



## **Ministério da Educação**

**Universidade Federal da Integração Latino-Americana**

**Instituto de Tecnologia, Infraestrutura e Território**

Centro Interdisciplinar de Tecnologia e Infraestrutura

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

# **FORMULAÇÃO TERMODINÂMICA DO ACOPLAMENTO CORROSÃO-FISSURAÇÃO EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO**

CARLOS ALBERTO CALDEIRA BRANT

FOZ DO IGUAÇU – PR

2019

CARLOS ALBERTO CALDEIRA BRANT

**FORMULAÇÃO TERMODINÂMICA DO ACOPLAMENTO  
CORROSÃO-FISSURAÇÃO EM ESTRUTURAS DE CONCRETO  
ARMADO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como parte integrante dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Professor Dr. Julio Flórez-López.

FOZ DO IGUAÇU – PR

2019

**Dr. ROBERTO DALLEDONE MACHADO, UFPR**

Examinador Externo à Instituição

**Dr. RODRIGO RIBEIRO PACCOLA, USP**

Examinador Externo à Instituição

**Dr. EDNA POSSAN, UNILA**

Examinador Interno

**Dr. JULIO FLOREZ LOPEZ, UNILA**

Presidente

**CARLOS ALBERTO CALDEIRA BRANT**

Mestrando

Catálogo elaborado pela Divisão de Apoio ao Usuário da Biblioteca Latino-Americana  
Catálogo de Publicação na Fonte. UNILA - BIBLIOTECA LATINO-AMERICANA

B821

Brant, Carlos Alberto Caldeira.

Formulação termodinâmica do acoplamento corrosão-fissuração em estruturas de concreto armado / Carlos Alberto Caldeira Brant. - Foz do Iguaçu-PR, 2020.

160 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana. Instituto de Tecnologia, Infraestrutura e Território. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Foz do Iguaçu-PR, 2020.

Orientador: Julio Flórez-López.

1. Corrosão por íons cloretos. 2. Mecânica do dano. 3. Rótula plástica. 4. Análise por elementos finitos. 5. Estruturas de concreto armado. 6. Termodinâmica de sólidos. I. Flórez-López, Julio. II. Universidade Federal da Integração Latino-Americana. III. Título.

CDU 691.328

## RESUMO

BRANT, C. A. C. **Formulação termodinâmica do acoplamento corrosão-fissuração em estruturas de concreto armado**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2019. 160p.

O objetivo deste trabalho é propor um modelo matemático para o acoplamento da corrosão, fissuração e plasticidade em análises de estruturas de concreto armado. Para isso, é levado em consideração a corrosão devido a presença de íons cloretos no concreto que desencadeia a diminuição da seção transversal das barras de aço e a penalização da tensão de escoamento. Para modelagem do comportamento estrutural, esta pesquisa baseia-se na teoria do dano concentrado que permite cálculos inelásticos de estruturas. Como fundamentação teórica para o modelo matemático proposto são utilizados alguns conceitos e leis da termodinâmica de sólidos. Essa teoria clássica é, primeiramente, adaptada a estruturas tipo pórticos – termodinâmica de pórticos – . Essa termodinâmica, por sua vez, é validada com modelos matemáticos auxiliares já consolidados na literatura: modelo elástico, modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, modelo com dano frágil e modelo elastoplástico com encruamento cinemático que contém dano. O modelo proposto neste trabalho é denominado elastoplástico com encruamento cinemático, dano e corrosão, sendo que as variáveis internas utilizadas são rotação plástica, nível de dano e nível de corrosão. O modelo desenvolvido foi utilizado para simulação de uma laje maciça e de um pórtico de concreto armado. Em ambas as estruturas, pôde-se notar que a evolução da corrosão no tempo causa incrementos da fissuração, gerando a plastificação da seção transversal mais solicitada. Verifica-se que o processo corrosivo foi acelerado por causa da evolução do dano. Isso provoca a diminuição da vida útil da estrutura, com o surgimento de um nível de dano crítico e/ou de uma primeira rótula plástica em um tempo inferior ao esperado. Assim, como principal contribuição, o modelo desenvolvido serve de ferramenta na estimativa do tempo de colapso estrutural.

**Palavras-chave:** Corrosão por íons cloretos. Mecânica do dano. Rótula plástica. Análise por elementos finitos. Estruturas de concreto armado. Termodinâmica de sólidos.

## ABSTRACT

BRANT, C. A. C. **Thermodynamic formulation of corrosion-cracking coupling in reinforced concrete frames**. Dissertation (M. Sc. in Civil Engineering) – Postgraduate Program in Civil Engineering, Federal University of Latin American Integration, Foz do Iguaçu, 2019. 160p.

The objective of this work is to propose a mathematical model for the coupling of corrosion, cracking and plasticity in the analysis of reinforced concrete structures. For this, corrosion is considered due to the presence of chloride ions in the concrete that causes the reduction of the cross section of the steel bars and the penalization of the yield stress. For modeling of structural behavior this research is based on lumped damage mechanics. As a theoretical basis for the proposed mathematical model, it is used some concepts and laws of the thermodynamics of solids. The classic theory is first adapted to the analysis of frames – thermodynamic of frames –. This thermodynamic is validated with auxiliary mathematical models already consolidated in the literature: elastic model, elastoplastic model with linear kinematic hardening, model with fragile damage and elastoplastic model with linear kinematic hardening that contains damage. The model proposed in this work is called elastoplastic with linear kinematic hardening, damage and corrosion, and the internal variables used are plastic rotation, damage level and corrosion level. The developed model was used to simulate a massive slab and a reinforced concrete frame. In both structures, it was noted that the evolution of corrosion over time causes cracking increases, generating the yielding of the most requested cross section. Noted that the corrosive process has been accelerated because of the damage evolution. This decreases the service life of the structure with the emergence of a critical damage level and/or a first plastic hinge in a shorter time than expected. Thus, as a main contribution, the developed model serves as a tool in the estimation of the structural collapse time.

**Keywords:** Corrosion by chloride ions. Damage mechanics. Plastic hinge. Finite element analysis. Reinforced concrete frames. Thermodynamics of solids.

A Deus por seu amor incondicional e por ser essencial em minha vida. A minha família pelo apoio e confiança a mim depositado ao longo dessa jornada.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço principalmente a Deus por ter me dado o dom da vida, pelo seu amor, suas bênçãos e proteção.

Aos meus pais, Carlos Alberto M. C. Brant e Rosa F. Brant, aos meus avós, Noé C. Brant e Irene M. Brant, pelo apoio incondicional, amor e conselhos dados. Dedico a vocês essa conquista.

Ao meu orientador, Professor e Doutor Julio Flórez-López, pela oportunidade, orientação e apoio na elaboração deste trabalho. Também sou grato por acreditar e confiar nas minhas ideias. Mesmo sabendo que esse é o seu trabalho, reconheço quanto aprendi durante o tempo que estivemos trabalhando juntos. Devo muito a você.

A minha incrível namorada Nathália T. Balesteiro que vivenciei comigo diariamente essa jornada. Agradeço o carinho, sugestões e incessante incentivo.

A minha querida irmã Nayara M. F. Brant por não medir esforços em seus incentivos e suas cooperações.

A equipe de professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PPGECI-UNILA, por todo auxílio e colaboração. Em especial, a Professora Edna Possan, que sempre acreditou em meu potencial e colaborou demais para o meu desenvolvimento.

Ao secretário do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PPGECI-UNILA, Aroldo Gali Caron Neto, pelo apoio. Me lembrarei das nossas conversas e reflexões.

Aos amigos do Mestrado: Fernando, Wagner, Julio, Heliton, Willian, Edivaldo, Marcelo, Carlos e Henrique, pelo imenso auxílio dado a minha pessoa, principalmente, nas diversas dificuldades. Vocês facilitaram meus dias.

Gostaria, também, de agradecer ao CEASB, por ter disponibilizado um espaço onde o desenvolvimento deste trabalho foi realizado, e a CAPES pelo financiamento da pesquisa.

Peço desculpas se esqueci alguém e reforço minha gratidão a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação e história, meus sinceros agradecimentos.

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	21
1.1 Objetivos .....	24
1.1.1 Objetivo Geral .....	24
1.1.2 Objetivos Específicos .....	24
1.2 Estrutura da dissertação .....	25
2 CORROSÃO DE ARMADURAS EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO .....	27
2.1 Corrosão devido a carbonatação do concreto .....	27
2.1.1 Reações aliadas a carbonatação .....	29
2.1.2 Difusão de dióxido de carbono no concreto .....	32
2.1.3 Redução da seção transversal das barras de aço devido a corrosão uniforme .....	34
2.2 Corrosão pelo efeito de íons cloretos .....	36
2.2.1 Reações aliadas a presença de íons cloretos .....	36
2.2.2 Difusão de íons cloretos no concreto .....	39
2.2.3 Redução da seção transversal das barras de aço devido a corrosão por pite .....	41
2.2.4 Densidade de corrente de corrosão por pite .....	41
2.2.4.1 Modelo de Yalcyn e Ergun (1996) .....	42
2.2.4.2 Modelo de Liu e Weyer (1998) .....	42
2.2.4.3 Modelo de Vu e Stewart (2000) .....	43
2.2.4.4 Formulação geral para a taxa de corrosão normalizada .....	43
2.2.9 Efeitos da corrosão nas tensões e nas deformações do aço .....	44
3 MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO .....	46
3.1 Tensões e deformações generalizadas .....	48
3.1.1 Teoria de sólidos .....	49
3.1.2 Teoria de placas .....	50
3.1.3 Teoria de vigas .....	53
3.1.4 Teoria de pórticos .....	54
3.2 Conceitos preliminares .....	57
3.2 Equações cinemáticas de pórticos .....	59
3.3 Equação de equilíbrio .....	61
3.4 Lei constitutiva .....	63
3.4.1 Lei de evolução do dano .....	64
3.4.2 Lei de plasticidade .....	68
4 TERMODINÂMICA DE SÓLIDOS .....	71
4.1 Elementos da mecânica do contínuo e da termodinâmica .....	71
4.1.1 Deslocamento e potência virtual .....	72

4.1.2	Estrutura de referência e derivativos materiais .....	73
4.1.3	Princípio das potências virtuais.....	74
4.2	Método das potências virtuais .....	75
4.2.1	Taxas de deformação e de tensão.....	75
4.2.2	Equações de equilíbrio .....	78
4.2.3	Deformações e deslocamentos .....	79
4.3	Estados fundamentais da termodinâmica .....	81
4.3.1	Leis de conservação e primeiro princípio da termodinâmica.....	81
4.3.2	Entropia e segundo princípio da termodinâmica.....	82
4.4	Método do estado local .....	85
4.4.1	Variáveis de estado.....	85
4.4.2	Potencial termodinâmico e leis de estado.....	87
4.4.3	Dissipação e leis complementares.....	89
5	TERMODINÂMICA DE PÓRTICOS .....	91
6	FORMULAÇÕES DE MODELOS TERMODINÂMICOS AUXILIARES .....	97
6.1	Modelo elástico .....	97
6.2	Modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear.....	98
6.3	Modelo que contém dano frágil .....	99
6.4	Modelo elastoplástico com encruamento cinemático e que contém dano.....	101
7	FORMULAÇÃO DO MODELO TERMODINÂMICO ELASTOPLÁSTICO COM ENCRUAMENTO CINEMÁTICO, DANO E CORROSÃO.....	105
7.1	Variáveis internas.....	105
7.2	Potencial de Gibbs.....	107
7.3	Lei de estado e forças termodinâmicas associadas as variáveis internas .....	107
7.4	Lei de evolução do dano.....	108
7.5	Obtenção dos parâmetros $q$ e $R0$ como uma função do nível de corrosão e da força axial ....	109
7.6	Lei de evolução das rotações plásticas .....	115
7.7	Obtenção dos parâmetros $h$ e $k0$ .....	116
7.8	Lei de evolução da corrosão.....	119
7.9	Identificação experimental do parâmetro $\xi$ .....	120
7.10	Verificação da admissibilidade termodinâmica do modelo proposto.....	121
8	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....	123
8.1	Simulação de um teste de Otieno et al. (2010).....	123
8.2	Aplicação do modelo na análise de uma laje de concreto armado .....	124
8.3	Aplicação do modelo na análise de um pórtico de concreto armado .....	131
9	CONCLUSÕES .....	139
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	140

ANEXO A - MODELAGEM DO COMPORTAMENTO MOMENTO POR CURVATURA .....	144
ANEXO B - OBTENÇÃO DO VALOR DO DANO DE IDENTIFICAÇÃO <b><i>dI</i></b> .....	155
ANEXO C – CÁLCULO DE <b><i>Mcr</i></b> , <b><i>Mp</i></b> , <b><i>Mu</i></b> , <b><i>χp</i></b> E <b><i>χu</i></b> .....	158

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Representação do fenômeno da carbonatação do concreto no tempo.....	28
<b>Figura 2</b> – Laje parcialmente deteriorada devido a corrosão por carbonatação. ....	29
<b>Figura 3</b> – Representação esquemática do processo de carbonatação.....	31
<b>Figura 4</b> – Mecanismo de penetração de íons cloretos.....	37
<b>Figura 5</b> – Mecanismo de adsorção: (a) adsorção de íons cloretos; (b) início do processo de afinamento da película passivadora; (c) início da corrosão localizada. ....	38
<b>Figura 6</b> – Mecanismo de ruptura do filme óxido. ....	39
<b>Figura 7</b> – Gráfico de força por alongação.....	45
<b>Figura 8</b> – Resumo esquemático das variáveis e equações associadas. ....	48
<b>Figura 9</b> – Representação da unidade básica estrutural da teoria de sólidos.....	49
<b>Figura 10</b> – Representação da unidade básica estrutural da teoria de placas. ....	51
<b>Figura 11</b> – Representação da unidade básica estrutural da teoria de vigas.....	53
<b>Figura 12</b> – Representação da unidade básica estrutural da teoria de pórticos. ....	55
<b>Figura 13</b> – Elemento finito de pórtico plano aplicado à teoria do dano concentrado. ....	57
<b>Figura 14</b> – Deformações generalizadas em um elemento de pórtico.....	58
<b>Figura 15</b> – Fluxograma esquemático para análise do modelo de dano concentrado. ....	59
<b>Figura 16</b> – Representação dos possíveis deslocamentos e rotações nos nós $i$ e $j$ de um elemento de pórtico. ....	60
<b>Figura 17</b> – Desenho esquemático para representação dos parâmetros $\alpha$ e $L$ no elemento $b$ . ....	61
<b>Figura 18</b> – Representação das possíveis forças e momentos externos nodais. ....	62
<b>Figura 19</b> – Tensões generalizadas em um elemento de pórtico. ....	63
<b>Figura 20</b> – Ajuste da função de resistência à fissuração do concreto aos pontos da taxa de liberação de energia. ....	66
<b>Figura 21</b> – Relação momento fletor por dano para uma rótula inelástica.....	67
<b>Figura 22</b> – Representação do deslocamento virtual e das forças associadas. ....	72
<b>Figura 23</b> – Representação do meio material. ....	75
<b>Figura 24</b> – Representação das componentes dos vetores de tensão $T_i$ em um sólido. ....	77
<b>Figura 25</b> – Variáveis internas do modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, dano e corrosão. ....	105
<b>Figura 26</b> – Esquema da seção transversal de uma barra de aço corroída por pite. ....	106
<b>Figura 27</b> – Relação momento fletor por dano para uma rótula inelástica.....	110
<b>Figura 28</b> – Distribuição de tensões e deformações em uma seção de concreto armado para a) $M_{cr}$ e b) $M_u$ . ....	110
<b>Figura 29</b> – Comportamento tensão por deformação em armadura longitudinal.....	111
<b>Figura 30</b> – Exemplo de uma viga de concreto armado. ....	113
<b>Figura 31</b> – Diagrama de interação entre $M_{cr}$ , $cor$ e $N$ . ....	113
<b>Figura 32</b> – Diagrama de interação entre $M_u$ , $cor$ e $N$ .....	114
<b>Figura 33</b> – Diagrama de interação entre $R_0$ , $cor$ e $N$ .....	114
<b>Figura 34</b> – Diagrama de interação entre $q$ , $cor$ e $N$ . ....	115
<b>Figura 35</b> – Momento fletor por rotação plástica para uma rótula inelástica.....	116
<b>Figura 36</b> – Distribuição de tensão e deformação em uma seção de concreto armado para obtenção de $M_p$ . ....	117
<b>Figura 37</b> – Diagrama de interação entre $M_p$ , $cor$ e $N$ .....	117

<b>Figura 38</b> – Diagrama de interação entre $\phi_{pu}$ , $cor$ e $N$ .	118
<b>Figura 39</b> – Diagrama de interação entre $k_0$ , $cor$ e $N$ .	118
<b>Figura 40</b> – Diagrama de interação entre $h$ , $cor$ e $N$ .	119
<b>Figura 41</b> – Taxa de corrosão em uma viga de concreto armado.	120
<b>Figura 42</b> – Viga a ser analisada.	123
<b>Figura 43</b> – Simulação da corrosão para viga de concreto armado fissurada.	124
<b>Figura 44</b> – Laje a ser analisada.	125
<b>Figura 45</b> – Armaduras calculadas para laje.	125
<b>Figura 46</b> – Esquema estático da laje (viga) e diagrama de momento fletor correspondente.	126
<b>Figura 47</b> – Modelo em elementos finitos.	126
<b>Figura 48</b> – Fluxograma esquemático de aplicação do modelo.	127
<b>Figura 49</b> – Mapa de distribuição de dano na estrutura.	127
<b>Figura 50</b> – Evolução do dano no tempo.	128
<b>Figura 51</b> – Evolução da corrosão no tempo.	129
<b>Figura 52</b> – Simulação da taxa de corrosão para a laje de concreto armado.	130
<b>Figura 53</b> – Evolução dos momentos resistentes ( $M_p$ e $M_u$ ), momento solicitante ( $m_{12}$ ) e nível de corrosão ( $c_{12}$ ) no tempo, para o exemplo da laje.	130
<b>Figura 54</b> – Diagramas de momento fletor para a laje sem corrosão e sob estado de corrosão máximo (após 49 anos).	131
<b>Figura 55</b> – Pórtico a ser analisado.	132
<b>Figura 56</b> – Diagrama de momento fletor para o pórtico no regime elástico.	132
<b>Figura 57</b> – Mapa de distribuição de dano para o exemplo de pórtico.	133
<b>Figura 58</b> – Evolução do dano no tempo para o exemplo de pórtico.	134
<b>Figura 59</b> – Evolução das rotações plásticas no tempo para o exemplo de pórtico.	135
<b>Figura 60</b> – Evolução da corrosão no tempo para o exemplo de pórtico.	136
<b>Figura 61</b> – Simulação das taxas de corrosão para o exemplo de pórtico.	137
<b>Figura 62</b> – Evolução dos momentos resistentes ( $M_p$ e $M_u$ ), momento solicitante ( $m_{12}$ ) e nível de corrosão ( $c_{12}$ ) no tempo, para o exemplo do pórtico.	138
<b>Figura 63</b> – Diagramas de momento fletor para o pórtico sem corrosão e sob estado de corrosão máximo (após 61 anos).	138

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> – Classificação da corrosão de acordo com o nível de sua velocidade de propagação. .....	34
<b>Tabela 2</b> – Taxa de corrosão devido a carbonatação para vários tipos de exposição, à 20°C. 35	35
<b>Tabela 3</b> – Modelos para cálculo da função $O$ . .....	44
<b>Tabela 4</b> – Variáveis cinemáticas e estáticas na teoria de sólidos.....	50
<b>Tabela 5</b> – Variáveis cinemáticas e estáticas na teoria de chapas. ....	52
<b>Tabela 6</b> – Variáveis cinemáticas e estáticas na teoria de vigas (hipótese de Euler-Bernoulli). .....	54
<b>Tabela 7</b> – Variáveis cinemáticas e estáticas na teoria de pórticos. ....	56

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área da seção transversal do elemento finito de pórtico
$a$	Largura do pite
$a/c$	Relação água/cimento
$A_0$	Área das barras de aço íntegra
$A_{cor}$	Área das barras de aço corroída por pite
$A_i$	Variável equivalente a força termodinâmica associada à plasticidade para um nó $i$ qualquer
$A_{ef}$	Área efetiva das barras de aço corroídas por pite
$A_k$ e $A_\alpha$	Variáveis termodinâmicas impulsionadoras das variáveis internas
$A_1$ e $A_2$	Áreas auxiliares para o cálculo da área efetiva das barras corroídas por pite
$ag/c$	Relação agregado/cimento
$b$	Identificador de um elemento
$b_w$	Largura da seção transversal do elemento tipo pórtico
$cz$	Profundidade da linha neutra na seção transversal do elemento de pórtico
$cor$ ou $c_i$ e $c_j$	Nível de corrosão ou nível de corrosão nos nós $i$ e $j$
$cob$	Espessura de cobrimento das armaduras
$C_0$	Concentração de íons cloretos na superfície da estrutura
$C_c$	Força de compressão no concreto
$C_s$	Força de compressão na armadura negativa
$C_{C_2O}$	Concentração de dióxido de carbono
$Cl$	Teor total de cloretos nas barras de aço
$C_{lim}$	Concentração crítica de cloretos
$C_{YE}$	Constante do modelo de Yalcyn e Ergun (1996)
$O$ e $O(FQ, PC, PS)$	Função de evolução da corrosão associado as forças termoquímicas do meio, propriedades do concreto e propriedades da seção
$dd$	Altura útil da seção
$d$ ou $d_i$ e $d_j$	Nível de dano em uma seção ou nível de dano nos nós $i$ e $j$
$d_p$	Nível de dano correspondente ao momento de plastificação
$d_u$	Nível de dano correspondente ao momento último solicitado
$d'$	Distância do centroide da armadura negativa ou positiva até a face

	externa de concreto mais próxima
$D$	Coefficiente de difusão de íons cloretos no concreto
$\mathbf{D}$	Tensor referente a taxa de deformação
$D_{H_2O}$	Coefficiente de difusão de íons cloretos para uma solução infinita
$e$	Energia interna específica
$E_c$	Módulo de elasticidade do concreto
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço
$E$	Energia interna
$\dot{E}_b$	Taxa de variação da energia interna de um elemento de pórtico $b$
$f$	Função de plasticidade que incorpora as variáveis de encruamento cinemático linear e de dano
$f_s$	Tensão de tração no aço
$\vec{f}$	Densidade volumétrica de forças
$f_{cor}$	Tensão no aço após o escoamento, considerando a corrosão
$f_{ck}$	Tensão característica do concreto
$f_{ct}$	Tensão de tração no concreto
$f_i$	Função de plasticidade com encruamento cinemático linear para um nó $i$ qualquer
$f_{yk}$	Tensão característica do aço
$f_y$	Tensão de escoamento do aço
$f_u$	Tensão última do aço
$f_s'$	Tensão de compressão no aço
$\bar{f}_y$	Tensão de escoamento do aço penalizada pela corrosão por pite
$f_i^d$	Função de dano para um nó $i$ qualquer
$f_i^p$	Função de plasticidade para o modelo que também contém dano
$F$	Força axial submetida à barra de aço
$F^0$	Rigidez à flexão
$G$	Taxa de liberação de energia de uma rótula inelástica
$g$	Carga permanente
$g_b$ e $-Gb_b$	Energia livre de Gibbs
$h$	Parâmetro associado ao encruamento da armadura
$h_i$ e $h_j$	Variável de encruamento cinemático linear nos nós $i$ e $j$

$i_{cor}^c$	Taxa de corrosão causada pela carbonatação do concreto
$i_{cor-20}^c$	Taxa de corrosão causada pela carbonatação do concreto, à 20°C
$i_{cor}^{cl}$	Taxa de corrosão causada pela presença de íons cloretos no concreto
$i_{cor,rep}^{cl}$	Taxa média anual de corrosão causada pela presença de íons cloretos no concreto
$i_0^{cl}$	Taxa de corrosão inicial causada pela presença de íons cloretos no concreto
$I$	Momento de inércia da seção
$I(D)$	Função de incremento de resistência à fissuração para o modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear e que contém dano
$I(D, C)$	Função de incremento de resistência à fissuração para o modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, dano e corrosão
$K$	Energia cinética
$K_0$	Parâmetro associado ao momento de plastificação da seção
$K_c$	Constante usada para o cálculo da taxa de corrosão causada pela carbonatação do concreto
$K_{CO_2}$	Coefficiente de difusão do dióxido de carbono no concreto
$\dot{K}_b$	Taxa de variação da energia cinética de um elemento de pórtico $b$
$L$	Comprimento do elemento finito de pórtico
$L_b$	Comprimento da barra deformada
$L_{b0}$	Comprimento original da barra
$L_{CS}$	Comprimento entre a seção crítica e o ponto de inflexão do diagrama de momento fletor
$L_p$	Comprimento da rótula plástica
$mn$	Identificador de um nó da estrutura
$m$	Quantidade de elementos que compõe a estrutura
$m'$	Massa por unidade de comprimento para um elemento finito de pórtico
$m_i$ e $m_j$	Momentos fletores internos nos nós $i$ e $j$
$M_0$	Posição inicial do ponto material $M$
$M_{cr}$	Momento crítico ou de fissuração da seção
$M_p$	Momento de plastificação da seção
$M_u$	Momento último resistente da seção
$n$	Força axial interna no elemento

$N_{cr}$	Força axial associada ao momento crítico ou ao momento de fissuração da seção
$N_p$	Força axial associada ao momento de plastificação da seção
$N_u$	Força axial associada ao momento último resistente da seção
$\vec{n}$	Vetor normal à superfície da região de interesse no ponto material em análise $M$
$p$	Profundidade do pite
$pp$	Carga variável
$P$	Força externa imposta
$\hat{P}_{def}$	Potência virtual das deformações
$P_{def}^b$	Potência das deformações para um elemento de pórtico
$\hat{P}_{ine}$ ou $\hat{P}(a)$	Potência virtual das forças de inércia
$P_{ine}$ ou $P(a)$	Potência das forças de inércia
$\hat{P}(\vec{v}(M))$	Potência virtual de um sistema de forças para um determinado deslocamento virtual
$P(i)$	Potência das forças internas
$\hat{P}(i)$	Potência virtual das forças internas
$P(x)$	Potência das forças externas
$\hat{P}(x)$ ou $\hat{P}_{ext}$	Potência virtual das forças externas
$\hat{P}_{ext}^b$	Potência das forças externas para um elemento de pórtico
$P_u$	Força horizontal externa nodal
$P_w$	Força vertical externa nodal
$P_\theta$	Momento fletor externo nodal
$q$	Parâmetro associado ao aumento da resistência do concreto à fissuração devido a presença das armaduras
$\vec{q}$	Vetor de fluxo de calor
$Q$	Quantidade de calor
$Q_b$	Quantidade de calor cedido ou recebido por um elemento de pórtico
$Q_{cor}$	Quantidade de corrosão por pite nas armaduras
$r$	Densidade volumétrica do calor interno produzido
$R$ ou $R(D)$	Resistência à fissuração da rótula inelástica
$R_0$	Resistência inicial à fissuração do concreto
$R_c$	Resistência da cobertura de concreto

$Rel$	Relação entre a profundidade máxima e a profundidade média do pite
$s$	Entropia específica
$S$	Entropia
$\dot{S}_b$	Taxa de variação da entropia para um elemento de pórtico
$t$	Tempo
$t_c$	Tempo de exposição à carbonatação
$t_{tc}$	Tempo transcorrido após o início da corrosão causada pela carbonatação do concreto
$t_{ini}^c$	Tempo de início de corrosão causada pela carbonatação
$t_{ini}^{cl}$	Tempo de início de corrosão causada pela presença de íons cloretos
$T_s$	Força de tração na armadura positiva
$T$ ou $T_b$	Temperatura ou temperatura absoluta para um elemento de pórtico
$T(M, t)$	Campo escalar de temperatura
$\vec{T}$	Densidade de forças coesivas de superfície
$\vec{T}^d$	Densidade de forças aplicadas na superfície do sólido em análise
$u$	Deslocamento horizontal em um nó
$\vec{u}$	Vetor de deslocamento
$\vec{v}$	Taxa de deslocamento ou vetor de velocidade
$\vec{v}(M)$	Campo vetorial de velocidade virtual para um ponto material $M$
$V_k$ e $V_\alpha$	Variáveis internas
$w$	Deslocamento vertical em um nó
$W$	Energia de deformação complementar
$UR$	Umidade relativa
$X$	Profundidade da carbonatação do concreto
$x_1, x_2, x_3$	Pontos nos eixos coordenados cartesianos
$x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}$	Pontos iniciais nos eixos coordenados cartesianos
$y_t$	Meia altura da seção transversal do elemento tipo pórtico

### Letras gregas

$\alpha$	Inclinação do eixo axial do elemento em relação ao sistema coordenados de referência ( $XY$ )
$\vec{\gamma}$	Vetor aceleração de uma partícula
$\epsilon$	Tensor de deformações

$\varepsilon_y$	Deformação para início de escoamento no aço
$\varepsilon_c$	Deformação de compressão no concreto
$\varepsilon_{cu}$	Deformação de compressão última no concreto
$\varepsilon_{c0}$	Deformação de compressão no concreto no início do patamar plástico
$\varepsilon_s$	Deformação de tração na armadura positiva
$\varepsilon_u$	Deformação última do aço
$\varepsilon_{up}$	Deformação plástica de início da tensão última do aço
$\varepsilon^e$	Deformação termoelástica
$\varepsilon^p$	Deformação plástica
$\varepsilon_s'$	Deformação de compressão na armadura negativa
$\delta$	Elongação no elemento
$\theta$	Rotação em um nó
$\theta_1$ e $\theta_2$	Ângulos auxiliares para o cálculo da área efetiva das barras corroídas por pite
$\xi$	Constante experimental que relaciona a propagação do dano com o aumento da evolução da corrosão
$\rho$	Densidade da partícula em análise
$\rho_{ag}$	Densidade do agregado graúdo
$\rho_c$	Densidade do cimento
$\sigma$	Tensor de tensões de Cauchy
$\phi$	Diâmetro da barra de aço
$\Phi$	Inequação de Clausius-Duhem
$\phi_i$ e $\phi_j$	Rotações nas extremidades $i$ e $j$ de um elemento
$\phi_p$ ou $\phi_i^p$ e $\phi_j^p$	Rotação plástica na seção ou rotações plásticas nos nós $i$ e $j$
$\phi_{pu}$	Rotação plástica última da seção
$\phi_u$	Rotação última da seção
$\chi_p$	Curvatura plástica da seção
$\chi_u$	Curvatura última da seção
$\chi$	Curvatura da seção transversal
$\Psi$	Potencial de energia livre específico (energia livre de Helmholtz)
$\mathcal{L}$	Volume do sólido em análise
$\partial\mathcal{L}$	Superfície de contorno do sólido em análise

$\mathcal{D}$	Região de interesse dentro do sólido em análise
$\partial\mathcal{D}$	Superfície da região de interesse

### Matrizes e Vetores

$\{A\}$	Vetor das forças termodinâmicas associada à plasticidade
$\{B\}$	Vetor das forças termodinâmicas associada à corrosão por pite
$[B]$	Matriz de transformação cinemática
$[C(D)]$	Matriz de flexibilidade adicional devido à fissuração
$\{C\}$	Vetor dos níveis de corrosão
$\{\dot{C}\}$	Vetor referente a lei de evolução da corrosão
$\{D\}$	Vetor dos níveis de dano
$\{F\}$ ou $\{P\}$	Vetor de forças externas nodais equivalentes
$[F_0]$	Matriz de flexibilidade para um elemento elástico
$[F(D)]$	Matriz de flexibilidade para um elemento danificado
$[H]$	Matriz de encruamento cinemático linear para um elemento
$[H(D)]$	Matriz de encruamento cinemático linear para um elemento danificado
$[H(D, C)]$	Matriz de encruamento cinemático linear para um elemento que contém dano e corrosão
$\{M\}$	Vetor de tensões generalizadas
$[Mass]$	Matriz de massa
$\{U\}$	Vetor de deslocamentos generalizados
$\{\dot{U}\}$	Vetor de velocidades virtuais
$\{\ddot{U}\}$	Vetor correspondente à aceleração da estrutura
$\{Y\}$	Vetor das forças termodinâmicas associada ao dano
$\{\Phi\}$	Vetor de deformações generalizadas
$\{\Phi_0\}$	Vetor de deformações iniciais para um elemento
$\{\Phi_d\}$	Vetor de deformações associada ao dano
$\{\Phi_e\}$	Vetor de deformações elásticas
$\{\Phi_p\}$ e $\{\Phi^p\}$	Vetor de deformações plásticas
$\{\dot{\Phi}\}$	Vetor correspondente à taxa de deformação virtual generalizada
$\{\dot{\Phi}\}$	Vetor correspondente à taxa de deformação generalizada

## 1 INTRODUÇÃO

A corrosão é uma das formas mais comuns de degradação das propriedades dos materiais devido a interação com o ambiente. Inevitavelmente, essa deterioração pode ocorrer em diversos tipos de materiais, como em isolantes poliméricos presentes nas fiações de aeronaves envelhecidas ou em cerâmicas sujeitas a dissolução seletiva. No entanto, a corrosão está associada principalmente aos materiais metálicos. Mostrando a importância econômica em tratar cientificamente a corrosão e seus efeitos, Koch (2002) mostra que nos Estados Unidos são necessários cerca de US\$ 276 bilhões por ano para custear processos de corrosão, concentrando-se principalmente na manutenção de utilitários, transporte e infraestrutura.

Para Shaw e Kelly (2006), assim como a morte e os impostos, a corrosão de materiais é algo que deve ser evitado, sendo, para isso, necessário compreender como lidar com esse fenômeno. Para os autores, a causa fundamental de toda a corrosão é a variação da energia livre de Gibbs do sistema analisado. Nesse sentido, a produção das ligas metálicas envolve a adição de energia ao sistema, de modo que como resultado da luta termodinâmica, durante o passar do tempo, o metal acaba sendo impulsionado naturalmente a retornar ao seu estado mais estável (óxido de baixa energia). Esse processo de retorno ao formato de óxido é denominado corrosão, e, embora seja natural, existem métodos de controle que podem ser utilizados na sua prevenção, como: aplicação de revestimentos protetores que atuem como barreira ou proteção de sacrifício; adições de espécies químicas ao ambiente para inibir a corrosão; alteração da química da liga para torná-la mais resistente ao fenômeno e o tratamento da superfície do metal para aumentar sua resistência a corrosão. Dessa forma, vale destacar que a taxa de corrosão é um tema de interesse de muitas pesquisas, e é controlada pela natureza da superfície do metal e pela natureza do ambiente em que se encontra, ou pela combinação de ambas.

A medida que infraestruturas de países envelhecem, mais falhas devido à corrosão passam a ocorrer. Para Shaw e Kelly (2006), a substituição de todas as pontes e oleodutos, por exemplo, seria evidentemente cara e desnecessária, pois entende-se que a maioria dessas infraestruturas ainda possam estar em boas condições de serviço. O desafio de descobrir quais estão falhando e quanto tempo elas podem durar é a função da previsão da vida útil, que envolve pesquisas de diversas áreas, como computação, engenharia civil e economia.

Sendo assim, este trabalho entra no tema do acoplamento corrosão-fissuração em estruturas de concreto armado, já que na perspectiva da engenharia civil e de estruturas, o concreto posiciona-se, indubitavelmente, como um dos materiais mais utilizados no mundo.

A importância desse material cimentício é conhecida pelas propriedades características, tais como, significativa resistência mecânica, durabilidade, facilidade de moldagem e resistência ao fogo, as quais potencializam sua demanda em diversas aplicações dentro da construção civil. Nesse sentido, composto basicamente da mistura de água, cimento e agregados, o concreto endurecido consegue atingir significativa resistência à compressão, por volta de 32 MPa após os 28 dias de cura (concreto comum). No entanto, esse material não possui uma grande capacidade de resistir a esforços de tração, ficando restrito a aproximadamente 1/10 da resistência de compressão. Todavia, pelo fato das solicitações estarem mescladas entre compressão e tração, em estruturas de construções correntes, busca-se associar o concreto com outro material que possua boa resistência à tração. A armadura de aço é a mais usual e é disposta longitudinalmente nas regiões de tração da peça, fazendo surgir assim um material compósito denominado concreto armado (ARAÚJO, 2014; CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Devendo trabalhar como uma peça solidária, as forças de aderência entre concreto e armadura garantem que as barras de aço tracionadas funcionem apenas com o efeito da deformação do concreto que as envolvem. Assim, mesmo que a estrutura possua regiões deformadas capazes de fissurar o concreto, ela conseguirá assegurar a resistência adequada para a solicitação de cálculo, graças ao aço. Ademais, o concreto envolto às armaduras, além de possuir a função de aderência, serve também para proteger as barras de aço contra a corrosão. Nesse sentido, Araújo (2014) afirma que a fissuração do concreto é inevitável em estruturas econômicas de concreto armado, facilitando o descobrimento do aço e, conseqüentemente, a propagação da corrosão, mas a durabilidade da peça não é necessariamente prejudicada quando se respeita o limite mínimo de cobrimento no cálculo estrutural. Esse limite depende da agressividade do meio externo em que se encontra a estrutura.

Entretanto, sabe-se que as estruturas de concreto armado se deterioram ao longo do tempo devido a efeitos mecânicos, químicos e ambientais. Para Bertolini et al. (2004) e Carsana et al. (2018), uma das maiores preocupações quanto ao desempenho a longo prazo e à durabilidade estrutural está relacionada aos efeitos da corrosão do aço embutido no concreto, que comumente é iniciado pela despassivação das armaduras através das reações de carbonatação e/ou por ações de íons cloretos advindos do meio externo.

Gentil (1996) explica a corrosão como a deterioração espontânea de um material, especialmente os metálicos, pela ação química ou eletroquímica do meio ambiente, podendo estar aliado aos esforços mecânicos. Esse fenômeno causa alterações estruturais, variações químicas e desgaste na superfície das armaduras de aço, podendo torná-las inviáveis ao uso originalmente atribuído.

A desestabilização da camada passivadora de concreto ao redor da armadura é considerada a fase inicial da corrosão. Em seguida, ocorre a formação de uma célula de corrosão que é responsável pela propagação desse fenômeno (FIGUEIREDO; MEIRA, 2013).

Nesse contexto, por se tratar de um fenômeno probabilístico que depende de fatores ambientais, das características estruturais e do tempo exposto, a análise estrutural que contempla a corrosão das armaduras está atrelada a alta complexibilidade em simulações. No entanto, através de fundamentações teóricas oferecidas pela termodinâmica de sólidos e de pórticos, houve a possibilidade da confecção de um modelo mecânico de análise de estruturas de concreto armado que leva em consideração a corrosão das armaduras.

Este trabalho está baseado no estudo desenvolvido por Coelho (2017), no qual, pioneiramente, realiza a análise do acoplamento corrosão-fissuração em estruturas de concreto armado através da teoria do dano concentrado. Como resultados, a autora obteve que o aumento da taxa de corrosão gera redução da seção transversal das armaduras e a penalização da tensão de escoamento, fazendo com que haja perda de rigidez e de capacidade resistente, favorecendo incrementos de deformações e de fissuração na estrutura.

Coelho (2017) conclui que a teoria do dano concentrado permite o acoplamento direto e eficiente da corrosão em análises inelásticas, através da definição de uma variável de estado de corrosão. O modelo pôde ser modificado para contemplar diversas leis de evolução da corrosão, que são parâmetros do tempo de início e da taxa da corrosão das armaduras. Além disso, devido ao baixo custo computacional associado a teoria do dano concentrado, viabilizou-se análises estruturais probabilísticas através do método de simulação de Monte Carlo, provando que essa teoria e análise probabilística podem trabalhar bem juntas.

Por fim, a conclusão de Coelho (2017) sobre análises de confiabilidade é a possibilidade de determinação do caminho de falha da estrutura. A redistribuição dos esforços internos está diretamente relacionada ao processo corrosivo, sendo possível a existência de mecanismos de colapso não esperados – mudança no caminho crítico de estruturas hiperestáticas – e isso significa um ponto importante para definição de possíveis medidas de reparo em estruturas sob corrosão.

Este trabalho, também, possui base no estudo feito por Dahmer (2018), no qual faz-se uso da termodinâmica de sólidos para desenvolver a termodinâmica de pórticos. Assim, validou-se a termodinâmica de pórticos com modelos auxiliares consolidados na literatura: modelo elastoplástico perfeito, modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, modelo elástico com dano, modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear e dano. Por meio do desenvolvimento dessa termodinâmica, a autora realiza a análise estrutural de uma grelha considerando a evolução da corrosão por pite.

No entanto, nos trabalhos de Coelho (2017) e de Dahmer (2018) não houveram a consideração da evolução da corrosão causada pela propagação da fissuração em estruturas de concreto armado. Assim, para os autores o avanço da corrosão das armaduras deve-se exclusivamente a forças termoquímicas, propriedades da seção e propriedades do concreto.

Nesse sentido, na presente pesquisa foi estudado o acoplamento da corrosão de armaduras por pite na análise estrutural, por meio da mecânica do dano concentrado, e desenvolveu-se um modelo de análise inelástico termodinamicamente admissível que contemple como variáveis internas: plasticidade, dano e corrosão. A mecânica do dano concentrado está embasada na mecânica da fratura e na teoria do dano clássico, sendo, assim, escolhida devido sua relativa simplicidade e significativa consistência teórica (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Como novidades desta pesquisa, houve a colaboração com estudos sobre o desenvolvimento da termodinâmica aplicada a estruturas tipo pórticos (termodinâmica de pórticos) e, principalmente, além de considerar a evolução da corrosão na análise estrutural, adicionou-se a influência da parcela da corrosão devido a fissuração do concreto.

Vale destacar que a partir do desenvolvimento do presente trabalho já foram submetidos e/ou publicados dois artigos científicos, sendo um no congresso XL CILAMCE e outro na revista IBRACON “Structures and Materials Journal”, e um capítulo de livro intitulado “Durability and service life prediction of reinforced concrete frames subjected to chloride corrosion and mechanical loading”, que fará parte do livro “Salt Attack, Durability and Service Life”, da editora Springer.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivo Geral**

Desenvolver um modelo matemático para o acoplamento da corrosão, pelo efeito de íons cloretos, da fissuração e da plasticidade em análise de estruturas de concreto armado, que funcione independentemente da escolha do modelo de corrosão por pite da literatura e possa ser aplicado a estruturas complexas sujeitas a solicitações termoquímicas e mecânicas.

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

Realizar a implementação do modelo matemático proposto em um programa de álgebra computacional por meio do método dos elementos finitos.

Validar o modelo mediante simulações numéricas de resultados experimentais da literatura.

Propor procedimentos experimentais para a identificação do coeficiente empírico que relaciona a evolução do dano com a evolução da corrosão.

Fazer aplicações do modelo desenvolvido na análise de exemplos didáticos de estruturas de concreto armado corroídas.

## **1.2 Estrutura da dissertação**

Este trabalho está dividido em capítulos. Além disso, de modo a proporcionar uma prévia dos temas que serão abordados, o presente item busca dar maior clareza de quais são os processos descritivos da pesquisa.

O capítulo 2 deste trabalho faz uma revisão dos mecanismos mais comuns que causam a corrosão de armaduras em estruturas de concreto armado, sendo esses: mecanismo de carbonatação do concreto e mecanismo causado pelo efeito de íons cloretos. Assim, é feita a abordagem dos principais temas ligados a cada processo, como reações aliadas, difusão dos agentes causadores e efeitos desencadeados na armadura, dando maior enfoque a corrosão associada a presença de íons cloretos no concreto (corrosão concentrada ou por pite), que é objeto de estudo da presente pesquisa.

No capítulo 3 realiza-se uma revisão sobre a mecânica do dano concentrado aplicada a pórticos planos. Primeiramente, é feita a contextualização do surgimento dessa teoria e a justificativa para sua utilização. Posteriormente, define-se as equações cinemáticas de pórticos, equação de equilíbrio e lei constitutiva. A lei constitutiva, revisada nesse capítulo, contém a lei de evolução do dano e a lei de plasticidade. Dessa maneira, é compreendido todo o funcionamento da teoria para, somente após, iniciar a inclusão da parcela de corrosão por pite.

O capítulo 4 aborda a termodinâmica de sólidos. Nesse item, faz-se uma revisão bibliográfica dos trabalhos de Lemaitre e Chaboche (1990) e Proença (2000), nos quais, fundamentalmente, são conceituados as leis e princípios da termodinâmica necessários para o desenvolvimento aplicado a pórticos (termodinâmica de pórticos) e, conseqüentemente, à fundamentação teórica do modelo proposto.

A partir do capítulo 5, o presente trabalho descreve os resultados alcançados. O capítulo 5, em especial, é resultado da aplicação da termodinâmica de sólidos em estruturas do tipo pórticos. Assim, é obtido a condição de admissibilidade termodinâmica para um modelo mecânico de análise estrutural e as verificações associadas.

No capítulo 6 efetuam-se as formulações de modelos termodinâmicos auxiliares já verificados na literatura. Esse capítulo foi necessário para covalidar a termodinâmica de pórticos com modelos consolidados (modelo elástico, modelo elastoplástico com encruamento

cinemático linear, modelo com dano frágil e modelo elastoplástico com encruamento cinemático e que contém o dano) e, conseqüentemente, nortear à confecção do modelo mecânico que também contemplará a variável de corrosão.

O capítulo 7 é confeccionado a partir do capítulo 6, no qual é incluído a variável de corrosão no desenvolvimento e verificado a admissibilidade termodinâmica do modelo.

No capítulo 8, realiza-se a validação do modelo desenvolvido por meio de resultados da literatura. Após, são analisados dois exemplos didáticos de estruturas de concreto armado: uma laje e um pórtico. Nessas análises, foram avaliadas as evoluções do dano, da plastificação e da corrosão. Assim, pôde-se verificar a influência da corrosão na fissuração e vice-versa.

Por último, no capítulo 9 são apresentadas as conclusões obtidas no trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 CORROSÃO DE ARMADURAS EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Em uma breve análise histórica sobre estruturas de concreto armado, pode-se verificar que no passado havia a suposição de que a perda de resistência durante o tempo de vida da estrutura poderia ser negligenciada, caso fossem respeitadas baixas razões água/cimento e alturas limites de moldagem capazes de reduzir o ganho de temperatura devido ao calor de hidratação liberado. No entanto, uma análise estrutural completa não se delimita a obter a resistência residual para fins estruturais, mas, estende-se a compreensão do aumento da porosidade, da penalização da resistência devido processo de carbonatação do concreto e da possibilidade de penetração de íons cloretos nos poros, que favorecem o processo de corrosão no aço em estruturas de concreto armado (MEHTA; MONTEIRO, 2006).

Sendo praticamente inevitável, a corrosão trata-se da degradação de materiais devido a interações químicas e eletroquímicas com o meio ambiente. Esse fenômeno está ligado principalmente aos metais, no entanto, outros tipos de materiais podem estar suscetíveis a essa degradação. Tratando-se das armaduras de aço em estruturas de concreto armado, verifica-se uma força motriz termodinâmica que impulsiona esse material metálico a retornar ao seu estado natural e mais estável. Esse estado, denominado óxido de baixa energia, garante que a deterioração do aço ocorra ao longo do tempo (SHAW; KELLY, 2006).

A revisão sobre os principais mecanismos que causam a corrosão de armaduras em estruturas de concreto armado – mecanismo de carbonatação do concreto e mecanismo causado pelo efeito de íons cloretos – é realizada neste trabalho tendo como base o estado da arte levantada por Coelho (2017). Além disso, buscou-se complementar esse levantamento com outras referências e, principalmente, com a adição de outros modelos matemáticos que tratam sobre a evolução da corrosão associado a presença de íons cloretos, que é um dos objetos de estudo da presente pesquisa.

### 2.1 Corrosão devido a carbonatação do concreto

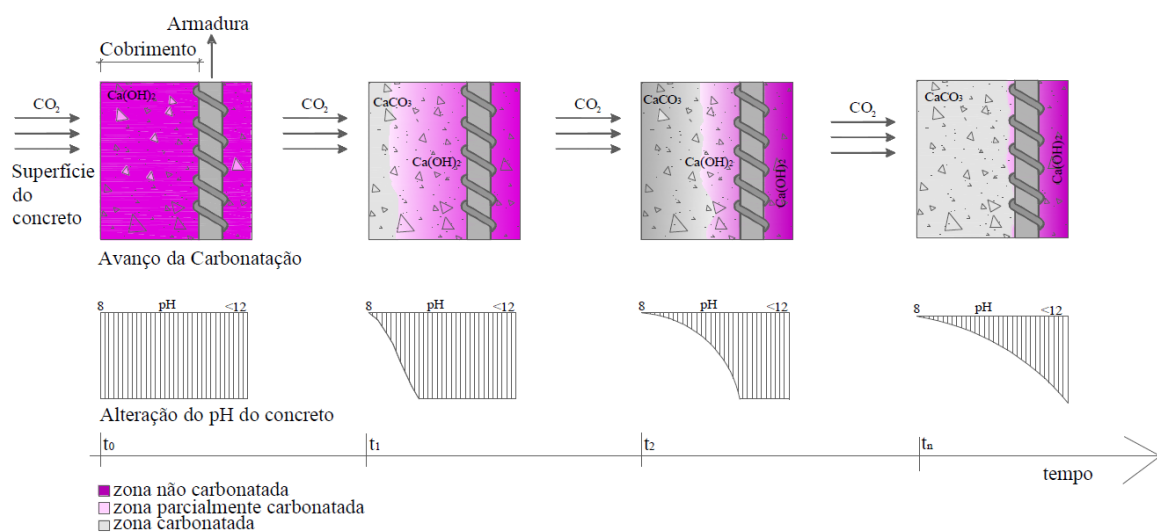
Originalmente, o concreto é um material alcalino que contém alguns hidróxidos espalhados em seus poros, como hidróxido de cálcio ( $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ), hidróxido de sódio ( $\text{NaOH}$ ) e hidróxido de potássio ( $\text{KOH}$ ). Esses materiais fazem com que o pH do concreto esteja no entorno de 13 e 14, promovendo sua estabilidade química nas camadas mais próximas às armaduras. Em outras palavras, esse conjunto de camadas, denominado de camada passivadora, serve como uma proteção química ao mecanismo de corrosão das barras de aço (BERTOLINI et al., 2004).

No entanto, o valor correspondente ao pH do concreto pode ser reduzido a medida que ocorre a penetração de agentes agressivos externos nos poros, como dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ), ácido sulfídrico ( $\text{H}_2\text{S}$ ) e dióxido de enxofre ( $\text{SO}_2$ ).

Como resultado das reações entre o gás carbônico atmosférico ( $\text{CO}_2$ ) e produtos da hidratação do cimento, na presença de umidade, surge o fenômeno da carbonatação do concreto. Segundo Tuutti (1982), com o processo de penetração de gás carbônico atmosférico nos poros do concreto passam a ocorrer, principalmente, reações entre o dióxido de carbono e hidróxido de cálcio ( $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ). Essas reações ocorrem na presença de água, produzindo sais carbonatados que proporcionam a redução do pH da camada passivadora para valores inferiores a 9 e, conseqüentemente, comprometem a estabilidade química do material e dá início ao processo de corrosão das barras de aço.

A penetração do dióxido de carbono na superfície da peça de concreto armado tende a ser homogênea ao longo de seu comprimento, de modo que a carbonatação inicia-se a partir das camadas mais externas do elemento estrutural em direção ao interior do concreto, gerando a frente de carbonatação. Quando a frente de carbonatação passa a afetar a estabilidade química das armaduras inicia-se o processo de corrosão uniforme das barras de aço (POSSAN, 2010). A Figura 1 ilustra o avanço da frente de carbonatação no tempo, qualifica a variação do pH da camada passivadora e faz a previsão da homogeneização do processo corrosivo. Vale destacar que o carbonato de cálcio ( $\text{CaCO}_3$ ) é um dos principais produtos gerados na carbonatação, estando assim representado na Figura 1.

**Figura 1** – Representação do fenômeno da carbonatação do concreto no tempo.



FONTE: Possan (2010).

Pode-se notar a carbonatação em vários tipos correntes de estruturas de concreto armado, como: túneis, barragens e estacionamentos em subsolo de edifícios. Para Tuutti (1982) e Neville (2016), o crescimento de grandes cidades e de regiões industriais proporciona o aumento da taxa de liberação de dióxido de carbono no ambiente. Esse incremento provoca uma maior tendência de ocorrer processos corrosivos em estruturas de concreto armado causados pela carbonatação. Ademais, Neville (2016) destaca algumas concentrações percentuais de  $\text{CO}_2$  em relação a ambientes específicos: em ambientes de laboratório não ventilados podem ser superiores a 0,1%, já nas grandes cidades podem chegar a 0,3 % e em casos excepcionais, como áreas industriais, podem atingir 1,0%. A Figura 2, a seguir, ilustra um caso de corrosão uniforme em armaduras longitudinais de uma laje localizada no estacionamento de um edifício residencial, na cidade de Foz do Iguaçu/PR.

**Figura 2** – Laje parcialmente deteriorada devido a corrosão por carbonatação.



FONTE: Do autor.

### 2.1.1 Reações aliadas a carbonatação

Dentre os principais produtos gerados durante o processo da carbonatação do concreto, o carbonato de cálcio ( $\text{CaCO}_3$ ) é considerado o principal (TUUTTI, 1982). Possan (2010) define a carbonatação, de modo geral, como sendo a neutralização da fase líquida intersticial do

hidróxido de cálcio e de outros componentes hidratados da matriz cimentícia pelo gás carbônico, produzindo carbonato de cálcio precipitado juntamente com água. A reação simplificada que produz esse sal carbonatado pode ser verificada logo a seguir, através da Equação 1.



Por outro lado, a carbonatação do concreto divide-se em várias etapas. Segundo Taylor (1997) a primeira reação que ocorre é a dissolução do  $\text{CO}_2$  em água presente nos poros da pasta de concreto hidratada, produzindo ânions  $\text{CO}_3^{2-}$  (Equação 2).

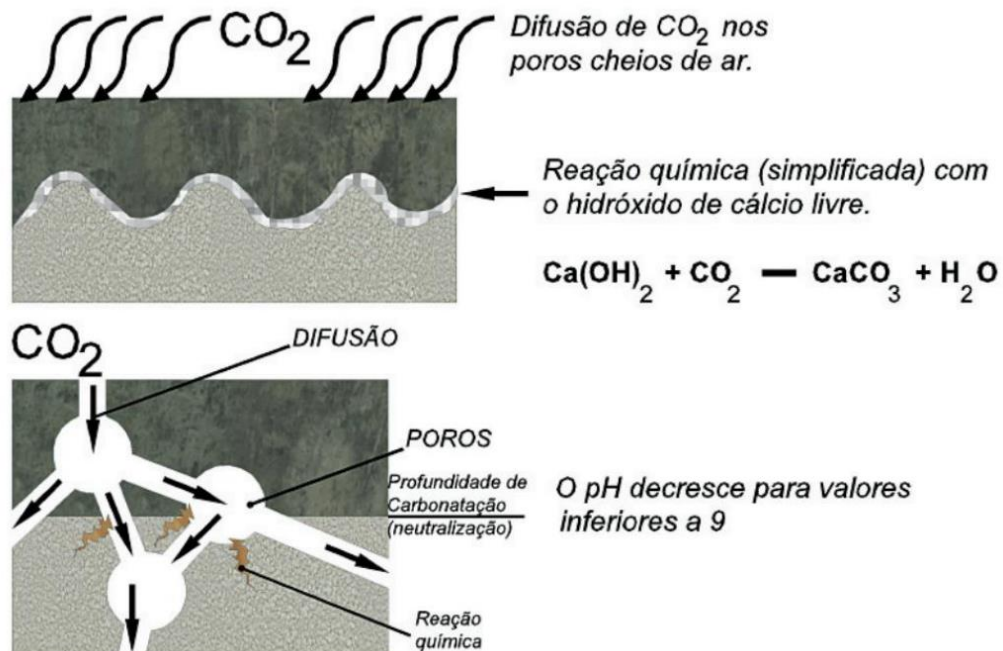


Dentro da matriz cimentícia, o silicato de cálcio hidratado (C-S-H) e as fases aluminato sofrem decomposições gerando hidróxido de cálcio. O hidróxido de cálcio sofre dissolução em água liberando ânions  $\text{OH}^-$  e cátions  $\text{Ca}^{2+}$  (Equação 3). O cátion  $\text{Ca}^{2+}$  junta-se com o ânion  $\text{CO}_3^{2-}$ , proveniente da dissolução do  $\text{CO}_2$  em água (Equação 2), para a formação do carbonato de cálcio (Equação 4).



Esse procedimento inicial pode ser verificado na ilustração da Figura 3, em que é representada a difusão do gás carbônico nos poros do concreto e a reação simplificada do dióxido de carbono com hidróxido de cálcio.

**Figura 3** – Representação esquemática do processo de carbonatação.

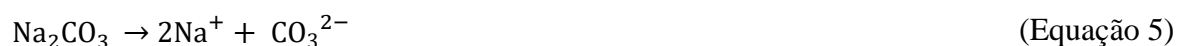


FONTE: CEB (1984) apud Figueiredo e Meira (2013).

As reações secundárias da carbonatação ocorrem com a etringita ( $\text{AF}_t$ ), o monossulfato ( $\text{AF}_m$ ) e o aluminato cúbico ( $\text{C}_4\text{AH}_x$ ); as que envolvem a etringita e o monossulfato produzem  $\text{CaCO}_3$ , gel de alumina e silicato de cálcio; já a reação do aluminato cúbico produz  $\text{C}_4\text{A C H}_{11}$ , que é convertido em  $\text{CaCO}_3$  e gel de alumina.

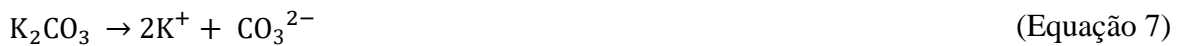
Segundo Taylor (1997), o silicato de cálcio hidratado também pode sofrer o processo de carbonatação por descalcinação produzindo o gel de sílica. Por ser altamente poroso, esse gel pode proporcionar o incremento de fissuras no concreto. Outros materiais do cimento que possuem a capacidade de sofrer o processo de carbonatação e produzir carbonato de cálcio são os silicatos não hidratados ( $\text{C}_2\text{S}$  e  $\text{C}_3\text{S}$ ).

O hidróxido de sódio ( $\text{NaOH}$ ), presente nos poros, ao sofrer a reação de carbonatação acaba formando um sal solúvel que pode se dissociar facilmente em água, denominado carbonato de sódio ( $\text{Na}_2\text{CO}_3$ ) (Equação 5). Assim, passa a ocorrer junção entre ânions  $\text{CO}_3^{2-}$ , proveniente do carbonato de sódio, e cátions  $\text{Ca}^{2+}$  livres em água nos poros (Equação 3) formando mais carbonato de cálcio precipitado (Equação 4). O  $\text{Na}^+$  remanescente passa a ligar-se ao  $\text{OH}^-$  voltando a produzir hidróxido de sódio (Equação 6).





Os álcalis de potássio presentes no concreto também podem sofrer carbonatação, produzindo o sal carbonatado ( $\text{K}_2\text{CO}_3$ ) (POSSAN, 2010). Esse composto é considerado não estável, e, analogamente, sofre a sequência de reações do hidróxido de sódio. A sequência de reações é descrita a seguir, por meio das Equações 7 e 8.



No início do processo, as taxas de carbonatação são maiores, de modo que com o avanço da cinética das reações essas velocidades tendem a cair. Segundo Ngala e Page (1997), a diminuição da taxa de carbonatação do concreto no tempo está ligada a redução do volume total dos poros, ou seja, com a decomposição dos componentes do cimento em  $\text{CaCO}_3$  precipitado, que possui volume significativamente superior aos compostos de origem (aproximadamente 10%), passa a acontecer o preenchimento dos poros, o que reduz a difusão do dióxido de carbono e, conseqüentemente, a cinética das reações que compõe a carbonatação.

Por outro lado, Ngala e Page (1997) destacam que pode haver o aumento das dimensões dos poros devido a exposição prolongada do concreto a elevadas concentrações de  $\text{CO}_2$ , fazendo com que ocorra a decomposição do C-S-H, formando gel de sílica. Dessa forma, as taxas de corrosão por carbonatação podem ser potencializadas.

Devido a diminuição do volume da pasta de cimento endurecida, principalmente pelo consumo de  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ , juntamente com a redução da água presente, passa a ocorrer uma nova configuração interna nos poros do concreto endurecido. Isso acarreta efeitos de retração que somados a parcela de retração irreversível, frequentemente, provocam o elevado grau de fissuração na superfície da estrutura.

### **2.1.2 Difusão de dióxido de carbono no concreto**

O objetivo de muitos estudos sobre a carbonatação do concreto está na representação da profundidade desse fenômeno. Para isso, desde o século passado, foram desenvolvidos diversos modelos analíticos que pudessem representar essa profundidade no tempo (POSSAN, 2010).

Tuutti (1982) apresenta um modelo no qual a profundidade da carbonatação do concreto ( $X$ ) é diretamente incrementada à medida que o tempo de início da corrosão por carbonatação ( $t_{ini}^c$ ) aumenta quadraticamente (Equação 9).

$$X = K_{CO_2} \sqrt{t_c} \quad (\text{Equação 9})$$

Em que  $K_{CO_2}$  é o coeficiente de difusão, que depende da difusividade efetiva do dióxido de carbono no concreto, e  $t_c$  é o tempo de exposição à carbonatação, sendo  $t_c \leq t_{ini}^c$  (tempo de início de corrosão devido a carbonatação).

Boa parte dos modelos são diferenciados, basicamente, pelo modo de obtenção do coeficiente  $K_{CO_2}$ . Geralmente, o cálculo desse coeficiente leva em consideração fatores ambientais, como umidade relativa e concentração do gás carbônico no ambiente, e a relação entre os produtos da hidratação do cimento, como dosagem, relação água/cimento e relação agregado/cimento.

Para a formulação matemática semi-empírica de Papadakis et al. (1992), o cálculo da profundidade de carbonatação está associado a parâmetros de dosagem, que se baseiam nas características do concreto (tipo de cimento e composição química da pasta) e do ambiente (umidade relativa e temperatura). Diante disso, é organizado uma única expressão composta de formulações específicas capazes de estimar a concentração molar dos compostos sujeitos à carbonatação na pasta de cimento, a porosidade do concreto, a distribuição dos tamanhos dos poros e a área superficial, o grau de saturação e a difusividade efetiva dos gases no concreto. Essa equação final contém a função de dosagem do concreto, de umidade relativa e de concentração de  $CO_2$  (Equação 10).

$$X = 0,35 \rho_c \frac{a/c}{\left(1 + \frac{\rho_c a/c}{1000}\right)} + UR \sqrt{\left(1 + \frac{\rho_c a/c}{1000} + \frac{\rho_c ag/c}{\rho_{ag}}\right)} C_{CO_2} \frac{22,4}{44} 10^6 t_{ini}^c \quad (\text{Equação 10})$$

Em que  $\rho_c$  é a densidade do cimento ( $g/cm^3$ ),  $\rho_{ag}$  é a densidade dos agregados ( $g/cm^3$ ),  $UR$  é a umidade relativa,  $a/c$  é o fator água/cimento,  $ag/c$  é o fator agregado/cimento e  $C_{CO_2}$  é a concentração percentual de dióxido de carbônico no ambiente.

### 2.1.3 Redução da seção transversal das barras de aço devido a corrosão uniforme

Alcançado o tempo de início do processo corrosivo ( $t_{ini}^c$ ), a corrosão passa a atuar em toda a região da armadura afetada pela frente de carbonatação. Esse processo corrosivo passa a ocorrer uniformemente na armadura e associa-se às reações de oxirredução (BERTOLINI et al., 2004).

Por gerar degradação química e mecânica das armaduras, a corrosão acaba por estabelecer a redução da seção transversal das barras de aço no tempo. A velocidade com que ocorre esse processo denomina-se taxa de corrosão causada pela carbonatação do concreto ( $i_{cor}^c$ ) e esse parâmetro é fundamental para o cálculo do diâmetro efetivo (ou área efetiva) da armadura corroída. Essa taxa, geralmente, é expressa em  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$  e, frequentemente, é denominada densidade de corrente de corrosão.

Otieno et al. (2012) realiza uma classificação que relaciona quali e quantitativamente alguns intervalos de taxas de corrosão com os estados da corrosão e com a probabilidade de dano por corrosão (no estado limite de serviço). Essas relações podem ser verificadas na Tabela 1, logo a seguir.

**Tabela 1** – Classificação da corrosão de acordo com o nível de sua velocidade de propagação.

$i_{corr}$ ( $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ )	Estado da corrosão	$i_{corr}$ ( $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ )	Danificação esperada
<0,1	Desprezível	<0,2	Sem danificação esperada
0,1-0,5	Baixa corrosão	0,2-1,1	Danificação esperada em 10-15 anos
0,5-1,0	Moderada	1,1-11	Danificação esperada em 2-10 anos
>1,0	Alta corrosão	>11	Danificação esperada em <2 anos

FONTE: Otieno et al. (2012).

De acordo com Bertolini et al. (2004), barras de aço sujeitas a uma taxa de corrosão de  $10 \mu\text{A}/\text{cm}^2$  estão sujeitas a uma perda de aço anual de aproximadamente  $90 \text{ g}/\text{m}^2$  e uma taxa de penetração no entorno de  $11,7 \mu\text{m}/\text{ano}$ . Para o autor esse estado de corrosão é considerado intermediário. No entanto, essa mesma velocidade de corrosão seria considerada altíssima por Bertolini et al. (2004) – superior a  $1 \mu\text{A}/\text{cm}^2$  – sendo, ainda, que o período de danificação esperado estaria no intervalo de 2 a 10 anos.

Para o cálculo da perda da área de aço causada pela corrosão por carbonatação, DuraCrete (2000) propõe uma formulação para o cálculo da taxa  $i_{cor}^c$ , conforme a Equação 11.

$$i_{cor}^c = i_{cor-20}^c (1 + K_c(T - 20)) \quad (\text{Equação 11})$$

Em que  $T$  é a temperatura em °C,  $i_{cor-20}^c$  é a taxa de corrosão causada pela carbonatação do concreto, relativa a uma temperatura de 20 °C, e  $K_c$  é uma constante que depende da temperatura, sendo  $K_c=0,025$  para  $T<20^\circ\text{C}$  e  $K_c=0,073$  para  $T>20^\circ\text{C}$ .

Os valores de  $i_{cor-20}$  são apresentados por Stewart et al. (2011) através de uma tabela com distribuição lognormal dos valores, na qual verifica-se que as taxas de corrosão à 20°C estão intimamente ligadas a umidade relativa do concreto. Esses valores de  $i_{cor-20}$  e dos respectivos desvios padrão podem ser verificados através da Tabela 2, a seguir.

**Tabela 2** – Taxa de corrosão devido a carbonatação para vários tipos de exposição, à 20°C.

Classe de exposição	$i_{corr-20}$ ( $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ )	Desvio padrão
Concreto seco	0	0
Concreto úmido	0,345	0,259
Concreto com umidade moderada	0,172	0,086
Concreto com ciclos seco e úmido	0,431	0,259

FONTE: Stewart et al. (2011).

Andrade et al. (1993) apresenta a formulação para o cálculo da redução do diâmetro das barras de aço, segundo a Equação 12.

$$\Delta\phi = -0,023i_{cor}^c (t_{tc} - t_{ini}^c) \quad (\text{Equação 12})$$

Em que  $\phi$  corresponde ao diâmetro da barra de aço (mm),  $t_{tc}$  ao tempo transcorrido para corrosão uniforme (anos) e  $t_{ini}^c$  ao tempo de início de corrosão (anos). Logo, percebe-se que para uma taxa de corrosão de  $1,0 \mu\text{A}/\text{cm}^2$  ocorre uma redução anual de  $0,023$  mm no diâmetro da barra ocasionada pela corrosão uniforme.

Justificando a necessidade de abordar os mecanismos de corrosão por carbonatação e pela ação de íons cloretos através de formulações distintas, Coelho (2017) defende que, sob mesmas condições ambientais, a corrosão uniforme atinge taxas menores que a corrosão por pites (corrosão causada pela presença de íons cloretos nos poros do concreto). Nessa perspectiva, concretos sob exposição a íons cloretos e umidade relativa no entorno de 96% apresentam taxas de penetração da corrosão de até  $1000 \mu\text{m}/\text{ano}$ , enquanto concretos sujeitos a carbonatação, sob mesmas condições de umidade, possuem taxas de penetração da corrosão no entorno de  $100 \mu\text{m}/\text{ano}$ , isto é, dez vezes menor. Sendo assim, este trabalho delimita-se a analisar estruturas de concreto armado que sofram corrosão exclusivamente por efeitos de íons cloretos.

## 2.2 Corrosão pelo efeito de íons cloretos

Analogamente ao processo de corrosão causada pela carbonatação do concreto, que está ligada a presença de dióxido de carbono, a corrosão pelo efeito de íons cloretos associa-se à penetração dos íons  $\text{Cl}^-$  no concreto. Esses íons, na presença de água e oxigênio nos poros do concreto, proporcionam a desestabilização pontual da película passivadora das armaduras, dando início a pontos singulares de corrosão nas barras de aço, denominados pites.

Característico de regiões litorâneas, os íons  $\text{Cl}^-$  podem alcançar concentrações elevadas e conseqüentemente desencadear o processo acelerado da corrosão pontual. Meira e Padaratz (2002), Albuquerque e Otoch (2005) e Alves (2007) realizaram estudos que tratam sobre o mapeamento de cloretos nas cidades litorâneas de João Pessoa, Fortaleza e Maceió, respectivamente. Para esses autores, as taxas de deposição de cloretos podem alcançar valores de 729,16  $\text{mg/m}^2\cdot\text{dia}$  em João Pessoa, 3502  $\text{mg/m}^2\cdot\text{dia}$  em Fortaleza e 1040  $\text{mg/m}^2\cdot\text{dia}$  em Maceió, sendo que esses valores correspondem a uma faixa localizada de até 30 m do mar e dependem do período anual de análise. Para Meira e Padaratz (2002) e Alves (2007), a taxa de deposição sofre um decréscimo exponencial a medida que ocorre o distanciamento do mar, em especial nos primeiros 200 m. No entanto, mesmo a uma distância de 14 km do mar ainda pode-se verificar a presença de íons cloretos depositados, segundo Alves (2007).

Todavia, não é necessário estar próximo a regiões litorâneas para que haja a presença de íons cloretos no concreto. Esses íons podem ser provenientes de outras fontes, como: estarem inseridos no próprio concreto durante sua confecção em obra ou em usina de concretagem; através de agregados contaminados; presentes na água de amassamento e em aditivos. Naturalmente, essa situação teria deterioração mais acelerada, visto que os íons cloretos estariam presentes no concreto desde a fase inicial de sua concepção.

Pode-se destacar, também, a existência de produtos de limpeza a base de cloro, como água sanitária, que podem ser fontes de geração de íons cloretos presentes em estruturas de concreto armado, dentre outras fontes.

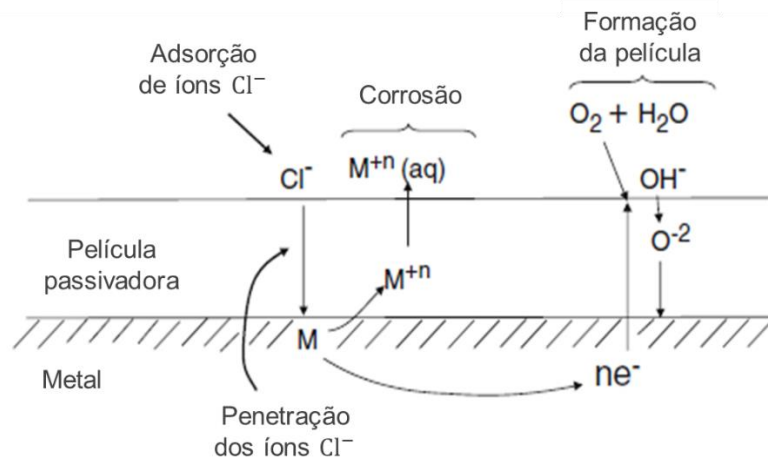
### 2.2.1 Reações aliadas a presença de íons cloretos

As reações químicas causadas pela presença de íons cloretos na microestrutura do concreto são mais incertas, em comparação as reações desencadeadas pelo fenômeno da carbonatação. Essa incerteza está associada com as limitações em se observar as reações químicas num nível atômico e em uma película tão fina quanto à camada passivadora das armaduras.

Mesmo assim, McCafferty (2010) apresenta uma teoria para o entendimento dessas reações. Para o autor a corrosão por pite, assim como a corrosão uniforme, pode ser dividida em estágios inicial e de propagação. O processo inicial, denominado despassivação, pode-se dar pela combinação de três mecanismos possíveis, sendo eles: mecanismo de penetração, mecanismo de adsorção e mecanismo de ruptura do filme óxido (ou teoria do filme óxido).

No mecanismo de penetração, os íons cloretos são transportados através do filme de óxidos até a superfície do metal subjacente, onde ocorre a dissolução localizada do metal em óxido. A Figura 4 busca representar esse mecanismo.

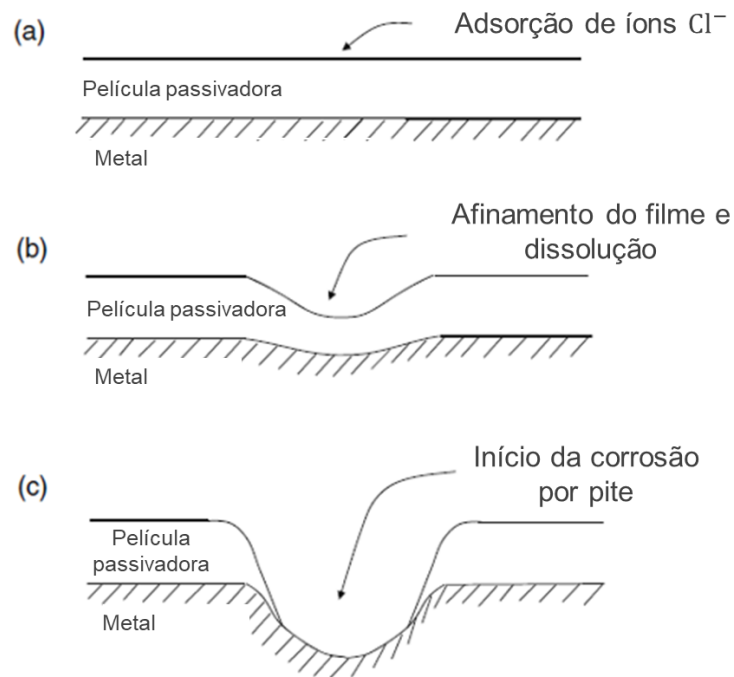
**Figura 4** – Mecanismo de penetração de íons cloretos.



FONTE: McCafferty (2010).

Pelo fato da corrosão pontual poder ser causada por outros íons, como os íons brometos ( $\text{Br}^-$ ) e os íons iodetos ( $\text{I}^-$ ), que são maiores que o  $\text{Cl}^-$  em tamanho, deve-se levar em conta mecanismos adicionais de iniciação da corrosão relacionados a outros íons agressivos (MCCAFFERTY, 2010). Nesse contexto, existe o mecanismo de adsorção, no qual os íons agressivos (cloretos e outros) primeiro adsorvem na superfície do óxido, podendo ser em aglomerados, e em seguida formam uma superfície de óxido (filme) que leva a uma dissolução localizada e afinamento da película passivadora, conforme está representado na Figura 5, a seguir.

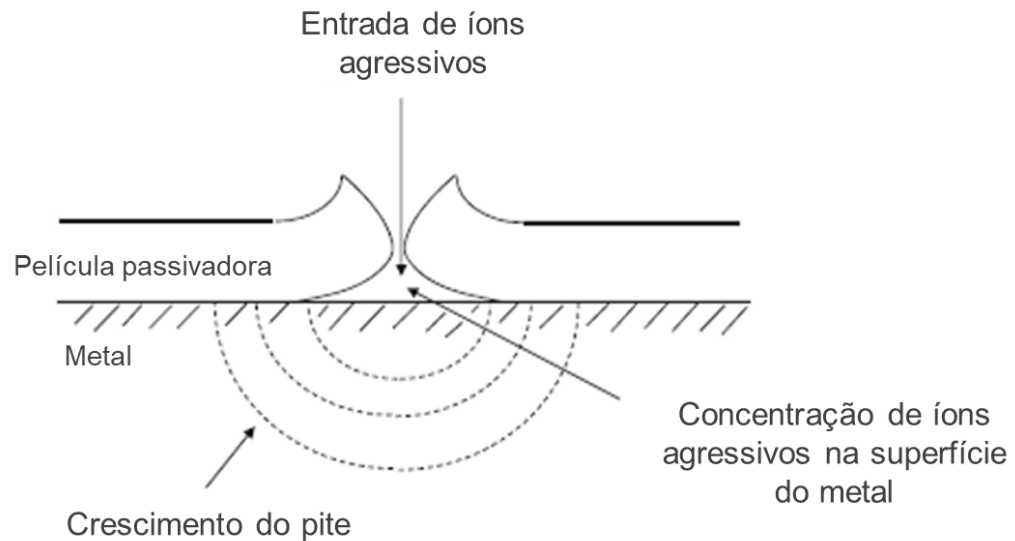
**Figura 5** – Mecanismo de adsorção: (a) adsorção de íons cloretos; (b) início do processo de afinamento da película passivadora; (c) início da corrosão localizada.



FONTE: McCafferty (2010).

No mecanismo de ruptura do filme óxido ocorre a penetração dos íons cloreto no óxido através de rachaduras e falhas na película. Também pode haver falhas geradas por efeito da hidratação e desidratação no filme óxido e pela intrusão de íons cloretos no filme. Esse mecanismo é representado pela Figura 6.

**Figura 6** – Mecanismo de ruptura do filme óxido.



FONTE: McCafferty (2010).

MacDonald (1992) e Bockris e Minevski (1993) desenvolveram trabalhos sobre formas de transporte de íons cloretos na película passivadora embasados no mecanismo de penetração.

Apesar de retratados três procedimentos distintos de transporte de íons cloretos, Yu et al. (2000) sugere a ocorrência de mais de um deles simultaneamente, afirmando que dificilmente esses processos ocorrem de forma isolada.

### 2.2.2 Difusão de íons cloretos no concreto

Diversos modelos buscam representar o fenômeno da difusão dos íons cloretos em estruturas de concreto armado. A segunda lei de Fick é utilizada para a determinação do tempo de início da corrosão e trata-se de um método não estocástico. As medidas de simplificação que esse método utiliza são: concreto como material homogêneo, isotrópico e inerte; concentração de cloretos constante na superfície da estrutura e meio totalmente saturado. Considerando o problema unidimensional no espaço, em função do tempo, essa segunda lei é dada pelo seguinte formato, apresentado pela Equação 13 (SCHIEBL; LAY, 2006).

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (\text{Equação 13})$$

Ademais, o coeficiente de difusão de íons cloretos no concreto ( $D$ ) pode ser tratado independentemente do tempo, gerando modelos mais simples. Nesse sentido, a Equação 14 estima o tempo de início de corrosão associada a presença de íons cloretos no concreto ( $t_{ini}^{cl}$ ).

$$t_{ini}^{cl} = \frac{1}{D} \left\{ \frac{cob}{2erfc^{-1}\left[\frac{C_{lim}}{C_0}\right]} \right\}^2 \quad (\text{Equação 14})$$

Em que  $erfc^{-1}$  é a função erro complementar de Gauss,  $cob$  é o cobrimento da armadura,  $C_{lim}$  é a concentração crítica de cloretos e  $C_0$  é a concentração de cloretos na superfície da estrutura.

No entanto, existem diversos métodos para o cálculo do coeficiente  $D$ , que podem fazer uso de parâmetros de dosagem ou estar baseados em formulações matemáticas da literatura. Os modelos mais recentes e mais completos levam o tempo em consideração no cálculo desse coeficiente, o que torna inviável a obtenção do tempo de início da corrosão de forma direta, fazendo-se necessário processos iterativos.

O modelo de Papadakis et al. (1996) propõe o cálculo do coeficiente  $D$  satisfazendo as condições de simplificação da segunda lei de Fick. Essa formulação leva em conta parâmetros relacionados a dosagem do concreto, como ftores água/cimeto ( $a/c$ ) e agregado/cimento ( $ag/c$ ), e propriedades dos materiais constituintes, como densidade do cimento  $\rho_c$  ( $g/cm^3$ ) e densidade dos agregados  $\rho_{ag}$  ( $g/cm^3$ ), e pode ser verificada na Equação 15.

$$D = D_{H_2O} 0,15 \frac{1 + \rho_c(a/c)}{1 + \rho_c(a/c) + \frac{\rho_c}{\rho_{ag}}(ag/c)} \left( \frac{\rho_c(a/c) - 0,85}{1 + \rho_c(a/c)} \right)^3 \quad (\text{Equação 15})$$

Em que  $D_{H_2O}$  é o coeficiente de difusão de íons cloreto para uma solução infinita, sendo que o valor de  $1,6 \cdot 10^{-5} cm^2/s$  está relacionado ao sal NaCl.

A Equação 15 está fundamentada em ajuste de dados experimentais e adota variáveis relacionadas ao material como parâmetro de influência no fenômeno da difusão. Por simplificação, essa formulação não leva em consideração variáveis provenientes do ambiente, como temperatura e umidade.

### 2.2.3 Redução da seção transversal das barras de aço devido a corrosão por pite

A corrosão devido a ação de íons cloretos tende a iniciar sob taxas mais expressivas e sofre reduções com o passar dos anos. A penalização dessa velocidade está aliada ao fato das reações de oxirredução ocorrerem numa região limitada da armadura, na qual a penetração de íons cloretos é dificultada com o aumento da profundidade a ser percorrida no interior da estrutura. Além disso, os produtos gerados nas reações entre íons cloretos, concreto e aço dificultam a penetração de novos íons agressivos.

Por outro lado, conforme resultados experimentais de Otieno et al. (2010), a corrosão das armaduras por pite sofre uma aceleração devido a fissuração do concreto, que facilita a presença de íons cloretos em contato com a armadura.

Otieno et al. (2011) defendem que a taxa de corrosão por pite é um dos parâmetros de interesse mais importantes para modelos de previsão de dano causados por corrosão em estruturas de concreto armado. Frequentemente, essa taxa é denominada densidade de corrente de corrosão por pite.

### 2.2.4 Densidade de corrente de corrosão por pite

A corrosão devido à ação dos íons cloreto geralmente ocorre em pontos concentrados nas armaduras em estruturas de concreto armado. A densidade de corrente de corrosão ( $i_{cor}^{cl}$ ) é um dos principais parâmetros que influenciam o processo de corrosão por pite, sendo expressa em unidades  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ .

A densidade de corrente de corrosão pode ser transformada em profundidade do pite em uma barra de aço. A profundidade máxima do pite ( $p$ ) pode ser calculada usando a formulação desenvolvida por Val e Melchers (1997), apud Stewart (2004), a seguir.

$$p = 0,0116i_{cor}^{cl}Rel(t_{trcl} - t_{ini}^{cl}) \quad (\text{Equação 16})$$

Em que  $Rel$  é a relação entre a profundidade máxima do pite e a profundidade média,  $t_{trcl}$  é o tempo transcorrido para corrosão causada pela presença de íons cloretos (anos) e  $t_{ini}^{cl}$  é o tempo de início de corrosão por pite (anos). O parâmetro  $Rel$  é considerado probabilístico, mas conforme Stewart (2004) pode-se adotar uma simplificação para a variável igual a 5,08. O número 0,0116 é responsável pela transformação de  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$  para mm/ano.

Para obter  $i_{cor}^{cl}$  existem muitos modelos disponíveis na literatura. Otieno et al. (2010) apresentam uma revisão de algumas das formulações de cálculo da densidade de corrente de

corrosão por pite associadas as forças termoquímicas, propriedades do concreto e propriedades da seção. Elas estão apresentadas nas seguintes seções.

#### 2.2.4.1 Modelo de Yalcyn e Ergun (1996)

Este modelo foi desenvolvido por meio de estudos de testes experimentais de corrosão acelerada devido a efeitos de íons cloreto e íons acetato. A Equação 17 apresenta o cálculo da densidade da corrente de corrosão causada pela presença de íons cloreto obtidos pelos autores.

$$i_{cor}^{cl} = \begin{cases} 0, & \text{if } t_{trcl} < t_{ini}^{cl} \\ i_0^{cl} e^{-C_{YE} t_{trcl}}, & \text{if } t_{trcl} \geq t_{ini}^{cl} \end{cases} \quad (\text{Equação 17})$$

Em que  $t_{trcl}$  é o tempo transcorrido para corrosão causada pela presença de íons cloretos (dias),  $i_0^{cl}$  é a densidade de corrente de corrosão inicial associada e  $C_{YE}$  é uma constante que depende das propriedades do material e da seção transversal: o grau de saturação dos poros, o pH, a permeabilidade e a espessura da cobertura de concreto. Os autores propõem um valor para a constante  $C_{YE}$  igual a  $1,1 \cdot 10^{-3} \text{ dia}^{-1}$ .

#### 2.2.4.2 Modelo de Liu e Weyer (1998)

O desenvolvimento deste modelo empírico é baseado na análise estatística de resultados experimentais. Os resultados foram obtidos para um teste de corrosão acelerado durante cinco anos e incluíram 44 lajes de pontes não fissuradas.

$$i_{cor}^{cl} = \begin{cases} 0, & \text{if } t_{trcl} < t_{ini}^{cl} \\ i_0^{cl} + 290,91(t_{trcl} - t_{ini}^{cl})^{-0,215}, & \text{if } t_{trcl} \geq t_{ini}^{cl} \end{cases} \quad (\text{Equação 18})$$

$$i_0^{cl} = 102,47 + 10,09 \ln(1,69Cl) - 39038,96T^{-1} - 0,0015R_c$$

Em que  $Cl$  é o teor total de cloreto nas barras de aço ( $\text{kg/m}^3$ ),  $T$  é a temperatura da superfície do aço (K) e  $R_c$  é a resistividade da cobertura de concreto ( $\Omega$ ). Nesse modelo o tempo está definido em anos.

As forças termoquímicas associadas são: concentração de íons cloreto e temperatura; e as forças devido as propriedades do concreto: resistividade da cobertura de concreto.

### 2.2.4.3 Modelo de Vu e Stewart (2000)

Os autores assumem que a disponibilidade de oxigênio na superfície das barras de aço é o fator determinante do processo corrosivo. O modelo tem como parâmetros de entrada o fator água/cimento ( $a/c$ ) e a espessura do cobrimento de concreto ( $cob$ ). Como condições para a utilização desta formulação, os valores de umidade relativa devem estar em torno de 75% e a temperatura ambiente no entorno de 20° C.

$$i_{cor}^{cl} = \begin{cases} 0, & \text{if } t_{trcl} < t_{ini}^{cl} \\ i_0^{cl}, & \text{if } t_{ini}^{cl} \leq t_{trcl} < t_{ini}^{cl} + 0,57 \\ 0,85i_0^{cl}(t_{trcl} - t_{ini}^{cl})^{-0,29}, & \text{if } t_{trcl} \geq t_{ini}^{cl} + 0,57 \end{cases} \quad (\text{Equação 19})$$

$$i_0 = \frac{37,8 \cdot \left(1 - \frac{a}{c}\right)^{-1,64}}{cob}$$

O cobrimento de concreto é definido em cm e o tempo em anos. Nesse modelo, considera-se o desenvolvimento empírico de Liu e Weyers (1998), no qual a taxa de corrosão diminui exponencialmente ao longo do tempo. Esta formulação depende das propriedades do concreto (relação água-cimento) e das propriedades da seção (espessura do cobrimento).

### 2.2.4.4 Formulação geral para a taxa de corrosão normalizada

A taxa de corrosão normalizada é definida como a razão entre a taxa de profundidade do pite ( $\dot{p}$ ) e o diâmetro da barra de aço ( $\phi$ ). Essa taxa variável pode ser obtida a partir das expressões apresentadas nas seções anteriores. Em termos gerais, a taxa de corrosão normalizada é uma função de forças termoquímicas, propriedades do concreto, propriedades da seção e tempo definidos por alguma função  $O = O(FQ, PC, PS, t)$ . Esta expressão não considera a influência do fissuração do concreto na evolução da corrosão:

$$O = \frac{\dot{p}}{\phi} = \frac{0,0116Rel[i_{cor}(t_{tr}-t_{ini})+i_{cor}]}{\phi}, \quad \text{if } t_{trcl} \geq t_{ini}^{cl} \quad (\text{Equação 20})$$

Assim, para cada modelo de cálculo de  $i_{cor}^{cl}$  é obtida uma função  $O$  diferente. Essas funções podem ser vistas na Tabela 3 abaixo.

**Tabela 3** – Modelos para cálculo da função  $O$ .

<b>Modelos</b>	<b><math>O = O(CF, CP, SP, t)</math></b>	
Yalcyn e Ergun (1996)	0	$t_{tr} < t_{ini}$
	$\frac{0.06i_0 e^{-C_{YE} t_{tr}}}{\phi} [1 - C_{YE} \ln(e)(t_{tr} - t_{ini})]$	$t_{tr} \geq t_{ini}$
Liu e Weyers (1998)	0	$t_{tr} < t_{ini}$
	$\frac{[0.06i_0 + 13.46(t_{tr} - t_{ini})^{-0.215}]}{\phi}$	$t_{tr} \geq t_{ini}$
Vu e Stewart (2000)	0	$t_{tr} < t_{ini}$
	$\frac{0.06i_0}{\phi}$	$t_{ini} \leq t_{tr} < 0.57 + t_{ini}$
	$\frac{0.036i_0(t_{tr} - t_{ini})^{-0.29}}{\phi}$	$t_{tr} \geq 0.57 + t_{ini}$

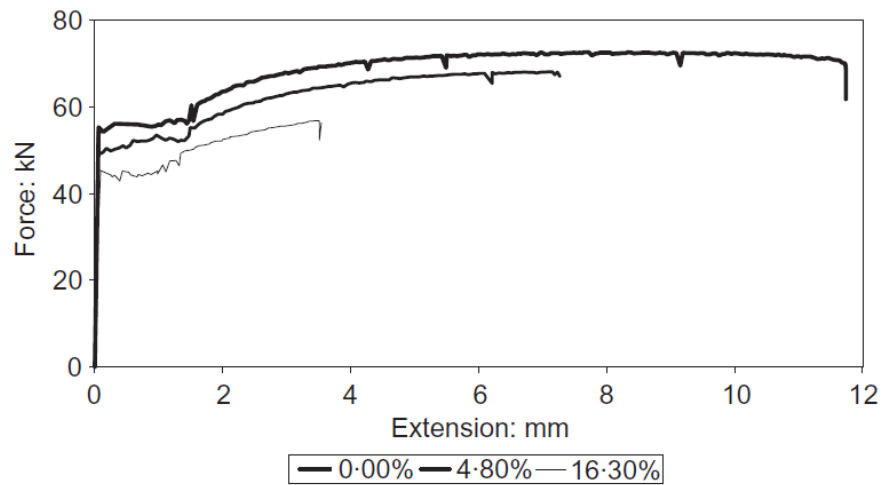
FONTE: Adaptado de Otieno et al. (2010).

### 2.2.9 Efeitos da corrosão nas tensões e nas deformações do aço

Além de provocar a redução da seção transversal das armaduras, a corrosão pelo efeito de íons cloretos promove a deterioração mecânica do material metálico, reduzindo a capacidade resistente e mudando as propriedades mecânicas.

Para Du et al. (2005), a corrosão devido ação de íons cloretos reduz a tensão de escoamento, a tensão última, a deformação para o início do escoamento, a deformação última e o patamar de escoamento das armaduras. Essas afirmações podem ser notadas através da Figura 7, retirada dos resultados experimentais dos autores, obtidos com barras de aço sujeitas a corrosão pela ação de íons cloretos de forma controlada. Essa figura trata de três gráficos de força por alongação, sendo que cada um representa um nível de corrosão por pite (0,00%, 4,80% e 16,30%). A transformação da relação força por alongação para tensão por deformação axial é direta e os gráficos obtidos, assim, respeitam as mesmas formas, haja vista que o diâmetro das barras são constantes e valem 16 mm.

**Figura 7** – Gráfico de força por alongação.



FONTE: Du et al. (2005).

O estudo, ainda, aponta que a tensão de escoamento penalizada ( $\bar{f}_y$ ) pode ser estimada sabendo-se a quantidade de corrosão nas armaduras ( $Q_{cor}$ , em %), conforme trata a Equação 21.

$$\bar{f}_y = [1 - 0,005Q_{cor}]f_y \quad (\text{Equação 21})$$

Em que  $f_y$  é a tensão de escoamento para uma barra de aço íntegra.

Por fim, a quantidade de corrosão pode ser calculada sabendo-se a taxa de corrosão, o diâmetro da barra de aço e o tempo de início da corrosão, para um tempo qualquer transcorrido após o início da corrosão, segundo a Equação 22.

$$Q_{cor} = 0,046 \frac{i_{cor}^{cl}}{\phi} (t_{trcl} - t_{ini}^{cl}) \quad (\text{Equação 22})$$

### 3 MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO

Na análise de estruturas correntes de concreto armado utiliza-se a suposição dos materiais conterem propriedades elásticas a até determinados valores de deformações específicas. No entanto, com o surgimento de fissuras no concreto e/ou plasticidade nas armaduras, a representação do comportamento mecânico através dessa simplificação passa a ser insuficiente (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2015). Nesse sentido, como alternativa para melhorar a precisão de modelagens e simulações de estruturas, realizam-se outros tipos de análises, denominadas inelásticas. A teoria da plasticidade, mecânica da fratura e mecânica do dano são modelos amplamente utilizados nesse contexto (PITUBA, 1998).

A teoria da plasticidade descreve a ruptura do material através de critérios elastoplásticos, como os de Von Mises, de Mohr-Coloumb e de Ducker-Prager. Entretanto, por não conseguir aferir a resistência residual do material, que está aliada ao encruamento negativo (penalização da resistência e amolecimento), esse modelo passa a perder notabilidade em relação aos demais citados (COELHO, 2017).

Estudos sobre a mecânica da fratura iniciam-se com Kirsch (1898), com a proposição de uma solução analítica para uma chapa infinita contendo uma fissura central, denominada solução de Kirsch. Após, Griffith (1921) realizou o desenvolvimento de um estudo que relaciona propagação de fissuras e balanço de energia de uma determinada estrutura. Nesse contexto, as soluções numéricas e analíticas decorrentes da mecânica da fratura tiveram grande desenvolvimento e sucesso para casos de estruturas com geometrias simples e confeccionadas com materiais homogêneos. Nesse modelo, apenas um pequeno número de fissuras em propagação no meio contínuo tivera descrição efetuada (AMORIM et al., 2013). Contudo, o comportamento não-linear do concreto, o grau de confinamento e a influência das armaduras podem gerar estruturas mais complexas e inviabilizar a utilização desse método.

Com intuito de resolver os problemas estruturais que possuem soluções inviáveis para a teoria da plasticidade e para a mecânica da fratura, Kachanov (1958) fez um trabalho pioneiro, introduzindo o conceito de dano contínuo. Seu objetivo foi estudar a fissuração na ruptura de materiais dúcteis submetidos a regime de deformações lentas, levando em consideração a presença de defeitos no meio material.

Assim, surge a mecânica do dano, na qual a introdução de uma variável de deterioração do material (dano) torna-se a grande inovação. Contribuindo com esse primeiro trabalho, muitos autores buscaram o desenvolvimento da teoria do dano clássico durante a segunda metade do século XX. Rabotnov (1969), por exemplo, relaciona dano com incremento de

deformações em um material, de forma que o aumento da intensidade do dano na estrutura passa ocorrer com a redução da rigidez estrutural.

O embasamento físico da teoria do dano contínuo através dos fundamentos e leis da termodinâmica de sólidos foi realizado por Lemaitre e Chaboche (1978), de modo que as verificações da admissibilidade termodinâmica dos modelos de dano clássico puderam ser possibilitadas.

Após essas publicações, uma teoria proposta por Mazars (1984) passou a ser uma das mais utilizadas na análise inelástica de estruturas através da teoria do dano clássico. A causa fundamental foi a relativa simplicidade do método. Esse modelo aplica-se ao estudo da danificação em estrutura de concreto armado sujeita a carregamento proporcional ou radial, sendo que o dano é quantificado como uma função de deformação equivalente (PITUBA, 1998).

Flórez-Lopez et al. (2015) defendem que o modelo de dano clássico infelizmente necessita de uma fina discretização estrutural – para cada seção transversal (fatiada ou lâmina) da estrutura confecciona-se uma análise estrutural específica – e implementação de algoritmos consideravelmente complexos. A aplicação desse modelo em estruturas com geometria e condições de contorno variados pode inviabilizar operações computacionais, nos quesitos custo e convergência de análise.

Como alternativa, desenvolveram-se modelos simplificados representativos dos fenômenos de dano contínuo estrutural. A teoria do dano concentrado mostra-se uma delas, possuindo embasamento físico consistente e representatividade da realidade física.

A teoria do dano concentrado está fundamentada nos conceitos da mecânica da fratura e do dano clássico aplicado a elementos de pórticos contendo rótulas plásticas. Os efeitos inelásticos (dano e plasticidade) ficam concentrados nas rótulas plásticas, que agora recebem a denominação de rótulas inelásticas. As análises estão focadas nessas rótulas, fazendo com que o modelo proposto exija uma menor capacidade computacional e, conseqüentemente, passe a tornar viável análises de estrutura complexas (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015).

Muitos estudos já fizeram a utilização dessa teoria, avaliando estruturas de pórticos planos (CIPOLLINA; LÓPEZ-INOJOSA; FLÓREZ-LÓPEZ, 1995; FLÓREZ-LÓPEZ, 1998; ARAÚJO; PROENÇA, 2008; RAJASANKAR; IYER; PRASAD, 2009; ALVA; DEBS, 2010), de pórticos tridimensionais (MARANTE; FLÓREZ-LÓPEZ, 2003) e de arcos (AMORIM; PROENÇA; FLÓREZ-LÓPEZ, 2013; AMORIM; PROENÇA; FLÓREZ-LÓPEZ, 2014). Nos últimos anos, busca-se incorporar a variável de corrosão na análise inelástica estrutural realizada com essa teoria (COELHO, 2017; COELHO; LEONEL; FLÓREZ-LÓPEZ, 2017; DAHMER, 2018).

Nesse sentido, o presente trabalho pretende fazer uso da mecânica do dano concentrado para efetuar análises inelásticas de estruturas de concreto armado, levando em consideração a corrosão das armaduras devido aos efeitos de íons cloretos.

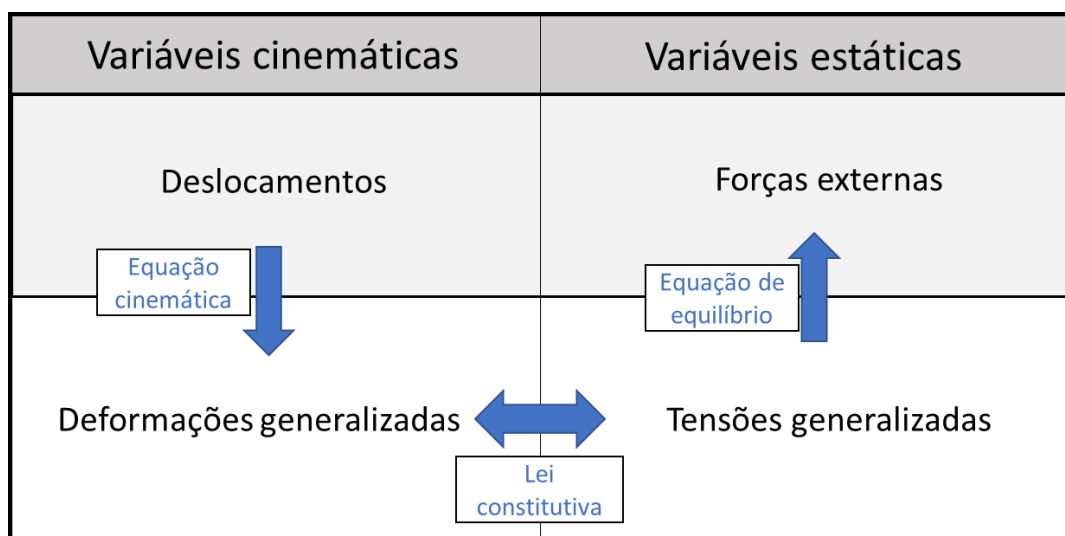
### 3.1 Tensões e deformações generalizadas

Nessa seção será apresentado um resumo sobre unidades básicas estruturais de sólidos, placas, vigas e pórticos, com o objetivo de analisar as tensões e deformações generalizadas associadas a cada um desses elementos.

Para isso, tomou-se o trabalho de Flórez-López et al. (2015) como referência. Destaca-se fortemente que nesse texto de dissertação é apresentado apenas um breve resumo do tema, sendo assim, recomendado a leitura do material de referência na íntegra para o melhor entendimento.

Na Figura 8, a seguir, verifica-se um esquema que serve de guia para a compreensão das teorias de sólidos, de placas, de vigas e de pórticos, a serem tratadas posteriormente. Assim, são introduzidas as variáveis cinemáticas (deslocamentos e deformações generalizadas) e variáveis estáticas (forças externas e tensões generalizadas). A equação cinemática faz a relação entre deslocamentos e deformações generalizadas, a equação de equilíbrio associa tensões generalizadas com forças externas e a lei constitutiva faz a relação entre tensões e deformações generalizadas.

**Figura 8** – Resumo esquemático das variáveis e equações associadas.

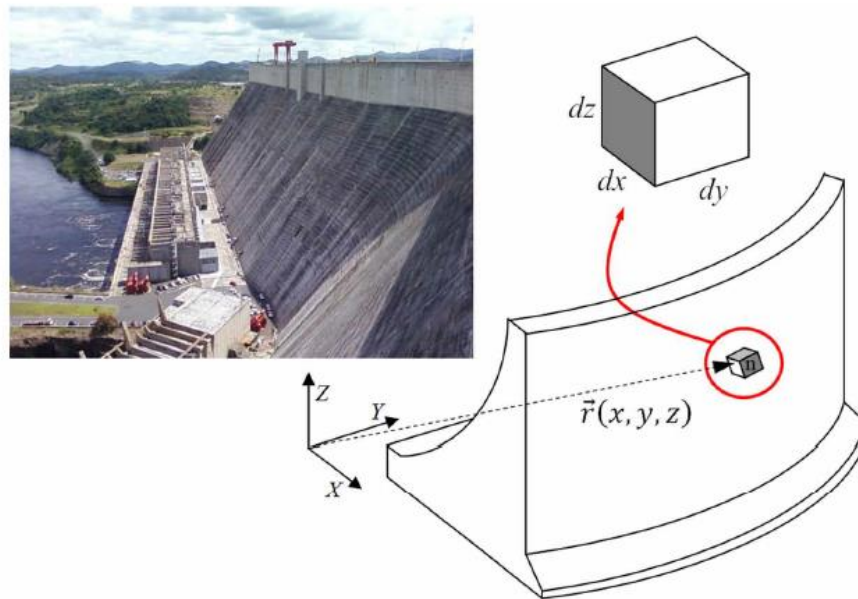


FONTE: Do autor.

### 3.1.1 Teoria de sólidos

A unidade básica estrutural da teoria de sólidos é um elemento diferencial de volume. Esse elemento de sólido é identificado utilizando as coordenadas  $X, Y, Z$  em uma configuração inicial, conforme ilustra a Figura 9.

**Figura 9** – Representação da unidade básica estrutural da teoria de sólidos.


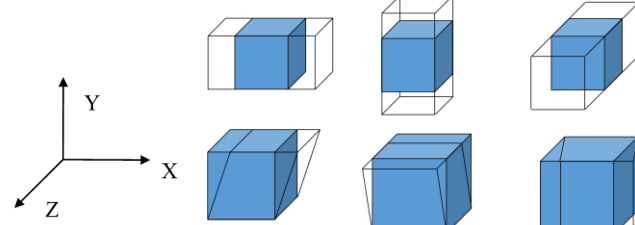

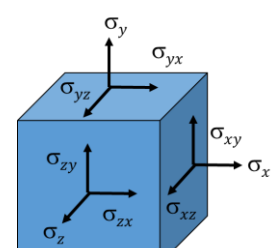


FONTE: Flórez-López et al. (2015).

Assim, para cada elemento são introduzidos dois conjuntos de variáveis: variáveis cinemáticas e variáveis estáticas. As primeiras definem o movimento (deslocamento) e a deformação do elemento de sólido. Já as variáveis estáticas são usadas para caracterizar as forças externas (forças de superfície, concentradas e de volume) e as tensões mobilizadas em cada elemento. Todas essas variáveis dependem de três coordenadas espaciais que identificam cada elemento e também do tempo.

Na Tabela 4, a seguir, pode-se verificar as variáveis cinemáticas e estáticas associadas a teoria de sólidos.

**Tabela 4** – Variáveis cinemáticas e estáticas na teoria de sólidos.

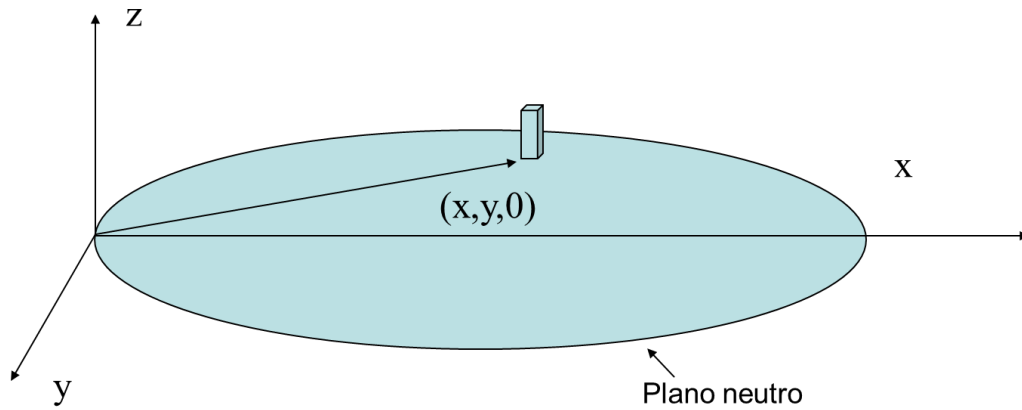
		Teoria de sólidos	
Variáveis cinemática	Deslocamentos	$\{U\} = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}$ 	
	Deformações generalizadas	 $\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$	
Variáveis estáticas	Forças externas	 <p>Forças de volume Forças de superfície Forças concentradas</p>	
	Tensões generalizadas	$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix}$ 	

### 3.1.2 Teoria de placas

A unidade básica estrutural apresentado nesse item é um elemento diferencial de placa (Figura 10). Qualquer estrutura que possa ser considerada como a montagem desses tipos de elementos ligados juntos por um plano (plano neutro) pode ser analisado como uma placa.

Duas variáveis independentes são necessárias para identificar um elemento de placa ( $X, Y$ ). Nesse caso, o comportamento de cada elemento é conhecido e apenas as variáveis do plano neutro são introduzidas.

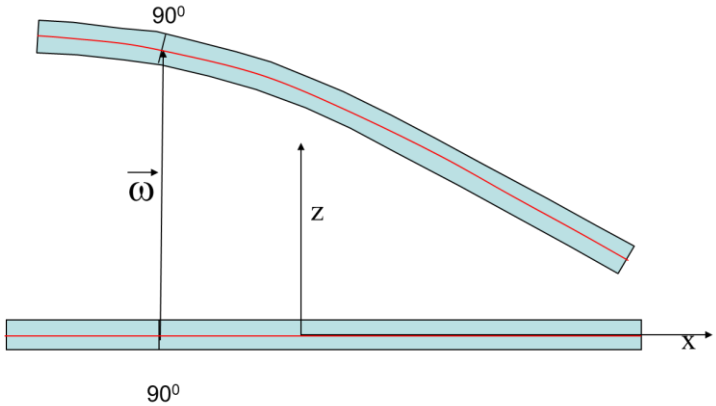
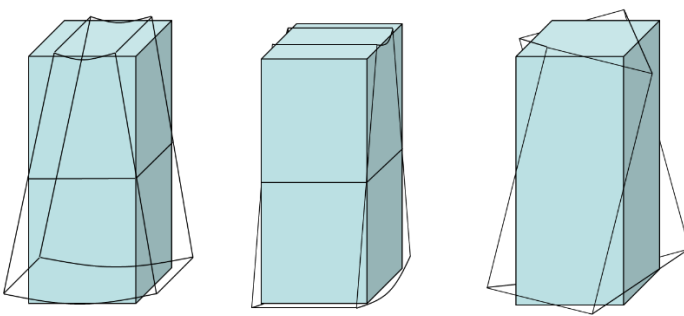
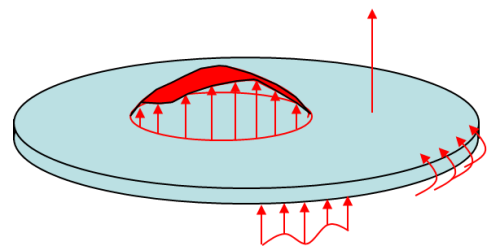
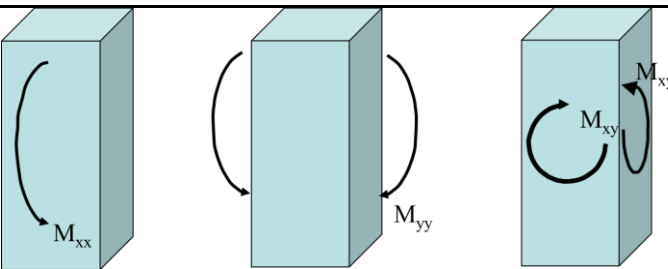
**Figura 10** – Representação da unidade básica estrutural da teoria de placas.



FONTE: Do autor.

Na Tabela 5, a seguir, pode-se notar as variáveis cinemáticas e estáticas associadas a teoria de placas (Teoria de Kirchoff). Para a teoria de placas, as deformações generalizadas serão dadas no formato de um tissor de curvaturas unitárias, enquanto as tensões generalizadas no formato de um tensor de momentos unitários. Os deslocamentos são deflexões ou flechas.

**Tabela 5** – Variáveis cinemáticas e estáticas na teoria de placas.

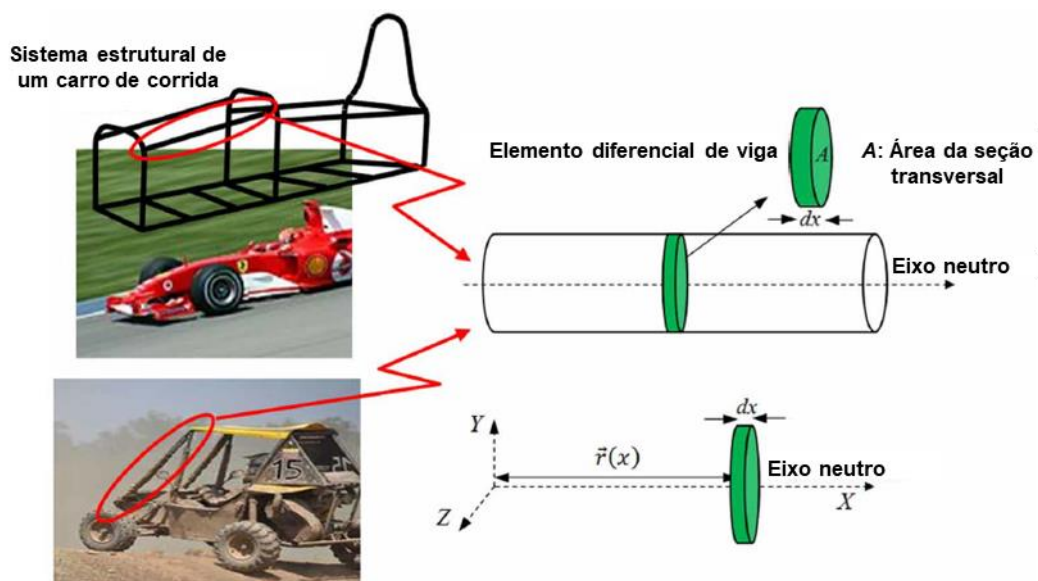
		Teoria de placas
Variáveis cinemática	Deslocamentos: deflexão	 <p style="text-align: center;"><math>\{\omega\}^t = (0, 0, \omega)</math></p>
	Deformações generalizadas: curvaturas unitárias	$\chi_{ij} = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 
Variáveis estáticas	Forças externas	
	Tensões generalizadas: momentos unitários	

### 3.1.3 Teoria de vigas

A unidade básica estrutural apresentada nesse caso é um elemento diferencial de viga. (Figura 11). Uma determinada estrutura que possa ser considerada como a montagem desses tipos de elementos passando por um eixo (eixo neutro) poderia ser analisado como uma viga.

Assim, é necessário identificar apenas uma variável independente ( $X$ ) para cada elemento, sendo o valor  $X$  a distância entre o elemento e a origem do eixo na configuração inicial.

**Figura 11** – Representação da unidade básica estrutural da teoria de vigas.

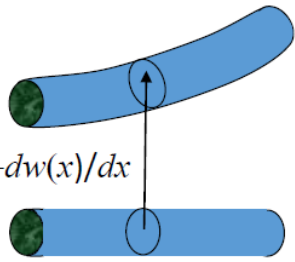
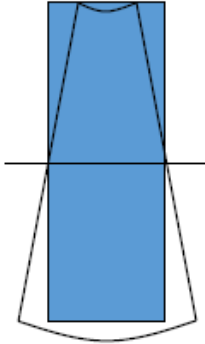
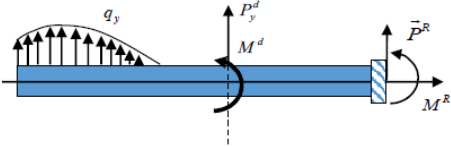
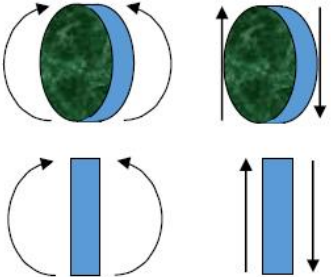


FONTE: Flórez-López et al. (2015).

Existem diversas teorias de vigas, sendo o tipo de comportamento assumido para a seção transversal o que as diferencia. As duas teorias mais importantes estão baseadas na hipótese de Euler-Bernoulli ou na hipótese de Timoshenko. A diferença básica entre elas é que a hipótese de Timoshenko leva em conta a parcela de deformação devido ao esforço cortante, o que torna a hipótese mais aceitável para vigas curtas.

Na Tabela 6, a seguir, pode-se notar as variáveis cinemáticas e estáticas associadas a teoria de vigas. Para a teoria de vigas, as deformações generalizadas serão dadas no formato de curvaturas e as tensões generalizadas no formato de momentos fletores e forças cortantes. Os deslocamentos são deflexões e declividades.

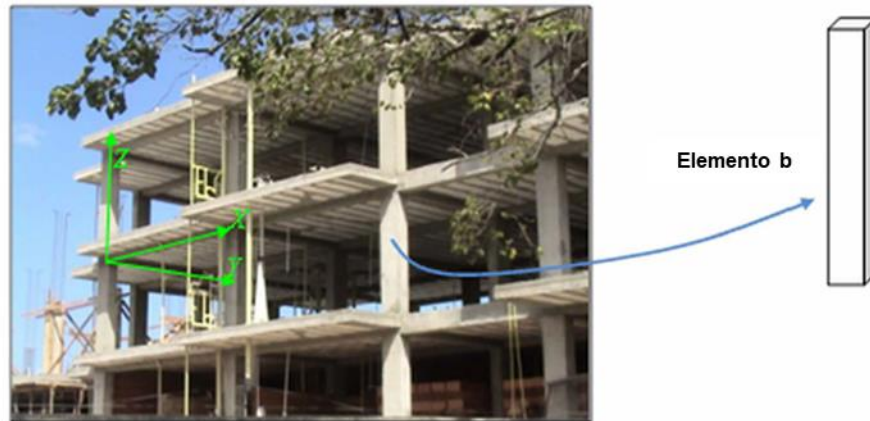
**Tabela 6** – Variáveis cinemáticas e estáticas na teoria de vigas (hipótese de Euler-Bernoulli).

		Teoria de vigas
Variáveis cinemática	Deslocamentos: deflexão e declividade	$w = w(x)$ $\theta = \theta(x) = -dw(x)/dx$ 
	Deformação generalizada: curvatura	$\chi = \chi(x)$ 
Variáveis estáticas	Forças externas	 <p>Forças distribuídas Forças concentradas e binários</p>
	Tensões generalizadas: momento fletor e força cortante	$M = M(x)$ $V = V(x)$ 

### 3.1.4 Teoria de pórticos

A unidade básica estrutural para esse caso é um elemento de pórtico com dimensões finitas (Figura 12), sendo necessário apenas números naturais para identificar cada elemento.

**Figura 12** – Representação da unidade básica estrutural da teoria de pórticos.

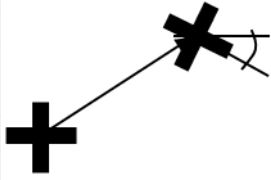

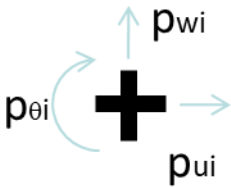



FONTE: Flórez-López et al. (2015).

Para o caso elástico as teorias de vigas e de pórticos podem ser unificadas, mas elas são completamente diferentes para casos inelásticos (teorias de pórticos são baseadas em conceitos de rótulas plásticas enquanto teorias de vigas possuem abordagens multicamadas).

Seguindo a mesma analogia da teoria de sólidos, de placas e de vigas, a Tabela 7 mostra as variáveis cinemáticas e estáticas associadas a teoria de pórticos. Para a teoria de pórticos, as deformações generalizadas serão dadas no formato de rotações nas rótulas e alongação no elemento, enquanto as tensões generalizadas no formato de momentos fletores nas rótulas e força axial no elemento. Os deslocamentos são do tipo translações verticais e horizontais e rotação em cada nó.

**Tabela 7** – Variáveis cinemáticas e estáticas na teoria de pórticos.

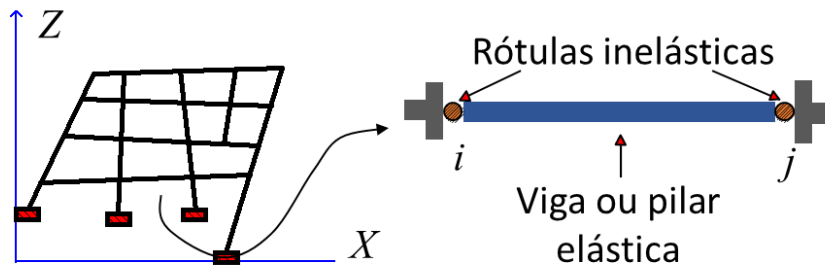
		Teoria de pórticos
Variáveis cinemática	Deslocamentos	$\{U\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \theta_n \end{bmatrix}$ 
	Deformações generalizadas	$\{\Phi\}_b^t = (\phi_i^b, \phi_j^b, \delta_b)$ 
Variáveis estáticas	Forças externas	$\{P\} = \begin{bmatrix} P_{u1} \\ P_{w1} \\ P_{\theta1} \\ \vdots \\ P_{wn} \\ P_{\theta n} \end{bmatrix}$ 
	Tensões generalizadas	$\{M\}_b^t = (m_i^b, m_j^b, n_b)$ 

Assim, tem-se a introdução dos vetores de deformações e de tensões generalizadas para elementos finitos tipo pórticos. Esse formalismo não é tradicionalmente estudado na análise estrutural, mas, como introduzido por Powell (1969), será utilizado no presente trabalho, haja vista o ganho de simplicidade para analisar problemas com variáveis inelásticas.

### 3.2 Conceitos preliminares

Dentre uma estrutura de concreto armado complexa é possível dividir a análise em trechos isolados. A Figura 13 mostra um elemento estrutural de pórtico, constituído por uma viga ou pilar elástico intercalado entre duas rótulas inelásticas ( $i$  e  $j$ ). Como suposição inicial, assume-se que os efeitos inelásticos só possam se desenvolver nessas rótulas, sendo que a plastificação é representada pelo surgimento de rotações plásticas ( $\phi_i^p$  e  $\phi_j^p$ ) e a fissuração por níveis de dano ( $d_i$  e  $d_j$ ). As variáveis  $d_i$  e  $d_j$  podem tomar valores de 0 a 1, sendo que quanto mais próximo de 1 estiver esse nível, maior será a grau de fissuração do concreto (FLÓREZ-LOPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

**Figura 13** – Elemento finito de pórtico plano aplicado à teoria do dano concentrado.



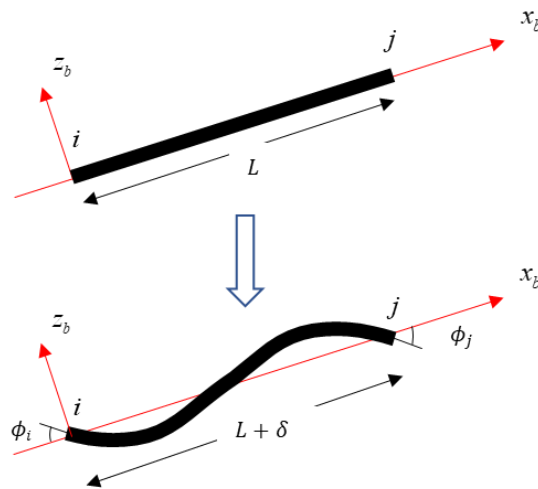
FONTE: Do autor.

Para um elemento finito de pórtico plano, as deformações generalizadas podem ser descritas em notação matricial. A Equação 23 representa o vetor de deformações generalizadas correspondente  $\{\Phi\}$ .

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \delta \end{Bmatrix} \quad (\text{Equação 23})$$

Em que  $\phi_i$  e  $\phi_j$  representam as rotações relativas nos nós  $i$  e  $j$ , respectivamente, e  $\delta$  é a alongação do elemento. A Figura 14 representa essas deformações no elemento.

**Figura 14** – Deformações generalizadas em um elemento de pórtico.



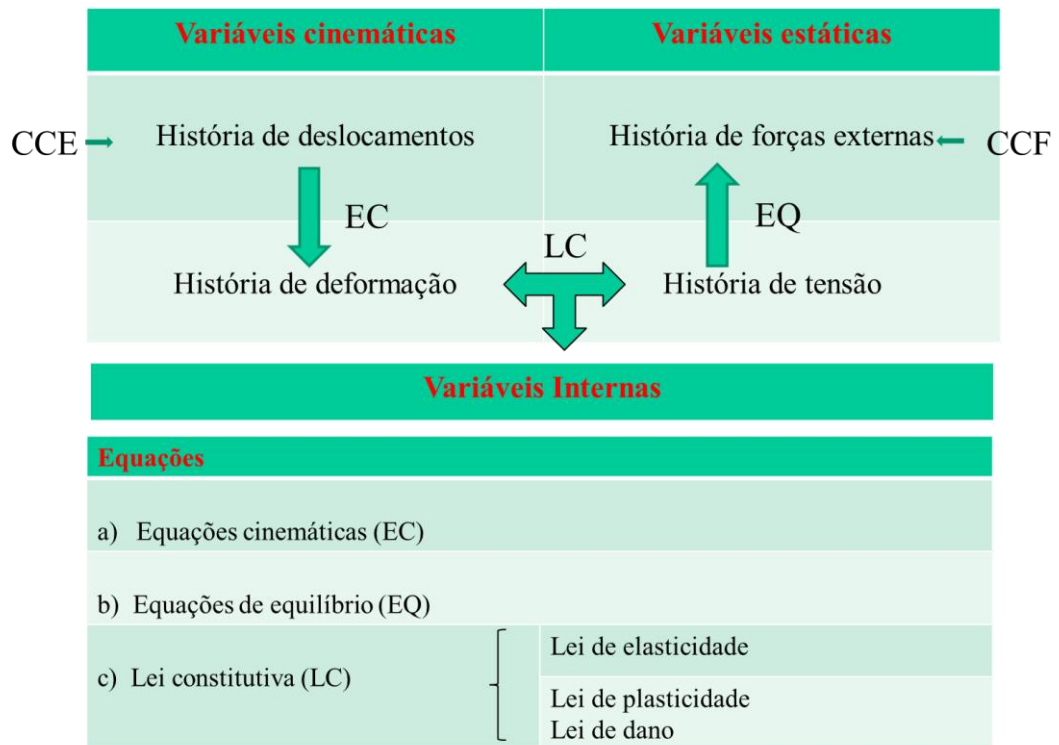
FONTE: Do autor.

O vetor de deformações generalizadas é composta pelas parcelas elástica  $\{\Phi_e\}$ , plástica  $\{\Phi_p\}$  e associada ao dano  $\{\Phi_d\}$ , de acordo com a hipótese de equivalência em deformações proposta por Flórez-López et al. (2015), na Equação 24. Vale destacar que nesse modelo estão sendo consideradas apenas pequenas deformações em estruturas.

$$\{\Phi\} = \{\Phi_e\} + \{\Phi_p\} + \{\Phi_d\} \quad (\text{Equação 24})$$

As intensidades das forças de reações, tensões, deformações, rotações e danos são obtidas através das equações cinemáticas (EC), equação de equilíbrio (EQ) e lei constitutiva (LC), para cada tempo ou passo da análise, que totalizam em histórias. A lei constitutiva é composta por leis de elasticidade, de plasticidade e de dano. A Figura 15 representa o fluxograma esquemático das etapas da análise do modelo de dano concentrado.

**Figura 15** – Fluxograma esquemático para análise do modelo de dano concentrado.



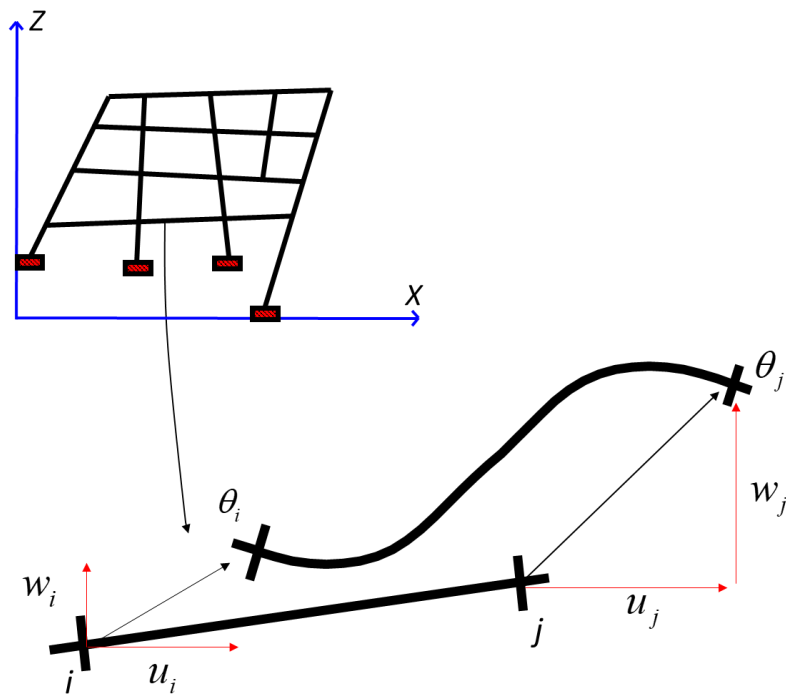
FONTE: Do autor.

Em que CCE são condições de contorno essenciais ou geométricas e CCF são condições de contorno de força ou naturais.

### 3.2 Equações cinemáticas de pórticos

A Figura 16 mostra um elemento finito de pórtico plano que apresenta seis graus de liberdade, sendo três em cada nó ( $i$  e  $j$ ). Analisando especificamente um nó, o deslocamento horizontal é dado por  $u$ , o deslocamento vertical por  $w$  e a rotação por  $\theta$ .

**Figura 16** – Representação dos possíveis deslocamentos e rotações nos nós  $i$  e  $j$  de um elemento de pórtico.



FONTE: Do autor.

O vetor de deslocamentos generalizados  $\{U\}$  é montada para toda estrutura, composta por elementos e nós, cujos identificadores foram definidos por  $b$  e  $mn$ , respectivamente (Equação 25).

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{mn} \\ w_{mn} \\ \theta_{mn} \end{Bmatrix} \quad (\text{Equação 25})$$

As equações cinemáticas são responsáveis por associar as deformações generalizadas com deslocamentos generalizados. Para cada elemento  $b$  que compõe a estrutura existe uma equação cinemática específica, como pode ser verificado através da Equação 26.

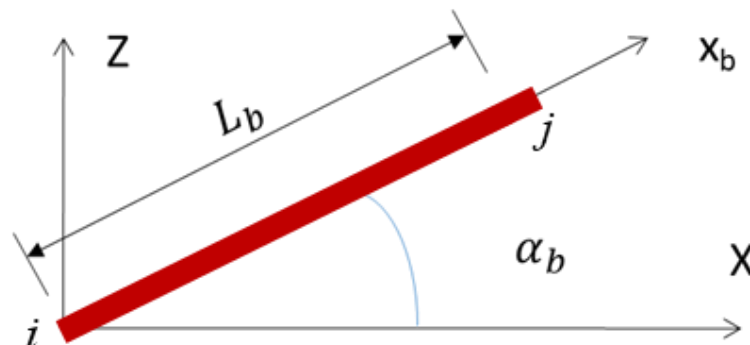
$$\{\Phi\}_b = [B]_b \{U\} \quad (\text{Equação 26})$$

Em que  $[B]_b$  é a matriz de transformação cinemática do elemento de pórtico  $b$ , e está representada na Equação 27, a seguir.

$$[B]_b = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \frac{\text{sen}\alpha_b}{L_b} & -\frac{\text{cos}\alpha_b}{L_b} & 1 & \dots & -\frac{\text{sen}\alpha_b}{L_b} & \frac{\text{cos}\alpha_b}{L_b} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \frac{\text{sen}\alpha_b}{L_b} & -\frac{\text{cos}\alpha_b}{L_b} & 0 & \dots & -\frac{\text{sen}\alpha_b}{L_b} & \frac{\text{cos}\alpha_b}{L_b} & 1 & \dots \\ 0 & \dots & -\text{cos}\alpha_b & -\text{sen}\alpha_b & 0 & \dots & \text{cos}\alpha_b & \text{sen}\alpha_b & 0 & \dots \\ 1, & \dots, & 3i-2, & 3i-1, & 3i, & \dots, & 3j-2, & 3j-1, & 3j, & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 27})$$

Em que  $\alpha$  e  $L$  são a inclinação do eixo axial do elemento  $b$  ( $x_b$ ) com relação ao sistema de coordenadas de referência ( $XY$ ) e o comprimento do elemento  $b$ , respectivamente. Esses parâmetros geométricos podem ser verificados na Figura 17.

**Figura 17** – Desenho esquemático para representação dos parâmetros  $\alpha$  e  $L$  no elemento  $b$ .

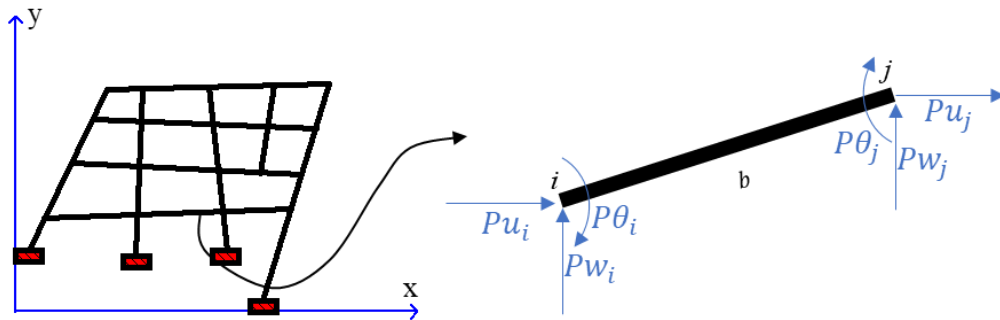


FONTE: Do autor.

### 3.3 Equação de equilíbrio

O vetor de forças externas  $\{P\}$  contabiliza todos os carregamentos externos e de reações aplicados nos nós da estrutura, estando decompostos no sistema de coordenadas global de referência. A Figura 18 ilustra essas solicitações nodais em um elemento finito de pórtico  $b$ .

**Figura 18** – Representação das possíveis forças e momentos externos nodais.



FONTE: Do autor.

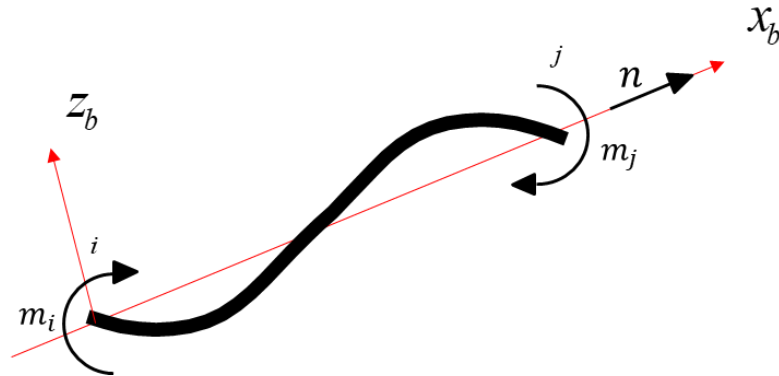
O vetor  $\{P\}$  está representada pela Equação 28, a seguir.

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} Pu_1 \\ Pw_1 \\ P\theta_1 \\ Pu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Pu_{mn} \\ Pw_{mn} \\ P\theta_{mn} \end{Bmatrix} \quad \text{(Equação 28)}$$

Em que  $Pu_{mn}$  é a força externa horizontal,  $Pw_{mn}$  a força externa vertical e  $P\theta_{mn}$  o momento fletor externo atuante no nó  $mn$  da estrutura.

O vetor de tensões generalizadas  $\{M\}$  é formada pelos momentos fletores internos nos nós  $i$  e  $j$  ( $m_i$  e  $m_j$ ) e pela força axial no elemento de pórtico  $b$  ( $n$ ), de acordo com a Figura 19 e Equação 29.

**Figura 19** – Tensões generalizadas em um elemento de pórtico.



FONTE: Do autor.

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} m_i \\ m_j \\ n \end{Bmatrix} \quad (\text{Equação 29})$$

A equação de equilíbrio é montada conforme a Equação 30, associando todos os vetores de tensões generalizadas da estrutura com o vetor de forças externas, levando-se em consideração a matriz de transformação cinemática  $[B]_b$  de cada elemento. Vale ressaltar que nesse modelo está sendo desconsiderado o efeito das forças inerciais, ou seja, foram consideradas solicitações estáticas.

$$\sum ([B]_b^t \{M\}_b) = \{P\} \quad (\text{Equação 30})$$

### 3.4 Lei constitutiva

A lei constitutiva busca solucionar a análise estrutural, associando os vetores de tensões generalizadas  $\{M\}$  com os vetores de deformações generalizadas  $\{\Phi\}$ . A Equação 31 apresenta a formulação básica para lei de elasticidade de cada elemento  $b$ , que é contemplado no modelo de dano concentrado.

$$\{\Phi - \Phi_p\}_b = [F(D)]_b \{M\}_b + \{\Phi_0\}_b \quad (\text{Equação 31})$$

Em que  $[F(D)]$  e  $\{\Phi_0\}$  são a matriz de flexibilidade para um elemento danificado e o vetor de deformação inicial, respectivamente.

Para um elemento de pórtico danificado, a matriz de flexibilidade é dada pela Equação 32, sendo que as incógnitas  $d_i$  e  $d_j$  são relativas aos níveis de danificação nos nós  $i$  e  $j$ , respectivamente (FLÓREZ-LÓPEZ, 1998).

$$[F(D)] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3E_c I(1-d_i)} & \frac{-L}{6E_c I} & 0 \\ \frac{-L}{6E_c I} & \frac{L}{3E_c I(1-d_j)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{AE_c} \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 32})$$

Os valores de  $d_i$  e  $d_j$  variam no intervalo de 0 a 1, sendo que para o valor zero a matriz  $[F(D)]$  será igual a matriz de flexibilidade de um elemento elástico  $[F_0]$ . Dessa forma, a matriz de flexibilidade de um elemento danificado pode ser decomposta de acordo com a Equação 33, respeitando a hipótese de equivalência em deformação (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

$$[F(D)]_b = [F_0]_b + [C(D)]_b \quad (\text{Equação 33})$$

A parcela  $[C(D)]$  é a matriz responsável pela adição de flexibilidade ao elemento  $b$  devido ao incremento da fissuração do concreto.

Para esse modelo, como se verifica através das Equações 31 e 32, a evolução do dano está associada aos valores dos momentos fletores  $m_i$  e  $m_j$ . Assim, os valores do esforço axial  $n$  em cada elemento não impactam, diretamente, no aumento da intensidade dos níveis de dano.

### 3.4.1 Lei de evolução do dano

A lei de evolução do dano está fundamentada em um balanço energético proposto inicialmente por Griffith (1921) num estudo sobre condições de propagação de fissuras em materiais frágeis. Dessa forma, para o critério de Griffith, a fissura se propaga quando a energia disponível para a fissuração atinge o valor necessário para a extensão da fissura (COELHO, 2017). Por consequência, deve haver uma redução da energia total da estrutura, haja vista a dissipação energética para o incremento e para a formação de novas fissuras no material.

Para o modelo de dano concentrado, deve-se obter a taxa de liberação de energia, que é calculada através da derivada da energia de deformação complementar de um elemento danificado ( $W$ ) em relação as variáveis de dano.

A energia de deformação complementar pode ser definida de acordo com o tipo de elemento finito utilizado. Para o caso do elemento de pórtico plano,  $W$  é calculada pela Equação 34.

$$W_b = \frac{1}{2} \{M\}_b^t \{\Phi - \Phi_p\}_b = \frac{1}{2} \{M\}_b^t ([F(D)]_b \{M\}_b + \{\Phi_0\}_b) \quad (\text{Equação 34})$$

Efetuada as derivadas  $\frac{\partial W}{\partial d_i}$  e  $\frac{\partial W}{\partial d_j}$  confecciona-se as Equações 35 e 36, que representam a taxa de liberação de energia ou momento extensor da fissuração de uma rótula inelástica ( $G$ ), para as extremidades  $i$  e  $j$  do elemento finito  $b$ .

$$G_i = \frac{\partial W_b}{\partial d_i} = \frac{Lm_i^2}{6E_c I(1 - d_i)^2} \quad (\text{Equação 35})$$

$$G_j = \frac{\partial W_b}{\partial d_j} = \frac{Lm_j^2}{6E_c I(1 - d_j)^2} \quad (\text{Equação 36})$$

Fazendo a comparação entre a taxa de liberação de energia e a resistência à fissuração da rótula inelástica ( $R$ ), obtém-se a lei de evolução do dano. Especificamente, quando a taxa de liberação de energia for inferior a essa resistência, o incremento de danificação será zero. Para que ocorra a propagação do dano, é necessário que a taxa de liberação de energia seja igual a resistência à propagação das fissuras. Essa relação está formalizada pelas Equações 37 e 38.

$$\begin{cases} \dot{d}_i = 0, \text{ se } G_i < R_i \\ G_i = R_i, \text{ se } \dot{d}_i > 0 \end{cases} \quad (\text{Equação 37})$$

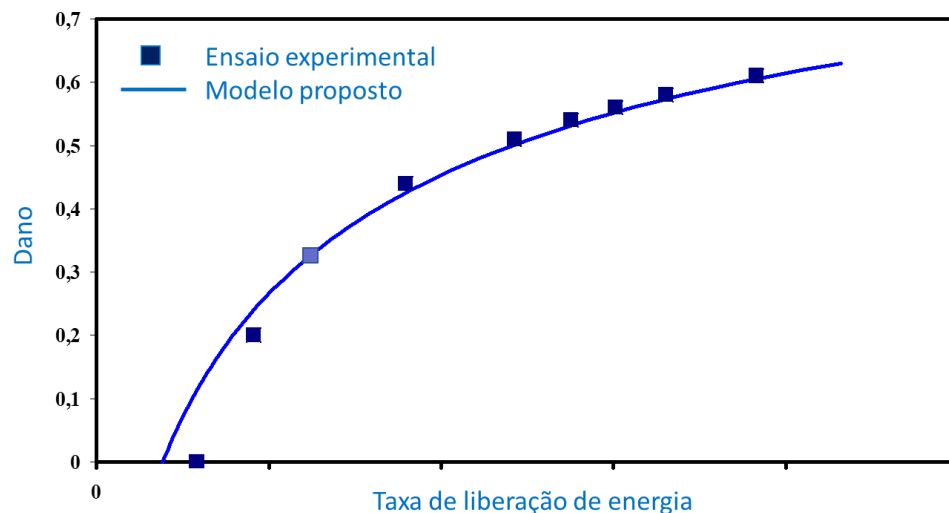
$$\begin{cases} \dot{d}_j = 0, \text{ se } G_j < R_j \\ G_j = R_j, \text{ se } \dot{d}_j > 0 \end{cases} \quad (\text{Equação 38})$$

A resistência à fissuração da rótula inelástica é definida por meio de métodos experimentais que consideram a variação da rigidez estrutural, capaz de identificar o nível de

danificação nas rótulas inelásticas. A penalização da rigidez devido ao dano é associada ao comportamento do gráfico força por deslocamento, com auxílio de leis constitutivas para um elemento estrutural (FLÓREZ-LOPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Segundo Flórez-Lopez et al. (2015) a taxa de liberação de energia é calculada para cada etapa de propagação do dano em uma determinada rótula. Portanto, de acordo com o critério de Griffith, esse valor é igual a função de resistência à fissuração ( $R$ ) da rótula analisada. O gráfico representado pela Figura 20 evidencia o comportamento da resistência à fissuração em relação ao dano. A partir disso, permite-se modelar uma função de  $R(d)$  representada pela Equação 39, que descreve de modo satisfatório o comportamento dos pontos experimentais.

**Figura 20** – Ajuste da função de resistência à fissuração do concreto aos pontos da taxa de liberação de energia.



FONTE: Adaptado de Flórez-Lopez et al. (2015).

$$R(d) = R_0 + q \frac{\ln(1-d)}{1-d} \quad (\text{Equação 39})$$

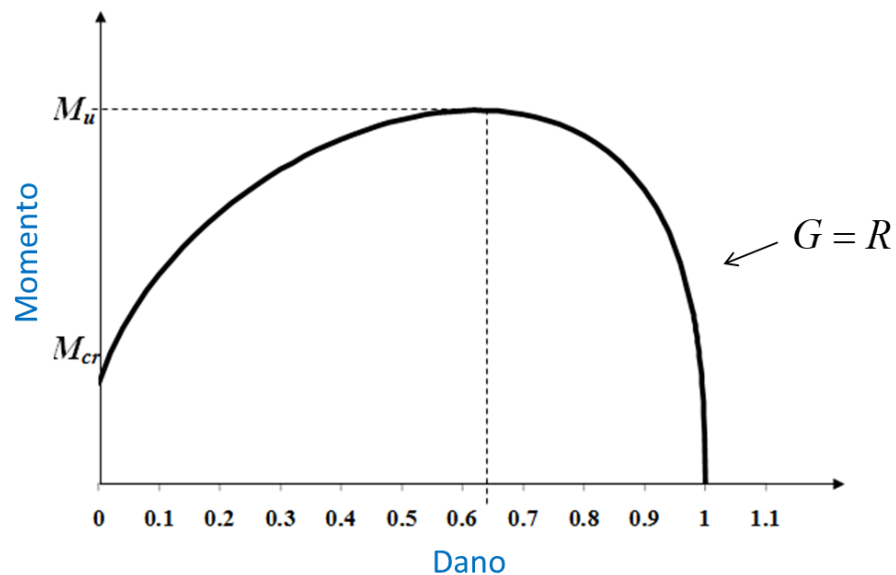
Em que  $R_0$  representa a resistência a fissuração inicial do concreto, e o segundo termo  $\left(q \frac{\ln(1-d)}{1-d}\right)$  descreve o incremento de resistência pela ação da armadura, que dificulta a propagação das fissuras no concreto. Os parâmetros  $R_0$  e  $q$  dependem das características geométricas, dos materiais que constituem o elemento, do momento crítico (ou de fissuração) e do momento último que a seção em análise pode resistir. Efetuando a igualdade entre taxa

de liberação de energia e resistência a propagação de fissuras na rótula inelástica obtém-se uma relação entre momento fletor e dano (Equação 40).

$$m^2 = \frac{6E_c I(1-d)^2}{L} R_0 + \frac{6qE_c I}{L} (1-d) \ln(1-d) \quad (\text{Equação 40})$$

Através da Equação 40, pode-se confeccionar um gráfico de momento por dano, conforme apresentado na Figura 21.

**Figura 21** – Relação momento fletor por dano para uma rótula inelástica.



FONTE: Adaptado de Flórez-Lopez et al. (2015).

De acordo com o gráfico da Figura 21, pode-se observar que para o valor nulo de dano tem-se o momento correspondente ao de fissuração ( $M_{cr}$ ), que é o momento fletor mobilizado imediatamente antes do surgimento da primeira fissura de tração no concreto. Com o incremento do momento fletor, a estrutura passa a ter maiores quantidades e dimensões de fissuras, que podem ser niveladas pela variável de dano. O dano associado ao colapso estrutural, na rótula em análise, é provocado pelo momento último correspondente ( $M_u$ ). Esse momento equivale ao máximo esforço que a estrutura pode resistir no estado limite último (ELU). Após esse valor de momento (pico do gráfico da Figura 21), a estrutura entra em estágio de colapso progressivo da rótula inelástica.

Assim, quando o dano associado a Equação 40 for zero, tem-se que o valor do momento fletor será equivalente ao momento crítico (Equação 41).

$$R_0 = \frac{M_{cr}^2 L}{6E_c I} \quad (\text{Equação 41})$$

O parâmetro  $q$  é calculado utilizando o momento último e o respectivo valor de dano ( $d_u$ ). Esse valor de dano é obtido derivando a Equação 40 em relação a variável de dano e igualando a zero. Retornando o resultado de  $d_u$  na Equação 40, obtém-se o valor de  $q$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial m_i^2}{\partial d_i} \Big|_{d_i=d_u} = 0 \\ M_u^2 = \frac{6E_c I(1-d_u)^2}{L} R_0 + \frac{6qE_c I}{L} (1-d_u) \ln(1-d_u) \end{cases} \quad (\text{Equação 42})$$

### 3.4.2 Lei de plasticidade

Flórez-López et al. (2015) apresentam uma formulação condicionada destinada ao cálculo das deformações plásticas em rótulas inelásticas, conforme está apresentado nas Equações 43 e 44, a seguir.

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i^p = 0, \text{ se } f_i < 0 \\ f_i = 0, \text{ se } \dot{\phi}_i^p \neq 0 \end{cases} \quad (\text{Equação 43})$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_j^p = 0, \text{ se } f_j < 0 \\ f_j = 0, \text{ se } \dot{\phi}_j^p \neq 0 \end{cases} \quad (\text{Equação 44})$$

Para o cálculo da função de plasticidade que incorpora o encruamento cinemático linear e a variável de danificação ( $f$ ) é formulada a Equação 45. Nessa função, pode-se notar que dentro do módulo existe o momento fletor modificado pela danificação e a parcela referente ao encruamento cinemático linear. O parâmetro fora do módulo está associado ao momento de plastificação.

$$f = \left| \frac{m}{1-d} - h\phi_p \right| - k_0 \quad (\text{Equação 45})$$

Os parâmetros  $h$  e  $k_0$  associam-se aos nós da estrutura. Para se obter os valores dessas constantes é necessário determinar o momento de plastificação ( $M_p$ ) da seção e o nível de dano correspondente ( $d_p$ ). O momento de plastificação é obtido através de um gráfico de momento por curvatura. O valor do dano associado é determinado, posteriormente, através da substituição de  $M_p$  na Equação 40.

Na eminência da plastificação pode-se afirmar que a rotação plástica ( $\phi_p$ ) ainda é nula, bem como o valor da função de plasticidade ( $f$ ). Assim, calcula-se o valor de  $k_0$  a partir da Equação 45.

$$k_0 = \frac{M_p}{1-d_p} \quad (\text{Equação 45})$$

Para o cálculo de  $h$ , é necessário ter o valor do momento último ( $M_u$ ) e do dano correspondente ( $d_u$ ), que podem ser obtidos através do gráfico de momento por curvatura da seção e da Equação 40, respectivamente. O valor da função de plasticidade continua sendo nulo para o momento fletor igual a  $M_u$  (rótula plástica ativa), sendo possível calcular o valor de  $h$  por meio da Equação 46.

$$h = \frac{1}{\phi_{pu}} \left( \frac{M_u}{1-d_u} - \frac{M_p}{1-d_p} \right) \quad (\text{Equação 46})$$

Em que  $\phi_{pu}$  é a rotação plástica última e é calculada pela Equação 47, a seguir.

$$\phi_{pu} = \phi_u - \phi_p \quad (\text{Equação 47})$$

As incógnitas  $\phi_u$  e  $\phi_p$  são as rotações última e plástica da seção analisada, respectivamente. Nessa ordem, seus valores são calculados pelas Equações 48 e 49.

$$\phi_u = \chi_u \cdot L_p \quad (\text{Equação 48})$$

$$\phi_p = \chi_p \cdot L_p \quad (\text{Equação 49})$$

Em que  $\chi_u$  e  $\chi_p$  são as curvaturas última e plástica, respectivamente, e podem ser obtidas através do gráfico momento por curvatura da seção em análise. O parâmetro  $L_p$  refere-se ao comprimento da rótula plástica, que compreende o trecho do elemento em que está ocorrendo as deformações plásticas. Sendo um parâmetro experimental,  $L_p$  pode ser calculado empiricamente pela Equação 50 (PARK e PAULAY, 1975).

$$L_p = 0,5dd + 0,025L_{cs} \quad (\text{Equação 50})$$

Em que  $dd$  é a altura útil da seção e  $L_{cs}$  é o comprimento entre a seção crítica até o ponto de inflexão do diagrama de momento fletor.

## **4 TERMODINÂMICA DE SÓLIDOS**

Um determinado fenômeno físico pode estar associado a uma grande quantidade de variáveis, que possuem influências em seu comportamento. A fim de tornar viável o entendimento e, conseqüentemente, as simulações de problemas que envolvam esse fenômeno, as variáveis que possuem baixa influência (baixa significância) geralmente tendem a ser desprezadas, sempre tendo em vista a preservação da consistência entre o modelo e a realidade física existente. Na engenharia, a mensuração dos efeitos das variáveis no comportamento de eventos físicos está composta dos mais variados desafios, sendo que para auxiliar essas atividades existem leis e fundamentos termodinâmicos fortes que frequentemente são utilizados na elaboração de modelos físicos representativos. Para problemas da mecânica dos sólidos, a busca pela formulação de teorias termodinâmicas consiste em aliar boas idealizações, como a consideração do sólido contínuo (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990).

A termodinâmica elementar pode ser usada sem a consideração de efeitos térmicos ou dinâmicos, podendo ser adaptada a diversos fenômenos de estudo. Assim, essa ciência se mostra útil como guia no avanço de pesquisas, de modo a limitar as possibilidades de escolha nas modelagens mecânicas e fenomenológicas.

Neste trabalho, é feita uma revisão da termodinâmica de sólidos apresentada por Lemaitre e Chaboche (1990) e por Proença (2000). Essa revisão é necessária para o desenvolvimento da termodinâmica de pórticos, que, por sua vez, serve de fundamento teórico para confecção do modelo de dano concentrado que leva em consideração a corrosão das armaduras causada pela presença de íons cloretos no concreto.

### **4.1 Elementos da mecânica do contínuo e da termodinâmica**

Para modelagem de fenômenos físicos, como deformação e fissuração em sólidos, apresenta-se um método embasado em princípios da termodinâmica que governam as variáveis de estado representativas do meio material.

Como requisito, dois tipos de modelagem são necessários. A primeira, chamada cinemática ou modelagem mecânica, está focada nos deslocamentos e nas forças no meio contínuo. A segunda, fenomenológica ou modelagem física, preocupa-se com a introdução das variáveis que caracterizam o fenômeno sob estudo.

A mecânica estrutural está embasada nos princípios das potências virtuais, em que a escolha de um certo deslocamento virtual para um determinado meio leva a definições

consistentes de tensões e deformações, e também a equações de equilíbrio com condições de contorno correspondentes.

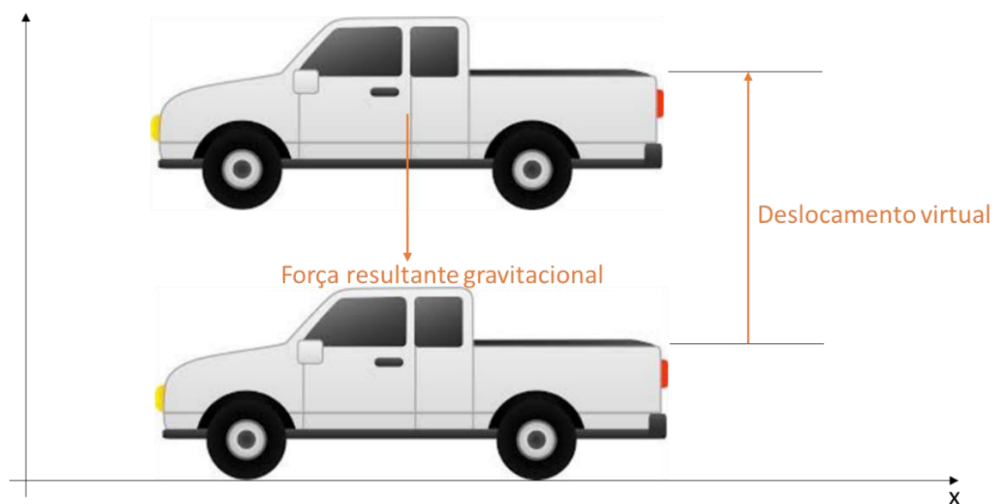
O estado do meio contínuo depende do histórico das variáveis mecânicas e a modelagem do comportamento pode ser baseada nas leis hereditárias ou integrais. Para a introdução das variáveis de estado, aborda-se a termodinâmica como um processo irreversível. Essa abordagem foi realizada primeiramente por químicos e é aplicada a mecânica do contínuo por Eckart e Biot (1950) apud Lemaitre e Chaboche (1990).

O potencial termodinâmico permite definir associações de variáveis capazes de investigar o comportamento das mesmas e também das variáveis internas escolhidas para o estudo de um fenômeno. Dessa forma, conduzem-se a criação das leis de estado. Segundo Moreau (1970) apud Lemaitre e Chaboche (1990), o potencial de dissipação fornece as leis complementares de evolução para as variáveis que descrevem processos irreversíveis.

#### 4.1.1 Deslocamento e potência virtual

Com objetivo de representar esquematicamente as forças envolvidas em um determinado fenômeno de estudo, é conveniente imaginar os movimentos virtuais (fictícios) e analisar o trabalho ou potência resultante envolvido. Um exemplo didático seria a análise das forças de gravidade atuando em um carro quando ele está sendo levantado; o deslocamento virtual de baixo para cima estaria relacionado. Essa hipótese está representada na Figura 22.

**Figura 22** – Representação do deslocamento virtual e das forças associadas.



FONTE: Do autor.

Um deslocamento virtual de um meio material em relação a um sistema de referência é definido em qualquer posição por um campo vetorial de velocidade virtual que depende do ponto material ( $M$ ), dado pela expressão representada na Equação 51. Para uma determinada escolha desse campo de velocidade, o fenômeno mecânico terá uma representação mais ou menos precisa. Dessa forma, a escolha desse conjunto de variáveis é subjetiva, havendo a necessidade de uma sensibilidade para uma melhor modelagem.

$$\vec{v}(M) \quad (\text{Equação 51})$$

A potência virtual de um sistema de forças, para um determinado deslocamento virtual, é uma função linear contínua do valor escalar de  $\vec{v}(M)$ , que é igual ao trabalho realizado por unidade de tempo para o fenômeno considerado, representado pela expressão na Equação 52.

$$\hat{P}(\vec{v}(M)) \quad (\text{Equação 52})$$

#### 4.1.2 Estrutura de referência e derivativos materiais

Existem basicamente duas formas de descrever o deslocamento dos sólidos. Uma primeira seria em termos de variáveis Eulerianas, e a segunda em termos de variáveis Lagrangianas.

As variáveis Eulerianas são descritas como sendo o tempo corrente ( $t$ ) e as coordenadas da posição corrente do ponto material ( $M$ ), no qual essas variáveis identificam a configuração corrente. A velocidade do ponto analisado é expressada na Equação 53.

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(x1(t), x2(t), x3(t), t) \quad (\text{Equação 53})$$

As variáveis Lagrangianas são descritas baseadas no tempo corrente ( $t$ ) e nas coordenadas da posição inicial ( $M_0$ ) do ponto material ( $M$ ), ou seja, diferentemente da abordagem anterior, essa descrição é feita em relação a configuração inicial, sendo a velocidade do ponto expressa pela Equação 54.

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(x1_0, x2_0, x3_0, t) \quad (\text{Equação 54})$$

O conceito de segmentos derivativos do material ou simplesmente derivativo material é aplicado a qualquer quantidade definida no conjunto total, cujo deslocamento deseja-se avaliar.

Em termos de variáveis Eulerianas, não há semelhante identificação entre o derivativo material e a derivativa parcial em relação ao tempo (Equação 55), porque as coordenadas correntes do ponto ( $M$ ) também dependem do tempo.

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}} \frac{\partial\vec{x}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \overrightarrow{grad} \vec{v} \quad (\text{Equação 55})$$

Já em termos de variáveis Lagrangianas, o derivativo material mostra-se idêntico a derivada parcial em relação ao tempo e, conseqüentemente, a expressão fica mais simples (Equação 56).

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \quad (\text{Equação 56})$$

#### 4.1.3 Princípio das potências virtuais

Em um meio material isolado é possível fazer a distinção entre forças externas atuantes e forças internas, sendo que essas representam ligações existentes entre todas as partes constituintes do meio. Para isso, são descritos dois axiomas: o primeiro, axioma da objetividade, afirma que a potência virtual das forças internas relacionada a qualquer deslocamento rígido do meio é igual a zero, e o segundo, axioma de equilíbrio (estático ou dinâmico), diz que para qualquer material identificado em uma estrutura absoluta de referência, em qualquer instante e sob qualquer movimento virtual, a potência virtual da magnitude da aceleração, ou das forças inerciais,  $\hat{P}_{(a)}$  é igual a soma da potência virtual das forças internas  $\hat{P}_{(i)}$  com a potência virtual das forças externas  $\hat{P}_{(x)}$  (Equação 57).

$$\hat{P}_{(a)} = \hat{P}_{(i)} + \hat{P}_{(x)} \quad (\text{Equação 57})$$

Dessa forma, esses dois axiomas incorporam a lei fundamental da dinâmica.

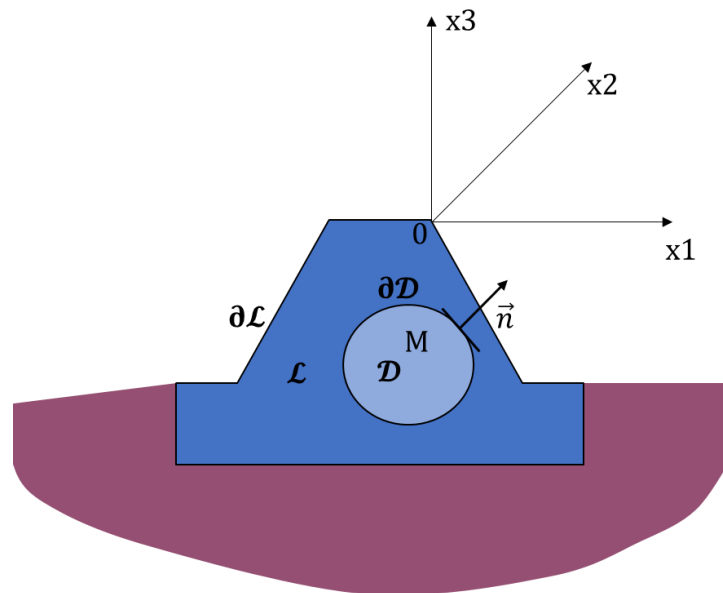
## 4.2 Método das potências virtuais

### 4.2.1 Taxas de deformação e de tensão

Fazer a aplicação do princípio das potências virtuais em uma região isolada, para um deslocamento virtual particular, é uma escolha de formas lineares que aparecem na expressão da potência virtual e conduz diretamente à mecânica do contínuo.

Com intuito de fazer a representação de um meio material hipotético, a Figura 23 demonstra uma região  $\mathcal{D}$  com contorno  $\partial\mathcal{D}$  no interior de volume  $\mathcal{L}$  com contorno  $\partial\mathcal{L}$ . Também se define o vetor normal  $\vec{n}$  em um ponto  $M$  sob um arranjo ortogonal  $(x_1, x_2, x_3)$ .

**Figura 23** – Representação do meio material.



FONTE: Do autor.

Para a escolha de um deslocamento virtual existe a teoria do primeiro gradiente. Essa teoria diz, primeiramente, que um campo vetorial da taxa de deslocamento  $\vec{v}(M)$  é suficiente quando as micro rotações são desconsideradas. Além disso, a escolha está preocupada com os termos a serem incluídos nos cálculos da potência virtual, já que o termo  $\vec{v}(M)$  é insuficiente na análise da deformação dos corpos. Dessa forma, a ideia dessa teoria consiste em adicionar um campo de gradiente de velocidade  $\overline{grad\vec{v}}$ .

A decomposição de  $\overline{grad\vec{v}}$  em partes simétricas e antissimétricas é demonstrada segundo as Equações 58, 59 e 60.

$$\overline{\text{grad}}\vec{v} = \frac{1}{2}[\overline{\text{grad}}\vec{v} + (\overline{\text{grad}}\vec{v})^T] + \frac{1}{2}[\overline{\text{grad}}\vec{v} - (\overline{\text{grad}}\vec{v})^T] \quad (\text{Equação 58})$$

$$\widehat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}[\overline{\text{grad}}\vec{v} + (\overline{\text{grad}}\vec{v})^T] \quad (\text{Equação 59})$$

$$\widehat{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{2}[\overline{\text{grad}}\vec{v} - (\overline{\text{grad}}\vec{v})^T] \quad (\text{Equação 60})$$

Potência virtual das forças internas

A potência virtual das forças internas é por definição igual a integral sobre todo domínio  $\mathcal{D}$  de uma densidade de volume que contém supostamente três termos ( $\vec{v}$ ,  $\widehat{\mathbf{D}}$  e  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$ ), associados respectivamente a um vetor  $\vec{f}^*$  e dois tensores de segunda ordem,  $\boldsymbol{\sigma}$  (simétrico) e  $\boldsymbol{\Gamma}$  (antissimétrico), e pode ser verificada na Equação 61.

$$\widehat{P}_{(i)} = - \int_{\mathcal{D}} (\vec{f}^* \cdot \vec{v} + \boldsymbol{\sigma} : \widehat{\mathbf{D}} + \boldsymbol{\Gamma} : \widehat{\mathbf{\Omega}}) dv \quad (\text{Equação 61})$$

Como o primeiro axioma do princípio das potências virtuais requer um deslocamento rígido do sólido em translação ( $\vec{v} \neq 0$ ,  $\mathbf{D}=0$  e  $\mathbf{\Omega}=0$ ) e em rotação ( $\vec{v}=0$ ,  $\mathbf{D}=0$  e  $\mathbf{\Omega} \neq 0$ ), tem-se que  $\widehat{P}_{(i)} = 0$ .

Aplicando o lema fundamental da física do meio contínuo, para qualquer função  $f(M)$  definida e contínua em  $\mathcal{D}$ , tem-se a seguinte expressão.

$$\int_{\mathcal{D}} f(M) dv = 0 \quad (\text{Equação 62})$$

Essa integral está definida para todo  $\mathcal{D}$  em  $\mathcal{L}$ , implicando que  $f(M)=0$  em  $\mathcal{D}$ . Isso conduz para  $\vec{f}^* \cdot \vec{v}=0$  e  $\boldsymbol{\Gamma} : \mathbf{\Omega}=0$ , independentemente de  $\vec{v}$  e  $\mathbf{\Omega}$ .

Portanto, o primeiro e o terceiro termo da integral referente a Equação 61 serão zerados, de forma que a equação final ficará a seguinte.

$$\widehat{P}_{(i)} = - \int_{\mathcal{D}} (\boldsymbol{\sigma} : \widehat{\mathbf{D}}) dv \quad (\text{Equação 63})$$

O primeiro axioma da potência virtual e a escolha do deslocamento virtual, através da teoria do primeiro gradiente, são equivalentes a hipótese para introduzir o tensor de tensões.

Nessa hipótese, é suposto que as forças internas sejam representadas por uma densidade de forças coesivas de superfície  $\vec{T}$ , que, por sua vez, representa a ação em uma distância muito curta. Assim, é possível definir um vetor de tensão dependente do ponto material considerado  $M$ , no tempo  $t$  e linearmente normal a  $\partial\mathcal{D}$  em  $M$ .

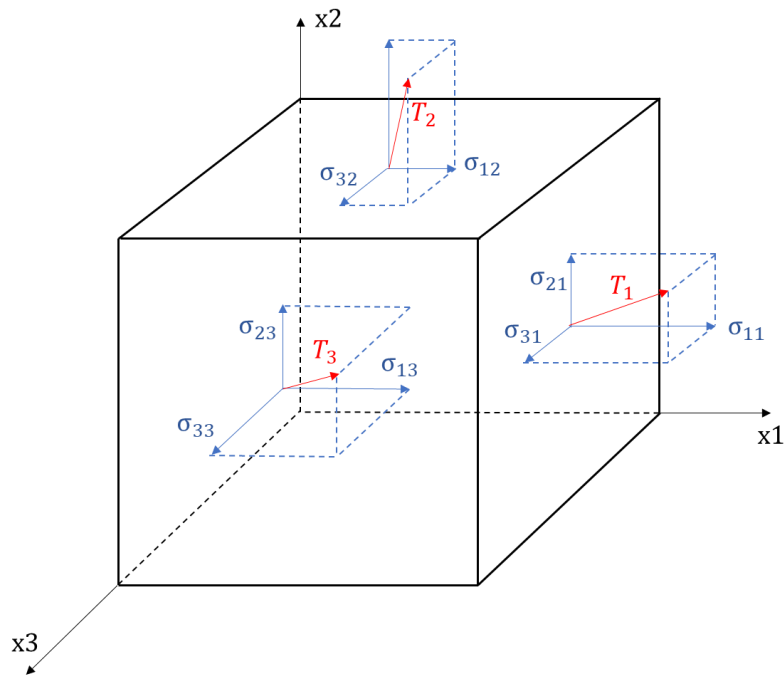
$$\vec{T}(M, t, \vec{n}) \quad (\text{Equação 64})$$

O tensor de tensão  $\sigma$  pode ser verificado na seguinte forma:

$$\sigma(M, t) \cdot \vec{n} = \vec{T}(M, t, \vec{n}) \quad (\text{Equação 65})$$

O tensor é simétrico ( $T_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$ ) e as componentes  $\sigma_{ij}$  formam sua matriz em relação às coordenadas de referência. Essas componentes são mostradas na Figura 24, na qual o vetor tensão em cada face é decomposto em uma componente normal e duas componentes de cisalhamento.

**Figura 24** – Representação das componentes dos vetores de tensão  $T_i$  em um sólido.



FONTE: Do autor.

Vale ressaltar que o método das potências virtuais permite agregar mais precisão as hipóteses, além de permitir a construção de teorias baseadas em outras premissas.

#### Potência virtual das forças externas

As forças externas consistem em ações exercidas por sistemas externos, situados a uma distância, sobre  $\mathcal{L}$ . Essas forças são supostamente definidas por uma densidade volumétrica de forças  $\vec{f}$  e forças de contorno que são representadas por uma densidade superficial  $\vec{T}$ , de acordo com a hipótese de tensão de Cauchy (Equação 66).

$$\hat{P}_{(x)} = \int_{\mathcal{D}} (\vec{f} \cdot \vec{v}) dv + \int_{\partial\mathcal{D}} (\vec{T} \cdot \vec{v}) ds \quad (\text{Equação 66})$$

#### Potência virtual das forças de inércia

Se  $\vec{\gamma}$  é o vetor aceleração de uma partícula  $M$  e  $\rho$  é a densidade da massa dessa partícula, a potência virtual das forças inercias é expressa pela seguinte equação.

$$\hat{P}_{(a)} = \int_{\mathcal{D}} (\vec{\gamma} \cdot \vec{v} \rho) dv \quad (\text{Equação 67})$$

### 4.2.2 Equações de equilíbrio

Fazendo a aplicação do Axioma do Equilíbrio ao princípio das potências virtuais na região  $\mathcal{D}$ , obtém-se a seguinte equação.

$$\int_{\mathcal{D}} (\vec{\gamma} \cdot \vec{v} \rho) dv = - \int_{\mathcal{D}} (\boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{D}}) dv + \int_{\mathcal{D}} (\vec{f} \cdot \vec{v}) dv + \int_{\partial\mathcal{D}} (\vec{T} \cdot \vec{v}) ds \quad (\text{Equação 68})$$

A fim de aproveitar o fato que essa identidade é válida para deslocamentos virtuais arbitrários, é fundamental ter o próprio  $\vec{v}$  no primeiro termo. Esse procedimento é possível aplicando o teorema da divergência, ou integração por partes, compilando na equação a seguir.

$$- \int_{\mathcal{D}} (\boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{D}}) dv = - \int_{\mathcal{D}} (\boldsymbol{\sigma} : \overline{\text{grad}} \vec{v}) dv = - \int_{\partial\mathcal{D}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}) ds + \int_{\mathcal{D}} (\text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{v}) dv \quad (\text{Equação 69})$$

Em que  $\vec{n}$  é o versor normal para fora do contorno  $\partial\mathcal{D}$  na região  $\mathcal{D}$ . Então, de acordo com Axioma de Equilíbrio, a formulação correspondente pode ser verificada na Equação 70.

$$\int_{\mathcal{D}} (\vec{\gamma} \cdot \vec{\nu} \rho) dv = - \int_{\partial \mathcal{D}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nu} \cdot \vec{n}) ds + \int_{\mathcal{D}} (\text{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nu}) dv + \int_{\mathcal{D}} (\vec{f} \cdot \vec{\nu}) dv + \int_{\partial \mathcal{D}} (\vec{T} \cdot \vec{\nu}) ds \quad (\text{Equação 70})$$

De acordo com o lema fundamental, essa identidade pode ser satisfeita por qualquer campo  $\vec{\nu}$ , se e somente se:

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} - \rho \vec{\gamma} = 0, \text{ no domínio } \mathcal{D} \quad (\text{Equação 71})$$

e

$$\vec{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n}, \text{ no domínio } \mathcal{D} \quad (\text{Equação 72})$$

A Equação 71 expressa o equilíbrio local estático ou dinâmico. Já a Equação 72 define o vetor tensão como sendo a densidade de superfície das forças introduzidas, e mostra que  $\boldsymbol{\sigma}$  se trata realmente do tensor de tensão de Cauchy (um tensor simétrico de segunda ordem). Se o axioma do equilíbrio da potência virtual for aplicado a toda região  $\mathcal{L}$ , sob consideração, as condições de contorno das forças também serão produzidas.

Se  $\vec{T}^d$  representa a densidade de forças aplicada no contorno  $\partial \mathcal{L}$ , da região  $\mathcal{L}$ , será obtida a seguinte equação.

$$\vec{T}^d = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (\text{Equação 73})$$

### 4.2.3 Deformações e deslocamentos

O método das potências virtuais introduz as variáveis cinemáticas relacionadas a modelagem do fenômeno de interesse: a taxa de deslocamento  $\vec{\nu}$  e a taxa de deformação  $\mathbf{D}$ , definidas em vários instantes  $t$ . Além dessas descrições de movimento, o estudo de um sólido contínuo requer a caracterização dos estados correntes de deformação em relação à configuração de referência, que pode ser escolhida para a configuração inicial (ou configuração relaxada), se o fenômeno a ser apresentado é elástico e inelástico simultaneamente. Nesse sentido, é necessário introduzir o vetor de deslocamentos e o tensor de deformações finitas, ou de deformações infinitesimais, quando as magnitudes forem pequenas.

Suposição de pequenos deslocamentos

No caso de deformações infinitesimais, a distinção entre variáveis Eulerianas e Lagrangianas podem ser ignoradas. Assim, pode-se negligenciar termos de segunda ordem na análise e passar do último para o primeiro conjunto de variáveis.

Seja  $\vec{u}$  o vetor de deslocamentos definido pela seguinte equação.

$$\vec{u} = \int_0^t \vec{v} dt \quad (\text{Equação 74})$$

Em que  $t=0$  corresponde a configuração de referência.

Seja  $\boldsymbol{\varepsilon}$  o tensor de deformação definido a seguir.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t \mathbf{D} dt \quad (\text{Equação 75})$$

Aplicando a definição do tensor  $\mathbf{D}$ , Equação 59, tem-se a seguinte expressão.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t \left( \frac{1}{2} [\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} + (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{v})^T] \right) dt \quad (\text{Equação 76})$$

Supondo que a hipótese de pequenas deformações resulte na equivalência das variáveis Eulerianas e Lagrangianas, pode-se afirmar que, deste modo, o derivativo material é uma derivativa parcial, e as operações de gradiente e integração tornam-se comutativas, desencadeando na formulação da Equação 77.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} + (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{u})^T] \quad (\text{Equação 77})$$

Portanto, o tensor de deformação ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) é definido pelo tensor da taxa de deformação  $\mathbf{D}$  e, conseqüentemente, pela parte simétrica do gradiente de deslocamento  $\vec{u}$ , definida por  $\vec{v}$ .

Dessa forma, as equações da mecânica do contínuo podem ser resumidas, no caso de pequenos deslocamentos e deformações, pelas Equações 71 e 77. Para resolver um problema é preciso adicionar a essas equações condições de contorno, geralmente dadas em termos de forças e deslocamentos, e leis constitutivas que caracterizem a física do meio, em termos da relação entre tensão e deformação.

Na prática, a hipótese de pequenas deformações pode ser aplicada quando o módulo da deformação permanecer menor que a ordem de grandeza de precisão com que os cálculos foram feitos. Em geral, essa condição pode ser verificada de acordo com a seguinte expressão.

$$|\varepsilon| < (2 \text{ a } 5) \cdot 10^{-2} \quad (\text{Equação 78})$$

### 4.3 Estados fundamentais da termodinâmica

#### 4.3.1 Leis de conservação e primeiro princípio da termodinâmica

As equações de equilíbrio estabelecidas no item 4.2.2 podem ser interpretadas como uma forma de lei da conservação do momento.

$$\left(\frac{d}{dt}\right) \int_{\mathcal{D}} (\rho \cdot \vec{v}) dv - \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T} ds = \int_{\mathcal{D}} \vec{f} dv \quad (\text{Equação 79})$$

Fazendo a dedução pelo teorema da divergência, tem-se:

$$\vec{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (\text{Equação 80})$$

e

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\gamma} \quad (\text{Equação 81})$$

A simetria do tensor de tensões,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , resulta diretamente no princípio das potências virtuais e pode ser considerado como consequência da equação de balanço do momento dinâmico.

$$\left(\frac{d}{dt}\right) \int_{\mathcal{D}} \rho dv = 0 \quad (\text{Equação 82})$$

#### Primeiro princípio da termodinâmica

Esse princípio está embasado na lei da conservação da energia. Assim, seja o domínio  $\mathcal{D}$  com um contorno  $\partial\mathcal{D}$  no interior de um meio material  $\mathcal{L}$ , e  $E$  a energia interna,  $e$  a energia interna específica e  $K$  a energia cinética, tem-se as seguintes equações.

$$E = \int_{\mathcal{D}} (\rho e) dv \quad (\text{Equação 83})$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} (\rho \vec{v} \cdot \vec{v}) dv \quad (\text{Equação 84})$$

Seja  $Q$  a quantidade de calor recebido pela região  $\mathcal{D}$ . Essa taxa consiste em dois termos: um referente ao calor gerado dentro do volume  $\mathcal{D}$  por agentes externos (calor induzido, por exemplo) e outro devido ao calor recebido por condução através da superfície de contorno  $\partial\mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}$ .

$$Q = \int_{\mathcal{D}} r dv - \int_{\partial\mathcal{D}} (\vec{q} \cdot \vec{n}) ds \quad (\text{Equação 85})$$

Em que  $r$  é a densidade volumétrica do calor interno produzido,  $\vec{q}$  é o vetor de fluxo de calor e  $\vec{n}$  é o versor normal para fora da superfície  $\partial\mathcal{D}$ .

Seja  $P_{(x)}$  a atual potência das forças externas, dada pela seguinte equação.

$$P_{(x)} = \int_{\mathcal{D}} (\vec{f} \cdot \vec{v}) dv + \int_{\partial\mathcal{D}} (\vec{T} \cdot \vec{v}) ds \quad (\text{Equação 86})$$

O primeiro princípio da termodinâmica é expresso pela Equação 87, para todo domínio  $\mathcal{D}$ .

$$\left(\frac{d}{dt}\right) (E + K) = P_{(x)} + Q \quad (\text{Equação 87})$$

Nesse sentido, é possível derivar uma expressão local que envolve apenas a potência das forças internas e o calor recebido. Fazendo isso, pode-se escrever o axioma do equilíbrio e o princípio das potências virtuais tratando-se do movimento real.

$$P_{(i)} + P_{(x)} = P_{(a)} \quad (\text{Equação 88})$$

### 4.3.2 Entropia e segundo princípio da termodinâmica

Além da energia interna e da taxa de aquecimento, é necessário introduzir mais duas novas variáveis: temperatura e entropia. Assume-se que é possível representar a temperatura

por um campo escalar de valores positivos definidos em cada instante  $t$  em todos os pontos do domínio  $\mathcal{D}$  em estudo:  $T(M, t)$ . A entropia ( $S$ ) expressa uma variação de energia associada a uma variação de temperatura, sendo definida para um domínio  $\mathcal{D}$  por meio da entropia específica  $s$  por unidade de massa (Equação 89).

$$S = \int_{\mathcal{D}} (\rho s) dv \quad (\text{Equação 89})$$

Segundo princípio da termodinâmica

Esse segundo princípio postula que a taxa de produção de entropia é sempre maior ou igual a taxa de aquecimento dividido pela temperatura, para todo domínio  $\mathcal{D}$ .

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\mathcal{D}} \frac{r}{T} dv - \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} ds \quad (\text{Equação 90})$$

Usando-se o teorema da divergência e resolvendo o derivativo material, tem-se:

$$\int_{\mathcal{D}} \left( \rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \right) dv \geq 0 \quad (\text{Equação 91})$$

Essa equação é válida para qualquer região  $\mathcal{D}$  do corpo e implica na seguinte expressão local de irreversibilidade da taxa de produção de entropia.

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0 \quad (\text{Equação 92})$$

A inequação fundamental contém o primeiro e segundo princípios da termodinâmica, e é obtida substituindo  $r$  pela expressão resultante da equação de conservação da energia.

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{1}{T} \left( \rho \frac{de}{dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \text{div} \vec{q} \right) \geq 0 \quad (\text{Equação 93})$$

É possível notar que:

$$\text{div} \frac{\vec{q}}{T} = \frac{\text{div} \vec{q}}{T} - \frac{\vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T}{T^2} \quad (\text{Equação 94})$$

Fazendo a multiplicação por  $T > 0$ , pode-se obter a Equação 95.

$$\rho \left( T \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{grad}T}{T} \geq 0 \quad (\text{Equação 95})$$

Nesse ponto, a inequação de Clausius-Duhem é obtida pela introdução de uma nova variável, a energia livre específica  $\Psi$  (energia livre de Helmholtz), definida pela equação a seguir.

$$\Psi = e - T \cdot s \quad (\text{Equação 96})$$

Com o processo de diferenciação em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{de}{dt} - T \cdot \frac{ds}{dt} - s \cdot \frac{dT}{dt} \quad \text{ou} \quad T \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} = - \left( \frac{d\Psi}{dt} + s \cdot \frac{dT}{dt} \right) \quad (\text{Equação 97})$$

Quando substituído no primeiro termo da equação fundamental (Equação 95), é confeccionado a expressão a seguir.

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{d\Psi}{dt} + s \cdot \frac{dT}{dt} \right) - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{grad}T}{T} \geq 0 \quad (\text{Equação 98})$$

Para pequenas perturbações, a inequação representada na Equação 98 pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho (\dot{\Psi} + s \cdot \dot{T}) - \vec{q} \cdot \frac{\overrightarrow{grad}T}{T} \geq 0 \quad (\text{Equação 99})$$

Para Swalin (1972), tratando-se de processos irreversíveis, o segundo princípio da termodinâmica pode ser resumido à inequação representada pela Equação 100, a seguir.

$$\dot{S} - \frac{Q}{T} \geq 0 \quad (\text{Equação 100})$$

Essa desigualdade afirma que a taxa de variação da entropia no tempo ( $\dot{S}$ ) é sempre maior ou igual a quantidade de calor ( $Q$ ) dividido pela temperatura absoluta ( $T$ ).

Alternativamente ao uso da energia livre de Helmholtz, pretendeu-se desenvolver teoricamente este trabalho com a utilização da energia livre de Gibbs ( $g$ ), posto que a variação dessa energia em um sistema de análise é a força motriz que impulsiona o fenômeno da corrosão de materiais (SHAW e KELLY, 2006). Essa energia pode ser definida conforme a Equação 101, de forma associada com a energia de livre de Helmholtz (LUBARDA, 2004).

$$g = \Psi - \sigma : \varepsilon \quad (\text{Equação 101})$$

#### 4.4 Método do estado local

Dentre as variáveis usadas para descrever o comportamento termodinâmico dos sólidos, é possível afirmar que o conceito de potencial termodinâmico é fundamental para esclarecer o estudo. No entanto, para defini-lo é necessário analisar a natureza das variáveis a serem escolhidas. Nessa escolha se encontra os pontos fracos e fortes do método da termodinâmica fenomenológica. Essa contradição refere-se ao fato de a escolha das variáveis ser uma tarefa subjetiva e resultar em modelos diferentes dependendo da sensibilidade do pesquisador. Porém, quando a subjetividade proporciona uma boa escolha, o método permite a formulação de teorias a serem adotadas ao estudo de um ou mais fenômenos, acoplados ou desacoplados, dependendo do uso pretendido.

##### 4.4.1 Variáveis de estado

O método do estado local postula que a termodinâmica de um meio material, em um dado ponto e instante, é definida pelo conhecimento dos valores de algumas variáveis nesse instante, dependendo apenas do ponto considerado. Como as derivadas temporais dessas variáveis não estão envolvidas na definição do estado, essa hipótese implica que qualquer evolução pode ser considerada como uma sucessão de estados de equilíbrio. Dessa forma, fenômenos ultrarrápidos são excluídos do campo de aplicação dessa teoria.

Fenômenos físicos podem ser descritos com uma precisão que depende da escolha da natureza e do número de variáveis de estado. Os processos definidos assim serão termodinamicamente admissíveis se, em qualquer instante da evolução, a desigualdade de Clausius-Duhem for satisfeita. As variáveis termodinâmicas ou independentes são as variáveis observáveis e as variáveis internas.

### Variáveis observáveis

O formalismo da mecânica do contínuo e da termodinâmica requer a existência de um certo número de variáveis de estado. Essas são as variáveis observáveis, tais quais: temperatura  $T$  e as deformações totais  $\varepsilon$ , considerando pequenas deformações.

Essa limitação em duas variáveis existe, pois são as únicas que ocorrem nos fenômenos de elasticidade, viscoelasticidade, plasticidade, viscoplasticidade, dano e fratura. Para fenômenos reversíveis (elásticos), a cada instante de tempo, o estado depende unicamente dessas variáveis.

### Variáveis internas

Para fenômenos dissipativos (inelásticos), o estado também atua de forma dependente do histórico passado, que é representado no método do estado local pelos valores de outras variáveis em cada instante, denominadas variáveis internas. A plasticidade e a viscoplasticidade requerem a introdução da deformação plástica (ou viscoplástica) como variável. Para pequenas deformações, a deformação plástica  $\varepsilon^p$  é a deformação permanente associada a configuração relaxada. Essa configuração é obtida pela descarga elástica, levando a seguinte decomposição aditiva de deformação.

$$\varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e \quad (\text{Equação 102})$$

As duas variáveis internas,  $\varepsilon^p$  e  $\varepsilon^e$ , são definidas como deformação plástica e deformação termoelástica (incluindo a possibilidade de dilatação térmica), respectivamente.

Outros fenômenos, como encruamento, dano e fratura requerem a introdução de outras variáveis internas de natureza nem sempre óbvia. Essas variáveis representam o estado interno da matéria (microestrutura cristalina, densidades de deslocamentos, configuração de microfissuras, entre outros) e não há meios para medi-las por observação direta. Por não aparecerem explicitamente nas leis da conservação ou na afirmação do segundo princípio da termodinâmica, essas variáveis recebem a denominação de variáveis internas, mas na verdade são variáveis de estado e, assim, são tratadas do mesmo modo que as variáveis observáveis.

Não há uma maneira objetiva de escolher a natureza das variáveis internas mais adequada ao estudo de um fenômeno. A escolha é tomada através da sensação física, experiência e tipo de aplicação. Para um estudo geral, essas variáveis serão tratadas por  $V_1, V_2,$

...,  $V_k$ , em que  $V_k$  representa uma variável escalar ou tensorial, conforme a necessidade peculiar de cada problema.

#### 4.4.2 Potencial termodinâmico e leis de estado

Uma vez que as variáveis de estado tenham sido definidas, postula-se a existência de um potencial termodinâmico do qual as leis de estado possam ser derivadas. Nesse sentido, é especificado uma função com um valor escalar, côncava com respeito a  $T$ , e convexa em relação a outras variáveis, que permite satisfazer, a priori, as condições de estabilidade termodinâmica impostas pelas desigualdades que são derivadas do segundo princípio da termodinâmica.

É possível trabalhar de forma equivalente com diferentes potenciais. Para Lubarda (2004), a análise termodinâmica pode ser apresentada para diversos tipos de potenciais termodinâmicos, como energia livre de Helmholtz, energia de Gibbs e entalpia, e produzem suas respectivas expressões. Nesta revisão adota-se o potencial de energia livre específico  $\Psi$  (de Helmholtz), que depende de variáveis de estado observáveis e variáveis internas. No entanto, analogamente poderia ser utilizado a energia livre de Gibbs ( $g$ ), conforme é feito e justificado no próximo capítulo deste trabalho.

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, T, \varepsilon^p, \varepsilon^e, V_k) \quad (\text{Equação 103})$$

Na elastoplasticidade, ou viscoplasticidade, as deformações apresentam-se na forma de sua decomposição aditiva, segundo a seguinte expressão.

$$\Psi = \Psi((\varepsilon - \varepsilon^p), T, V_k) = \Psi(\varepsilon^e, T, V_k) \quad (\text{Equação 104})$$

Mostrando que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^p} \quad (\text{Equação 105})$$

Obtém-se:

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \quad (\text{Equação 106})$$

Aplicando na inequação de Clausius-Duhem, obtém-se:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{d\Psi}{d\varepsilon^e}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \left(s + \frac{d\Psi}{dt}\right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{\vec{q}}{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \geq 0 \quad (\text{Equação 107})$$

Existem hipóteses que permitem cancelar alguns termos dessa desigualdade. Primeiramente, pode-se considerar a deformação elástica ocorrendo em temperatura constante ( $\dot{T}=0$ ) e uniforme ( $\overrightarrow{\text{grad}T}=0$ ), que não altera a deformação plástica ( $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=0$ ) nem as variáveis internas ( $\dot{V}_k=0$ ).

Para que isso ocorra, é necessário considerar as deformações elásticas ocorrendo em uma escala de tempo superior àquela que questionaria a validade da hipótese do estado local e inferior à dos fenômenos dissipativos, uma vez que a desigualdade de Clausius-Duhem se mantém independente de qualquer consideração particular  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ .

Dessa maneira tem-se que:

$$\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{d\Psi}{d\varepsilon^e} = 0 \quad (\text{Equação 108})$$

Assumindo que a desigualdade (Equação 107) seja válida, suponha uma deformação térmica em que  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p=0$ ,  $\dot{V}_k=0$  e  $\overrightarrow{\text{grad}T}=0$ . Assim, como  $T$  é arbitrário, tem-se as seguintes expressões.

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \left(\frac{d\Psi}{d\varepsilon^e}\right) \quad (\text{Equação 109})$$

$$s = - \frac{d\Psi}{dT} \quad (\text{Equação 110})$$

Assim, é possível notar a sequência de igualdades representadas na Equação 111.

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \left(\frac{d\Psi}{d\varepsilon^e}\right) = \rho \left(\frac{d\Psi}{d\varepsilon}\right) = - \rho \left(\frac{d\Psi}{d\varepsilon^p}\right) \quad (\text{Equação 111})$$

Essas igualdades mostram que a tensão é uma variável associada com a deformação elástica, com a deformação total e com a deformação plástica.

Respeitando a mesma analogia, definem-se as forças termodinâmicas associadas as variáveis internas pela seguinte equação.

$$A_k = \rho \left( \frac{d\Psi}{dV_k} \right) \quad (\text{Equação 112})$$

Dessa forma, definem-se que as leis de estado no qual a entropia  $s$ , o tensor de tensão  $\sigma$  e as especificações do potencial termodinâmico  $\Psi(\varepsilon^e, T, V_k)$  relacionados fornecem as teorias da termoelasticidade acoplados ou desacoplados. Em contrapartida, as variáveis  $A_k$  associadas com as variáveis internas, que ainda não foram introduzidas, são definidas pela especificação do potencial termodinâmico  $\Psi(\dots, V_k)$ ;  $s$ ,  $\sigma$  e  $A_1, A_2, \dots, A_k$  constituem as variáveis associadas. O vetor formado por essas variáveis é o gradiente da função  $\Psi$ , no espaço das variáveis  $\varepsilon^e, T$  e  $V_k$ , e normal a superfície ( $\Psi$  constante).

As variáveis associadas formam um conjunto de variáveis normais em dualidade com as variáveis de estado observáveis e internas.

#### 4.4.3 Dissipação e leis complementares

O potencial termodinâmico permite escrever relações entre variáveis de estado observáveis e variáveis associadas. Entretanto, para variáveis internas, permite-se apenas a definição de suas variáveis associadas.

Para descrever o processo de dissipação, principalmente a evolução das variáveis internas, é necessário um formalismo complementar. Esse tema é, principalmente, objetivo dos potenciais de dissipação. No entanto, para as formulações relativas a esse trabalho será verificado se a lei constitutiva é admissível termodinamicamente através da dissipação intrínseca.

##### Dissipação intrínseca e dissipação térmica

Levando em conta as leis de estado e tomando  $\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}T}$ , a inequação de Clausius-Duhem pode ser reduzida para expressar o fato que a dissipação é necessariamente positiva.

$$\Phi = \sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \dot{V}_k - \frac{\vec{g} \cdot \vec{q}}{T} \geq 0 \quad (\text{Equação 113})$$

Vale notar que  $\Phi$  é a soma do produto das variáveis de força ou variáveis duplas  $\sigma, A_k$  e  $\vec{g}$ , com relação as variáveis de fluxo  $\dot{\varepsilon}^p, -\dot{V}_k$  e  $-\frac{\vec{q}}{T}$ .

A soma dos primeiros dois termos é dada por:

$$\Phi_1 = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - A_k \dot{V}_k \quad (\text{Equação 114})$$

Em que  $\Phi_1$  é chamado de dissipação intrínseca (dissipação mecânica). Ela consiste na dissipação plástica mais a dissipação associada com a evolução de outras variáveis internas. Geralmente, essa dissipação é feita pelo elemento de volume na forma de calor.

O último termo ( $\Phi_2$ ) é a dissipação térmica devido a condução de calor.

$$\Phi_2 = -\frac{\vec{g} \cdot \vec{q}}{T} = -\frac{\vec{q}}{T} \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (\text{Equação 115})$$

## 5 TERMODINÂMICA DE PÓRTICOS

A termodinâmica é muito estudada no campo da Engenharia Mecânica, sendo tradicionalmente utilizada na resolução de diversos problemas de engenharia. Já, para a Engenharia Civil, esta ciência se mostra ainda muito tímida, não existindo um formalismo aplicado a pórticos de concreto armado, por exemplo. Assim, esse capítulo é desenvolvido a partir da termodinâmica de sólidos para ser aplicado a estruturas tipo pórticos.

O desenvolvimento da termodinâmica de pórticos está embasado nos fundamentos da termodinâmica de sólidos, revisado no capítulo 4 deste trabalho. A potência virtual das forças externas ( $\hat{P}_{ext}$ ) foi associada com as velocidades virtuais ( $\hat{U}$ ), segundo a Equação 116.

$$\hat{P}_{ext} = \{\dot{\hat{U}}\}^t \{P\} \quad (\text{Equação 116})$$

Em que o vetor  $\{P\}$  corresponde as forças externas nodais equivalentes, revisada no capítulo 3. Os símbolos utilizados ( $\hat{\ } e \dot{\ }$ ) fazem referência a virtualidade e derivada no tempo, para uma determinada variável, respectivamente.

A potência virtual das deformações ( $\hat{P}_{def}$ ) está definida para a estrutura confeccionada em pórticos, conforme a Equação 117.

$$\hat{P}_{def} = \sum_{b=1}^m \hat{P}_{def}^b = \sum_{b=1}^m \{\dot{\hat{\Phi}}\}_b^t \{M\}_b \quad (\text{Equação 117})$$

Em que os vetores  $\{\dot{\hat{\Phi}}\}$  e  $\{M\}$  correspondem as taxas de deformações virtuais generalizadas e as tenções generalizadas, e são associadas a cada elemento de pórtico  $b$ . A variável  $m$  trata-se do número de elementos de pórtico que contém a estrutura em análise.

A potência virtual das forças de inércia ( $\hat{P}_{ine}$ ) é dada pelo produto entre o vetor transposto das velocidades virtuais  $\{\dot{\hat{U}}\}^t$ , matriz de massa  $[Mass]$  e vetor aceleração da estrutura  $\{\ddot{U}\}$ , e pode ser verificada segundo a Equação 118.

$$\hat{P}_{ine} = \{\dot{\hat{U}}\}^t [Mass] \{\ddot{U}\} \quad (\text{Equação 118})$$

A matriz de massa para um elemento finito de pórtico plano  $b$  é obtida através da combinação das matrizes dos elementos de viga e de treliça planas (CHOPRA, 2012), e está representada por meio da Equação 119. As variáveis  $m'$  e  $L$  são a massa por unidade de comprimento e o comprimento do elemento, respectivamente.

$$[Mass]_b = \frac{m'L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 119})$$

A equação de equilíbrio da estrutura é obtida a partir da teoria clássica de pórticos elásticos e do princípio das potências virtuais, e pode ser verificada na Equação 120.

$$\hat{P}_{ext} = \hat{P}_{def} + \hat{P}_{ine} \Rightarrow \{P\} = \sum_{b=1}^m [B]_b^t \{M\}_b + [Mass] \{\ddot{U}\} \quad (\text{Equação 120})$$

Para a análise da estrutura, pode-se definir os princípios da termodinâmica. O primeiro princípio está reescrito na Equação 121, em que  $\dot{E}$  é a taxa de variação da energia interna,  $\dot{K}$  é a taxa de variação da energia cinética,  $P_{ext}$  é a potência das forças externas e  $Q$  é a quantidade de calor cedido ou recebido pela estrutura composta de elementos tipo pórticos. Essa relação foi proposta a partir da Equação 87, revisada no capítulo 4 deste trabalho.

$$\dot{E} + \dot{K} = P_{ext} + Q \quad (\text{Equação 121})$$

Aliando o primeiro princípio da termodinâmica, o princípio das potências virtuais e a igualdade entre a taxa de variação da energia cinética com a potência das forças de inércia ( $\dot{K} = P_{ine}$ ), compila-se a Equação 122, que representa a energia interna acumulada para toda a estrutura.

$$\dot{E} = P_{def} + Q \quad (\text{Equação 122})$$

Supondo que  $\dot{E} = \sum_{b=1}^m \dot{E}_b$  e  $Q = \sum_{b=1}^m Q_b$ , desenvolve-se a seguinte equação (Equação 123) que relaciona as respectivas taxas de energia com a potência das deformações para cada elemento de pórtico  $b$ .

$$\dot{E}_b = P_{def}^b + Q_b \leftrightarrow \dot{E}_b = \{\dot{\Phi}\}_b^t \{M\}_b + Q_b \quad (\text{Equação 123})$$

O segundo princípio da termodinâmica aplicado a pórticos está representado pela Equação 124, que é proposta para cada elemento a partir de equações desenvolvidas por Swalin (1972). Essa inequação pode ser rearranjada em função da taxa de energia interna, como verifica-se na Equação 125.

$$\dot{S}_b - \frac{Q_b}{T_b} \geq 0 \quad (\text{Equação 124})$$

$$T_b \dot{S}_b + \{\dot{\Phi}\}_b^t \{M\}_b - \dot{E}_b \geq 0 \quad (\text{Equação 125})$$

A energia livre de Gibbs ( $g_b$ ) é associada com a energia interna ( $E_b$ ), entropia ( $S_b$ ) e deformações do elemento ( $\Phi$ ), e é aplicada a elementos de pórticos segundo resultados fornecidos por Lubarda (2004). Essa energia de Gibbs foi escolhida para o trabalho, pois para Shaw e Kelly (2006) sua variação é causa fundamental do processo de corrosão, isto é, a energia livre de Gibbs é capaz de descrever a luta termodinâmica, na qual, naturalmente, o metal acaba retornando ao seu estado nativo de óxido de baixa energia.

Segundo a Equação 126, pode-se verificar o uso da energia de Gibbs com sinal negativo ( $G_b = -g_b$ ), isso ocorreu de forma a facilitar os cálculos que mostram a dissipação da energia com sinal positivo.

$$G_b = -g_b = -E_b + T_b S_b + \{\dot{\Phi}\}_b^t \{M\}_b \quad (\text{Equação 126})$$

Nesse sentido, pôde-se definir o potencial da energia livre de Gibbs como uma função das tensões ( $M$ ), da temperatura ( $T_b$ ) e das variáveis internas ( $V_\alpha$ ). Esse potencial foi proposto para atuar em elementos de pórtico e dependentemente da formulação proposta para o modelo (Equação 127).

$$Gb_b = Gb_b(M, T_b, V_\alpha) \quad (\text{Equação 127})$$

Como a causa fundamental que impulsiona a corrosão das armaduras é a variação dessa energia livre de Gibbs (SHAW e KELLY, 2006), surge a necessidade de trabalhar a variável de corrosão ( $cor$ ) como uma variável interna ( $V_\alpha$ ) no desenvolvimento do modelo de análise que contempla efeitos da corrosão por pite.

A partir da derivada da Equação 126 no tempo, e substituindo a variável da energia interna na inequação anterior (Equação 125), obtém-se a desigualdade representada na Equação 128. Essa inequação, por sua vez, representa a relação entre o primeiro e segundo princípios da termodinâmica com a aplicação da energia livre de Gibbs.

$$G\dot{b}_b - \dot{T}_b S_b - \{\Phi\}_b^t \{\dot{M}\}_b \geq 0 \quad (\text{Equação 128})$$

Assim, através da Equação 128, é possível verificar se um determinado modelo físico é termodinamicamente admissível ou não.

Derivando o potencial de energia (Equação 127) em relação ao tempo, obtém-se a seguinte equação (Equação 129).

$$G\dot{b}_b = \left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial M} \right\}^t \{\dot{M}\}_b + \frac{\partial Gb_b}{\partial T_b} \dot{T}_b + \left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial V_\alpha} \right\}^t \{\dot{V}_\alpha\}_b \quad (\text{Equação 129})$$

Aplicando  $G\dot{b}_b$  da Equação 129 na inequação representada pela Equação 128, obtém-se a seguinte relação.

$$\left( \left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial M} \right\} - \{\Phi\}_b \right)^t \{\dot{M}\}_b + \left( \frac{\partial Gb_b}{\partial T_b} - S_b \right) \dot{T}_b + \left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial V_\alpha} \right\}^t \{\dot{V}_\alpha\}_b \geq 0 \quad (\text{Equação 130})$$

Para um processo reversível, ocorre a igualdade dessa inequação (Equação 130), sendo que as taxas de variação das variáveis internas passam a ser iguais a zero ( $\dot{V}_\alpha=0$ ). Como resultado, pode-se verificar a Equação 131.

$$\left( \left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial M} \right\} - \{\Phi\}_b \right)^t \{\dot{M}\}_b + \left( \frac{\partial Gb_b}{\partial T_b} - S_b \right) \dot{T}_b = 0 \quad (\text{Equação 131})$$

Admitindo que o processo seja isotérmico ( $\dot{T}_b=0$ ), resulta-se a seguinte expressão.

$$\{\Phi\}_b = \left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial M} \right\} \quad (\text{Equação 132})$$

Em um processo reversível, apenas com mudança de temperatura ( $\dot{M}_b=0$ ), tem-se a seguinte expressão formulada.

$$s_b = \frac{\partial Gb_b}{\partial T_b} \quad (\text{Equação 133})$$

Assim, como revisado no capítulo 4 deste trabalho, as relações representadas pelas Equações 132 e 133 podem ser generalizadas para qualquer processo termodinâmico. Assim, como consequência, resulta-se na equação de dissipação da energia que é representada pelas Equações 134 e 135.

$$\left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial V_\alpha} \right\}^t \{\dot{V}_\alpha\} \geq 0 \quad (\text{Equação 134})$$

$$\{A_\alpha\}^t \{\dot{V}_\alpha\} \geq 0 \quad (\text{Equação 135})$$

Em que  $A_\alpha$  são as forças termodinâmicas associadas as variáveis internas  $V_\alpha$ .

Portanto, as leis de estado são obtidas derivando a energia livre de Gibbs em relação as variáveis de estado (ou internas) de interesse. As relações que surgem são as seguintes (Equações 136 a 138).

$$\left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial M} \right\} = \{\Phi\}_b \quad (\text{Equação 136})$$

$$\frac{\partial Gb_b}{\partial T_b} = S_b \quad (\text{Equação 137})$$

$$\left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial V_\alpha} \right\} = \{A_\alpha\} \quad (\text{Equação 138})$$

Observa-se, assim, as relações causa-efeito entre as variáveis internas e as derivadas do potencial de Gibbs:  $\{M\} \leftrightarrow \{\Phi\}$ ;  $T_b \leftrightarrow S_b$  ;  $\{V_\alpha\} \leftrightarrow \{A_\alpha\}$ . Portanto, para as variáveis de estado ou internas ( $V_\alpha$ ) existem forças termodinâmicas respectivamente associadas  $A_\alpha$ .

A desigualdade obtida na Equação 134 (ou 135) afirma que a dissipação de energia deve acontecer em processos inelásticos, sendo que para esse caso, a inequação é necessariamente maior que zero. Já para processos elásticos, a inequação assumirá valor nulo.

## 6 FORMULAÇÕES DE MODELOS TERMODINÂMICOS AUXILIARES

Nesta etapa do trabalho é confeccionado a análise termodinâmica de modelos mecânicos já verificados na literatura (DAHMER, 2018). Esses modelos, além de nortear o desenvolvimento da formulação do modelo termodinâmico proposto (modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, dano e corrosão) no capítulo posterior, foram capazes de comprovar a termodinâmica de pórticos e, com isso, amarrar teoricamente a metodologia desta pesquisa.

### 6.1 Modelo elástico

O modelo elástico considera a proporcionalidade entre tensões e deformações, conforme a Lei de Hooke. O potencial termodinâmico que representa esse modelo está na forma de uma função  $G_b = G_b(\{M\})$ , e é dado pela Equação 139.

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}^t [F_0] \{M\} + \{M\}^t \{\Phi_0\} \quad (\text{Equação 139})$$

Segundo a Equação 139, pode-se observar que a energia de Gibbs é equivalente a energia de deformação complementar ( $W$ ), para um elemento não danificado. Essa foi tratada na revisão deste trabalho no item 3.4.1.

Derivando esse potencial em relação ao momento obtém-se a lei de elasticidade (lei constituinte), que nesse caso é igual ao vetor das deformações generalizadas  $\{\Phi\}$  (Equação 140).

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\} = [F_0] \{M\} + \{\Phi_0\} = \{\Phi\} \quad (\text{Equação 140})$$

Em que  $[F_0]$  é a matriz de flexibilidade elástica,  $\{M\}$  é o vetor de tensões generalizadas e  $\{\Phi_0\}$  é o vetor de deformações iniciais.

Pode-se afirmar, então, que para as variáveis  $\{\Phi\}$  existe uma força impulsionadora termodinamicamente associada  $\{M\}$ . Dessa forma, comprova-se que esse modelo é caracterizado pela lei constituinte apresentada pela Equação 140.

## 6.2 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear

O modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear considera as deformações plásticas e o encruamento (ganho de resistência) da armadura com o aumento dessas deformações. Por sua vez, o encruamento faz com que o momento de escoamento sofra um aumento com incremento da deformação plástica, até um determinado limite, denominado momento último.

O termo do encruamento a ser definido ( $h_i$  e  $h_j$ ) está representado pela matriz a seguir, através da Equação 141.

$$[H] = \begin{bmatrix} h_i & 0 & 0 \\ 0 & h_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 141})$$

O potencial termodinâmico que representa esse modelo está na forma de uma função  $G_{bb} = G_{bb}(\{M\}, \{\Phi^p\})$ , e é representada pela Equação 142. Vale ressaltar que o vetor  $\{\Phi^p\}^t = (\phi_i^p, \phi_j^p, 0)$ .

$$G_{bb} = \frac{1}{2} \{M\}^t [F_0] \{M\} + \{M\}^t \{\Phi_0\} + \{M\}^t \{\Phi^p\} - \frac{1}{2} \{\Phi^p\}^t [H] \{\Phi^p\} \quad (\text{Equação 142})$$

Ao derivar o potencial em relação ao momento obtém-se a lei de elasticidade associada (Equação 143).

$$\left\{ \frac{\partial G_{bb}}{\partial M} \right\} = [F_0] \{M\} + \{\Phi_0\} + \{\Phi^p\} = \{\Phi\} \quad (\text{Equação 143})$$

Derivando a Equação 142 em relação às deformações plásticas determina-se a força termodinâmica relacionada à plasticidade, que nesse capítulo foi denominada  $\{A\}$  (Equação 144).

$$\left\{ \frac{\partial G_{bb}}{\partial \phi^p} \right\} = \{M\} - [H] \{\Phi^p\} = \{A\} \quad (\text{Equação 144})$$

Nesse modelo, as variáveis internas associadas compõem o vetor de deformações plásticas. Dessa forma, fazendo a verificação da equação de dissipação da termodinâmica de pórticos (Equação 135), tem-se:

$$(\{M\} - [H]\{\Phi^p\})^t \{\dot{\Phi}^p\} \geq 0 \Rightarrow \{A\}^t \{\dot{\Phi}^p\} \geq 0 \quad (\text{Equação 145})$$

Assim, para função de plasticidade com encruamento cinemático linear determinada pela Equação 146, uma lei de evolução da plasticidade que verifica a equação da dissipação apresentada é dada a seguir. Essa lei de evolução aplica-se a um nó  $i$  qualquer e é dada pela Equação 147.

$$f_i = |m_i - h_i \phi_i^p| - m_y = |A_i| - m_y \leq 0 \quad (\text{Equação 146})$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{se rótula inativa: } f_i < 0 \Rightarrow A_i \dot{\phi}_i^p = 0 \\ \text{se rótula ativa: } f_i = 0; A_i > 0 \text{ e } \dot{\phi}_i^p = \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial A_i} = \lambda_i > 0 \Rightarrow A_i \dot{\phi}_i^p > 0 \\ \text{se rótula ativa: } f_i = 0; A_i < 0 \text{ e } \dot{\phi}_i^p = \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial A_i} = -\lambda_i < 0 \Rightarrow A_i \dot{\phi}_i^p > 0 \\ \text{se: } f_i > 0 \text{ (impossível)} \end{array} \right. \quad (\text{Equação 147})$$

Pode-se observar que essa lei de evolução contém a lei de normalidade clássica generalizada, dada pela Equação 148, para  $\lambda_i > 0$ .

$$\dot{\phi}_i^p = \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial A_i} \quad (\text{Equação 148})$$

Portanto, a partir das relações representadas nas Equações 146 e 147, a equação de dissipação é verificada e, conseqüentemente, o modelo pode ser considerado termodinamicamente admissível.

### 6.3 Modelo que contém dano frágil

Esse modelo considera a fissuração do concreto através de níveis de dano concentrados nos nós  $i$  e  $j$  de um elemento de pórtico, conforme o vetor  $\{D\}^t = (d_i, d_j)$ .

O potencial termodinâmico que representa esse modelo está na forma de uma função  $G_b = G_b(\{M\}, \{D\})$  e é representada pela Equação 149.

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}^t [F(D)] \{M\} + \{M\}^t \{\Phi_0\} \quad (\text{Equação 149})$$

Sendo que  $[F(D)]$  corresponde a matriz de flexibilidade com dano e é válida para um elemento reto de seção transversal constante. Essa matriz está apresentada na seção 3.4 deste trabalho.

Segundo a Equação 149, pode-se observar que a energia de Gibbs é equivalente a energia de deformação complementar para um elemento danificado. Essa foi tratada na revisão deste trabalho no item 3.4.1.

Ao derivar o potencial em relação ao momento obtém-se a lei de elasticidade associada, que nessa situação é igual ao vetor de deformações generalizadas (Equação 150).

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\} = [F(D)] \{M\} + \{\Phi_0\} = \{\Phi\} \quad (\text{Equação 150})$$

No entanto, derivando a Equação 149 em relação ao dano determina-se a força termodinâmica relacionada à fissuração, que nesse capítulo foi definida pelo vetor  $\{Y\}$ , associado ao critério de Griffith (Equação 151).

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial d} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{Lm_i^2}{6E_c I (1 - d_i)^2} \\ Lm_j^2 \\ \frac{6E_c I (1 - d_j)^2} \end{array} \right\} = \{Y\} \quad (\text{Equação 151})$$

Nesse modelo, as variáveis internas associadas compõem o vetor  $\{Y\}$ . Dessa forma, fazendo a verificação da equação de dissipação da termodinâmica (Equação 135), tem-se:

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial d} \right\}^t \{\dot{D}\} \geq 0 \Rightarrow \{Y\}^t \{\dot{D}\} \geq 0 \quad (\text{Equação 152})$$

Assim, para força termodinâmica dada pelo critério de Griffith (Equação 153), uma lei de evolução do dano que verifica a equação da dissipação apresentada é formulada a seguir (Equação 155), para um nó  $i$  qualquer da estrutura.

$$Y_i = \frac{F^0 m_i^2}{2(1 - d_i)^2} \quad (\text{Equação 153})$$

Em que  $F^0$  é a rigidez a flexão original associada, sendo que para o caso de elementos de pórticos planos,  $F^0 = \frac{L}{3E_c I}$ .

A função  $Y_i$  é associada a resistência de fissuração ( $R_0$ ), conforme a Equação 154, para gerar a função de evolução do dano ( $f^d$ ) e conseguir, assim, formular o modelo.

$$f_i^d = Y_i - R_0 \quad (\text{Equação 154})$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{se rótula com dano inativo: } f_i^d < 0; \dot{d}_i = 0 \Rightarrow Y_i \dot{d}_i = 0 \\ \text{se rótula com dano ativo: } f_i^d = 0; Y_i > 0; \dot{d}_i = \lambda_i^d \frac{\partial f_i^d}{\partial Y_i} = \lambda_i^d > 0 \Rightarrow Y_i \dot{d}_i > 0 \\ \text{se: } f_i^d > 0 \text{ (impossível)} \end{array} \right. \quad (\text{Equação 155})$$

Pode-se observar que essa lei de evolução contém a lei de normalidade do dano, dada pela Equação 156, para  $\lambda_i^d > 0$ .

$$\dot{d}_i = \lambda_i^d \frac{\partial f_i^d}{\partial Y_i} \quad (\text{Equação 156})$$

Portanto, a partir das relações representadas nas Equações 154 e 155, a equação de dissipação é verificada e, conseqüentemente, o modelo pode ser considerado termodinamicamente admissível.

#### 6.4 Modelo elastoplástico com encruamento cinemático e que contém dano

O resultado formulado termodinamicamente neste item é equivalente ao modelo revisado no capítulo 3 deste trabalho. Esse modelo considera as deformações plásticas  $\{\Phi^p\}$ ,

termo do encruamento cinemático  $[H(D)]$ , que agora depende das variáveis de dano, e a fissuração do concreto  $\{D\}$ . O encruamento da armadura faz com que o momento de plastificação sofra acréscimos, com incrementos das deformações plásticas, até um determinado limite em que alcance o momento último da seção. De modo combinado, a fissuração penaliza a rigidez da estrutura e atua sobre a função de escoamento do aço.

O potencial termodinâmico que representa esse modelo está na forma de uma função  $G_b = G_b(\{M\}, \{\Phi^p\}, \{D\})$  e é representada pela Equação 157.

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}^t [F(D)] \{M\} + \{M\}^t \{\Phi_0\} + \{M\}^t \{\Phi^p\} - \frac{1}{2} \{\Phi^p\}^t [H(D)] \{\Phi^p\} - I(D) \quad (\text{Equação 157})$$

Em que  $I(D)$  é uma função que representa o incremento de resistência à fissuração, dada pela seguinte equação.

$$I(D) = -\frac{1}{2} q \ln^2(1 - d_i) - \frac{1}{2} q \ln^2(1 - d_j) \quad (\text{Equação 158})$$

O encruamento cinemático da armadura que depende das variáveis de dano é dado pela matriz a seguir, por meio da Equação 159.

$$[H(D)] = \begin{bmatrix} (1 - d_i)h_i & 0 & 0 \\ 0 & (1 - d_j)h_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 159})$$

Ao derivar o potencial em relação ao momento obtém-se a lei de elasticidade associada (Equação 160).

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\} = [F(D)] \{M\} + \{\Phi_0\} + \{\Phi^p\} = \{\Phi\} \quad (\text{Equação 160})$$

Derivando a Equação 157 em relação às deformações plásticas determina-se a força termodinâmica relacionada à plasticidade, que é equivalente ao vetor  $\{A\}$ , e está associada a função de escoamento (Equação 161).

$$\{A\} = \left\{ \frac{\partial G b_b}{\partial \phi^p} \right\} = \{M\} - [H(D)]\{\Phi^p\} \quad (\text{Equação 161})$$

Por último, derivando a Equação 157 em relação ao dano obtêm-se a força termodinâmica relacionada à fissuração (Equação 162), que é equivalente ao vetor  $\{Y\}$ .

$$\{Y\} = \left\{ \frac{\partial G b_b}{\partial d} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{Lm_i^2}{6E_c I(1-d_i)^2} - q \frac{\ln(1-d_i)}{(1-d_i)} + \frac{1}{2} h(\phi_i^p)^2 \\ \frac{Lm_j^2}{6E_c I(1-d_j)^2} - q \frac{\ln(1-d_j)}{(1-d_j)} + \frac{1}{2} h(\phi_j^p)^2 \end{array} \right\} \quad (\text{Equação 162})$$

Nesse modelo, as variáveis internas associadas compõem os vetores  $\{A\}$  e  $\{Y\}$ . Dessa forma, fazendo a verificação da equação de dissipação da termodinâmica (Equação 135), tem-se:

$$\left\{ \frac{\partial G b_b}{\partial d} \right\}^t \{\dot{D}\} + \left\{ \frac{\partial G b_b}{\partial \phi^p} \right\}^t \{\dot{\Phi}^p\} \geq 0 \Rightarrow \{Y\}^t \{\dot{D}\} + \{A\}^t \{\dot{\Phi}^p\} \geq 0 \quad (\text{Equação 163})$$

Assim, uma função de plasticidade com encruamento cinemático é arranjada de forma a incluir os termos do vetor  $\{A\}$ , para um nó  $i$  qualquer da estrutura. Essa função possui similaridade com a função de plasticidade dada no item 6.2 e está representada pela Equação 164.

$$f_i^p = |A_i| - (1-d_i)K_0 \leq 0; \quad f_i^p = (1-d_i)f_i \quad (\text{Equação 164})$$

Analogamente, uma função de dano é arranjada obedecendo o critério de Griffith e inserindo os termos do vetor  $\{Y\}$  (Equação 165).

$$f_i^d = Y_i - \frac{1}{2} h_i(\phi_i^p)^2 - R_0 \leq 0 \quad (\text{Equação 165})$$

A partir das leis de plasticidade com encruamento cinemático e de dano, uma lei de evolução da plasticidade e uma lei de evolução do dano que verificam a equação da dissipação apresentada (Equação 163) são dadas a seguir, pelas Equações 166 e 167.

$$\left[ \begin{array}{l}
 \text{se rótula inativa: } f_i^p < 0; \dot{\phi}_i^p = 0 \Rightarrow A_i \dot{\phi}_i^p = 0 \\
 \text{se rótula ativa: } f_i^p = 0; A_i > 0 \text{ e } \dot{\phi}_i^p = \lambda_i^p \frac{\partial f_i^p}{\partial A_i} = \lambda_i^p > 0 \Rightarrow A_i \dot{\phi}_i^p > 0 \\
 \text{se rótula ativa: } f_i^p = 0; A_i < 0 \text{ e } \dot{\phi}_i^p = \lambda_i^p \frac{\partial f_i^p}{\partial A_i} = -\lambda_i^p < 0 \Rightarrow A_i \dot{\phi}_i^p > 0 \\
 \text{se: } f_i^p > 0; \text{ (impossível)}
 \end{array} \right. \quad \text{(Equação 166)}$$

$$\left[ \begin{array}{l}
 \text{se rótula com dano inativo: } f_i^d < 0; \dot{d}_i = 0 \Rightarrow Y_i \dot{d}_i = 0 \\
 \text{se rótula com dano ativo: } f_i^d = 0; Y_i > 0; \dot{d}_i = \lambda_i^d \frac{\partial f_i^d}{\partial Y_i} = \lambda_i^d > 0 \Rightarrow Y_i \dot{d}_i > 0 \\
 \text{se: } f_i^d > 0 \text{ (impossível)}
 \end{array} \right. \quad \text{(Equação 167)}$$

Pode-se notar que essas leis de evolução contêm a lei de normalidade da plasticidade generalizada e a lei do dano, para  $\lambda^p > 0$  e  $\lambda^d > 0$ , respectivamente, que são calculadas pela condição de consistência ( $\dot{f}_i^p = 0$  e  $\dot{f}_i^d = 0$ ).

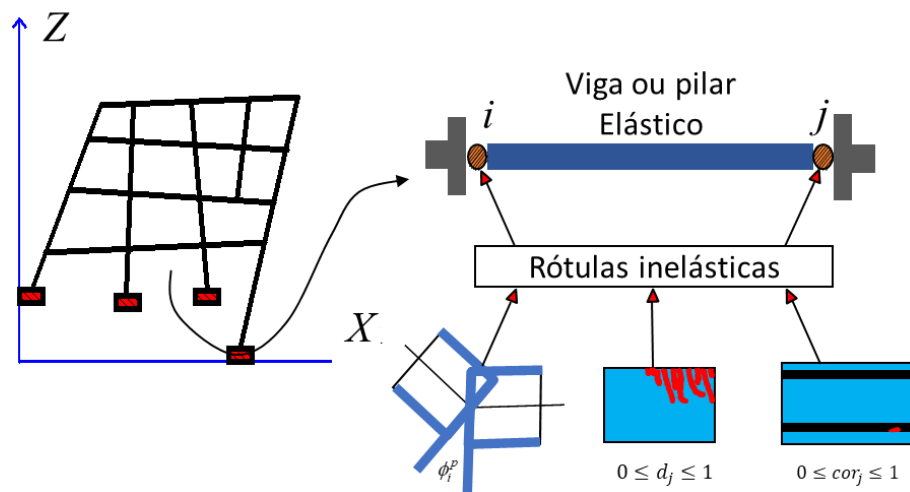
Portanto, a partir das relações representadas nas Equações 166 e 167, a equação de dissipação é verificada e, conseqüentemente, o modelo pode ser considerado termodinamicamente admissível.

## 7 FORMULAÇÃO DO MODELO TERMODINÂMICO ELASTOPLÁSTICO COM ENCRUAMENTO CINEMÁTICO, DANO E CORROSÃO

### 7.1 Variáveis internas

Esse modelo além de conter as deformações plásticas  $\{\Phi^p\}$  e a fissuração do concreto  $\{D\}$ , toma também como variável interna a corrosão das armaduras por pites  $\{C\}$ . Essas variáveis são aplicadas às rótulas inelásticas conforme ilustra a Figura 25.

**Figura 25** – Variáveis internas do modelo elastoplástico com encruamento cinemático linear, dano e corrosão.



FONTE: Do autor.

Como hipótese para o desenvolvimento desse modelo, assume-se que a corrosão por pite ocorre nas rótulas ( $i$  e  $j$ ), onde as solicitações por momentos fletores são maiores.

$$\{C\}^t = (c_i, c_j) \quad (\text{Equação 168})$$

O nível de corrosão ( $cor$  ou  $c_i$  para um nó  $i$  qualquer) é definido pela Equação 169.

$$c_i = cor = \frac{\bar{p}}{\bar{\phi}} \quad (\text{Equação 169})$$

Em que  $\bar{p}$  é a média das profundidades do pite e  $\bar{\phi}$  é a média dos diâmetros das barras da seção transversal em análise.

A área efetiva (área total da seção da barra de aço menos a parcela corroída) pode ser calculada de acordo com a Equação 170.

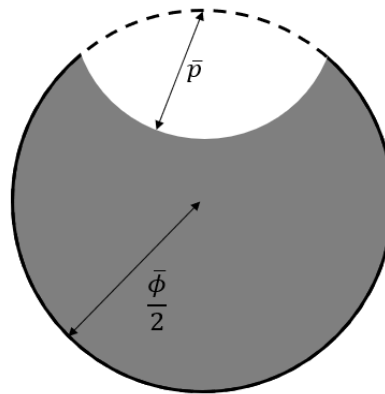
$$A_{ef} = \frac{A_0}{\pi} \begin{cases} Kcor + \pi - \arcsin 2cor\sqrt{-cor^2 + 1}, & \text{se } cor < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Kcor + \arcsin 2cor\sqrt{-cor^2 + 1}, & \text{se } cor \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (\text{Equação 170})$$

$$Kcor = -4cor^2 \arcsin \sqrt{-cor^2 + 1} + 2cor\sqrt{-cor^2 + 1}$$

Em que  $A_{ef}$  é a área efetiva e  $A_0$  é a área de aço original da seção transversal da armadura em análise.

A Equação 170 foi obtida de acordo com a cinemática de corrosão proposta por Val e Melchers (1997) apud Stewart (2004). Esquemáticamente, a Figura 26 representa a seção transversal de uma barra de aço corroída pela presença de íons cloretos, respeitando essa formulação.

**Figura 26** – Esquema da seção transversal de uma barra de aço corroída por pite.



FONTE: Do autor.

Assim, as variáveis  $c_i$  e  $c_j$  representam os níveis de corrosão da armadura nas respectivas rótulas e assumem valores entre 0 e 1, de tal modo que quanto mais próximo de 1, mais corroída estará a barra de aço nessa posição da estrutura.

Como apresentado na seção 2.2.4, assume-se que essas leis de corrosão podem ser unificadas em uma função  $O$  que depende das forças termoquímicas ( $FQ$ ), propriedades do concreto ( $PC$ ), propriedades da seção ( $PS$ ) e tempo ( $t$ ).

$$O = O(FQ, PC, PS, t) \quad (\text{Equação 171})$$

## 7.2 Potencial de Gibbs

O potencial termodinâmico que representa esse modelo está na forma de uma função  $G_b = G_b(\{M\}, \{\Phi^p\}, \{D\}, \{C\})$  e é representada pela Equação 172.

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}^t [F(D)] \{M\} + \{M\}^t \{\Phi_0\} + \{M\}^t \{\Phi^p\} - \frac{1}{2} \{\Phi^p\}^t [H(D, C)] \{\Phi^p\} - I(D, C) + \frac{\{O\}^t \{C\}}{\xi} \quad (\text{Equação 172})$$

Esse novo modelo está baseado na lei constitutiva apresentada no capítulo 3. Assim, a matriz de flexibilidade  $[F(D)]$  possui a mesma expressão da que foi apresentada na seção 3.4 deste trabalho.

A função que representa o incremento da resistência ao processo de fissuração devido a presença da armadura  $I(D, C)$  depende dos parâmetros  $q(c_i)$  e  $q(c_j)$ , que agora estão em função dos níveis de corrosão ( $c_i$  e  $c_j$ ), conforme a Equação 173.

$$I(D, C) = -\frac{1}{2} q(c_i) \ln^2(1 - d_i) - \frac{1}{2} q(c_j) \ln^2(1 - d_j) \quad (\text{Equação 173})$$

O encruamento da armadura que, agora, considera o dano e a corrosão ( $[H(D, C)]$ ) é dado pela Equação 174. Nessa equação, os parâmetros  $h_i(c_i)$  e  $h_j(c_j)$  estão em função dos níveis de corrosão ( $c_i$  e  $c_j$ ).

$$[H(D, C)] = \begin{bmatrix} (1 - d_i) h_i(c_i) & 0 & 0 \\ 0 & (1 - d_j) h_j(c_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 174})$$

O vetor  $\{O\}^t = (O_i, O_j)$  representa os valores da função  $O$  para as rótulas inelástica  $i$  e  $j$  do elemento. Essa função trata-se da taxa de evolução da corrosão normalizada e não leva em consideração a influência da fissuração do concreto. Vale destacar que  $\xi$  é uma constante a ser estabelecida experimentalmente e é definida pela inversa da unidade de energia.

## 7.3 Lei de estado e forças termodinâmicas associadas as variáveis internas

Ao derivar o potencial em relação ao momento obtém-se a lei de elasticidade associada (Equação 175).

$$\left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial M} \right\} = [F(D)]\{M\} + \{\Phi_0\} + \{\Phi^p\} = \{\Phi\} \quad (\text{Equação 175})$$

Derivando a Equação 172 em relação às deformações plásticas determina-se a força termodinâmica relacionada à plasticidade  $\{A_p\}$ , que é associada a função de escoamento (Equação 176).

$$\{A_p\} = \left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial \Phi^p} \right\} = \{M\} - [H(D, C)]\{\Phi^p\} = \begin{Bmatrix} m_i - (1 - d_i)h(c_i)\phi_i^p \\ m_j - (1 - d_j)h(c_j)\phi_j^p \\ n \end{Bmatrix} \quad (\text{Equação 176})$$

Além disso, derivando a Equação 172 em relação ao dano obtêm-se a força termodinâmica relacionada à fissuração  $\{A_d\}$  (Equação 177).

$$\{A_d\} = \left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial d} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{Lm_i^2}{6EI(1 - d_i)^2} - q(c_i) \frac{\ln(1 - d_i)}{(1 - d_i)} + \frac{1}{2}h(c_i)(\phi_i^p)^2 \\ \frac{Lm_j^2}{6EI(1 - d_j)^2} - q(c_j) \frac{\ln(1 - d_j)}{(1 - d_j)} + \frac{1}{2}h(c_j)(\phi_j^p)^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Equação 177})$$

Por último, derivando a Equação 172 em relação a corrosão obtêm-se a força termodinâmica relacionada à corrosão, denominada pelo vetor  $\{A_c\}$  (Equação 178).

$$\{A_c\} = \left\{ \frac{\partial Gb_b}{\partial cor} \right\} = -\frac{1}{2}\{\Phi^p\}^t \left[ \frac{\partial H(D, C)}{\partial cor} \right] \{\Phi^p\} - \left\{ \frac{\partial I}{\partial cor} \right\} + \frac{\{O\}}{\xi} \quad (\text{Equação 178})$$

#### 7.4 Lei de evolução do dano

A lei de evolução do dano possui a mesma forma que aquela apresentada na lei constitutiva da mecânica do dano concentrado (FLÓREZ-LÓPEZ et al, 2015) revisada na seção 3.4 do presente trabalho. Assim, os momentos impulsionadores do dano  $\{Y\}$  são agora reescritos dependendo do nível corrosão por pite.

$$Y_i = A_{d_i} - \frac{1}{2}h(c_i)(\phi_i^p)^2 = \frac{Lm_i^2}{6EI(1 - d_i)^2} - q(c_i) \frac{\ln(1 - d_i)}{(1 - d_i)} \quad (\text{Equação 179})$$

Assim, essa lei de evolução é expressa como um critério generalizado de Griffith, de forma semelhante que na seção 6.4.

$$\begin{cases} \dot{d}_i = 0 \text{ se } Y_i < R_0 \text{ ou } \dot{Y}_i < 0 \\ \dot{d}_i > 0 \text{ se } Y_i = R_0 \text{ e } \dot{Y}_i = 0 \\ Y_i > R_0 \text{ ou } \dot{d}_i < 0 \text{ impossível} \end{cases} \quad (\text{Equação 180})$$

### 7.5 Obtenção dos parâmetros $q$ e $R_0$ como uma função do nível de corrosão e da força axial

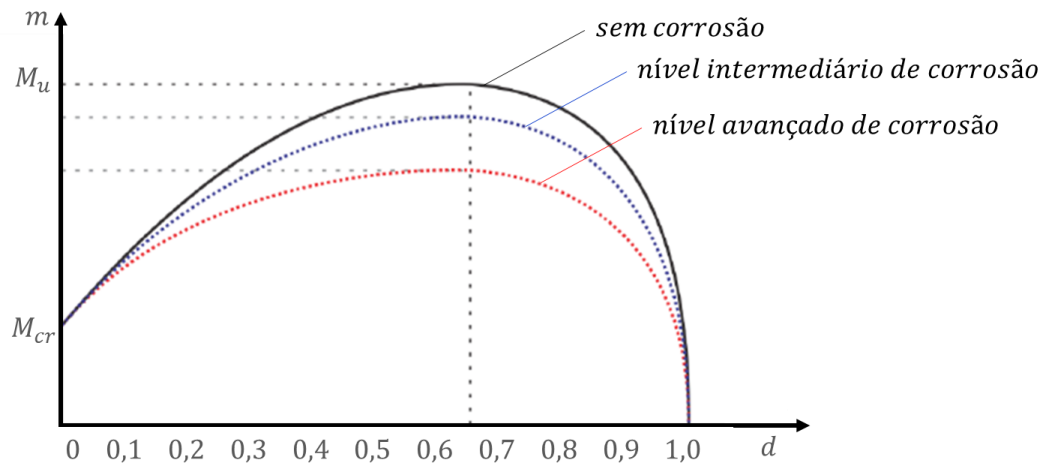
A lei de evolução do dano apresentada na seção anterior introduz dois parâmetros:  $q(c_i)$  e  $R_0$ , no qual o primeiro deles é assumido como dependente da variável interna de corrosão. Assim, esta seção propõe um procedimento racional para a determinação desses valores.

Considerando a equação de Griffith ( $Y_i = R_0$ ) para uma rótula plástica  $i$ , tem-se a seguinte equação.

$$m_i^2 = \frac{6E_c I (1 - d_i)^2}{L} R_0 + \frac{6q(c_i) E_c I}{L} (1 - d_i) \ln (1 - d_i) \quad (\text{Equação 181})$$

A Equação 181 representa a relação entre momento e dano, como está apresentado na Figura 27. Nota-se, nessa figura, que as curvas possuem dois pontos que podem ser computados usando procedimentos indicados para dimensionamento de pórticos de concreto armado no caso particular de corrosão igual zero: momento de fissuração ( $M_{cr}$ ) e momento último ( $M_u$ ). O Anexo C detalha o procedimento para o cálculo de  $M_{cr}$  e  $M_u$ .

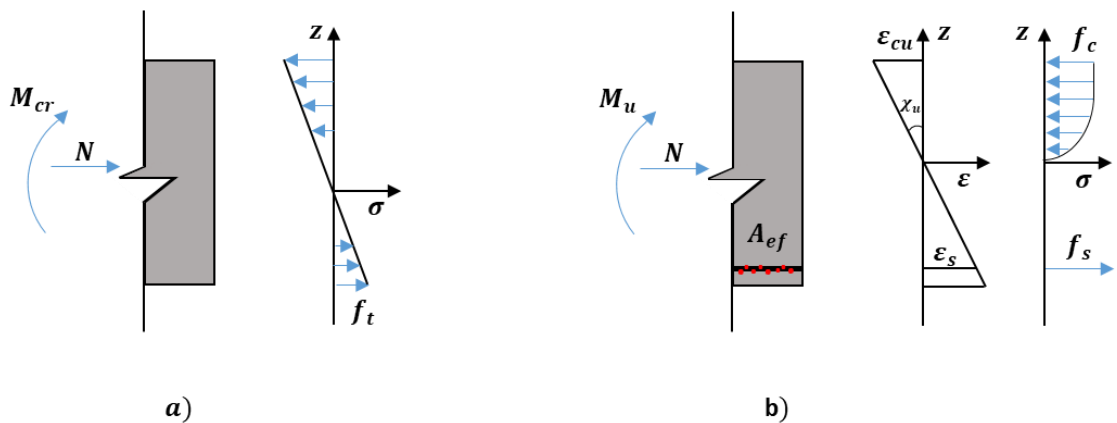
**Figura 27** – Relação momento fletor por dano para uma rótula inelástica.



FONTE: Do autor.

Assim, os parâmetros  $q(c_i)$  e  $R_0$  são calculados conforme as Equações 41 e 42, da lei constitutiva apresentada pela mecânica do dano concentrado, revisado na seção 3.4.1. Contudo, o método de cálculo de  $M_{cr}$  e  $M_u$  será apresentado nesta seção. Para isso, o esquema representado na Figura 28 ilustra a distribuição de tensões para uma seção com armadura simples.

**Figura 28** – Distribuição de tensões e deformações em uma seção de concreto armado para a)  $M_{cr}$  e b)  $M_u$ .



FONTE: Do autor.

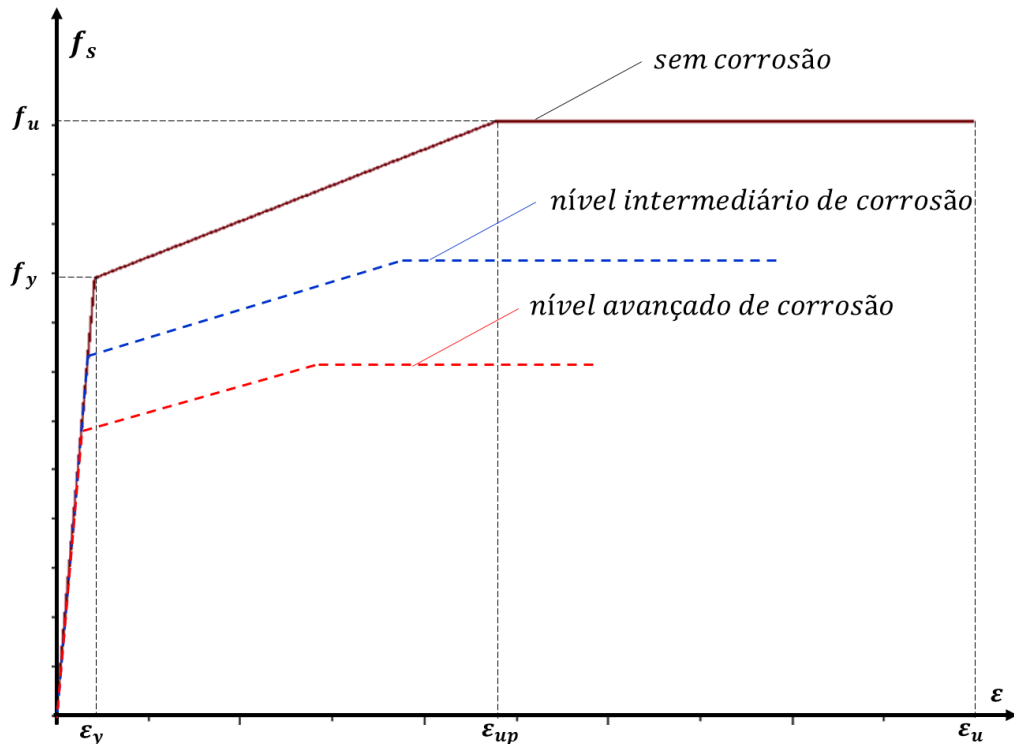
Em que  $A_{ef}$  é a área efetiva da barra de aço a ser calculada pela Equação 170,  $f_t$  é a tensão de resistência do concreto a tração,  $\varepsilon_{cu}$  é a deformação última no concreto,  $\chi_u$  é a curvatura última da seção,  $\varepsilon_s$  é a deformação no aço,  $f_c$  é a tensão de compressão no concreto e  $f_s$  é a tensão de tração no aço.

A tensão de tração no aço ( $f_s$ ) é computada por meio da formulação dada pela Equação 182.

$$f_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s, & \text{if } \varepsilon_s < \varepsilon_y(\text{cor}) \\ f_y + \frac{f_u - f_y}{\varepsilon_{up} - \varepsilon_y} (\varepsilon_s - \varepsilon_y), & \text{if } \varepsilon_y(\text{cor}) \leq \varepsilon_s < \varepsilon_{up}(\text{cor}) \\ f_u(\text{cor}), & \text{if } \varepsilon_{up}(\text{cor}) \leq \varepsilon_s \end{cases} \quad (\text{Equação 182})$$

Em que  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço. A tensão de escoamento ( $f_y(\text{cor})$ ), a tensão última ( $f_u(\text{cor})$ ), a deformação de escoamento ( $\varepsilon_y(\text{cor})$ ), a deformação última no patamar de encruamento ( $\varepsilon_{up}(\text{cor})$ ) e a deformação última ( $\varepsilon_u(\text{cor})$ ) podem ser verificadas esquematicamente na Figura 29, a seguir.

**Figura 29** – Comportamento tensão por deformação em armadura longitudinal.



FONTE: Do autor.

As Equações 183 a 187 foram desenvolvidas para o cálculo de  $f_y(cor)$ ,  $\varepsilon_y(cor)$ ,  $\varepsilon_{up}(cor)$ ,  $f_u(cor)$  e  $\varepsilon_u(cor)$ . O desenvolvimento está embasado nos trabalhos experimentais de Du, Clark e Chan (2005) e de Kearsley e Joyce (2014), e pode ser verificado no Anexo A da presente pesquisa.

$$f_y(cor) = (1 - 0.81cor) f_{y0} \quad (\text{Equação 183})$$

$$\varepsilon_y(cor) = \frac{f_y(cor)}{E_s} \quad (\text{Equação 184})$$

$$\varepsilon_{up}(cor) = (1 - 1.72cor) \varepsilon_{up0} \quad (\text{Equação 185})$$

$$f_u(cor) = (1 - 0.90cor) f_{u0} \quad (\text{Equação 186})$$

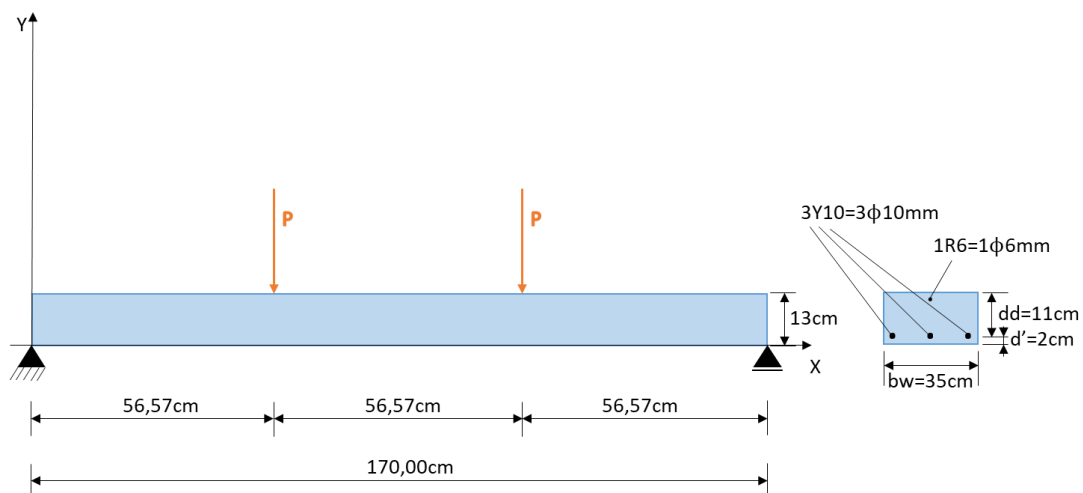
$$\varepsilon_u(cor) = (1 - 2.30cor) \varepsilon_{u0} \quad (\text{Equação 187})$$

Em que  $f_{y0}$  é a tensão de escoamento,  $\varepsilon_{up0}$  é a deformação última da barra de aço no patamar de encruamento,  $f_{u0}$  é a tensão última e  $\varepsilon_{u0}$  é a deformação última da barra de aço. Todas essas constantes são dados de entrada no cálculo e referem-se ao estado de não corrosão da armadura.

Vale destacar que as funções (Equações 183 a 187) foram obtidas para valores de corrosão ( $cor$ ) menores que 30% e, portanto, não são aplicáveis a níveis de corrosão superior a essa porcentagem.

Para melhor visualização, essa metodologia foi aplicada a exemplo de uma viga de concreto armado, viga teste de Kearsley e Joyce (2014), que está apresentada na Figura 30. A resistência característica dos materiais são iguais a 27,04 MPa para o concreto e 500 MPa para o aço.

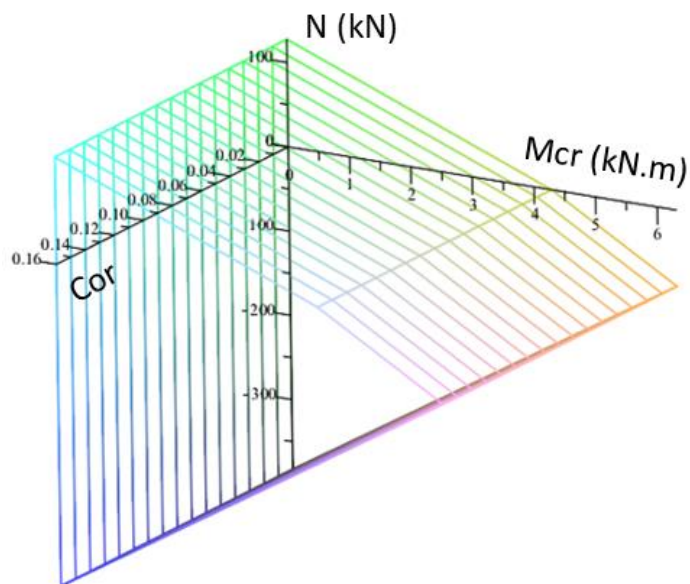
**Figura 30** – Exemplo de uma viga de concreto armado.



FONTE: Adaptado de Kearsley e Joyce (2014).

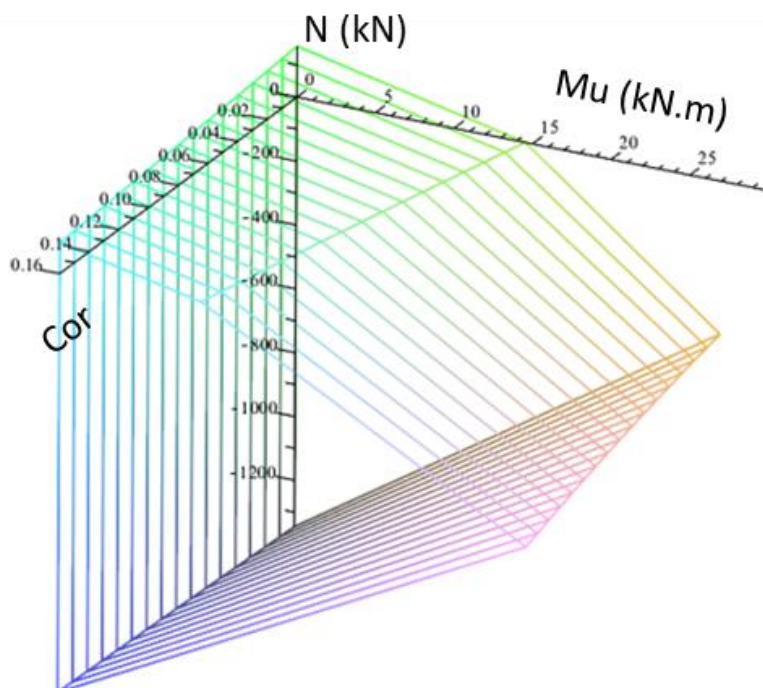
Esse procedimento permitiu determinar os diagramas de interação generalizado para os momentos crítico e último, que são apresentados nas Figuras 31 e 32, respectivamente.

**Figura 31** – Diagrama de interação entre  $M_{cr}$ ,  $cor$  e  $N$ .



FONTE: Do autor.

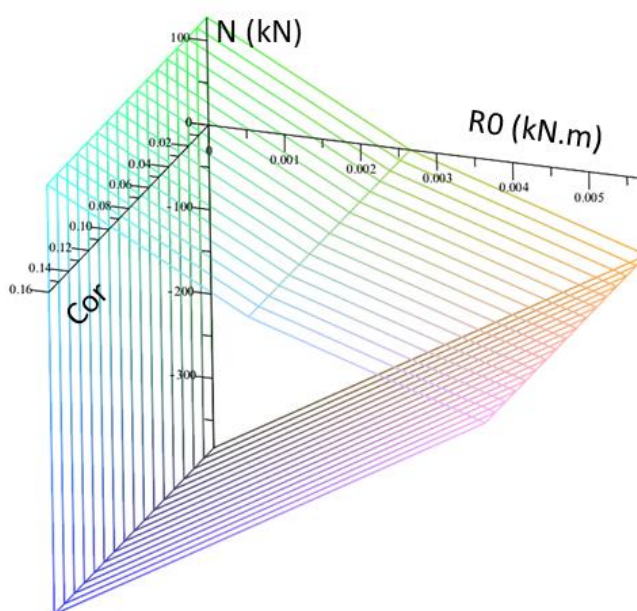
**Figura 32** – Diagrama de interação entre  $M_u$ ,  $cor$  e  $N$ .



FONTE: Do autor.

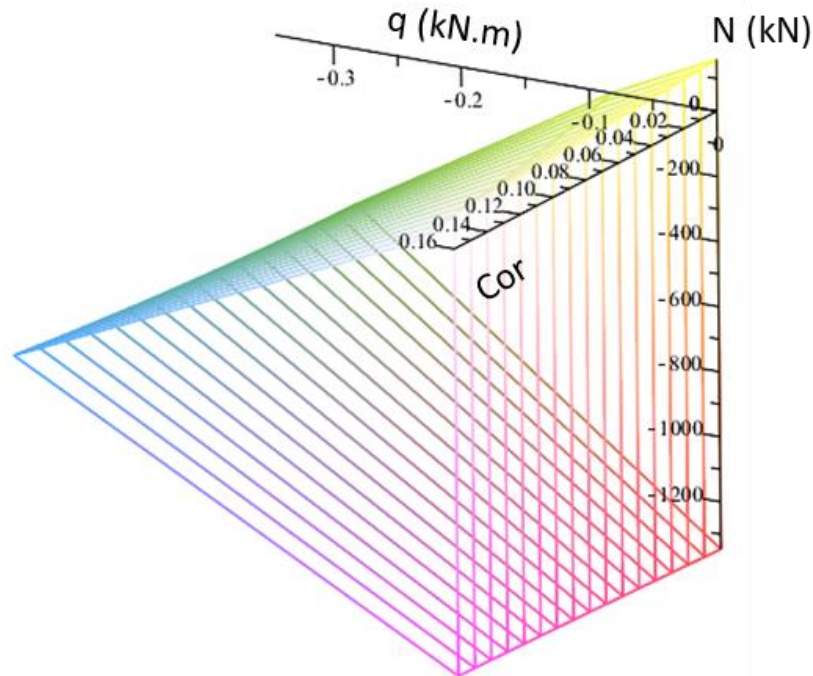
Assim, usando as Equações 41 e 42, tratadas na seção 3.4.1, pôde-se obter os diagramas de interação de  $R_0(cor, N)$  e de  $q(cor, N)$ , que estão ilustrados nas Figuras 33 e 34.

**Figura 33** – Diagrama de interação entre  $R_0$ ,  $cor$  e  $N$ .



FONTE: Do autor.

**Figura 34** – Diagrama de interação entre  $q$ ,  $cor$  e  $N$ .



FONTE: Do autor.

### 7.6 Lei de evolução das rotações plásticas

A função de escoamento para uma rótula inelástica com corrosão é dada a seguir.

$$f_i = |A_{p_i}| - (1 - d_i)k_0(c_i) = |m_i - (1 - d_i)h(c_i)\phi_i^p| - (1 - d_i)k_0(c_i) \leq 0 \quad (\text{Equação 188})$$

Essa função também pode ser justificada com base na hipótese de equivalência em deformação (FLÓREZ-LÓPEZ et al., 2015). Assim, a mesma lei que está indicada na seção 6.4 pode ser usada para descrever a evolução das rotações plásticas.

$$\dot{\phi}_i^p = \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial A_{p_i}}; \begin{cases} \lambda_i = 0 & \text{if } f_i < 0 \text{ ou } \dot{f}_i < 0 \\ \lambda_i > 0 & \text{if } f_i = 0 \text{ e } \dot{f}_i = 0 \\ f_i > 0 & \text{impossível} \end{cases} \quad (\text{Equação 189})$$

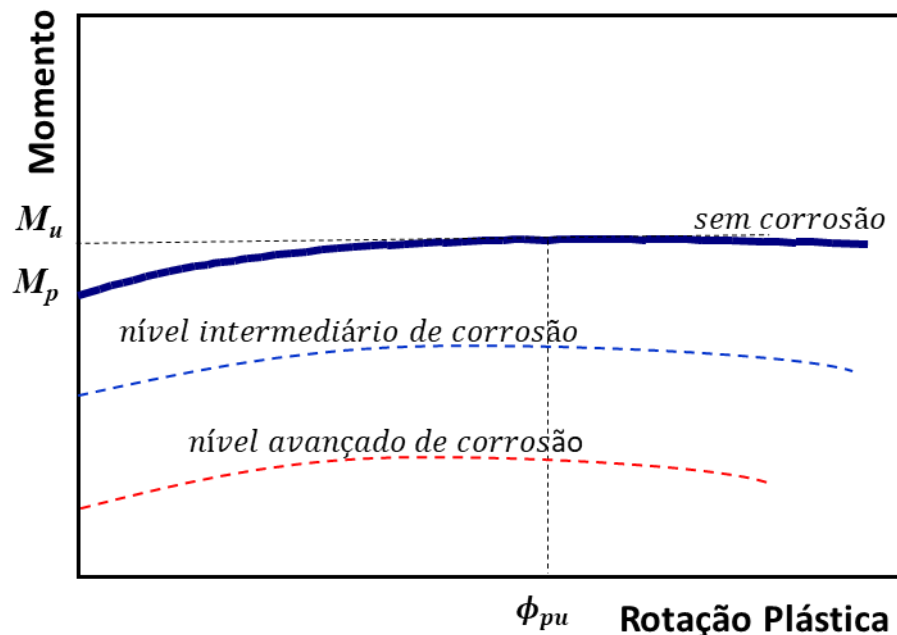
A função de escoamento (Equação 188) introduz dois parâmetros adicionais que dependem do nível de corrosão e da força axial:  $h$  e  $k_0$ . A próxima seção descreve um procedimento sistemático para a determinação desses parâmetros.

### 7.7 Obtenção dos parâmetros $h$ e $k_0$

A Figura 35 mostra o comportamento dos gráficos referentes a Equação 190, dada a seguir.

$$f_i = m_i - (1 - d_i)h(c_i)\phi_i^p - (1 - d_i)k_0(c_i) = 0 \quad (\text{Equação 190})$$

**Figura 35** – Momento fletor por rotação plástica para uma rótula inelástica.



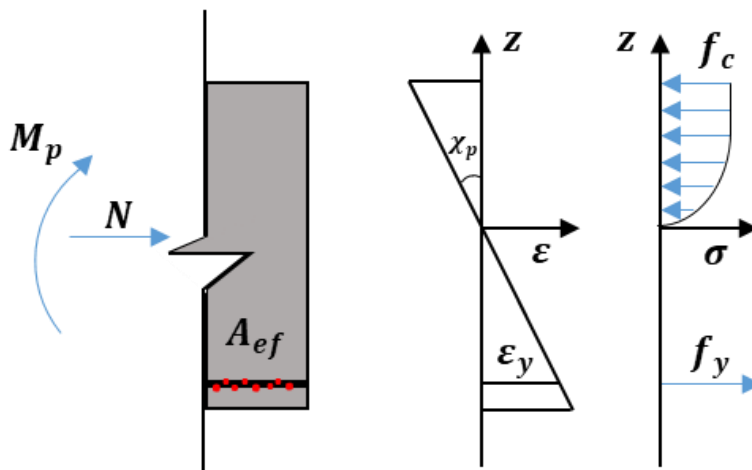
FONTE: Do autor.

Novamente, dois pontos característicos dessas curvas podem ser identificados:  $(0, M_p)$  e  $(\phi_{pu}, M_u)$ . Em que  $M_p$  é o momento de plastificação (primeiro momento plástico) da seção e  $\phi_{pu}$  é a rotação plástica última associada ao momento último ( $M_u$ ). Esses dois pontos permitem o cálculo dos parâmetros  $h$  e  $k_0$ , conforme as Equações 45 a 50, tratadas na seção 3.4.2 deste trabalho. O Anexo C detalha o procedimento para o cálculo de  $M_p$  e  $M_u$ .

O momento de plastificação de um elemento de pórtico de concreto armado pode ser obtido com base no esquema apresentado na Figura 36. Já para determinação do momento último é necessário verificar o gráfico da Figura 28 (b).

Para o cálculo da rotação plástica última foram necessárias as Equações 47 a 50.

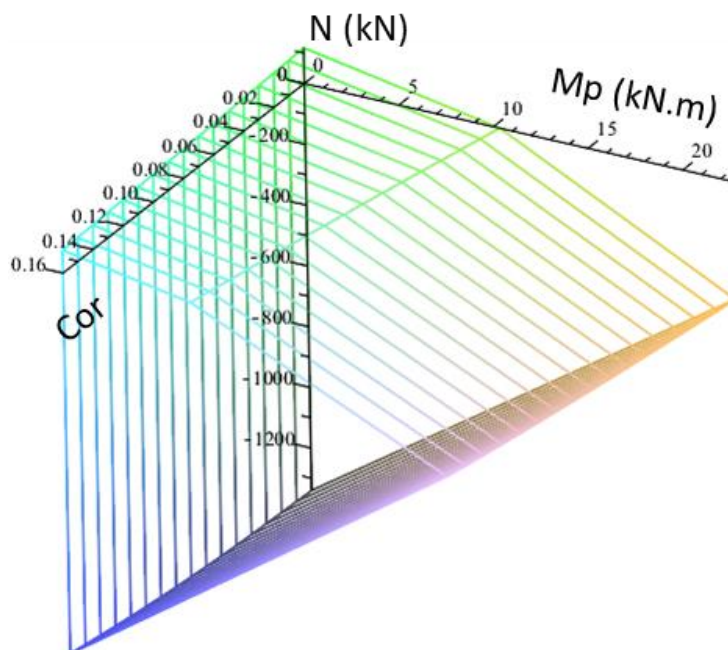
**Figura 36** – Distribuição de tensão e deformação em uma seção de concreto armado para obtenção de  $M_p$ .



FONTE: Do autor.

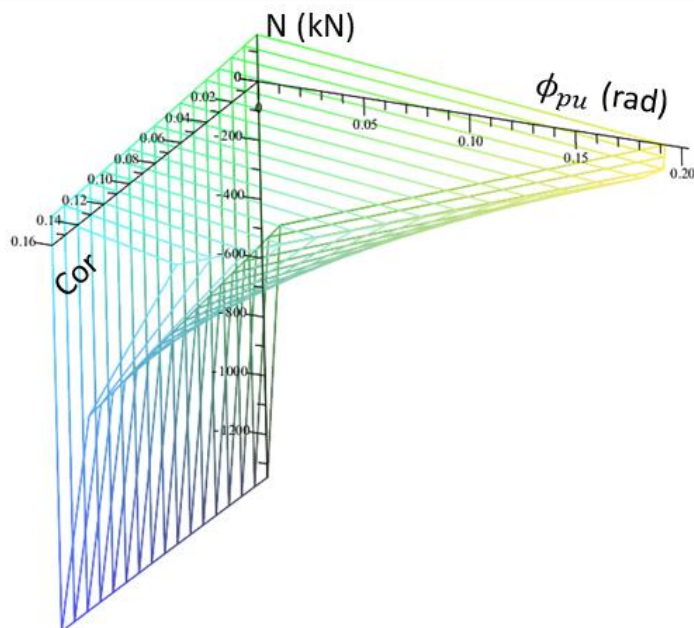
Assim, para o exemplo referente a Figura 30, esse procedimento permitiu determinar os diagramas de interação generalizados para o momento de plastificação e para a rotação plástica última da seção, que são apresentados nas Figuras 37 e 38, respectivamente.

**Figura 37** – Diagrama de interação entre  $M_p$ ,  $cor$  e  $N$ .



FONTE: Do autor.

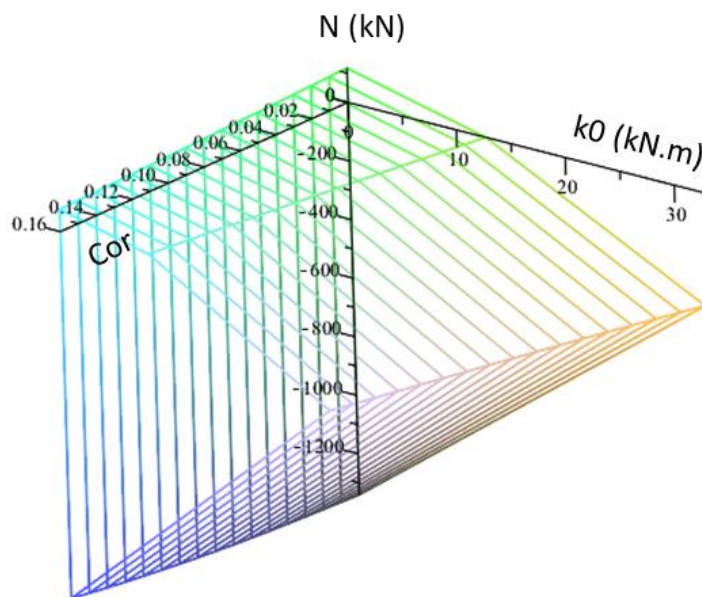
**Figura 38** – Diagrama de interação entre  $\phi_{pu}$ ,  $cor$  e  $N$ .



FONTE: Do autor.

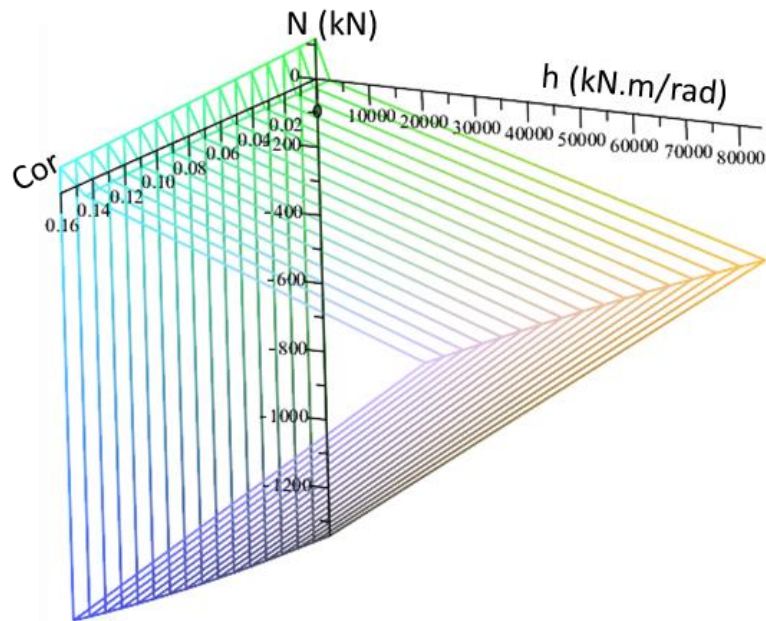
Finalmente, para um pórtico plano submetido a corrosão por pite (exemplo, Figura 30) é possível computar os diagramas de  $k_0(cor, N)$  e de  $h(cor, N)$ , como pode ser visto nas Figuras 39 e 40, respectivamente.

**Figura 39** – Diagrama de interação entre  $k_0$ ,  $cor$  e  $N$ .



FONTE: Do autor.

**Figura 40** – Diagrama de interação entre  $h$ ,  $cor$  e  $N$ .



FONTE: Do autor.

### 7.8 Lei de evolução da corrosão

Por uma questão de simplicidade, a evolução do dano e das rotações plásticas foram descritas usando leis independentes do tempo. No entanto, isso não é possível para a variável interna de corrosão, pois forças químicas constantes produzem incrementos contínuos da corrosão. Assim, a nova lei de evolução precisa ser dependente do tempo. Sendo assim, é proposto o uso da seguinte expressão.

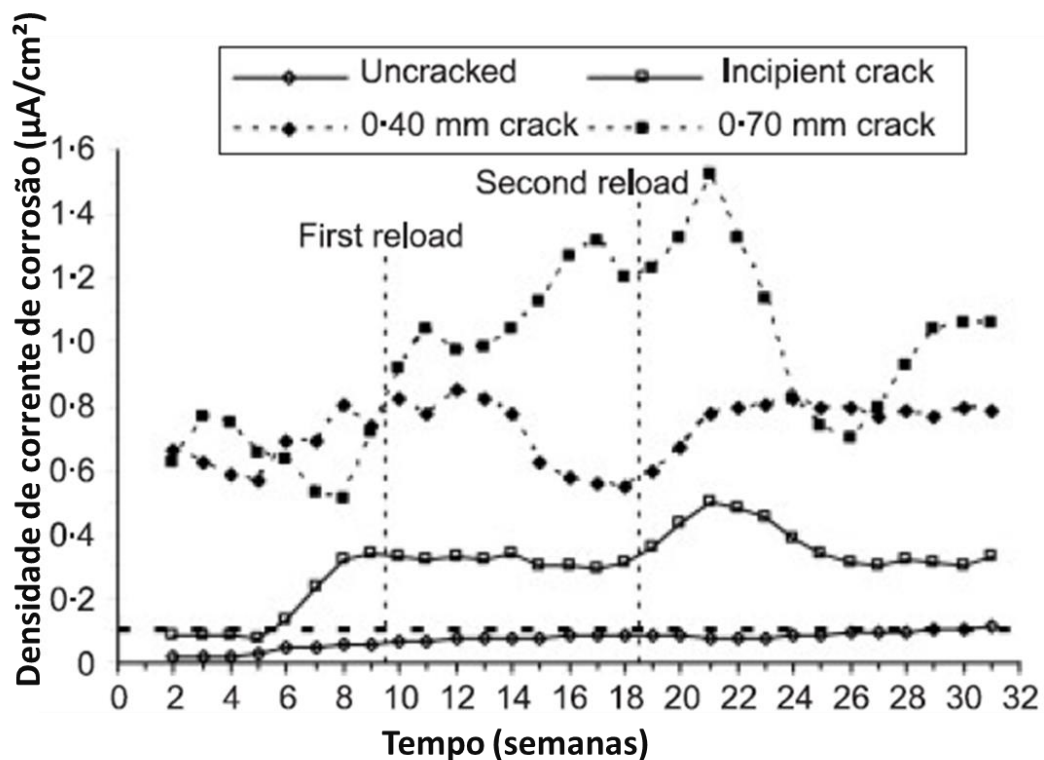
$$\dot{c}_i = \xi A_{ci} = O_i + \xi \left( \ln^2(1 - d_i) \frac{\partial q}{\partial c_i} - \phi_p^2(1 - d_i) \frac{\partial h}{\partial c_i} \right) \quad (\text{Equação 191})$$

Nota-se que para o valor  $\xi = 0$ , a evolução da corrosão é dada pela lei fenomenológica definida pela função  $O$ . Para valores positivos de  $\xi$ , a Equação 191 generaliza a lei incluindo a aceleração da corrosão devido a fissuração do concreto e/ou o escoamento da armadura. As derivadas  $\frac{\partial q}{\partial c_i}$  e  $\frac{\partial h}{\partial c_i}$  podem ser computadas numericamente por meio dos diagramas de interação apresentados nas Figuras 34 e 40, respectivamente.

### 7.9 Identificação experimental do parâmetro $\xi$

Otieno et al. (2010) realizaram um estudo mostrando a influência de diferentes larguras de fissuras na propagação da corrosão por pite. Na análise experimental, as fissuras foram produzidas em uma viga de concreto armado submetida a solicitações mecânicas em um teste de flexão de três pontos. Em seguida, os corpos de prova foram submetidos a uma solicitação química. A Figura 41 mostra os resultados experimentais relacionados a esse trabalho. Esta figura permite a identificação das densidades de corrente de corrosão para diferentes valores de estado de fissuração, representados, neste caso, pela largura de abertura da fissura.

**Figura 41** – Taxa de corrosão em uma viga de concreto armado.



FONTE:= Otieno et al. (2010).

Nesta seção é apresentado a identificação do parâmetro  $\xi$  considerando o caso particular de um elemento com fissuração do concreto, mas sem escoamento da armadura.

Seja  $i_0^{cl}$  a densidade de corrente de corrosão inicial para o elemento sem fissuras ( $d=0$ ) e  $i_{0dI}^{cl}$  a densidade de corrente de corrosão inicial associado a um valor específico de estado de fissuração ( $d_I$ ). O Anexo B detalha o procedimento para o cálculo de  $d_I$ .

A integração no tempo da lei de evolução da corrosão (Equação 191) permite o cálculo da densidade de corrente de corrosão em função do parâmetro  $\xi$ . Assim, obtém-se a seguinte expressão.

$$\left(\xi \frac{\partial q}{\partial c}\right) = \frac{0,0116Rel(i_{0dI}^{cl} - i_0^{cl})}{\bar{\phi} \cdot \ln^2(1 - d_I)} \quad (\text{Equação 192})$$

Em que  $0,0116Rel$  é o mesmo valor que o introduzido na seção 2.2.4 deste trabalho.

Portanto, a lei de evolução da corrosão para uma rótula inelástica é dada pela Equação 193.

$$\dot{c}_i = O_i + \frac{0,0116Rel(i_{0dI}^{cl} - i_0^{cl})}{\bar{\phi} \cdot \ln^2(1 - d_I)} \ln^2(1 - d_i) \frac{\partial q}{\partial c_i} \quad (\text{Equação 193})$$

Nota-se que os valores  $i_0^{cl}$ ,  $i_{0dI}^{cl}$  e  $d_I$  podem ser identificados em teste, como o representado pela Figura 41. Observa-se que para  $d_i=0$ , a evolução inicial da corrosão dada pela Equação 193 é governada pela densidade de corrente de corrosão  $i_0^{cl}$ . No caso particular de  $d_i=d_I$ , a evolução inicial da corrosão depende apenas de  $i_{0dI}^{cl}$ .

Para o caso da ocorrência simultânea do dano no concreto e do escoamento no aço, a lei de evolução da corrosão é dada pela Equação 194.

$$\dot{c}_i = O_i + \frac{0,0116Rel(i_{0dI}^{cl} - i_0^{cl})}{\bar{\phi} \cdot \ln^2(1 - d_I)} \left( \ln^2(1 - d_i) - \phi_p^2(1 - d_i) \frac{\partial h}{\partial c_i} / \frac{\partial q}{\partial c_i} \right) \quad (\text{Equação 194})$$

## 7.10 Verificação da admissibilidade termodinâmica do modelo proposto

A admissibilidade termodinâmica associada com as variáveis internas de dano e de rotação plástica já foram verificadas em seções anteriores. Logo, esta seção destina-se a realizar a verificação em relação a variável interna de corrosão.

Por meio da computação dos diagramas de interação de  $q(cor, N)$  e  $h(cor, N)$ , representados nas Figuras 34 e 40, respectivamente, é possível verificar que  $\frac{\partial q}{\partial c_i} > 0$  e  $\frac{\partial h}{\partial c_i} < 0$ . Isso faz com que a taxa de corrosão dada pela Equação 194 seja sempre maior ou igual a zero.

Sabendo, assim, que o parâmetro  $\xi$  é sempre positivo (Equação 192), pode-se afirmar que a equação de dissipação desenvolvida para termodinâmica de pórticos (Equação 135) é verificada. Essa verificação é escrita por meio da seguinte relação.

$$\{\dot{c}\} \geq 0 \text{ e } \xi > 0$$

$$\text{Se } \{\dot{c}\} = \xi\{A_c\} \Rightarrow \{A_c\} \geq 0 \quad (\text{Equação 195})$$

$$\text{Portanto: } \{A_\alpha\}^t \{\dot{V}_\alpha\} = \{A_c\}^t \{\dot{c}\} = \{A_c\}^t \xi \{A_c\} \geq 0$$

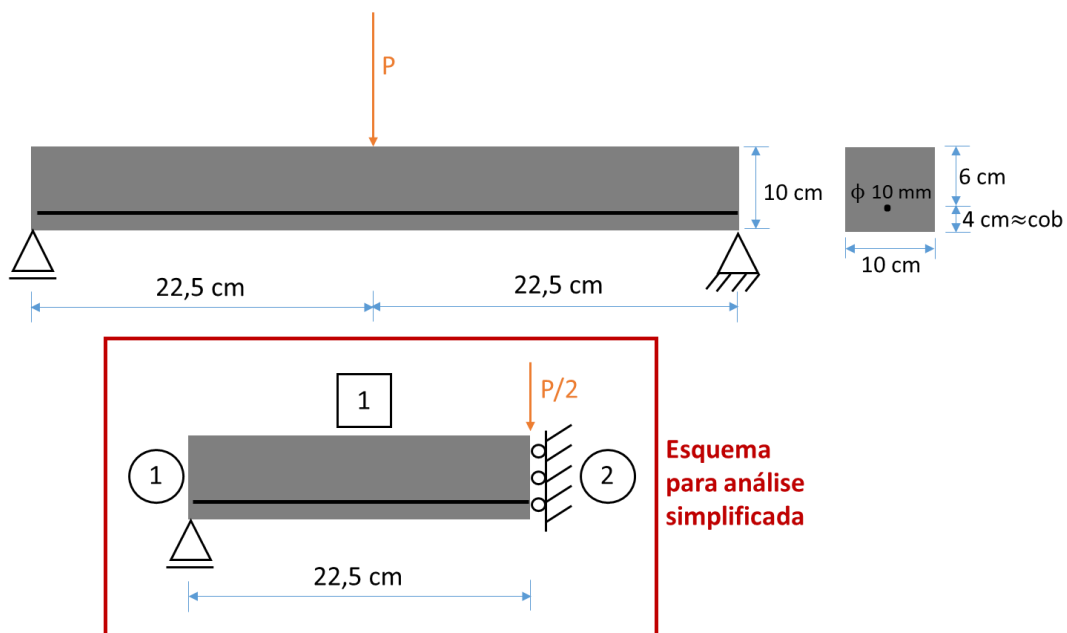
Logo, o modelo desenvolvido nesta pesquisa pode ser considerado termodinamicamente admissível.

## 8 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

### 8.1 Simulação de um teste de Otieno et al. (2010)

O objetivo desta seção foi reproduzir o experimento PC-55 de Otieno et al. (2010) por meio de uma simulação numérica utilizando o modelo de acoplamento corrosão-fissuração proposto neste trabalho. A estrutura a ser analisada é uma viga biapoiada de concreto armado, com resistência característica do concreto igual a 32,5 MPa e tensão de escoamento da armadura igual a 550 MPa. Essa viga pode ser verificada na Figura 42, abaixo.

**Figura 42** – Viga a ser analisada.

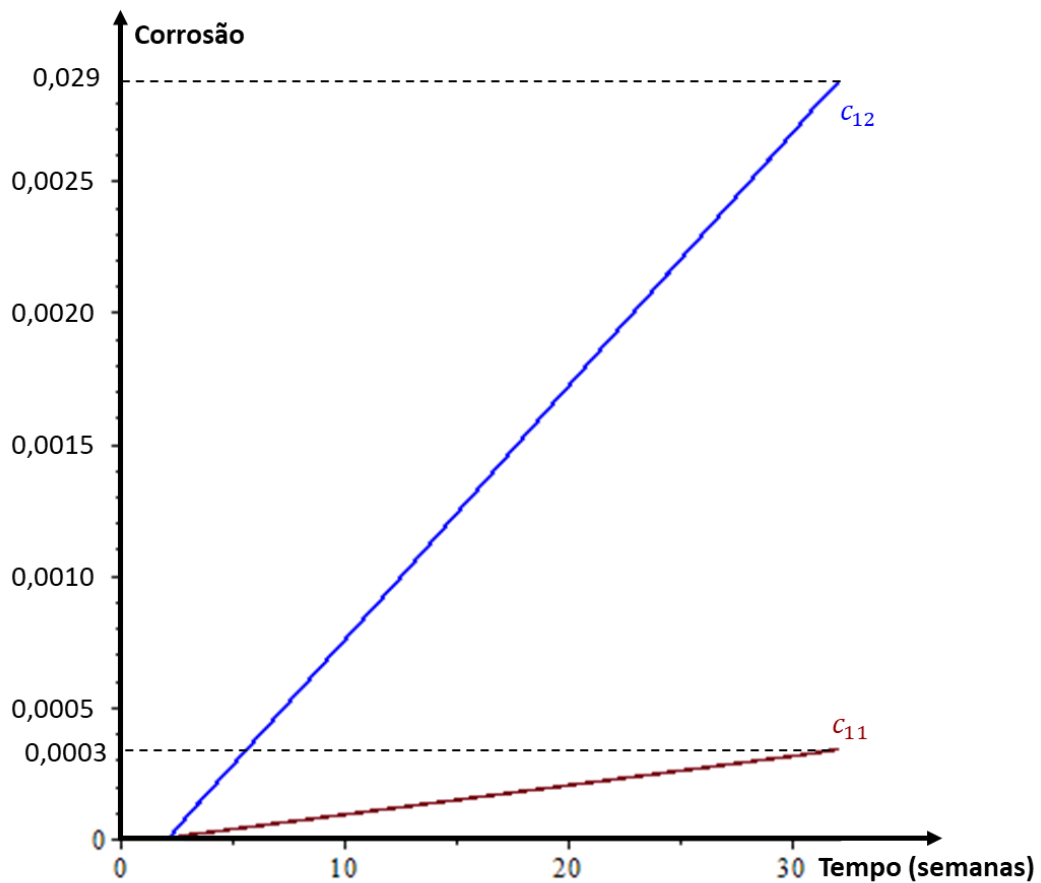


FONTE: Do autor.

Foi imposta uma carga  $P$  igual a 19,2 kN para gerar um dano de 0,28 na rótula 2, que corresponde a uma largura de abertura de fissura de aproximadamente 0,40 mm. Após a aplicação desta carga, a estrutura foi submetida a uma sollicitação química que gera uma densidade inicial de corrente de corrosão de  $0,1 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ , na rótula sem danificação (rótula 1), e  $0,87 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ , na rótula com danificação (rótula 2), conforme indicado na Figura 40. O tempo para iniciar a corrosão por pite na armadura foi de duas semanas.

Os resultados são mostrados nos gráficos da Figura 43, nos quais verificam-se o comportamento da evolução da corrosão na rótula 1 ( $c_{11}$ ) e rótula 2 ( $c_{12}$ ).

**Figura 43** – Simulação da corrosão para viga de concreto armado fissurada.

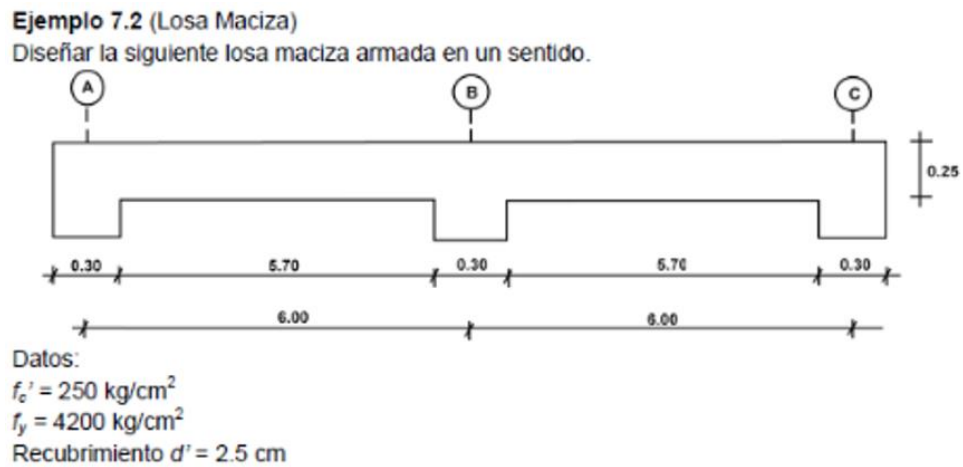


FONTE: Do autor.

## 8.2 Aplicação do modelo na análise de uma laje de concreto armado

Nesse item foi feita a análise de uma estrutura de concreto armado disponível na literatura. Optou-se por uma laje maciça de concreto armado disponibilizada por Fernandez e Carranza (2013). Essa estrutura pode ser verificada na Figura 44.

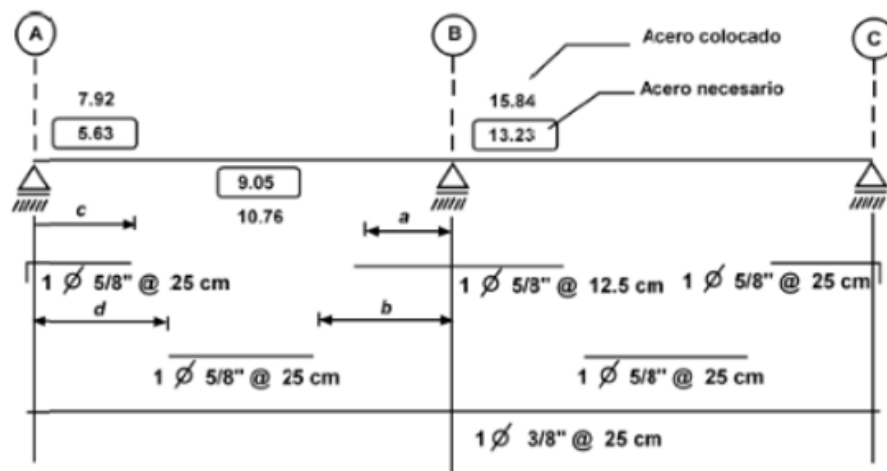
**Figura 44** – Laje a ser analisada.



FONTE: Fernandez e Carranza (2013).

Os resultados das armaduras e dos detalhamentos obtidos pelos autores estão evidenciados na Figura 45, a seguir.

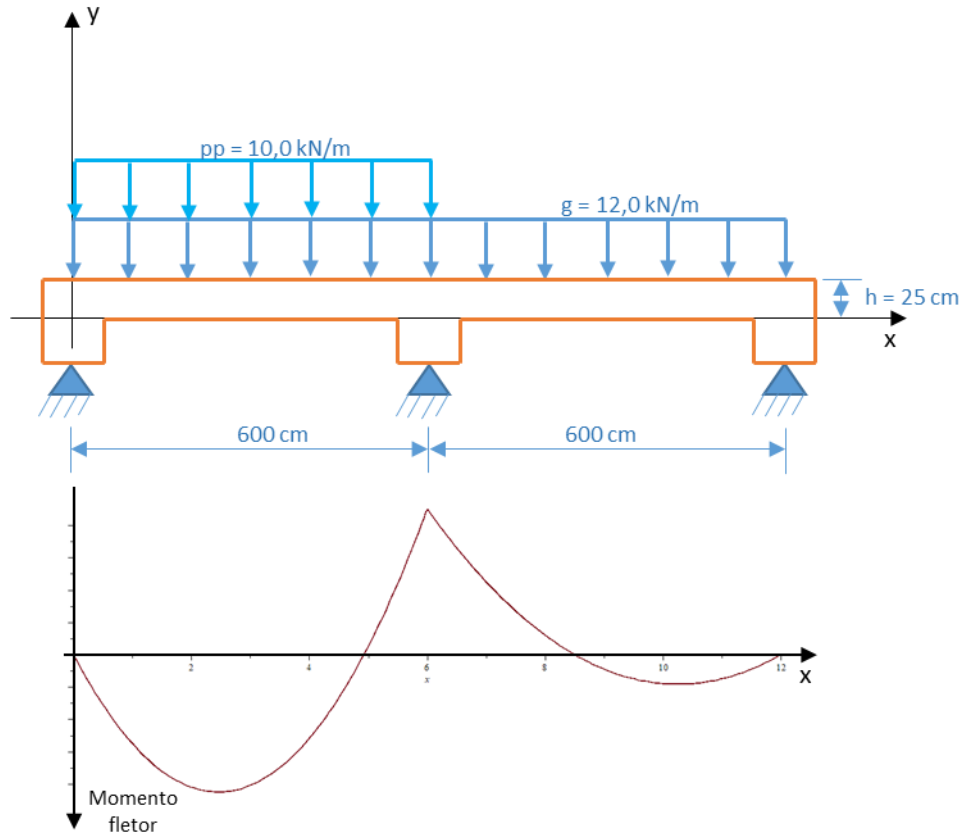
**Figura 45** – Armaduras calculadas para laje.



FONTE: Fernandez e Carranza (2013).

A estrutura foi submetida a um carregamento permanente ( $g=12,0 \text{ kN/m}$ ) e outro variável ( $pp=10,0 \text{ kN/m}$ ), como está representado na Figura 46. Ainda, sob a estrutura representada, verifica-se o diagrama de momento fletor concebido no limite elástico, tratando a laje com uma viga contínua de largura unitária (1 m).

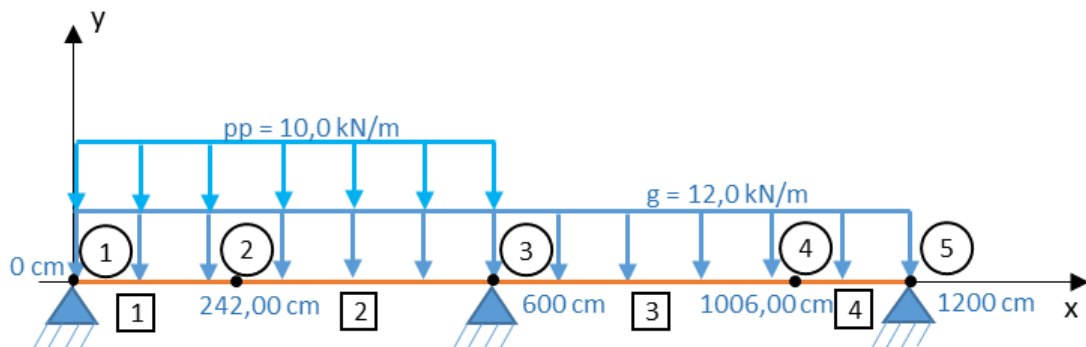
**Figura 46** – Esquema estático da laje (viga) e diagrama de momento fletor correspondente.



FONTE: Do autor.

O modelo ajustado à análise, discriminando os nós e os elementos, pode ser verificado na Figura 47. Os nós 1, 3 e 5 correspondem aos apoios da laje e os nós 2 e 4 às posições em que os valores dos momentos positivos foram máximos nos tramos, no limite elástico.

**Figura 47** – Modelo em elementos finitos.

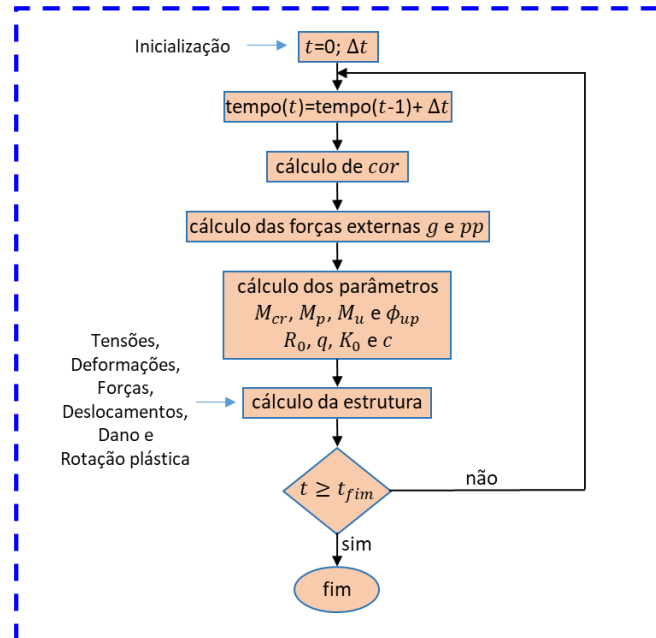


FONTE: Do autor.

O processamento da estrutura seguiu o fluxograma representado pela Figura 48.

**Figura 48** – Fluxograma esquemático de aplicação do modelo.

**Fluxograma esquemático**

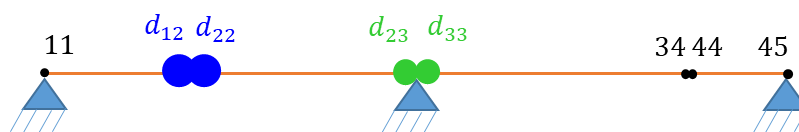


FONTE: Do autor.

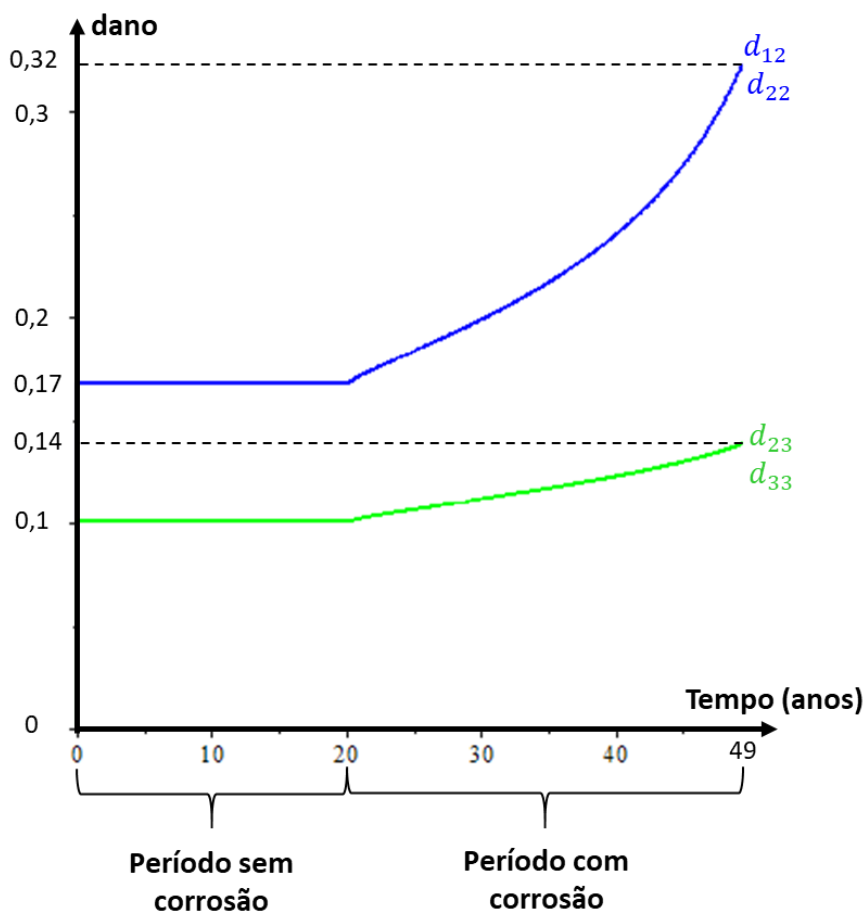
Para o desenvolvimento da análise, adotou-se que a corrosão inicia-se após 20 anos do término da estrutura. A evolução da corrosão no tempo respeita as formulações desenvolvidas no capítulo 7 deste trabalho.

Os resultados da análise são apresentados nas Figuras 49 a 52. A Figura 49 mostra o mapa de distribuição do dano para o fim da simulação que acontece após 49 anos, coincidindo com o tempo para o surgimento da primeira rótula plástica (rótulas 12 e 22), e a Figura 50 apresenta a evolução desses níveis de dano. Devido aos carregamentos mecânicos, ocorrem, primeiramente, a propagação de dano nas rótulas 23 e 33 e, posteriormente, nas rótulas 12 e 22.

**Figura 49** – Mapa de distribuição de dano na estrutura.



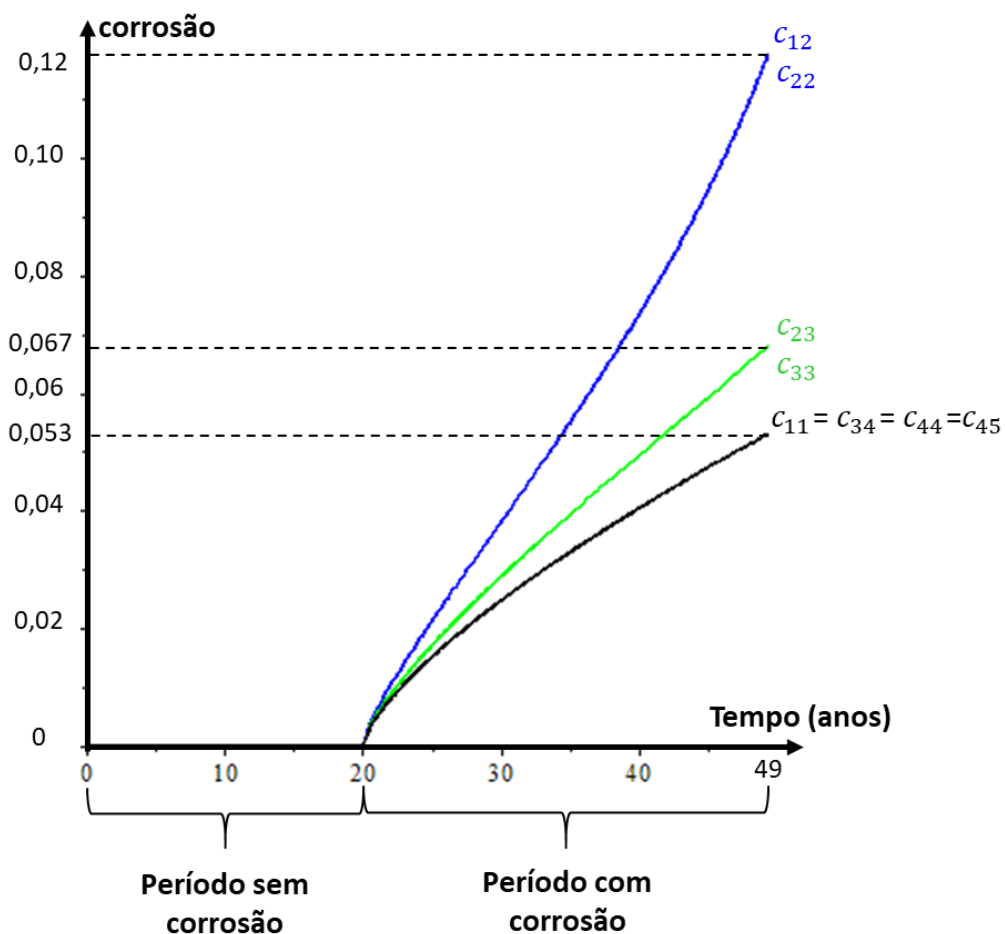
FONTE: Do autor.

**Figura 50** – Evolução do dano no tempo.

FONTE: Do autor.

A evolução da corrosão é apresentada na Figura 51. Pode-se notar o incremento das variáveis de estado de corrosão mais significativamente nas rótulas em que há dano, como era esperado teoricamente, haja vista que a fissuração facilita a penetração de agentes agressivos do meio (íons cloretos, neste caso).

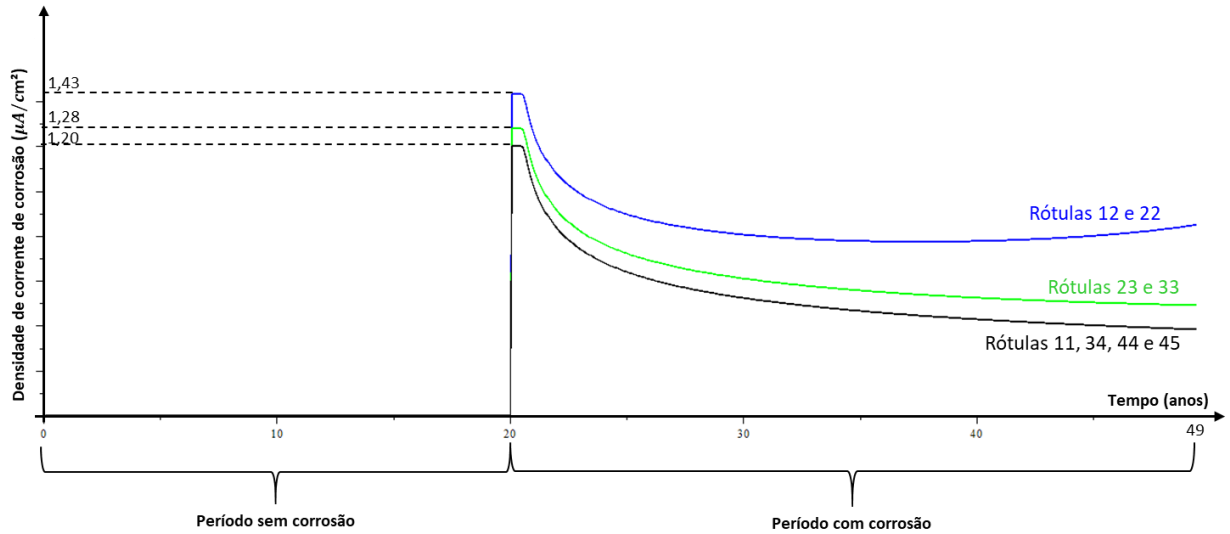
**Figura 51** – Evolução da corrosão no tempo.



FONTE: Do autor.

A evolução da densidade de corrente de corrosão ( $i_{cor}^{cl}$ ) é apresentada na Figura 52. Nota-se que a taxa de corrosão inicial é superior para todo tempo de corrosão. Por outro lado, verifica-se que para o caso em que haja propagação do dano (rótula 12 e 22, principalmente) a densidade de corrente de corrosão tende a subir com incrementos de dano.

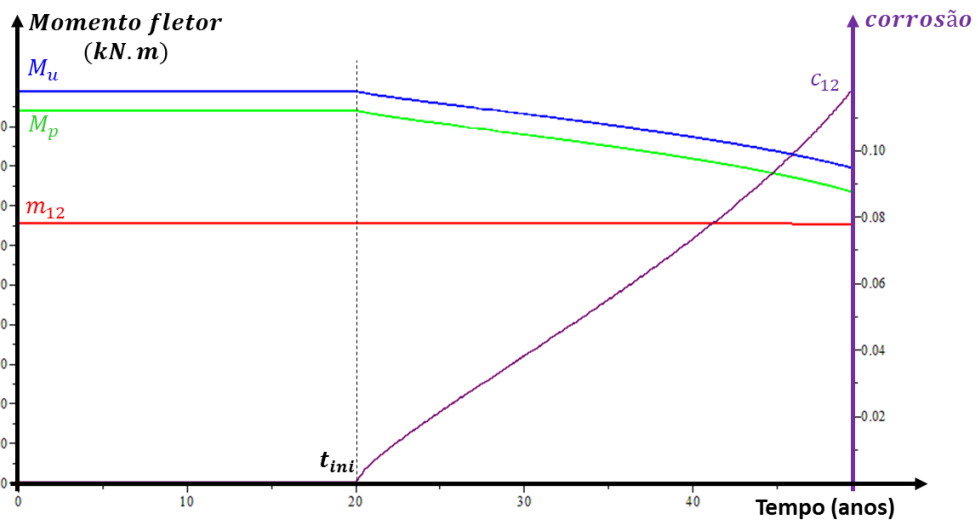
**Figura 52** – Simulação da taxa de corrosão para a laje de concreto armado.



FONTE: Do autor.

A seguir, é esboçado a Figura 53 que ilustra a evolução dos momentos resistentes (momento de plastificação  $M_p$  e momento último  $M_u$ ), momento de solicitação e nível de corrosão na rótula 12, que é o caso mais crítico do exemplo. Verifica-se, assim, a diminuição da capacidade resistente da seção a medida que o processo de corrosão-fissuração se desenvolve.

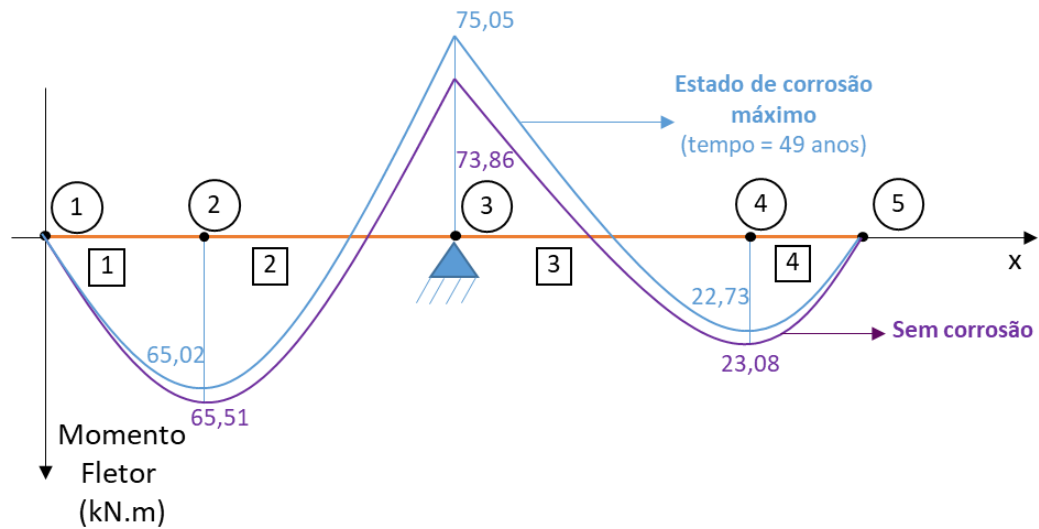
**Figura 53** – Evolução dos momentos resistentes ( $M_p$  e  $M_u$ ), momento solicitante ( $m_{12}$ ) e nível de corrosão ( $c_{12}$ ) no tempo, para o exemplo da laje.



FONTE: Do autor.

Por fim, é apresentado a Figura 54 que contém os diagramas de momento fletor para o caso de corrosão inexistente e para o caso de corrosão máxima, que surge após 49 anos de análise. Dessa forma, nota-se a redistribuição de esforços internos provocada pelas solicitações químicas após o tempo de início de corrosão (20 anos).

**Figura 54** – Diagramas de momento fletor para a laje sem corrosão e sob estado de corrosão máximo (após 49 anos).

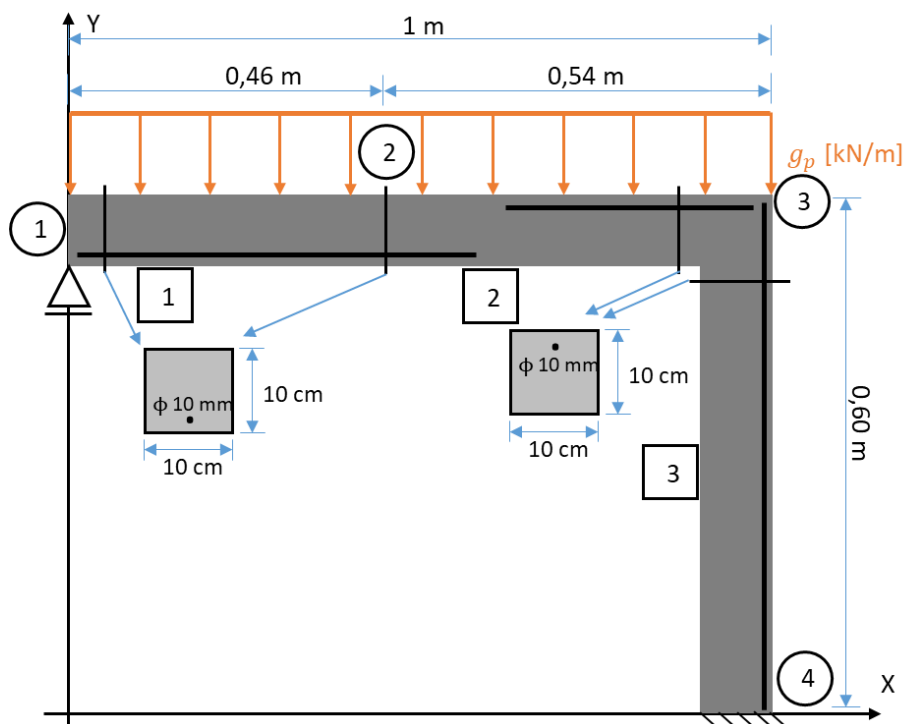


FONTE: Do autor.

### 8.3 Aplicação do modelo na análise de um pórtico de concreto armado

Nesta seção é apresentado a análise de um pórtico de concreto armado (Figura 55). Para esse exemplo, a resistência característica do concreto é 32,5 MPa e a tensão para escoamento nas barras de aço é 550 MPa, conforme o trabalho de Otieno et al. (2010).

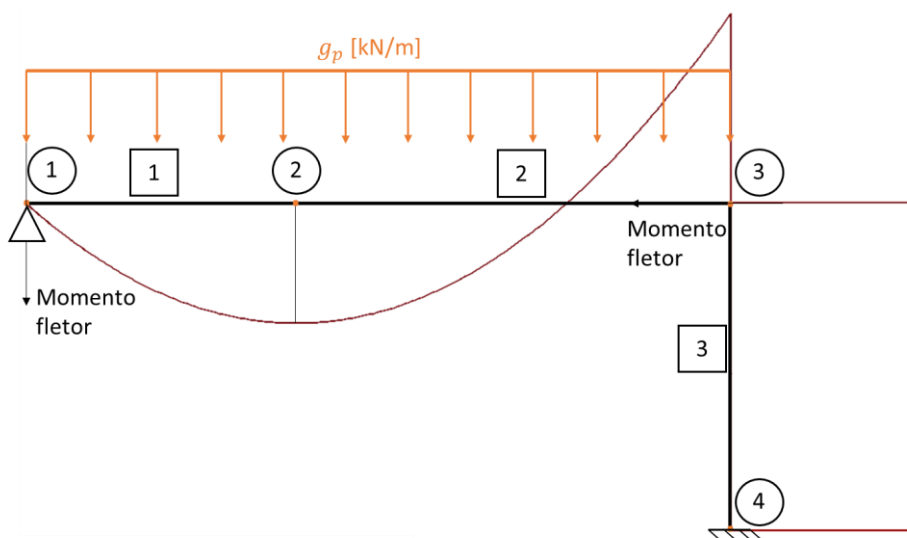
**Figura 55** – Pórtico a ser analisado.



FONTE: Do autor.

A estrutura foi, primeiramente, submetida a um carregamento distribuído permanente:  $g_p=19,0$  kN/m. A Figura 56 mostra a distribuição de momento fletor na estrutura para o limite elástico.

**Figura 56** – Diagrama de momento fletor para o pórtico no regime elástico.



FONTE: Do autor.

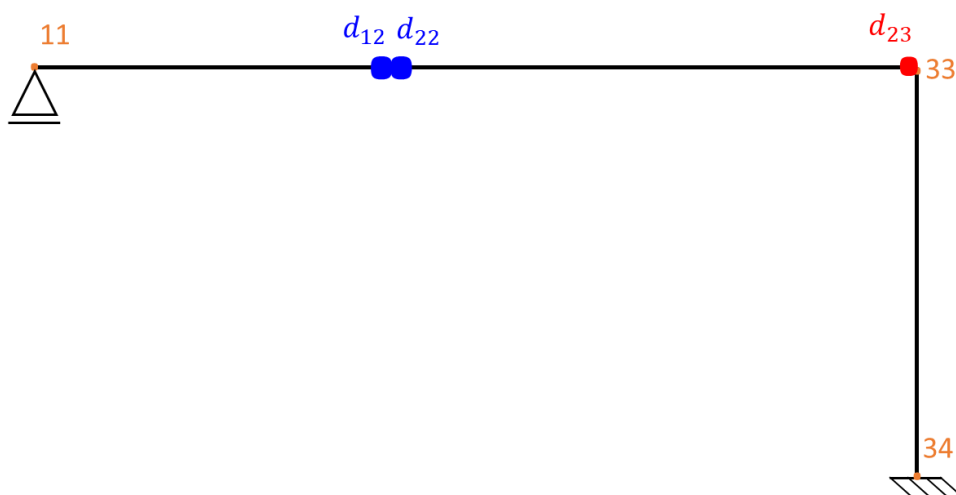
A malha de três elementos e quatro nós, que foi utilizada para a análise inelástica, também pode ser verificada na Figura 56. Os nós 1 e 4 correspondem aos suportes do pórtico, o nó 2 à posição onde o valor do momento positivo elástico é máximo na viga e o nó 3 à posição onde há a conexão entre viga e pilar.

O carregamento distribuído foi imposto à estrutura no primeiro dia e ficou constante durante o restante da simulação. Posteriormente, um processo de corrosão baseado nos resultados experimentais dados pela Figura 41 foi iniciado. Logo, o tempo de início da corrosão foi 2 semanas, a densidade de corrente de corrosão inicial para o estado de não danificação foi  $0,1 \mu\text{A}/\text{cm}^2$  e  $0,87 \mu\text{A}/\text{cm}^2$  para um dano de 0,28. Assumiu-se que a evolução da corrosão seguiu o modelo de Vu e Stewart (2000), Equação 19.

Analogamente ao exemplo apresentado na seção 8.2, a análise estrutural deste pórtico respeitou o fluxograma esquemático dado na Figura 48.

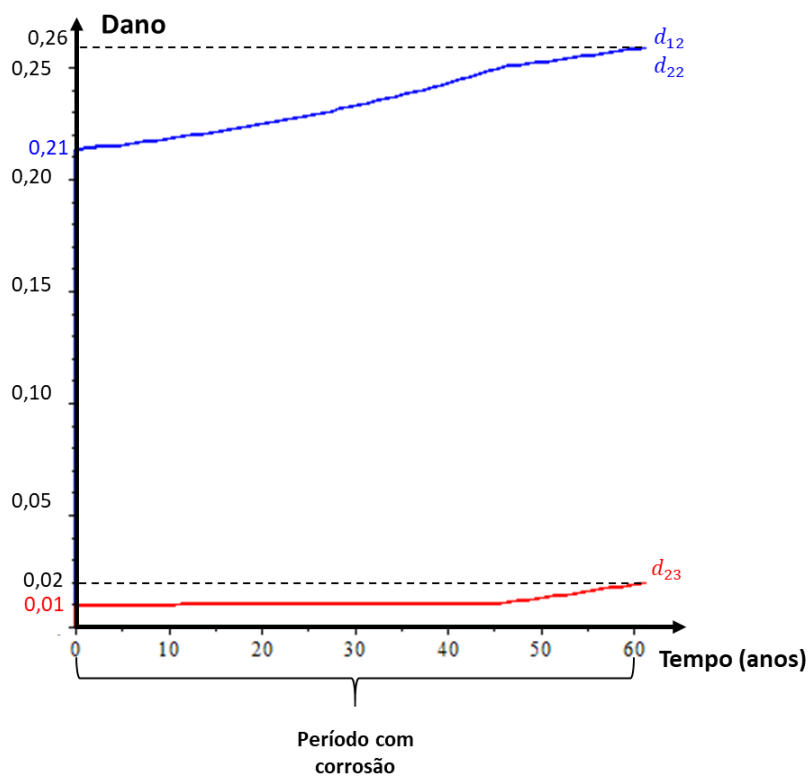
Os resultados da análise estão apresentados nas Figuras 57 a 61. A Figura 57 mostra o mapa de distribuição do dano para o tempo de término da simulação, que foi de 61 anos. A Figura 58 ilustra a evolução dos níveis de dano no tempo.

**Figura 57** – Mapa de distribuição de dano para o exemplo de pórtico.



FONTE: Do autor.

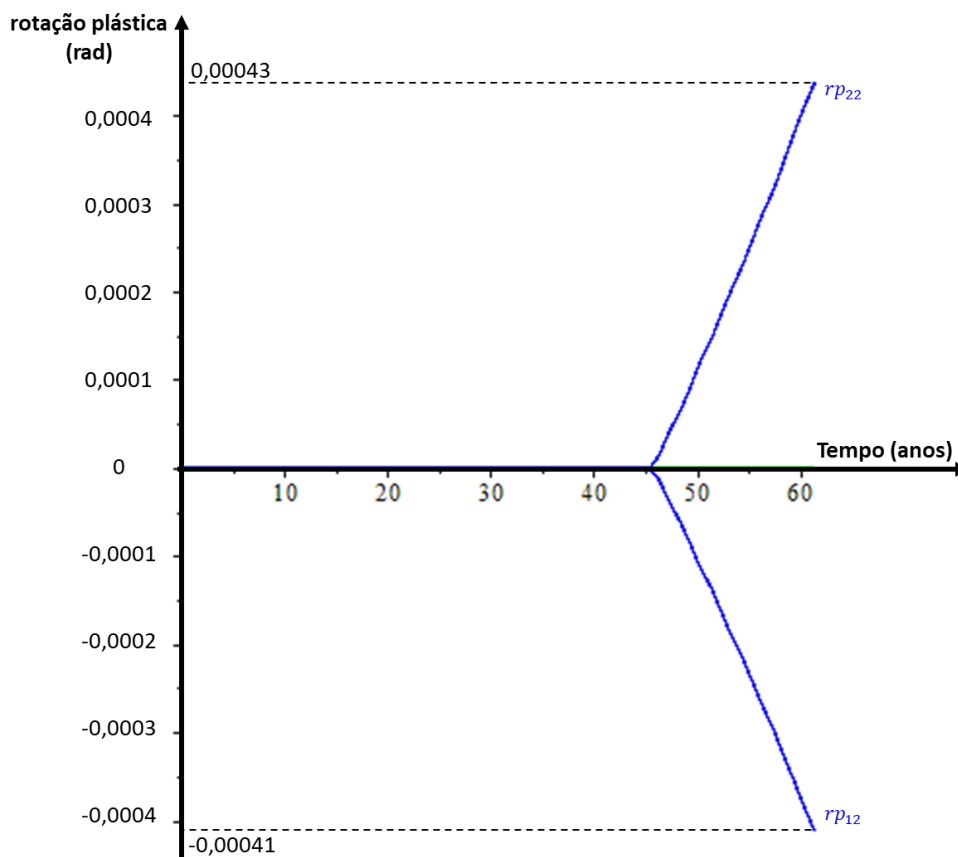
**Figura 58** – Evolução do dano no tempo para o exemplo de pórtico.



FONTE: Do autor.

Duas rotações plásticas foram ativadas devido a propagação da corrosão nas rótulas 12 e 22 da estrutura. Isso ocorreu após 46 anos do processo corrosivo e pode ser verificado na Figura 59, a seguir.

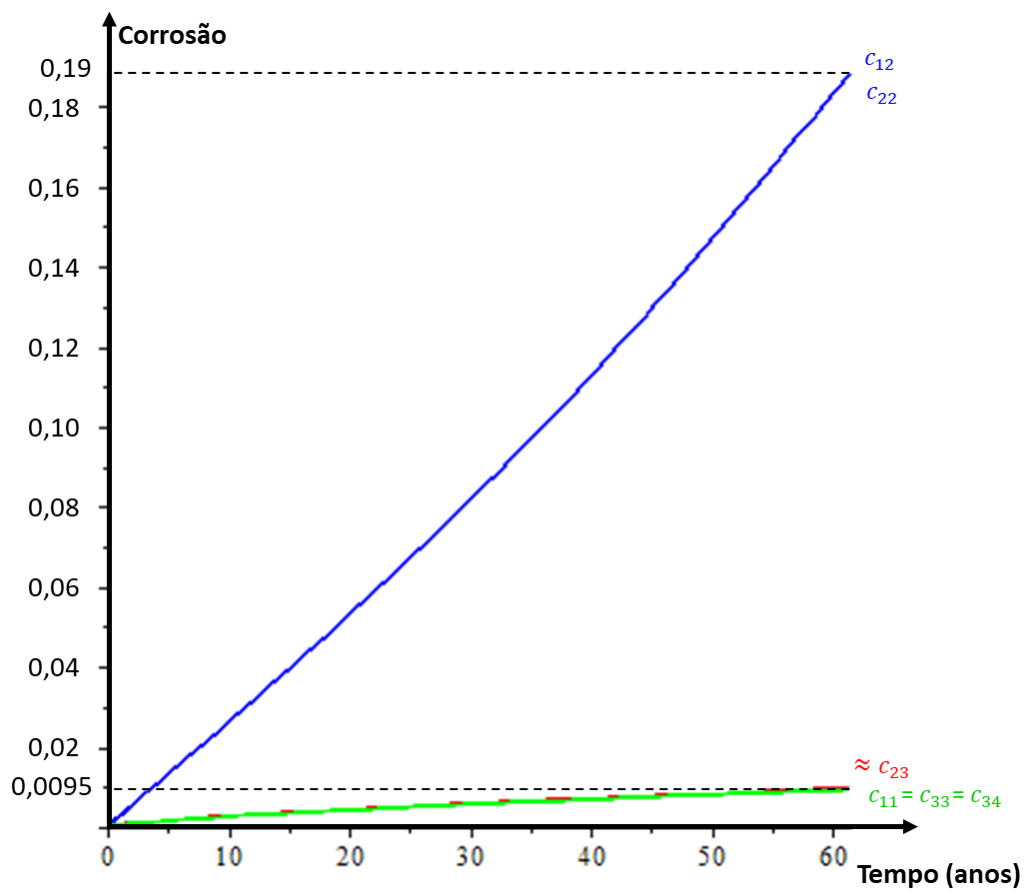
**Figura 59** – Evolução das rotações plásticas no tempo para o exemplo de pórtico.



FONTE: Do autor.

A evolução da corrosão é apresentada na Figura 60. Nota-se que a variável de estado de corrosão incrementa consideravelmente nas rótulas danificadas, analogamente ao exemplo apresentado na seção 8.2. Isso ocorre por causa da facilitação de penetração de íons cloretos do ambiente externo no elemento estrutura, através da propagação das fissuras no concreto.

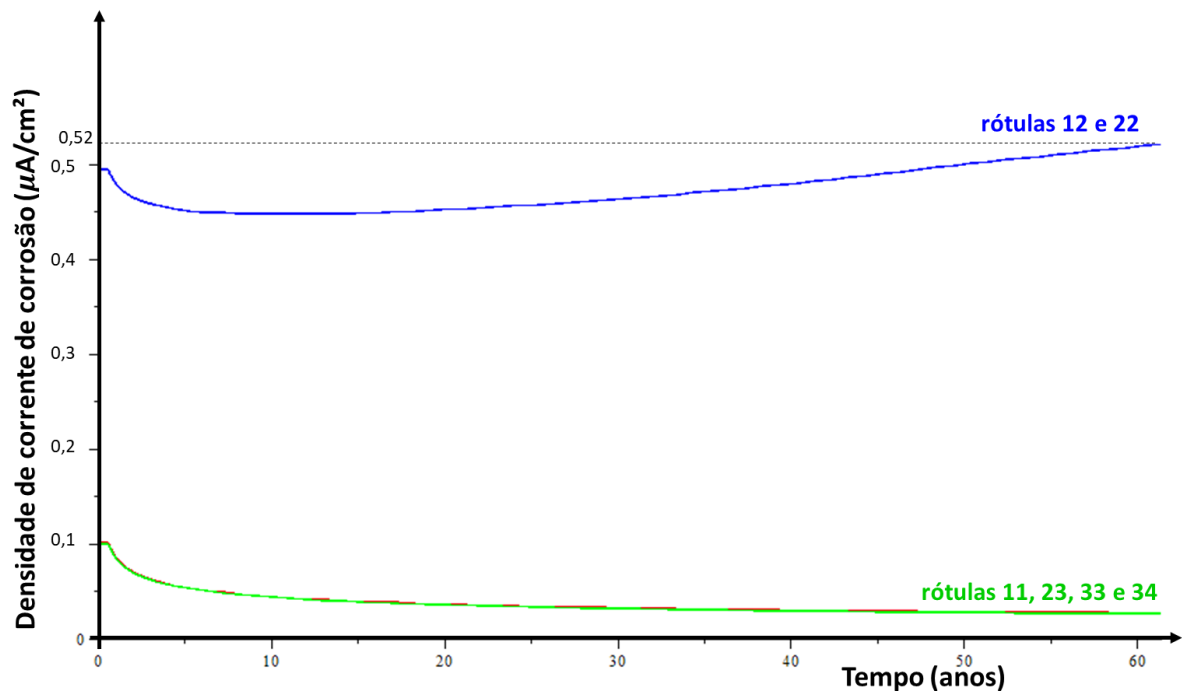
**Figura 60** – Evolução da corrosão no tempo para o exemplo de pórtico.



FONTE: Do autor.

A seguir, é apresentada a evolução da densidade de corrente de corrosão ( $i_{cor}^{cl}$ ) por meio da Figura 61.

**Figura 61** – Simulação das taxas de corrosão para o exemplo de pórtico.

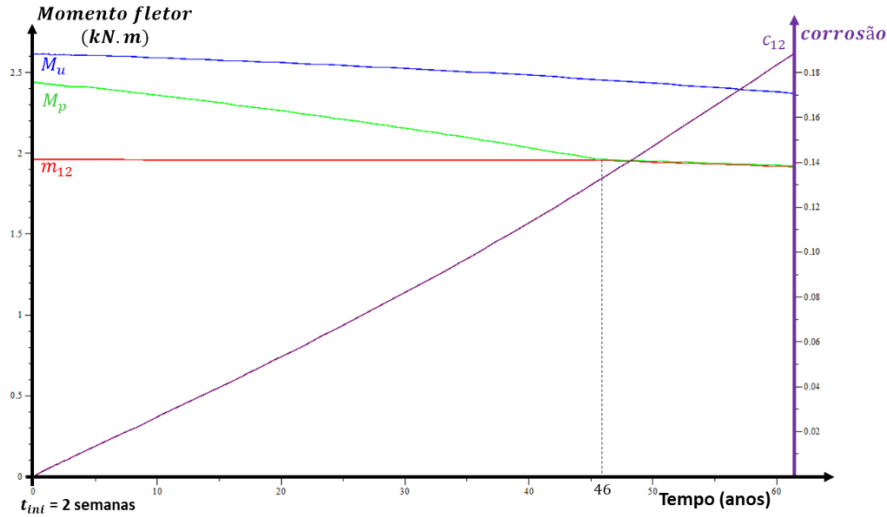


FONTE: Do autor.

Observa-se que os gráficos das densidades de corrente de corrosão das rótulas sem dano, ou com nível de dano muito baixo, seguem a evolução prevista pelo modelo de Vu e Stewart (2000). O comportamento é completamente diferente para as rótulas na seção de momento fletor positivo máximo. O novo modelo prevê uma aceleração da densidade de corrente de corrosão. Seu valor inicial não está, necessariamente, associado ao estado de não fissuração ( $0,10 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ ) nem ao de identificação ( $0,87 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ ), mas esses foram calculados pelo modelo, considerando que o dano produzido pela carga mecânica não era 0 ou 0,28.

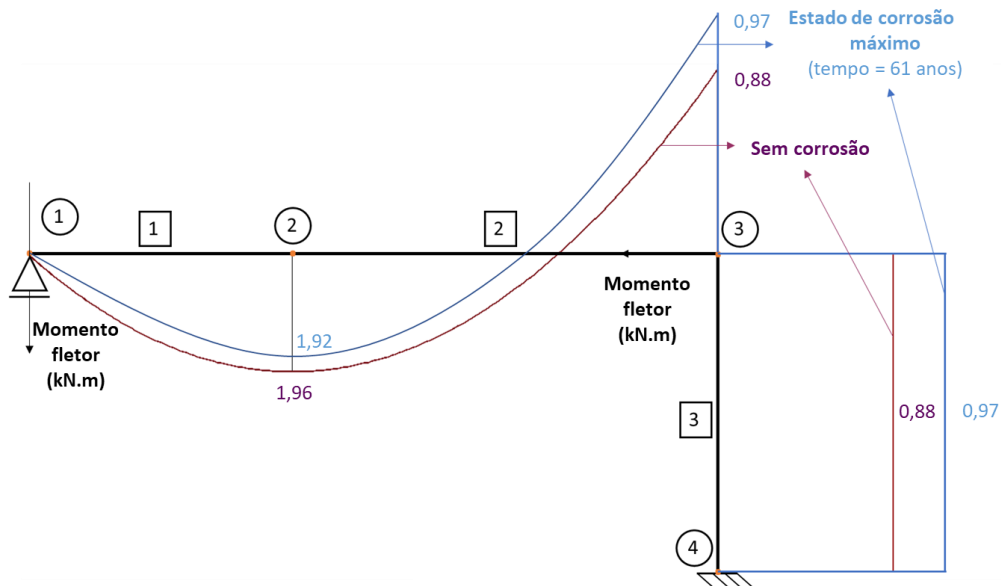
Na Figura 62 verifica-se a evolução dos momentos resistentes (momento de plastificação  $M_p$  e momento último  $M_u$ ), momento de solicitação e nível de corrosão na rótula 12, que é o caso mais crítico do exemplo. Assim, pode-se notar a diminuição da capacidade resistente da seção a medida que o processo de corrosão-fissuração se desenvolve. Destaca-se, ainda, que o momento de plastificação é significativamente penalizado de modo que atinge o mesmo valor da solicitação (no tempo de 46 anos) e gera a plastificação da rótula 12.

**Figura 62** – Evolução dos momentos resistentes ( $M_p$  e  $M_u$ ), momento solicitante ( $m_{12}$ ) e nível de corrosão ( $c_{12}$ ) no tempo, para o exemplo do pórtico.



Por fim, são apresentados os diagramas de momento fletor para o pórtico analisado (Figura 63). Percebe-se a redistribuição de esforços internos que ocorrem na estrutura, ocasionado pela ação das solicitações químicas no tempo.

**Figura 63** – Diagramas de momento fletor para o pórtico sem corrosão e sob estado de corrosão máximo (após 61 anos).



FONTE: Do autor.

## 9 CONCLUSÕES

Duas ideias principais são propostas neste trabalho. A primeira é um procedimento para a inclusão de qualquer lei de densidade de corrente de corrosão que possa ser apresentada como uma função  $O$  na análise de estruturas complexas. Sendo assim, como resultado, uma lei de corrosão específica pode ser transformada em valores de danos e valores de rotações plásticas, podendo ser estendida à previsão de vida útil. Para essa análise, apenas o modelo da estrutura e os históricos de solicitações termoquímicas e mecânicas são necessários. Ademais, o fim da vida útil de uma estrutura pode ser definido de várias maneiras, por exemplo, quando algum valor crítico de dano é atingido, ou, de forma conservadora, quando a plasticidade surgir na estrutura pela primeira vez. Além disso, o procedimento também permite uma estimativa do tempo para o colapso total devido ao advento de um mecanismo plástico. Os dois últimos exemplos deste trabalho mostraram como essa vida útil pode ser determinada.

A segunda ideia do trabalho é um procedimento racional para a generalização das leis de densidades de corrente de corrosão atuais, a fim de incluir o efeito da fissuração inicial do concreto e, também, da evolução dessa fissuração no tempo. Esse procedimento é baseado nos conceitos da termodinâmica de pórticos e no potencial de energia de Gibbs. Sendo assim, para a execução do modelo, apenas os valores da densidade de corrente de corrosão por pite para dois estados de dano são necessários.

No entanto, este trabalho não trata de aspectos importantes do fenômeno de corrosão. O primeiro deles é o tempo de iniciação que, no modelo desenvolvido, é considerado como dado do problema, pois a determinação desse tempo de iniciação de corrosão e a influência da fissuração do concreto é um fenômeno complexo, mas que possivelmente possa admitir uma análise termodinâmica como a utilizada neste estudo. O segundo aspecto é que o íon cloreto induzido não é o único mecanismo causador da corrosão em estruturas de concreto armado, outros igualmente importantes, como a carbonatação do concreto, foram completamente ignorados.

Por fim, o modelo desenvolvido neste trabalho apresenta algumas restrições quanto a aplicação. Uma delas está na utilização das expressões empíricas 183 a 187, passíveis de melhora quando utilizados uma base de dados experimental mais geral e um procedimento de interpolação mais sofisticado. Além disso, outra restrição foi o uso de modelos independentes do tempo para a deformação generalizada, plasticidade e dano. É verdade que, como esses fenômenos ocorrem em períodos muito longos, o tempo independente pode ser uma boa aproximação. No entanto, os parâmetros e valores usados nas simulações devem ser ajustados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT. NBR 6118-2014: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, Rio de Janeiro, n. 3, 2014.
- ALBUQUERQUE, A. T. D.; OTOCH, S. Proposta de classificação da agressividade do ambiente na cidade de Fortaleza. **Anais do 47º Congresso Brasileiro do Concreto - CBC2005**, Fortaleza, n. 47, p. 743-748, 2005.
- ALVA, G. M. S.; DEBS, A. L. H. D. C. E. Application of lumped dissipation model in nonlinear analysis of reinforced concrete structures. **Engineering Structures**, Santa Maria, v. 32, p. 974-981, Janeiro 2010.
- ALVES, A. M. C. Contribuição à análise da perspectiva de vida útil de estruturas em concreto face ao teor de cloreto registrado em Maceió-AL. **Dissertação de mestrado**, Maceió, 2007.
- AMORIM, D. L. N. D. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, São Carlos, v. 50, p. 4070–4079, Agosto 2013.
- AMORIM, D. L. N. D. F.; PROENÇA, S. P. B.; LOPEZ, J. F. Simplified modeling of cracking in concrete: Application in tunnel linings. **Engineering Structures**, São Carlos, v. 70, p. 23–35, Abril 2014.
- ANDRADE, C.; ALONSO, C.; MOLINA, F. J. Cover cracking as a function of bar corrosion: Part I- Experimental test. **Materials and Structures**, Madrid, v. 26, p. 453-464, 1993.
- ARAÚJO, F. A. D.; PROENÇA, S. P. B. Application of a lumped dissipation model to reinforced concrete structures with the consideration of residual strains and cycles of hysteresis. **Journal of mechanics of materials and structures**, v. 3, n. 5, p. 1011-1031, maio 2008.
- ARAÚJO, J. M. D. Curso de Concreto Armado, Rio Grande, v. 1, p. 1-2, 2014.
- BERTOLINI, L. et al. Transport Processes in Concrete. **Corrosion of Steel in Concrete**, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co, p. 20-50, 2004.
- BOCKRIS, J.; MINEVSKI, L. V. On the mechanism of the passivity of aluminum and aluminum alloys. **Journal of Electroanalytical Chemistry**, Cham, v. 349, n. 1-2, p. 375-414, 1993.
- BRANT, C. A. C.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Thermodynamic formulation of corrosion-cracking coupling in reinforced concrete frames. Artigo publicado em congresso: XL CILAMCE. Natal. 2019.
- BRANT, C. A. C.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Uma formulação termodinâmica do acoplamento corrosão-fissuração em estruturas de concreto armado. Artigo submetido em revista: IBRACON Structures and Materials Journal. 2019.
- CARSANA, M.; CANONICO, F.; BERTOLINI, L. Corrosion resistance of steel embedded in sulfoaluminate-based binders. **Cement and Concrete Composites**, Milano, n. 88, p. 211-219, 2018. ISSN doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2018.01.014.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. D. Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado. 4. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2015. p. 1-20.
- CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering**. 4. ed. San Francisco: Prentice Hall, 2012.

- CIPOLLINA, A. A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. **Computers e Structure**, Mérida, v. 54, p. 1113-1126, 1995.
- COELHO, K. O. Modelos numéricos aplicados à modelagem probabilística da degradação mecânica do concreto e corrosão de armaduras. São Carlos, 2017. p. 25-35.
- COELHO, K. O.; LEONEL, E. D.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Analysis of complex RC structures subjected to chemo-mechanical loadings. **EASEC-15**, Xi'an, p. 1-7, Outubro 2017.
- CUEVAS, G.; FERNANDEZ, R. **Aspectos fundamentales del concreto reforzado**. 4. ed. Balderas: Limusa, 2005.
- DAHMER, R. R. **Modelos para análise de estruturas submetidas a solicitações químico-mecânicas**. Universidade Federal da Integração Latino-Americana. Foz do Iguaçu, p. 15-16. 2018.
- DU, Y. G.; CLARK, L. A.; CHAN, A. H. C. Residual capacity of corroded reinforcing bars. **Magazine of Concrete Research**, Edinburgh, v. 57, n. 3, p. 135–147, April 2005.
- DURACRETE. Statistical quantification of the variables in the limit state function, The European Union - Brite EuRam III, Project No. BE95-137, Document R9., 2000.
- FERNANDEZ, E. O. B.; CARRANZA, S. A. D. **Concreto armado: aspectos fundamentales**. 2.ed, 2013.
- FIGUEIREDO, E. P.; MEIRA, G. **Reinforcement corrosion of concrete structures**. Mérida: Asociación Latinoamericana de Control de Calidad, Patología y Recuperación de la Construcción: ALCONPAT Internacional, v. 6, 2013.
- FLÓREZ-LÓPEZ, J. Frame analysis and continuum damage mechanics. **European Journal of Mechanics**, Paris, v. 17, n. 2, p. 269-283, 1998.
- FLÓREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames**. Hershey: IGI Global, 2015. 1-83 p.
- GENTIL, V. **Corrosão**. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1996.
- KEARSLEY, E. P.; JOYCE, A. Effect of corrosion products on bond strength and flexural behaviour of reinforced concrete slabs. **Journal of the South African Institution of Civil Engineering**, Pretoria, v. 56, n. 2, p. 21–29, August 2014.
- KOCH, G. H. Historic congressional study: corrosion cost and preventive strategies in the United States. A suplement to materials performance, NACE International., Houston, 2002.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. Mechanics of solid materials. New York: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1990. p. 37-65.
- LIU, Y.; WEYERS, R. E. Modelling the time-to-corrosion cracking in chloride contaminated reinforced concrete structures. **ACI Materials Journal**, 1998.
- LUBARDA, V. A. On thermodynamic potentials in linear thermoelasticity. **International Journal of Solids and Structures**, San Diego, n. 41, p. 7377–7398, August 2004.
- MACDONALD, D. D. The point defect model for the passive state. **Journal of the Electrochemical Society**, v. 139, n. 12, p. 3434-3449, 1992.

- MARANTE, M. E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Three-dimensional analysis of reinforced concrete frames based on lumped damage mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, Mérida, v. 40, p. 5109–5123, 2003.
- MCCAFFERTY, E. **Introduction to Corrosion Science**. New York: Springer , 2010.
- MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concrete: Microstructure, Properties and Materials**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2006.
- MEIRA, G. R.; PADARATZ, I. J. Efeito do distanciamento em relação ao mar na agressividade por cloretos. **Instituto Brasileiro de Concreto - 44º Congresso Brasileiro**, João Pessoa, n. 44, 2002.
- NEVILLE, A. M. **Propriedades do Concreto**. 5. ed. São Paulo, 2016.
- NGALA, V. T.; PAGE, C. L. EFFECTS OF CARBONATION ON PORE STRUCTURE AND DIFFUSIONAL PROPERTIES OF HYDRATED CEMENT PASTES. **Cement and Concrete Research**, Birmingham, v. 27, n. 7, p. 995-1007, 1997.
- OTIENO, M. B.; ALEXANDER, M. G.; BEUSHAUSEN, H. D. Corrosion in cracked and uncracked - influence of crack width, concrete quality and crack reopening. **Magazine of concrete research**, Cape Town, v. 6, n. 62, p. 393-404, 2010.
- OTIENO, M.; BEUSHAUSEN, H.; ALEXANDER, M. Prediction of corrosion rate in RC structures - a critical review. **Modelling corroding concrete structures**, Spain, 2011.
- OTIENO, M.; BEUSHAUSEN, H.; ALEXANDER, M. Prediction of corrosion rate in reinforced concrete structures – a critical review and preliminary results. **Materials and Corrosion**, Rondebosch, v. 63, n. 9, p. 777-790, 2012.
- PAPADAKIS, V. G. et al. **Concrete repair, rehabilitation and protection**. London: E&FN Spon, 1996.
- PAPADAKIS, V. G.; FARDIS, M. N.; VAGENAS, C. G. Effect of composition, environmental factors and cement-lime mortar coating on concrete carbonation. **Materials and Structures**, Patras, v. 25, n. 5, 1992.
- PARK, R.; PAULAY, T. **Reinforced concrete structures**. Christchurch, 1975.
- PITUBA, J. J. D. C. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo, EESC-USP (Dissertação de mestrado). São Carlos, 1998.
- POSSAN, E. Modelagem da carbonatação e previsão de vida útil de estruturas de concreto em ambiente urbano, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Escola de Engenharia (Tese de doutorado), Porto Alegre, p. 66, 2010.
- POWELL, H. G. Theory for nonlinear elastic structures. *Journal of the Structural Division*, ST12, 2687–2701, 1969.
- PROENÇA, S. P. B. Fundamentos da termodinâmica dos sólidos. Apostila: introdução à mecânica do dano e fraturamento. EESC-USP, São Carlos, p. 10, 2000.
- RAJASANKAR, J.; IYER, N. R.; PRASAD, A. M. Modelling inelastic hinges using CDM for nonlinear analysis of reinforced concrete frame structures. *Computers and Concrete*, Chennai, v. 6, n. 4, p. 319-341, Maio 2009.
- SCHIEBL, P.; LAY, S. **Predictive and Optimised Life Cycle Management**. New York: Taylor e Francis, 2006.

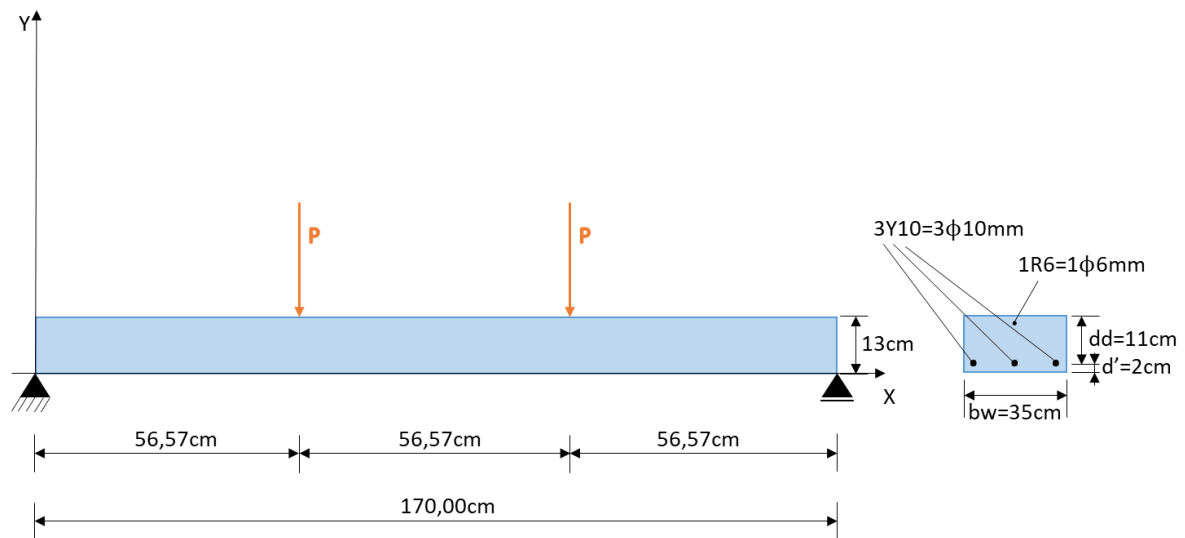
- SHAW, B. A.; KELLY, R. G. What is corrosion? **The Electrochemical Society Interface**, p. 24-26, 2006.
- STEWART, M. G. Spatial variability of pitting corrosion and its influence on structural fragility and reliability of RC beams in flexure. **Structural Safety**, p. 454, 2004.
- STEWART, M. G.; WANG, X.; NGUYEN, M. N. Climate change impact and risks of concrete infrastructure deterioration. **Engineering Structures**, New South Wales, v. 33, p. 1326-1337, 2011.
- SWALIN, R. A. **Thermodynamics of solids**. 2. ed. Minneapolis: Wiley-VCH, 1972.
- TAYLOR, H. F. W. **Cement chemistry**. 2. ed. London: Thomas Telford, 1997.
- TUUTTI, K. **Corrosion of steel in concrete**. stockholm: Swedish Cement and Concrete Research Institute, 1982.
- VU, K. A. T.; STEWART, M. G. Structural reliability of concrete bridges including improved chloride-induced corrosion models. **Structural Safety**, Newcastle, v. 22, p. 313-333, 2000.
- YALCYN, H.; ERGUN, M. The prediction of corrosion rates of reinforcing steels in concrete, 1996.
- YU, S. Y. et al. Chloride ingress into aluminum prior to pitting corrosion an investigation by XANES and XPS. **Journal of the Electrochemical Society**, v. 147, n. 8, p. 952-2958, 2000.

## ANEXO A - MODELAGEM DO COMPORTAMENTO MOMENTO POR CURVATURA

O objetivo deste anexo é representar o comportamento momento por curvatura de vigas (ou lajes) de concreto armado sujeitas a carregamentos mecânicos e a efeitos da corrosão por pite. Os efeitos considerados são a perda da área efetiva e a penalização da tensão das armaduras de aço. Para isso, levaram-se em conta os trabalhos experimentais de Du et al. (2005) e Kearsley e Joyce (2014).

Em um primeiro momento, buscou-se representar o comportamento dos gráficos de momento por curvatura experimentais obtidos por Kearsley e Joyce (2014). A Figura A.1 ilustra a estrutura a ser estudada (viga biapoiada), com 1,70 m de comprimento e seção transversal de 35 cm (base) por 13 cm (altura). A armadura longitudinal de tração é composta de 3 barras com 10 mm de diâmetro e a armadura longitudinal de compressão por uma barra de 6 mm de diâmetro. O cobrimento adotado por Kearsley e Joyce (2014) foi 2 cm e não havia armaduras transversais. As duas forças importas ( $P$ ) fazem com que o maior momento fletor aconteça no trecho central da viga e sem influência de esforços cortantes.

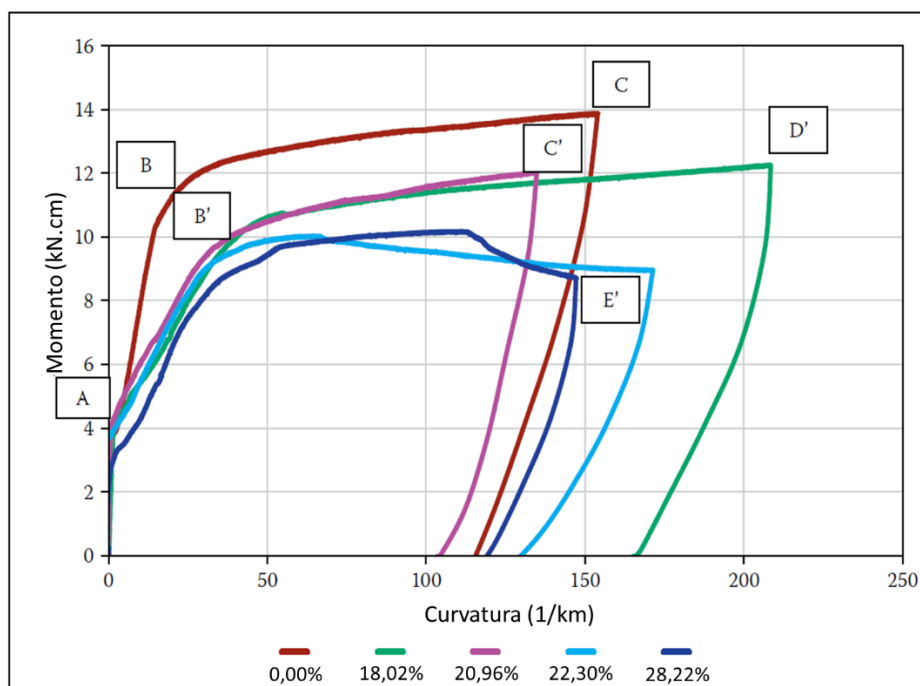
**Figura A.1** – Viga ou laje modelo para confecção dos gráficos momento por curvatura.



FONTE: Adaptado de Kearsley e Joyce (2014).

Os níveis de corrosão por pite submetidos à viga foram 18,02%, 20,96%, 22,30% e 28,22%. A Figura A.2 representa o comportamento momento por curvatura experimental obtido por Kearsley e Joyce (2014), considerando o respectivo nível de corrosão.

**Figura A.2** – Gráfico de momento por curvatura experimental.



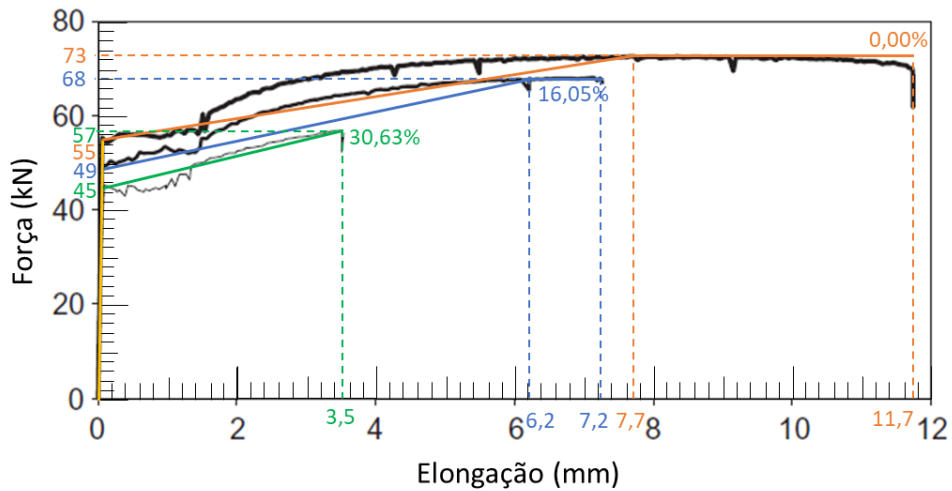
FONTE: Kearsley e Joyce (2014).

A respeito da Figura A.2, de Kearsley e Joyce (2014), vale destacar os trechos que são descritos pelos gráficos, sendo eles: 0-A, estrutura sem fissuras; A-B e A-B', estrutura com propagação de fissuras no concreto, mas sem escoamento do aço; B-C, B'-C' e B'-D', estrutura com armadura escoando (encruamento da armadura); e B'-E', estrutura com armadura escoando, mas com perda de capacidade resistente da seção (amolecimento da armadura).

#### Trabalho para obtenção das tensões e das deformações no aço em função da corrosão

Como ponto de partida, necessitou-se conhecer a função de tensão nas barras de aço, que é dependente da magnitude da deformação e do nível de corrosão das barras. Para isso, buscou-se modelar o comportamento do aço de acordo com resultados experimentais obtidos por Du, Clark e Chan (2005). A Figura A.3 demonstra o comportamento experimental da força por alongação nas barras de aço sujeitas a três diferentes níveis de corrosão por pite (0,00%, 16,05% e 30,63%).

**Figura A.3** – Gráfico da força de tração por alongação obtido experimentalmente.



FONTE: Adaptado de Du et al. (2005).

De acordo com a Figura A.3, houve uma simplificação dos gráficos como verifica-se através das linhas retas (coloridas). Essa simplificação foi necessária para confecção dos gráficos de tensão por deformação das barras de aço. Segundo trabalho de Du et al. (2005), as barras foram ensaiadas, isoladamente, sob teste de tração simples, sendo que o diâmetro original das barras era de 16 mm, o comprimento de 45 cm e o módulo de elasticidade de 213 GPa.

Dessa forma, através da utilização das Equações A.1, A.2 e A.3, pôde-se montar a Tabela A.1, a seguir. Essa tabela organiza os dados para a confecção dos gráficos de tensão por deformação das barras de aço, de modo simplificado.

$$f_s = \frac{F}{\frac{\pi\phi^2}{4}} \quad \text{(Equação A.1)}$$

$$\varepsilon_s = \frac{\delta - \delta_0}{\delta_0} \quad \text{(Equação A.2)}$$

$$\varepsilon_s = \frac{f_s}{E_s} \quad \text{(Equação A.3)}$$

Em que  $f_s$  é a tensão no aço,  $F$  a força axial submetida na barra,  $\phi$  o diâmetro da barra de aço (16 mm),  $\varepsilon_s$  a deformação na barra,  $\delta$  o comprimento da barra alongada,  $\delta_0$  o comprimento original da barra e  $E_s$  o módulo de elasticidade do aço (213 GPa).

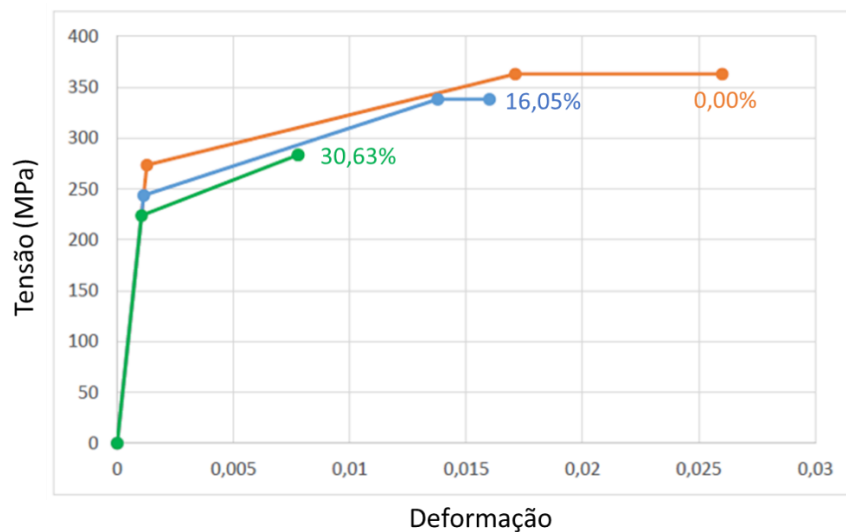
**Tabela A.1** – Resultados das tensões e deformações a partir das forças e elongações.

	$F$ (kN)	$\delta$ (mm)	$f_s$ (Mpa)	$\varepsilon_s$
0,00%	0	0	0	0
	55	-	273,5476	0,001284
	73	7,7	363,0722	0,017111
	73	11,7	363,0722	0,026
16,05%	0	0	0	0
	49	-	243,706	0,001144
	68	6,2	338,2043	0,013778
	68	7,2	338,2043	0,016
30,63%	0	0	0	0
	45	-	223,8116	0,001051
	57	3,5	283,4947	0,007778
	57	3,5	283,4947	0,007778

FONTE: Do autor.

A partir dos valores de tensões e deformações obtidos na Tabela A.1 pôde-se confeccionar os gráficos de tensão por deformação para as barras de aço sujeitas a níveis de corrosão de 0,00%, 16,05% e 30,63%, conforme a Figura A.4 a seguir.

**Figura A.4** – Comportamento de tensão por deformação das barras de aço submetidas a níveis de corrosão de 0,00%, 16,05% e 30,63%.



FONTE: Do autor.

Fazendo uma parametrização dos dados obtidos por Du et al. (2005) para as condições do trabalho desenvolvido por Kearsley e Joyce (2014), no qual a tensão de escoamento do aço média foi de 456 MPa (sem corrosão) e o módulo de elasticidade de 213 GPa, efetuaram-se os ajustes mediante a Tabela A.2. Vale destacar que, como hipótese do desenvolvimento, os valores críticos de deformação não sofreram alteração.

Ainda, segundo Du, Clark e Chan (2005), a tensão no aço após o início do escoamento pode ser formulada em função da porcentagem de área de aço corroída ( $f_{cor} = f_{cor}(\frac{A_{cor}}{A_0})$ ), sendo dada pela seguinte equação (Equação A.4). Dessa forma, esse efeito também foi levado em consideração no processo de confecção da Tabela A.2.

$$f_{cor} = \left(1 - 0,5 \frac{A_{cor}}{A_0}\right) f_s \quad \text{(Equação A.4)}$$

Em que  $A_{cor}$  é a área de aço corroída e  $A_0$  é a área de aço original da seção transversal da armadura.

**Tabela A.2** – Resultados de tensões ( $f_y$  e  $f_u$ ) e deformações ( $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_{up}$  e  $\epsilon_u$ ) parametrizados e considerando os níveis de corrosão de 0,00%, 16,05% e 30,63%.

cor	Valores Originais		Valores Parametrizados	
	$f_s$ (Mpa)	$\epsilon_s$	$f_s$ (Mpa)	$\epsilon_s$
0,00%	0	0	0	0
	273,5476	0,001284	$f_y=456$	$\epsilon_y=0,001284$
	363,0722	0,017111	$f_u=605,2364$	$\epsilon_{up}=0,017111$
	363,0722	0,026	$f_u=605,2364$	$\epsilon_u=0,026$
16,05%	0	0	0	0
	243,706	0,001144	$f_y=396,5044$	$\epsilon_y=0,001144$
	338,2043	0,013778	$f_u=550,2511$	$\epsilon_{up}=0,013778$
	338,2043	0,016	$f_u=550,2511$	$\epsilon_u=0,016$
30,63%	0	0	0	0
	223,8116	0,001051	$f_y=342,684$	$\epsilon_y=0,001051$
	283,4947	0,007778	$f_u=434,0664$	$\epsilon_{up}=0,007778$
	283,4947	0,007778	$f_u=434,0664$	$\epsilon_u=0,007778$

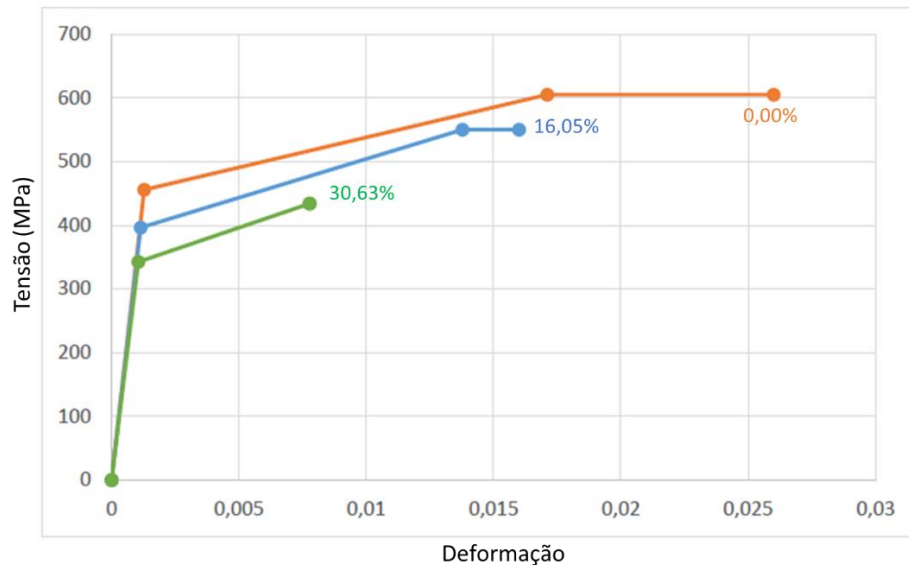
FONTE: Do autor.

Em que  $f_y$  é a tensão de escoamento do aço,  $f_u$  a tensão última do aço,  $\epsilon_y$  a deformação de escoamento do aço,  $\epsilon_{up}$  deformação de escoamento para o início da tensão última

(deformação plástica imediatamente após trecho de encruamento do aço) e  $\epsilon_u$  é a deformação última do aço.

Assim, a partir da Tabela A.2, confeccionaram-se os gráficos das tensões por deformações de modo parametrizado, conforme está representado na Figura A.5.

**Figura A.5** – Comportamento de tensão por deformação das barras de aço submetidas a níveis de corrosão de 0,00%, 16,05% e 30,63%, parametrizados.



FONTE: Do autor.

Dessa maneira montou-se uma nova tabela, relacionando aos respectivos níveis de corrosão ( $cor$ ), a tensão de escoamento ( $f_y$ ), a deformação plástica para o início da tensão última ( $\epsilon_{up}$ ), a deformação última ( $\epsilon_u$ ) e a tensão última ( $f_u$ ). Essa está representada na Tabela A.3 a seguir.

**Tabela A.3** – Valores de níveis de corrosão, tensões e deformações.

Cor	$f_y$ (Mpa)	$E_{up}$	$E_u$	$f_u$ (Mpa)
0,0000	456	0,017111	0,026	605,2364
0,1605	396,5044	0,013778	0,016	550,2511
0,3063	342,684	0,007778	0,007778	434,0664

Fonte: Do autor.

Assim, a partir da organização dessa tabela, pôde-se fazer quatro regressões lineares, obtendo as funções  $f_y(cor)$ ,  $\epsilon_{up}(cor)$ ,  $\epsilon_u(cor)$  e  $f_u(cor)$ , que estão descritas nas Equações A.5, A.6, A.7 e A.8, a seguir.

$$f_y(cor) = (1 - 0.81cor) f_{y0} \quad (\text{Equação A.5})$$

$$\varepsilon_{up}(cor) = (1 - 1.72cor) \varepsilon_{up0} \quad (\text{Equação A.6})$$

$$\varepsilon_u(cor) = (1 - 2.30cor) \varepsilon_{u0} \quad (\text{Equação A.7})$$

$$f_u(cor) = (1 - 0.90cor) f_{u0} \quad (\text{Equação A.8})$$

Em que  $f_{y0}$  é a tensão de escoamento,  $\varepsilon_{up0}$  é a deformação última no patamar de encruamento,  $f_{u0}$  é a tensão última e  $\varepsilon_{u0}$  é a deformação última na barra de aço. Todos esses dados correspondem ao estado de não corrosão da armadura.

Como limitação, deve-se destacar que essas funções estão fundamentadas em experimentos que utilizam dados de níveis de corrosão variando de 0 a 30%, de tal forma que não é aconselhável extrapolar esse domínio.

#### Simulação dos gráficos momento por curvatura

Os dados iniciais para a criação dos gráficos de momento por curvatura são os parâmetros da geometria e dos materiais. Esses são:  $f_{ck}=27,04\text{MPa}$ ,  $b_w=35\text{ cm}$ ,  $h=13\text{cm}$ ,  $y_t=6,5\text{cm}$ ,  $dd=11\text{cm}$ ,  $E_s=213\text{GPa}$ ,  $f_{yk}=456\text{MPa}$ ,  $d'=2\text{cm}$ ,  $f_{ct}=7,2\text{MPa}$ ,  $E_c=11492\text{MPa}$ ,  $\varepsilon_{cu}=0,004$  e  $\varepsilon_{c0}=0,002$ .

Para a modelagem foi utilizado o software Maple. Ademais, também como dados de entrada, inseriram-se os níveis de corrosão através das variáveis de corrosão:  $cor=0,00$ ,  $cor=0,1802$ ,  $cor=0,2096$ ,  $cor=0,2230$  e  $cor=0,2822$ , respeitando exatamente os níveis de corrosão tratados no trabalho de Kearsley e Joyce (2014).

Essas variáveis de corrosão foram levadas em consideração no cálculo das tensões  $f_y$  e  $f_u$ , como já descrito, e, também, na obtenção das áreas efetivas de aço ( $A_{ef}$ ), conforme a Equação A.9.

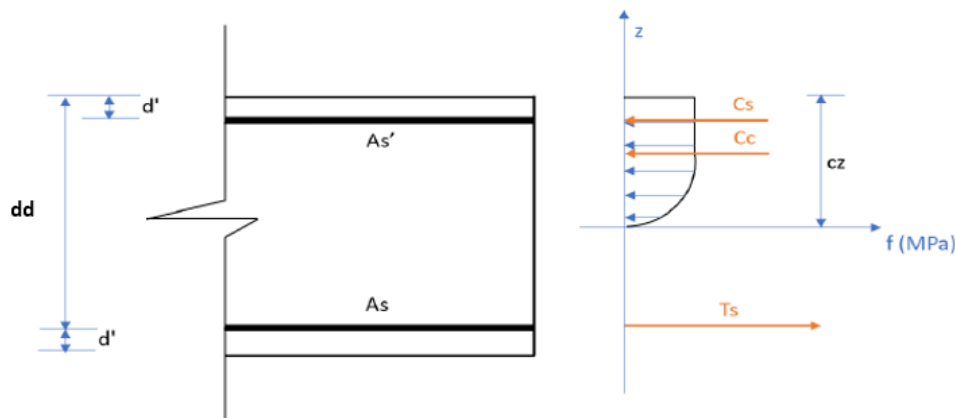
$$A_{ef} = \frac{A_0}{\pi} \begin{cases} Kcor + \pi - \arcsin 2cor\sqrt{-cor^2 + 1}, & \text{se } cor < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Kcor + \arcsin 2cor\sqrt{-cor^2 + 1}, & \text{se } cor \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (\text{Equação A.9})$$

$$Kcor = -4cor^2 \arcsin \sqrt{-cor^2 + 1} + 2cor\sqrt{-cor^2 + 1}$$

Em que  $A_0$  é a área da seção transversal da barra íntegra (para  $cor=0,00$ ).

A equação principal, para a modelagem da relação momento por curvatura, é obtida pela somatória de esforços axiais iguais a zero e é aplicada à seção transversal de interesse. O esquema ilustrado através da Figura A.6 mostra a distribuição de tensões, simplificada, na seção transversal e as forças relacionadas, para o estágio 3 (Estado Limite Último).

**Figura A.6** – Equilíbrio de esforços na seção transversal intermediária da viga, para o estágio 3 de cálculo.



FONTE: Do autor.

Desprezou-se quaisquer efeitos das forças normais devido as solicitações externas ( $n=0$ ). Assim, formulou-se a Equação A.10 a seguir.

$$C_c + C_s = T_s \quad (\text{Equação A.10})$$

Em que  $C_c$  é a força de compressão no concreto,  $C_s$  é a força de compressão no aço (armadura negativa) e  $T_s$  é a força de tração no aço (armadura positiva).

Para o cálculo da força de compressão no concreto ( $C_c$ ) foram efetuadas as seguintes operações.

$$C_c = \int_0^{cz} b_w f_c(z) dz \quad (\text{Equação A.11})$$

$$f_c(z) = \begin{cases} f_{ck} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right] & \text{se } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c0} \\ f_{ck} & \text{se } \varepsilon_c > \varepsilon_{c0} \end{cases} \quad (\text{Equação A.12})$$

$$\varepsilon_c = \chi Z \quad (\text{Equação A.13})$$

Para o cálculo da força de compressão na armadura negativa ( $C_s$ ) buscou-se solucionar as seguintes equações.

$$C_s = A_s' f_s' \quad (\text{Equação A.14})$$

$$f_s' = \begin{cases} E_s \varepsilon_s' & \text{se } \varepsilon_s' \leq \varepsilon_y \\ \left[ \frac{f_y(\varepsilon_{up} - \varepsilon_s') + f_u(\varepsilon_s' - \varepsilon_y)}{(\varepsilon_{up} - \varepsilon_y)} \right] & \text{se } \varepsilon_y < \varepsilon_s' \leq \varepsilon_{up} \\ f_u & \text{se } \varepsilon_{up} < \varepsilon_s' \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (\text{Equação A.15})$$

$$\varepsilon_s' = \chi(cz - d') \quad (\text{Equação A.16})$$

Por último, equacionou-se o procedimento para o cálculo da força resistida pelas barras de aço tracionadas ( $T_s$ ), o que pode ser verificado através das Equações A.17, A.18 e A.19.

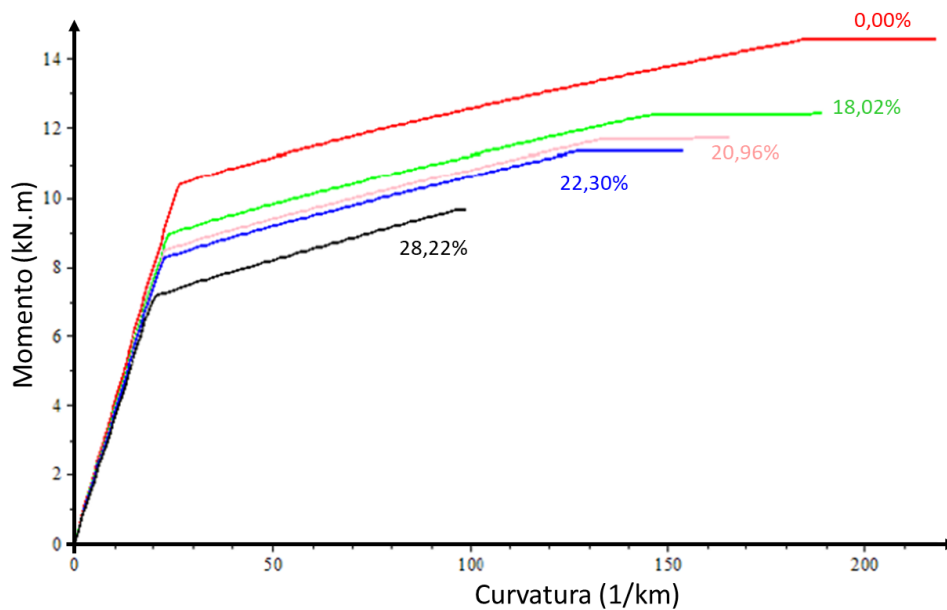
$$T_s = A_s f_s \quad (\text{Equação A.17})$$

$$f_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \text{se } \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\ \left[ \frac{f_y(\varepsilon_{up} - \varepsilon_s) + f_u(\varepsilon_s - \varepsilon_y)}{(\varepsilon_{up} - \varepsilon_y)} \right] & \text{se } \varepsilon_y < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{up} \\ f_u & \text{se } \varepsilon_{up} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (\text{Equação A.18})$$

$$\varepsilon_s = \chi(dd - cz) \quad (\text{Equação A.19})$$

Dessa forma, através de uma rotina de cálculo destinada a solucionar a Equação A.10, pôde-se simular os gráficos de momento por curvatura, conforme está representado na Figura A.7.

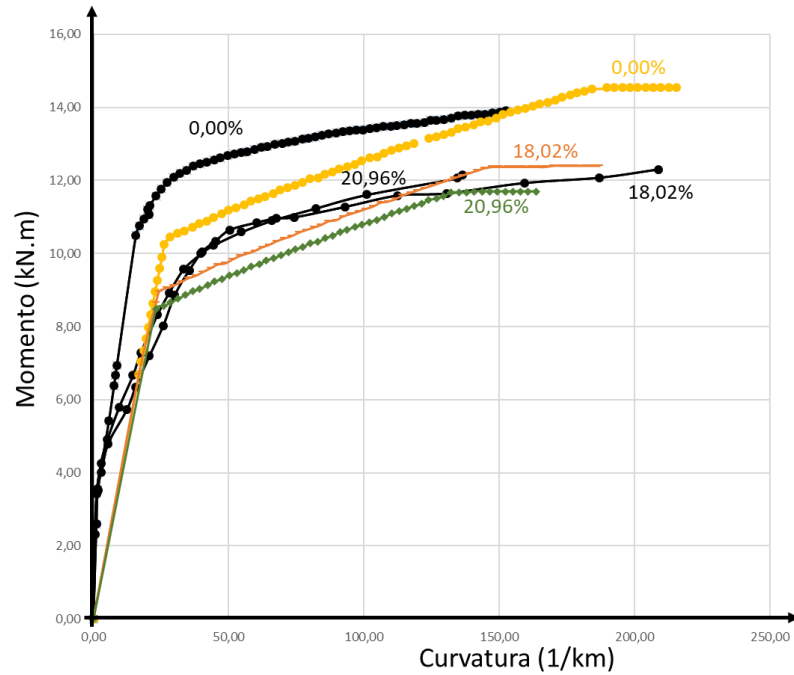
**Figura A.7** – Resultados da modelagem momento por curvatura considerando efeitos da corrosão na armadura longitudinal (0,00%, 18,02%, 20,96%, 22,30% e 28,22%).



FONTE: Do autor.

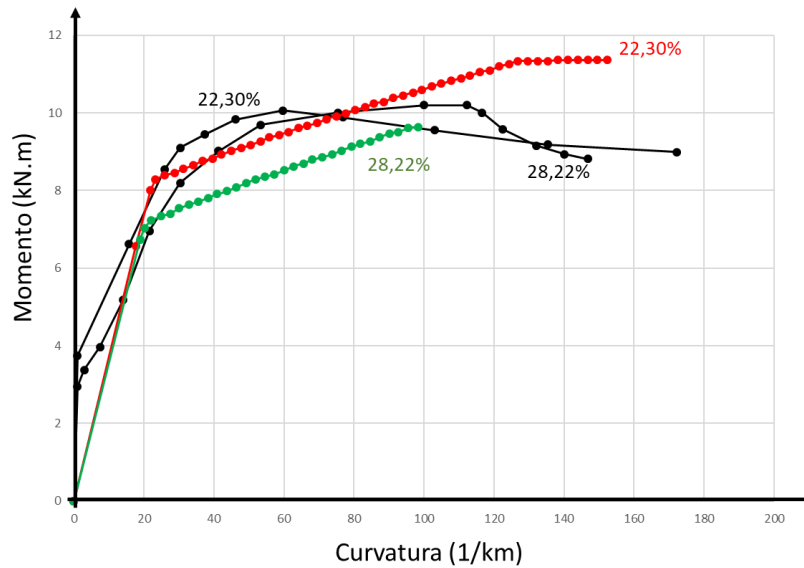
Sobrepondo os gráficos obtidos com a modelagem e os gráficos experimentais de Kearsley e Joyce (2014), para melhor visualizar a aproximação dos comportamentos, confeccionaram-se os gráficos representados pela Figura A.8 (contempla níveis de corrosão: 0,00%, 18,02% e 20,96%) e pela Figura A.9 (contempla níveis de corrosão: 22,30% e 28,22%).

**Figura A.8** – Sobreposição dos gráficos da simulação e experimentais (0,00%, 18,02% e 20,96%).



FONTE: Do autor.

**Figura A.9** – Sobreposição dos gráficos da simulação e experimentais (22,30% e 28,22%).



FONTE: Do autor.

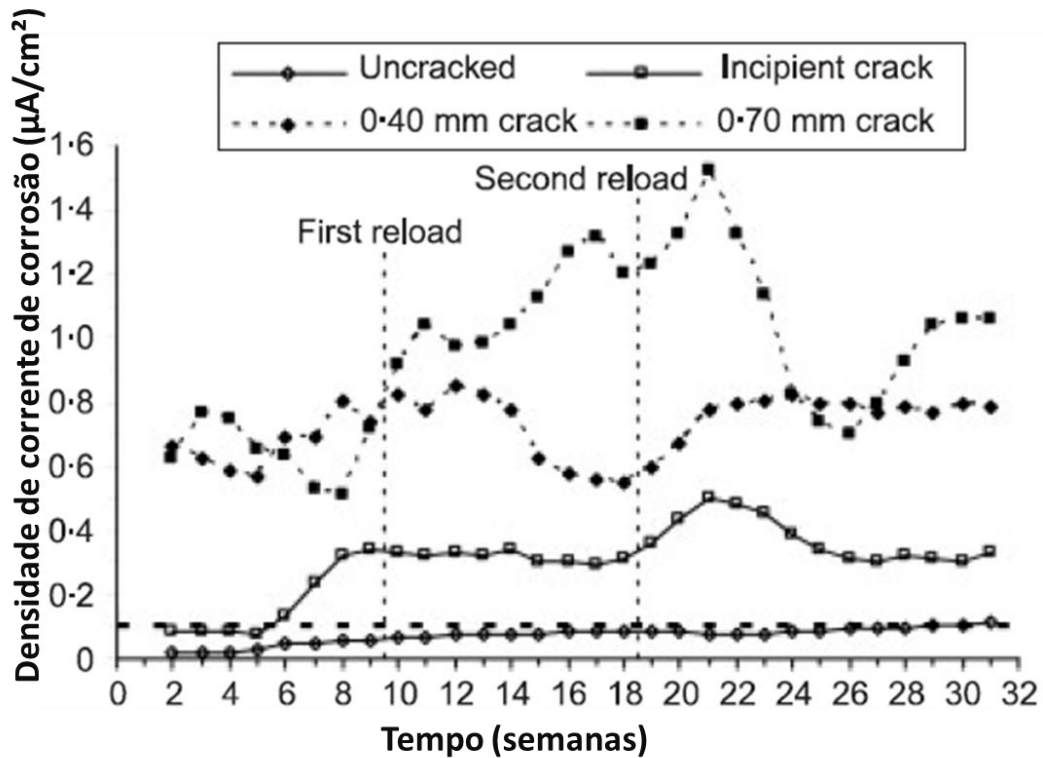
As curvas e pontos coloridos fazem referência aos resultados obtidos com a simulação e as curvas e pontos pretos são referentes ao trabalho experimental da literatura.

## ANEXO B - OBTENÇÃO DO VALOR DO DANO DE IDENTIFICAÇÃO $d_I$

O objetivo deste anexo é descrever como foi obtido o valor de  $d_I = 0,28$ .

Esse valor está baseado nos resultados experimentais de Otieno et al. (2010), que está apresentado na Figura B.1.

**Figura B.1** – Taxa de corrosão em uma viga de concreto armado.

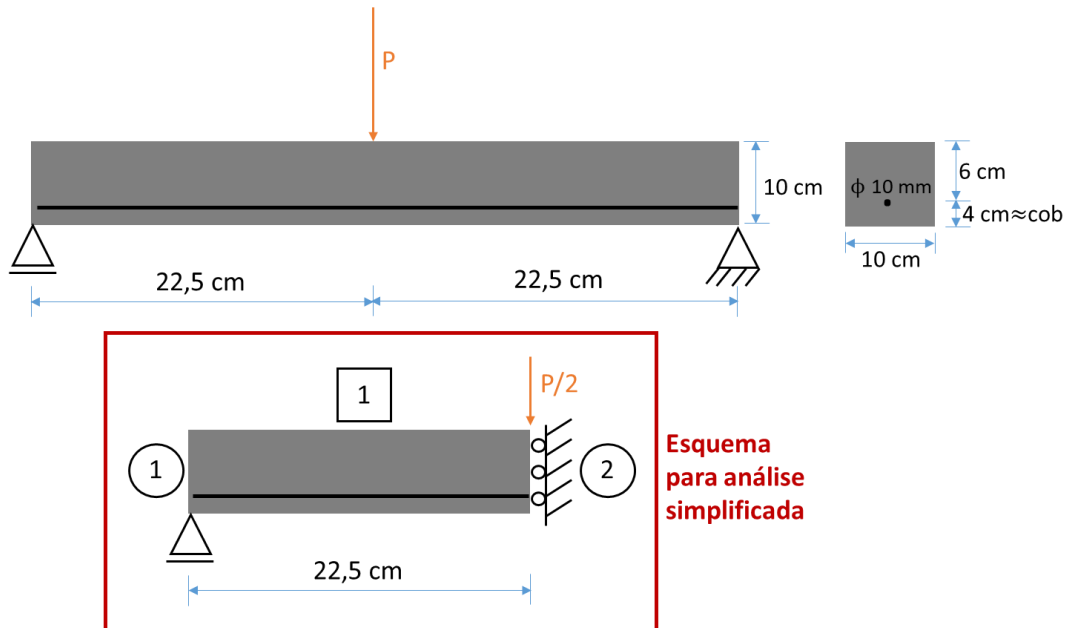


FONTE:= Otieno et al. (2010).

A partir dos gráficos da Figura B.1 foram extraídos os valores da densidade de corrente de corrosão por pite máximas e de seus valores correspondentes de largura de abertura de fissura.

Os gráficos representados na Figura B.1 referem ao experimento de uma viga biapoiada, que é representada na Figura B.2.

**Figura B.2** – Viga a ser analisada.



FONTE: Adaptado de Otieno et al. (2010).

O cálculo do momento atuante nessa estrutura para cada valor de abertura de fissura (0.40 mm e 0.70 mm) foi feito por meio da formulação Portland Cement Association (PCA), que prediz o tamanho máximo de abertura de fissura ( $w_{max}$ ) em uma viga de concreto armado (CUEVAS; FERNÁNDEZ-VILLEGAS, 2005) em função do momento atuante. Assim, o cálculo dos momentos atuantes ( $M$ ) associados foi realizado pela seguinte equação.

$$M = \frac{2,83 \cdot 10^5 \cdot w_{max} \cdot A_s \cdot dd}{\left(\frac{cg_s \cdot b}{N}\right)^{1/4}} \quad (\text{Equação B.1})$$

Em que  $A_s$  é a área da armadura longitudinal tracionada ( $\text{cm}^2$ ),  $dd$  é a altura útil (cm),  $cg_s$  é a altura do centro de gravidade da armadura longitudinal tracionada (cm),  $b$  é a largura da base da seção transversal da viga (cm) e  $N$  é o número de barras na seção.

Na sequência, necessitou-se obter o momento de fissuração da seção ( $M_{cr}$ ) e o momento último ( $M_u$ ), e, conseqüentemente, os valores dos parâmetros  $R_0$  e  $q$  para a estrutura analisada, assim como demonstrado na seção 7.4. Esses valores foram:  $M_{cr} = 0,76 \text{ kN.m}$ ,  $M_u = 2,56 \text{ kN.m}$ ,  $R_0 = 0,0000967 \text{ kN.m}$  e  $q = -0,002918 \text{ kN.m}$ .

Portanto, resolvendo a Equação B.2, para  $E_c I = 226,13 \text{ kN.m}^2$  e para  $m_i = 2,12 \text{ kN.m}$ , pode-se obter  $d_l$  igual a 0,28 e completar a Tabela B.1, finalmente.

$$m_i^2 = \frac{6E_c I (1 - d_I)^2}{L} R_0 + \frac{6q E_c I}{L} (1 - d_I) \ln (1 - d_I) \quad (\text{Equação B.2})$$

**Tabela B.1** – Identificação de  $d_I$ .

<b>Categoria</b>	<b>Largura da fissura (mm)</b>	<b>Momento (kgf.cm)</b>	$i_{cor}^{cl}$ ( $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ )	<b>dano</b>
<b>Sem fissuras</b>	0,00	-	0,10	0,00
<b>Início das fissuras</b>	-	-	-	-
<b>0.40</b>	0,40	21211,11	0,86	0,28
<b>0.70</b>	0,70	37119,44	1,53	-

### ANEXO C – CÁLCULO DE $M_{cr}$ , $M_p$ , $M_u$ , $\chi_p$ E $\chi_u$

O objetivo deste anexo é detalhar o cálculo dos momentos resistentes da seção transversal de um elemento de pórtico de concreto armado ( $M_{cr}$ ,  $M_p$  e  $M_u$ ) e das curvaturas associadas ( $\chi_p$  e  $\chi_u$ ). A metodologia aqui apresentada segue as notações propostas por Flórez-López et al. (2015), exceto para a obtenção do momento crítico ( $M_{cr}$ ) que está de acordo com a formulação apresentada na ABNT NBR 6118:2014.

#### Cálculo do momento crítico de fissuração

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, o momento crítico de fissuração ( $M_{cr}$ ) pode ser calculado pela Equação C.1. de modo aproximado.

$$M_{cr} = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} \quad \text{(Equação C.1)}$$

Em que  $\alpha$  é uma constante que depende da geometria da seção transversal (igual a 1,5 para seções retangulares),  $f_{ct}$  é a resistência à tração direta do concreto,  $I_c$  é o momento de inércia da seção bruta de concreto e  $y_t$  é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada.

Para concretos de classes até C50 e fazendo a análise no estado-limite de formação de fissuras, a resistência à tração direta do concreto pode ser obtida pela seguinte relação.

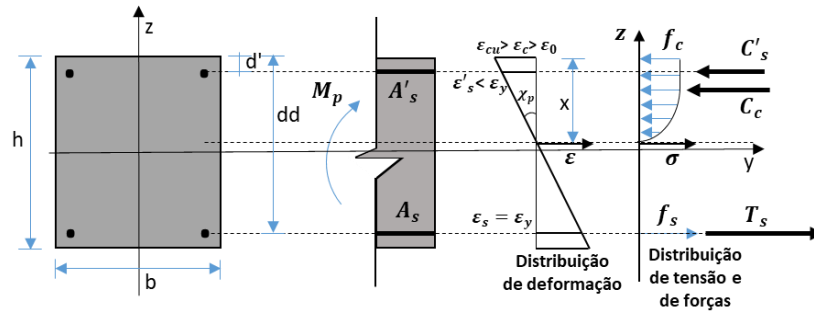
$$f_{ct} = f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ct,m} = 0,21 f_{ck}^{2/3} \quad \text{(Equação C.2)}$$

Em que  $f_{ck}$  é a resistência característica do concreto (MPa).

#### Cálculo do momento de plastificação ( $M_p$ ) e da curvatura associada ( $\chi_p$ )

Para o caso de momento fletor sem esforço normal atuando na seção tem-se o seguinte esquema de distribuição de tensões e de deformações. As equações para o cálculo de  $M_p$  e de  $\chi_p$  podem ser verificadas logo após, na sequência.

**Figura C.1** – Distribuição de tensões e deformações na seção transversal de um elemento de pórtico submetido a momento fletor puro ( $M_p$ ).



$$C'_s + C_c + T_s = 0 \tag{Equação C.3}$$

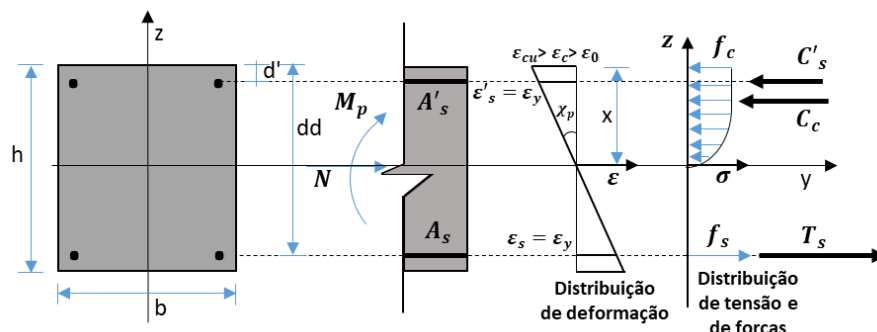
Em que  $C'_s$  é a força de compressão na armadura negativa ( $C'_s = -f_s A'_s$ ),  $C_c$  é a força de compressão no concreto ( $C_c = -b \int_0^x f_c dz$ ) e  $T_s$  é a força de tração na armadura positiva ( $T_s = f_y A_s$ ).

$$M_p = b \int_0^x f_c z dz + C'_s (x - d') + T_s (dd - x) \tag{Equação C.4}$$

$$\chi_p = \frac{\epsilon_y}{dd - x} \tag{Equação C.5}$$

Já para o caso de máximo momento fletor (condição balanceada) atuando na seção tem-se a seguinte distribuição de tensões e de deformações (Figura C.2). As equações para o cálculo de  $M_p$  e de  $\chi_p$  associados podem ser verificadas logo após o esquema ilustrativo.

**Figura C.2** – Distribuição de tensões e deformações na seção transversal de um elemento de pórtico submetido a momento fletor máximo ( $M_p$ ).



$$C'_s + C_c + T_s = N \quad (\text{Equação C.6})$$

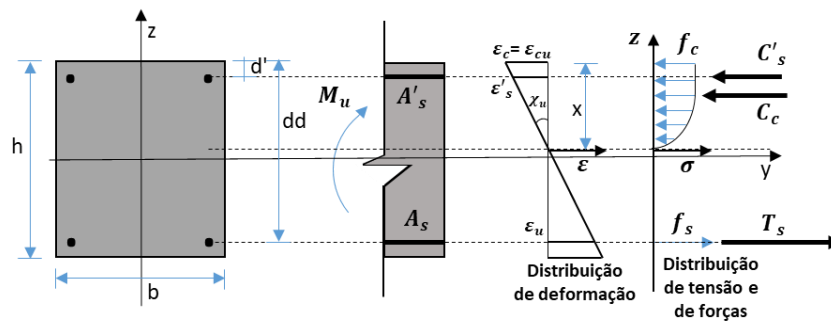
Em que  $C'_s = -f_y A'_s$ ,  $C_c = -b \int_0^x f_c dz$  e  $T_s = f_y A_s$ .

Os valores de  $M_p$  e  $\chi_p$  podem ser calculados por meio das Equações C.4 e C.5, respectivamente.

Cálculo do momento último ( $M_u$ ) e da curvatura associada ( $\chi_u$ )

Para o caso de momento fletor sem esforço normal atuando na seção tem-se o seguinte esquema de distribuição de tensões e de deformações, associado com o momento último. As equações para o cálculo de  $M_u$  e de  $\chi_u$  podem ser verificadas na sequência.

**Figura C.3** – Distribuição de tensões e deformações na seção transversal de um elemento de pórtico submetido a momento fletor puro ( $M_u$ ).



$$C'_s + C_c + T_s = 0 \quad (\text{Equação C.7})$$

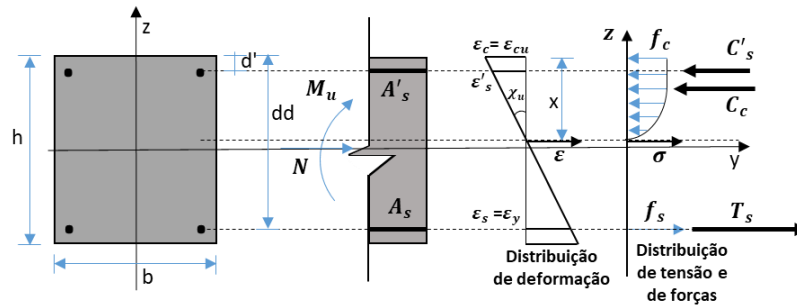
Em que  $C'_s = -f_s A'_s$ ,  $C_c = -b \int_0^x f_c dz$  e  $T_s = f_u A_s$ .

$$M_u = b \int_0^x f_c z dz + C'_s (x - d') + T_s (dd - x) \quad (\text{Equação C.8})$$

$$\chi_u = \frac{\epsilon_u}{dd - x} \quad (\text{Equação C.9})$$

Já para o caso de máximo momento fletor (condição balanceada) atuando na seção, tem-se a seguinte distribuição de tensões e de deformações (Figura C.4). As equações para o cálculo de  $M_u$  e de  $\chi_u$  associados podem ser verificadas logo após o esquema ilustrativo.

**Figura C.4** – Distribuição de tensões e deformações na seção transversal de um elemento de pórtico submetido a momento fletor máximo ( $M_u$ ).



$$C'_s + C_c + T_s = N \quad (\text{Equação C.10})$$

Em que  $C'_s = -f_s A'_s$ ,  $C_c = -b \int_0^x f_c dz$  e  $T_s = f_y A_s$ .

Os valores de  $M_u$  e  $\chi_u$  podem ser calculados por meio das Equações C.8 e C.5, respectivamente.