata de critérios de segurança e desempenho dinâmico. Além disso, a Escala de Goldman foi utilizada para avaliar a aceleração de pico da estrutura em relação ao conforto humano, bem como a ISO 10137 (2007) para aceleração RMS, conforme a **Figura 6** e **7** respectivamente.

4.2 Modelagem do Caminhar

A **Equação 4.1** é uma variação da forma básica da série de Fourier e é usada para representar uma força periódica que tem uma componente estática (constante) e uma série de componentes dinâmicas (os harmônicos) que variam senoidalmente, ao longo do tempo (CHOPRA, 2017; CLOUGH; PENZIEN, 1993).

A modelagem matemática de cargas induzidas por caminhadas e saltos emprega modelos tanto no domínio da frequência como no domínio no tempo. Neste trabalho, considera-se o determinístico no domínio do tempo. A força gerada pelo movimento humano é representada por uma série de Fourier, que considera os primeiros harmônicos para descrever com mais precisão a carga aplicada no tempo e

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

no espaço. A força $F_p(t)$ consiste no peso da pessoa e nos termos harmônicos, que dependem dos coeficientes dinâmicos, frequência do passo e ângulos de fase.

$$F_p(t) = G_p + \sum_{i=1}^{n} G_p \alpha_i \operatorname{sen}(2\pi i f_p t - \phi_i) \tag{4.1}$$

Nesta equação:

G_p é a componente estática da força, correspondente ao peso da pessoa ou objeto.

α_i são os coeficientes que indicam a amplitude dos harmônicos.

f_p é a frequência fundamental da força periódica.

t é o tempo.

ϕ_i são os ângulos de fase dos harmônicos.

n é o número de harmônicos considerados.

Varela (2004) propôs uma modificação do modelo original, para descrever as cargas geradas durante a caminhada, detalhando o comportamento em diferentes intervalos do período de passo T_p. Essa abordagem inclui um fator de amplificação devido ao impacto do calcanhar e considera os coeficientes αi, obtidos por meio de funções de ajuste polinomial. Os valores dos coeficientes foram derivados de dados experimentais, enquanto os ângulos de fase foram definidos como múltiplos de π/2, permitindo uma descrição mais realista das cargas.

O modelo apresentado nas **Equações 4.2** a **4.5** pode representar com precisão as cargas induzidas. A **Figura 9** apresenta um gráfico da função proposta para a força do caminhar de Varela (2004).

$$F_P(t) = \begin{cases} \left(\frac{f_{mi}\, F_m - G}{0.04 T_P}\right) t + G & \text{se } 0 \le t < 0.04 T_P \\ f_{mi}\, F_m \left[\frac{C_1 (t - 0.04 T_P)}{0.02\, T_P} + 1\right] & \text{se } 0.04 T_P \le t < 0.06 T_P \\ F_m & \text{se } 0.06 T_P \le t < 0.15 T_P \\ G + \sum_{i=1}^{n} G \alpha_i \operatorname{sen}[2\pi i f_P (t + 0.1 T_P) - \varphi_i] & \text{se } 0.15 T_P \le t < 0.90 T_P \\ 10(G - C_2)\left(\frac{t}{T_P} - 1\right) + G & \text{se } 0.90 T_P \le t < T_P \end{cases} \tag{4.2}$$

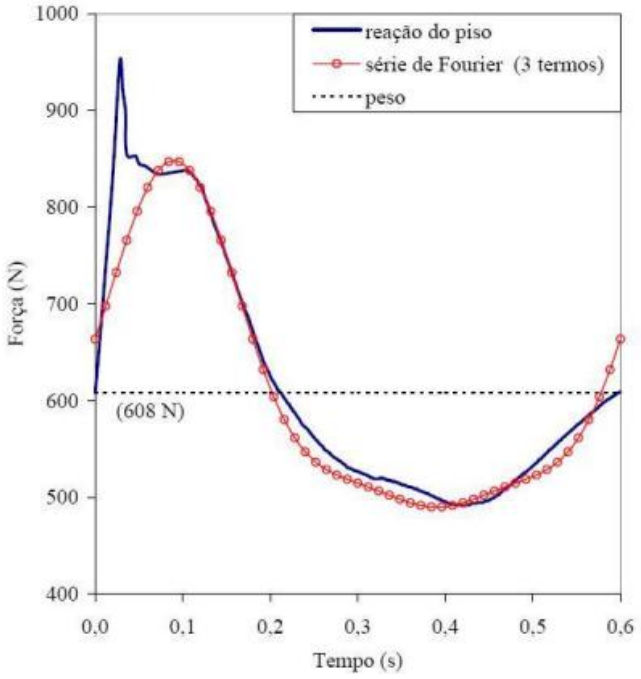
$$F_m = G\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \tag{4.3}$$

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

$$C_1 = \left(\frac{1}{f_{mi}} - 1\right) \tag{4.4}$$

$$C_2 = \begin{cases} G(1 - \alpha_2) \text{ if } n = 3 \\ G(1 - \alpha_2 + \alpha_4) \text{ if } n = 4 \end{cases} \tag{4.5}$$

Figura 9 - Função representativa da força do caminhar.



Fonte: Varela (2004)

Varela (2004) adota um fator de amplificação do impacto do calcanhar igual a 1,12, ressaltando, no entanto, que esse valor pode variar conforme as características individuais de cada pedestre. Para a definição dos coeficientes dinâmicos α_i, Pernica e Allen (1998) forneceram valores de referência amplamente utilizados na literatura. As funções polinomiais desenvolvidas por Varela (2004), apresentadas nas **Equações 4.6** a **4.9,** visaram aprimorar a representação das forças dinâmicas induzidas pelo caminhar, contribuindo para análises mais realistas do comportamento vibratório de estruturas submetidas a carregamentos humanos.

$$\alpha_1 = -0{,}22169 {f_p}^3 + 1{,}11946 {f_p}^2 - 1{,}44748 f_p + 0{,}5967 \tag{4.6}$$

$$\alpha_2 = -0{,}012037(2f_p)^3 + 0{,}1494(2f_p)^2 - 0{,}53146(2f_p) + 0{,}6285 \tag{4.7}$$

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

$$\alpha_3 = 0{,}000098(3f_p)^5 - 0{,}0021066(3f_p)^4 + 0{,}018364(3f_p)^3 - 0{,}077278(3f_p)^2 + 0{,}17593(3f_p) - 0{,}1477 \quad (4.8)$$

$$\alpha_4 = -0{,}00051715(4f_p)^4 - 0{,}014388(4f_p)^3 + 0{,}14562(4f_p)^2 - 0{,}62994(4f_p) - 1{,}018469 \quad (4.9)$$

4.3 Análise de Vibrações da Laje

A análise de vibrações de uma laje sem AMS envolve o estudo de sua resposta a cargas dinâmicas. A equação diferencial que descreve o movimento de uma laje pode ser derivada a partir das equações de movimento e da teoria de placas (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

Para simplificação do problema, a laje mista será analisada utilizando ferramenta de análise numérica baseada no modelo de viga Euler-Bernoulli, a qual possui dois graus de liberdade por nó conforme apresentado na **Figura 10**, através do Método dos Elementos Finitos (MEF) com uma seção transversal homogeneizada, considerando a laje mista por elementos finitos de viga. A precisão dos resultados do modelo de viga é comparada aos resultados numéricos encontrados por Junges (2010), e são apresentados no capítulo 5, o qual modelou a laje mista com elementos finitos sólidos e de casca.

Figura 10 - Elemento finito de viga de dois nós.

Fonte: Autor (2025).

O modelo de viga de Euler Bernoulli assume que as deformações da viga são puramente flexionais, com a rotação da seção transversal sendo a principal variável de interesse. Assim, ao modelar a viga, cada nó possui dois graus de liberdade, que corresponde a um deslocamento e uma à rotação da viga por cada nó.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

A matriz de massa global se constrói utilizando a formulação clássica de uma matriz de massa consistente de viga/elemento (CHANDRUPATLA; BELEGUNDU, 2002):

$$M = \frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & 22L \\ -13 & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Onde:

ρ é a densidade do material.

A é a área da seção transversal do elemento.

L é o comprimento do i-ésimo elemento.

A matriz de rigidez da viga é derivada a partir da hipótese de que as deformações por cisalhamento são desprezáveis e que a curvatura da viga é proporcional ao momento fletor. Isso resulta em uma formulação baseada apenas no comportamento axial e de flexão (BATHE, 1996; CHANDRUPATLA; BELEGUNDU, 2002). A matriz de rigidez elementar no sistema global é:

$$K = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Onde:

E é o módulo de elasticidade da viga.

I é o momento de inércia da seção transversal.

L é o comprimento do elemento de viga.

A matriz de amortecimento no sistema global é construída usando a formulação do amortecimento de Rayleigh, que assume que a matriz de amortecimento é uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez (BATHE, 1996; CHOPRA, 2017; CLOUGH; PENZIEN, 1993):

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

$$C = \alpha M + \beta K \tag{4.12}$$

Onde:

α e β são os coeficientes de amortecimento de Rayleigh.

M é a matriz de massa global.

K é a matriz de rigidez global.

A equação geral de movimento para um sistema vibratório discreto com múltiplos graus de liberdade se baseia no princípio do equilíbrio dinâmico. Ela deriva diretamente das Leis de Newton aplicadas a sistemas discretizados por elementos finitos. Para um sistema vibratório linear, o equilíbrio dinâmico da viga considerando massa, amortecimento e rigidez pode ser expresso na forma matricial (BATHE, 1996; CHOPRA, 2017):

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F(t)\} \tag{4.13}$$

Onde:

$[M]$ é a matriz de massa global.

$[C]$ é matriz de amortecimento global.

$[K]$ é a matriz de rigidez global.

$\{u(t)\}$ é o vetor deslocamento.

$\{\dot{u}(t)\}$ é o vetor velocidade.

$\{\ddot{u}(t)\}$ é o vetor aceleração.

$\{F(t)\}$ é o vetor de forças externas.

4.3.1 Modificação das matrizes para considerar os AMS

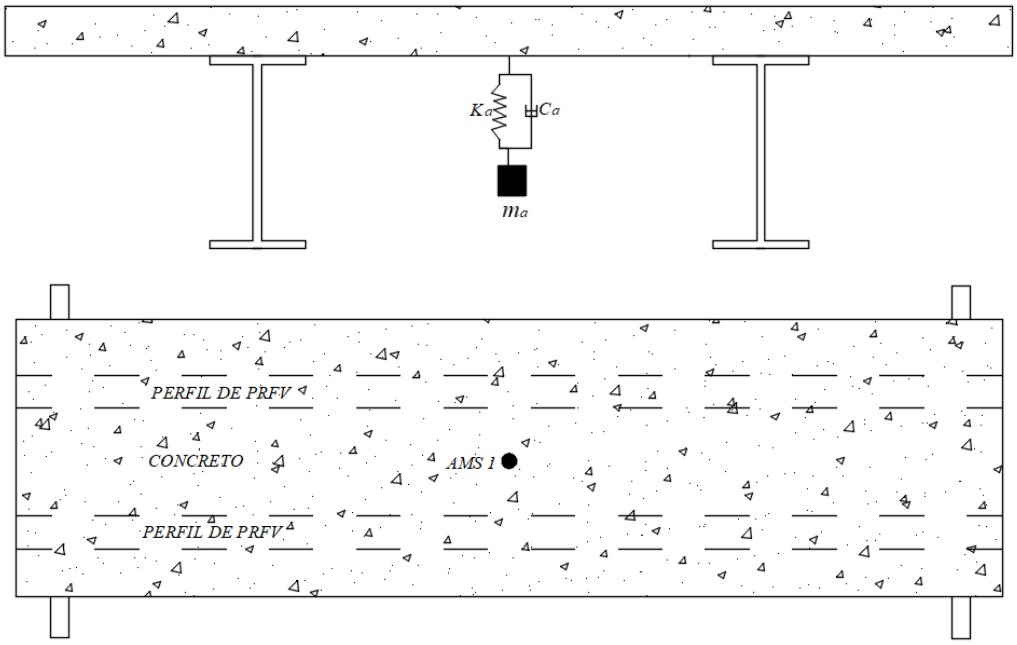
A equação de movimento para uma viga com *n* graus de liberdade, feita de um material com comportamento linear e equipada com N_{AMS} localizados no grau de liberdade com a maior amplitude, ou seja, no meio do vão e operando em paralelo como mostrado nas **Figura 11, 12** e **13** (aceleração da resposta da estrutura ao caminhar), submetida a carga de caminhada, $F(t)$, pode ser escrita conforme definido na **Equação 4.14**:

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

$$[M_{AMS}]\{\ddot{u}_{AMS}(t)\} + [C_{AMS}]\{\dot{u}_{AMS}(t)\} + [K_{AMS}]\{u_{AMS}(t)\} = \{F(t)\} \quad (4.14)$$

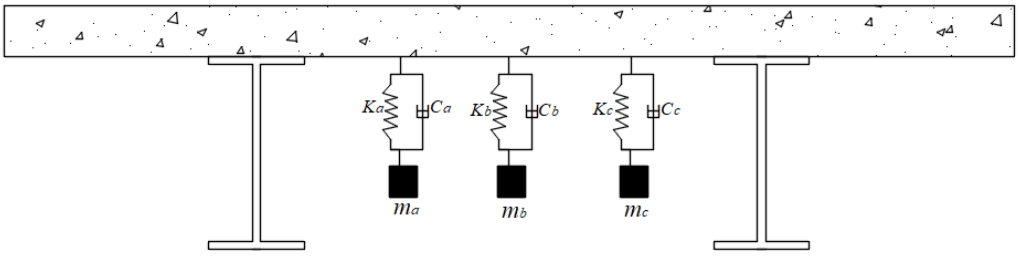
onde $[M_{AMS}]$, $[C_{AMS}]$ e $[K_{AMS}]$ são, respectivamente, a matriz $(n + N_{AMS}) \times (n + N_{AMS})$ de massa, amortecimento e rigidez; $\{\ddot{u}_{AMS}(t)\}$, $\{\dot{u}_{AMS}(t)\}$ e $\{u_{AMS}(t)\}$ são, respectivamente, os vetores $(n + N_{AMS})$ de aceleração, velocidade e deslocamento (BATHE, 1996; CLOUGH; PENZIEN, 1993).

Figura 11 – Laje mista com um AMS

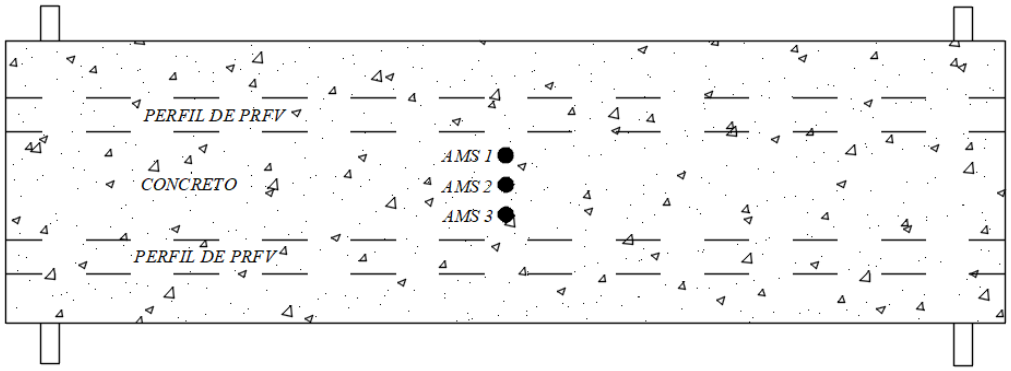


Fonte: Autor (2025).

Figura 12 – Laje mista com três AMS

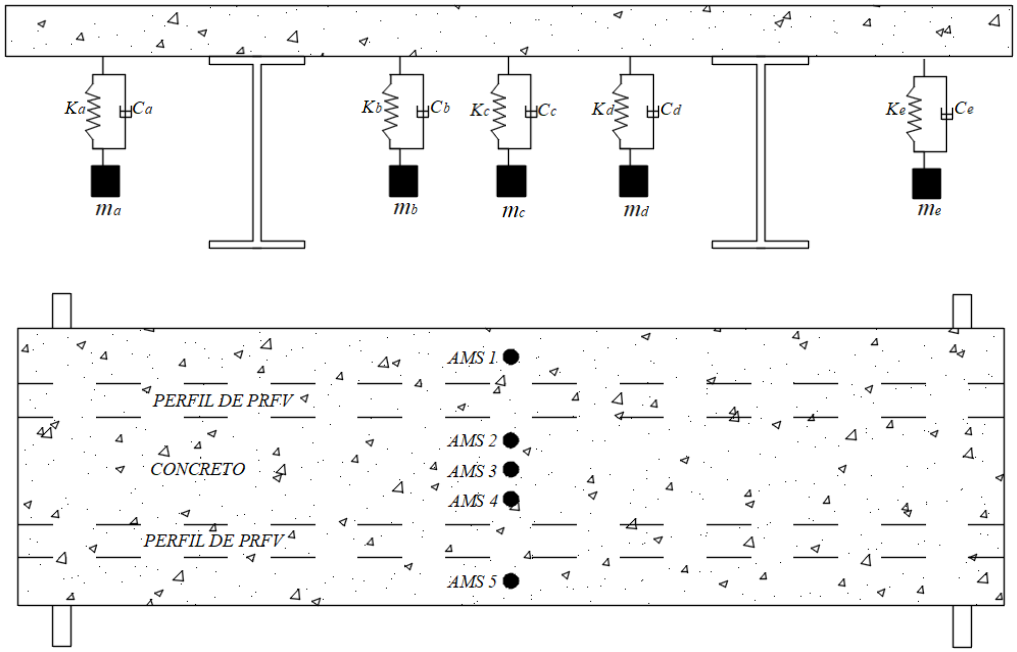


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37



Fonte: Autor (2025).

Figura 13 – Laje mista com cinco AMS



Fonte: Autor (2025).

As formulações matriciais adotadas neste trabalho fundamentam-se diretamente nos princípios clássicos do Método dos Elementos Finitos e da Dinâmica Estrutural, conforme estabelecido por Bathe (1996), Chandrupatla e Belegundu (2002), Chopra (2017) e Clough e Penzien (1993).

A matriz de massa global foi obtida pela montagem das matrizes de massa consistentes dos elementos de viga de Euler–Bernoulli. A inclusão dos AMS foi realizada por meio da adição de uma massa concentrada no grau de liberdade correspondente conforme **Equação 4.15**:

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

$$M_{IJ}^{AMS} = a_{Ii}^{(e)} M_{ij}^{(e)} a_{Jj}^{(e)} + m_d \delta_{Id} \delta_{Jd} \tag{4.15}$$

Onde:

M_{IJ}^{AMS} é o elemento (I, J) da matriz de massa global da estrutura.

$M_{ij}^{(e)}$ é o elemento (i, j) da matriz de massa consistente do elemento finito (e).

$a_{Ii}^{(e)}$ e $a_{Jj}^{(e)}$ são os coeficientes da matriz de conectividade (ou operador de montagem) que relacionam os graus de liberdade locais do elemento (e) e aos graus de liberdade globais da estrutura.

m_d é a massa do AMS.

δ_{Id} e δ_{Jd} são deltas de Kronecker, iguais a 1 quando $I = d$ ou $J = d$ e 0 caso contrário.

A representação da matriz de massa do sistema é:

$$M_{AMS} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_d + m_{dd} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

A equação para a matriz de rigidez pode ser representada como:

$$K_{IJ}^{AMS} = a_{Ii}^{(e)} K_{ij}^{(e)} a_{Jj}^{(e)} + k_d(\delta_{Id}\delta_{Jd} - \delta_{Id}\delta_{J(d+1)} - \delta_{I(d+1)}\delta_{Jd} + \delta_{I(d+1)}\delta_{J(d+1)}) \tag{4.17}$$

Onde:

K_{IJ}^{AMS} é o elemento (I, J) da matriz de rigidez global da estrutura.

$K_{ij}^{(e)}$ é o elemento (i, j) da matriz de rigidez do elemento finito (e).

k_d é a rigidez da mola do AMS.

Os termos deltas de Kronecker introduzem na matriz de rigidez global o subbloco associado à mola do AMS (acoplamento elástico entre o grau de liberdade estrutural d e o grau de liberdade adicional correspondente à massa do dispositivo).

A representação da matriz de rigidez do sistema é:

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

$$K_{AMS} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_d + k_{dd} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Para a matriz de amortecimento a equação fica:

$$C_{IJ}^{AMS} = \alpha M_{IJ}^{AMS} + \beta K_{IJ}^{AMS} \tag{4.19}$$

Onde:

C_{IJ}^{AMS} é o elemento (I, J) da matriz de amortecimento global da estrutura.

A representação da matriz de amortecimento do sistema é:

$$C_{AMS} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & 0 & \cdots & c_{1,N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 & \cdots & c_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha(m_d + m_{dd}) + \beta(k_d + k_{dd}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N,1} & c_{N,2} & \cdots & 0 & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

4.4 Análise e Dimensionamento de Vibrações com AMS

O projeto otimizado de Múltiplos Amortecedores de Massa Sintonizados (MAMS) consiste em um problema de otimização, no qual uma possibilidade é minimizar a resposta estrutural em termos da aceleração RMS (função objetivo). As variáveis de projeto incluem propriedades dos amortecedores, como amortecimento e rigidez. A massa total dos MAMS foi fixada de forma determinística em 1%, 3% e 5% da massa total da laje. Esses dispositivos foram estrategicamente distribuídos no ponto central de maior amplitude modal, conforme descrito por Junges, La Rovere, Pinto (2017), onde as análises experimentais e numéricas indicaram que a laje composta respondeu predominantemente no primeiro modo de vibração (modo flexional), ou seja, no vão central da laje. Os outros modos de vibração não apresentaram amplitudes significativas e assim em uma abordagem simplificada, considerar apenas o primeiro modo na análise levou a resultados satisfatórios.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Os parâmetros de projeto, incluindo amortecimento e rigidez, foram ajustados para maximizar a eficiência do algoritmo de otimização. Os limites de busca foram definidos com base nos modelos teóricos de Den Hartog (1956), Warburton (1982) e Krenk (2005), conforme apresentado na **Tabela 3**.

Tabela 3 – Modelo algébrico-teórico ótimo dos parâmetros de projeto.

Modelo	AMS central (direção y)
Warburton	$\alpha_{opt} = \sqrt{(1+\mu/2)}/(1+\mu)$ $\xi_{opt} = \frac{\sqrt{\mu(1+3\mu/4)}}{4(1+\mu)(1+\mu/2)}$ $k_{cy} = M_{AMS,c}(\alpha_{opt}\omega_1)^2$ $c_{cy} = 2M_{AMS,c}\xi_{opt}\omega_1\alpha_{opt}$
Den Hartog	$\alpha_{opt} = 1/(1+\mu)$ $\xi_{opt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\mu/2}{1+3\mu}}$ $k_{cy} = M_{AMS,c}(\alpha_{opt}\omega_1)^2$ $c_{cy} = 2M_{AMS,c}\xi_{opt}\omega_1\alpha_{opt}$
Krenk	$\alpha_{opt} = \frac{1}{1+\mu}\sqrt{\frac{1+2\mu}{1+\mu}}$ $\xi_{opt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu(1+2\mu)}{(1+\mu)^3}}$ $k_{cy} = M_{AMS,c}(\alpha_{opt}\omega_1)^2$ $c_{cy} = 2M_{AMS,c}\xi_{opt}\omega_1\alpha_{opt}$

Fonte: Den Hartog (1956), Waburton (1982) e Krenk (2005).

Para o dimensionamento dos amortecedores no sistema de laje mista, considerou-se os seguintes casos: um AMS, três AMS e cinco AMS. Neste trabalho, optou-se pela implementação de otimização computacional, considerando o Algoritmo do Vaga-lume, mais conhecido como *Firefly Algorithm* ou simplesmente FA.

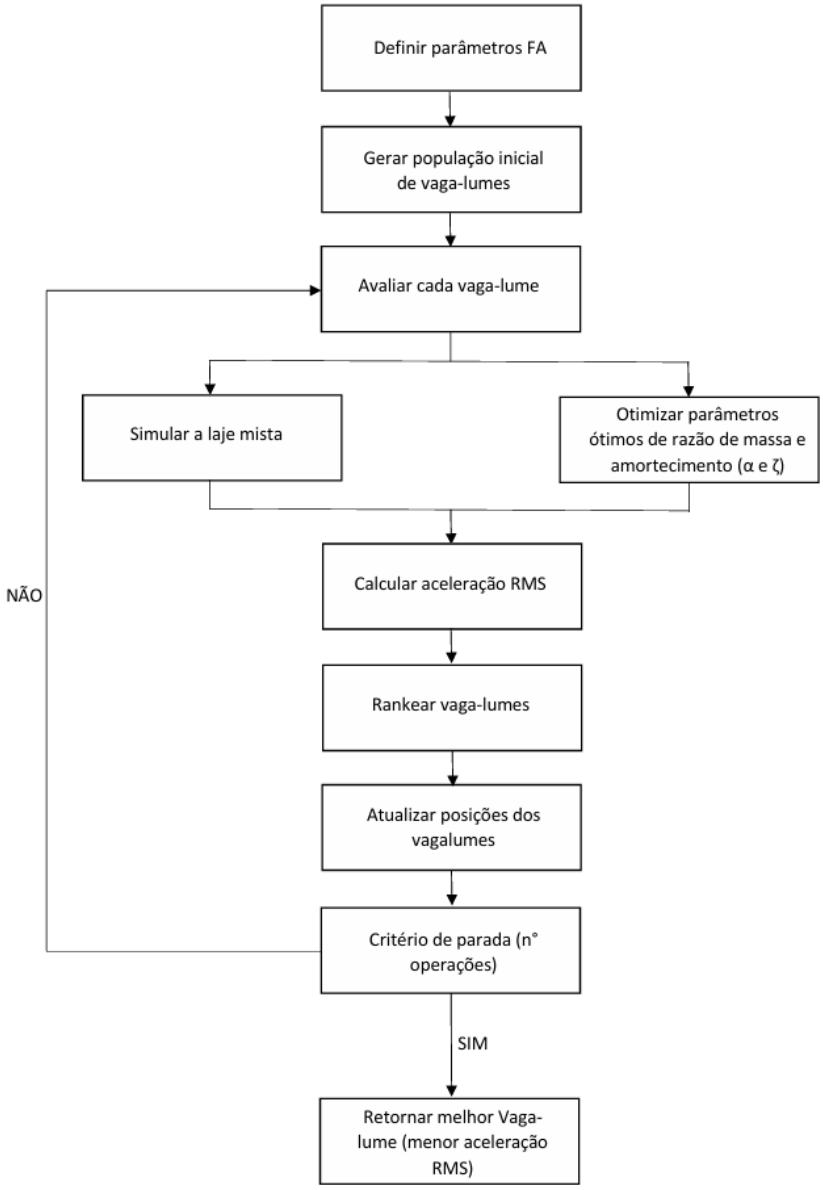
O FA foi desenvolvido por Xin-She Yang, que apresentou este algoritmo inspirado no comportamento natural dos vaga-lumes. Yang (2010, p. 99-112)

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

descreve o FA como uma meta-heurística baseada na bioluminescência dos vaga-lumes, onde o brilho de um vaga-lume representa sua atratividade. A intensidade luminosa diminui com a distância e o brilho é afetado pelo meio ambiente. O FA é utilizado para resolver problemas complexos de otimização, devido à sua simplicidade, flexibilidade e eficácia em encontrar soluções ótimas ou próximas do ótimo.

O FA foi utilizado para encontrar os parâmetros ótimos para a configuração do dimensionamento mais efetivo dos MAMS, partindo das soluções algébricas-teóricas determinadas com os modelos teóricos.

Figura 14 - Fluxograma representativo da otimização da laje



Fonte: Autor (2025)

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

4.4.1 Rotina de programação da laje mista

As formulações utilizadas no código encontram-se em Bathe (1996), Chandrupatla e Belegundu (2002), Chopra (2017) e Clough e Penzien (1993).

O código monta toda a modelagem estrutural via MEF, simula a resposta dinâmica à excitação de passos, inclui o efeito do AMS y/ou dos MAMS (com acoplamento dinâmico total), e retorna o valor de aceleração RMS para ser usado como critério de desempenho, ou seja, como função objetivo em processos de otimização. (quanto menor, melhor o controle da vibração).

Declaração das Variáveis de Projeto:

- `x(1)`: Razão de amortecimento ótimo do AMS.
- `x(2)`: Razão de frequência ótima do AMS.

Dados de Entrada da Estrutura:

- Número de nós: `n_nos`
- Elementos: `n_elem=n_nos-1` (cada elemento conecta dois nós consecutivos).
- Graus de liberdade por nó: `n_gl` (translação e rotação).
- Graus de liberdade por barra: `n_glbarra=n_gl*2`

Geometria:

- Coordenadas nodais: matriz `coord`, onde cada linha representa um nó (posição em 2D).
- Conectividade: matriz `con`, define os pares de nós que cada elemento conecta.

Propriedades do Material e Seção:

- Módulo de elasticidade: `E`
- Área da seção: `A`
- Inércia da seção: `I`
- Massa específica: `ro`

Montagem das Matrizes Elementares:

- Matriz de rigidez elementar: `Seg(:,:,i)` (para cada elemento).
- Matriz de massa elementar consistente: `Meg(:,:,i)` (para cada elemento; matriz completa, não *lumped*).

Montagem das Matrizes Globais:

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

- Rigidez global: `Sest` (não restringida).
- Massa global: `Mest` (não restringida).
- Utiliza-se o método de montagem padrão do MEF: soma-se as contribuições dos elementos nos graus de liberdade globais corretos (por meio do vetor `jk`).

Aplicação das Restrições (Condições de Contorno):

- Vetor `re` indica quais graus de liberdade são fixos `(1)` ou livres `(0)`

Versões restritas das matrizes (apenas graus de liberdade livres):

- Matriz de rigidez restrita: `K`
- Matriz de massa restrita: `M`

Cálculo dos Modos e Frequências Naturais:

Para caracterizar o comportamento dinâmico da laje mista, é resolvido o problema de autovalores generalizado associado ao sistema massa-rigidez:

$$K \cdot \varphi = \lambda \cdot M \cdot \varphi \tag{4.21}$$

onde φ são os modos próprios e λ os autovalores.

Calcula-se as frequências naturais:

$$\omega_n = \sqrt{\lambda} \tag{4.22}$$

A frequência natural em Hz pode ser obtida como:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{4.23}$$

Amortecimento:

- Amortecimento de Rayleigh: definido para dois modos específicos, neste trabalho, os coeficientes a_1 e a_2 foram calculados a partir das frequências naturais do modo 1 e do modo 5, garantindo que o amortecimento proporcional represente com maior fidelidade o comportamento dinâmico global da laje.

Calcula-se os coeficientes de Rayleigh para montar a matriz de amortecimento proporcional, conforme a **Equação 4.12**:

A relação utilizada é:

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\omega_n} + \alpha_2 \omega_n \right) \tag{4.24}$$

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

A partir da especificação de ξ (razão de amortecimento modal) para dois modos i e j, resolvem-se a_1 e a_2 simultaneamente.

Generalização Modal:

Matrizes transformadas para o espaço modal:

- Massa generalizada: `Mr`
- Rigidez generalizada: `Kr`
- Amortecimento generalizado: `Cr`

Usado para facilitar o acoplamento do AMS e análise modal.

Adição do AMS:

- Normalização modal: normaliza os modos para o grau de liberdade onde o AMS será acoplado (`gdl_norm`).
- Calcula as propriedades do AMS:
- Massa (`m_d`), rigidez (`k_d`), amortecimento (`c_d`), todos em função dos parâmetros de projeto e da estrutura.
- Amplia as matrizes para incluir o novo grau de liberdade do AMS:
- Adiciona novas linhas/colunas nas matrizes de massa (`M_TMD`), rigidez (`K_TMD`) e amortecimento (`C_TMD`).
- Os termos de acoplamento são inseridos conforme descrito anteriormente.

Carregamentos Dinâmicos:

- Define padrões de carga (`passo_rest`), em que cada vetor representa uma força unitária aplicada em diferentes graus de liberdade ao longo do tempo (simulando passos).
- Sequência de passos: matriz `caminhar`, cada linha é um passo, com instante de aplicação.

Integração Temporal — Método de Newmark:

Usa o método de integração direta de Newmark para resolver o sistema de equações diferenciais indicada na **Equação 4.14** e **4.15**.

Parâmetros do método:

- Os parâmetros `delta` (0,5, método *average acceleration*) e `alfa` (0,25) utiliza-se para o cálculo de deslocamentos, velocidades e acelerações em cada passo do tempo.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Processamento dos Resultados:

- Armazena-se e plota-se as respostas (deslocamento, velocidade, aceleração) do grau de liberdade do AMS ao longo do tempo.
- Calcula-se a aceleração RMS (*Root Mean Square*) do AMS, usada como função objetivo na otimização.

4.4.2 Descrição da função do caminhar

A função passo gera o histórico temporal da força vertical de um passo humano, considerando a modelagem do calcanhar segundo Varela (2004).

Entradas: Nenhuma explícita. Parâmetros internos modelam um passo típico.

Saídas:

- `t`: vetor de tempo (s).
- `f_t`: vetor da força vertical aplicada ao longo do tempo (N).

Modela-se o caminhar humano considerando:

- Peso da pessoa (`peso_pessoa`).
- Frequência típica do passo (`fc`).
- Harmônicos principais (3 harmônicos).
- Impacto do calcanhar (`fmi`), conforme Varela (2004);
- Coeficientes dinâmicos (alfas) e fases (phis) para cada harmônico do passo.

O carregamento é dividido em fases:

- Início do passo: crescimento rápido devido ao impacto do calcanhar.
- Duração principal: soma harmônica dos componentes.
- Final: decaimento.

O carregamento resultante é usado como entrada para a análise dinâmica da laje mista.

Assim, ao rodar o código `lajemista_TMD_2(x)` (a função refere-se a um AMS, e é tomada como exemplo, sendo o procedimento análogo para MAMS), toda a excitação dinâmica de passos humanos está baseada na modelagem de Varela (2004), considerando o impacto do calcanhar, harmônicos e o peso da pessoa.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

4.4.3 Rotina de otimização do Firefly Algorithm

Definição dos Limites:

- `Lb, Ub`: vetores de limites inferiores e superiores dos parâmetros de projeto (usualmente entre 0 e 1).

Função Objetivo:

A função objetivo `cost(x)` é o valor retornado por `lajemista_TMD_2(x)`, ou seja, a aceleração RMS da laje com o AMS, para cada par de parâmetros de projeto.

Restrições:

A função `constraint(x)` define as restrições do problema (`g` e `geq`).

Processo de otimização:

Inicialização: Gera uma população inicial aleatória de vaga-lumes, cada um representando uma solução possível (parâmetro do AMS).

Avaliação: Calcula o valor da função objetivo (aceleração RMS) para cada vaga-lume usando a função objetivo.

Atração: Em cada iteração, vaga-lumes menos “brilhantes” (pior função objetivo) se movem em direção aos mais brilhantes (melhor função objetivo), de acordo com a distância e um fator de absorção da luz.

Atualização: Os movimentos são atualizados aleatoriamente com o coeficiente alpha, e as soluções fora dos limites são corrigidas.

Classificação: A cada iteração, a população é ordenada do melhor para o pior.

Convergência: O processo se repete por `N_iteration` gerações; o melhor vaga-lume encontrado é considerado a solução ótima.

Métodos Matemáticos:

- Movimentação dos vaga-lumes:

O movimento dos vaga-lumes segue a formulação original proposta por Yang (2010), porém com atratividade mínima para melhorar a estabilidade numérica. A atratividade entre dois vaga-lumes i e j depende da distância r_{ij} e é dada por:

$$\beta(r_{ij}) = (\beta_0 - \beta_{min})e^{-\gamma r_{ij}^2} + \beta_{min} \quad 4.25$$

Assim, a atualização da posição do vaga-lume i na direção de j é expressa por:

$$x_i^{novo} = \left(1 - \beta(r_{ij})\right) x_i + \beta(r_{ij}) x_j + \alpha(rand - 0.5) \cdot scale \quad 4.26$$

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Tabela 4 – Parâmetros do método matemático.

Termo	Significado	Papel no algoritmo
x_i	Vetor posição do vaga-lume i no espaço de busca.	Representa a solução atual.
x_j	Vetor posição do vaga-lume j, mais brilhante que i.	Representa a solução que está atraindo o vaga-lume i.
r_{ij}	Distância euclidiana entre i e j: $r_{ij} = \| x_i - x_j \|$.	Controla o quanto a atração diminui com a distância.
$\beta(r_{ij})$	Grau de atração entre vagalumes baseado na distância e brilho relativo.	Define o quanto i deve se mover na direção de j.
β_0	Atratividade máxima (quando $r_{ij} = 0$). No código: $\beta_0 = 1$.	Valor base da atração sem perda pela distância.
β_{min}	Atratividade mínima permitida no algoritmo. No código vem de betamin.	Impede que $\beta \to 0$, evitando estagnação quando vagalumes estão longe.
γ	Coeficiente de absorção da luz no meio.	Controla a velocidade com que β decai ao aumentar r_{ij}. Quanto maior γ, mais local é o algoritmo.
α	Parâmetro de aleatoriedade. É reduzido iterativamente no código *alpha_new*.	Controla exploração do espaço.
rand	Número aleatório uniforme entre 0 e 1.	Introduz variação estocástica na busca.
scale	Escala das variáveis: $scale = Ub - Lb$	*Upper bound* (limite superior da variável) *Lower bound (*limite inferior da variável).
$\Delta = \alpha(rand - 0.5)$	Perturbação aleatória.	Garante diversidade e evita mínimos locais.
x_i^{novo}	Nova posição do vaga-lume i.	Combinação ponderada entre exploração e atração.

Fonte: Autor (2025) modificado de Yang (2010).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

- Penalização de restrições: Restrições podem ser tratadas por método de penalização (não usado neste exemplo, mas previsto no algoritmo).

Outputs:

- `bestsolution`: vetor de parâmetros ótimos encontrados.
- `bestobj`: valor ótimo da função objetivo (aceleração RMS mínima).
- `NumEval`: número total de avaliações da função objetivo (número de soluções testadas).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

5 RESULTADOS

5.1 Análise Dinâmica da Laje Mista com Modelo de Viga

A análise experimental realizada por Junges; La Rovere; Pinto (2017) envolveu três tipos de testes: queda de calcanhar, caminhada e salto. No teste de queda de calcanhar, realizado conforme o Código Canadense CAN3-S16.1-M84 (CSA, 1984), foram determinados a frequência fundamental e o fator de amortecimento da laje, com valores médios de 12,64 Hz e 4,96%, respectivamente.

No teste de caminhada, voluntários percorreram os protótipos, gerando uma excitação em torno de 2 Hz, com as respostas analisadas em termos de aceleração e espectro apresentadas na **Figura 15**. Já no teste de salto, os voluntários realizaram 30 saltos em um intervalo de 10 segundos no centro da laje, aplicando uma carga a uma frequência aproximada de 3 Hz.

As medições indicaram acelerações RMS variando entre 3,26 e 4,94 m/s², com picos superiores a 14 m/s². Esses valores ultrapassam os limites de conforto estabelecidos pela norma ISO 10137 (2007), resultando em acelerações de pico além dos níveis recomendados para o conforto humano.

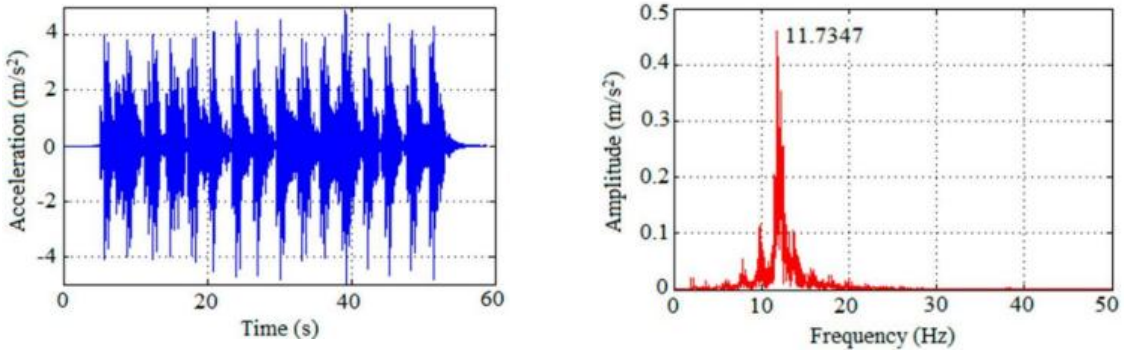
Para a análise numérica, os autores utilizaram modelos finitos sólidos para modelar a capa de concreto e modelos finitos de casca para modelar os perfis de PRFV. Com esse modelo, considerado bastante refinado, obtiveram acelerações de pico semelhante daquelas obtidas experimentalmente, entre 3 e 4 m/s², apontando também que o protótipo responde basicamente na frequência fundamental de 12 Hz, como pode ser observado na **Figura 16** e **Tabela 5**, com amplitude próxima a 0,70 m/s². Da mesma maneira que no ensaio experimental, as vibrações alcançaram níveis desconfortáveis e intoleráveis. Esses resultados ressaltaram a importância de considerar o comportamento dinâmico da laje durante o projeto.

Por outro lado, no que se refere à análise neste trabalho, ressalta-se ainda que as limitações do estudo foram definidas considerando exclusivamente o modo flexional dominante. Modos torcionais e laterais não foram contemplados, o que constitui uma limitação do estudo e pode ser objeto de investigações futuras.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 15 - Resposta da estrutura ao caminhar experimental.

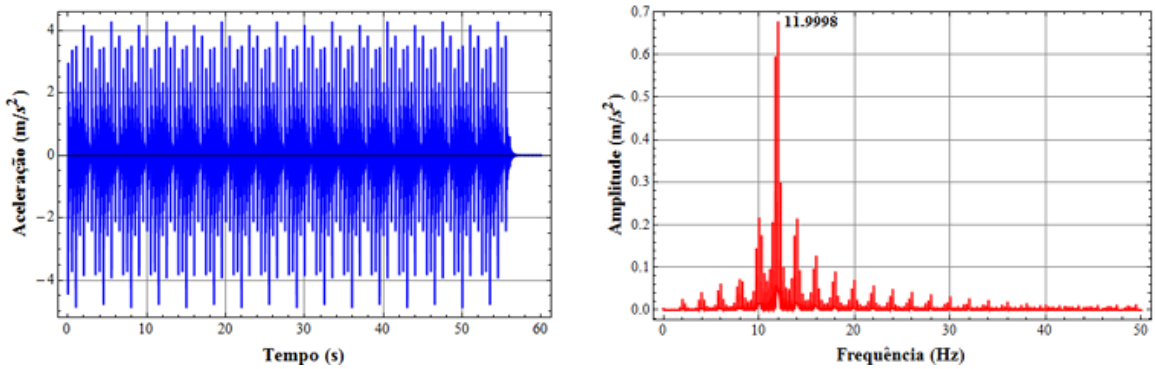
(a) Aceleração ao longo do tempo. (b) Espectro da aceleração



Fonte: Junges (2010)

Figura 16 - Resposta da estrutura ao caminhar numérico.

(a) Aceleração ao longo do tempo. (b) Espectro da aceleração



Fonte: Junges (2010)

Tabela 5 – Características dinâmicas da laje mista considerando apenas o efeito de flexão.

Modos de vibração	Frequência natural (Hz)	Fator de participação modal	% da participação
1° Modo	11,631	-0,527035	67,83
5° Modo	65,212	-0,0003	0,04
11° Modo	81,141	-0,078757	10,14
12° Modo	81,991	0,169349	21,80
17° Modo	109,590	0,00157	0,20

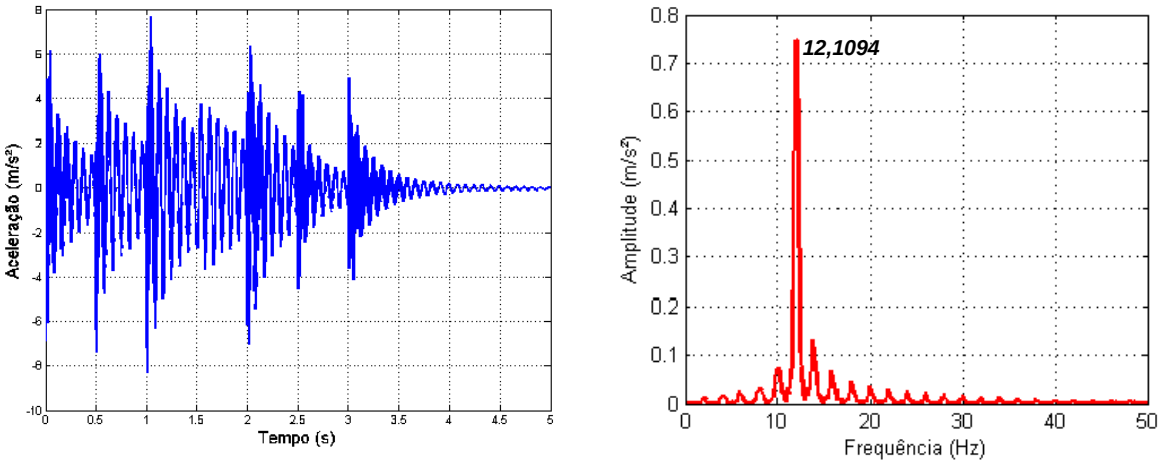
Fonte: Junges (2010).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Os resultados encontrados por Junges (2010), são comparados com os resultados do modelo de viga deste trabalho, que foi realizado utilizando elementos finitos de viga para modelar a capa de concreto e os perfis de PRFV como uma única seção transversal homogeneizada, discretizando a laje mista como uma viga simplesmente apoiada composta por 17 nós e 16 elementos finitos. O modelo de viga, que é um modelo numérico simplificado, resolve a resposta dinâmica através da integração de Newmark. As primeiras frequências naturais e o fator de participação modal correspondente, estão apresentados na **Tabela 6**, onde, pode ser observado que, a frequência fundamental obtida está próxima da reportada na literatura, respondendo essencialmente a 12 Hz.

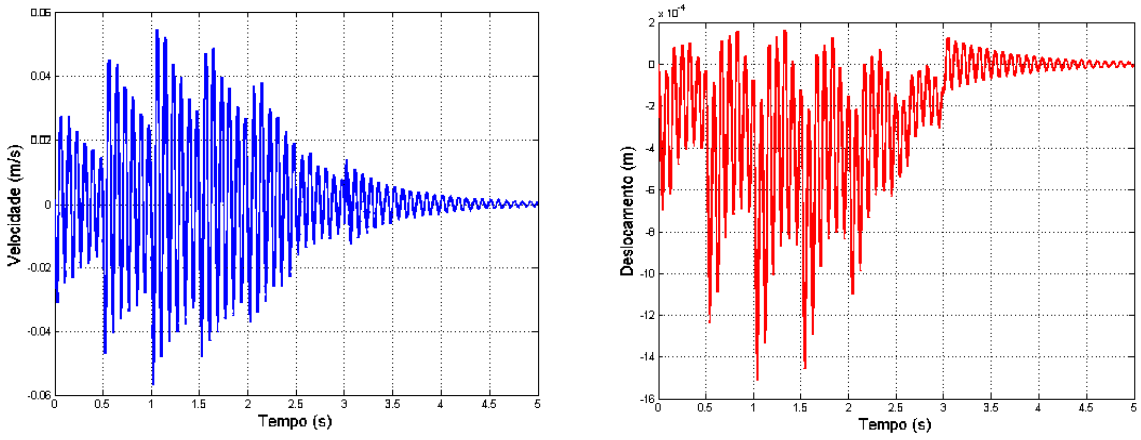
A **Figura 17**, mostra a resposta da aceleração e seu respectivo espectro, enquanto que **Figura 18** apresenta a velocidade e o deslocamento.

Figura 17 – Aceleração e espectro sem AMS



Fonte: Autor (2025).

Figura 18 – Velocidade e deslocamento sem AMS



Fonte: Autor (2025).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

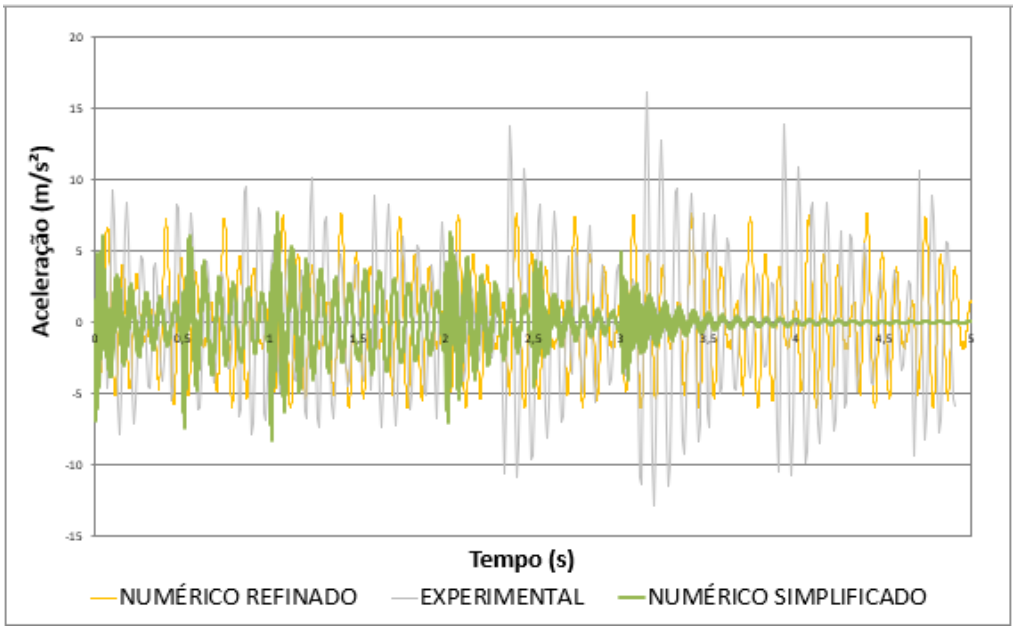
Tabela 6 – Principais características com o modelo de viga

Modos de vibração	Frequência natural (Hz)	Fator de participação modal	% da participação
1° Modo	12,1094	-16,5293	69,12
2° Modo	48,4098	-0,0005	0,00
3° Modo	108,8245	-5,0031	20,92
4° Modo	193,2471	-0,0010	0,00
5° Modo	301,5663	-2,3795	9,95

Fonte: Autor (2025).

A comparação de resultados do modelo de viga realizou-se com os resultados experimentais e numéricos da aceleração e seu espectro conforme apresentado nas **Figura 19.** A comparação da velocidade e deslocamento realizou-se com modelagem refinada do SAP2000 encontrados por Junges (2010), conforme as **Figuras 20** e **21**. Vale ressaltar que as acelerações do modelo numérico refinado e dos ensaios experimentais, mostradas na **Figura 19**, correspondem a 8 voltas do usuário sobre a laje mista. Por outro lado, as acelerações do modelo numérico simplificado correspondem a apenas 1 volta, por isso essas acelerações são amortizadas após os 3 segundos, enquanto que as outras continuam acima dos 5 segundos.

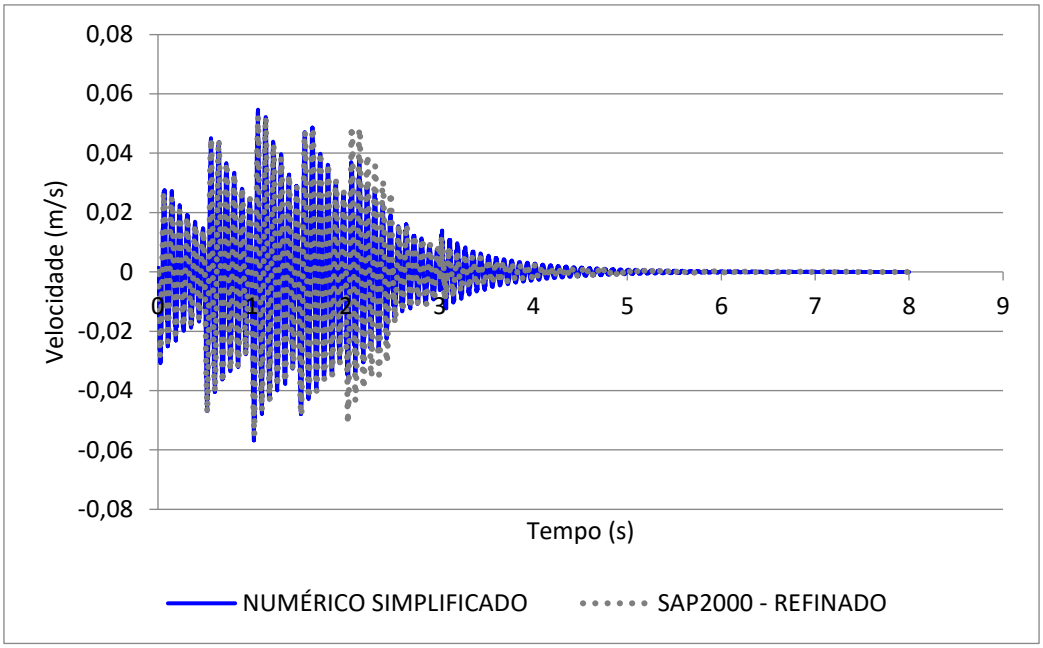
Figura 19 – Comparativo da resposta da aceleração



Fonte: Autor (2025).

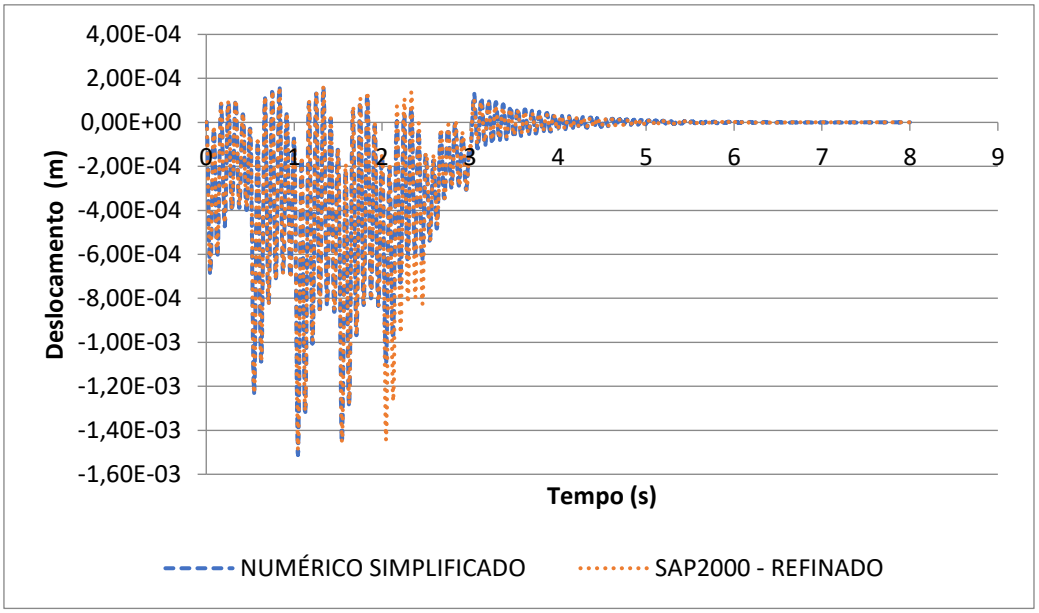
Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 20 – Comparativo da resposta da velocidade



Fonte: Autor (2025).

Figura 21 – Comparativo da resposta do deslocamento



Fonte: Autor (2025).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

5.2 Parâmetros Ótimos

Inicialmente, utilizou-se as soluções algébricas-teóricas encontradas na literatura para se determinar os parâmetros de um AMS. Na **Tabela 7** são mostrados os resultados dos parâmetros de razão de amortecimento (ξ_{opt}) e da frequência natural otimizada (α_{opt}) pelos modelos algébrico-teóricos de Den Hartog, Warburton e Krenk, conforme a **Tabela 3**, apresentadas no capítulo 4. A incorporação dos AMS foi feita considerando as massas distribuídas proporcionalmente, ou seja, 1% do parâmetro μ para 1, 3 e 5 AMS, 3% do parâmetro μ para 1, 3 e 5 AMS e 5% do parâmetro μ para 1, 3 e 5 AMS.

Para o FA definiu-se os seguintes parâmetros: 30 números de vaga-lume, 100 número máximo de iterações, 0,2 de fator de aleatoriedade, 0,2 de fator mínimo de atratividade e 1,0 de coeficiente de absorção.

Os limites superiores e inferiores das variáveis de decisão (ξ_{opt} e α_{opt} respectivamente) são definidos como: para a primeira variável de 0,005 a 0,15 e para a segunda variável de 0,005 a 1,2.

A função objetivo do algoritmo *Firefly* é responsável por avaliar a qualidade de cada solução candidata. No código, a função objetivo está definida como:

```
function z = cost(x)
    z = lajemista_TMD_2(x);
```

Isso significa que, para cada conjunto de parâmetros `(x)` que correspondem aos pares de ξ_{opt} e α_{opt} gerado pelo algoritmo, o custo (ou desempenho da solução) é calculado chamando a função `lajemista_TMD_2(x)` do modelo de viga, calcula o valor a ser minimizado**,** que, neste caso, é a aceleração RMS da estrutura**.**

Já as **Tabelas 8**, **9** e **10** mostram os resultados obtidos da aceleração RMS usando estes parâmetros obtidos a partir da literatura, também se apresenta os resultados das reduções em forma de gráficos de barra, para ambos modelos (**Figura 22** e **23**). Percebe-se que, os modelos teóricos apresentam valores próximos, sendo que a redução máxima da aceleração RMS foi de 40,86% para μ=5% no modelo de Krenk. Outro fato que pode ser observado é que à medida que a razão de massa (μ) aumenta, obtém-se melhores resultados.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Tabela 7 – Parâmetros ótimos conforme Den Hartog, Warburton e Krenk.

μ	Teórico					
	Den Hartog		Warburton		Krenk	
	ξ_{opt}	α_{opt}	ξ_{opt}	α_{opt}	ξ_{opt}	α_{opt}
1%	0,0501	0,9926	0,0603	0,9901	0,0497	0,9950
3%	0,0871	0,9781	0,1016	0,9709	0,0853	0,9849
5%	0,1128	0,9642	0,1277	0,9524	0,1090	0,9748

Fonte: Autor (2025).

Tabela 8 – Reduções de vibração com o modelo de Den Hartog.

μ	Den Hartog		
	N°	Aceleração RMS (m/s^2)	Redução (%)
*	Sem AMS	1,2179	*
1%	1 AMS	0,7896	35,17
3%	1 AMS	0,7384	39,37
5%	1 AMS	0,7213	40,78

Fonte: Autor (2025).

Tabela 9 – Reduções de vibração com o modelo de Warburton.

μ	Warburton		
	N°	Aceleração RMS (m/s^2)	Redução (%)
*	Sem AMS	1,2179	*
1%	1 AMS	0,8058	33,84
3%	1 AMS	0,7443	39,89
5%	1 AMS	0,7227	40,66

Fonte: Autor (2025).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

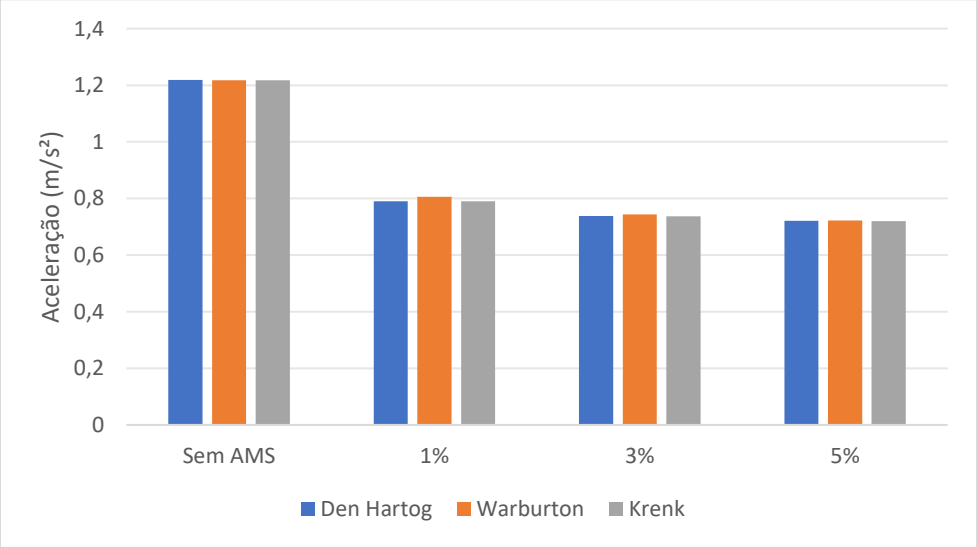
Tabela 10 – Reduções de vibração com o modelo de Krenk.

μ	Krenk		
	N°	Aceleração RMS (m/s^2)	Redução (%)
*	Sem AMS	1,2179	*
1%	1 AMS	0,7904	35,10
3%	1 AMS	0,7375	39,44
5%	1 AMS	0,7203	40,86

Fonte: Autor (2025).

Nas **Figuras 11**, **12** e **13** observa-se que todos os amortecedores foram posicionados na mesma região da estrutura. Essa configuração não compromete significativamente a eficiência quando se utiliza apenas um AMS. Entretanto, quando múltiplos AMS são empregados, a concentração espacial dos dispositivos tende a reduzir a efetividade global do sistema, uma vez que não há uma exploração mais ampla das formas modais dominantes. Esse aspecto pode explicar o fato de que as reduções obtidas com a utilização de três e cinco amortecedores (**Tabela 12** com o FA) não apresentaram ganhos expressivos em relação àquelas alcançadas com apenas um AMS (**Tabelas 8**, **9** e **10** dos modelos teóricos).

Figura 22 – Gráfico comparativo das reduções com modelos teóricos



Fonte: Autor (2025).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Os resultados dos parâmetros obtidos pelos modelos teóricos de Den Hartog, Warburton e Krenk, foram utilizados como pontos de partida para o algoritmo de otimização. A otimização computacional com o *Firefly* considerou um, três e cinco AMS, bem como 1%, 3% e 5% de razão de massa (μ), com um número total de 3000 funções avaliadas.

A **Tabela 11** apresenta os resultados dos parâmetros ótimos de ξ_{opt} e de α_{opt} pelo modelo de otimização *Firefly* para os múltiplos AMS. A **Tabelas 12** mostra os resultados obtidos da aceleração RMS e a redução. A melhor redução foi de 41,42% e considera três AMS e μ=5%.

Tabela 11 – Parâmetros ótimos obtidos com a otimização FA.

N°	μ = 1%		μ = 3%		μ = 5%	
	ξ_{opt}	α_{opt}	ξ_{opt}	α_{opt}	ξ_{opt}	α_{opt}
1 AMS	0,0117	0,9871	0,0425	0,9807	0,1150	1,0232
3 AMS	0,1092	0,9309	0,0119	0,9882	0,0930	1,1664
	0,0763	0,1872	0,0920	1,1503	0,0298	0,9897
	0,0094	0,9848	0,0229	0,6676	0,0587	0,4150
5 AMS	0,0081	0,9821	0,0210	0,2616	0,0398	1,1780
	0,0735	0,9458	0,0680	0,3216	0,1408	0,7108
	0,1366	0,4031	0,0758	0,3513	0,0338	0,9888
	0,0234	0,9911	0,0183	0,9850	0,0082	0,1055
	0,0825	0,9771	0,0280	0,9886	0,0511	1,0014

Fonte: Autor (2025).

A partir dos resultados obtidos, verificou-se que um único AMS, com uma razão de massa de apenas 1%, foi capaz de reduzir cerca de 40% da amplitude de vibração da laje mista. Tal desempenho, acima das expectativas iniciais, levanta uma questão importante: em vez de ampliar a razão de massa para 3% ou 5%, o mais adequado teria sido investigar a eficácia de razões menores que 1%, como 0,5% ou 0,25%.

Essa nova perspectiva surge da constatação de que o sistema apresenta excelente resposta com massa acoplada relativamente pequena, indicando que pode haver um intervalo de saturação da eficiência do amortecimento dinâmico. Investigar esse intervalo inferior permitiria identificar o mínimo necessário de massa adicionada

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

para se obter uma redução significativa de vibração, maximizando a eficiência estrutural e minimizando custo, peso e interferências no sistema.

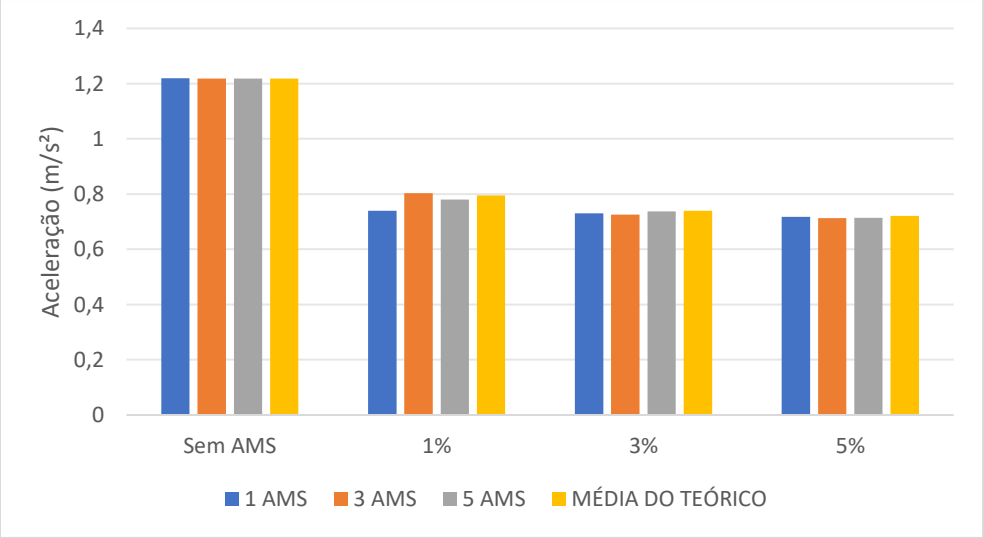
Trata-se, portanto, de uma lacuna na presente análise e, ao mesmo tempo, de uma oportunidade para trabalhos futuros.

Tabela 12 – Comparativo das reduções de vibração com a otimização FA.

μ	Otimização *Firefly*		
	N°	Aceleração RMS (m/s^2)	Redução (%)
1%	Sem AMS	1,2179	*
	1 AMS	0,7395	39,28
	3 AMS	0,8029	34,08
	5 AMS	0,7804	35,92
3%	1 AMS	0,7298	40,08
	3 AMS	0,7256	40,42
	5 AMS	0,7368	39,50
5%	1 AMS	0,7173	41,10
	3 AMS	0,7134	41,42
	5 AMS	0,7142	41,36

Fonte: Autor (2025)

Figura 23 – Gráfico comparativo das reduções com FA



Fonte: Autor (2025).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

5.3 Sensibilidade da Laje Mista com Parâmetros Ótimos

Esta seção traz os comparativos do impacto dos AMS na redução das vibrações, traduzidas pela sensibilidade humana às vibrações tanto da ISO 10137 (2007) quanto da Escala de Goldman. Os modelos teóricos para um AMS estão apresentados na **Tabela 13,** enquanto os modelos de MAMS, obtidos por meio da otimização via *Firefly Algorithm*, encontram-se na **Tabela 14**.

Tabela 13 – Comparativo da sensibilidade com os modelos teóricos.

Modelo	Sensibilidade humana ao caminhar		
	μ	**ISO 10137:2007**	**Goldman**
Sem AMS	*	Intolerável	Intolerável
Den Hartog	1%	Intolerável	Desconfortável
	3%	Intolerável	Desconfortável
	5%	Intolerável	Desconfortável
Warburton	1%	Intolerável	Desconfortável
	3%	Intolerável	Desconfortável
	5%	Intolerável	Desconfortável
Krenk	1%	Intolerável	Desconfortável
	3%	Intolerável	Desconfortável
	5%	Intolerável	Desconfortável

Fonte: Autor (2025).

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Tabela 14 – Comparativo da sensibilidade com a otimização FA.

μ	Sensibilidade humana ao caminhar		
	N°	ISO 10137:2007	Goldman
	Sem AMS	Intolerável	Intolerável
1%	1 AMS	Intolerável	Desconfortável
	3 AMS	Intolerável	Desconfortável
	5 AMS	Intolerável	Desconfortável
3%	1 AMS	Intolerável	Desconfortável
	3 AMS	Intolerável	Desconfortável
	5 AMS	Intolerável	Desconfortável
5%	1 AMS	Intolerável	Desconfortável
	3 AMS	Intolerável	Desconfortável
	5 AMS	Intolerável	Desconfortável

Fonte: Autor (2025).

Vale lembrar que, antes de inserir o(s) AMS, a sensibilidade humana às vibrações correspondia à categoria intolerável de percepção na escala de Goldman, com acelerações de pico elevadas entre 3,5 e 6,4 m/s² (≈ 0,4 a 0,7 g). Em termos de acelerações RMS, os resultados variaram de 0,5 a 1,4 m/s², com uma média de 1,05 m/s². Esses resultados estão acima do limite de aceleração RMS estabelecido pela ISO 10137 (2007) para o conforto humano (JUNGES; LA ROVERE; PINTO, 2017).

Comparando esse resultado com os dados da **Tabelas 13** e **14**, percebe-se que a incorporação dos AMS resultou em uma significativa redução das acelerações de pico e RMS. Após a implementação dos dispositivos, a resposta vibratória da estrutura deslocou-se da categoria intolerável para a faixa de transição entre

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

desconfortável e intolerável na escala de Goldman, indicando uma melhoria na percepção subjetiva das vibrações. No entanto, segundo os critérios da ISO 10137 (2007), mesmo após a mitigação, as acelerações RMS permanecem inseridas na faixa classificada como intolerável. Contudo, embora ainda exista vibrações consideradas elevadas para a sensibilidade humana, o nível global de desconforto foi substancialmente reduzido, evidenciando a eficácia dos AMS na mitigação dos efeitos dinâmicos.

5.4 Comparação dos Resultados Ótimos

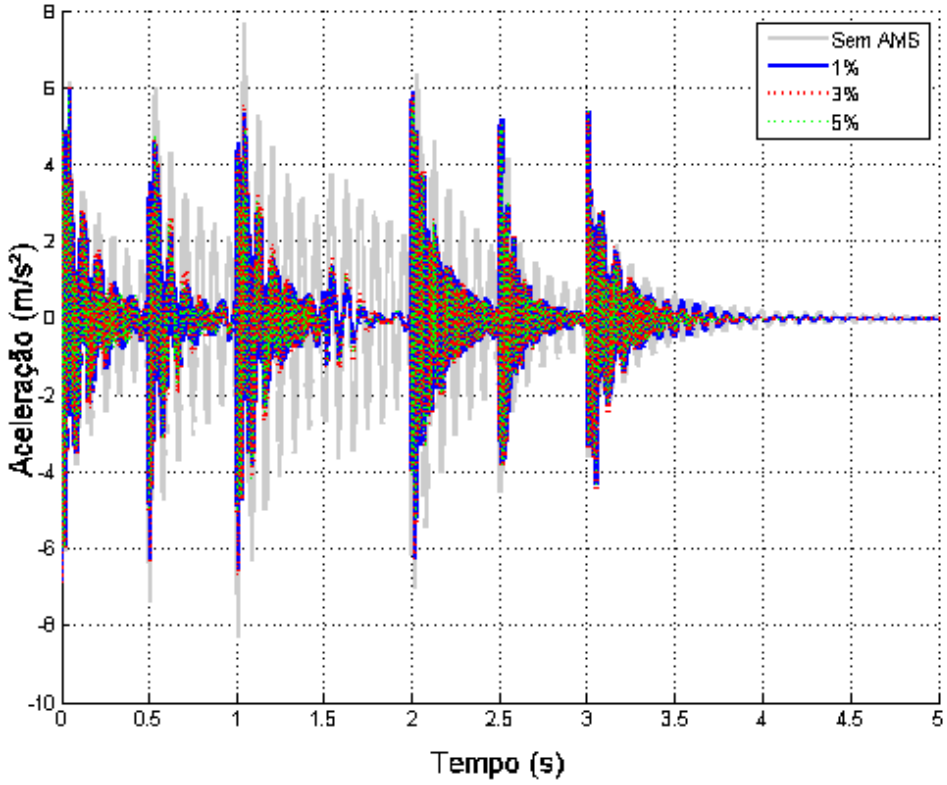
As **Figuras 24** a **41** trazem comparações de aceleração, velocidade e deslocamento entre a laje sem AMS e com os diversos cenários de AMS estudados. Analisando essas figuras, percebe-se claramente a redução da resposta da laje, apesar dos picos (valores máximos) serem pouco alterados. Analisando somente os gráficos é difícil mensurar a eficiência do(s) AMS. Para facilitar essa compreensão, apresenta-se nas **Tabelas 8**, **9**, **10** e **12** os valores RMS de cada resposta.

Os resultados mostram que a implementação dos AMS levou a uma redução significativa da aceleração RMS em todos os cenários analisados. Observa-se que, mesmo com um único AMS, já há uma diminuição expressiva nos níveis de vibração, com reduções superiores a 39% para os diferentes valores do parâmetro μ. Com o aumento do número de AMS, a atenuação das acelerações RMS se torna ainda mais pronunciada, atingindo reduções superiores a 41% nos casos com μ=5%. Embora a variação no número de AMS resulte em pequenas diferenças na eficiência global, a tendência geral indica que a presença desses dispositivos é altamente benéfica para a mitigação das vibrações. Além disso, uma vez que a maior parte da atenuação já é obtida com apenas um dispositivo adequadamente sintonizado, os resultados sugerem que uma distribuição longitudinal dos AMS ao longo do comprimento da laje poderia potencialmente gerar ganhos adicionais de desempenho dinâmico, ao invés de concentrar todos os dispositivos em uma única posição.

Observa-se, nas **Figuras 24**, **27**, **30**, **33**, **36** e **39**, que as respostas de aceleração apresentam amortecimento significativo no intervalo compreendido entre 1,5 s e 2,0 s. Esse comportamento ocorre no momento em que o pedestre se encontra aproximadamente na metade do vão da laje, posição que coincide com a localização dos Amortecedores de Massa Sintonizados.

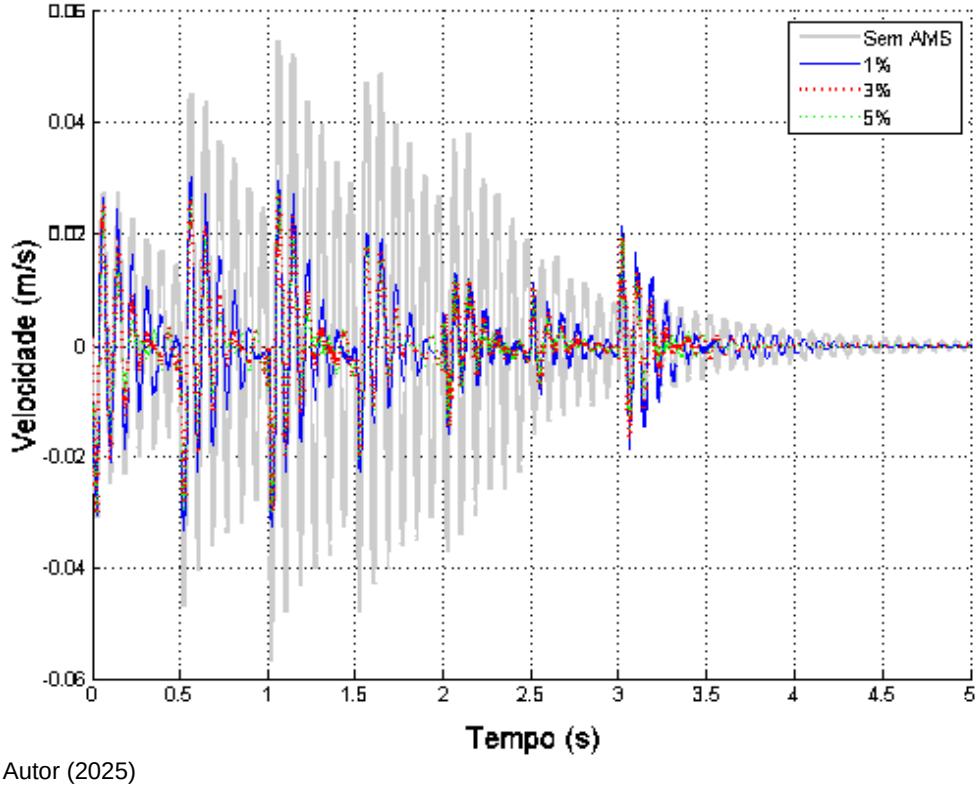
Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 24 – Aceleração ao longo do tempo com Den Hartog



Fonte: Autor (2025)

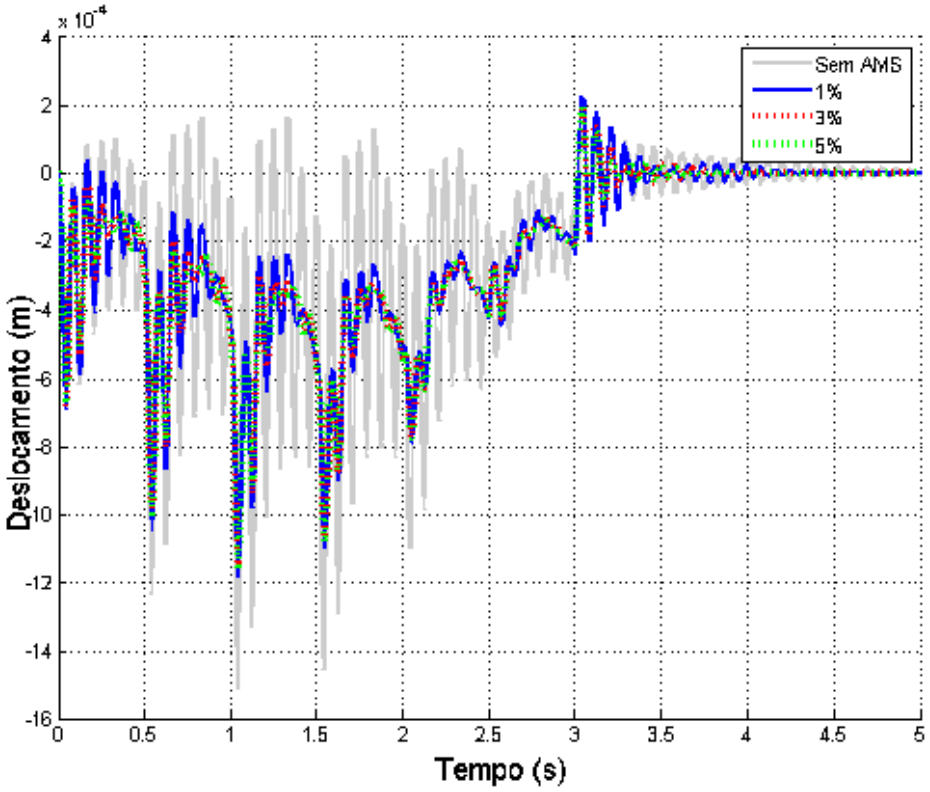
Figura 25 – Velocidade ao longo do tempo com Den Hartog



Fonte: Autor (2025)

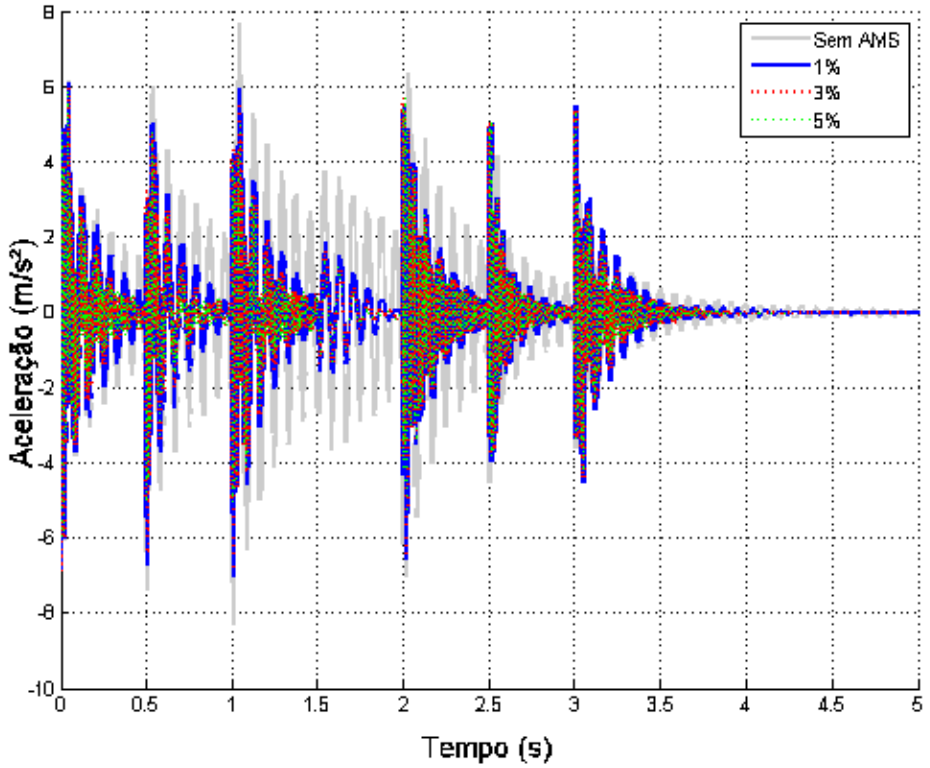
Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 26 – Deslocamento ao longo do tempo com Den Hartog



Fonte: Autor (2025)

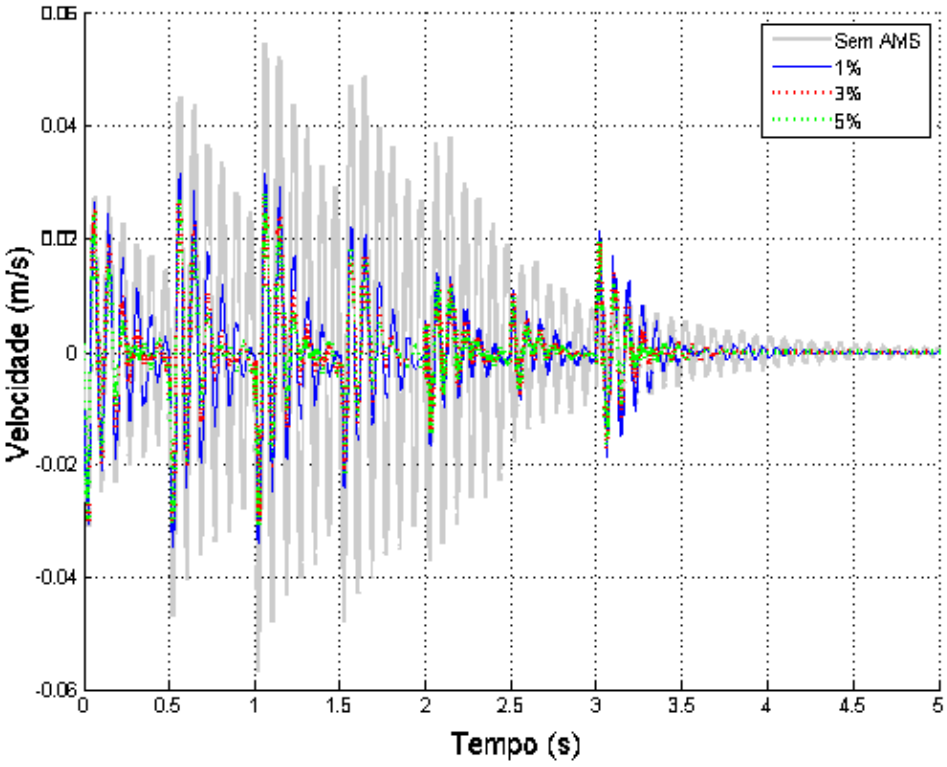
Figura 27 – Aceleração ao longo do tempo com Warburton



Fonte: Autor (2025)

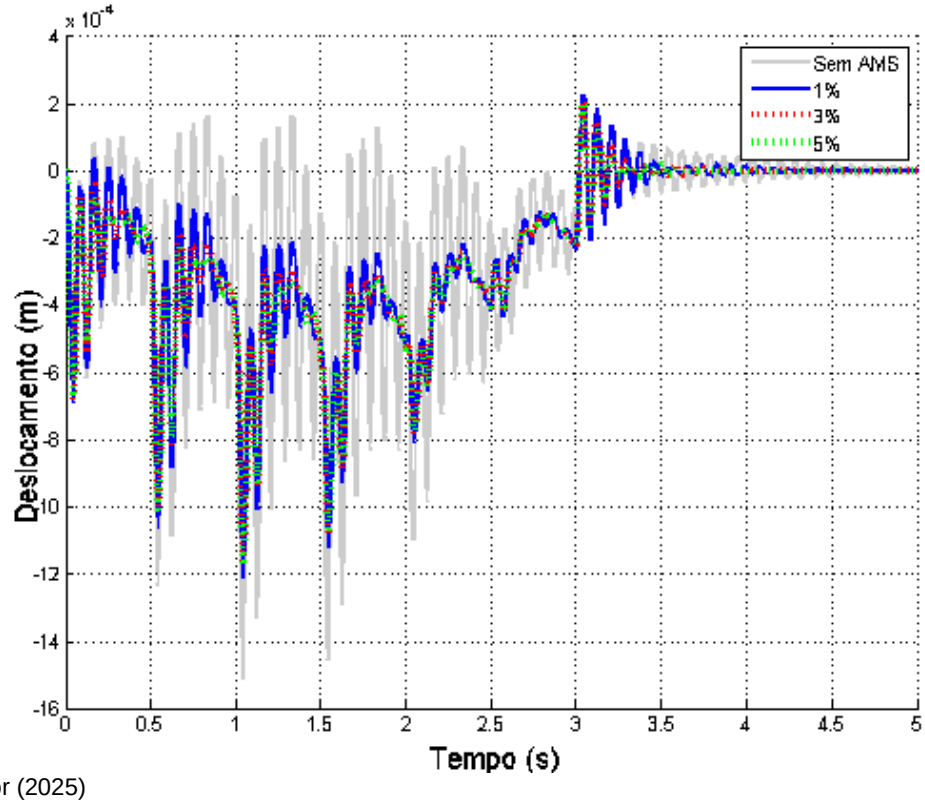
Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 28 – Velocidade ao longo do tempo com Warburton



Fonte: Autor (2025)

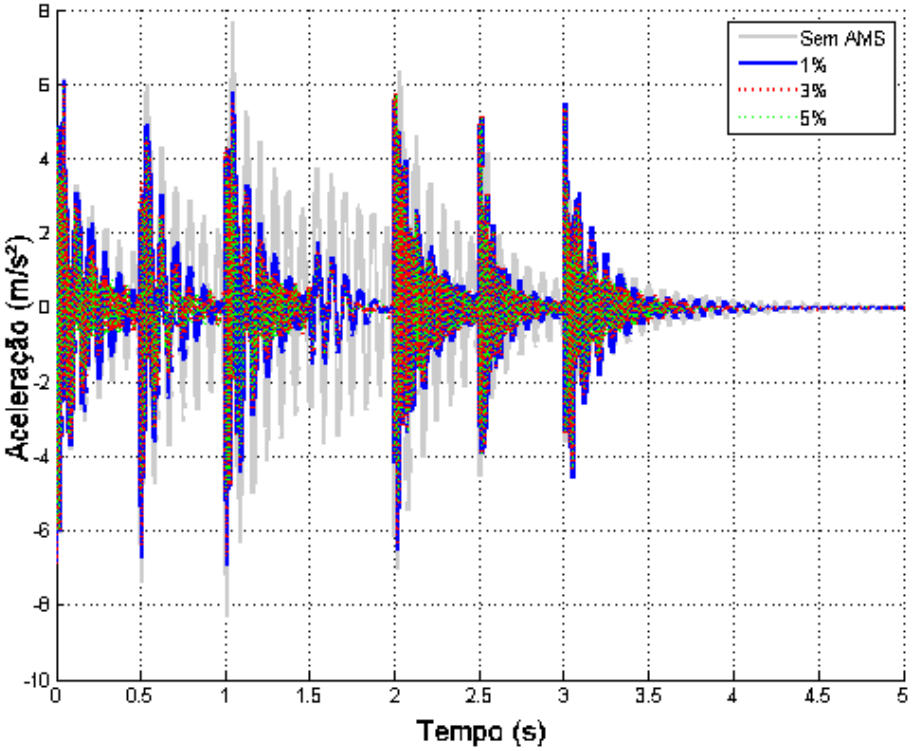
Figura 29 – Deslocamento ao longo do tempo com Warburton



Fonte: Autor (2025)

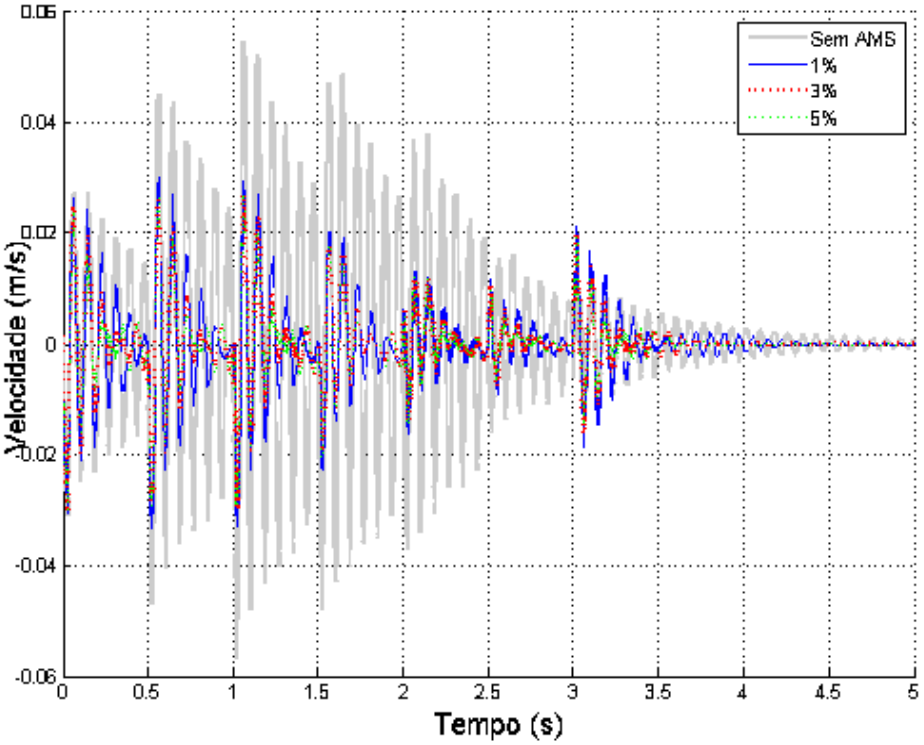
Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 30 – Aceleração ao longo do tempo com Krenk



Fonte: Autor (2025)

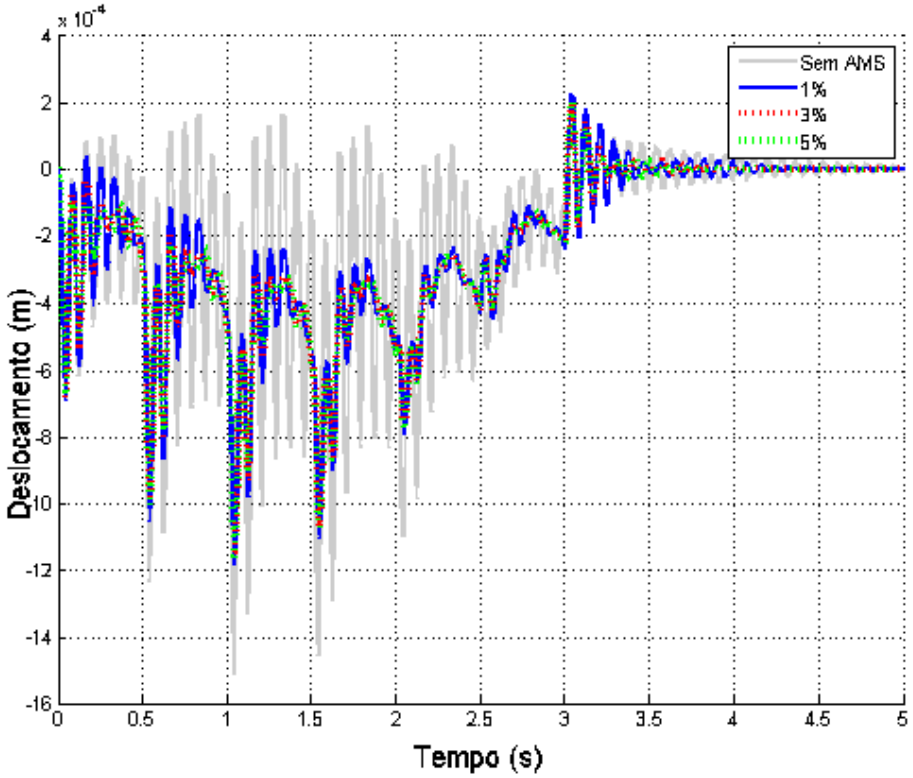
Figura 31 – Velocidade ao longo do tempo com Krenk



Fonte: Autor (2025)

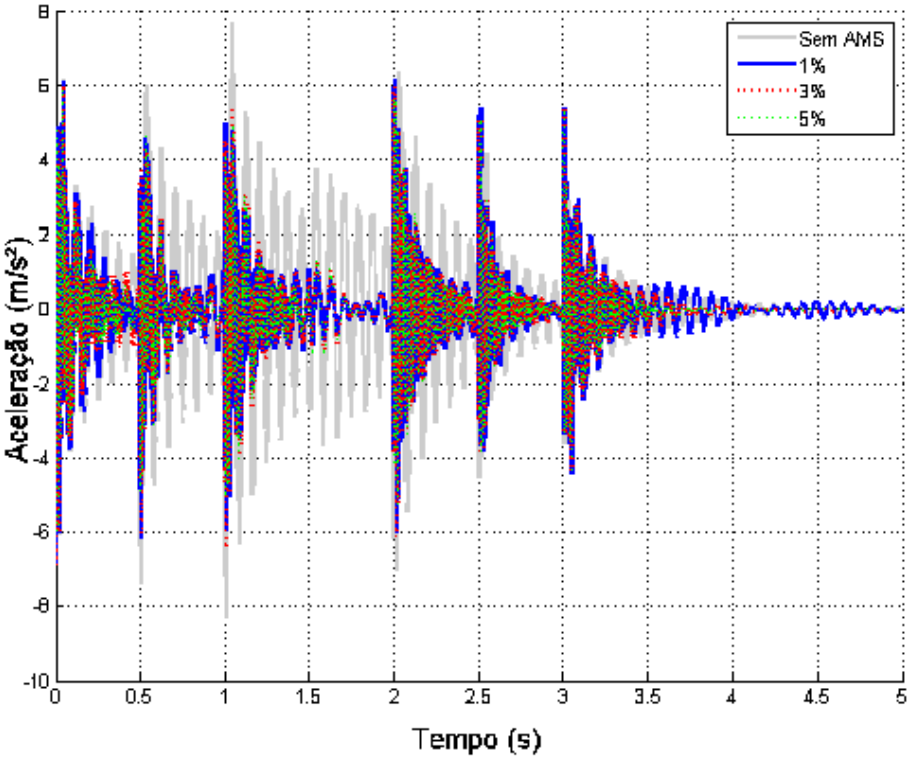
Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 32 – Deslocamento ao longo do tempo com Krenk



Fonte: Autor (2025)

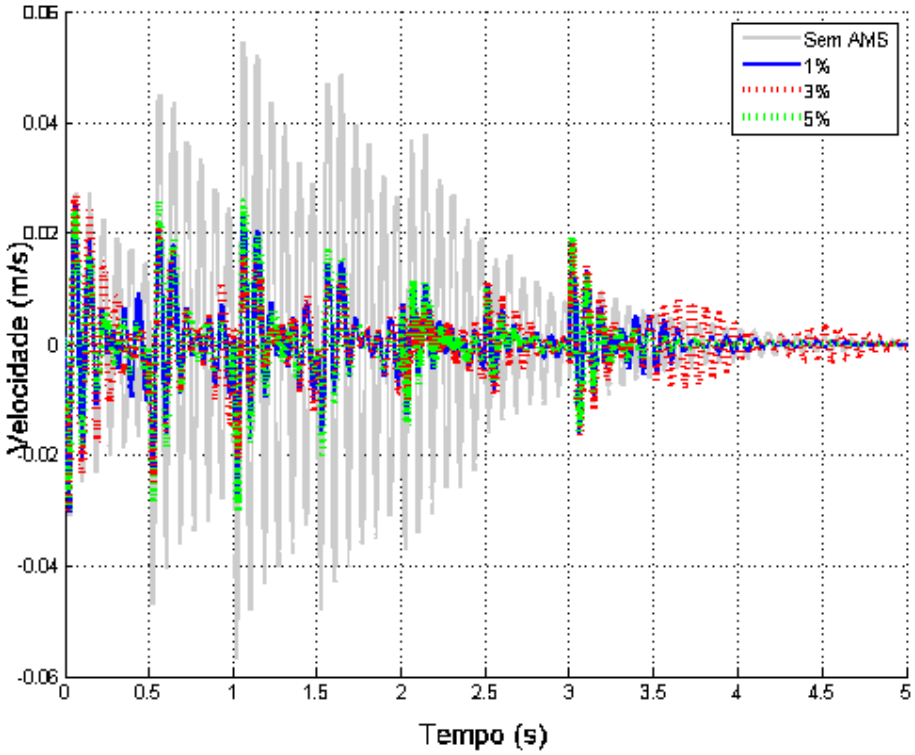
Figura 33 – Aceleração ao longo do tempo com FA para 1 AMS



Fonte: Autor (2025)

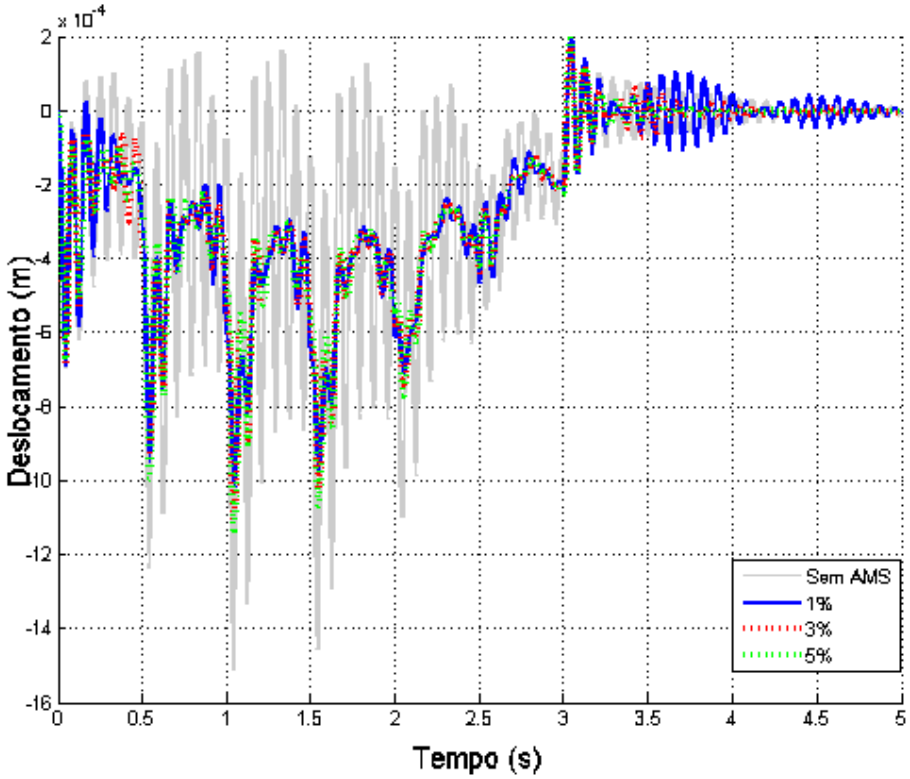
Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 34 – Velocidade ao longo do tempo com FA para 1 AMS



Fonte: Autor (2025)

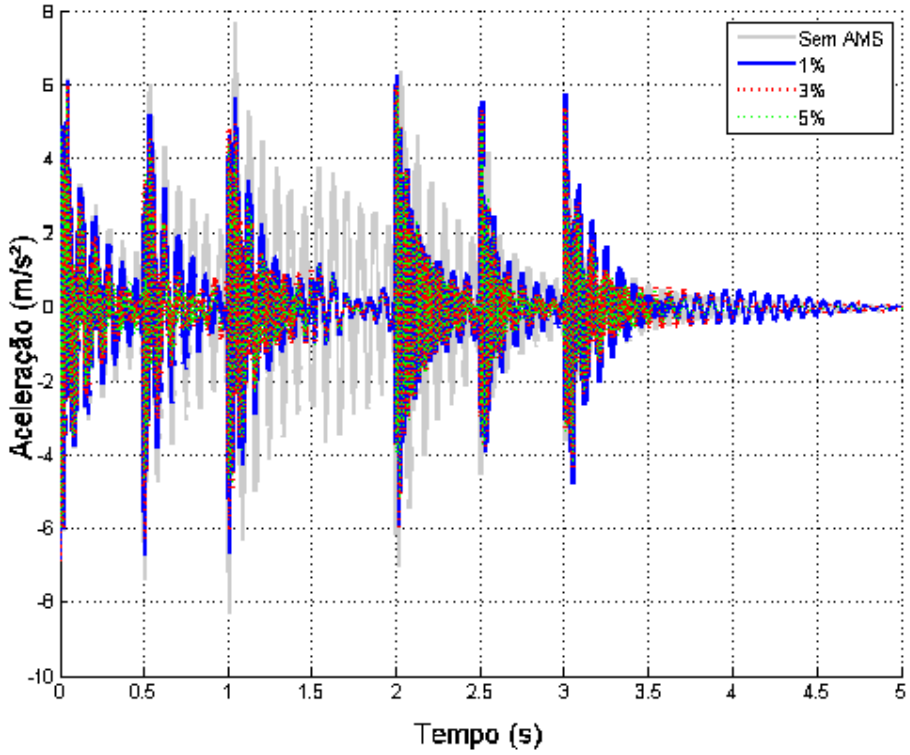
Figura 35 – Deslocamento ao longo do tempo com FA para 1 AMS



Fonte: Autor (2025)

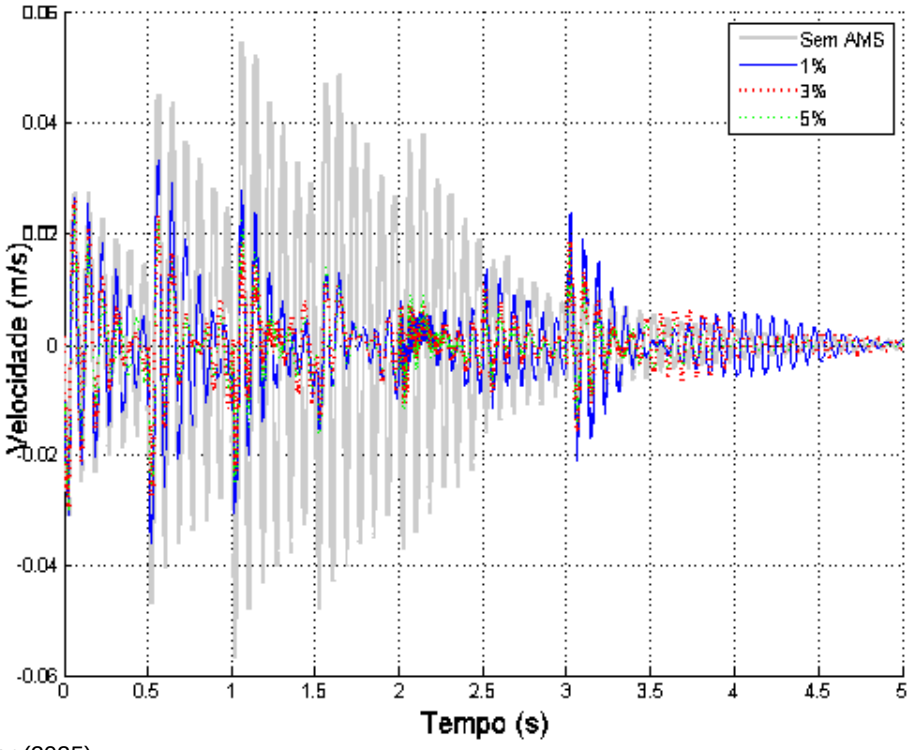
Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 36 – Aceleração ao longo do tempo com FA para 3 AMS



Fonte: Autor (2025)

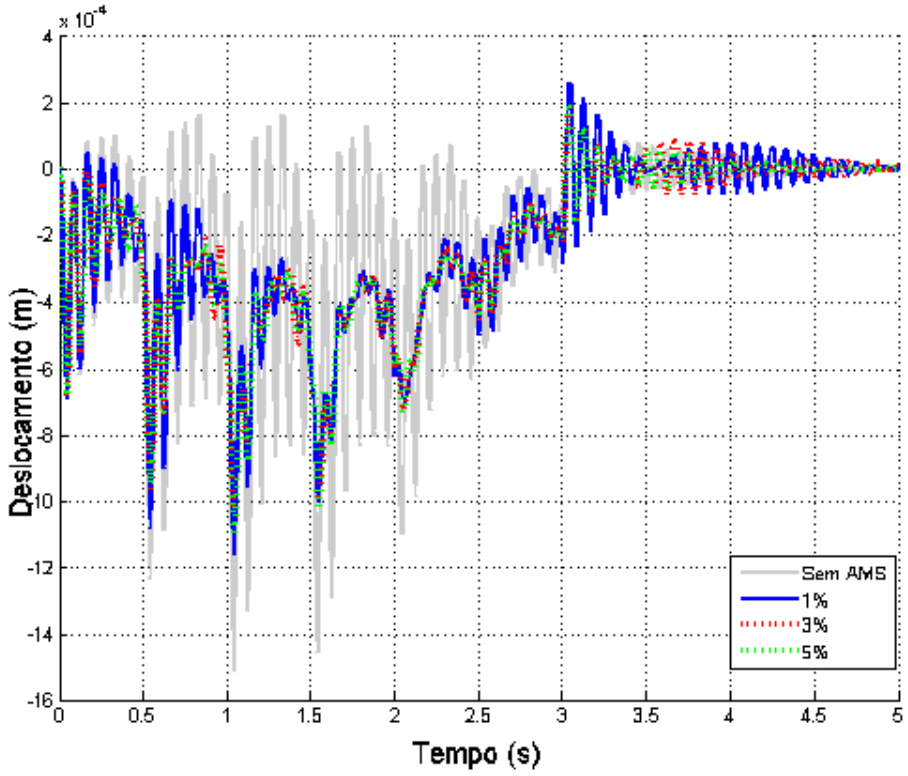
Figura 37 – Velocidade ao longo do tempo com FA para 3 AMS



Fonte: Autor (2025)

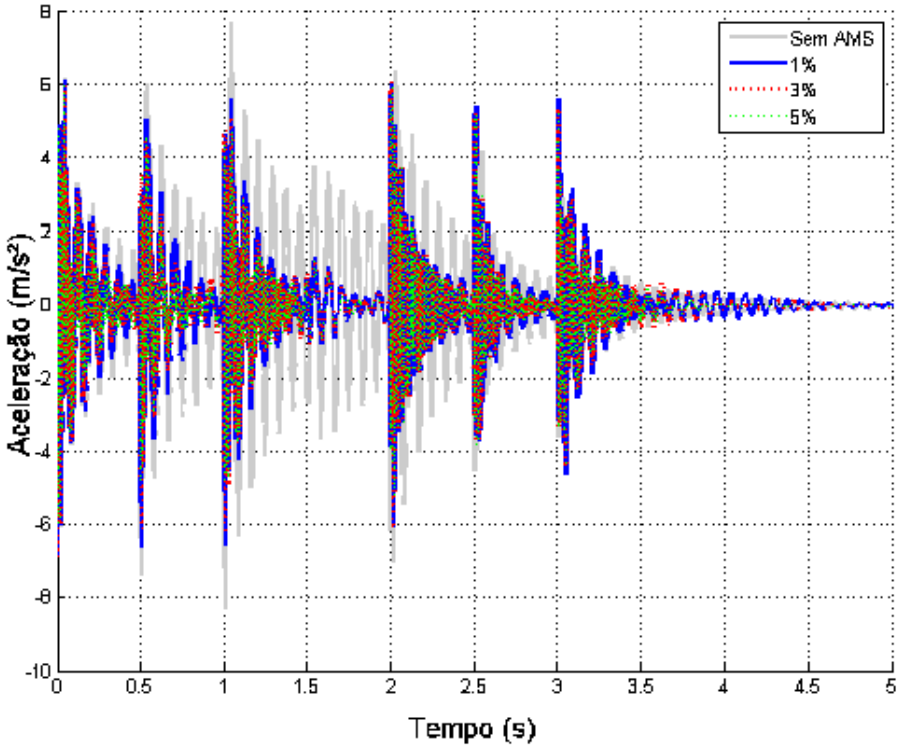
Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 38 – Deslocamento ao longo do tempo com FA para 3 AMS



Fonte: Autor (2025)

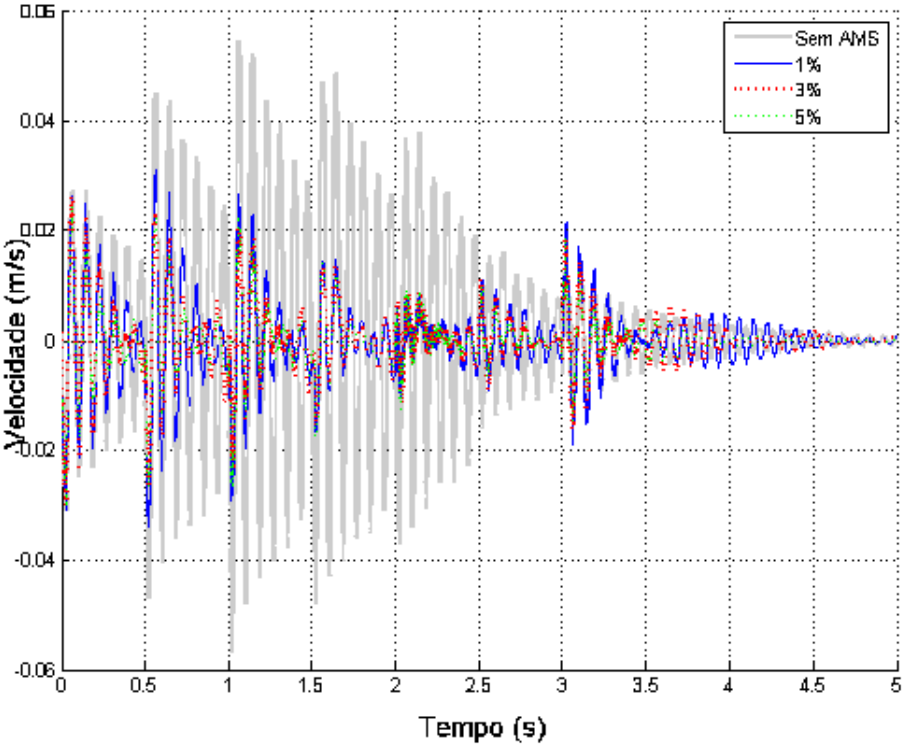
Figura 39 – Aceleração ao longo do tempo com FA para 5 AMS



Fonte: Autor (2025)

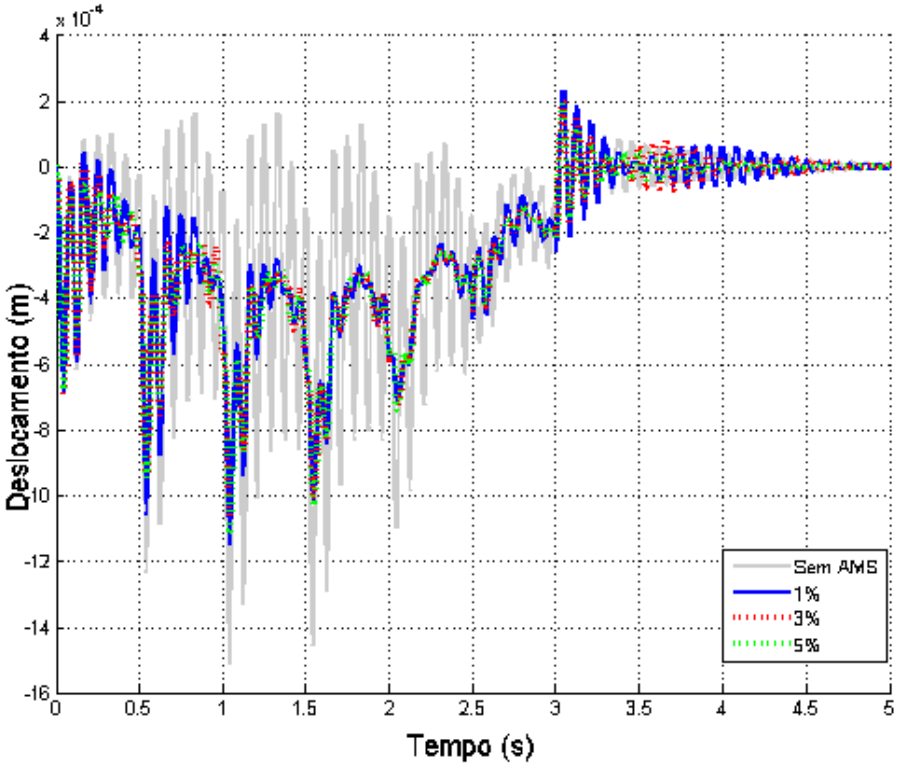
Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Figura 40 – Velocidade ao longo do tempo com FA para 5 AMS



Fonte: Autor (2025)

Figura 41 – Deslocamento ao longo do tempo com FA para 5 AMS



Fonte: Autor (2025)

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de AMS apresenta-se como uma estratégia eficiente para mitigar os efeitos de vibrações indesejadas em estruturas sujeitas a carregamentos dinâmicos. A análise realizada neste estudo demonstrou que a implementação dos AMS pode reduzir significativamente os níveis de vibração, contribuindo para a integridade estrutural e melhorar a operabilidade do sistema.

Desenvolveu-se um modelo computacional que compreende o desempenho estrutural da estrutura por meio de programação no MATLAB, utilizando a teoria de viga de Euler-Bernoulli e técnicas de otimização computacional baseadas em meta-heurística. Foram considerados os modelos teóricos de Den Hartog, Warburton e Krenk, além da otimização por meio do algoritmo *Firefly*. Os resultados obtidos demonstram a eficiência dos AMS para reduzir a aceleração RMS da laje mista, com destaque para os maiores valores do parâmetro de razão de massa (μ), que embora apresentaram os melhores desempenhos, não tiveram ganho significativo para os menores valores de razão de massa.

Adicionalmente, todos os amortecedores de massa sintonizados adotados no estudo possuem características idênticas, com a massa total correspondente a 1%, 3% e 5% da massa estrutural distribuída de forma uniforme entre os dispositivos. Embora a utilização de múltiplos amortecedores permita, em princípio, a atribuição de propriedades distintas a cada unidade (estratégia particularmente vantajosa para o controle simultâneo de mais de um modo de vibração) essa potencialidade não foi explorada neste trabalho. Assim, a configuração adotada não tira pleno proveito das vantagens inerentes aos sistemas com MAMS, o que contribui para explicar a ausência de ganhos significativos em relação ao uso de um único AMS.

Os resultados indicam que a utilização dos MAMS levou a reduções significativas na aceleração estrutural, atingindo até 41,42% na otimização FA com três AMS, valor compatível com outros estudos encontrados na literatura. No entanto, considerando que uma configuração com apenas um AMS e razão de massa de 1% já foi capaz de alcançar reduções próximas a esse valor, seria pertinente, em futuros trabalhos, investigar o desempenho do sistema para razões de massa inferiores a 1%, como 0,5% ou até menores.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

A comparação com as curvas normativas da ISO 10137 (2007) foi realizada considerando uma aceleração de 0,7 m/s² na frequência de 12 Hz. Esse valor posicionou-se acima da curva correspondente a "uma pessoa caminhando sobre a passarela e outra parada no meio do vão", acima da "curva base" e também acima da curva de "avaliação geral". Assim, a estrutura situa-se em uma região normalmente considerada desagradável a intolerável para ocupação, sendo a vibração percebida por pedestres.

Na escala de Goldman, a vibração de 0,7 m/s² (0,1g) a 12 Hz encontra-se dentro da faixa “desconfortável”, acima da categoria “perceptível” e entre a transição de “desconfortável” e “intolerável”. Dessa forma, embora estrutura tenha reduzido significativamente as vibrações, tanto para a classificação da ISO 10137 (2007) como Goldman (1948), a energia da vibração implica em desconforto.

Com a incorporação dos AMS, a estrutura analisada apresentou níveis de vibração que, embora seja desconfortável, considera-se funcional para a maioria dos cenários de uso. Entretanto, dependendo da sensibilidade dos usuários e dos requisitos específicos do projeto, medidas adicionais de mitigação podem ser adotadas para aprimorar ainda mais o desempenho vibratório da laje mista. Caso o objetivo final, exija minimizar qualquer percepção de vibração, pode-se considerar aumentar ainda mais o número de AMS, ou optar por medidas complementares, como o uso de Amortecedores Viscosos (AV). Também, a eficiência dos AMS pode ser aprimorada ao serem distribuídos em diferentes pontos da estrutura, em vez de se concentrar exclusivamente no meio do vão. A variação da razão de massa entre os AMS também apresenta potencial para otimizar a resposta vibratória da estrutura, em comparação com a divisão uniforme entre os dispositivos. Dessa forma, a escolha estratégica da distribuição espacial e dos parâmetros de cada AMS pode levar a um desempenho ainda mais eficiente na redução das vibrações.

A aplicação de AMS pode representar uma alternativa viável em comparação com métodos tradicionais de reforço estrutural, especialmente em situações onde intervenções físicas extensas não são desejáveis ou viáveis. No entanto, sua eficácia a longo prazo requer um planejamento adequado de manutenção e monitoramento, garantindo que os dispositivos permaneçam operacionais e ajustados às condições estruturais ao longo do tempo.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

Por fim, reforça-se a importância de abordagens inovadoras para o controle de vibrações estruturais, contribuindo para o desenvolvimento de práticas mais seguras e eficientes na engenharia civil. Para pesquisas futuras, sugere-se:

- A realização de testes experimentais em modelos físicos e a implementação de ensaios numéricos avançados para refinar ainda mais os parâmetros de projeto dos AMS. Também estudos futuros podem explorar diferentes configurações ou combinações de dispositivos para aprimorar ainda mais a eficiência do sistema e adaptar sua aplicação a outros tipos de estruturas.
- Além disso, recomenda-se a investigação do desempenho do sistema para razões de massa inferiores a 1%, como 0,5% ou menos, uma vez que os resultados obtidos com 1% já demonstraram excelente eficiência, indicando a possibilidade de um ponto ótimo com menor demanda de massa adicional.
- Recomenda-se investigar configurações mais eficientes de distribuição espacial dos dispositivos ao longo da estrutura, quanto a adoção de distribuições não uniformes de massa.
- A avaliação do desempenho desses dispositivos em estruturas reais ao longo do tempo pode fornecer informações valiosas para otimizar sua aplicação em diferentes tipos de edificações e infraestruturas.
- Por fim, destaca-se que o presente estudo considerou apenas a limitação flexional da estrutura; assim, futuras análises que incorporem efeitos torcionais e/ou laterais poderão oferecer uma compreensão mais abrangente e realista do comportamento dinâmico da laje mista equipada com AMS.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEN, D. E.; PERNICA, G. **Control of floor vibration**. Construction Technology Update No. 22, Institute for Research in Construction, National Research Council of Canada, 1998.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:2023 - Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento.** Rio de Janeiro, 2023.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800:2008 - Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios.** Rio de Janeiro, 2008.

BACHMANN, H.; AMMANN, W. J. **Vibrations in Structures: Induced by Man and Machines.** IABSE, 1987.

BATTISTA, R. C.; ROITMAN, N. **Modelagem da marcha humana utilizando séries de Fourier.** Revista Brasileira de Engenharia, v. 10, n. 3, p. 45-52, 1990.

BATHE, K.-J. **Finite element procedures in engineering analysis.** Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1996.

CAMPBELL, R. **Builder faced bigger crisis than falling windows**. The Boston Globe, 3 mar. 1995. Disponível em: https://web.archive.org/web/20130729222502/http://www.pulitzer.org/archives/5826. Acesso em: 15 fev. 2025.

CANADIAN STANDARDS ASSOCIATION. **CAN3-S16.1-M84*: Limit* states design of steel structures**. Ottawa: Canadian Standards Association, 1984.

CEN. **EN 1994-1-1:2005 – Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings**. Brussels: European Committee for Standardization, 2005.

CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D. **Introduction to finite elements in engineering.** 3. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering.** 4. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2017.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures.** 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1993.

DALLARD, P.; FITZPATRICK, A. J.; FLINT, A.; LE BOURVA, S.; LOW, A.; RIDSILL-SMITH, R. M.; WILLFORD, M. R. **The London Millennium Footbridge.** The Structural Engineer, v. 79, n. 22, p. 17-33, 2001.

DEN HARTOG, J.P. **Mechanical Vibrations. McGraw Hill Book Company.** New York, 1956.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

EBRAHIMPOUR, A.; FUNG, T.; DANG, A. A. **Forças durante a marcha humana: Uma análise utilizando séries de Fourier.** Journal of Biomechanics, v. 22, n. 5, p. 523-533, 1989.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **EN 1990: Eurocode – Basis of structural design.** Brussels: CEN, 2002.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN). **EN 1991-2: Eurocode 1 – Actions on structures – Part 2: Traffic loads on bridges.** Brussels: CEN, 2003.

FIGUEIREDO, F. P.; SILVA, J. G. S. da; LIMA, L. R. O. de; VELLASCO, P. C. G. da S.; ANDRADE, S. A. L. de. **A parametric study of composite footbridges under pedestrian walking loads**. *Engineering Structures*, v. 30, n. 3, p. 605–615, 2008. DOI: https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.04.021.

FIGUEIREDO, F.P. **Estudo do comportamento dinâmico de passarelas devido ao caminhar de pedestres.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

FOURIER, J.-B. J. **The Analytical Theory of Heat.** Translated by Alexander Freeman. Cambridge: University Press, 1878.

GAMBIHR, M. L. **Design of Reinforced Concrete Structures.** 1. ed. New Delhi: PHI Learning, 2014.

GARCIA, L. M.; PINHEIRO, C. J. **Materiais Compósitos em Ambientes Agressivos: Características e Vantagens.** 1. ed. Porto Alegre: Editora Tech, 2021.

GIARALIS, A.; TAFLANIDIS, A. A. **Optimal tuned mass-damper-inerter (TMDI) design for seismically excited MDOF structures with model uncertainties based on reliability criteria.** Structural Control and Health Monitoring, 2018.

GOLDMAN, D.E. USN MRI Rept. 1, NM 004 001. March 1948.

HANSEN, Colin H.; SNYDER, Scott D**. Active control of noise and vibration.** London: E & FN Spon, 1997.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. ISO 10137:2007. **Bases for Design of Structures - Serviceability of Buildings and Walkways Against Vibrations.** Geneva, 2007.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. ISO 2631-1:1997. **Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole-body vibration.** Geneva: ISO, 1997.

JUNGES, P. **Análise de vibrações de uma laje mista de concreto e perfis de PRFV induzidas por atividades humanas.** 2010. Dissertação de Mestrado (Engenharia Civil). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

JUNGES, P.; LA ROVERE, H. L.; PINTO, R. A. C. **Vibration Analysis of a Composite Concrete/GFRP Slab Induced by Human Activities**. Jornal of Composites Science, 2017. doi:10.3390/jcs1020011

KAREEM, A.; KLINE, S. **Performance of Tuned Mass Dampers Under Wind Loads.** Journal of Structural Engineering, ASCE, 1995.

KAREEM, A.; KLINE, S. **Performance of multiple mass dampers under random loading.** Journal of Structural Engineering, v. 121, n. 2, p. 348-361, 1995.

KERR, B. **Modelos matemáticos para a marcha humana: Aplicações das séries de Fourier.** Human Movement Science, v. 17, n. 2, p. 205-214, 1998.

KRENK, S. **Frequency analysis of tuned mass dampers on undamped structures.** Journal of Engineering Mechanics, 131(4), 340-348, 2005.

LA ROVERE, H.L.; SANTOS NETO, A.B.S. **Flexural stiffness characterization of fiber reinforced plastic (FRP) pultruded beams.** Compos. Struct. 2007, 81, 274–282.

MEINHARDT, C.; NEWLAND, D.; TALBOT, J.; TAYLOR, D. **Vibration performance of London's Millennium Footbridge**. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON SOUND AND VIBRATION – ICSV24, 24., 2017, London. Proceedings… London: International Institute of Acoustics and Vibration, 2017.

PAVIC, A., ŽIVANOVIĆ, S., REYNOLDS, P. **Footbridge vibrations due to walking: Modelling and design issues.** Progress in Structural Engineering and Materials, 9(2), 123-135, 2007.

RAINER, H.; LÉVY, M.; SOUZA, C. C. **Estudo experimental das forças de reação do solo durante a marcha.** Arquivos Brasileiros de Biomecânica, v. 4, n. 2, p. 89-97, 1988.

RAINER, J.H.; PERNICA, G.; ALLEN, D.E. **Dynamic Loading and Response of Footbridges**; Institute for Reseach in Construction, National Research Council of Canada: Ottawa, ON, Canada, 1988.

REYNOLDS, P., & PAVIC, A. **Vibration performance of footbridges under human-induced excitation.** Journal of Sound and Vibration, 245(2), 506-508, 2002.

SANTOS, M. R.; OLIVEIRA, L. G. **Características dos Materiais Compósitos e Suas Aplicações.** Revista de Engenharia de Materiais, Rio de Janeiro, v. 15, n. 4, p. 123-134, out. 2023.

SILVA, F. T.; PIMENTEL, R. L.; GOMES, H. M. **Vibrações de passarelas de pedestres na direção vertical considerando modelos biodinâmicos de pessoas caminhando.** Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

SILVA JÚNIOR, L. A.; PINTO, J. F. A. **Experimantal analysis of walking induced vibrations in composite floor and performance evaluation considering human confort.** Ambiente Construído, Porto Alegre, v. 23, n. 1, p. 131-144, jan./mar. 2023.

SILVA, J. P. **Vantagens dos Materiais Compósitos: Teoria e Aplicações.** 1. ed. São Paulo: Editora ABC, 2023.

SILVA, J. G. S. da; VELLASCO, P. C. G. da S.; DE ANDRADE, S. A. L.; DE LIMA, L. R. O.; FIGUEIREDO, F. P. **Vibration analysis of footbridges due to vertical human loads.** Computers & Structures, v. 85, n. 21–22, p. 1693-1703, 2007. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.02.012

SMITH, J. W.; WILLFORD, M. **The use of Tuned Mass Dampers to reduce vibration of the Millennium Bridge.** Journal of Bridge Engineering, v. 12, n. 6, p. 761-767, 2007.

SUMMIT One Vanderbilt. **Sobre o SUMMIT One Vanderbilt.** Disponível em: https://summitov.com/pt/about/. Acesso em: 5 mar. 2025.

THOMSON, W. T.; DAHLEH, M. A. **Theory of Vibration with Applications**. 5. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1998.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells.** 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1959.

VARELA, W. D**. Modelo teórico-experimental para análise de vibrações induzidas por pessoas caminhando sobre lajes de edifícios.** 2004. Tese de doutorado (Engenharia Civil) – COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

VARELA, W. D.; BATTISTA, R. C. **Controle de vibrações em lajes mistas utilizando amortecedores dinâmicos sintonizados.** *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 4, n. 5, p. 713-738, 2011.

VISIT LONDON. **Millennium Bridge.** Disponível em: https://www.visitlondon.com/things-to-do/place/442404-millennium-bridge. Acesso em: 4 set. 2024.

WARBURTON, G.B. **Optimum absorber parameters for various combination of response and excitation parameters**. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 10 381–401, 1982.

YANG, Xin-She. Firefly Algorithm. In: **Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms.** 2. ed. London: Luniver Press. p. 99-112, 2010.

ŽIVANOVIĆ, S., PAVIC, A., REYNOLDS, P. **Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review.** Journal of Sound and Vibration, 279(1-2), 1-74, 2005.

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

ANEXOS

ANEXO A – *Firefly Algorithm* original em MATLAB

```
% =========================================================== %
% Files of the Matlab programs included in the book:        %
% Xin-She Yang, Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms,   %
% Second Edition, Luniver Press, (2010).   www.luniver.com  %
% =========================================================== %

% ---------------------------------------------------------- %
% Firefly Algorithm for constrained optimization using      %
% for the design of a spring (benchmark)                    %
% by Xin-She Yang (Cambridge University) Copyright @2009    %
% ---------------------------------------------------------- %

function fa_mincon
% parameters [n N_iteration alpha betamin gamma]
para=[40 500 0.5 0.2 1];
format long;

help fa_mincon.m
% This demo uses the Firefly Algorithm to solve the
% [Spring Design Problem as described by Cagnina et al.,
% Informatica, vol. 32, 319-326 (2008). ]

% Simple bounds/limits
disp('Solve the simple spring design problem ...');
Lb=[0.05 0.25 2.0];
Ub=[2.0 1.3 15.0];

% Initial random guess
u0=Lb+(Ub-Lb).*rand(size(Lb));

[u,fval,NumEval]=ffa_mincon(@cost,@constraint,u0,Lb,Ub,para);

% Display results
bestsolution=u
bestojb=fval
total_number_of_function_evaluations=NumEval

%%% Put your own cost/objective function here --------%%%
%% Cost or Objective function
 function z=cost(x)
z=(2+x(3))*x(1)^2*x(2);

% Constrained optimization using penalty methods
% by changing f to F=f+ \sum lam_j*g^2_j*H_j(g_j)
% where H(g)=0 if g<=0 (true), =1 if g is false

%%% Put your own constraints here --------------------%%%
function [g,geq]=constraint(x)
% All nonlinear inequality constraints should be here
% If no inequality constraint at all, simple use g=[];
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
g(1)=1-x(2)^3*x(3)/(71785*x(1)^4);
% There was a typo in Cagnina et al.'s paper,
% the factor should 71785 insteady of 7178 !
tmpf=(4*x(2)^2-x(1)*x(2))/(12566*(x(2)*x(1)^3-x(1)^4));
g(2)=tmpf+1/(5108*x(1)^2)-1;
g(3)=1-140.45*x(1)/(x(2)^2*x(3));
g(4)=x(1)+x(2)-1.5;

% all nonlinear equality constraints should be here
% If no equality constraint at all, put geq=[] as follows
geq=[];

%%% End of the part to be modified -------------------%%%

%%% -------------------------------------------------%%%
%%% Do not modify the following codes unless you want %%%
%%% to improve its performance etc                    %%%
% -----------------------------------------------------
% ===Start of the Firefly Algorithm Implementation ======
% Inputs: fhandle => @cost (your own cost function,
%                    can be an external file  )
%     nonhandle => @constraint, all nonlinear constraints
%                    can be an external file or a function
%         Lb = lower bounds/limits
%         Ub = upper bounds/limits
%   para == optional (to control the Firefly algorithm)
% Outputs: nbest   = the best solution found so far
%          fbest   = the best objective value
%      NumEval = number of evaluations: n*MaxGeneration
% Optional:
% The alpha can be reduced (as to reduce the randomness)
% -----------------------------------------------------------

% Start FA
function [nbest,fbest,NumEval]...
           =ffa_mincon(fhandle,nonhandle,u0, Lb, Ub, para)
% Check input parameters (otherwise set as default values)
if nargin<6, para=[20 50 0.25 0.20 1]; end
if nargin<5, Ub=[]; end
if nargin<4, Lb=[]; end
if nargin<3,
disp('Usuage: FA_mincon(@cost, @constraint,u0,Lb,Ub,para)');
end

% n=number of fireflies
% MaxGeneration=number of pseudo time steps
% ------------------------------------------------
% alpha=0.25;      % Randomness 0--1 (highly random)
% betamn=0.20;     % minimum value of beta
% gamma=1;         % Absorption coefficient
% ------------------------------------------------
n=para(1);  MaxGeneration=para(2);
alpha=para(3); betamin=para(4); gamma=para(5);

% Total number of function evaluations
NumEval=n*MaxGeneration;

% Check if the upper bound & lower bound are the same size
if length(Lb) ~=length(Ub),
```

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
    disp('Simple bounds/limits are improper!');
    return
end

% Calcualte dimension
d=length(u0);

% Initial values of an array
zn=ones(n,1)*10^100;
% ------------------------------------------------
% generating the initial locations of n fireflies
[ns,Lightn]=init_ffa(n,d,Lb,Ub,u0);

% Iterations or pseudo time marching
for k=1:MaxGeneration,     %%%%% start iterations

% This line of reducing alpha is optional
 alpha=alpha_new(alpha,MaxGeneration);

% Evaluate new solutions (for all n fireflies)
for i=1:n,
   zn(i)=Fun(fhandle,nonhandle,ns(i,:));
   Lightn(i)=zn(i);
end

% Ranking fireflies by their light intensity/objectives
[Lightn,Index]=sort(zn);
ns_tmp=ns;
for i=1:n,
 ns(i,:)=ns_tmp(Index(i),:);
end

%% Find the current best
nso=ns; Lighto=Lightn;
nbest=ns(1,:); Lightbest=Lightn(1);

% For output only
fbest=Lightbest;

% Move all fireflies to the better locations
[ns]=ffa_move(n,d,ns,Lightn,nso,Lighto,nbest,...
      Lightbest,alpha,betamin,gamma,Lb,Ub);

end   %%%%% end of iterations

% ----------------------------------------------------------
% ----- All the subfunctions are listed here ------------
% The initial locations of n fireflies
function [ns,Lightn]=init_ffa(n,d,Lb,Ub,u0)
  % if there are bounds/limits,
if length(Lb)>0,
   for i=1:n,
   ns(i,:)=Lb+(Ub-Lb).*rand(1,d);
   end
else
   % generate solutions around the random guess
   for i=1:n,
   ns(i,:)=u0+randn(1,d);
   end
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
end

% initial value before function evaluations
Lightn=ones(n,1)*10^100;

% Move all fireflies toward brighter ones
function [ns]=ffa_move(n,d,ns,Lightn,nso,Lighto,...
            nbest,Lightbest,alpha,betamin,gamma,Lb,Ub)
% Scaling of the system
scale=abs(Ub-Lb);

% Updating fireflies
for i=1:n,
% The attractiveness parameter beta=exp(-gamma*r)
   for j=1:n,
      r=sqrt(sum((ns(i,:)-ns(j,:)).^2));
      % Update moves
if Lightn(i)>Lighto(j), % Brighter and more attractive
   beta0=1; beta=(beta0-betamin)*exp(-gamma*r.^2)+betamin;
   tmpf=alpha.*(rand(1,d)-0.5).*scale;
   ns(i,:)=ns(i,:).*(1-beta)+nso(j,:).*beta+tmpf;
      end
   end % end for j

end % end for i

% Check if the updated solutions/locations are within limits
[ns]=findlimits(n,ns,Lb,Ub);

% This function is optional, as it is not in the original FA
% The idea to reduce randomness is to increase the convergence,
% however, if you reduce randomness too quickly, then premature
% convergence can occur. So use with care.
function alpha=alpha_new(alpha,NGen)
% alpha_n=alpha_0(1-delta)^NGen=10^(-4);
% alpha_0=0.9
delta=1-(10^(-4)/0.9)^(1/NGen);
alpha=(1-delta)*alpha;

% Make sure the fireflies are within the bounds/limits
function [ns]=findlimits(n,ns,Lb,Ub)
for i=1:n,
     % Apply the lower bound
  ns_tmp=ns(i,:);
  I=ns_tmp<Lb;
  ns_tmp(I)=Lb(I);

  % Apply the upper bounds
  J=ns_tmp>Ub;
  ns_tmp(J)=Ub(J);
  % Update this new move
  ns(i,:)=ns_tmp;
end

% ----------------------------------------
% d-dimensional objective function
function z=Fun(fhandle,nonhandle,u)
% Objective
z=fhandle(u);
```

```
% Apply nonlinear constraints by the penalty method
% Z=f+sum_k=1^N lam_k g_k^2 *H(g_k) where lam_k >> 1
z=z+getnonlinear(nonhandle,u);

function Z=getnonlinear(nonhandle,u)
Z=0;
% Penalty constant >> 1
lam=10^15; lameq=10^15;
% Get nonlinear constraints
[g,geq]=nonhandle(u);

% Apply inequality constraints as a penalty function
for k=1:length(g),
    Z=Z+ lam*g(k)^2*getH(g(k));
end
% Apply equality constraints (when geq=[], length->0)
for k=1:length(geq),
   Z=Z+lameq*geq(k)^2*geteqH(geq(k));
end

% Test if inequalities hold
% H(g) which is something like an index function
function H=getH(g)
if g<=0,
    H=0;
else
    H=1;
end

% Test if equalities hold
function H=geteqH(g)
if g==0,
    H=0;
else
    H=1;
end
%% ==== End of Firefly Algorithm implementation ======
```

ANEXO B – *Firefly Algorithm* adaptado para a otimização da aceleração RMS

```
function fa_mincon
% parameters [n N_iteration alpha betamin gamma]
para=[30 100 0.2 0.2 1];
format long;

help fa_mincon.m
% This demo uses the Firefly Algorithm to solve the
% [Spring Design Problem as described by Cagnina et al.,
% Informatica, vol. 32, 319-326 (2008). ]

% Simple bounds/limits
disp('Solve the MTMD otimization problem ...');
Lb=[0.005 0.005];
Ub=[0.15 1.2];
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
% Initial random guess
u0=Lb+(Ub-Lb).*rand(size(Lb));

[u,fval,NumEval]=ffa_mincon(@cost,@constraint,u0,Lb,Ub,para);

% Display results
bestsolution=u
bestojb=fval
total_number_of_function_evaluations=NumEval

%%% Put your own cost/objective function here --------%%%
%% Cost or Objective function
 function z=cost(x)
z=lajemista_TMD_2(x);

% Constrained optimization using penalty methods
% by changing f to F=f+ \sum lam_j*g^2_j*H_j(g_j)
% where H(g)=0 if g<=0 (true), =1 if g is false

%%% Put your own constraints here --------------------%%%
function [g,geq]=constraint(x)
% All nonlinear inequality constraints should be here
% If no inequality constraint at all, simple use g=[];
% g(1)=1-x(2)^3*x(3)/(71785*x(1)^4);
% There was a typo in Cagnina et al.'s paper,
% the factor should 71785 insteady of 7178 !
% tmpf=(4*x(2)^2-x(1)*x(2))/(12566*(x(2)*x(1)^3-x(1)^4));
% g(2)=tmpf+1/(5108*x(1)^2)-1;
% g(3)=1-140.45*x(1)/(x(2)^2*x(3));
% g(4)=x(1)+x(2)-1.5;
g=[];
% all nonlinear equality constraints should be here
% If no equality constraint at all, put geq=[] as follows
geq=[];

%%% End of the part to be modified -------------------%%%

%%% -----------------------------------------------%%%
%%% Do not modify the following codes unless you want %%%
%%% to improve its performance etc                 %%%
% -----------------------------------------------------
% ===Start of the Firefly Algorithm Implementation ======
% Inputs: fhandle => @cost (your own cost function,
%                    can be an external file  )
%     nonhandle => @constraint, all nonlinear constraints
%                    can be an external file or a function
%         Lb = lower bounds/limits
%         Ub = upper bounds/limits
%   para == optional (to control the Firefly algorithm)
% Outputs: nbest   = the best solution found so far
%          fbest   = the best objective value
%      NumEval = number of evaluations: n*MaxGeneration
% Optional:
% The alpha can be reduced (as to reduce the randomness)
% -----------------------------------------------------------

% Start FA
function [nbest,fbest,NumEval]...
           =ffa_mincon(fhandle,nonhandle,u0, Lb, Ub, para)
```

```
% Check input parameters (otherwise set as default values)
if nargin<6, para=[20 50 0.25 0.20 1]; end
if nargin<5, Ub=[]; end
if nargin<4, Lb=[]; end
if nargin<3,
disp('Usuage: FA_mincon(@cost, @constraint,u0,Lb,Ub,para)');
end

% n=number of fireflies
% MaxGeneration=number of pseudo time steps
% ------------------------------------------------
% alpha=0.25;      % Randomness 0--1 (highly random)
% betamn=0.20;     % minimum value of beta
% gamma=1;         % Absorption coefficient
% ------------------------------------------------
n=para(1);  MaxGeneration=para(2);
alpha=para(3); betamin=para(4); gamma=para(5);

% Total number of function evaluations
NumEval=n*MaxGeneration;

% Check if the upper bound & lower bound are the same size
if length(Lb) ~=length(Ub),
    disp('Simple bounds/limits are improper!');
    return
end

% Calcualte dimension
d=length(u0);

% Initial values of an array
zn=ones(n,1)*10^100;
% ------------------------------------------------
% generating the initial locations of n fireflies
[ns,Lightn]=init_ffa(n,d,Lb,Ub,u0);

% Iterations or pseudo time marching
for k=1:MaxGeneration,     %%%%% start iterations

% This line of reducing alpha is optional
 alpha=alpha_new(alpha,MaxGeneration);

% Evaluate new solutions (for all n fireflies)
for i=1:n,
   zn(i)=Fun(fhandle,nonhandle,ns(i,:));
   Lightn(i)=zn(i);
end

% Ranking fireflies by their light intensity/objectives
[Lightn,Index]=sort(zn);
ns_tmp=ns;
for i=1:n,
 ns(i,:)=ns_tmp(Index(i),:);
end

%% Find the current best
nso=ns; Lighto=Lightn;
nbest=ns(1,:); Lightbest=Lightn(1);
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
% For output only
fbest=Lightbest;

fprintf('Firefly|%5.0f -----> %9.16f\n',k,fbest); % MODIFICADO PAULO JUNGES 16/12

% Move all fireflies to the better locations
[ns]=ffa_move(n,d,ns,Lightn,nso,Lighto,nbest,...
      Lightbest,alpha,betamin,gamma,Lb,Ub);

end   %%%%% end of iterations

% ----------------------------------------------------------
% ----- All the subfunctions are listed here ------------
% The initial locations of n fireflies
function [ns,Lightn]=init_ffa(n,d,Lb,Ub,u0)
  % if there are bounds/limits,
if length(Lb)>0,
   for i=1:n,
   ns(i,:)=Lb+(Ub-Lb).*rand(1,d);
   end
else
   % generate solutions around the random guess
   for i=1:n,
   ns(i,:)=u0+randn(1,d);
   end
end

% initial value before function evaluations
Lightn=ones(n,1)*10^100;

% Move all fireflies toward brighter ones
function [ns]=ffa_move(n,d,ns,Lightn,nso,Lighto,...
             nbest,Lightbest,alpha,betamin,gamma,Lb,Ub)
% Scaling of the system
scale=abs(Ub-Lb);

% Updating fireflies
for i=1:n,
% The attractiveness parameter beta=exp(-gamma*r)
   for j=1:n,
      r=sqrt(sum((ns(i,:)-ns(j,:)).^2));
      % Update moves
if Lightn(i)>Lighto(j), % Brighter and more attractive
   beta0=1; beta=(beta0-betamin)*exp(-gamma*r.^2)+betamin;
   tmpf=alpha.*(rand(1,d)-0.5).*scale;
   ns(i,:)=ns(i,:).*(1-beta)+nso(j,:).*beta+tmpf;
      end
   end % end for j

end % end for i

% Check if the updated solutions/locations are within limits
[ns]=findlimits(n,ns,Lb,Ub);

% This function is optional, as it is not in the original FA
% The idea to reduce randomness is to increase the convergence,
% however, if you reduce randomness too quickly, then premature
% convergence can occur. So use with care.
function alpha=alpha_new(alpha,NGen)
```

```
% alpha_n=alpha_0(1-delta)^NGen=10^(-4);
% alpha_0=0.9
delta=1-(10^(-4)/0.9)^(1/NGen);
alpha=(1-delta)*alpha;

% Make sure the fireflies are within the bounds/limits
function [ns]=findlimits(n,ns,Lb,Ub)
for i=1:n,
     % Apply the lower bound
  ns_tmp=ns(i,:);
  I=ns_tmp<Lb;
  ns_tmp(I)=Lb(I);

  % Apply the upper bounds
  J=ns_tmp>Ub;
  ns_tmp(J)=Ub(J);
  % Update this new move
  ns(i,:)=ns_tmp;
end

% ----------------------------------------
% d-dimensional objective function
function z=Fun(fhandle,nonhandle,u)
% Objective
z=fhandle(u);

% Apply nonlinear constraints by the penalty method
% Z=f+sum_k=1^N lam_k g_k^2 *H(g_k) where lam_k >> 1
z=z+getnonlinear(nonhandle,u);

function Z=getnonlinear(nonhandle,u)
Z=0;
% Penalty constant >> 1
lam=10^15; lameq=10^15;
% Get nonlinear constraints
[g,geq]=nonhandle(u);

% Apply inequality constraints as a penalty function
for k=1:length(g),
    Z=Z+ lam*g(k)^2*getH(g(k));
end
% Apply equality constraints (when geq=[], length->0)
for k=1:length(geq),
   Z=Z+lameq*geq(k)^2*geteqH(geq(k));
end

% Test if inequalities hold
% H(g) which is something like an index function
function H=getH(g)
if g<=0,
    H=0;
else
    H=1;
end

% Test if equalities hold
function H=geteqH(g)
if g==0,
    H=0;
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
else
    H=1;
end
%% ==== End of Firefly Algorithm implementation ======
```

ANEXO C – Função Passo. Modelagem do Caminhar

```
function [t,f_t]=passo
    peso_pessoa=520;      % Peso pessoa (N)
    delta_t=0.001;
    fc=2;                   % Frequência Fundamental do caminhar (entre 1 e 3 Hz)
    nh=3;                   % Número de harmônicos da série
    Tpasso=0.5;             % Período de aplicação do carregamento (s)
    %Tpasso2=Tpasso+delta_t;
    fmi=1.12;               % Fator de majoração do impacto do calcanhar (Varela
(2004, pg25)

    % Coeficientes dinâmicos (Varela(2004),pg28)
    alpha(1)=-0.22160*fc^3+1.11946*fc^2-1.44748*fc+0.5967;
    alpha(2)=-0.012037*(2*fc)^3+0.1494*(2*fc)^2-0.53146*(2*fc)+0.6285;
    alpha(3)=0.00009068*(3*fc)^5-0.0021066*(3*fc)^4+0.018364*(3*fc)^3-
0.077278*(3*fc)^2+0.17593*(3*fc)-0.1477;
    alpha(4)=-0.00051715*(4*fc)^4-0.014388*(4*fc)^3+0.14562*(4*fc)^2-
0.62994*(4*fc)-1.018469;

    % Diferença de fase entre o i-ésimo e o primeiro harmônico
    phi(1)=0;
    phi(2)=pi/2;
    phi(3)=pi;
    phi(4)=3*pi/2;

    % Construção da série
    for j=1:nh
        alpha_aux(j)=alpha(j);
        phi_aux(j)=phi(j);
    end
    Fm=peso_pessoa*(1+sum(alpha_aux));
    C1=(1/fmi-1);
    if nh<4
        C2=peso_pessoa*(1-alpha(2));
    elseif nh>4
        C2=peso_pessoa*(1-alpha(2)+alpha(4));
    end

    k=0;
    t=0;
    for i=0:delta_t:Tpasso
        if and(i>=0,i<0.04*Tpasso)
            k=k+1;
            t(k)=i;
            f_t(k)=(fmi*Fm-peso_pessoa)/(0.04*Tpasso)*t(k)+peso_pessoa;
        elseif and(i>=0.04*Tpasso,i<0.06*Tpasso)
            k=k+1;
            t(k)=i;
            f_t(k)=fmi*Fm*((C1*(t(k)-0.04*Tpasso))/(0.02*Tpasso)+1);
        elseif and(i>=0.06*Tpasso,i<0.15*Tpasso)
            k=k+1;
```

```
            t(k)=i;
            f_t(k)=Fm;
        elseif and(i>=0.15*Tpasso,i<0.9*Tpasso)
            k=k+1;
            t(k)=i;

f_t(k)=peso_pessoa+(peso_pessoa*alpha_aux(1)*sin(2*pi*1*fc*(t(k)+0.1*Tpasso)-
phi_aux(1))+peso_pessoa*alpha_aux(2)*sin(2*pi*2*fc*(t(k)+0.1*Tpasso)-
phi_aux(2))+peso_pessoa*alpha_aux(3)*sin(2*pi*3*fc*(t(k)+0.1*Tpasso)-phi_aux(3)));
% E R R O ! ! !
        elseif and(i>=0.9*Tpasso,i<Tpasso)
            k=k+1;
            t(k)=i;
            f_t(k)=10*(peso_pessoa-C2)*(t(k)/Tpasso-1)+peso_pessoa;
        elseif i>=Tpasso
            k=k+1;
            t(k)=i;
            f_t(k)=0;
        end
    end
end
```

ANEXO D – Função Objetivo. Modelo de Viga para 1 AMS

```
function [a_rms]=lajemista_TMD_2(x)
%% VARIÁVEIS DE PROJETO
% x(1)=ksi_opt;           %% razão de amortecimento ótimo
% x(2)=freq_opt;          %% razão frequência ótima

global t_plot u_tmd_plot v_tmd_plot a_tmd_plot

%% ANÁLISE DINÂMICA DA LAJE MISTA CONCRETO E PERFIS DE PRFV
% UNIDADES:
%   COMPRIMENTO:    m
%   FORÇA:          N

%% DADOS DE ENTRADA
n_nos=17;           % Número de nós
n_elem=n_nos-1;     % Número de elementos
n_gl=2;             % Número de graus de liberdade por nó
n_glbarra=n_gl*2;   % Número de graus de liberdade por barra

% COORDENADAS NODAIS
coord=[0 0; 0 0.125; 0 0.4107; 0 0.6964; 0 0.9821; 0 1.2678; 0 1.5535; 0 1.8392; 0
2.1249; 0 2.4106; 0 2.6963; 0 2.982; 0 3.2677; 0 3.5534; 0 3.8391; 0 4.125; 0
4.25];
%x=coord(:,2);
%z=coord(:,1);

% CONECTIVIDADE
con=[1 2; 2 3; 3 4; 4 5; 5 6; 6 7; 7 8; 8 9; 9 10; 10 11; 11 12; 12 13; 13 14; 14
15; 15 16; 16 17];

% COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS
L=zeros(1,n_elem);
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
for i=1:n_elem
    L(i)=norm(coord(con(i,2),:)-coord(con(i,1),:));
end

% GRAUS DE LIBERDADE (ux, ry - 0=livre, 1=fixo)
re=[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0];

% MÓDULO DE ELASTICIDADE DA SEÇÃO TRANSFORMADA (GPa)
e_prfv=26.21;   %Módulo de elasticidade longitudinal em GPa
E=e_prfv*10^9;  %N/m2
%g_prfv=4.29;    %Módulo de cisalhamento em GPa
%G=g_prfv*10^9;  %N/m2

% PROPRIEDADES DA SEÇÃO TRANSFORMADA DA LAJE
area_st=441;        %área em cm2
inercia_st=5004;    %Inércia em cm4
A=area_st*10^-4;         %m2
I=inercia_st*10^-8;      %m4

% MASSA ESPECÍFICA DA LAJE MISTA (kg/m3)
ro=1954;

%% CÁLCULO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ E MASSA DA ESTRUTURA
% REGRA DA CORRESPONDÊNCIA
for i=1:n_elem
    jk(:,i)=[2*con(i,1)-1; 2*con(i,1); 2*con(i,2)-1; 2*con(i,2)];
end

% MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS NO SISTEMA GLOBAL
Seg=zeros(n_glbarra);
for i=1:n_elem
    Seg(:,:,i)=[12*E*I/L(i)^3 6*E*I/L(i)^2 -12*E*I/L(i)^3 6*E*I/L(i)^2
        6*E*I/L(i)^2 4*E*I/L(i) -6*E*I/L(i)^2 2*E*I/L(i)
        -12*E*I/L(i)^3 -6*E*I/L(i)^2 12*E*I/L(i)^3 -6*E*I/L(i)^2
        6*E*I/L(i)^2 2*E*I/L(i) -6*E*I/L(i)^2 4*E*I/L(i)];
end

% MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA NÃO RESTRINGIDA
Sest=zeros(n_gl*n_nos);
for i=1:n_elem
    for j=1:n_glbarra
        for k=1:n_glbarra
            Sest(jk(j,i),jk(k,i))=Sest(jk(j,i),jk(k,i))+Seg(j,k,i);
        end
    end
end

% MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA RESTRINGIDA
k=0;
K=zeros(n_gl*n_nos-2);              % Inicialização da Matriz de Rigidez. Valor
(-2) referente aos gl restringidos
for i=1:n_nos*n_gl
    if re(i)==0
        k=k+1;
        n=0;
        for j=1:n_nos*n_gl
            if re(j)==0
                n=n+1;
                K(k,n)=Sest(i,j);
```

```
            end
        end
    end
end


% MATRIZ DE MASSA DOS ELEMENTOS NO SISTEMA GLOBAL
Meg=zeros(n_glbarra);
for i=1:n_elem
    Meg(:,:,i)=ro*A*L(i)/420*[156 22*L(i) 54 -13*L(i)
        22*L(i) 4*L(i)^2 13*L(i) -3*L(i)^2
        54 13*L(i) 156 -22*L(i)
        -13*L(i) -3*L(i)^2 -22*L(i) 4*L(i)^2];
end

% MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE DA ESTRUTURA NÃO RESTRINGIDA
Mest=zeros(n_gl*n_nos);
for i=1:n_elem
    for j=1:n_glbarra
        for k=1:n_glbarra
            Mest(jk(j,i),jk(k,i))=Mest(jk(j,i),jk(k,i))+Meg(j,k,i);
        end
    end
end

% MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE DA ESTRUTURA RESTRINGIDA
k=0;
M=zeros(n_gl*n_nos-2);              % Inicialização da Matriz de Massa. Valor (-
2) referente aos gl restringidos
for i=1:n_nos*n_gl
    if re(i)==0
        k=k+1;
        n=0;
        for j=1:n_nos*n_gl
            if re(j)==0
                n=n+1;
                M(k,n)=Mest(i,j);
            end
        end
    end
end

%% FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIGRAÇÃO
% Cáculo das frequências naturais e modos de vibração
[modo,lambda]=eig(K,M);         % Cálculo dos autovalores e autovetores
omega=sqrt(lambda);             % Frequências naturais circulares
omega_diag=zeros(length(K));
for i=1:length(K)
    omega_diag(i)=omega(i,i);
end

% Frequências naturais (Hz)
% freq_nat=omega_diag'/(2*pi);

%% RESPOSTA DINÂMICA

%% GENERALIZAÇÃO
% MATRIZ DE MASSA GENERALIZADA
Mr=transpose(modo)*M*modo;
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
% MATRIZ DE RIGIDEZ GENERALIZADA
Kr=transpose(modo)*K*modo;

%% AMORTECIMENTO
% AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH
ksi_1=1.71;           % Fator de amortecimento para o modo 1 (%)
ksi_5=1.71;           % Fator de amortecimento para o modo 5 (%)
a=2*omega_diag(1)*omega_diag(5)/(omega_diag(5)^2-omega_diag(1)^2)*[omega_diag(5) -
omega_diag(1); -1/omega_diag(5) 1/omega_diag(1)]*[ksi_1/100; ksi_5/100];

% MATRIZ DE AMORTECIMENTO GENERALIZADA
Cr=a(1)*Mr+a(2)*Kr;

% MATRIZ DE AMORTECIMENTO DA ESTRUTURA
C=inv(modo')*Cr*inv(modo);

%% TMD ANALÍTICO (VERSÃO BETA)
% NORMALIZAÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA, RIGIDEZ E AMORTECIMENTO
gdl_norm=16;                          % Grau de Liberdade para o qual será feita a
normalização
modo_norm2=modo/modo(gdl_norm,1);
Mr2=modo_norm2'*M*modo_norm2;
Kr2=modo_norm2'*K*modo_norm2;
Cr2=modo_norm2'*C*modo_norm2;

% PROPRIEDADES TMD
mi=0.05;
m_d=mi*Mr2(1,1);
omega_d=x(2)*omega(1,1);
ksi_d=x(1);
k_d=omega_d^2*m_d;
c_d=2*ksi_d*omega_d*m_d;

% MATRIZ DE MASSA, RIGIDEZ E AMORTECIMENTO DA ESTRUTURA RESTRINGIDA COM TMD
M_TMD=zeros(length(Mr2)+1);
K_TMD=zeros(length(Kr2)+1);
C_TMD=zeros(length(Cr2)+1);

% MATRIZ DE MASSA
k=0;
for i=1:length(M_TMD)
    k=k+1;
    n=0;
    for j=1:length(M_TMD)
        if i<gdl_norm+1
            if j<gdl_norm+1
                n=n+1;
                M_TMD(i,j)=M(k,n);
            elseif j>gdl_norm+1
                n=n+1;
                M_TMD(i,j)=M(k,n);
            end
        elseif i==gdl_norm+1 && j==gdl_norm+1
            M_TMD(i,j)=m_d;
        elseif i>gdl_norm+1
            if j<gdl_norm+1
                n=n+1;
                M_TMD(i,j)=M(k-1,n);
```

```
            elseif j>gdl_norm+1
                n=n+1;
                M_TMD(i,j)=M(k-1,n);
            end
        end
    end
end

% MATRIZ DE RIGIDEZ
k=0;
for i=1:length(K_TMD)
    k=k+1;
    n=0;
    for j=1:length(K_TMD)
        if i<gdl_norm
            if j<gdl_norm
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k,n);
            elseif j==gdl_norm
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k,n);
            elseif j>gdl_norm+1
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k,n);
            end
        elseif i==gdl_norm
            if j<gdl_norm
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k,n);
            elseif j==gdl_norm
                K_TMD(i,j)=K(i,j)+k_d;
            elseif j==gdl_norm+1
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=-k_d;
            elseif j>gdl_norm+1
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k,n);
            end
        elseif i==gdl_norm+1
            if j==gdl_norm
                K_TMD(i,j)=-k_d;
            elseif j==gdl_norm+1
                K_TMD(i,j)=k_d;
            end
        elseif i>gdl_norm+1
            if j<gdl_norm
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k-1,n);
            elseif j==gdl_norm
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k-1,n);
            elseif j>gdl_norm+1
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k-1,n);
            end
        end
    end
end
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
% MATRIZ DE AMORTECIMENTO
k=0;
for i=1:length(C_TMD)
    k=k+1;
    n=0;
    for j=1:length(C_TMD)
        if i<gdl_norm
            if j<gdl_norm
                n=n+1;
                C_TMD(i,j)=C(k,n);
            elseif j==gdl_norm
                n=n+1;
                C_TMD(i,j)=C(k,n);
            elseif j>gdl_norm+1
                n=n+1;
                C_TMD(i,j)=C(k,n);
            end
        elseif i==gdl_norm
            if j<gdl_norm
                n=n+1;
                C_TMD(i,j)=C(k,n);
            elseif j==gdl_norm
                C_TMD(i,j)=C(i,j)+c_d;
            elseif j==gdl_norm+1
                n=n+1;
                C_TMD(i,j)=-c_d;
            elseif j>gdl_norm+1
                n=n+1;
                C_TMD(i,j)=C(k,n);
            end
        elseif i==gdl_norm+1
            if j==gdl_norm
                C_TMD(i,j)=-c_d;
            elseif j==gdl_norm+1
                C_TMD(i,j)=c_d;
            end
        elseif i>gdl_norm+1
            if j<gdl_norm
                n=n+1;
                C_TMD(i,j)=C(k-1,n);
            elseif j==gdl_norm
                n=n+1;
                C_TMD(i,j)=C(k-1,n);
            elseif j>gdl_norm+1
                n=n+1;
                C_TMD(i,j)=C(k-1,n);
            end
        end
    end
end

% ATUALIZAÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA, RIGIDEZ E AMORTECIMENTO
M=M_TMD;
K=K_TMD;
C=C_TMD;

%% RESPOSTA DO SISTEMA (INTEGRAÇÃO DIRETA - NEWMARK)
% CARREGAMENTOS *** LOAD PATTERNS ***
% GDL DAS CARGAS DINÂMICAS COM TMD *** ESTRUTURA RESTRINGIDA ***
```

```
% passo_est(:,:,1)=[0 0 -1 0 0 0
```

```
i_passo2=1;
i_passo3=1;
i_passo4=1;
i_passo5=1;
i_passo6=1;

for i=2:n_iter
    % Tempo
    t(i)=i*delta_t;
    %for jj=1:length(caminhar)
    if t(i)<caminhar(1,2) % AUTOMATIZAR NÚMERO DE PASSOS (8)
        if i_passo1==1
            u_pp(:,:,1)=inv(M)*((passo_rest(:,:,2)*ft(i_passo1))'-C*u_p(:,:,1)'-
K*u(:,:,1)');
        end
        % Deslocamento

u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,2)*ft(i_passo1))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
        i_passo1=i_passo1+1;
    elseif t(i)<caminhar(2,2) && t(i)>=caminhar(1,2)
        % Deslocamento

u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,3)*ft(i_passo2))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
        i_passo2=i_passo2+1;

    elseif t(i)<caminhar(3,2) && t(i)>=caminhar(2,2)
        % Deslocamento

u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,4)*ft(i_passo3))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
        i_passo3=i_passo3+1;

    elseif t(i)<caminhar(4,2) && t(i)>=caminhar(3,2)
        % Deslocamento

u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,5)*ft(i_passo4))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
```

```
        i_passo4=i_passo4+1;

    elseif t(i)<caminhar(5,2) && t(i)>=caminhar(4,2)
        % Deslocamento

u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,6)*ft(i_passo5))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
        i_passo5=i_passo5+1;

    elseif t(i)<caminhar(6,2) && t(i)>=caminhar(5,2)
        % Deslocamento

u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,7)*ft(i_passo6))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
        i_passo6=i_passo6+1;

    elseif t(i)<T && t(i)>=caminhar(6,2)  % Força 0 - vibração livre
            % Deslocamento
            u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*(M*(a0*u(:,:,(i-1))+a1*u_p(:,:,(i-
1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-1))+a7*u_pp(:,:,(i-
1)))');
            % Velocidade
            u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
            % Aceleração
            u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
    end
end

u_tmd=zeros(1,n_iter);
v_tmd=zeros(1,n_iter);
a_tmd=zeros(1,n_iter);

%Gráficos de resposta
t_plot=t';
u_tmd_plot=zeros(1,n_iter);
v_tmd_plot=zeros(1,n_iter);
a_tmd_plot=zeros(1,n_iter);


for i=1:n_iter
    uuu=u(:,16,i);
    vvv=u_p(:,16,i);
    aaa=u_pp(:,16,i);
    u_tmd(i)=uuu;
    v_tmd(i)=vvv;
    a_tmd(i)=aaa;

    u_tmd_plot(i)=uuu;
    v_tmd_plot(i)=vvv;
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
    a_tmd_plot(i)=aaa;
end

a_rms=sqrt(mean(a_tmd(1,:).^2));
%v_rms=sqrt(mean(v_tmd(1,:).^2));
%u_rms=sqrt(mean(u_tmd(1,:).^2));
end
```

ANEXO E – Função Objetivo. Modelo de Viga para 5 AMS (MAMS)

```
function [a_rms]=lajemista_TMD(x)
%% VARIÁVEIS DE PROJETO
% x(1)=ksi_opt1
% x(2)=freq_opt1
% x(3)=ksi_opt2
% x(4)=freq_opt2
% x(5)=ksi_opt3
% x(6)=freq_opt3
% x(7)=ksi_opt4
% x(8)=freq_opt4
% x(9)=ksi_opt5
% x(10)=freq_opt5

%% ANÁLISE DINÂMICA DA LAJE MISTA CONCRETO E PERFIS DE PRFV
% UNIDADES:
%   COMPRIMENTO:    m
%   FORÇA:          N

%% DADOS DE ENTRADA
n_nos=17;           % Número de nós
n_elem=n_nos-1;     % Número de elementos
n_gl=2;             % Número de graus de liberdade por nó
n_glbarra=n_gl*2;   % Número de graus de liberdade por barra

% COORDENADAS NODAIS
coord=[0 0; 0 0.125; 0 0.4107; 0 0.6964; 0 0.9821; 0 1.2678; 0 1.5535; 0 1.8392; 0
2.1249; 0 2.4106; 0 2.6963; 0 2.982; 0 3.2677; 0 3.5534; 0 3.8391; 0 4.125; 0
4.25];
%x=coord(:,2);
%z=coord(:,1);

% CONECTIVIDADE
con=[1 2; 2 3; 3 4; 4 5; 5 6; 6 7; 7 8; 8 9; 9 10; 10 11; 11 12; 12 13; 13 14; 14
15; 15 16; 16 17];

% COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS
L=zeros(1,n_elem);
for i=1:n_elem
    L(i)=norm(coord(con(i,2),:)-coord(con(i,1),:));
end

% GRAUS DE LIBERDADE (ux, ry - 0=livre, 1=fixo)
re=[0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0];

% MÓDULO DE ELASTICIDADE DA SEÇÃO TRANSFORMADA (GPa)
e_prfv=26.21;   %Módulo de elasticidade longitudinal em GPa
```

```
E=e_prfv*10^9;  %N/m2
%g_prfv=4.29;    %Módulo de cisalhamento em GPa
%G=g_prfv*10^9;  %N/m2

% PROPRIEDADES DA SEÇÃO TRANSFORMADA DA LAJE
area_st=441;        %área em cm2
inercia_st=5004;    %Inércia em cm4
A=area_st*10^-4;         %m2
I=inercia_st*10^-8;      %m4

% MASSA ESPECÍFICA DA LAJE MISTA (kg/m3)
ro=1954;

%% CÁLCULO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ E MASSA DA ESTRUTURA
% REGRA DA CORRESPONDÊNCIA
for i=1:n_elem
    jk(:,i)=[2*con(i,1)-1; 2*con(i,1); 2*con(i,2)-1; 2*con(i,2)];
end

% MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS NO SISTEMA GLOBAL
Seg=zeros(n_glbarra);
for i=1:n_elem
    Seg(:,:,i)=[12*E*I/L(i)^3 6*E*I/L(i)^2 -12*E*I/L(i)^3 6*E*I/L(i)^2
        6*E*I/L(i)^2 4*E*I/L(i) -6*E*I/L(i)^2 2*E*I/L(i)
        -12*E*I/L(i)^3 -6*E*I/L(i)^2 12*E*I/L(i)^3 -6*E*I/L(i)^2
        6*E*I/L(i)^2 2*E*I/L(i) -6*E*I/L(i)^2 4*E*I/L(i)];
end

% MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA NÃO RESTRINGIDA
Sest=zeros(n_gl*n_nos);
for i=1:n_elem
    for j=1:n_glbarra
        for k=1:n_glbarra
            Sest(jk(j,i),jk(k,i))=Sest(jk(j,i),jk(k,i))+Seg(j,k,i);
        end
    end
end

% MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA RESTRINGIDA
k=0;
K=zeros(n_gl*n_nos-2);              % Inicialização da Matriz de Rigidez. Valor
(-2) referente aos gl restringidos
for i=1:n_nos*n_gl
    if re(i)==0
        k=k+1;
        n=0;
        for j=1:n_nos*n_gl
            if re(j)==0
                n=n+1;
                K(k,n)=Sest(i,j);
            end
        end
    end
end


% MATRIZ DE MASSA DOS ELEMENTOS NO SISTEMA GLOBAL
Meg=zeros(n_glbarra);
for i=1:n_elem
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
    Meg(:,:,i)=ro*A*L(i)/420*[156 22*L(i) 54 -13*L(i)
        22*L(i) 4*L(i)^2 13*L(i) -3*L(i)^2
        54 13*L(i) 156 -22*L(i)
        -13*L(i) -3*L(i)^2 -22*L(i) 4*L(i)^2];
end

% MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE DA ESTRUTURA NÃO RESTRINGIDA
Mest=zeros(n_gl*n_nos);
for i=1:n_elem
    for j=1:n_glbarra
        for k=1:n_glbarra
            Mest(jk(j,i),jk(k,i))=Mest(jk(j,i),jk(k,i))+Meg(j,k,i);
        end
    end
end

% MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE DA ESTRUTURA RESTRINGIDA
k=0;
M=zeros(n_gl*n_nos-2);              % Inicialização da Matriz de Massa. Valor (-
2) referente aos gl restringidos
for i=1:n_nos*n_gl
    if re(i)==0
        k=k+1;
        n=0;
        for j=1:n_nos*n_gl
            if re(j)==0
                n=n+1;
                M(k,n)=Mest(i,j);
            end
        end
    end
end

%% FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIGRAÇÃO
% Cáculo das frequências naturais e modos de vibração
[modo,lambda]=eig(K,M);         % Cálculo dos autovalores e autovetores
omega=sqrt(lambda);             % Frequências naturais circulares
omega_diag=zeros(length(K));
for i=1:length(K)
    omega_diag(i)=omega(i,i);
end

% Frequências naturais (Hz)
% freq_nat=omega_diag'/(2*pi);

%% RESPOSTA DINÂMICA

%% GENERALIZAÇÃO
% MATRIZ DE MASSA GENERALIZADA
Mr=transpose(modo)*M*modo;

% MATRIZ DE RIGIDEZ GENERALIZADA
Kr=transpose(modo)*K*modo;

%% AMORTECIMENTO
tipo_amor=1;   % Define tipo de amortecimento: (1)rayleigh ou (2)simplificado

% AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH
if tipo_amor==1
```

```
    ksi_1=1.71;           % Fator de amortecimento para o modo 1 (%)
    ksi_5=1.71;           % Fator de amortecimento para o modo 5 (%)
    a=2*omega_diag(1)*omega_diag(5)/(omega_diag(5)^2-
omega_diag(1)^2)*[omega_diag(5) -omega_diag(1); -1/omega_diag(5)
1/omega_diag(1)]*[ksi_1/100; ksi_5/100];
    %a=2*ksi_1/100/(omega_diag(5)+omega_diag(1))*[omega_diag(5)*omega_diag(1); 1];
    % MATRIZ DE AMORTECIMENTO GENERALIZADA
    Cr=a(1)*Mr+a(2)*Kr;

% AMORTECIMENTO SIMPLIFICADO
elseif tipo_amor==2
    ksi=0.0171;
    % MATRIZ DE AMORTECIMENTO GENERALIZADA
    Cr=2*ksi*omega'*Mr;
end

% MATRIZ DE AMORTECIMENTO DA ESTRUTURA
C=inv(modo')*Cr*inv(modo);

%% MTMD ANALÍTICO (VERSÃO BETA)
mi=0.01;
mtmd=3;                           % Quantidade de TMD's

% NORMALIZAÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA, RIGIDEZ E AMORTECIMENTO
gdl_norm=16;                      % Grau de Liberdade para o qual será feita a
normalização
modo_norm2=modo/modo(gdl_norm,1);
Mr2=modo_norm2'*M*modo_norm2;
Kr2=modo_norm2'*K*modo_norm2;
Cr2=modo_norm2'*C*modo_norm2;

% PROPRIEDADES MTMD
m_d=(mi/mtmd)*Mr2(1,1);           % Massa igual para os MTMD's

omega_d1=x(2)*omega(1,1);
omega_d2=x(4)*omega(1,1);
omega_d3=x(6)*omega(1,1);
omega_d4=x(8)*omega(1,1);
omega_d5=x(10)*omega(1,1);

ksi_d1=x(1);
ksi_d2=x(3);
ksi_d3=x(5);
ksi_d4=x(7);
ksi_d5=x(9);

k_d1=omega_d1^2*m_d;
k_d2=omega_d2^2*m_d;
k_d3=omega_d3^2*m_d;
k_d4=omega_d4^2*m_d;
k_d5=omega_d5^2*m_d;

c_d1=2*ksi_d1*omega_d1*m_d;
c_d2=2*ksi_d2*omega_d2*m_d;
c_d3=2*ksi_d3*omega_d3*m_d;
c_d4=2*ksi_d4*omega_d4*m_d;
c_d5=2*ksi_d5*omega_d5*m_d;
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
% MATRIZ DE MASSA, RIGIDEZ E AMORTECIMENTO DA ESTRUTURA RESTRINGIDA COM MTMD
M_TMD=zeros(length(Mr2)+5);
K_TMD=zeros(length(Kr2)+5);
C_TMD=zeros(length(Cr2)+5);

% MATRIZ DE MASSA
k=0;
for i=1:length(M_TMD)
    k=k+1;
    n=0;
    for j=1:length(M_TMD)
        if i<=gdl_norm
            if j<=gdl_norm
                n=n+1;
                M_TMD(i,j)=M(k,n);
            elseif j>gdl_norm+5
                n=n+1;
                M_TMD(i,j)=M(k,n);
            end
        elseif i>gdl_norm && i<=gdl_norm+5
            if j>gdl_norm && j<=gdl_norm+5
                M_TMD(j,j)=m_d;
            end
        elseif i>gdl_norm+5
            if j<=gdl_norm
                n=n+1;
                M_TMD(i,j)=M(k-5,n);
            elseif j>gdl_norm+5
                n=n+1;
                M_TMD(i,j)=M(k-5,n);
            end
        end
    end
end

% MATRIZ DE RIGIDEZ
k=0;
for i=1:length(K_TMD)
    k=k+1;
    n=0;
    for j=1:length(K_TMD)
        if i<gdl_norm
            if j<=gdl_norm
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k,n);
            elseif j>gdl_norm+5
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k,n);
            end
        elseif i==gdl_norm
            if j<gdl_norm
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k,n);
            elseif j==gdl_norm
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(n,k)+k_d1+k_d2+k_d3+k_d4+k_d5;
            elseif j==gdl_norm+1
                K_TMD(i,j)=-k_d1;
            elseif j==gdl_norm+2
```

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
                K_TMD(i,j)=-k_d2;
            elseif j==gdl_norm+3
                K_TMD(i,j)=-k_d3;
            elseif j==gdl_norm+4
                K_TMD(i,j)=-k_d4;
            elseif j==gdl_norm+5
                K_TMD(i,j)=-k_d5;
            elseif j>gdl_norm+5
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k,n);
            end
        elseif i==gdl_norm+1
            if j==gdl_norm
                K_TMD(i,j)=-k_d1;
            elseif j==gdl_norm+1
                K_TMD(i,j)=k_d1;
            end
        elseif i==gdl_norm+2
            if j==gdl_norm
                K_TMD(i,j)=-k_d2;
            elseif j==gdl_norm+2
                K_TMD(i,j)=k_d2;
            end
        elseif i==gdl_norm+3
            if j==gdl_norm
                K_TMD(i,j)=-k_d3;
            elseif j==gdl_norm+3
                K_TMD(i,j)=k_d3;
            end
        elseif i==gdl_norm+4
            if j==gdl_norm
                K_TMD(i,j)=-k_d4;
            elseif j==gdl_norm+4
                K_TMD(i,j)=k_d4;
            end
        elseif i==gdl_norm+5
            if j==gdl_norm
                K_TMD(i,j)=-k_d5;
            elseif j==gdl_norm+5
                K_TMD(i,j)=k_d5;
            end
        elseif i>gdl_norm+5
            if j<=gdl_norm
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k-5,n);
            elseif j>gdl_norm+5
                n=n+1;
                K_TMD(i,j)=K(k-5,n);
            end
        end
    end
end

% MATRIZ DE AMORTECIMENTO
k=0;
for i=1:length(C_TMD)
    k=k+1;
    n=0;
    for j=1:length(C_TMD)
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
if i<gdl_norm
    if j<=gdl_norm
        n=n+1;
        C_TMD(i,j)=C(k,n);
    elseif j>gdl_norm+5
        n=n+1;
        C_TMD(i,j)=C(k,n);
    end
elseif i==gdl_norm
    if j<gdl_norm
        n=n+1;
        C_TMD(i,j)=C(k,n);
    elseif j==gdl_norm
        n=n+1;
        C_TMD(i,j)=C(n,k)+c_d1+c_d2+c_d3+c_d4+c_d5;
    elseif j==gdl_norm+1
        C_TMD(i,j)=-c_d1;
    elseif j==gdl_norm+2
        C_TMD(i,j)=-c_d2;
    elseif j==gdl_norm+3
        C_TMD(i,j)=-c_d3;
    elseif j==gdl_norm+4
        C_TMD(i,j)=-c_d4;
    elseif j==gdl_norm+5
        C_TMD(i,j)=-c_d5;
    elseif j>gdl_norm+5
        n=n+1;
        C_TMD(i,j)=C(k,n);
    end
elseif i==gdl_norm+1
    if j==gdl_norm
        C_TMD(i,j)=-c_d1;
    elseif j==gdl_norm+1
        C_TMD(i,j)=c_d1;
    end
elseif i==gdl_norm+2
    if j==gdl_norm
        C_TMD(i,j)=-c_d2;
    elseif j==gdl_norm+2
        C_TMD(i,j)=c_d2;
    end
elseif i==gdl_norm+3
    if j==gdl_norm
        C_TMD(i,j)=-c_d3;
    elseif j==gdl_norm+3
        C_TMD(i,j)=c_d3;
    end
elseif i==gdl_norm+4
    if j==gdl_norm
        C_TMD(i,j)=-c_d4;
    elseif j==gdl_norm+4
        C_TMD(i,j)=c_d4;
    end
elseif i==gdl_norm+5
    if j==gdl_norm
        C_TMD(i,j)=-c_d5;
    elseif j==gdl_norm+5
        C_TMD(i,j)=c_d5;
    end
```

Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
        elseif i>gdl_norm+5
            if j<=gdl_norm
                n=n+1;
                C_TMD(i,j)=C(k-5,n);
            elseif j>gdl_norm+5
                n=n+1;
                C_TMD(i,j)=C(k-5,n);
            end
        end
    end
end

% ATUALIZAÇÃO DAS MATRIZES DE MASSA, RIGIDEZ E AMORTECIMENTO
M=M_TMD;
K=K_TMD;
C=C_TMD;

%% RESPOSTA DO SISTEMA (INTEGRAÇÃO DIRETA - NEWMARK)
% CARREGAMENTOS *** LOAD PATTERNS ***
% GDL DAS CARGAS DINÂMICAS COM TMD *** ESTRUTURA RESTRINGIDA ***

% passo_est(:,:,1)=[0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0];
passo_rest(:,:,2)=[0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0];
passo_rest(:,:,3)=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0];
passo_rest(:,:,4)=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0];
passo_rest(:,:,5)=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0];
passo_rest(:,:,6)=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0];
passo_rest(:,:,7)=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1
0 0 0 0 0 0];
% passo_est(:,:,8)=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
-1 0 0 0];

% LOAD CASE *** CAMINHAR 1x (load pattern, arrival time)
caminhar=[2 0.5; 3 1.0; 4 1.5; 5 2.0; 6 2.5; 7 3.0];
%caminhar=[2 0; 3 0.5; 4 1.0; 5 1.5; 6 2.0; 7 2.5];

% PERÍODO DE INTEGRAÇÃO
delta_t=0.001;                  % Incremento de tempo a cada iteração
t_vibralivre=5.0;               % Tempo em vibração livre após o término da
excitação
t_vibraforc=max(caminhar(:,2)); % Tempo em vibração forçada (tempo de excitação)
T=t_vibraforc+t_vibralivre;     % Período total de análise

n_iter=T/delta_t;               % Número total de iterações

% INICIALIZAÇÃO DOS VETORES RESPOSTA
u(:,:,n_iter)=zeros(1,length(M));
u_p(:,:,n_iter)=zeros(1,length(M));
u_pp(:,:,n_iter)=zeros(1,length(M));

% CARREGAMENTO PASSO
[tempo,ft]=passo;
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
% CONDIÇÃO INICIAL COM TMD ***** JÁ CONSIDERANDO AS CONDIÇÕES DE CONTORNO ****
u(:,:,1)=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0];     % Deslocamento inicial
u_p(:,:,1)=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0];   % Velocidade inicial

% CONSTANTES DE NEWMARK
delta=0.5;
alfa=0.25;
a0=1/(alfa*delta_t^2);
a1=1/(alfa*delta_t);
a2=(1/(2*alfa)-1);
a3=(1-delta)*delta_t;
a4=delta*delta_t;
a5=delta/(alfa*delta_t);
a6=(delta/alfa)-1;
a7=delta_t/2*(delta/alfa-2);

t=zeros(n_iter,1);
i_passo1=1;
i_passo2=1;
i_passo3=1;
i_passo4=1;
i_passo5=1;
i_passo6=1;

for i=2:n_iter
    % Tempo
    t(i)=i*delta_t;
    %for jj=1:length(caminhar)
    if t(i)<caminhar(1,2) % AUTOMATIZAR NÚMERO DE PASSOS (8)
        if i_passo1==1
            u_pp(:,:,1)=inv(M)*((passo_rest(:,:,2)*ft(i_passo1))'-C*u_p(:,:,1)'-
K*u(:,:,1)');
        end
        % Deslocamento

u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,2)*ft(i_passo1))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
        i_passo1=i_passo1+1;
    elseif t(i)<caminhar(2,2) && t(i)>=caminhar(1,2)
        % Deslocamento

u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,3)*ft(i_passo2))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
        i_passo2=i_passo2+1;

    elseif t(i)<caminhar(3,2) && t(i)>=caminhar(2,2)
        % Deslocamento
```

```
u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,4)*ft(i_passo3))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
        i_passo3=i_passo3+1;

    elseif t(i)<caminhar(4,2) && t(i)>=caminhar(3,2)
        % Deslocamento

u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,5)*ft(i_passo4))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
        i_passo4=i_passo4+1;

    elseif t(i)<caminhar(5,2) && t(i)>=caminhar(4,2)
        % Deslocamento

u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,6)*ft(i_passo5))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
        i_passo5=i_passo5+1;

    elseif t(i)<caminhar(6,2) && t(i)>=caminhar(5,2)
        % Deslocamento

u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*((passo_rest(:,:,7)*ft(i_passo6))'+M*(a0*u(:,:,(i-
1))+a1*u_p(:,:,(i-1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-
1))+a7*u_pp(:,:,(i-1)))');
        % Velocidade
        u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
        % Aceleração
        u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
        i_passo6=i_passo6+1;

    elseif t(i)<T && t(i)>=caminhar(6,2)  % Força 0 - vibração livre
        % Deslocamento
            u(:,:,i)=inv(a0*M+a5*C+K)*(M*(a0*u(:,:,(i-1))+a1*u_p(:,:,(i-
1))+a2*u_pp(:,:,(i-1)))'+C*(a5*u(:,:,(i-1))+a6*u_p(:,:,(i-1))+a7*u_pp(:,:,(i-
1)))');
            % Velocidade
            u_p(:,:,i)=a5*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a6*u_p(:,:,i-1)-a7*u_pp(:,:,i-1);
            % Aceleração
            u_pp(:,:,i)=a0*(u(:,:,i)-u(:,:,i-1))-a1*u_p(:,:,i-1)-a2*u_pp(:,:,i-1);
    end
end

u_tmd=zeros(1,n_iter);
```


Versão Final Homologada
20/12/2025 09:37

```
v_tmd=zeros(1,n_iter);
a_tmd=zeros(1,n_iter);

for i=1:n_iter
    uuu=u(:,16,i);
    vvv=u_p(:,16,i);
    aaa=u_pp(:,16,i);
    u_tmd(i)=uuu;
    v_tmd(i)=vvv;
    a_tmd(i)=aaa;
end

a_rms=sqrt(mean(a_tmd(1,:).^2));
%v_rms=sqrt(mean(v_tmd(1,:).^2));
%u_rms=sqrt(mean(u_tmd(1,:).^2));
end
```