



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS  
DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)**

**LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**GEOMETRIA DE PROBLEMAS DE NAVEGAÇÃO NO PLANO: A MÉTRICA  
 $\lambda$ -FUNK E A MÉTRICA  $G$**

**EMANUELLE VIVIANA GERAHADT TADEI**

Foz do Iguaçu  
2025



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS  
DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)**

**LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**GEOMETRIA DE PROBLEMAS DE NAVEGAÇÃO NO PLANO: A MÉTRICA  
 $\lambda$ -FUNK E A MÉTRICA  $G$**

**EMANUELLE VIVIANA GERAHADT TADEI**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León  
Co-Orientador: Prof. Dr. Newton Mayer Solórzano Chávez

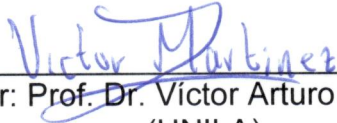
Foz do Iguaçu  
2025

EMANUELLE VIVIANA GERAHADT TADEI

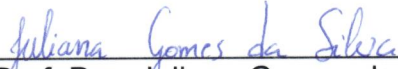
**GEOMETRIA DE PROBLEMAS DE NAVEGAÇÃO NO PLANO: A MÉTRICA  $\lambda$ -FUNK E  
A MÉTRICA  $G$**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

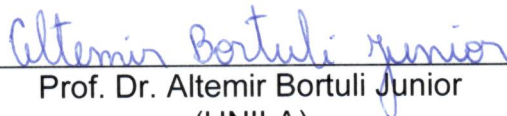
**BANCA EXAMINADORA**



\_\_\_\_\_  
Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León  
(UNILA)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dra. Juliana Gomes da Silva  
(UNILA)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Altemir Bortuli Junior  
(UNILA)

Foz do Iguaçu, 10 de dezembro de 2025.

## TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo da autora: Emanuelle Viviana Gerahadt Tadei

Curso: Matemática – Licenciatura

Tipo de Documento

- |   |  |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> graduação | <input type="checkbox"/> artigo                                    |
| <input type="checkbox"/> especialização       | <input checked="" type="checkbox"/> trabalho de conclusão de curso |
| <input type="checkbox"/> mestrado             | <input type="checkbox"/> monografia                                |
| <input type="checkbox"/> doutorado            | <input type="checkbox"/> dissertação                               |
|   | <input type="checkbox"/> tese                                      |
|   | <input type="checkbox"/> CD/DVD – obras audiovisuais               |
|   | <input type="checkbox"/>   |
- 

Título do trabalho acadêmico: Geometria de Problemas de Navegação no Plano: A Métrica  $\lambda$ -Funk e a Métrica  $G'$

Nome do orientador: Víctor Arturo Martínez León

Data da Defesa: 10/12/2025

### Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autora:

a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons* **Licença 3.0 Unported**.

Foz do Iguaçu, 10 de dezembro de 2025.

Emanuelle Viviana Gerahadt Tadei

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço à Deus, pois sem Ele, nada seria possível e por ter colocado pessoas incríveis em minha jornada na universidade.

Agradeço profundamente ao meu orientador, o professor Víctor Arturo Martínez León pela oportunidade dessa pesquisa, pelo seu apoio, incentivo e dedicação, que tornaram este trabalho uma experiência de aprendizagem enriquecedora.

Ao meu coorientador, o professor Newton Mayer Solórzano Chávez, por ter colaborado e auxiliado nesse projeto.

À minha mãe por sempre acreditar em mim, pelo seu suporte, carinho e cuidado que me permitiram me dedicar aos meus estudos.

Ao meu namorado por estar sempre ao meu lado, ajudando e crescendo comigo, antes e durante a universidade.

À Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PRPPG) da UNILA e à Fundação Araucária pela concessão da bolsa de iniciação científica IC-FA, a qual serviu como base nessa investigação.

À banca examinadora pela leitura atenta, pelas sugestões valiosas e pelo tempo dedicado à avaliação deste trabalho.

*A geometria é a arte de raciocinar sobre figuras mal  
desenhadas.*  
**Henri Poincaré**

## RESUMO

Neste trabalho, analisamos um problema de navegação de Zermelo no plano, em que foi considerada a influência de forças externas (como vento ou correnteza) simétricas e concêntricas, tomando um parâmetro de intensidade  $\lambda$ . Essa situação física foi modelada geometricamente, onde um disco aberto centrado na origem e raio  $1/\lambda$  do  $\mathbb{R}^2$  foi munido de uma métrica do tipo Randers, nomeada “métrica de  $\lambda$ -Funk”, para qual explicamos em detalhes expressões de distâncias entre dois pontos, de ponto a segmento de reta, de segmento de reta a ponto, entre segmentos de retas e circunferências. Perturbamos o caso da métrica de 1-Funk no disco aberto unitário centrado na origem, associada a um vetor, obtendo a “métrica  $G$ ”, verificamos que essa métrica pode ser interpretada como um problema de navegação, induzimos a fórmula de distância entre dois pontos e caracterizamos as circunferências.

**Palavras-chaves:** métrica de  $\lambda$ -Funk; métrica de Randers; problema de navegação de Zermelo; distâncias; circunferência.

## RESUMEN

En este trabajo, analizamos un problema de navegación de Zermelo en el plano, en que se consideró la influencia de fuerzas externas (como viento o corrientes) simétricas y concéntricas, tomando un parámetro de intensidad  $\lambda$ . Esta situación física fue modelada geoméricamente, donde un disco abierto centrado en el origen y radio  $1/\lambda$  de  $\mathbb{R}^2$  fue dotado de una métrica del tipo Randers, denominada “métrica de  $\lambda$ -Funk”, para la cual explicamos en detalle expresiones de distancias entre dos puntos, de punto a segmento de recta, de segmento de recta a punto, entre segmentos de rectas y circunferencias. Perturbamos el caso de la métrica 1-Funk en el disco unitario, asociada a un vector, obteniendo la “métrica  $G$ ”, verificamos que esta métrica puede interpretarse como un problema de navegación, inducimos la fórmula de distancia entre dos puntos y caracterizamos las circunferencias.

**Palabras clave:** métrica de  $\lambda$ -Funk; métrica de Randers; problema de navegación de Zermelo; distancias; circunferencias.

## ABSTRACT

In this work, we analyzed a Zermelo navigation problem in the plane, in which the influence of symmetric and concentric external forces (such as wind or current) was considered, using an intensity parameter  $\lambda$ . This physical situation was geometrically modeled, where an open disk centered at the origin and radius  $1/\lambda$  in  $\mathbb{R}^2$  was equipped with a Randers-type metric, named " $\lambda$ -Funk metric", for which we explained in detail the expressions for distances between two points, from a point to a line segment, from a line segment to a point, between line segments and circumferences. We perturbed the case of the 1-Funk metric on the unit disk, associated with a vector, obtaining the " $G$  metric", we verified that this metric can be interpreted as a navigation problem, we induced the distance formula between two points and characterized the circumferences.

**Keywords:**  $\lambda$ -Funk metric; Randers metric; Zermelo navigation problem; distance; circumference.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Caminho para tempo mínimo . . . . .	15
Figura 2 – Campo vetorial $T$ em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	20
Figura 3 – Força resultante $T_x$ . . . . .	26
Figura 4 – Solução positiva $F$ . . . . .	26
Figura 5 – Campo de forças sobre $\mathbb{B}^2$ . . . . .	29
Figura 6 – Interpretação geométrica do Teorema 5.1 . . . . .	45
Figura 7 – $d_F(P, X) = \frac{\ln r}{\lambda}$ . . . . .	48
Figura 8 – Circunferência de 0.7–Funk do tipo 1 de centro $P = (0, 0)$ e raio 1 . . . . .	48
Figura 9 – Circunferência de 0.7–Funk do tipo 1 de centro $P = (0.5, 0.5)$ e raio 1 . . . . .	49
Figura 10 – $d_F(X, P) = \frac{\ln r}{\lambda}$ . . . . .	50
Figura 11 – Circunferência de 0.8–Funk do tipo 2 de centro $P = (0.5, 0.5)$ e raio 1 . . . . .	50
Figura 12 – Circunferência de 0.8–Funk do tipo 2 de centro $P = (0, 0)$ e raio 1 . . . . .	51
Figura 13 – Circunferência de 0.8–Funk do tipo 2 de centro $P = (0, 0)$ e raio $\approx 0.51$ . . . . .	52
Figura 14 – Circunferência de 0.8–Funk do tipo 2 de centro $P \approx (-0.27, 0.13)$ e raio $\approx 0.51$ . . . . .	53
Figura 15 – Rotação dos eixos coordenados $x_1x_2$ . . . . .	56
Figura 16 – Distância 0.7–Funk de $s: x_2 = \text{tg } 30^\circ + 1$ até $Q = (0.4, 0.3)$ em $\Omega_{0.7}$ . . . . .	59
Figura 17 – Distância 0.6–Funk de $s: x_2 = \text{tg } 150^\circ + 1.5$ até $Q = (0.4, 0.3)$ em $\Omega_{0.6}$ . . . . .	60
Figura 18 – Distância 0.7–Funk de $P = (0.6, 0.8)$ à $s: x_2 = \text{tg } 60^\circ + 1$ em $\Omega_{0.7}$ . . . . .	64
Figura 19 – Distância 0.7–Funk de $P = (0.6, 0.8)$ à $s: x_2 = \text{tg } 120^\circ - 0.5$ em $\Omega_{0.7}$ . . . . .	65
Figura 20 – Distância 0.7–Funk entre os segmentos de retas $s'_{1,0.7}$ e $s'_{2,0.7}$ . . . . .	68
Figura 21 – Distância 0.7–Funk entre os segmentos de retas $s_{1,0.7}$ e $s_{2,0.7}$ . . . . .	68
Figura 22 – Segmentos de retas não concorrentes com inclinações distintas . . . . .	69
Figura 23 – Circunferências 1–Funk perturbada de tipo 1 e raio 1 centradas na origem com $a = (0, 0)$ (preto), $a = (\frac{1}{4}, 0)$ (azul), $a = (\frac{1}{e}, 0)$ (verde) e $a = (\frac{2}{3}, 0)$ (vermelho) . . . . .	87
Figura 24 – Circunferências 1–Funk perturbada de tipo 1 e raio 1 centradas em $\mathcal{C} = (0.5, 0.7)$ com $a = (0, 0)$ (preto), $a = (\frac{1}{4}, 0)$ (azul), $a = (\frac{1}{e}, 0)$ (verde) e $a = (\frac{2}{3}, 0)$ (vermelho) . . . . .	88

Figura 25 – Circunferências 1–Funk perturbada de tipo 1 e raio 1 centradas em $\mathcal{C} = (-0.5, -0.7)$ com $a = (0, 0)$ (preto), $a = (\frac{1}{4}, 0)$ (azul), $a = (\frac{1}{e}, 0)$ (verde) e $a = (\frac{2}{3}, 0)$ (vermelho) . . . . .	89
Figura 26 – Circunferências 1–Funk perturbada de tipo 2 e raio 1 centradas na origem com $a = (0, 0)$ (preto), $a = (\frac{1}{6}, 0)$ (azul), $a = (\frac{1}{e}, 0)$ (verde) e $a = (\frac{2}{3}, 0)$ (vermelho) . . . . .	92
Figura 27 – Circunferências 1–Funk perturbada de tipo 2 e raio 1 centradas em $\mathcal{C} = (0.5, 0.4)$ com $a = (0, 0)$ (preto), $a = (\frac{1}{10}, 0)$ (azul), $a = (\frac{2}{3e-1}, 0)$ (verde) e $a = (\frac{1}{2}, 0)$ (vermelho) . . . . .	93
Figura 28 – Circunferências 1–Funk perturbada de tipo 2 e raio 1 centradas em $\mathcal{C} = (-0.5, -0.4)$ com $a = (0, 0)$ (preto), $a = (\frac{1}{10}, 0)$ (azul), $a = (\frac{2}{e+1}, 0)$ (verde) e $a = (\frac{2}{3}, 0)$ (vermelho) . . . . .	94

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
1.1	PENSANDO SOBRE MENORES CAMINHOS	14
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>A MÉTRICA <math>\lambda</math>-FUNK</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>DISTÂNCIA INDUZIDA PELA MÉTRICA DE <math>\lambda</math>-FUNK</b>	<b>36</b>
<b>5</b>	<b>GEOMETRIA DE UMA MÉTRICA DE <math>\lambda</math>-FUNK EM <math>\Omega_\lambda</math></b>	<b>43</b>
5.1	CIRCUNFERÊNCIAS DE $\lambda$ -FUNK	46
5.1.1	Circunferência de $\lambda$ -Funk tipo 1	47
5.1.2	Circunferência de $\lambda$ -Funk tipo 2	49
5.2	DISTÂNCIA DE $\lambda$ -FUNK ENTRE SEGMENTO DE RETA E PONTO	53
5.2.1	Distância de $\lambda$ -Funk de um segmento de reta a um ponto	54
5.2.2	Distância de $\lambda$ -Funk de um ponto a um segmento de reta	60
5.3	DISTÂNCIA DE $\lambda$ -FUNK ENTRE SEGMENTOS DE RETAS	65
5.3.1	Distância de $\lambda$ -Funk entre segmentos de retas com inclinações iguais	66
<b>6</b>	<b>MÉTRICA DE 1-FUNK PERTURBADA NO DISCO UNITÁRIO</b>	<b>70</b>
6.1	INTERPRETAÇÃO DE $G$ COMO MÉTRICA DE NAVEGAÇÃO	72
6.2	DISTÂNCIA INDUZIDA PELA MÉTRICA $G$	77
6.3	CIRCUNFERÊNCIAS	84
6.3.1	Circunferência 1-Funk perturbada de tipo 1	84
6.3.2	Circunferência 1-Funk perturbada de tipo 2	89
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>95</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>98</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Durante o período das Grandes Navegações, uma intensa corrida entre as potências europeias impulsionou a busca por novas rotas comerciais e a expansão territorial. Os navios foram o meio de transporte que tornou possível à humanidade atravessar o globo e descobrir novas terras, enfrentando desafios como correntes marítimas que influenciavam a locomoção das embarcações.

Isso é notório no feito histórico do navegador português Bartolomeu Dias (1450-1500) que, em 1488, encontrou uma passagem marítima do oceano Atlântico para o oceano Índico contornando o Cabo das Tormentas (posteriormente chamado de Cabo da Boa Esperança). Para superar os obstáculos das correntes contrárias, Dias precisou adaptar suas estratégias, afastando-se da costa e aproveitando os ventos e correntes mais favoráveis (WIBAUX, 2013).

Essa solução empírica representava uma geometria prática na qual a distância e a duração do percurso entre dois pontos não eram simétricos e dependiam crucialmente da direção do percurso, desafiando os princípios da geometria euclidiana clássica. Apenas séculos mais tarde, o problema enfrentado por navegadores seria formalizado matematicamente por *Ernst Zermelo* (1871-1953) em 1931, através do cálculo das variações.

Zermelo formulou o problema de navegação ótima, almejando determinar a trajetória que minimiza a duração da viagem de um barco levando em conta influências externas como correntes e ventos. Seu trabalho evidenciou que a rota ótima entre dois pontos pode não ser um segmento de reta, mas sim uma curva determinada pelas condições do meio.

Este trabalho apresenta um estudo sobre um caso específico do *problema de Zermelo*, no qual um barco se desloca em um lago circular sob a influência de um vento radial de intensidade variável, utilizando os resultados adquiridos por (SHEN, 2001) e (CHENG; SHEN, 2012). O principal objetivo é determinar as trajetórias de menor tempo (geodésicas) utilizando *métricas de Finsler do tipo  $\lambda$ -Funk*, que são casos particulares de *métricas de Randers*

A pesquisa pretende expor os conteúdos de forma didática, utilizando exemplos intuitivos e validação computacional com o software GeoGebra, para facilitar

a compreensão sobre geometrias não-euclidianas.

Previamente ao nosso aprofundamento, traremos exemplos reais, para que o leitor possa refletir sobre os conceitos propostos, porque se tratando de uma geometria não euclidiana, essa pode não ser familiar, dessa forma, algumas situações podem revelar-se contraintuitivas. Justamente por isso, no primeiro capítulo, buscaremos instigar o leitor a repensar a noção de “menor caminho”.

No segundo capítulo, exibimos fundamentos matemáticos que serão pertinentes para o andamento da pesquisa. Iniciamos revisando propriedades e definições da Geometria Euclidiana, com a qual possivelmente o leitor já está habituado. Em seguida, realizamos uma análise a respeito de algumas métricas não euclidianas, mostrando exemplos, estabelecendo assim a base conceitual para os capítulos seguintes.

No terceiro capítulo, adentramos sobre a definição da métrica de  $\lambda$ -*Funk* sobre uma bola aberta, centrada na origem, munida de um campo de forças concêntricas e simétricas que representam a ação da correnteza ou do vento, para isso, além da obra clássica de (FUNK, 1929), revisamos também o trabalho de conclusão de curso (MOYSES, 2022) e os artigos recentes, como (CHÁVEZ et al., 2021) e (CHÁVEZ; MOYSES; LEÓN, 2024), que nos deram suporte suficiente para explorar esse conteúdo. Assim, expusemos a construção dessa métrica através do problema físico de navegação de Zermelo, visamos descobrir qual curva realiza o menor caminho entre dois pontos e obtivemos fórmulas que se demonstraram fundamentais para a geração de resultados ao longo desta investigação.

No quarto capítulo, demos sequência a esse estudo, induzindo uma fórmula para a distância entre dois pontos nessa métrica. Desse modo, naturalmente surgiram perguntas como “será que a distância de um ponto até outro tem o mesmo valor tomando o percurso oposto, ou seja, seria essa distância simétrica?” e nesse sentido “imaginando um barco navegando no disco, é possível ele navegar contra a correnteza e sair desse domínio?”. Para sanar essas dúvidas, procedemos à verificação de algumas propriedades.

O quinto capítulo foi dividido em três seções, nas quais passamos a estudar algumas estruturas geométricas da métrica de  $\lambda$ -*Funk*. Partindo do problema físico de navegação, empenhando-se a encontrar o arco de alcance máximo que um

barco pode chegar com uma quantidade de combustível limitada, surgiram os conceitos de circunferências (Definição 5.1, ver Figura 7 e Definição 5.2, ver Figura 10). Com o objetivo de determinar a duração de viagens entre uma ilha isolada e uma praia com litoral retilíneo, se deduziu a distância de segmento de reta a ponto ((5.9), ver Figuras 16 e 17), de ponto a segmento de reta ((5.17), ver Figuras 18 e 19) e entre dois segmentos de retas ((5.22), ver Figuras 20 e 21).

O sexto capítulo foi dividido em três seções, na primeira propomos uma nova métrica, a *Métrica G*, Definição 6.1, a qual consiste em uma perturbação na métrica de 1–Funk, associada a uma segunda força. Na segunda, começamos a averiguar sobre as características dessa nova métrica. Se tratando de uma métrica desconhecida, procuramos descobrir se essa métrica também pode ser obtida a partir de um problema de navegação de Zermelo e desta maneira como seria a interpretação física dessa perturbação. Ademais, indagamos qual seria o percurso mais rápidos entre dois pontos, passamos a induzir uma fórmula de distância e verificar se esta é simétrica. Na terceira seção, o foco foi investigar qual seria o arco de distância máxima que uma embarcação consegue alcançar navegando com um limite de combustível, assim foram construídas as circunferências ((6.27), ver Figura 23, 24 e 25, e (6.33), ver Figura 26, 27 e 28) Desse modo, começamos a indagar “seriam essas circunferências únicas?”, “elas possuiriam o mesmo formato circular conhecido?” e “elas ainda pertenceriam ao domínio?”, essas foram as questões que levantamos inicialmente.

Finalmente, no último capítulo, apresentamos as considerações finais sobre os resultados deste trabalho, vale ressaltar que este trabalho é proveniente de uma Iniciação Científica, ligada ao Grupo de Pesquisa de Geometria e Topologia da UNILA. Além disso, com base nesse estudo, escrevemos um artigo que foi submetido a um jornal nacional com corpo editorial e revisor em colaboração do Professor Abraham Muñoz (LEÓN et al., 2025).

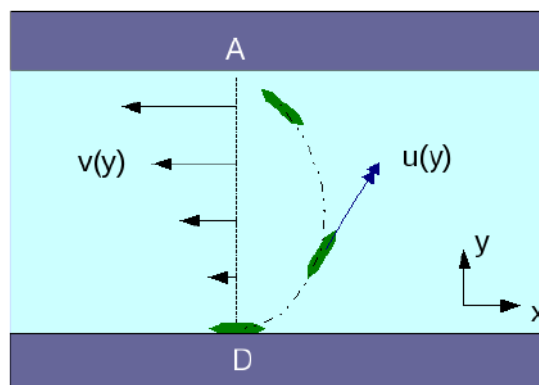
## 1.1 PENSANDO SOBRE MENORES CAMINHOS

Nas escolas, ao se ensinar sobre deslocamento, são estudados espaços em situações ideais, isto é, assume-se um plano homogêneo e sem obstáculos onde todas as direções e posições são equivalentes, chamado de espaço isotrópico,

que formalmente corresponde ao espaço euclidiano plano. Entretanto, em situações reais como a navegação, ao se considerar um barco navegando, existem adversidades como a correnteza e os ventos que representam forças externas ao barco que influenciam sua trajetória. Nesses casos, o critério de otimização da distância para minimizar o tempo ou consumo de energia durante o percurso é modificado, o “custo” do movimento depende da direção, o que significa que espaço efetivo torna-se anisótropo.

Para que o leitor possa compreender melhor, é apresentado o artigo científico (TALBOT, 2010) que surge de uma situação real. O autor observou o movimento das embarcações que atravessavam um rio, cruzando de uma margem à outra, percebendo que os navios não faziam um trajeto em linha reta de um lado do estreito para o outro, como mostra a figura:

Figura 1 – Caminho para tempo mínimo



Fonte: Talbot (2010, fig. 1, p. 206)

A Figura 1 mostra um barco saindo de um ponto  $D$  na margem de um rio, tentando alcançar um ponto  $A$  exatamente oposto a  $D$  na outra margem. No rio, há uma correnteza fluindo para a esquerda. Talbot examinou a situação, percebendo que, se o barco apontasse diretamente para  $A$ , a correnteza o arrastaria rio abaixo, fazendo com que ele desembarcasse em um ponto a oeste de  $A$ . Isso acontece porque o caminho mais rápido não é uma trajetória em linha reta, mas uma curva que balanceie a orientação do barco contra a correnteza ao longo de toda a travessia, minimizando o tempo total.

É crucial notar que nesse estudo, o qual partiu de uma observação concreta de Talbot, há interferência de um termo, nesse caso uma força, na escolha do trajeto mais favorável. Esse é um exemplo clássico do *problema de Zermelo*, nele

o fluxo da água pode ser descrito matematicamente como um campo de forças que age sobre o rio.

Por meio desse exemplo é observado que nem sempre os caminhos mais rápidos ligando dois pontos são segmentos de reta. Reforçando a noção de que ao estudar sobre geometrias não euclidianas, é preciso interpretá-las dessa maneira, analisando com cuidado antes de tomar quaisquer conclusões, pois quando a geometria muda, suas regras, noções de distância e simetria, também são modificados.

## 2 PRELIMINARES

A fim de orientar o leitor durante a leitura, nesta seção serão expostas definições e propriedades que serão utilizadas para cálculos e demonstrações ao longo deste trabalho. Livros que examinam esses assuntos mais profundamente podem ser encontrados nos referenciais teóricos de Geometria Analítica (CAMARGO; BOULOS, 2005), Álgebra Linear (SANTOS; ANDRADE, 2015), Cálculo (STEWART, 2013) e Análise Real (LIMA, 1999).

Estas são algumas informações elementares:

- O *plano cartesiano* é definido como o conjunto de todos os pares ordenados  $(x, y)$ , em que  $x$  e  $y$  são números reais.
- No contexto geométrico do plano, um *vetor* é a classe de todos os segmentos de reta orientados equipolentes, isto é, com o mesmo comprimento, direção e sentido, isto é, independentemente da posição. Em particular, no segmento orientado  $PQ$ , toma-se  $P$  como extremidade inicial e  $Q$  como extremidade final; esse segmento representa o vetor  $\overrightarrow{PQ}$ . Vetores também podem ser representados por quaisquer letras  $(u, v, w)$  ou por suas coordenadas no plano; em síntese, o vetor é caracterizado apenas por seu módulo, direção e sentido.
- Considerando  $P = (p_1, p_2)$  e  $Q = (q_1, q_2)$  dois pontos no plano  $\mathbb{R}^2$ , as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{PQ}$  são descritas por  $Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ .

**Definição 2.1 (Produto Escalar e Norma Euclidiana no  $\mathbb{R}^2$ )** Considerando os vetores  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$  vetores no  $\mathbb{R}^2$ , o *produto escalar* entre os vetores  $u$  e  $v$  é dado por:

$$\langle u, v \rangle := u_1v_1 + u_2v_2.$$

A *norma euclidiana* de um vetor  $u$  é definida como:  $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ .

**Observação 2.1** Ao longo do texto identificaremos cada ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  com seu vetor posição  $\overrightarrow{OP}$ , onde  $O = (0, 0)$  denota a origem. Assim, dados os pontos  $P = (p_1, p_2)$  e  $Q = (q_1, q_2)$  em  $\mathbb{R}^2$  podemos utilizar o produto escalar e a norma euclidiana diretamente em pontos, escrevendo

$$\langle P, Q \rangle := \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle = p_1q_1 + p_2q_2 \quad \text{e} \quad \|P\| := \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

**Definição 2.2 (Distância Euclidiana em  $\mathbb{R}^2$ )** Considere dois pontos quaisquer  $P = (p_1, p_2)$  e  $Q = (q_1, q_2)$  pertencentes ao plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ . A *distância euclidiana* entre eles é descrita pela aplicação  $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa ao par  $(P, Q)$  o valor

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}.$$

Observe que a norma de um vetor coincide com a medida de sua extensão, isto é, corresponde ao seu comprimento.

**Propriedades 2.1 (Produto Escalar e Norma Euclidiana)** Quaisquer que sejam os vetores  $u, v$  e  $w$  do  $\mathbb{R}^2$ , o produto escalar e a norma euclidiana satisfazem as seguintes propriedades:

1.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ;
2.  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ ;
3.  $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
4.  $\langle u, u \rangle \geq 0$  (ou  $\|u\| \geq 0$ ), onde a igualdade ocorre se, e somente se,  $u = \vec{0} = (0, 0)$ ;
5. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ ;
6. (Desigualdade Triangular)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .

**Observação 2.2** É apropriado introduzirmos outra característica, pois esta será aplicada em várias etapas desta investigação. A partir das propriedades enunciadas anteriormente, juntamente com a definição de norma, conclui-se que: Dados dois pontos  $P$  e  $Q$  quaisquer do  $\mathbb{R}^2$ , é válido:

$$\|P + Q\|^2 = \|P\|^2 + 2\langle P, Q \rangle + \|Q\|^2. \quad (2.1)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|P + Q\|^2 &= \langle P + Q, P + Q \rangle \\ &= \langle P + Q, P \rangle + \langle P + Q, Q \rangle \\ &= \langle P, P \rangle + 2\langle P, Q \rangle + \langle Q, Q \rangle \\ &= \|P\|^2 + 2\langle P, Q \rangle + \|Q\|^2. \end{aligned}$$

**Definição 2.3 (Ângulo entre Vetores)** O ângulo  $\theta \in [0, \pi]$  formado entre dois vetores não nulos  $u$  e  $v$  é definido por:

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

**Definição 2.4 (Bola Aberta no  $\mathbb{R}^2$ )** Conceitua-se como *bola aberta* (ou *disco aberto*) de centro em um ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  e raio  $r > 0$  o conjunto  $B_r(P)$ , formado por todos os pontos  $X$  do plano euclidiano que obedecem à relação:

$$B_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^2; \|\overrightarrow{PX}\| = \|X - P\| < r\}.$$

Equivalentemente,  $B_r(P)$  compreende os pontos do espaço bidimensional cuja medida de afastamento em relação a  $P$  é inferior a  $r$ . Adotaremos a notação  $\mathbb{B}^2$  para simbolizar a bola aberta de raio unitário com centro na origem do sistema de coordenadas. É definido como *fronteira* (ou *borda*) de  $B_r(P)$  o conjunto  $\partial B_r(P)$ , composto por todos os pontos  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  que mantêm distância exatamente igual a  $r$  do ponto  $P$ . Algebricamente:

$$\partial B_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^2; \|X - P\| = r\}.$$

Geometricamente,  $\partial B_r(P)$  configura uma circunferência de centro  $P$  e raio  $r$  no plano cartesiano.

**Definição 2.5 (Conjunto Aberto)** Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  é considerado *aberto* quando, para cada elemento  $X \in A$ , é possível determinar uma bola aberta com centro em  $X$  que esteja completamente incluída em  $A$ . Formalmente,  $A$  é aberto se, e somente se:

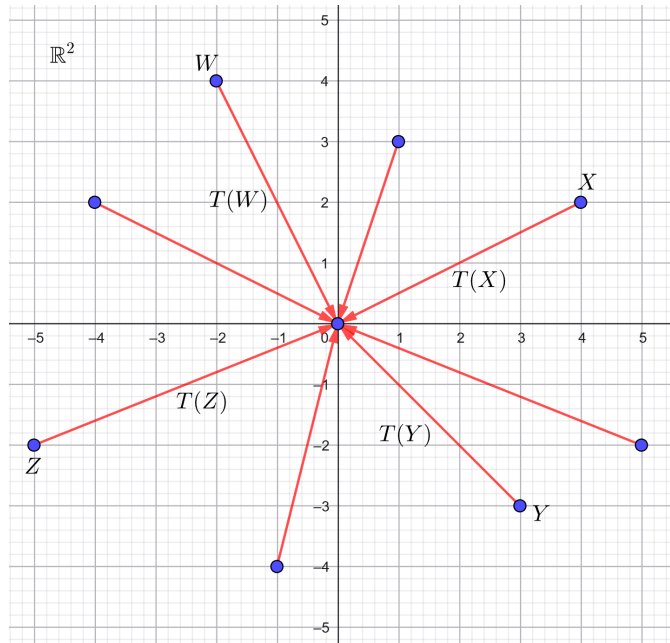
$$\forall X \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(X) \subset A.$$

Vale destacar que toda bola aberta  $B_r(P)$  constitui um exemplo de conjunto aberto.

**Definição 2.6 (Campo Vetorial)** Seja  $\Omega$  um subconjunto do plano bidimensional  $\mathbb{R}^2$ . Um *campo vetorial* em  $\Omega$  consiste em uma função  $T$  que mapeia cada elemento  $x \in \Omega$  em um vetor  $T(x) \in \mathbb{R}^2$ . Esta aplicação, denotada por  $T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , atribui a cada ponto do domínio um vetor específico. Do ponto de vista geométrico ou físico, quando interpretamos  $T(x)$  como uma grandeza vetorial associada à posição  $x$  (como força, velocidade ou campo gravitacional), a função  $T$  é definida como um campo vetorial.

**Exemplo 2.1** Para cada  $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , definamos o campo vetorial  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por  $T(X) = -X = -(x_1, x_2)$  (veja a Figura 2).

Figura 2 – Campo vetorial  $T$  em  $\mathbb{R}^2$



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

**Definição 2.7 (Curva Parametrizada Regular de Classe  $C^k$  no  $\mathbb{R}^2$ )** Considere um subconjunto  $\Omega$  do espaço bidimensional  $\mathbb{R}^2$ . Uma *curva parametrizada*  $\gamma$  em  $\Omega$  corresponde a uma função  $\gamma: I \rightarrow \Omega$ , definida sobre um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Diz-se que  $\gamma$  é uma *curva diferenciável de classe  $C^k$*  (para  $k \geq 1$ ) quando suas funções coordenadas admitem derivadas contínuas até a ordem  $k$ . A curva é classificada como regular se, para todo valor do parâmetro  $t \in I$ , o vetor derivada  $\gamma'(t)$  é não nulo, ou seja,  $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ . No caso em que a regularidade não é global no intervalo, mas se verifica em uma subdivisão de  $I$  em intervalos menores, dizemos que  $\gamma$  é regular por partes. Mais precisamente,  $\gamma$  é regular por partes se existir uma partição  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  de  $I$  tal que  $\gamma$  é regular em cada intervalo aberto  $]t_{i-1}, t_i[$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Definição 2.8 (Comprimento de Arco em  $\mathbb{R}^2$ )** Considere uma curva regular  $\gamma: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ . Fixado um parâmetro de referência  $t_0 \in ]a, b[$ , define-se a função *comprimento de arco* a partir de  $t_0$  como a função  $s: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada pela integral da norma

do vetor tangente  $\gamma'(\tau)$  :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau.$$

Esta função calcula a distância percorrida ao longo da curva desde o ponto correspondente ao parâmetro  $t_0$  até o ponto correspondente ao parâmetro  $t$ .

Para que seja possível adentrar na temática do trabalho acerca de um problema de navegação envolvendo uma métrica  $\lambda$ -Funk, é preciso primeiro entender o que é uma métrica. Esse conceito surge em problemas matemáticos que envolvem o cálculo de distâncias em espaços. Nesse sentido, uma *métrica* é uma regra (uma função) que estabelece como medir distâncias em um determinado espaço, assim a geometria é o estudo das propriedades que emergem dessa métrica. Dessa forma, uma métrica varia conforme o espaço em que é definida.

Por exemplo, no espaço euclidiano, o qual devido a sua simetria homogeneidade e isotropia, a métrica euclidiana define que a distância entre dois pontos é o menor caminho entre eles, isto é, um segmento de reta. Essa é uma das características fundamentais da Geometria Euclidiana proposta por Euclides em seus cinco postulados e amplamente difundida nas escolas. Outros matemáticos se empenharam a estudar como medir distâncias nos mais variados espaços. Esse é o caso do matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866), que ao investigar espaços curvos, cria uma generalização da geometria euclidiana ao formular as métricas de Riemann, nela a distância entre dois pontos é calculada levando em consideração a curvatura do espaço.

A seguir, será exposta a definição da métrica Riemanniana em conjuntos abertos do  $\mathbb{R}^2$ . Uma análise mais profunda dessa métrica pode ser acessado nas referências Geometria Riemanniana (CARMO, 2019) .

**Definição 2.9 (Métrica Riemanniana em  $\mathbb{R}^2$ )** Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  aberto e funções diferenciáveis  $a_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $i, j = 1, 2$ , tais que a matriz  $[a_{ij}(x)]_{2 \times 2}$  seja simétrica e positiva definida para todo  $x \in \Omega$ . Para um vetor arbitrário  $y_x = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  associado ao ponto  $x$ , define-se a *Métrica Riemanniana* em  $\Omega$  como a expressão:

$$\alpha(x, y_x) = \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + (a_{12}(x) + a_{21}(x))y_1y_2 + a_{22}(x)y_2^2}. \quad (2.2)$$

Note que a *Métrica Euclidiana* constitui um caso particular desta estrutura geral, obtida quando se especifica  $a_{11}(x) = a_{22}(x) = 1$  e  $a_{12}(x) = a_{21}(x) = 0$  para todo  $x \in \Omega$  (veja Definição 2.2).

**Exemplo 2.2** A função  $\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\alpha(x, y_x) = \sqrt{x_2(y_1^2 + y_2^2)}$$

é uma Métrica Riemanniana, pois os coeficientes  $a_{ij}(x)$  são dados pela matriz

$$[a_{ij}(x)]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix},$$

que é simétrica e positiva definida para todo  $x \in \Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}$ .

Como generalização das métricas riemannianas, as métricas de Finsler — introduzidas por Paul Finsler em 1918 — admitem que a distância dependa não só do ponto, mas também da direção. Isso implica que, diferentemente do caso euclidiano, a distância entre dois pontos pode ser distinta para diferentes trajetórias, dependendo de condições como velocidade e direção do movimento (FINSLER, 1918). É possível encontrar um tratamento mais abrangente de métricas de Finsler em variedades gerais em Guo e Mo (2018), Cheng e Shen (2012) e Shen (2001). Neste texto será exibida uma caracterização simplificada de métrica de Finsler em um subconjunto aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.10 (Métrica de Finsler)** A função  $F: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto, é chamada de *métrica de Finsler* em  $U$  se, para  $x \in U$  e  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $F$  satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $F(x, y)$  é  $C^\infty$  para todo  $x \in U$  e  $y \neq 0$ ;
2.  $F(x, y) > 0$  para todo  $x \in U$  e  $y \neq 0$ ;
3.  $F(x, \delta y) = \delta F(x, y)$ , onde  $\delta$  é qualquer número real positivo;
4. A matriz hessiana de  $\frac{1}{2}F^2$ , denotada por  $[g_{ij}]$ ,

$$[g_{ij}] = \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} \right],$$

é definida positiva.

**Definição 2.11 (Comprimento de Arco do Tipo Finsler)** Seja  $c: [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$  uma curva regular por partes. O comprimento de arco (*do tipo Finsler*) de  $c$  é definido por

$$\mathcal{L}_F(c) := \int_a^b F(c(t), c'(t)) dt,$$

onde  $F$  é uma métrica de Finsler.

**Definição 2.12 (Distância Induzida Finsler)** Para quaisquer pontos  $P, Q \in \Omega$ , a *distância* de  $P$  para  $Q$  induzida por  $F$  é definida como

$$d_F(P, Q) := \inf_c \mathcal{L}_F(c),$$

onde o ínfimo é dado pelo conjunto de todas as curvas regulares por partes  $c: [a, b] \rightarrow \Omega$ , tais que  $c(a) = P$  e  $c(b) = Q$ .

Nesse sentido, a norma euclidiana, métricas riemannianas ou a métrica de Funk, definida adiante, são exemplos de métricas de Finsler.

Uma extensão das métricas de Finsler, foi proposta por Gunnar Randers em 1941, em que é incluído um termo adicional representando uma perturbação vetorial, permitindo sua aplicação em contextos físicos e práticos, como navegação e controle ótimo (RANDERS, 1941). Essa métrica se caracteriza por introduzir uma assimetria na medida de distância, ou seja, o trajeto de ida entre dois pontos pode não ser equivalente ao trajeto de volta, dependendo da influência de fatores externos, como correntes ou forças externas.

**Definição 2.13 (Métrica de Randers)** Seja  $\alpha$  uma métrica Riemanniana sobre  $\Omega$  dada em (2.2) e uma função  $\beta$  da forma  $\beta(x, y_x) = b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2$ , onde  $b_1, b_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis que satisfazem a condição:

$$\|\beta\|_\alpha := \sqrt{a^{11}(x)[b_1(x)]^2 + [a^{12}(x) + a^{21}(x)]b_1(x)b_2(x) + a^{22}(x)[b_2(x)]^2} < 1, \quad (2.3)$$

com  $[a^{ij}(x)] = [a_{ij}(x)]^{-1}$ , para todo  $x \in \Omega$ . Uma *métrica de Randers* sobre  $\Omega$  é uma função  $F: \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x, y_x) = \alpha(x, y_x) + \beta(x, y_x).$$

É possível perceber essas métricas como uma perturbação de uma métrica Riemanniana  $\alpha$  por  $\beta$ .

**Exemplo 2.3** Considere a Métrica Riemanniana do Exemplo 2.2 e definamos a aplicação  $\beta = b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2$ , onde as funções  $b_1, b_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis e dadas por  $b_1(x) = 0$  e  $b_2(x) = x_2$ . Note que  $b_1$  e  $b_2$  verificam a condição (2.3) no caso que  $0 < x_2 < 1$ .

De fato, a matriz inversa de  $[a_{ij}(x)]$  é dada por

$$[a^{ij}(x)] = \begin{bmatrix} x_2^{-1} & 0 \\ 0 & x_2^{-1} \end{bmatrix},$$

temos que

$$\sqrt{a^{11}(x) [b_1(x)]^2 + [a^{12}(x) + a^{21}(x)] b_1(x)b_2(x) + a^{22}(x) [b_2(x)]^2} = \sqrt{x_2}.$$

Desta maneira, para que a raiz acima seja menor do que 1, basta que  $0 < x_2 < 1$ .

Assim, vamos definir a Métrica de Randers sobre o subconjunto

$$\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < x_2 < 1\} \subset \Omega.$$

Portanto, a Métrica de Randers  $F: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$F(x, y_x) = \alpha(x, y_x) + \beta(x, y_x) = \sqrt{x_2(y_1^2 + y_2^2)} + x_2 y_2.$$

Considerando que na próxima seção será feita uma investigação usando de aplicações de uma métrica do tipo Randers, é oportuno expor as seguintes definições:

**Definição 2.14 (Comprimento de Arco do Tipo Randers)** Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$  uma parametrização de uma curva regular por partes. O *comprimento de arco do tipo Randers* é definido como sendo

$$L_F(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \gamma'(t)) dt, \quad (2.4)$$

onde  $F$  é uma métrica de Randers.

Note que, esta definição propicia um recurso para calcular o comprimento de qualquer curva sobre uma métrica de Randers.

**Definição 2.15 (Distância Induzida por uma Métrica  $F$ )** Considere o comprimento de arco definido em (2.4). Para quaisquer  $P, Q \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , a *distância induzida pela métrica  $F$*  é definida pela quantidade

$$d_F(P, Q) = \inf_{\gamma} \{L_F(\gamma)\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre o conjunto de todas as curvas regulares por partes  $\gamma$  tais que  $\gamma(a) = P$  e  $\gamma(b) = Q$ .

### 3 A MÉTRICA $\lambda$ -FUNK

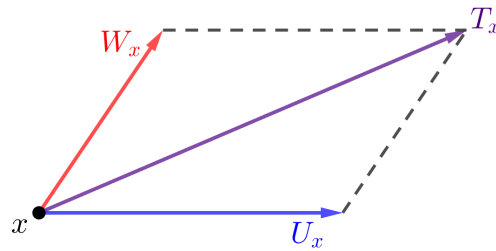
Neste capítulo, vamos discutir sobre um dos temas centrais deste estudo: um caso específico das métricas do tipo Randers, a *métrica de  $\lambda$ -Funk* em um disco aberto do plano euclidiano centrado na origem do plano cartesiano, a qual é, por sua vez, uma perturbação da métrica de Funk. Para introduzir este tópico, seguimos de perto a exposição detalhada em (CHÁVEZ et al., 2025), onde é apresentada a construção dessa métrica e suas interpretações geométricas. Dessa forma, primeiramente será feita uma análise das métricas de Randers em um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , obtidas por meio de um problema de navegação de Zermelo. Ou seja, esse problema físico de uma embarcação navegando em um corpo de água será transformado em um problema geométrico. É válido salientar que, qualquer problema de navegação de Zermelo em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  (incluindo domínios mais amplos) resulta em uma métrica de Randers e a recíproca é verdadeira (CHENG; SHEN, 2012).

Suponha que um barco está navegando e possui vetor posição  $c: [0, t_0] \rightarrow \Omega$  e está sendo estimulado por uma força interna (como a força de um motor) com vetor velocidade  $c'(t)$  de comprimento constante,  $\|c'(t)\| = 1$ . Na ausência de forças de influências externas (como ventos ou correntes), o menor caminho para um barco se deslocar de um ponto a outro é descrito por um segmento de reta. Desse modo,

$$\int_0^t \|c'(\tau)\| d\tau = \int_0^t 1 d\tau = t.$$

Isso implica que a distância percorrida em linha reta corresponde precisamente ao tempo gasto na travessia. Neste momento, será feita à análise do que acontece em um cenário que inclua influências externas.

Sendo  $x \in \Omega$  a posição do barco e  $U_x$  sua velocidade, a qual constante sofre impulso de sua força interna. Considerando que exista uma força externa com um vetor de velocidade  $W_x$  (que pode ser, por exemplo, a força do vento ou da correnteza da água), sendo  $\|W_x\| < \|U_x\| = 1$ , permite ao barco se movimentar em todas as direções. Unindo os dois vetores de velocidade que agem sobre o barco,  $T_x = U_x + W_x$ , o resultado  $T_x$  gera a direção e a velocidade do barco nesse ponto  $x$ .

Figura 3 – Força resultante  $T_x$ 

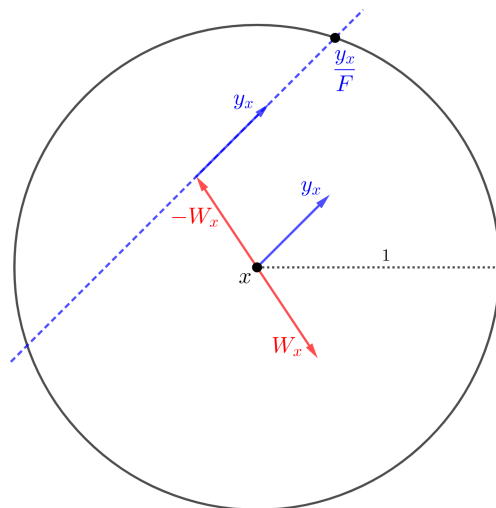
Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

Pela condição  $\|U_x\| = 1$ , obtemos

$$\|T_x - W_x\| = \|U_x\| = 1. \quad (3.1)$$

Desse modo, mesmo com o vento, a velocidade efetiva (ajustada) mantém norma unitária. Além disso, para qualquer vetor  $y_x \in \mathbb{R}^2$  não nulo, existe uma única solução  $F = F(x, y_x) > 0$  para a seguinte equação: (Veja Figura 4)

$$\left\| \frac{y_x}{F(x, y_x)} - W_x \right\| = 1. \quad (3.2)$$

Figura 4 – Solução positiva  $F$ 

Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

Substituindo  $y_x = T_x$  em (3.2) e usando (3.1), temos:

$$T_x = \frac{T_x}{F(x, T_x)} \Rightarrow F(x, T_x) = 1.$$

Sendo assim, dada uma curva suave qualquer  $c: [0, t_0] \rightarrow \Omega$  com  $c'(t) = T_{c(t)}$ , o comprimento do arco do tipo Randers  $\mathcal{L}_F(c)$  de  $c$  é dado por (2.4)

$$\mathcal{L}_F(c) = \int_0^{t_0} F(c(\tau), T_{c(\tau)}) d\tau = \int_0^{t_0} 1 d\tau = t_0. \quad (3.3)$$

**Observação 3.1** A equação (3.3) corresponde ao cálculo do comprimento de arco associado à métrica  $F$ , descrevendo o tempo de duração do percurso de um barco navegando sobre uma curva  $c$ . Isso significa que, quando há a ação de uma força externa  $W_x$ , para encontrar os caminhos mais curtos, não basta utilizar da métrica Euclidiana, é necessário estar munido da métrica  $F$ . Assim, a distância entre pontos pode ser descrita como o tempo mínimo necessário para deslocar-se de um local a outro, sendo este tempo determinado pelo comprimento de arco do tipo Randers da métrica  $F$  ao longo do trajeto geodésico que conecta tais pontos.

A fim de adquirir uma fórmula para a função  $F$ , de (3.2), temos que:

$$\|y_x - FW_x\|^2 = F^2. \quad (3.4)$$

Usando a propriedade (2.1) da norma euclidiana e do produto interno e o item 3 das Propriedades 2.1, é possível calcular  $\|y_x - FW_x\|^2$ :

$$\|y_x - FW_x\|^2 = \|y_x\|^2 - 2F\langle y_x, W_x \rangle + F^2\|W_x\|^2.$$

Substituindo na equação (3.4):

$$\|y_x\|^2 - 2F\langle y_x, W_x \rangle + F^2\|W_x\|^2 = F^2,$$

equivalentemente,

$$(1 - \|W_x\|^2)F^2 + 2F\langle y_x, W_x \rangle - \|y_x\|^2 = 0.$$

Note que, a expressão acima é uma equação de segundo grau que tem como variável  $F$ , com os coeficientes  $a = (1 - \|W_x\|^2)$ ,  $b = 2\langle y_x, W_x \rangle$ ,  $c = -\|y_x\|^2$ . Portanto, é possível calcular as raízes desta equação usando a fórmula geral para resolução da equação do segundo grau:

$$F = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Substituindo os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ :

$$F = \frac{-2\langle y_x, W_x \rangle \pm \sqrt{(2\langle y_x, W_x \rangle)^2 - 4(1 - \|W_x\|^2)(-\|y_x\|^2)}}{2(1 - \|W_x\|^2)},$$

equivalentemente,

$$F = \frac{-\langle y_x, W_x \rangle \pm \sqrt{\langle y_x, W_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)}}{1 - \|W_x\|^2}. \quad (3.5)$$

Com a finalidade de certificar que  $F > 0$ , note que  $y_x \neq 0$  e  $\|W_x\| < 1$ , por isso,

$$\|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2) > 0.$$

Ademais, ao somar  $\langle y_x, W_x \rangle^2$  na desigualdade, obtemos

$$\langle y_x, W_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2) > \langle y_x, W_x \rangle^2.$$

Assim, extraindo a raiz quadrada de ambos os lados,

$$-\langle y_x, W_x \rangle + \sqrt{\langle y_x, W_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)} > 0,$$

e

$$-\langle y_x, W_x \rangle - \sqrt{\langle y_x, W_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)} < 0,$$

isto é, somente uma das raízes de  $F$  é positiva, como já foi notado em (3.2).

Portanto, de (3.5), temos que a métrica  $F$  é dada por:

$$F = \frac{\sqrt{\langle y_x, W_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)} - \langle y_x, W_x \rangle}{1 - \|W_x\|^2}. \quad (3.6)$$

Perceba que, a métrica adquirida é do tipo Randers, de acordo com a Definição 2.13.

Realmente, temos que  $F$  é da forma  $F = \alpha + \beta$ , onde

$$\alpha = \frac{\sqrt{\langle y_x, W_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)}}{1 - \|W_x\|^2} \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{\langle y_x, W_x \rangle}{1 - \|W_x\|^2}.$$

**Exemplo 3.1 (Métrica de Funk sobre o Disco Unitário e Aberto)** (Ver (FUNK, 1929))

Considerando o campo vetorial  $W_x = -x = (-x_1, -x_2)$  definido sobre  $\mathbb{B}^2$  o disco (ou bola) aberto, unitário e centrado na origem do plano cartesiano (veja Figura 5). Dado  $y_x = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  um vetor qualquer, a métrica  $F$  adquirida em (3.6) pode ser representada por:

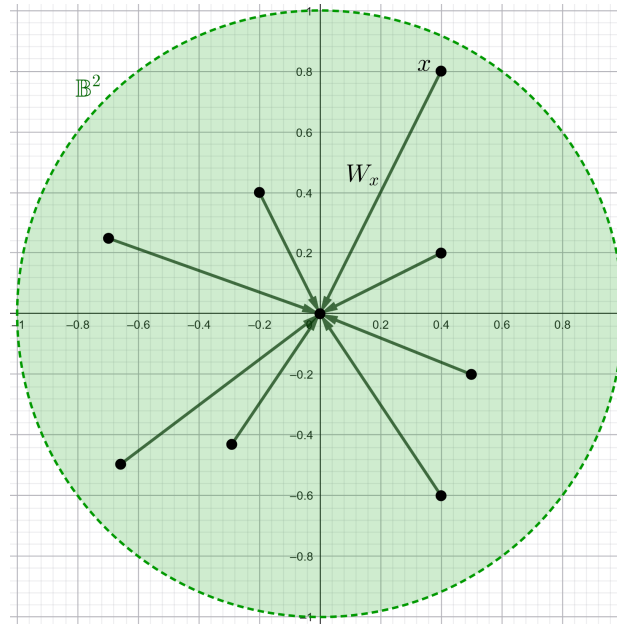
$$F(x, y_x) = \frac{\sqrt{(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (y_1^2 + y_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}}{1 - x_1^2 - x_2^2} + \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Ademais, isso pode ser escrito como

$$F(x, y_x) = \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + 2a_{12}(x)y_1 y_2 + a_{22}(x)y_2^2} + b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2,$$

em que os coeficientes são dados por

$$[a_{ij}(x)] = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2} \begin{pmatrix} 1 - x_2^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & 1 - x_1^2 \end{pmatrix}, \quad b_1(x) = \frac{x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2} \quad \text{e} \quad b_2(x) = \frac{x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Figura 5 – Campo de forças sobre  $\mathbb{B}^2$ 

Fonte: Autores (2025). Construção no *software Geogebra 6.0*.

Com o objetivo de modelar a situação de um barco navegando em um lago, em que o campo de vetores  $W_x$ , representa a ação de uma força (como vento ou correnteza) radial, que por conta do sinal negativo, aponta para o centro do lago. Adicionamos um parâmetro de intensidade lambda, o qual define o quão forte é a força em cada ponto do lago, o tamanho do lago e o grau de “distorção” da geometria em relação ao espaço euclidiano. Assim, com uma constante não negativa, será definida a Métrica de  $\lambda$ -Funk, considerando o campo de vetores  $W_x = -\lambda(x_1, x_2)$ . Para derivar uma fórmula para essa métrica a partir da definição geral da métrica de Funk, basta substituímos o campo de vetores  $W_x$ , por esse campo de vetores específico,  $W_x = -\lambda(x_1, x_2) = -\lambda x$  em (3.6), calculando os termos necessários, nesse caso

$$\langle y, W_x \rangle = -\lambda \langle x, y \rangle \text{ e } \|W_x\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2.$$

Agora ao substituir na (3.6), obtemos:

$$F = \frac{\sqrt{\lambda^2 \langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2)}}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} + \frac{\lambda \langle x, y \rangle}{1 - \lambda^2 \|x\|^2}.$$

Ainda, para  $\lambda > 0$ , ao aplicar a condição física inicial,  $\|W_x\| < 1$ , nesse campo de vetores  $W_x = -\lambda x$ , temos que,

$$\|W_x\| = \|-\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$$

logo,

$$\lambda \cdot \|x\| < 1 \Rightarrow \|x\| < \frac{1}{\lambda}.$$

Isso caracteriza o espaço de definição da métrica,

$$\|x\| < \frac{1}{\lambda}$$

representa todos os pontos do lago em que o barco consegue navegar livremente, ou seja, esse lago terá um raio de  $1/\lambda$ , que é descrito por um disco aberto centrado na origem do  $\mathbb{R}^2$  com raio  $r = 1/\lambda$ . Portanto, a Métrica de  $\lambda$ -Funk pode ser expressa pelo seguinte:

**Definição 3.1 (Métrica de  $\lambda$ -Funk)** A métrica de  $\lambda$ -Funk  $F: \Omega_\lambda \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , é definida por:

$$F = \frac{\sqrt{\lambda^2 \langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2)}}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} + \frac{\lambda \langle x, y \rangle}{1 - \lambda^2 \|x\|^2}, \quad (3.7)$$

onde  $\Omega_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < 1/\lambda\}$  para  $\lambda > 0$ , e  $\Omega_0 = \mathbb{R}^2$ .

**Observação 3.2** Note que, a métrica definida na (3.7) se torna a métrica euclidiana clássica quando  $\lambda = 0$  e a métrica de Funk em  $\mathbb{B}^2$  na equação (3.6) quando  $\lambda = 1$ .

**Observação 3.3** A métrica de  $\lambda$ -Funk é uma métrica de Finsler, pois cumpre as quatro propriedades estabelecidas na Definição 2.10. De fato, vejamos a verificação de cada propriedade a seguir:

**Afirmção 3.1**  $F(x, y)$  é  $C^\infty$  para todo  $x \in \Omega_\lambda$  e  $y \neq 0$ .

**Demonstração.** A função  $F$  é composta por operações suaves, o produto escalar  $\langle x, y \rangle$ , a norma euclidiana  $\|y\|$ , a raiz quadrada e a divisão. O denominador  $D = 1 - \lambda^2 \|x\|^2$  é positivo para  $x \in \Omega_\lambda$ , pois  $\|x\| < 1/\lambda$  implica  $\lambda^2 \|x\|^2 < 1$ , logo  $D > 0$ . Além disso, analisando o numerador, o argumento da raiz quadrada é  $Q = \lambda^2 \langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2)$ . Assim, para  $y \neq 0$ , temos

$$\lambda^2 \langle x, y \rangle^2 \geq 0 \text{ e } \|y\|^2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2) = \|y\|^2 D > 0,$$

daí,  $Q > 0$  pois é soma de um número positivo e um não-negativo. Portanto,  $Q > 0$  para  $y \neq 0$ , e a raiz quadrada é suave em domínios onde seu argumento é positivo. Como todas as outras operações são suaves, concluímos que  $F(x, y)$  é  $C^\infty$  para  $x \in \Omega_\lambda$  e  $y \neq 0$ .

**Afirmção 3.2**  $F(x, y) > 0$  para todo  $x \in \Omega_\lambda$  e  $y \neq 0$ .

**Demonstração.** A demonstração já foi realizada por construção quando obtivemos a equação (3.6) para um campo  $W_x$  tal que  $\|W_x\| < 1$ .

**Afirmção 3.3**  $F(x, \delta y) = \delta F(x, y)$  para qualquer  $\delta > 0$ .

**Demonstração.** Seja  $\delta > 0$  qualquer. Então:

$$F(x, \delta y) = \frac{\sqrt{\lambda^2 \langle x, \delta y \rangle^2 + \|\delta y\|^2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2)}}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} + \frac{\lambda \langle x, \delta y \rangle}{1 - \lambda^2 \|x\|^2}.$$

Usando a linearidade do produto interno e da norma:

$$\langle x, \delta y \rangle = \delta \langle x, y \rangle \quad \text{e} \quad \|\delta y\| = \delta \|y\|,$$

temos:

$$\begin{aligned} F(x, \delta y) &= \frac{\sqrt{\lambda^2 \delta^2 \langle x, y \rangle^2 + \delta^2 \|y\|^2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2)}}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} + \frac{\lambda \delta \langle x, y \rangle}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} \\ &= \delta \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2 \langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2)}}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} + \delta \cdot \frac{\lambda \langle x, y \rangle}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} \\ &= \delta \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 \langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2)}}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} + \frac{\lambda \langle x, y \rangle}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} \right) \\ F(x, \delta y) &= \delta F(x, y). \end{aligned}$$

Portanto,  $F$  é homogênea de grau 1 em  $y$ .

**Afirmção 3.4** A matriz hessiana de  $\frac{1}{2}F^2$  é definida positiva.

**Demonstração.** Como o cálculo na matriz Hessiana seria muito extenso e tedioso, vamos utilizar um resultado do livro (HRYNIEWICZ; SALOMÃO, 2013) sobre a *norma de Minkowski*, resumidamente, isso significa que essa norma cumpre com as quatro propriedades que estamos provando, incluindo esta última sobre a Matriz Hessiana. Mais especificamente, o Exercício 1.2.12 em (HRYNIEWICZ; SALOMÃO, 2013), o qual afirma que para uma métrica do tipo Randers  $F$  é chamada de *norma de Minkowski do tipo Randers* se, e somente se,

$$\|\beta\|_\alpha := \sqrt{a^{11}(x)[b_1(x)]^2 + [a^{12}(x) + a^{21}(x)]b_1(x)b_2(x) + a^{22}(x)[b_2(x)]^2} < 1.$$

Para isso, vamos primeiro lembrar que a métrica de  $\lambda$ -Funk dada pela (3.7) é expressa por:

$$F = \frac{\sqrt{\lambda^2 \langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2)}}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} + \frac{\lambda \langle x, y \rangle}{1 - \lambda^2 \|x\|^2},$$

Devido a Definição 2.13, sabemos que por ser um caso particular da métrica do tipo Randers, a métrica de  $\lambda$ -Funk pode ser escrita na forma:

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y).$$

Em que  $\alpha(x, y)$  é dado por:  $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + (a_{12}(x) + a_{21}(x))y_1y_2 + a_{22}(x)y_2^2}$ . Lembrando que por serem coeficientes de uma matriz simétrica  $a_{12}(x) = a_{21}(x)$ . E  $\beta(x, y)$  é descrito por:  $\beta(x, y) = b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2$ .

Nesse caso, para  $F$ , temos que  $\alpha(x, y)$  é dado pela expressão:

$$\frac{\sqrt{\lambda^2 \langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2)}}{1 - \lambda^2 \|x\|^2}. \quad (3.8)$$

E  $\beta(x, y)$  é descrito por:

$$\frac{\lambda \langle x, y \rangle}{1 - \lambda^2 \|x\|^2}. \quad (3.9)$$

Claramente, comparando a expressão (3.9) com  $\beta(x, y)$  temos

$$b_1(x) = \frac{\lambda x_1}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} \text{ e } b_2(x) = \frac{\lambda x_2}{1 - \lambda^2 \|x\|^2}.$$

Comparando a expressão (3.8) com  $\alpha(x, y)$  podemos determinar os coeficientes  $a_{11}(x)$ ,  $a_{12}(x)$ ,  $a_{21}(x)$  e  $a_{22}(x)$ .

Denotemos  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$ . Como para as duas expressões temos uma raiz, vamos desenvolver o cálculo no radicando

$$\begin{aligned} \lambda^2 \langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2) &= \lambda^2 (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (y_1^2 + y_2^2) (1 - \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2)) \\ &= \lambda^2 (x_1^2 y_1^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_2^2) + y_1^2 + y_2^2 \\ &\quad - \lambda^2 (x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_2^2) \\ &= (1 - \lambda^2 x_2^2) y_1^2 + 2\lambda^2 x_1 x_2 y_1 y_2 + (1 - \lambda^2 x_1^2) y_2^2. \end{aligned}$$

Portanto, essa é nossa relação para o radicando de (3.8) e ao substituí-lo, temos:

$$\frac{\sqrt{(1 - \lambda^2 x_2^2) y_1^2 + 2\lambda^2 x_1 x_2 y_1 y_2 + (1 - \lambda^2 x_1^2) y_2^2}}{1 - \lambda^2 \|x\|^2}.$$

Para incluir o denominador na raiz quadrada, o elevamos ao quadrado, assim obtemos:

$$\sqrt{\frac{(1 - \lambda^2 x_2^2)y_1^2 + 2\lambda^2 x_1 x_2 y_1 y_2 + (1 - \lambda^2 x_1^2)y_2^2}{(1 - \lambda^2 \|x\|^2)^2}}.$$

Dessa forma, temos que os coeficientes referentes a  $\alpha(x, y)$ , são:

$$a_{11}(x) = \frac{1 - \lambda^2 x_2^2}{(1 - \lambda^2 \|x\|^2)^2}, \quad a_{12}(x) = a_{21}(x) = \frac{\lambda^2 x_1 x_2}{(1 - \lambda^2 \|x\|^2)^2}, \quad a_{22}(x) = \frac{1 - \lambda^2 x_1^2}{(1 - \lambda^2 \|x\|^2)^2}.$$

Desse modo, podemos encontrar a matriz  $[a_{ij}(x)]$ :

$$[a_{ij}(x)] = \frac{1}{(1 - \lambda^2 \|x\|^2)^2} \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 x_2^2 & \lambda^2 x_1 x_2 \\ \lambda^2 x_1 x_2 & 1 - \lambda^2 x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Para facilitar as contas, utilizaremos a notação  $\rho = 1 - \lambda^2 \|x\|^2$ . Reescrevendo temos:

$$[a_{ij}(x)] = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 x_2^2 & \lambda^2 x_1 x_2 \\ \lambda^2 x_1 x_2 & 1 - \lambda^2 x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \lambda^2 x_2^2}{\rho^2} & \frac{\lambda^2 x_1 x_2}{\rho^2} \\ \frac{\lambda^2 x_1 x_2}{\rho^2} & \frac{1 - \lambda^2 x_1^2}{\rho^2} \end{pmatrix}.$$

Agora fazendo o cálculo do determinante da matriz, temos:

$$\begin{aligned} \det[a_{ij}(x)] &= \frac{(1 - \lambda^2 x_2^2)(1 - \lambda^2 x_1^2)}{\rho^4} - \frac{\lambda^4 x_1^2 x_2^2}{\rho^4} \\ &= \frac{1 - \lambda^2 x_1^2 - \lambda^2 x_2^2 + \lambda^4 x_1^2 x_2^2 - \lambda^4 x_1^2 x_2^2}{\rho^4} \\ &= \frac{1 - \lambda^2 x_1^2 - \lambda^2 x_2^2}{\rho^4} \\ &= \frac{1 - \lambda^2 \|x\|^2}{\rho^4} \\ &= \frac{\rho}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^3}. \end{aligned}$$

Com isso, somos capazes de calcular a matriz inversa:

$$[a^{ij}(x)] = [a_{ij}^{-1}(x)] = \rho^3 \begin{pmatrix} \frac{1 - \lambda^2 x_1^2}{\rho^2} & -\frac{\lambda^2 x_1 x_2}{\rho^2} \\ -\frac{\lambda^2 x_1 x_2}{\rho^2} & \frac{1 - \lambda^2 x_2^2}{\rho^2} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 x_1^2 & -\lambda^2 x_1 x_2 \\ -\lambda^2 x_1 x_2 & 1 - \lambda^2 x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Lembrando que  $\rho = 1 - \lambda^2 \|x\|^2$ , podemos simplificar, obtendo:

$$[a^{ij}(x)] = (1 - \lambda^2 \|x\|^2) \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 x_1^2 & -\lambda^2 x_1 x_2 \\ -\lambda^2 x_1 x_2 & 1 - \lambda^2 x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos

$$a^{11}(x) = (1 - \lambda^2 \|x\|^2)(1 - \lambda^2 x_1^2), \quad a^{22}(x) = (1 - \lambda^2 \|x\|^2)(1 - \lambda^2 x_2^2),$$

$$a^{12}(x) = a^{21}(x) = -\lambda^2 x_1 x_2 (1 - \lambda^2 \|x\|^2).$$

Agora, podemos calcular  $\|\beta\|_\alpha$ . Para eliminar a raiz quadrada, vamos elevar  $\|\beta\|_\alpha$  ao quadrado:

$$\begin{aligned} \|\beta\|_\alpha^2 &= a^{11}(x)[b_1(x)]^2 + [a^{12}(x) + a^{21}(x)]b_1(x)b_2(x) + a^{22}(x)[b_2(x)]^2 \\ &= (1 - \lambda^2 \|x\|^2)(1 - \lambda^2 x_1^2) \left( \frac{\lambda x_1}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} \right)^2 + (1 - \lambda^2 \|x\|^2)(1 - \lambda^2 x_2^2) \left( \frac{\lambda x_2}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} \right)^2 \\ &\quad - 2(1 - \lambda^2 \|x\|^2)\lambda^2 x_1 x_2 \left( \frac{\lambda x_1}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} \right) \left( \frac{\lambda x_2}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} \left( (1 - \lambda^2 x_1^2)\lambda^2 x_1^2 - 2\lambda^4 x_1^2 x_2^2 + (1 - \lambda^2 x_2^2)\lambda^2 x_2^2 \right) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} \left( \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2) - \lambda^4 (x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4) \right) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda^2 \|x\|^2} \left( \lambda^2 \|x\|^2 - \lambda^4 \|x\|^4 \right) \\ &= \lambda^2 \|x\|^2 < 1 \text{ (pois } x \in \Omega_\lambda \text{)}. \end{aligned}$$

Sendo assim,  $\|\beta\|_\alpha < 1$ . Dessa forma, provamos que a norma de  $F$  é uma *norma de Minkowski do tipo Randers* e por isso cumpre cada uma das quatro propriedades, o que inclui a matriz Hessiana positiva.

**Observação 3.4** Devido a observação anterior, mais precisamente da verificação da Propriedade 3 da métrica de Finsler, resulta que, o comprimento de arco do tipo Funk é *invariante mediante qualquer reparametrização da curva  $c$  na equação (3.3)*. De fato, ao tomar uma  $\phi: [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$  reparametrização diferenciável de classe  $C^1$  e com derivada positiva  $\phi'(t) > 0$  (porque isso mantém a direção de  $c$ ). Adotando a mudança de variável  $u = \phi(t)$  ( $du = \phi'(t)dt$ ) em (3.3) e considerando a homogeneidade da  $F$ , obtemos:

$$\int_0^{t_0} F(c(\phi(t)), c'(\phi(t))) \phi'(t) dt = \int_{\phi(0)}^{\phi(t_0)} F(c(u), c'(u)) du,$$

isso é precisamente o comprimento de arco do tipo Randers, em (3.3).

Para as seguintes definições, é necessário destacar o seguinte resultado, o qual caracteriza as métricas de Finsler esfericamente simétricas que são projetivamente planas (ou seja, as geodésicas são linhas retas).

**Teorema 3.1 (Teorema 1.1 em (HUANG; MO, 2013))** Seja  $F = \|y\|\phi\left(\|x\|, \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|}\right)$  uma métrica de Finsler esfericamente simétrica em  $\mathbb{B}^n(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < \mu\}$ . Assim,  $F$  é

projetivamente plana se, e somente se,  $\phi = \phi(r, s)$  satisfaz  $r\phi_{ss} - \phi_r + s\phi_{rs} = 0$ , em que os subíndices  $r, s$  descrevem as derivadas parciais em relação a  $r$  e  $s$ , respectivamente.

**Teorema 3.2** A métrica  $\lambda$ -Funk descrita em (3.6) é projetivamente plana.

**Demonstração.** Perceba que (3.6) pode ser reescrita como  $F = \|y\|\phi\left(\|x\|, \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|}\right)$  em que

$$\phi(r, s) = \frac{\sqrt{1 + \lambda^2(s^2 - r^2)}}{1 - \lambda^2 r^2} + \frac{\lambda s}{1 - \lambda^2 r^2}. \quad (3.10)$$

Derivando  $\phi$  em relação  $r$  e  $s$  em (3.10), adquirimos

$$\phi_r = \frac{\lambda^2 r(1 + \lambda^2[2s^2 - r^2])}{(1 - \lambda^2 r^2)^2(1 + \lambda^2[s^2 - r^2])^{1/2}} + \frac{2\lambda^3 sr}{(1 - \lambda^2 r^2)^2} \quad (3.11)$$

e

$$\phi_s = \frac{\lambda^2 s}{(1 - \lambda^2 r^2)(1 + \lambda^2[s^2 - r^2])^{1/2}} + \frac{\lambda}{1 - \lambda^2 r^2}. \quad (3.12)$$

Ao derivar (3.11) e (3.12) em relação a  $s$ , obtemos

$$\phi_{rs} = \frac{\lambda^4 rs(3 + \lambda^2[2s^2 - 3r^2])}{(1 - \lambda^2 r^2)^2(1 + \lambda^2[s^2 - r^2])^{3/2}} + \frac{2\lambda^3 r}{(1 - \lambda^2 r^2)^2} \quad (3.13)$$

e

$$\phi_{ss} = \frac{\lambda^2}{(1 + \lambda^2[s^2 - r^2])^{3/2}}. \quad (3.14)$$

Dessa maneira, usando (3.11), (3.13), e (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} & r\phi_{ss} - \phi_r + s\phi_{rs} \\ & \quad \parallel \\ & \frac{\lambda^2 r}{(1 + \lambda^2[s^2 - r^2])^{3/2}} - \frac{\lambda^2 r(1 + \lambda^2[2s^2 - r^2])}{(1 - \lambda^2 r^2)^2(1 + \lambda^2[s^2 - r^2])^{1/2}} - \frac{2\lambda^3 sr}{(1 - \lambda^2 r^2)^2} \\ & \quad + \frac{\lambda^4 rs^2(3 + \lambda^2[2s^2 - 3r^2])}{(1 - \lambda^2 r^2)^2(1 + \lambda^2[s^2 - r^2])^{3/2}} + \frac{2\lambda^3 rs}{(1 - \lambda^2 r^2)^2} \\ & \quad \parallel \\ & \frac{\lambda^2 r \left[ (1 - \lambda^2 r^2)^2 - (1 + \lambda^2[2s^2 - r^2])(1 + \lambda^2[s^2 - r^2]) + \lambda^2 s^2(3 + \lambda^2[2s^2 - 3r^2]) \right]}{(1 - \lambda^2 r^2)^2(1 + \lambda^2[s^2 - r^2])^{3/2}} \\ & \quad \parallel \\ & \frac{\lambda^2 r \left[ 1 + \lambda^2[3s^2 - 2r^2] + \lambda^4[2s^4 - 3r^2 s^2 + r^4] - (1 + \lambda^2[2s^2 - r^2])(1 + \lambda^2[s^2 - r^2]) \right]}{(1 - \lambda^2 r^2)^2(1 + \lambda^2[s^2 - r^2])^{3/2}} \\ & \quad \parallel \\ & 0. \end{aligned}$$

Sendo assim, pelo Teorema 3.1, temos que  $\lambda$ -Funk métrica dada por (3.6) é projetivamente plana em  $\Omega_\lambda$ .

#### 4 DISTÂNCIA INDUZIDA PELA MÉTRICA DE $\lambda$ -FUNK

Como foi visto, os menores trajetos na Métrica de  $\lambda$ -Funk são realizados por retas, isto é chamado de geodésicas, as quais são cuvas capazes de minimizar a distância. Por conta disso, o cálculo de distância se torna menos complicado. Para mais informações acerca de geodésias, consulte (CARMO, 2019), enquanto seu estudo em espaços de Finsler está presente em (SHEN, 2001).

Nesse sentido, conforme exposto na Observação 3.1, a distância induzida pela métrica de  $\lambda$ -Funk pode ser calculada por meio da integral do comprimento de arco do tipo Randers, mostrado na Definição 2.15. Dessa forma, é possível calcular o tempo de um percurso de um barco, indo de um ponto a outro, tomando a curva que liga esses pontos, como sendo a parametrização de um segmento reta no espaço métrico definido por  $\Omega_\lambda$ .

Lembrando que, na situação de navegação, o barco estaria se deslocando livremente em um lago circular de raio  $r = 1/\lambda$ , desse modo o objetivo é calcular o menor caminho que o barco pode fazer para ir de um ponto inicial  $P$  a um ponto final  $Q$ , para que assim, essa viagem seja realizada no menor tempo capaz.

**Teorema 4.1** Seja  $\lambda > 0$ ,  $\Omega_\lambda = \mathbb{B}^2(1/\lambda)$ . Dados os pontos  $P, Q \in \Omega_\lambda$ , a distância (ou tempo de viagem) induzida pela métrica de  $\lambda$ -Funk, para  $P \neq Q$ , é expressa por:

$$d_F(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 \langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \lambda^2 \|P\|^2) \|Q - P\|^2} - \lambda \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{\lambda^2 \langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \lambda^2 \|P\|^2) \|Q - P\|^2} - \lambda \langle Q, Q - P \rangle} \right), \quad (4.1)$$

em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\| \cdot \|$  são produto interno e a norma Euclidiana usuais respectivamente, e  $d_F(P, P) = 0$ .

**Demonstração.** Sejam  $P, Q \in \Omega_\lambda \subset \mathbb{R}^2$  pontos diferentes. Pelo Teorema 3.2, devido a métrica de “ $\lambda$ -Funk”  $F$  ser projetivamente plana, tomamos a parametrização da curva  $c: [0, 1] \rightarrow \Omega_\lambda$  definida por:

$$c(t) = tQ + (1 - t)P = P + (Q - P)t, \quad (4.2)$$

que liga os pontos  $P$  e  $Q$ . Perceba que  $c(0) = P$  e  $c(1) = Q$ . Derivando (4.2) em relação a  $t$ :

$$c'(t) = Q - P. \quad (4.3)$$

De acordo com a Definição 2.11, a distância “ $\lambda$ -Funk” de  $P$  até  $Q$ , denotada por  $d_F(P, Q)$ , é descrita por:

$$d_F(P, Q) = \mathcal{L}_F(c) = \int_0^1 F(c(t), c'(t)) dt, \quad (4.4)$$

onde  $F$  é fornecido por (3.7). Ao substituir (4.2) e (4.3) em (4.4), obtemos:

$$\begin{aligned} d_F(P, Q) &= \int_0^1 \left[ \frac{\sqrt{\lambda^2 \langle c(t), c'(t) \rangle^2 + \|c'(t)\|^2 (1 - \lambda^2 \|c(t)\|^2)}}{1 - \lambda^2 \|c(t)\|^2} + \frac{\lambda \langle c(t), c'(t) \rangle}{1 - \lambda^2 \|c(t)\|^2} \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\lambda^2 \langle P + (Q - P)t, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2 (1 - \lambda^2 \|P + (Q - P)t\|^2)}}{1 - \lambda^2 \|P + (Q - P)t\|^2} dt \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\lambda \langle P + (Q - P)t, Q - P \rangle}{1 - \lambda^2 \|P + (Q - P)t\|^2} dt. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Note que, usando as Propriedades 2.1, obtemos

$$\begin{aligned} &\lambda^2 \langle P + (Q - P)t, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2 (1 - \lambda^2 \|P + (Q - P)t\|^2) \\ &\quad \parallel \\ &\quad \|Q - P\|^2 \left( 1 - \lambda^2 \left[ \|P\|^2 + 2 \langle P, Q - P \rangle t + \|Q - P\|^2 t^2 \right] \right) \\ &\quad + \lambda^2 (\langle P, Q - P \rangle + \|Q - P\|^2 t)^2 \\ &\quad \parallel \\ &\quad \lambda^2 \left( \langle P, Q - P \rangle^2 + 2 \langle P, Q - P \rangle \|Q - P\|^2 t + \|Q - P\|^4 t^2 \right) \\ &+ \|Q - P\|^2 (1 - \lambda^2 \|P\|^2) - \lambda^2 \left( 2 \langle P, P - Q \rangle \|Q - P\|^2 t + \|Q - P\|^4 t^2 \right) \\ &\quad \parallel \\ &\quad \lambda^2 \langle P, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2 (1 - \lambda^2 \|P\|^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por outro lado,

$$\lambda \langle P + (Q - P)t, Q - P \rangle = \lambda \langle P, Q - P \rangle + \lambda \|Q - P\|^2 t \quad (4.7)$$

e

$$\begin{aligned} 1 - \lambda^2 \|P + (Q - P)t\|^2 &= 1 - \lambda^2 \left( \|P\|^2 + 2 \langle P, Q - P \rangle t + \|Q - P\|^2 t^2 \right) \\ &= (1 - \lambda^2 \|P\|^2) - 2 \lambda^2 \langle P, Q - P \rangle t - \lambda^2 \|Q - P\|^2 t^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Substituindo as equações (4.6), (4.7) e (4.8) em (4.5), temos

$$d_F(P, Q) = d_F(P, Q)_1 + d_F(P, Q)_2,$$

onde

$$d_F(P, Q)_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{\|Q - P\|^2 (1 - \lambda^2 \|P\|^2) + \lambda^2 \langle P, Q - P \rangle^2}}{(1 - \lambda^2 \|P\|^2) - 2 \lambda^2 \langle P, Q - P \rangle t - \lambda^2 \|Q - P\|^2 t^2} dt. \quad (4.9)$$

e

$$d_F(P, Q)_2 = \int_0^1 \frac{\lambda \|Q - P\|^2 t + \lambda \langle P, Q - P \rangle}{(1 - \lambda^2 \|P\|^2) - 2\lambda^2 \langle P, Q - P \rangle t - \lambda^2 \|Q - P\|^2 t^2} dt. \quad (4.10)$$

Para simplificar a notação é definido  $k$  como sendo:

$$k = \|Q - P\|^2(1 - \lambda^2 \|P\|^2) + \lambda^2 \langle P, Q - P \rangle^2 > 0 \text{ (pois } P \neq Q). \quad (4.11)$$

Repare que:

$$(1 - \lambda^2 \|P\|^2) - 2\lambda^2 \langle P, Q - P \rangle t - \lambda^2 \|Q - P\|^2 t^2$$

é equivalente a

$$-\lambda^2 \|Q - P\|^2 \left[ t^2 + 2 \frac{\langle P, Q - P \rangle}{\|Q - P\|^2} t - \frac{1 - \lambda^2 \|P\|^2}{\lambda^2 \|Q - P\|^2} \right].$$

Essa expressão é um polinômio de grau 2 na variável  $t$ , portanto suas raízes podem ser calculadas facilmente. Ademais, fatorando a equação acima, temos que:

$$(1 - \lambda^2 \|P\|^2) - 2\lambda^2 \langle P, Q - P \rangle t - \lambda^2 \|Q - P\|^2 t^2 = -\lambda^2 \|Q - P\|^2 (t - \tau_1)(t - \tau_2), \quad (4.12)$$

em que

$$\tau_1 = \frac{-\lambda \langle P, Q - P \rangle - \sqrt{k}}{\lambda \|Q - P\|^2}, \quad (4.13)$$

e

$$\tau_2 = \frac{-\lambda \langle P, Q - P \rangle + \sqrt{k}}{\lambda \|Q - P\|^2}. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.11) e (4.12) na (4.9), conseguimos:

$$d_F(P, Q)_1 = -\frac{\sqrt{k}}{\lambda^2 \|Q - P\|^2} \int_0^1 \frac{1}{(t - \tau_1)(t - \tau_2)} dt. \quad (4.15)$$

Por outro lado, pelo método das frações parciais, sejam  $A$  e  $B$  dois números reais tais que

$$\frac{1}{(t - \tau_1)(t - \tau_2)} = \frac{A}{t - \tau_1} + \frac{B}{t - \tau_2} = \frac{A(t - \tau_2) + B(t - \tau_1)}{(t - \tau_1)(t - \tau_2)}. \quad (4.16)$$

Para resolver a equação  $1 = A(t - \tau_2) + B(t - \tau_1)$ , recorremos ao sistema

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -A\tau_2 - B\tau_1 = 1, \end{cases}$$

cuja solução é

$$A = -\frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \text{ e } B = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}, \quad (4.17)$$

desde que  $\tau_2 - \tau_1 = \frac{2\sqrt{k}}{\lambda\|Q - P\|^2} \neq 0$ .

Daí, substituindo (4.17) em (4.16) e depois em (4.15), obtemos

$$d_F(P, Q)_1 = -\frac{\sqrt{k}}{\lambda^2\|Q - P\|^2} \int_0^1 \left[ \frac{1}{(\tau_1 - \tau_2)(t - \tau_1)} - \frac{1}{(\tau_1 - \tau_2)(t - \tau_2)} \right] dt.$$

Dessa forma, ao integrar conseguimos:

$$\begin{aligned} d(P, Q)_1 &= -\frac{\sqrt{k}}{\lambda^2\|Q - P\|^2} \left[ \frac{\ln |t - \tau_1|}{\tau_1 - \tau_2} - \frac{\ln |t - \tau_2|}{\tau_1 - \tau_2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{\sqrt{k}}{\lambda^2\|Q - P\|^2} \frac{1}{(\tau_1 - \tau_2)} \left[ \ln \left| \frac{t - \tau_1}{t - \tau_2} \right| \right]_0^1 \\ &= -\frac{\sqrt{k}}{\lambda^2\|Q - P\|^2} \frac{1}{(\tau_1 - \tau_2)} \ln \left| \frac{\tau_2(1 - \tau_1)}{\tau_1(1 - \tau_2)} \right|. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Perceba que, por (4.13) e (4.14), temos:

$$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} = -\frac{\lambda\|Q - P\|^2}{2\sqrt{k}}. \quad (4.19)$$

Portanto, substituindo (4.19) em (4.18), obtemos:

$$d_F(P, Q)_1 = \frac{1}{2\lambda} \ln \left| \frac{\tau_2(1 - \tau_1)}{\tau_1(1 - \tau_2)} \right|. \quad (4.20)$$

Por outro lado, note que

$$[(1 - \lambda^2\|P\|^2) - 2\lambda^2\langle P, Q - P \rangle t - \lambda^2\|Q - P\|^2 t^2]' = -2\lambda^2[\|Q - P\|^2 t + \langle P, Q - P \rangle]. \quad (4.21)$$

Assim, ao substituir (4.21) em (4.10), adquirimos:

$$d_F(P, Q)_2 = -\frac{1}{2\lambda} \int_0^1 \frac{[(1 - \lambda^2\|P\|^2) - 2\lambda^2\langle P, Q - P \rangle t - \lambda^2\|Q - P\|^2 t^2]'}{(1 - \lambda^2\|P\|^2) - 2\lambda^2\langle P, Q - P \rangle t - \lambda^2\|Q - P\|^2 t^2} dt.$$

Devido ao Teorema Fundamental do Cálculo, conseguimos que:

$$d_F(P, Q)_2 = -\frac{1}{2\lambda} \left[ \ln |(1 - \lambda^2\|P\|^2) - 2\lambda^2\langle P, Q - P \rangle t - \lambda^2\|Q - P\|^2 t^2| \right]_0^1. \quad (4.22)$$

Diante disso, substituindo (4.12) em (4.22), obtemos:

$$d_F(P, Q)_2 = -\frac{1}{2\lambda} \left[ \ln |-\lambda^2\|Q - P\|^2(t - \tau_1)(t - \tau_2)| \right]_0^1,$$

ou, da mesma maneira, temos que:

$$d_F(P, Q)_2 = -\frac{1}{2\lambda} \ln \left| \frac{(1 - \tau_1)(1 - \tau_2)}{\tau_1\tau_2} \right|. \quad (4.23)$$

Substituindo (4.19) e (4.23) em (4.4), adquirimos:

$$\begin{aligned}
 d_F(P, Q) &= \frac{1}{2\lambda} \ln \left| \frac{\tau_2(1-\tau_1)}{\tau_1(1-\tau_2)} \right| - \frac{1}{2\lambda} \ln \left| \frac{(1-\tau_1)(1-\tau_2)}{\tau_1\tau_2} \right| \\
 &= \frac{1}{2\lambda} \ln \left( \frac{\tau_2^2}{(1-\tau_2)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{\tau_2}{\tau_2-1} \right|.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

**Afirmação 4.1**  $\tau_2 > 1$ .

**Demonstração.** De fato, perceba que, pela definição de  $\tau_2$  em (4.14), se consegue  $\tau_2 > 1$  se, e somente se

$$\sqrt{\lambda^2 \langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \lambda^2 \|P\|^2) \|Q - P\|^2} > \lambda (\langle P, Q - P \rangle + \|Q - P\|^2). \tag{4.25}$$

Assim, surgem dois casos:

- se  $\langle P, Q - P \rangle + \|Q - P\|^2 < 0$ , então (4.25) é claramente verdadeira.
- se  $\langle P, Q - P \rangle + \|Q - P\|^2 \geq 0$ , então (4.25) é verdadeira se, e somente se

$$\begin{aligned}
 &\lambda^2 \langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \lambda^2 \|P\|^2) \|Q - P\|^2 \\
 &> \lambda^2 (\langle P, Q - P \rangle^2 + 2 \langle P, Q - P \rangle \|Q - P\|^2 + \|Q - P\|^4) \\
 \iff &(1 - \lambda^2 \|P\|^2) \|Q - P\|^2 > 2\lambda^2 \langle P, Q - P \rangle \|Q - P\|^2 + \lambda^2 \|Q - P\|^4.
 \end{aligned}$$

Uma vez que  $P \neq Q$ , ao dividir os dois lados da inequação anterior por  $\|Q - P\|^2$ , conseguimos:

$$\begin{aligned}
 &1 - \lambda^2 \|P\|^2 > 2\lambda^2 \langle P, Q - P \rangle + \lambda^2 \|Q - P\|^2 \\
 \iff &1 > \lambda^2 (\|P\|^2 + 2 \langle P, Q - P \rangle + \|Q - P\|^2) \\
 \iff &1 > \lambda^2 \|P + (Q - P)\|^2 \\
 \iff &\frac{1}{\lambda^2} > \|Q\|^2,
 \end{aligned}$$

que também é correto.

Sendo assim, em qualquer caso, (4.25) é verdadeira. Isso finaliza a prova do enunciado. Usando a Afirmção 4.1 em (4.24), obtemos que a distância de  $P$  para  $Q$  é dada por:

$$d_F(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\tau_2}{\tau_2 - 1} \right). \tag{4.26}$$

Substituindo (4.14) em (4.26), temos que,

$$d_F(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\frac{-\lambda \langle P, Q - P \rangle + \sqrt{k}}{\lambda \|Q - P\|^2}}{\frac{-\lambda \langle P, Q - P \rangle + \sqrt{k}}{\lambda \|Q - P\|^2} - 1} \right).$$

Manipulando o denominador,

$$d_F(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\frac{-\lambda \langle P, Q - P \rangle + \sqrt{k}}{\lambda \|Q - P\|^2}}{\frac{-\lambda \langle P, Q - P \rangle + \sqrt{k} - \lambda \|Q - P\|^2}{\lambda \|Q - P\|^2}} \right).$$

Dividindo os denominadores iguais:

$$d_F(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\sqrt{k} - \lambda \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{k} - \lambda \langle P, Q - P \rangle - \lambda \|Q - P\|^2} \right). \quad (4.27)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \langle P, Q - P \rangle + \|Q - P\|^2 &= \langle P, Q - P \rangle + \langle Q - P, Q - P \rangle \\ &= \langle P + (Q - P), Q - P \rangle \\ &= \langle Q, Q - P \rangle. \end{aligned}$$

Sendo assim, substituindo na expressão do denominador em (4.27), adquirimos que:

$$d_F(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\sqrt{k} - \lambda \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{k} - \lambda \langle Q, Q - P \rangle} \right).$$

Finalmente, após a substituição de  $k$  dado por (4.11), na expressão anterior, é conseguido o resultado.

**Observação 4.1** Para  $\lambda \neq 0$ , temos:

1.  $d_F$  é não simétrica. Certamente, considere  $O$  como sendo a origem e  $P$  um ponto qualquer em  $\Omega_\lambda$  diferente de  $O$ . Desse modo, pela equação (4.1) no Teorema 4.1, se observa:

$$d_F(O, P) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\sqrt{\|P\|^2}}{\sqrt{\|P\|^2} - \lambda \langle P, P \rangle} \right) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{1}{1 - \lambda \|P\|} \right) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \lambda \|P\|)$$

e

$$d_F(P, O) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\sqrt{\lambda^2 \|P\|^4 + (1 - \lambda^2 \|P\|^2) \|P\|^2} - \lambda \langle P, -P \rangle}{\sqrt{\lambda^2 \|P\|^4 + (1 - \lambda^2 \|P\|^2) \|P\|^2}} \right) = \frac{1}{\lambda} \ln(1 + \lambda \|P\|).$$

Sendo assim,  $d_F(O, P) \neq d_F(P, O)$ , confirmando a assimetria.

O Teorema 5.1, abaixo, fornece uma visualização melhor dessa assimetria.

2.  $d_F$  não é invariante mediante translações. De fato, considerando  $T: \Omega_\lambda \rightarrow \Omega_\lambda$  dado por  $T(x) = x + P_0$  onde  $P_0 \in \Omega_\lambda \setminus \{O\}$ . Perceba que:

$$d_F(O, -P_0) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \lambda\| -P_0\|) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \lambda\|P_0\|) = d_F(O, P_0)$$

e

$$d_F(T(O), T(-P_0)) = d_F(P_0, O),$$

daí, temos  $d_F(O, -P_0) \neq d_F(T(O), T(-P_0))$ .

3.  $d_F$  é invariante mediante rotação ao redor da origem. Basta notar que, o produto interno e a norma euclidiana são invariantes mediante rotações ao redor da origem.

**Observação 4.2** Como nos cálculos da distância foram utilizados a norma euclidiana e produto interno usuais do  $\mathbb{R}^2$ , os resultados podem ser generalizados para o  $\mathbb{R}^n$ .

## 5 GEOMETRIA DE UMA MÉTRICA DE $\lambda$ -FUNK EM $\Omega_\lambda$

A partir da fórmula de distância induzida (4.1) no Teorema 4.1 é possível começar uma investigação sobre as propriedades geométricas no plano. Porém, essa fórmula ainda é um pouco complexa, o seguinte teorema proporciona uma simplificação a ela. O teorema correspondente para  $\lambda = 1$  foi demonstrado no Teorema 2.3 em (CHÁVEZ; MOYSES; LEÓN, 2024). O resultado atual generaliza aquele caso, fornecendo uma prova válida para qualquer  $\lambda > 0$ .

**Teorema 5.1** Sejam  $P, Q$  pontos em  $\Omega_\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) e  $r \geq 1$  um número real, então

$$d_F(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln r \iff \left\| \frac{P}{r} - Q \right\| = \frac{r-1}{\lambda r}. \quad (5.1)$$

**Demonstração.** Se  $r = 1$ , temos

$$d_F(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln 1 = 0 \iff P = Q \iff \frac{1-1}{\lambda \cdot 1} = 0 = \frac{1}{\lambda} \|P - Q\| = \frac{1}{\lambda} \left\| \frac{P}{1} - Q \right\|.$$

Se  $r > 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{P}{r} - Q \right\| = \frac{r-1}{\lambda r} &\iff \left\| P \left( \frac{r-1}{r} \right) + (Q - P) \right\| = \frac{r-1}{\lambda r} \\ &\iff \lambda \left\| P + \left( \frac{r}{r-1} \right) (Q - P) \right\| = 1 \\ &\iff \lambda^2 \left\| P + \left( \frac{r}{r-1} \right) (Q - P) \right\|^2 = 1 \\ &\iff \lambda^2 \left( \|P\|^2 + \frac{2r}{r-1} \langle P, Q - P \rangle + \left( \frac{r}{r-1} \right)^2 \|Q - P\|^2 \right) = 1 \\ &\iff 1 - \lambda^2 \|P\|^2 = \lambda^2 \left( \frac{r}{r-1} \right)^2 \|Q - P\|^2 + 2\lambda^2 \left( \frac{r}{r-1} \right) \langle P, Q - P \rangle. \end{aligned}$$

Percebe-se que  $P \neq Q$  uma vez que  $r > 1$ , assim  $\|P - Q\| \neq 0$  e  $r - 1 \neq 0$ . Portanto, multiplicando a igualdade acima por  $(r - 1)^2 \|Q - P\|^2$  obtemos

$$\begin{aligned} &\iff (r - 1)^2 (1 - \lambda^2 \|P\|^2) \|Q - P\|^2 = \lambda^2 r^2 \|Q - P\|^4 + 2\lambda^2 r (r - 1) \langle P, Q - P \rangle \|Q - P\|^2 \\ &\iff (r - 1)^2 (1 - \lambda^2 \|P\|^2) \|Q - P\|^2 + (r - 1)^2 \lambda^2 \langle P, Q - P \rangle^2 \\ &= (r - 1)^2 \lambda^2 \langle P, Q - P \rangle^2 + 2\lambda^2 r (r - 1) \langle P, Q - P \rangle \|Q - P\|^2 + \lambda^2 r^2 \|Q - P\|^4 \\ &\iff (r - 1)^2 (\lambda^2 \langle P, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2 (1 - \lambda^2 \|P\|^2)) \\ &= \lambda^2 ((r - 1) \langle P, Q - P \rangle + r \|Q - P\|^2)^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Agora, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e pelo fato de  $Q \in \Omega_\lambda$ , adquirimos

$$\langle Q, rQ - P \rangle \leq |\langle Q, rQ - P \rangle| \leq \|Q\| \cdot \|rQ - P\| < \frac{1}{\lambda} \|rQ - P\| = \frac{r-1}{\lambda^2}$$

e desde que  $r - 1 > 0$ , conseguimos

$$\begin{aligned} (r-1)\langle P, Q - P \rangle + r\|Q - P\|^2 &= (r-1)\langle P, Q - P \rangle + r\langle Q - P, Q - P \rangle \\ &= \langle (r-1)P + r(Q - P), Q - P \rangle \\ &= \langle rQ - P, Q - P \rangle \\ &= \langle rQ - P, rQ - P - (r-1)Q \rangle \\ &= \|rQ - P\|^2 - (r-1)\langle Q, rQ - P \rangle \\ &> \frac{(r-1)^2}{\lambda^2} - \frac{(r-1)^2}{\lambda^2} = 0. \end{aligned}$$

Por isso, como  $r - 1 > 0$ , (5.2) é correspondente a

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (r-1)\sqrt{\lambda^2\langle P, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2(1 - \lambda^2\|P\|^2)} \\ &= \lambda[(r-1)\langle P, Q - P \rangle + r\|Q - P\|^2]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Como  $Q \in \Omega_\lambda$  e  $P \neq Q$  temos que

$$\begin{aligned} \lambda^2(\langle Q, Q - P \rangle^2 - \langle P, Q - P \rangle^2) &= \lambda^2(\langle Q, Q - P \rangle + \langle P, Q - P \rangle)(\langle Q, Q - P \rangle - \langle P, Q - P \rangle) \\ &= \lambda^2\langle Q + P, Q - P \rangle\langle Q - P, Q - P \rangle \\ &= \lambda^2[\|Q\|^2 - \|P\|^2]\|Q - P\|^2 \\ &\neq (1 - \lambda^2\|P\|^2)\|Q - P\|^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \lambda^2\|P\|^2)\|Q - P\|^2} - \lambda\langle Q, Q - P \rangle \neq 0.$$

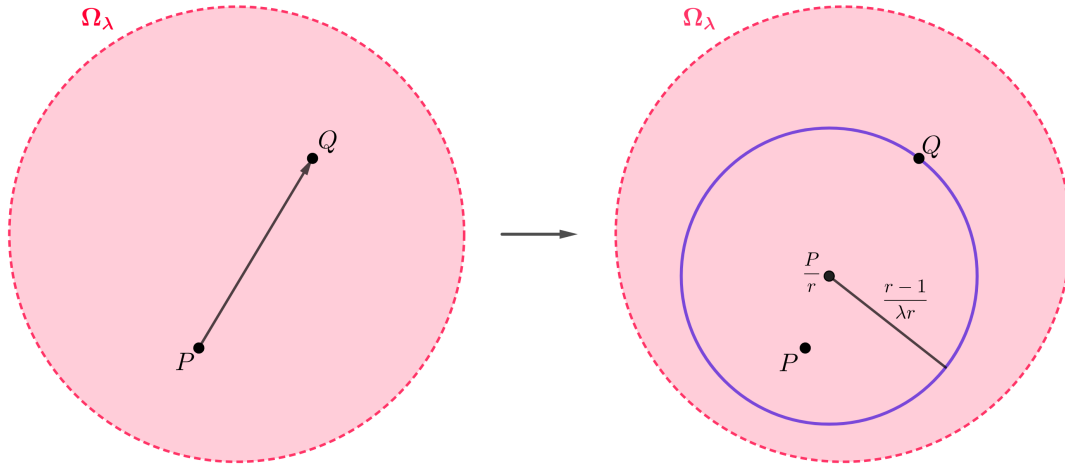
Portanto, obtemos que (5.3) é equivalente a

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{\lambda^2\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \lambda^2\|P\|^2)\|Q - P\|^2} - \lambda\langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{\lambda^2\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \lambda^2\|P\|^2)\|Q - P\|^2} - \lambda\langle Q, Q - P \rangle} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \ln r = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\sqrt{\lambda^2\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \lambda^2\|P\|^2)\|Q - P\|^2} - \lambda\langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{\lambda^2\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \lambda^2\|P\|^2)\|Q - P\|^2} - \lambda\langle Q, Q - P \rangle} \right) = d_F(P, Q). \end{aligned}$$

É perceptível que, na demonstração do teorema precedente, foram usadas propriedades da norma Euclidiana, por conta disso, o teorema continua válido para os pontos  $P$  e  $Q$  em  $\mathbb{B}^n(1/\lambda)$ ,  $n \geq 2$ .

**Observação 5.1** Geometricamente, a igualdade (5.1) nos indica que o ponto  $Q$  pertence à uma circunferência euclidiana de centro  $\frac{P}{r}$  e de raio  $\frac{r-1}{\lambda r}$ , como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Interpretação geométrica do Teorema 5.1



Fonte: Autores (2025). Construção no *software Geogebra 6.0*.

**Observação 5.2** Considere  $P = (0, 0)$  e  $Q \in \Omega_\lambda$  com  $d_F(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln r$ . Da igualdade (5.1) temos

$$\|Q\| = \frac{r-1}{\lambda r} \iff r = \frac{1}{1 - \lambda \|Q\|}.$$

Quando  $\|Q\| \rightarrow \frac{1}{\lambda}^-$ , faz com que  $Q$  se aproxime da fronteira de  $\Omega_\lambda$  dessa forma  $r \rightarrow +\infty$ , por conta disso,  $d_F(P, Q) \rightarrow +\infty$ . Em outros termos, isso significa que, junto da Propriedade 2 na Observação 2.8 em (CHÁVEZ et al., 2021), um barco sobre qualquer ponto de  $\Omega_\lambda$ , não consegue sair de  $\Omega_\lambda$ , ou seja, é impossível para o barco chegar até a borda. Em contrapartida, considerando  $Q = (0, 0)$  e  $P \in \Omega_\lambda$  com  $d_F(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln r$ . Da igualdade (5.1) temos

$$\|P\| = \frac{r-1}{\lambda} \iff r = 1 + \lambda \|P\|.$$

Quando  $\|P\| \rightarrow \frac{1}{\lambda}^-$ , leva  $r \rightarrow 2$ , devido a isso,  $d_F(P, Q) \rightarrow \frac{\ln 2}{\lambda}$ . Desse modo, um barco que esteja na origem de  $\Omega_\lambda$ , é capaz de chegar na borda em um tempo de  $\frac{\ln 2}{\lambda}$ .

**Observação 5.3** Vale ressaltar que, usando a relação (5.1) é mais simples de mostrar que  $d_F$  não varia conforme rotações ao redor da origem, isto é,

$$d_F(RP, RQ) = d_F(P, Q), \tag{5.4}$$

em que  $P = (a, b)$ ,  $Q = (c, d) \in \Omega_\lambda$  e  $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

Ao rotacionar os pontos  $P$  e  $Q$ , obtemos

$$P^* = RP = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta + b \text{sen } \theta \\ -a \text{sen } \theta + b \cos \theta \end{pmatrix}$$

e

$$Q^* = RQ = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cos \theta + d \text{sen } \theta \\ -c \text{sen } \theta + d \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Portanto, pela invariância da norma euclidiana por qualquer rotação, adquirimos

$$\left\| \frac{P^*}{r} - Q^* \right\| = \left\| R \left( \frac{P}{r} - Q \right) \right\| = \left\| \frac{P}{r} - Q \right\|.$$

Isto é,

$$\left\| \frac{P^*}{r} - Q^* \right\| = \left\| \frac{P}{r} - Q \right\|. \quad (5.5)$$

Fazendo uma comparação entre a relação (5.5) e o Teorema 5.1, conseguimos que

$$d_F(RP, RQ) = \frac{1}{\lambda} \ln r \iff \left\| \frac{P^*}{r} - Q^* \right\| = \left( \frac{r-1}{\lambda r} \right) = \left\| \frac{P}{r} - Q \right\| \iff d_F(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln r.$$

Dessa maneira,  $d_F(RP, RQ) = d_F(P, Q)$ . Ou seja, a distância  $d_F$  é invariante por rotação.

## 5.1 CIRCUNFERÊNCIAS DE $\lambda$ -FUNK

Como já é possível perceber, a métrica de  $\lambda$ -Funk está longe de ser uma mera abstração, ela descreve um espaço onde o conceito de distância perde uma de suas especificidades mais intuitivas, a simetria.

Nesse sentido, o foco deste capítulo é caracterizar as *circunferências de  $\lambda$ -Funk*. O uso do plural não é acidental: é uma consequência direta e crucial do fato da distância  $d_F$  ser assimétrica.

Vale lembrar que, na geometria euclidiana, sua simetria garante que a definição de circunferência, como o conjunto de pontos equidistantes de um centro, seja única. Já na métrica de  $\lambda$ -Funk, devido a não-simetria, ao buscar caracterizar dessa mesma forma o que seria uma circunferência, surge a uma pergunta fundamental “equidistantes em qual sentido?”. Isso ocorre porque, os pontos podem ser equidistantes do centro para a borda ou da borda para o centro da circunferência.

Para facilitar a compreensão, este problema geométrico será ilustrado em uma situação física. Imagine um barco navegando em um lago circular, que seria o espaço métrico  $\Omega_\lambda = \mathbb{B}^2(1/\lambda)$ , existe a influência de uma correnteza, fluindo radialmente da margem em direção ao centro. Supondo que este barco está posicionado em um ponto  $P \in \Omega_\lambda$  e tenha combustível suficiente para realizar uma jornada de valor  $r$ . Se o barco navegar a favor da correnteza até um ponto  $Q$ , seu movimento será facilitado, em comparação a um deslocamento contrário a correnteza, em que ele precisaria, de mais combustível para alcançar o mesmo ponto  $Q$ .

Nesse sentido, uma definição de circunferência precisa levar em conta a direção do deslocamento. Com um barco em um ponto  $P$ , buscamos encontrar os locais que ele pode alcançar com uma quantidade  $\frac{\ln r}{\lambda}$  de combustível, isto é, o conjunto de pontos equidistantes de  $P$ , isso corresponde a encontrar uma circunferência centrada em  $P$ . Tomando um questionamento oposto, partindo de pontos sobre a circunferência em direção ao seu centro  $P$ , é definido o segundo tipo de circunferência de  $\lambda$ -Funk.

Resumidamente, ao considerar a assimetria da distância na métrica de  $\lambda$ -Funk, ou seja,  $d_F(P, Q) \neq d_F(Q, P)$ , existem duas formas de interpretar o conceito de circunferência, que são, de “saída” do centro para a borda, denominada *tipo 1*; e a de “entrada” no centro (partindo da borda), chamada de *tipo 2*.

### 5.1.1 Circunferência de $\lambda$ -Funk tipo 1

**Definição 5.1 (Circunferência de  $\lambda$ -Funk Tipo 1)** Dado um ponto  $P$  em  $\Omega_\lambda$  qualquer e um número real  $r \geq 1$ , a *Circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 1*, com centro  $P$  e raio  $\frac{\ln r}{\lambda}$ , é definida como o conjunto de pontos  $X \in \Omega_\lambda$  que satisfazem:

$$d_F(P, X) = \frac{\ln r}{\lambda}.$$

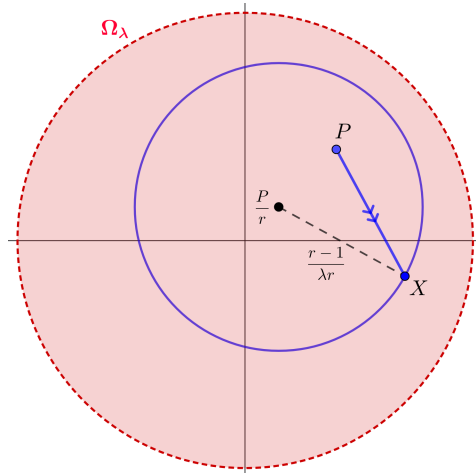
Pela (5.1), a circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 1 com centro em  $P = (a, b)$  e raio  $\frac{\ln r}{\lambda}$  é determinada por:

$$\left(x_1 - \frac{a}{r}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{b}{r}\right)^2 = \left(\frac{r-1}{\lambda r}\right)^2. \quad (5.6)$$

**Observação 5.4** Percebe-se que, a equação (5.6) tem o modelo de uma circunferência euclidiana, centrada em  $\frac{P}{r}$  e de raio  $\frac{\ln r}{\lambda}$ . De outro modo, as circunferências de  $\lambda$ -Funk

do tipo 1 simplesmente são circunferências euclidianas deslocadas à uma taxa de  $1 - \frac{1}{r}$  em direção da origem e contraídas à uma taxa de  $1 - \frac{r-1}{r \ln r}$  (Veja a figura 7).

Figura 7 –  $d_F(P, X) = \frac{\ln r}{\lambda}$

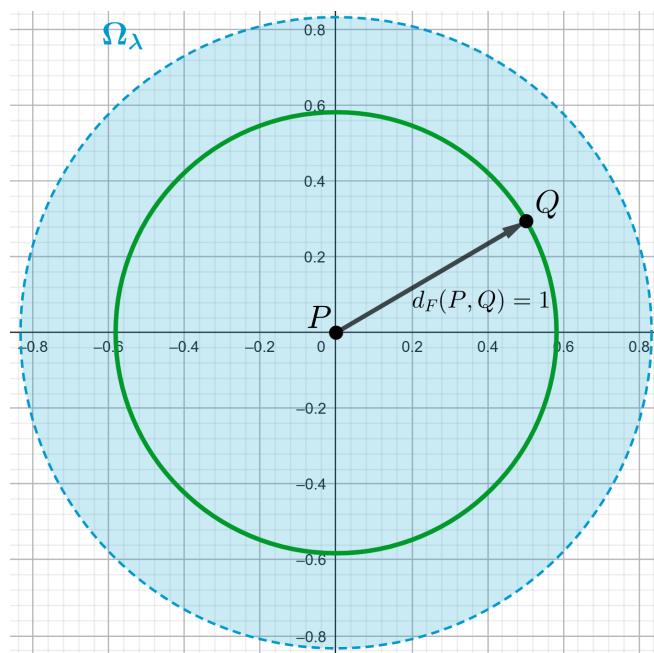


Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

**Exemplo 5.1** Considere  $P = (0, 0)$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $r = e^\lambda$ . A equação da circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 1 de centro  $P$  e raio  $\frac{\ln r}{\lambda} = 1$  (veja a Figura 8) é dada por

$$x^2 + y^2 = \frac{100}{49}(1 - e^{-0.7})^2.$$

Figura 8 – Circunferência de 0.7-Funk do tipo 1 de centro  $P = (0, 0)$  e raio 1

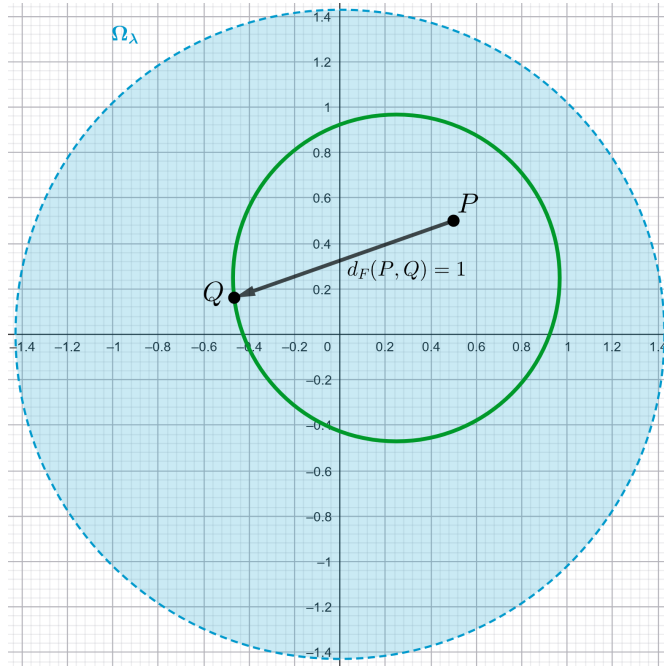


Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

**Exemplo 5.2** Considere  $P = (0.5, 0.5)$ ,  $\lambda = 0.7$ ,  $r = e^\lambda$ . A equação da circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 1 de centro  $P$  e raio  $\frac{\ln r}{\lambda} = 1$  (veja a Figura 9) é dada por

$$\left(x - \frac{0.5}{e^{0.7}}\right)^2 + \left(y - \frac{0.5}{e^{0.7}}\right)^2 = \frac{100}{49}(1 - e^{-0.7})^2.$$

Figura 9 – Circunferência de 0.7-Funk do tipo 1 de centro  $P = (0.5, 0.5)$  e raio 1



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

### 5.1.2 Circunferência de $\lambda$ -Funk tipo 2

**Definição 5.2 (Circunferência de  $\lambda$ -Funk Tipo 2)** Dado um ponto  $P$  em  $\Omega_\lambda$  qualquer e um número real  $r \geq 1$ , a *Circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 2*, com centro em  $P$  e raio  $\frac{\ln r}{\lambda}$ , é definida como o conjunto de pontos  $X \in \Omega_\lambda$  que satisfazem:

$$d_F(X, P) = \frac{\ln r}{\lambda}.$$

Pela (5.1), a circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 2 com centro em  $P = (a, b)$  e raio  $\frac{\ln r}{\lambda}$ , é determinada por:

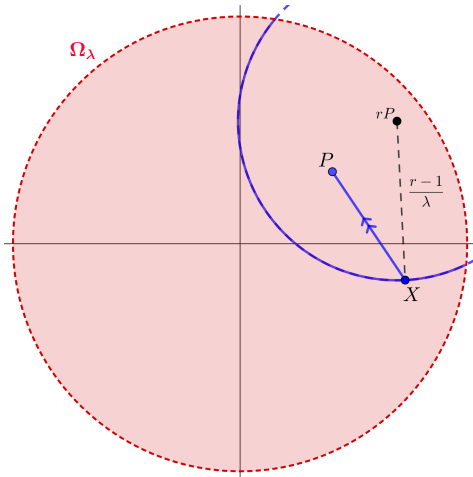
$$\left(a - \frac{x_1}{r}\right)^2 + \left(b - \frac{x_2}{r}\right)^2 = \left(\frac{r-1}{\lambda r}\right)^2,$$

ou, de forma equivalente,

$$(x_1 - ra)^2 + (x_2 - rb)^2 = \left(\frac{r-1}{\lambda}\right)^2. \quad (5.7)$$

**Observação 5.5** É possível notar que, a equação (5.7) tem o modelo de uma circunferência euclidiana, centrada em  $(ra, rb)$  e de raio  $\frac{r-1}{\lambda}$ . De outro modo, as circunferências de  $\lambda$ -Funk do tipo 2 somente são circunferências euclidianas deslocadas à uma taxa de  $r-1$  na direção oposta a origem e expandidas à uma taxa de  $\frac{r-1}{\ln r} - 1$  (veja a Figura 10).

Figura 10 –  $d_F(X, P) = \frac{\ln r}{\lambda}$

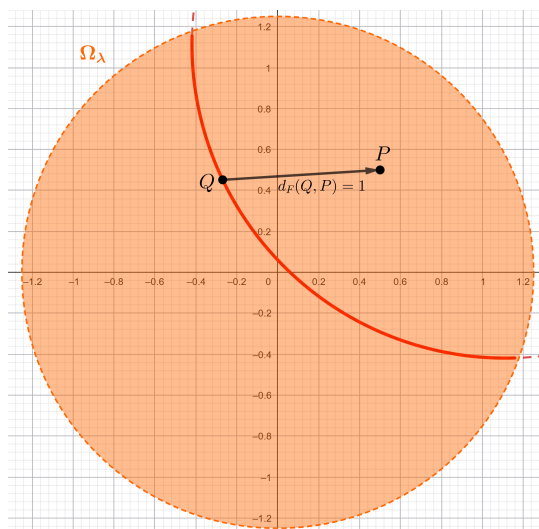


Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

**Exemplo 5.3** Considere  $P = (0.5, 0.5)$ ,  $\lambda = 0.8$ ,  $r = e^\lambda$ . A equação da circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 2 de centro  $P$  e raio  $\frac{\ln r}{\lambda} = 1$  (veja a Figura 11) é dada por

$$\left(x - \frac{0.5}{e^{0.8}}\right)^2 + \left(y - \frac{0.5}{e^{0.8}}\right)^2 = \frac{25}{16}(e^{0.8} - 1)^2.$$

Figura 11 – Circunferência de 0.8-Funk do tipo 2 de centro  $P = (0.5, 0.5)$  e raio 1



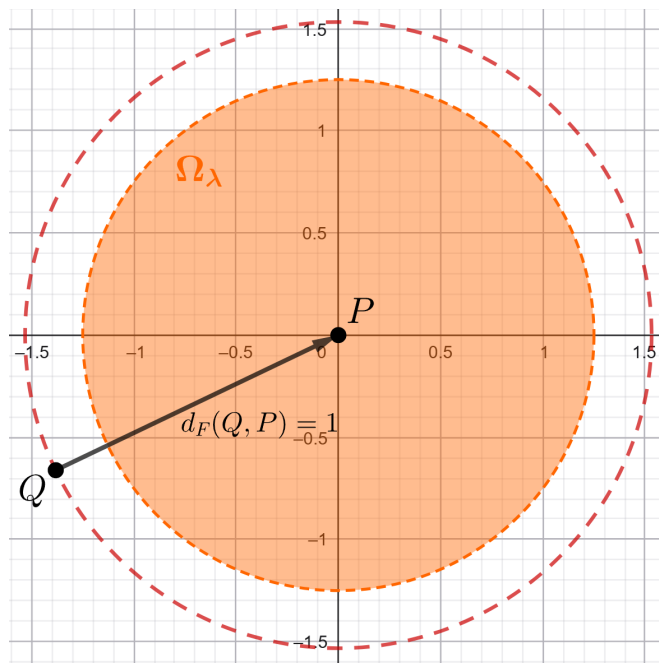
Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

Repare que no Exemplo 5.3, a curva obtida é só um arco de circunferência em  $\Omega_\lambda$ . Mais ainda, há exemplos em que a curva não tenha nenhuma solução, como mostra o seguinte exemplo.

**Exemplo 5.4** Considere  $P = (0, 0)$ ,  $\lambda = 0.8$ ,  $r = e^\lambda$ . A equação da circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 2 de centro  $P$  e raio  $\frac{\ln r}{\lambda} = 1$  (veja a Figura 12) é dada por

$$x^2 + y^2 = \frac{25}{16}(e^{0.8} - 1)^2.$$

Figura 12 – Circunferência de 0.8-Funk do tipo 2 de centro  $P = (0, 0)$  e raio 1



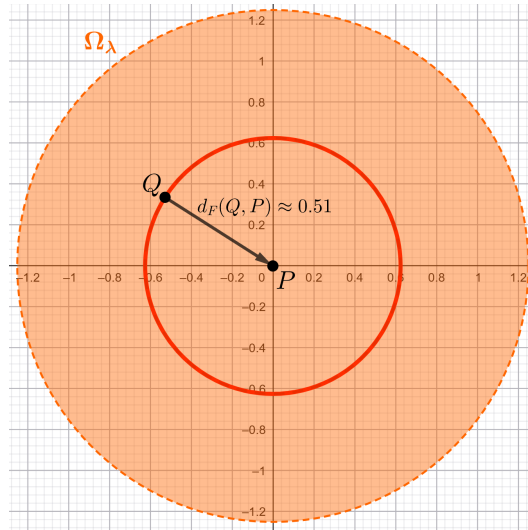
Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

Note que, como  $e^{0.8} - 1 > 1$ , neste caso, não existem pontos  $Q = (x, y) \in \Omega_\lambda$  tais que  $\|Q\| = \frac{5}{4}(e^{0.8} - 1)$  (veja a Figura 12). Este problema vem diretamente da Observação 5.5 a qual nos indica que, se  $P = (0, 0)$ , então o raio máximo de uma Circunferência de Funk do tipo 2 é igual à  $\frac{\ln 2}{\lambda}$ , isto é, para estes tipos de circunferências  $r$  é limitado no intervalo  $]1, 2[$ . Observe o próximo exemplo, tomando  $r \in ]1, 2[$ .

**Exemplo 5.5** Considere  $P = (0, 0)$ ,  $\lambda = 0.8$ ,  $r = 1.5$ . A equação da circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 2 de centro  $P$  e raio  $\frac{\ln r}{\lambda} \approx 0.51$  (veja a Figura 13) é dada por

$$x^2 + y^2 = \frac{25}{16}(0.5)^2.$$

Figura 13 – Circunferência de 0.8–Funk do tipo 2 de centro  $P = (0, 0)$  e raio  $\approx 0.51$



Fonte: Autores (2025). Construção no *software Geogebra 6.0*.

**Exemplo 5.6** Considere uma circunferência dada pela equação

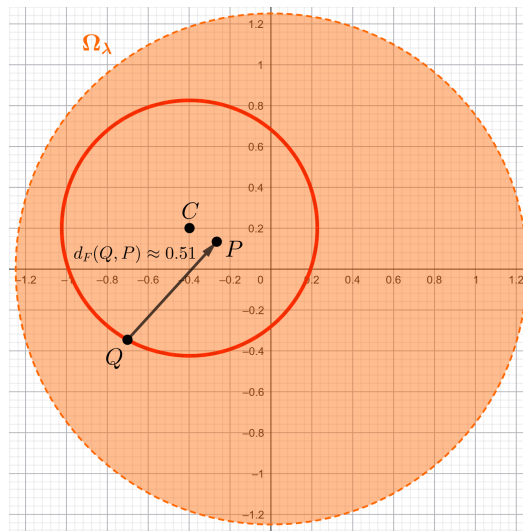
$$(x + 0.4)^2 + (y - 0.2)^2 = \frac{25}{16}(0.5)^2. \quad (5.8)$$

Desejamos encontrar o centro de 0.8–Funk desta circunferência, isto é, encontrar  $P \in \Omega_{0.8}$  que verifica  $d_F(Q, P) = \frac{5}{4} \ln r$ , para todo  $Q$  sobre a circunferência e para algum  $r > 1$ . Comparando (5.8) com a equação (5.7), temos que  $P$  e  $r$  verificam:

$$\begin{cases} r - 1 = 0.5 \\ rP = (-0.4, 0.2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1.5 \\ P = \frac{1}{1.5}(-0.4, 0.2) \approx (-0.27, 0.13). \end{cases}$$

Portanto, o centro da 0.8–Funk circunferência tipo 2 é o ponto  $P \approx (-0.27, 0.13)$ , tal que  $d_F(Q, P) = \frac{5}{4} \ln 1.5$ , para todo ponto  $Q$  sobre a circunferência (veja a Figura 14).

Figura 14 – Circunferência de 0.8–Funk do tipo 2 de centro  $P \approx (-0.27, 0.13)$  e raio  $\approx 0.51$



Fonte: Autores (2025). Construção no *software Geogebra 6.0*.

## 5.2 DISTÂNCIA DE $\lambda$ -FUNK ENTRE SEGMENTO DE RETA E PONTO

Nesta etapa, as equações obtidas das Circunferências de  $\lambda$ -Funk dos tipos 1 e 2, serão aplicadas a fim de deduzir relações métricas, formulando expressões para a distância de reta a ponto e ponto a reta. Isso visa contornar a complexidade de empregar diretamente a fórmula da distância induzida pela métrica de  $\lambda$ -Funk dada por (4.1) nos cálculos.

Com este objetivo, é importante notar que, a relação posicional entre uma circunferência e uma reta pode assumir três configurações distintas, elas podem se interceptar em dois pontos diferentes, em um único ponto ou não possuir interseção. Dessa maneira, a estratégia abordada será formar uma circunferência que intercepte a reta e a partir disso, descrever a variação de sua equação em função do raio, de modo a identificar seus valores críticos.

Em essência, é buscado desenvolver a circunferência obtida para encontrar o menor valor para o raio, de forma que haja apenas um ponto de interseção entre ela e a reta analisada. Vale ressaltar que, este ponto de interseção corresponde, precisamente, ao ponto da reta que se situa à distância mínima do centro da circunferência.

Para contextualizar, segue um exemplo físico. Supondo que um barco

parte de uma praia com litoral retilíneo representado pela reta  $s \subset \mathbb{R}^2$ , navegando em direção a uma ilha posicionada em um ponto  $P \in \Omega_\lambda$ . Assumindo que a embarcação se locomove sem variar a velocidade, deseja-se estipular qual o tempo mínimo do trajeto e o ponto da praia no qual o barco deve zarpar para isso acontecer.

Nessa perspectiva, será construída uma Circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 2, centrada na ilha, ou seja no ponto  $P$ , de forma a obter interseção com a praia, descrita pela reta  $s$ .

É válido destacar que, no caso de desenvolvermos uma circunferência de modo que haja uma única interseção entre ela e a reta, a parcela da reta que será analisada, corresponde ao segmento de reta pertencente ao domínio  $\Omega_\lambda$ .

### 5.2.1 Distância de $\lambda$ -Funk de um segmento de reta a um ponto

**Definição 5.3** Dada a reta  $s$  em  $\mathbb{R}^2$ . A distância de  $\lambda$ -Funk,  $d_F(s_\lambda, Q)$ , de  $s_\lambda = s \cap \Omega_\lambda$  até o ponto  $Q \in \Omega_\lambda$  é definida como sendo:

$$d_F(s_\lambda, Q) := \min\{d_F(P', Q); P' \in s_\lambda\}.$$

É dito que o ponto  $P_* \in s_\lambda$  realiza a distância de  $s_\lambda$  até o ponto  $Q$ , se

$$d_F(P_*, Q) \leq d_F(P', Q), \text{ para todo } P' \in s_\lambda.$$

**Teorema 5.2** Sendo  $s: x_2 = mx_1 + c$  uma reta em  $\mathbb{R}^2$ . A distância de  $\lambda$ -Funk partindo de  $s_\lambda = s \cap \Omega_\lambda$  até o ponto  $Q = (a, b) \in \Omega_\lambda$  é expressa por:

$$\begin{aligned} d_F(s_\lambda, Q) &= \frac{\ln r}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{1 - \lambda^2 c \cos \theta (b \cos \theta - a \sin \theta) + \lambda |c \cos \theta - b \cos \theta + a \sin \theta|}{1 - \lambda^2 (b \cos \theta - a \sin \theta)^2} \right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde  $\theta = \arctg m$ . Ademais, essa distância é realizada por

$$P_* = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ar \cos \theta + br \sin \theta \\ c \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Demonstração.** Dado um segmento de reta  $s_\lambda = s \cap \Omega_\lambda$  onde  $s: x_2 = mx_1 + c$  e um ponto  $Q = (a, b) \in \Omega_\lambda$ , primeiro será investigado o caso particular em que  $m = 0$  e depois será analisado o caso geral. Para derivar a distância do segmento de reta  $s_\lambda$  até o ponto  $Q$ , tomada uma circunferência de  $\lambda$ -Funk que contenha  $Q$  e esteja centrada

em algum ponto da reta. O raio é  $\frac{\ln r}{\lambda}$  e o centro está em  $P = (x_1, c) \in s$ . Conforme a Equação (5.7), temos:

$$(x_1 - ra)^2 + (c - rb)^2 = \left(\frac{r-1}{\lambda}\right)^2. \quad (5.10)$$

Essa é uma equação quadrática na variável  $x_1$ , e dependendo de  $r$ , é possível encontrar duas, uma, ou nenhuma soluções para  $x_1$ . O interesse é em encontrar uma única solução que minimize a distância. Para isso, pela Equação (5.10), temos a condição de unicidade,  $x_1 = ra$  e

$$\begin{aligned} (c - rb)^2 &= \left(\frac{r-1}{\lambda}\right)^2 \\ \Leftrightarrow c^2 - 2cbr + b^2r^2 &= \frac{r^2 - 2r + 1}{\lambda^2} \\ \Leftrightarrow c^2\lambda^2 - 2cb\lambda^2r + b^2\lambda^2r^2 &= r^2 - 2r + 1 \\ \Leftrightarrow (1 - \lambda^2b^2)r^2 + 2(\lambda^2bc - 1)r + (1 - \lambda^2c^2) &= 0. \end{aligned}$$

Assim, conseguimos uma equação de segundo grau na variável  $r$  cujas raízes são dadas por:

$$r = \frac{(1 - \lambda^2bc) \pm \sqrt{(1 - \lambda^2bc)^2 - (1 - \lambda^2b^2)(1 - \lambda^2c^2)}}{1 - \lambda^2b^2}. \quad (5.11)$$

Percebe-se que:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda^2bc)^2 - (1 - \lambda^2b^2)(1 - \lambda^2c^2) &= 1 - 2\lambda^2bc + \lambda^4b^2c^2 - [1 - \lambda^2b^2 - \lambda^2c^2 + \lambda^4b^2c^2] \\ &= \lambda^2[c^2 - 2bc + b^2] \\ &= \lambda^2(c - b)^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Substituindo (5.12) na equação (5.11) adquirimos

$$r = \frac{1 - \lambda^2bc \pm \lambda|c - b|}{1 - \lambda^2b^2}. \quad (5.13)$$

Note que

$$\begin{aligned} r > 1 &\Leftrightarrow 1 - \lambda^2bc \pm \lambda|c - b| > 1 - \lambda^2b^2 \\ &\Leftrightarrow \pm\lambda|c - b| > \lambda^2b(c - b) \\ &\Leftrightarrow \pm|c - b| > \lambda b(c - b). \end{aligned}$$

Vamos considerar dois casos:

$$\begin{cases} \text{se } c - b > 0 \Rightarrow \pm(c - b) > \lambda b(c - b) \Rightarrow \pm \frac{1}{\lambda} > b \\ \text{se } c - b < 0 \Rightarrow \pm(b - c) > \lambda b(c - b) \Rightarrow \pm \frac{-1}{\lambda} < b. \end{cases}$$

Em ambos os casos,  $r > 1$  se, e somente se, considerarmos o sinal de + em (5.13), pois  $-\frac{1}{\lambda} < b < \frac{1}{\lambda}$ . Portanto,

$$r = \frac{1 - \lambda^2 bc + \lambda|c - b|}{1 - \lambda^2 b^2}.$$

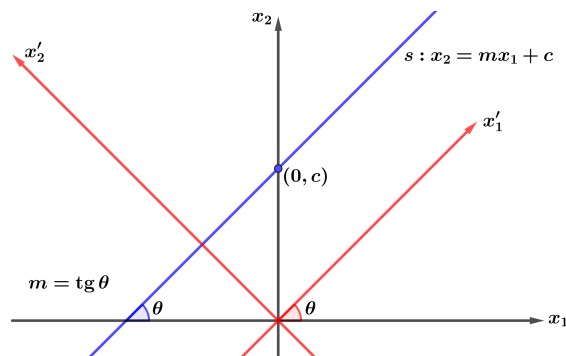
Desse modo, a distância de  $\lambda$ -Funk de  $s_\lambda$  até o ponto  $Q = (a, b)$ , para o caso em que  $m = 0$ , é descrita por:

$$d_F(s_\lambda, Q) = \frac{\ln r}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{1 - \lambda^2 bc + \lambda|c - b|}{1 - \lambda^2 b^2} \right). \quad (5.14)$$

Essa distância é realizada pelo ponto,  $P_* = (ar, c) \in s$ . Em seguida, será visto como descobrir essa distância para um segmento de reta qualquer  $s_\lambda$ . Para fazer isso, de início é crucial observar que o campo de força é simétrico em relação a origem (veja a equação (5.4)). Por isso, pode ser aplicada uma rotação ao redor da origem para os eixos e encontrar valores para  $x_1$  e  $r$  baseado nos resultados já obtidos.

Dado um segmento de reta  $s_\lambda = s \cap \Omega_\lambda$  onde  $s: x_2 = mx_1 + c$ , os eixos coordenados são rotacionados por  $\theta$  graus, de maneira que  $m = \text{tg } \theta$ . Note que, nos novos eixos rotacionados  $x'_1 x'_2$ , a reta  $s$  é uma reta horizontal (paralela ao eixo  $x'_1$ ), o que recai no caso particular em que  $m = 0$ .

Figura 15 – Rotação dos eixos coordenados  $x_1 x_2$



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

Serão determinadas as novas coordenadas de  $Q = (a, b)$ :

$$Q' = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Assim, as novas coordenadas de  $Q$  são  $Q' = (a \cos \theta + b \text{sen } \theta, b \cos \theta - a \text{sen } \theta)$ . Também, o ponto  $(0, c)$  na reta  $s$  nas novas coordenadas é da forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \text{sen } \theta \\ c \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Logo, os pontos da reta  $s'$  são da forma  $(x'_1, c \cos \theta)$ ,  $x'_1 \in \mathbb{R}$ , e, conseqüentemente, esta reta é da forma  $s': x'_2 = c \cos \theta$ .

Sendo assim, por (5.15) e (5.16) em (5.14), teremos que a distância de Funk de um ponto  $Q = (a, b)$  ao segmento de reta  $s_\lambda$ , em que  $s: x_2 = mx_1 + c$  é dada por

$$\begin{aligned} d_F(s_\lambda, Q) &= d_F(s'_\lambda, Q') \\ &= \frac{\ln r}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{1 - \lambda^2 c \cos \theta (b \cos \theta - a \text{sen } \theta) + \lambda |c \cos \theta - b \cos \theta + a \text{sen } \theta|}{1 - \lambda^2 (b \cos \theta - a \text{sen } \theta)^2} \right). \end{aligned}$$

O ponto sobre  $s'_\lambda$  que realiza a distância de  $Q'$  até  $s'_\lambda$  é dado por

$$P^{**} = (ra \cos \theta + rb \text{sen } \theta, c \cos \theta) \in s'.$$

Para obter o ponto  $P^* \in s_\lambda$  que realiza a distância inicial, basta rotacionar  $\theta$  graus o ponto  $P^{**}$  no sentido contrário, isto é,

$$P^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ra \cos \theta + rb \text{sen } \theta \\ c \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Observação 5.6** A distância  $d_F(\tilde{s}_\lambda, \tilde{Q})$  em que  $\tilde{s}_\lambda: x_1 = \tilde{c}$  e  $\tilde{Q} = (\tilde{a}, \tilde{b})$ , pela rotação horária dos eixos coordenados, é equivalente a obter a distância  $d_F(s_\lambda, Q)$ , onde  $s_\lambda: x'_2 = \tilde{c}$  e  $Q = (-\tilde{b}, \tilde{a})$ . Isto é, pela equação (5.14),

$$d_F(\tilde{s}_\lambda, \tilde{Q}) = d_F(s_\lambda, Q) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{1 - \lambda^2 \tilde{a} \tilde{c} + |\tilde{c} - \tilde{a}|}{1 - \lambda^2 \tilde{a}} \right).$$

**Exemplo 5.7** Considere o ponto  $Q = (0.4, 0.3)$  e o segmento de reta  $s_\lambda: x_2 = (\operatorname{tg} 30^\circ)x_1 + 1$  sobre  $\Omega_{0.7}$ . Inicialmente, rotacionando o plano  $30^\circ$  no sentido horário, obtemos as novas coordenadas de  $Q$  através do ponto

$$Q' = (0.4 \cos 30^\circ + 0.3 \operatorname{sen} 30^\circ, 0.3 \cos 30^\circ - 0.4 \operatorname{sen} 30^\circ) \approx (0.5, 0.06).$$

Com o novo segmento de reta  $s'_\lambda: x'_2 = \cos 30^\circ$ , obtida pela rotação de  $s_\lambda$ , temos que a distância  $\lambda$ -Funk de  $s'_\lambda$  até  $Q'$  é dada por

$$\begin{aligned} d_F(s'_\lambda, Q') &= \frac{\ln r}{\lambda} \\ &= \frac{1}{0.7} \ln \left( \frac{1 - (0.7)^2 \cos 30^\circ (0.3 \cos 30^\circ - 0.4 \operatorname{sen} 30^\circ) + 0.7 |\cos 30^\circ - 0.3 \cos 30^\circ + 0.4 \operatorname{sen} 30^\circ|}{1 - (0.7)^2 (0.3 \cos 30^\circ - 0.4 \operatorname{sen} 30^\circ)^2} \right) \\ &\approx 0.62, \end{aligned}$$

e esta distância é realizada pelo ponto

$$P^{**} \approx \left( (1.54)(0.4) \cos 30^\circ + (1.54)(0.3) \operatorname{sen} 30^\circ, \cos 30^\circ \right) \approx (0.77, 0.87),$$

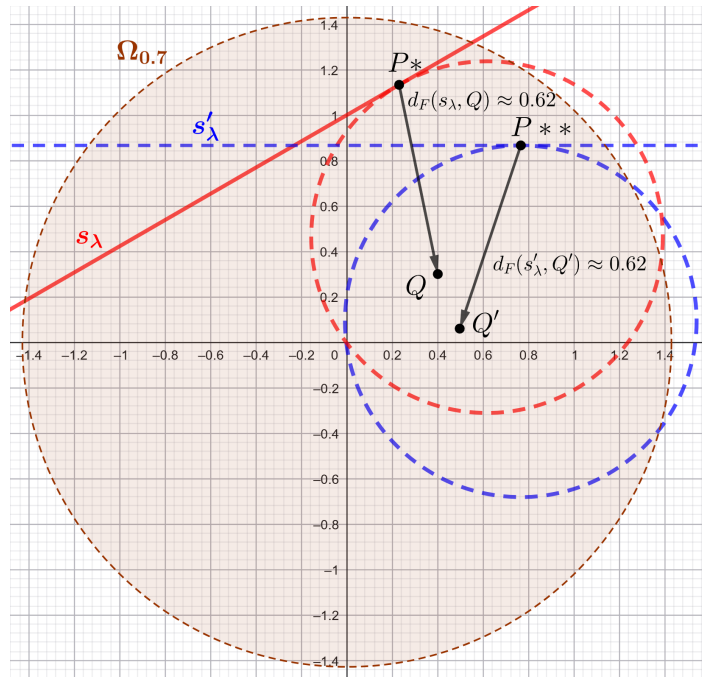
no segmento de reta  $s'_\lambda$  (veja circunferência  $\lambda$ -Funk tipo 2 de cor azul na Figura 16). Por outro lado, para encontrar o ponto  $P^* \in s_\lambda$  que realiza a distância  $d_F(s_\lambda, Q)$ , rotacionamos o plano cartesiano em  $30^\circ$  no sentido anti-horário (veja circunferência  $\lambda$ -Funk tipo 2 de cor vermelha na Figura 16), obtendo assim

$$P^* \approx \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\operatorname{sen} 30^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.77 \\ 0.87 \end{pmatrix} \approx (0.23, 1.13).$$

Pela invariância por rotação da distância de  $\lambda$ -Funk, temos que

$$d_F(s_\lambda, Q) = d_F(P^*, Q) = d_F(s'_\lambda, Q') \approx 0.62.$$

Figura 16 – Distância 0.7–Funk de  $s: x_2 = \operatorname{tg} 30^\circ + 1$  até  $Q = (0.4, 0.3)$  em  $\Omega_{0.7}$



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

**Observação 5.7** No Exemplo 5.7, o caminho que realiza a menor distância do segmento de reta  $s_\lambda$  até o ponto  $Q$  não é perpendicular ao segmento de reta, como ocorre na Geometria Euclidiana. De fato, tomando um ponto  $Q = (a, b) \in \Omega_\lambda$  e um segmento de reta constante  $s_\lambda: x_2 = c \subset \mathbb{R}^2$ , o ponto sobre o segmento de reta que realiza a menor distância de  $s_\lambda$  à  $Q$  é  $P = (ra, c)$  e o caminho para tal é seguir através do segmento de reta com extremidades  $Q$  e  $P$ .

Assim, podemos determinar o ângulo  $\alpha$  formado entre o segmento  $\overline{QP}$  e o segmento de reta  $s_\lambda$  determinando o ângulo entre os vetores  $u = \overrightarrow{QP}$  e  $v = (1, 0) \in s$  (veja Definição 2.3). Como  $u$  tem coordenadas  $((r-1)a, c-b)$ , então

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{a(r-1)}{\|\overrightarrow{QP}\|}.$$

Desta forma, para que o segmento  $\overline{QP}$  seja perpendicular ao segmento de reta  $s_\lambda$ , é necessário que  $a = 0$ . De fato,

$$\cos 90^\circ = 0 = \frac{a(r-1)}{\|\overrightarrow{QP}\|} \Leftrightarrow a = 0.$$

Em outras palavras, o caminho mais rápido para chegar do ponto  $Q$  até o segmento de reta  $s$  só é perpendicular ao segmento de reta  $s_\lambda$  se, e somente se,  $Q$  está sobre o eixo  $x_2$ .

Caso o segmento de reta  $s_\lambda$  tenha inclinação não nula, basta apenas verificar se, ao rotacionar o ponto  $Q$ , o novo ponto  $Q'$  está sobre  $x'_2$ .

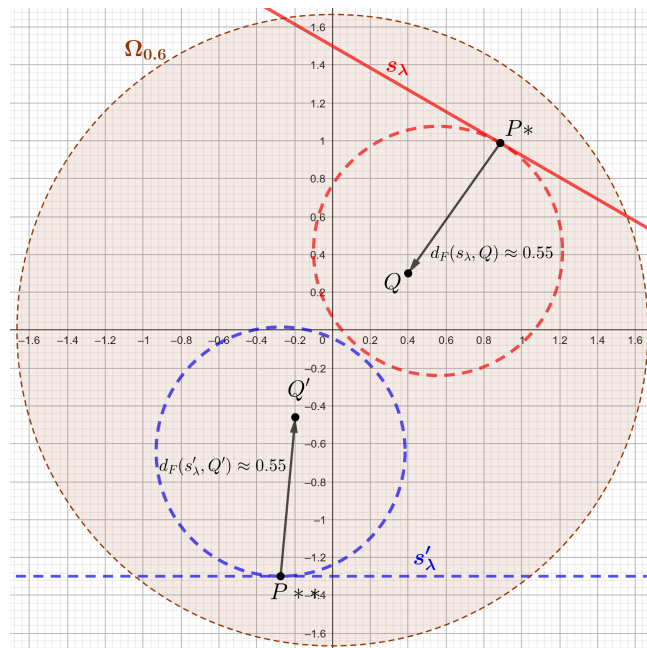
**Exemplo 5.8** Considere o ponto  $Q = (0.4, 0.3)$  e a reta  $s: x_2 = (\operatorname{tg} 150^\circ)x_1 + 1.5$  sobre  $\Omega_{0.6}$ . Neste caso, obtemos

$$Q' \approx (-0.2, -0.46), \quad s': x'_2 = (1.5) \cos 150^\circ, \quad P^{**} \approx (-0.27, -1.3), \quad P^* \approx (0.89, 0.99).$$

Pela invariância por rotação da distância de  $\lambda$ -Funk, temos que

$$d_F(s_\lambda, Q) = d_F(P^*, Q) = d_F(s'_\lambda, Q') \approx 0.55.$$

Figura 17 – Distância 0.6–Funk de  $s: x_2 = \operatorname{tg} 150^\circ + 1.5$  até  $Q = (0.4, 0.3)$  em  $\Omega_{0.6}$



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

### 5.2.2 Distância de $\lambda$ -Funk de um ponto a um segmento de reta

Neste momento, será feita uma investigação parecida com a anterior. Mas agora, um barco parte de uma ilha posicionada em um ponto  $P \in \Omega_\lambda$  navegando em rumo a uma praia com litoral retilíneo, representado pela reta  $s \subset \mathbb{R}^2$ . Considerando que a embarcação viaja com velocidade constante, o objetivo é encontrar a rota que minimiza o tempo de viagem, bem como o ponto exato na costa onde o navio deve atracar.

Para isso, será assumido que a ilha está localizada no centro de uma Circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 1 e determinar a direção do barco e o tempo mínimo e do trajeto até a reta.

**Definição 5.4** Seja  $s$  uma reta em  $\mathbb{R}^2$ . A *distância de  $\lambda$ -Funk*,  $d_F(P, s_\lambda)$ , do ponto  $P \in \Omega_\lambda$  até o segmento de reta  $s_\lambda = s \cap \Omega_\lambda$  é definida como sendo:

$$d_F(P, s_\lambda) := \min\{d_F(P, Q'); Q' \in s_\lambda\}.$$

É dito que o ponto  $Q^* \in s_\lambda$  *realiza a distância  $P$  até  $s_\lambda$* , se

$$d_F(P, Q^*) \leq d_F(P, Q'), \text{ para todo } Q' \in s_\lambda.$$

**Teorema 5.3** Dada a reta  $s : x_2 = mx_1 + c$  em  $\mathbb{R}^2$ . A distância de  $\lambda$ -Funk do ponto  $P = (a, b) \in \Omega_\lambda$  até  $s_\lambda = s \cap \Omega_\lambda$  é dado por:

$$\begin{aligned} d_F(P, s_\lambda) &= \frac{\ln r}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{1 - \lambda^2 c \cos \theta (b \cos \theta - a \sin \theta) + \lambda |c \cos \theta - b \cos \theta + a \sin \theta|}{1 - \lambda^2 c^2 \cos^2 \theta} \right), \end{aligned} \quad (5.17)$$

em que  $\theta = \text{tg } m$ . Ademais, essa distância é realizada por

$$Q^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{b}{r} \sin \theta \\ c \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Demonstração.** Dado o ponto  $P = (a, b)$  e o segmento de reta  $s_\lambda$ , onde  $s : x_2 = mx_1 + c$ , será prosseguido de maneira similar a anterior para determinar a distância de  $\lambda$ -Funk de segmento de reta à ponto. Tomando uma circunferência de  $\lambda$ -Funk centrada em  $P$ , com raio  $\frac{\ln r}{\lambda}$  que possua interseção com o segmento de reta  $s_\lambda$ . Tomando o ponto  $Q \in s_\lambda$  para ser uma dessas interseções. De início, será verificado o caso particular em que  $m = 0$ . Assim, pela Equação (5.1), temos:

$$\left(x_1 - \frac{a}{r}\right)^2 + \left(c - \frac{b}{r}\right)^2 = \left(\frac{r-1}{\lambda r}\right)^2. \quad (5.18)$$

Da mesma maneira, esta é uma equação quadrática na variável  $x_1$ , e dependendo de  $r$ . Entretanto, o interesse é em encontrar uma única solução, aquela que minimiza a distância. Para obter uma única solução de (5.18), o discriminante da equação

quadrática em  $x_1$  acima, deve ser igual a zero. Por conta disso, temos a condição de unicidade,  $x_1 = \frac{a}{r}$  e

$$\begin{aligned} \left(c - \frac{b}{r}\right)^2 &= \left(\frac{r-1}{\lambda r}\right)^2 \\ \iff (\lambda cr - \lambda b)^2 &= (r-1)^2 \\ \iff c^2 \lambda^2 r^2 - 2\lambda^2 bcr + \lambda^2 b^2 &= r^2 - 2r + 1 \\ \iff r^2(\lambda^2 c^2 - 1) + 2r(1 - bc\lambda^2) + \lambda^2 b^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Desta maneira, conseguimos uma equação quadrática em  $r$  cujas raízes são dadas por:

$$r = \frac{(\lambda^2 bc - 1) \pm \sqrt{(\lambda^2 bc - 1)^2 - (\lambda^2 c^2 - 1)(\lambda^2 b^2 - 1)}}{\lambda^2 c^2 - 1}. \quad (5.19)$$

Por (5.12), temos

$$(\lambda^2 bc - 1)^2 - (\lambda^2 c^2 - 1)(\lambda^2 b^2 - 1) = \lambda^2 (c - b)^2.$$

Desse jeito, a equação (5.19) se torna

$$r = \frac{(\lambda^2 bc - 1) \pm \lambda |c - b|}{\lambda^2 c^2 - 1}. \quad (5.20)$$

Observe que

$$\begin{aligned} r > 1 &\iff \lambda^2 bc - 1 \pm \lambda |c - b| < \lambda^2 c^2 - 1 \\ &\iff \pm \lambda |c - b| < \lambda^2 c(c - b) \\ &\iff \pm |c - b| < \lambda c(c - b). \end{aligned}$$

Daí, temos 2 casos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } c - b > 0 \Rightarrow \pm(c - b) < \lambda c(c - b) \Rightarrow \pm \frac{1}{\lambda} < c \\ \text{se } c - b < 0 \Rightarrow \pm(b - c) < \lambda c(c - b) \Rightarrow \pm \frac{-1}{\lambda} > c. \end{array} \right.$$

Em ambos os casos,  $r > 1$  se, e somente se, considerarmos o sinal de  $-$  em (5.20), pois  $-\frac{1}{\lambda} < c < \frac{1}{\lambda}$ . Portanto,

$$r = \frac{\lambda^2 bc - 1 - \lambda |c - b|}{\lambda^2 c^2 - 1}.$$

Logo, a distância  $\lambda$ -Funk do ponto  $P$  até o segmento de reta  $s_\lambda$  (no caso em que  $m = 0$ ) é fornecida por:

$$d_F(P, s) = \frac{\ln r}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\lambda^2 bc - 1 - \lambda|c - b|}{\lambda^2 c^2 - 1} \right). \quad (5.21)$$

Essa distância é realizada pelo ponto  $Q^* = \left( \frac{a}{r}, c \right)$ .

Para o caso em que  $s_\lambda$  é um segmento de reta qualquer, basta rotacionar os eixos, como foi feito anteriormente, e será obtido (5.17) que é realizada pelo ponto  $Q^{**} = \left( \frac{a \cos \theta + b \sin \theta}{r}, c \cos \theta \right)$ . Então, se rotaciona de novo para se conseguir o ponto no segmento de reta original.

**Observação 5.8** A distância  $d_F(\tilde{P}, \tilde{s}_\lambda)$  em que  $\tilde{s}_\lambda: x_1 = \tilde{c}$  e  $\tilde{P} = (\tilde{a}, \tilde{b})$ , pela rotação horária dos eixos coordenados, é equivalente a obter a distância  $d_F(P, s_\lambda)$ , onde  $s_\lambda: x'_2 = \tilde{c}$  e  $P = (-\tilde{b}, \tilde{a})$ . Isto é, pela equação (5.21),

$$d_F(\tilde{P}, \tilde{s}_\lambda) = d_F(P, s_\lambda) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{\lambda^2 \tilde{a} \tilde{c} - 1 - \lambda|\tilde{c} - \tilde{a}|}{\lambda^2 \tilde{c}^2 - 1} \right).$$

**Exemplo 5.9** Considere o ponto  $P = (0.6, 0.8)$  e o segmento de reta  $s_\lambda: x_2 = (\text{tg } 60^\circ)x_1 + 1$  sobre  $\Omega_{0.7}$ . Inicialmente, rotacionando o plano  $60^\circ$  no sentido horário, obtemos as novas coordenadas de  $P$  através do ponto

$$P' = (0.6 \cos 60^\circ + 0.8 \sin 60^\circ, 0.8 \cos 60^\circ - 0.6 \sin 60^\circ) \approx (0.99, -0.12).$$

Com o novo segmento de reta  $s'_\lambda: x'_2 = \cos 60^\circ$ , obtida pela rotação de  $s_\lambda$ , temos que a distância  $\lambda$ -Funk de  $P'$  até  $s'_\lambda$  é dada por

$$\begin{aligned} d_F(P', s'_\lambda) &= \frac{\ln r}{\lambda} \\ &= \frac{1}{0.7} \ln \left( \frac{1 - (0.7)^2 \cos 60^\circ (0.8 \cos 60^\circ - 0.6 \sin 60^\circ) + 0.7 | \cos 60^\circ - 0.8 \cos 60^\circ + 0.6 \sin 60^\circ |}{1 - (0.7)^2 \cos^2 60^\circ} \right) \\ &\approx 0.73, \end{aligned}$$

e esta distância é realizada pelo ponto

$$Q^{**} \approx \left( \frac{0.6}{1.67} \cos 60^\circ + \frac{0.8}{1.67} \sin 60^\circ, \cos 60^\circ \right) \approx (0.6, 0.5),$$

na reta  $s'_\lambda$  (veja circunferência  $\lambda$ -Funk tipo 1 de cor azul na Figura 18). Por outro lado, para encontrar o ponto  $Q^* \in s_\lambda$  que realiza a distância  $d_F(P, s_\lambda)$ , rotacionamos o plano

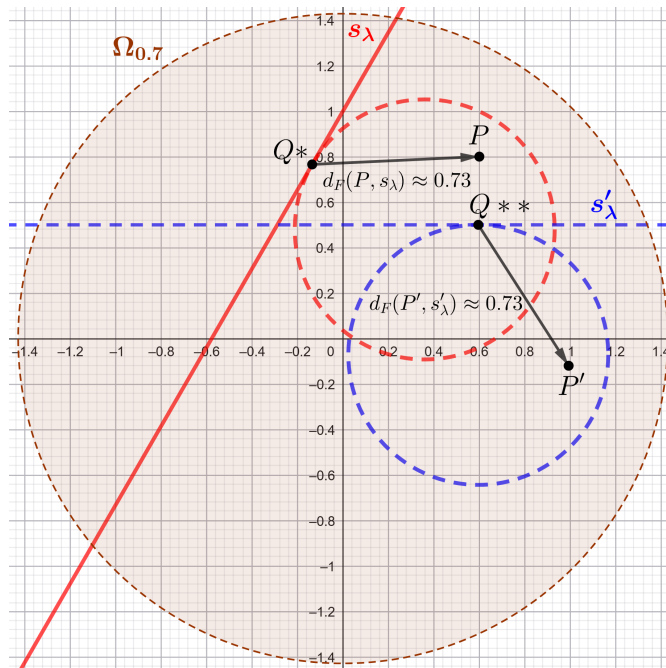
cartesiano em  $60^\circ$  no sentido anti-horário (veja circunferência  $\lambda$ -Funk tipo 1 de cor vermelha na Figura 18), obtendo assim

$$Q^* \approx \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\text{sen } 60^\circ \\ \text{sen } 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.5 \end{pmatrix} \approx (-0.14, 0.77).$$

Pela invariância por rotação da distância de  $\lambda$ -Funk, temos que

$$d_F(P, s_\lambda) = d_F(P, Q^*) = d_F(P', s'_\lambda) \approx 0.73.$$

Figura 18 – Distância 0.7-Funk de  $P = (0.6, 0.8)$  à  $s: x_2 = \text{tg } 60^\circ + 1$  em  $\Omega_{0.7}$



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

**Observação 5.9** Observe que, assim como ocorre nas distâncias de  $\lambda$ -Funk de um segmento de reta até um ponto, podemos observar pelo Exemplo 5.9 que o caminho mais rápido nem sempre é o caminho perpendicular ao segmento de reta  $s_\lambda$ . A demonstração deste resultado é semelhante ao que fizemos na Observação 5.7, concluindo também que, estes caminhos só são perpendiculares caso  $Q$  (ou o ponto  $Q^*$  rotacionado) pertença ao eixo  $x'_2$ , no caso em que o segmento de reta  $s_\lambda$  seja constante e horizontal (ou para um segmento de reta com inclinação não nula, respectivamente).

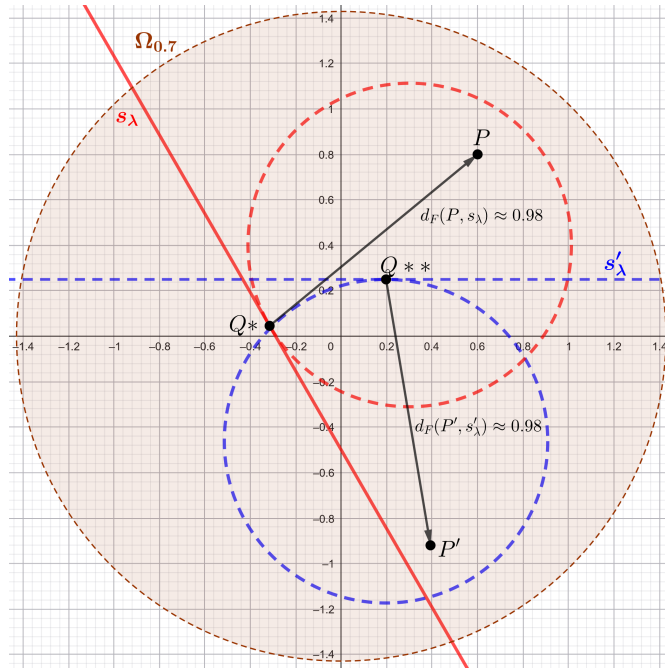
**Exemplo 5.10** Considere o ponto  $P = (0.6, 0.8)$  e o segmento de reta  $s_\lambda: x_2 = (\text{tg } 120^\circ)x_1 - 0.5$  sobre  $\Omega_{0.7}$ . Neste caso, obtemos

$$P' \approx (0.39, -0.92), s'_\lambda: x'_2 = -(0.5) \cos 120^\circ, Q^{**} \approx (0.2, 0.25), Q^* \approx (-0.32, 0.05).$$

Pela invariância por rotação da distância de  $\lambda$ -Funk, temos que

$$d_F(P, s_\lambda) = d_F(P, Q^*) = d_F(P', s'_\lambda) \approx 0.98.$$

Figura 19 – Distância 0.7-Funk de  $P = (0.6, 0.8)$  à  $s: x_2 = \text{tg } 120^\circ - 0.5$  em  $\Omega_{0.7}$



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

### 5.3 DISTÂNCIA DE $\lambda$ -FUNK ENTRE SEGMENTOS DE RETAS

Nesta seção faremos um estudo da distância entre segmentos de retas, serão utilizadas as fórmulas de distância ente ponto e segmento de reta para obter os cálculos.

**Definição 5.5** Dadas suas retas quaisquer  $s_1, s_2 \subset \mathbb{R}^2$ . A *distância de  $\lambda$ -Funk* de  $s_{1,\lambda} = s_1 \cap \Omega_\lambda$  até  $s_{2,\lambda} = s_2 \cap \Omega_\lambda$  é definida como sendo a quantidade  $d_F(s_{1,\lambda}, s_{2,\lambda}) \in \mathbb{R}$  tal que

$$d_F(s_{1,\lambda}, s_{2,\lambda}) := \min\{d_F(P, s_{2,\lambda}); P \in s_{1,\lambda}\}.$$

Dizemos que  $P^* \in s_{1,\lambda}$  é o ponto que realiza a distância de  $\lambda$ -Funk de  $s_{1,\lambda}$  até  $s_{2,\lambda}$  se, e somente se,

$$d_F(P^*, s_{2,\lambda}) \leq d_F(P, s_{2,\lambda}), \quad \text{para todo } P \in s_{1,\lambda}.$$

Antes de obtermos fórmulas para a distância entre segmentos de retas, é necessário primeiro analisar as posições relativas entre elas.

**Definição 5.6** Considere dois segmentos de retas quaisquer  $s_{1,\lambda}$  e  $s_{2,\lambda}$  contidas em  $\Omega_\lambda$ . Esses segmentos de retas satisfazem uma, e apenas uma, das seguintes relações:

1.  $s_{1,\lambda} \cap s_{2,\lambda} \neq \emptyset$ ;
2.  $s_{1,\lambda} \cap s_{2,\lambda} = \emptyset$ , onde  $\emptyset$  é o conjunto vazio.

Para o caso 1, chamamos  $s_{1,\lambda}$  e  $s_{2,\lambda}$  de *segmentos de retas concorrentes* e, no caso 2, *segmentos de retas não concorrentes*.

**Observação 5.10** Pela Definição 5.6, se dois segmentos de retas  $s_{1,\lambda}$  e  $s_{2,\lambda}$  são concorrentes em  $\Omega_\lambda$ , então existe ao menos um ponto de interseção  $P \in \Omega_\lambda$  entre elas, por conta disso, a distância entre elas é nula. Devido a isso, consideraremos apenas os casos em que  $s_{1,\lambda}$  e  $s_{2,\lambda}$  são segmentos de retas não concorrentes.

### 5.3.1 Distância de $\lambda$ -Funk entre segmentos de retas com inclinações iguais

Dados dois segmentos de retas distintos  $s_{1,\lambda} = s_1 \cap \Omega_\lambda$  e  $s_{2,\lambda} = s_2 \cap \Omega_\lambda$  com inclinações iguais tais que  $s_1: x_2 = ax_1 + c_1$  e  $s_2: x_2 = ax_1 + c_2$ . Sendo a inclinação destas retas dada por  $a = \tan \theta$ , com  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , a distância de  $s_{1,\lambda}$  até  $s_{2,\lambda}$  pode ser adquirida a partir da rotação destas retas em um ângulo de  $\theta$  graus no sentido horário, como já fizemos nas seções anteriores.

Dessa forma, as retas  $s'_1$  e  $s'_2$  obtidas pela rotação de  $s_1$  e  $s_2$ , respectivamente, são retas constantes da forma:

$$\begin{cases} s'_1: x'_2 = c_1 \cos \theta \in \mathbb{R}, \\ s'_2: x'_2 = c_2 \cos \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Assim, tomando um ponto  $P' \in s'_{1,\lambda} = s'_1 \cap \Omega_\lambda$ , este ponto tem coordenadas da forma  $(x'_1, c_1 \cos \theta)$ , a distância entre os segmentos de retas, agora pode ser obtida usando a fórmula da distância entre ponto e segmento de reta dada em (5.17). Como a distância  $d_F$  é invariante por rotação, temos

$$d_F(s_{1,\lambda}, s_{2,\lambda}) = d_F(s'_{1,\lambda}, s'_{2,\lambda}) = d_F(P', s'_{2,\lambda}).$$

Portanto, ao calcular a distância  $d_F(P', s'_{2,\lambda})$ , obtemos:

$$d_F(P', s'_{2,\lambda}) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{1 - \lambda^2 c_1 c_2 \cos^2 \theta + \lambda |(c_2 - c_1) \cos \theta|}{1 - \lambda^2 c_2^2 \cos^2 \theta} \right). \quad (5.22)$$

Note que (5.22) é dependente apenas dos coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$  e do valor de  $\theta$  que são constantes nas retas  $s_1$  e  $s_2$ . Isso significa que, a distância de  $\lambda$ -Funk de  $s'_{1,\lambda}$  até  $s'_{2,\lambda}$  não depende da coordenada do eixo das abscissas  $x'_1$  do ponto  $P'$  pertencente a reta  $s'_{1,\lambda}$ , portanto, independe do ponto  $P$  optado no início. Conforme a invariância por rotação da distância de  $\lambda$ -Funk  $d_F$ , pensando em determinar a distância entre  $s_{1,\lambda}$  e  $s_{2,\lambda}$  sem realizar rotação, esse cálculo também não irá depender do ponto  $P$  sobre  $s_1$  escolhido inicialmente. Isto é,

$$d_F(s_{1,\lambda}, s_{2,\lambda}) = d_F(P, s_{2,\lambda}) = \frac{\ln r}{\lambda} \text{ é constante, para todo } P \in s_{1,\lambda}. \quad (5.23)$$

**Exemplo 5.11** Considere os segmentos de retas  $s_{1,0.7}: x_2 = \text{tg}(30^\circ)x_1 - 0.5$  e  $s_{2,0.7}: x_2 = \text{tg}(30^\circ)x_1 + 0.5$  em  $\Omega_{0.7}$ . Por (5.22), temos

$$\begin{aligned} d_F(s_{1,0.7}, s_{2,0.7}) &= d_F(s'_{1,0.7}, s'_{2,0.7}) \\ &= d_F(P', s'_{2,0.7}) \\ &= \frac{1}{0.7} \ln \left( \frac{1 - (0.7)^2 (-0.5)(0.5) \cos^2(30^\circ) + 0.7 |(0.5 + 0.5) \cos(30^\circ)|}{1 - (0.7)^2 (0.5)^2 \cos^2(30^\circ)} \right) \\ &\approx 0.89, \end{aligned}$$

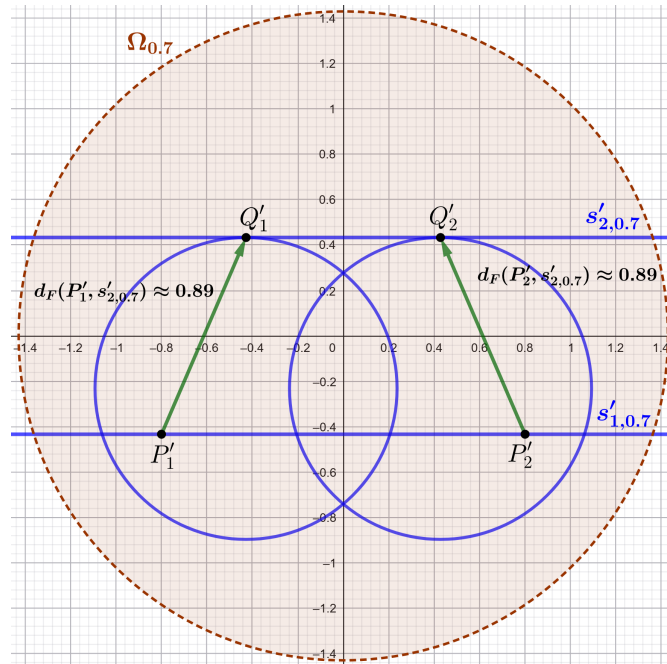
onde

$$s'_{1,0.7}: x'_2 = -0.5 \cos(30^\circ), \quad s'_{2,0.7}: x'_2 = 0.5 \cos(30^\circ)$$

$$\text{e } P'_1 = (-0.8, -0.5 \cos(30^\circ)) \approx (-0.8, -0.43).$$

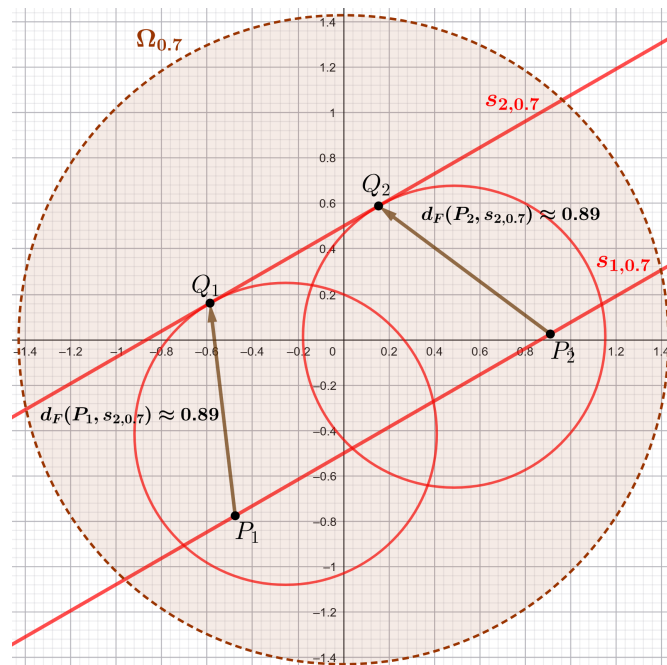
Por outro lado, esta distância permanece constante independente da escolha do ponto inicial  $P_i$  ( $P'_i$ ) sobre o segmento de reta  $s_{i,0.7}$  ( $s'_{i,0.7}$ ),  $i = 1, 2$  (veja a Figura 20 e Figura 21).

Figura 20 – Distância 0.7–Funk entre os segmentos de retas  $s'_{1,0.7}$  e  $s'_{2,0.7}$



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

Figura 21 – Distância 0.7–Funk entre os segmentos de retas  $s_{1,0.7}$  e  $s_{2,0.7}$

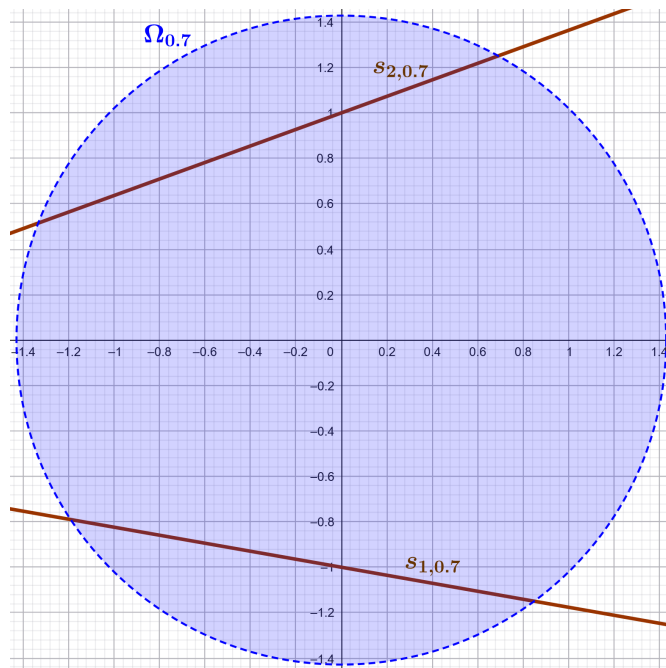


Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

Na geometria euclidiana, o paralelismo entre retas definido no  $\mathbb{R}^2$  tem uma característica principal, que é o fato das retas paralelas não se interceptarem.

Nesse sentido, os segmentos de retas com essas particularidades, são segmentos de retas distintos, mas que possuem a mesma inclinação, assim como os segmentos de retas  $s_{1,\lambda}$  e  $s_{2,\lambda}$  que analisamos. Além disso, a distância euclidiana entre esse tipo de segmentos de retas também independe da escolha do ponto de um desses segmentos de retas. Ao se basear na igualdade (5.23) para definir segmentos de retas paralelas como sendo segmentos de retas com inclinações iguais que nunca se cruzam, há um impedimento, pois devido a limitação do nosso domínio, existem segmentos de retas que não se interceptam em  $\Omega_\lambda$ , mas possuem inclinações distintas (ver Figura 22). Como para esses segmentos de retas com essas propriedades não é possível determinar a distância de  $\lambda$ -Funk entre elas, optamos por não definir formalmente o paralelismo entre segmentos de retas.

Figura 22 – Segmentos de retas não concorrentes com inclinações distintas



Fonte: Autores (2025). Construção no *software Geogebra 6.0*.

## 6 MÉTRICA DE 1–FUNK PERTURBADA NO DISCO UNITÁRIO

Em contraste com os capítulos anteriores, nos quais o espaço euclidiano foi perturbado por um campo vetorial para modelar um problema de navegação e, assim, obter a métrica  $\lambda$ –Funk, neste capítulo seguimos o caminho inverso: partimos de uma métrica já dada e a perturbamos, buscando posteriormente interpretá-la como um problema de navegação.

Consideremos, portanto, uma perturbação da métrica 1–Funk (isto é, o caso  $\lambda = 1$  da Definição 3.1) por meio de uma 1–forma que depende de um vetor constante  $a \in \mathbb{R}^2$ . A métrica resultante será denominada métrica  $G$ .

**Definição 6.1 (Métrica  $G$ )** Para todos os pontos  $x, y \in \mathbb{B}^2$  e um vetor fixo  $a \in \mathbb{R}^2$ , definimos *uma métrica  $G$*  por:

$$G(x, y) = F(x, y) + \frac{\langle a, y \rangle}{1 + \langle a, x \rangle},$$

em que  $F$  é métrica 1–Funk, expressa por

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{\langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|x\|^2)}}{1 - \|x\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle}{1 - \|x\|^2}. \quad (6.1)$$

**Observação 6.1** Como podemos observar por (6.1), a métrica  $G$  é definida pela métrica de 1–Funk dada por  $F(x, y)$ , mais a perturbação associada ao vetor  $a$  descrita por  $\frac{\langle a, y \rangle}{1 + \langle a, x \rangle}$ . Sendo assim, todos os resultados que obtivemos para métrica de Funk continuam válidas para a  $F(x, y)$ , entretanto, precisamos verificar agora, se esses resultados também serão válidos para a perturbação associada ao vetor  $a$  e quais os impactos dessa perturbação na geometria da nova métrica  $G$ .

**Observação 6.2** Vamos verificar que a métrica  $G$  é uma métrica Randers em  $\mathbb{B}^2$ , quando  $\|a\| < 1$ . De fato, desde que

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{\sqrt{\langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|x\|^2)}}{1 - \|x\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle}{1 - \|x\|^2} + \frac{\langle a, y \rangle}{1 + \langle a, x \rangle} \\ &= \frac{\sqrt{\langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|x\|^2)}}{1 - \|x\|^2} + \left\langle \frac{x}{1 - \|x\|^2} + \frac{a}{1 + \langle a, x \rangle}, y \right\rangle. \end{aligned}$$

Denotemos  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  e  $a = (a_1, a_2)$ . Temos, que a métrica de Randers é dada por:

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$$

em que,

$$\alpha(x, y) = \frac{\sqrt{\langle x, y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|x\|^2)}}{1 - \|x\|^2} = \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + 2a_{12}(x)y_1y_2 + a_{22}(x)y_2^2},$$

onde as funções diferenciáveis  $a_{ij}(x)$  são determinadas por:

$$[a_{ij}(x)] = \frac{1}{(1 - \|x\|^2)^2} \begin{pmatrix} 1 - x_2^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & 1 - x_1^2 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

e

$$\beta(x, y) = \left\langle \frac{x}{1 - \|x\|^2} + \frac{a}{1 + \langle a, x \rangle}, y \right\rangle = b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2,$$

onde

$$b_1(x) = \frac{x_1}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_1}{1 + \langle a, x \rangle}, \quad b_2(x) = \frac{x_2}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_2}{1 + \langle a, x \rangle}. \quad (6.3)$$

De maneira análoga ao que fizemos para a métrica de  $\lambda$ -Funk, vamos usar a Definição 2.13 , para mostrar que  $G$  será uma métrica Randers, para isso, devemos verificar

$$\|\beta\|_\alpha := \sqrt{a^{11}(x)[b_1(x)]^2 + [a^{12}(x) + a^{21}(x)]b_1(x)b_2(x) + a^{22}(x)[b_2(x)]^2} < 1,$$

onde

$$[a^{ij}(x)] = [a_{ij}(x)]^{-1} = (1 - \|x\|^2) \begin{pmatrix} 1 - x_1^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & 1 - x_2^2 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Note que, podemos elevar  $\|\beta\|_\alpha$  ao quadrado obtendo:

$$\begin{aligned} \|\beta\|_\alpha^2 &= a^{11}(x)[b_1(x)]^2 + [a^{12}(x) + a^{21}(x)]b_1(x)b_2(x) + a^{22}(x)[b_2(x)]^2 \\ &= (1 - \|x\|^2)(1 - x_1^2) \left( \frac{x_1}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_1}{1 + \langle a, x \rangle} \right)^2 \\ &\quad - 2x_1x_2(1 - \|x\|^2) \left( \frac{x_1}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_1}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \left( \frac{x_2}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_2}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \\ &\quad + (1 - \|x\|^2)(1 - x_2^2) \left( \frac{x_2}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_2}{1 + \langle a, x \rangle} \right)^2 \\ &= (1 - x_1^2) \left( \frac{x_1^2}{1 - \|x\|^2} + \frac{2a_1x_1}{1 + \langle a, x \rangle} + \frac{(1 - \|x\|^2)a_1^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\ &\quad - 2x_1x_2 \left( \frac{x_1x_2}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_1x_2 + a_2x_1}{1 + \langle a, x \rangle} + \frac{(1 - \|x\|^2)a_1a_2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\ &\quad + (1 - x_2^2) \left( \frac{x_2^2}{1 - \|x\|^2} + \frac{2a_2x_2}{1 + \langle a, x \rangle} + \frac{(1 - \|x\|^2)a_2^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\ &= \frac{\|x\|^2 - \|x\|^4}{1 - \|x\|^2} + \frac{2\langle a, x \rangle(1 - \|x\|^2)}{1 + \langle a, x \rangle} + \frac{1 - \|x\|^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} (\|a\|^2 - \langle a, x \rangle^2) \\ &= \|x\|^2 + \frac{1 - \|x\|^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} (2\langle a, x \rangle(1 + \langle a, x \rangle) + \|a\|^2 - \langle a, x \rangle^2) \\ &= \|x\|^2 + \frac{1 - \|x\|^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} (\|a\|^2 + 2\langle a, x \rangle + \langle a, x \rangle^2). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Para verificarmos que  $\|\beta\|_\alpha^2$  é menor que um, podemos substituir pela expressão que encontramos (6.5). Logo, adquirimos que:

$$\begin{aligned}
\|\beta\|_\alpha^2 < 1 &\iff \|x\|^2 + \frac{1 - \|x\|^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} (\|a\|^2 + 2\langle a, x \rangle + \langle a, x \rangle^2) < 1 \\
&\iff \frac{1 - \|x\|^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} (\|a\|^2 + 2\langle a, x \rangle + \langle a, x \rangle^2) < 1 - \|x\|^2 \\
&\iff \frac{\|a\|^2 + 2\langle a, x \rangle + \langle a, x \rangle^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} < 1 \\
&\iff \|a\|^2 + 2\langle a, x \rangle + \langle a, x \rangle^2 < 1 + 2\langle a, x \rangle + \langle a, x \rangle^2 \\
&\iff \|a\|^2 < 1.
\end{aligned}$$

Tomando a raiz de ambos os lados da igualdade, conseguimos:

$$\|\beta_x\|_\alpha < 1 \iff \|a\| < 1.$$

Portanto, vamos supor daqui para frente que  $a \in \mathbb{B}^2$ . Desta maneira, pela Definição 2.13, temos que  $G$  define uma métrica Randers em  $\mathbb{B}^2$  sempre que  $a \in \mathbb{B}^2$ .

## 6.1 INTERPRETAÇÃO DE $G$ COMO MÉTRICA DE NAVEGAÇÃO

Como já mostramos na observação (6.2), a métrica  $G$  é uma métrica de Randers. Para cada métrica de Randers  $R = \alpha + \beta$  existe (e vice-versa) uma construção de Zermelo que produz um par  $(h, W)$  — uma métrica Riemanniana  $h$  e um campo vetorial  $W$  (o “vento”) — tais que a solução do problema de navegação para  $(h, W)$  é exatamente  $R$ . Portanto, nesta seção, explicamos como mostrar que a métrica perturbada

$$G(x, y) = F(x, y) + H(x, y),$$

onde  $F$  é a métrica 1–Funk definida no disco unitário  $\mathbb{B}^2$  (dada por (6.1)) e

$$H(x, y) = \frac{\langle a, y \rangle}{1 + \langle a, x \rangle},$$

pode ser adquirida a partir dos dados de navegação  $(h, W)$ . Vamos aplicar essa construção de Zermelo a  $G$  (tendo em mente que  $F$  e  $G$  são do tipo Randers). Em seguida, utilizamos as fórmulas padrão que podem ser encontradas em (CHENG; SHEN, 2012)), para relacionar  $(\alpha, \beta)$  com  $(h, W)$ , o que nos permite determinar explicitamente a métrica  $h$  e o campo  $W$  para  $G$ .

Para tal coisa, reescrevemos  $G = F + H$  na forma  $G = \alpha + \beta$  com

$$\alpha(x, y) = \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + 2a_{12}(x)y_1y_2 + a_{22}(x)y_2^2}, \quad \beta(x, y) = b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2,$$

onde  $a_{ij}, b_i$  são dados por (6.2) e (6.3), respectivamente.

Consideremos agora

$$b^1(x) := a^{11}(x)b_1(x) + a^{12}(x)b_2(x), \quad b^2(x) := a^{21}(x)b_1(x) + a^{22}(x)b_2(x),$$

onde  $a^{ij}$  são dados por (6.4) e  $\lambda(x) := 1 - \|\beta\|_\alpha^2$ , onde  $\|\beta\|_\alpha^2$  é dado por (6.5).

Assim, calcularemos explicitamente  $b^1(x), b^2(x)$  e  $\lambda(x)$ :

$$\begin{aligned} b^1(x) &= (1 - \|x\|^2)(1 - x_1^2) \left( \frac{x_1}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_1}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \\ &\quad - (1 - \|x\|^2)x_1x_2 \left( \frac{x_2}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_2}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \\ &= (1 - \|x\|^2) \left( \frac{x_1(1 - x_1^2)}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_1(1 - x_1^2)}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \\ &\quad - (1 - \|x\|^2) \left( \frac{x_1x_2^2}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_2x_1x_2}{1 + \langle a, x \rangle} \right), \end{aligned}$$

colocando em evidência  $1 - \|x\|^2$  obtemos

$$\begin{aligned} b^1(x) &= (1 - \|x\|^2) \left( \frac{x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_1 - x_1(a_1x_1 + a_2x_2)}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \\ &= x_1(1 - \|x\|^2) + (1 - \|x\|^2) \left( \frac{a_1 - x_1\langle a, x \rangle}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \\ &= \frac{(1 - \|x\|^2)(x_1 + a_1)}{1 + \langle a, x \rangle}, \end{aligned}$$

analogamente, conseguimos

$$\begin{aligned} b^2(x) &= -(1 - \|x\|^2)x_1x_2 \left( \frac{x_1}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_1}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \\ &\quad + (1 - \|x\|^2)(1 - x_2^2) \left( \frac{x_2}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_2}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \\ &= x_2(1 - \|x\|^2) + (1 - \|x\|^2) \left( \frac{a_2 - x_2\langle a, x \rangle}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \\ &= \frac{(1 - \|x\|^2)(x_2 + a_2)}{1 + \langle a, x \rangle} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= 1 - \left( \|x\|^2 + \frac{1 - \|x\|^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} (\|a\|^2 + 2\langle a, x \rangle + \langle a, x \rangle^2) \right) \\ &= (1 - \|x\|^2) \left( 1 - \frac{\|a\|^2 + 2\langle a, x \rangle + \langle a, x \rangle^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\ &= \frac{(1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2)}{(1 + \langle a, x \rangle)^2}. \end{aligned}$$

Neste momento, vamos definir, para  $i, j = 1, 2$ :

$$h_{ij}(x) = \lambda(x)(a_{ij}(x) - b_i(x)b_j(x)) \quad \text{e} \quad W^i(x) = -\frac{b^i(x)}{\lambda(x)}.$$

Apresentamos os cálculos dos coeficientes  $h_{ij}$  e do campo  $W$ :

$$\begin{aligned} h_{11}(x) &= \lambda(x) \left( a_{11}(x) - (b_1(x))^2 \right) \\ &= \lambda(x) \left( \frac{1 - x_2^2}{(1 - \|x\|^2)^2} - \left( \frac{x_1}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_1}{1 + \langle a, x \rangle} \right)^2 \right) \\ &= \lambda(x) \left( \frac{1 - \|x\|^2}{(1 - \|x\|^2)^2} - \frac{2x_1 a_1}{(1 - \|x\|^2)(1 + \langle a, x \rangle)} - \frac{a_1^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\ &= \lambda(x) \left( \frac{1}{1 - \|x\|^2} - \frac{2x_1 a_1}{(1 - \|x\|^2)(1 + \langle a, x \rangle)} - \frac{a_1^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\ &= \lambda(x) \left( \frac{1 + a_2 x_2 - a_1 x_1}{(1 - \|x\|^2)(1 + \langle a, x \rangle)} - \frac{a_1^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\ &= \frac{(1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2)}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \left( \frac{(1 + a_2 x_2)^2 - a_1^2 x_1^2 - a_1^2 (1 - \|x\|^2)}{(1 - \|x\|^2)(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\ &= \frac{(1 - \|a\|^2) [(1 - \|a\|^2)(1 - x_2^2) + (x_2 + a_2)^2]}{(1 + \langle a, x \rangle)^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{12}(x) = h_{21}(x) &= \lambda(x) \left( a_{12}(x) - b_1(x)b_2(x) \right) \\ &= \lambda(x) \left( \frac{x_1 x_2}{(1 - \|x\|^2)^2} - \left( \frac{x_1}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_1}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \left( \frac{x_2}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_2}{1 + \langle a, x \rangle} \right) \right) \\ &= \lambda(x) \left( -\frac{a_1 a_2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} - \frac{a_1 x_2 + a_2 x_1}{(1 - \|x\|^2)(1 + \langle a, x \rangle)} \right) \\ &= -\frac{(1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2)}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \left( \frac{a_1 a_2 (1 - \|x\|^2) + (a_1 x_2 + a_2 x_1)(1 + \langle a, x \rangle)}{(1 - \|x\|^2)(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\ &= -\frac{(1 - \|a\|^2) [(x_1 + a_1)(x_2 + a_2) - (1 - \|a\|^2)x_1 x_2]}{(1 + \langle a, x \rangle)^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{22}(x) &= \lambda(x) \left( a_{22}(x) - (b_2(x))^2 \right) \\
&= \lambda(x) \left( \frac{1 - x_1^2}{(1 - \|x\|^2)^2} - \left( \frac{x_2}{1 - \|x\|^2} + \frac{a_2}{1 + \langle a, x \rangle} \right)^2 \right) \\
&= \lambda(x) \left( \frac{1 - \|x\|^2}{(1 - \|x\|^2)^2} - \frac{2x_2 a_2}{(1 - \|x\|^2)(1 + \langle a, x \rangle)} - \frac{a_2^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\
&= \lambda(x) \left( \frac{1}{1 - \|x\|^2} - \frac{2x_2 a_2}{(1 - \|x\|^2)(1 + \langle a, x \rangle)} - \frac{a_2^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\
&= \lambda(x) \left( \frac{1 + a_1 x_1 - a_2 x_2}{(1 - \|x\|^2)(1 + \langle a, x \rangle)} - \frac{a_2^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\
&= \frac{(1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2)}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \left( \frac{(1 + a_1 x_1)^2 - a_2^2 x_2^2 - a_2^2 (1 - \|x\|^2)}{(1 - \|x\|^2)(1 + \langle a, x \rangle)^2} \right) \\
&= \frac{(1 - \|a\|^2) [(1 - \|a\|^2)(1 - x_1^2) + (x_1 + a_1)^2]}{(1 + \langle a, x \rangle)^4},
\end{aligned}$$

$$W^1(x) = -\frac{b^1(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\frac{(1 - \|x\|^2)(x_1 + a_1)}{1 + \langle a, x \rangle}}{\frac{(1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2)}{(1 + \langle a, x \rangle)^2}} = -\frac{(x_1 + a_1)(1 + \langle a, x \rangle)}{1 - \|a\|^2}$$

e

$$W^2(x) = -\frac{b^2(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\frac{(1 - \|x\|^2)(x_2 + a_2)}{1 + \langle a, x \rangle}}{\frac{(1 - \|x\|^2)(1 - \|a\|^2)}{(1 + \langle a, x \rangle)^2}} = -\frac{(x_2 + a_2)(1 + \langle a, x \rangle)}{1 - \|a\|^2}.$$

Logo,

$$h(x) = \sqrt{h_{11}(x)y_1^2 + 2h_{12}(x)y_1y_2 + h_{22}(x)y_2^2} \quad \mathbf{e} \quad W(x) = (W^1(x), W^2(x))$$

é o par produzido pela construção de Zermelo.

A seguir calculamos  $h$ :

$$\begin{aligned}
[h(x)]^2 &= h_{11}(x)y_1^2 + 2h_{12}(x)y_1y_2 + h_{22}(x)y_2^2 \\
&= \frac{(1 - \|a\|^2) [(1 - \|a\|^2)(1 - x_2^2) + (x_2 + a_2)^2]}{(1 + \langle a, x \rangle)^4} y_1^2 \\
&\quad - 2 \frac{(1 - \|a\|^2) [(x_1 + a_1)(x_2 + a_2) - (1 - \|a\|^2)x_1x_2]}{(1 + \langle a, x \rangle)^4} y_1y_2 \\
&\quad + \frac{(1 - \|a\|^2) [(1 - \|a\|^2)(1 - x_1^2) + (x_1 + a_1)^2]}{(1 + \langle a, x \rangle)^4} y_2^2 \\
&= \frac{1 - \|a\|^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^4} \left[ [(1 - \|a\|^2)(1 - x_2^2) + (x_2 + a_2)^2] y_1^2 \right. \\
&\quad \left. - 2 [(x_1 + a_1)(x_2 + a_2) - (1 - \|a\|^2)x_1x_2] y_1y_2 \right. \\
&\quad \left. + [(1 - \|a\|^2)(1 - x_1^2) + (x_1 + a_1)^2] y_2^2 \right] \\
&= \frac{1 - \|a\|^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^4} \left[ (1 - \|a\|^2) \left( (1 - x_2^2)y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + (1 - x_1^2)y_2^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + (x_2 + a_2)^2y_1^2 - 2y_1y_2(x_1 + a_1)(x_2 + a_2) + (x_1 + a_1)^2y_2^2 \right] \\
&= \frac{1 - \|a\|^2}{(1 + \langle a, x \rangle)^4} \left[ (1 - \|a\|^2) \left( \|y\|^2 - (x_2y_1 - x_1y_2)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( (x_2 + a_2)y_1 - (x_1 + a_1)y_2 \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Portanto, se denotamos  $y^\perp = (-y_2, y_1)$ , podemos escrever  $h$  como segue:

$$h(x) = \frac{\sqrt{1 - \|a\|^2}}{(1 + \langle a, x \rangle)^2} \sqrt{(1 - \|a\|^2) \left( \|y\|^2 - \langle x, y^\perp \rangle^2 \right) + \langle x + a, y^\perp \rangle^2}.$$

Por outro lado, calculando  $W$  adquirimos:

$$\begin{aligned}
W(x) &= (W^1(x), W^2(x)) \\
&= \left( -\frac{(x_1 + a_1)(1 + \langle a, x \rangle)}{1 - \|a\|^2}, -\frac{(x_2 + a_2)(1 + \langle a, x \rangle)}{1 - \|a\|^2} \right) \\
&= -\frac{1 + \langle a, x \rangle}{1 - \|a\|^2} (x_1 + a_1, x_2 + a_2) \\
&= -\frac{1 + \langle a, x \rangle}{1 - \|a\|^2} (x + a).
\end{aligned}$$

Isto mostra explicitamente o par  $(h, W)$  produzido pela construção de Zermelo correspondente à métrica  $G$ . Dessa forma, toda métrica  $G$  pode ser obtida de um problema de navegação de Zermelo e vice-versa, como queremos mostrar. Confirmando a hipótese inicial, consolidando de fato, um significado físico para o vetor  $a$ , o qual pode ser entendido como a ação de uma segunda força externa ao barco, como um vento ou

correnteza não constante que afeta o movimento do barco no dico. Assim podemos nos basear em situações de navegações físicas para exemplificar os resultados a seguir.

## 6.2 DISTÂNCIA INDUZIDA PELA MÉTRICA $G$

Pensando em induzir uma fórmula para a distância  $G$ , precisamos primeiro estudar as geodésicas dessa métrica, com o objetivo de facilitar o estudo, o ideal seria descobrir que a curva minimizante é uma linha reta. Sendo assim, iremos averiguar se a métrica  $G$ , por ser uma perturbação da métrica de Funk, também preserva sua planicidade. Como já sabemos, a métrica  $F$  é projetivamente plana e portanto, satisfaz a equação de Hamel (ver p. 22 em (GUO; MO, 2018)), isto é,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial y_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_2}. \quad (6.6)$$

**Afirmção 6.1**  $G$  é projetivamente plana.

**Demonstração.** Agora, basta conferirmos se a nova perturbação associada ao vetor  $a$  também é projetivamente plana. Para isso, denotamos

$$H(x, y) = \frac{\langle a, y \rangle}{1 + \langle a, x \rangle} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{1 + a_1 x_1 + a_2 x_2}. \quad (6.7)$$

Dessa forma,  $G$  pode ser escrita como:

$$G(x, y) = F(x, y) + H(x, y), \quad \text{para quaisquer } x, y \in \mathbb{B}^2. \quad (6.8)$$

Para verificarmos a equação de Hamel, precisamos apenas testar se ela é válida para  $H(x, y)$ . Ao derivarmos (6.7), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y_1} &= \frac{a_1}{1 + a_1 x_1 + a_2 x_2} \Rightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_1} = -\frac{a_1 a_2}{(1 + a_1 x_1 + a_2 x_2)^2}, \\ \frac{\partial H}{\partial y_2} &= \frac{a_2}{1 + a_1 x_1 + a_2 x_2} \Rightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_2} = -\frac{a_1 a_2}{(1 + a_1 x_1 + a_2 x_2)^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_1} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_2}. \quad (6.9)$$

Assim, por (6.6) e (6.9), adquirimos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial y_1} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial y_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial y_1} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial y_2} \\ &= \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial y_2}.\end{aligned}\tag{6.10}$$

Portanto, por (6.10),  $G$  é projetivamente plana.

Como conseguimos que a curva que realiza a menor distância entre dois pontos é uma reta, podemos induzir uma fórmula para essa distância. Para isso, tomamos dois pontos distintos  $P, Q \in \mathbb{B}^2$ . Como  $G$  é projetivamente plana e levando em conta a parametrização da curva  $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}^2$ , definida por:

$$c(t) = tQ + (1 - t)P = P + t(Q - P).\tag{6.11}$$

Note que  $c(0) = P$ ,  $c(1) = Q$  e

$$c'(t) = Q - P.\tag{6.12}$$

De acordo, com as Definições 2.14 e 2.15, a distância “ $G$ -Funk perturbada” de  $P$  até  $Q$ , denotada por  $d_G(P, Q)$ , pode ser descrita por:

$$d_G(P, Q) = \mathcal{L}_G(c) = \int_0^1 G(c(t), c'(t)) dt.\tag{6.13}$$

Agora, por (6.7), (6.8), (6.11) e (6.12), em (6.13), temos

$$\begin{aligned}d_G(P, Q) &= \int_0^1 F(c(t), c'(t)) dt + \int_0^1 H(c(t), c'(t)) dt \\ &= d_F(P, Q) + \int_0^1 \frac{\langle a, Q - P \rangle}{1 + \langle a, P + t(Q - P) \rangle} dt \\ &= d_F(P, Q) + \left[ \ln |1 + \langle a, P + t(Q - P) \rangle| \right]_0^1 \\ &= d_F(P, Q) + \ln \left| \frac{1 + \langle a, Q \rangle}{1 + \langle a, P \rangle} \right|.\end{aligned}\tag{6.14}$$

**Observação 6.3** Note que,  $1 + \langle a, x \rangle > 0$  para todo  $x \in \mathbb{B}^2$ . De fato, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, conseguimos que

$$-\langle a, x \rangle \leq |\langle a, x \rangle| \leq \|a\| \cdot \|x\| < 1 \text{ (pois } a, x \in \mathbb{B}^2) \Rightarrow 1 + \langle a, x \rangle > 0.$$

Logo, em (6.14), obtemos

$$d_G(P, Q) = d_F(P, Q) + \ln \left( \frac{1 + \langle a, Q \rangle}{1 + \langle a, P \rangle} \right) \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} &= \ln \left( \frac{\sqrt{\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2)\|Q - P\|^2} - \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{\langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2)\|Q - P\|^2} - \langle Q, Q - P \rangle} \right) + \ln \left( \frac{1 + \langle a, Q \rangle}{1 + \langle a, P \rangle} \right) \\ &= \ln \left( \frac{\sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{k} - \langle Q, Q - P \rangle} \cdot \frac{1 + \langle a, Q \rangle}{1 + \langle a, P \rangle} \right), \end{aligned} \quad (6.16)$$

onde

$$k := \langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2)\|Q - P\|^2. \quad (6.17)$$

Embora, já tenhamos mostrado que  $G$  é uma métrica Randers, portanto  $G$  é positiva o que torna a distância  $d_G(P, Q) > 0$  para todo  $P \neq Q$ , vamos mostrar

$$\frac{\sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{k} - \langle Q, Q - P \rangle} \cdot \frac{1 + \langle a, Q \rangle}{1 + \langle a, P \rangle} > 1, \quad (6.18)$$

Essa inequação garante ainda mais que  $d_G(P, Q)$  é bem definida. De fato, suponhamos que (6.18) seja válida, assim temos

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{k} - \langle Q, Q - P \rangle} \cdot \frac{1 + \langle a, Q \rangle}{1 + \langle a, P \rangle} > 1 \\ \iff &(\sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle)(1 + \langle a, Q \rangle) > (\sqrt{k} - \langle Q, Q - P \rangle)(1 + \langle a, P \rangle) \\ \iff &\|Q - P\|^2 + \langle a, mQ - nP \rangle > 0, \end{aligned} \quad (6.19)$$

em que

$$m = \sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle \text{ e } n = \sqrt{k} - \langle Q, Q - P \rangle. \quad (6.20)$$

Note que, em (6.20) calculando a diferença  $m - n$ , adquirimos:

$$m - n = \left( \sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle \right) - \left( \sqrt{k} - \langle Q, Q - P \rangle \right).$$

Simplificamos a expressão:

$$m - n = \sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle - \sqrt{k} + \langle Q, Q - P \rangle$$

$$m - n = -\langle P, Q - P \rangle + \langle Q, Q - P \rangle$$

$$m - n = \langle Q, Q - P \rangle - \langle P, Q - P \rangle.$$

Utilizando a linearidade do produto interno, conseguimos:

$$m - n = \langle Q - P, Q - P \rangle.$$

Perceba que  $\langle Q - P, Q - P \rangle = \|Q - P\|^2$ , portanto:

$$m - n = \|Q - P\|^2. \quad (6.21)$$

Por meio de (6.21), obtemos

$$\begin{aligned} \|mQ - nP\|^2 &= \|m(Q - P) + (m - n)P\|^2 \\ &= \|m(Q - P) + \|Q - P\|^2 P\|^2 \\ &= m^2 \|Q - P\|^2 + 2m \|Q - P\|^2 \langle P, Q - P \rangle + \|Q - P\|^4 \|P\|^2 \\ &= \|Q - P\|^2 (m^2 + 2m \langle P, Q - P \rangle) + \|Q - P\|^4 \|P\|^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Além disso, pela definição de  $m$  em (6.20) temos:

$$m = \sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle.$$

Reorganizando isso, adquirimos:

$$m + \langle P, Q - P \rangle = \sqrt{k}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$(m + \langle P, Q - P \rangle)^2 = k.$$

Substituindo  $k$  pela sua expressão dada em (6.17):

$$(m + \langle P, Q - P \rangle)^2 = \langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2.$$

Expandindo o lado esquerdo:

$$m^2 + 2m \langle P, Q - P \rangle + \langle P, Q - P \rangle^2 = \langle P, Q - P \rangle^2 + (1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2.$$

Subtraindo  $\langle P, Q - P \rangle^2$  de ambos os lados, conseguimos:

$$m^2 + 2m \langle P, Q - P \rangle = (1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2. \quad (6.23)$$

Logo substituindo (6.23) em (6.22), obtemos

$$\|mQ - nP\|^2 = \|Q - P\|^2 ((1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2) + \|Q - P\|^4 \|P\|^2.$$

Simplificamos a expressão:

$$\|mQ - nP\|^2 = \|Q - P\|^4 (1 - \|P\|^2) + \|Q - P\|^4 \|P\|^2.$$

Fatoramos  $\|Q - P\|^4$ :

$$\|mQ - nP\|^2 = \|Q - P\|^4 ((1 - \|P\|^2) + \|P\|^2).$$

Simplificamos o termo entre parênteses:

$$(1 - \|P\|^2) + \|P\|^2 = 1.$$

Portanto:

$$\|mQ - nP\|^2 = \|Q - P\|^4.$$

Tomando a raiz quadrada em ambos os lados (como as normas são não negativas):

$$\|mQ - nP\| = \|Q - P\|^2. \quad (6.24)$$

Agora, por (6.24) e pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz e uma vez que  $\|a\| < 1$ , adquirimos que:

$$-\langle a, mQ - nP \rangle \leq |\langle a, mQ - nP \rangle| \leq \|a\| \cdot \|mQ - nP\| < \|Q - P\|^2.$$

Portanto

$$\|Q - P\|^2 + \langle a, mQ - nP \rangle > 0.$$

Assim, por (6.19), temos que (6.18) é válida.

#### Observação 6.4

1.  $d_G$  é não simétrica. De fato, considere  $O$  como a origem e  $a \neq O$ . Portanto, da equação (6.16), temos

$$\begin{aligned} d_G(O, a) &= \ln \left( \frac{\sqrt{\|a\|^2}}{\sqrt{\|a\|^2} - \langle a, a \rangle} \cdot (1 + \langle a, a \rangle) \right) \\ &= \ln \left( \frac{1 + \|a\|^2}{1 - \|a\|} \right) \\ &\neq \ln \left( \frac{1 + \|a\|}{1 + \|a\|^2} \right) \\ &= \ln \left( \frac{\sqrt{\|a\|^2} + \|a\|^2}{\sqrt{\|a\|^2}} \cdot \frac{1}{1 + \langle a, a \rangle} \right) = d_G(a, O). \end{aligned}$$

2.  $d_G$  não é invariante por translações. De fato, consideremos  $T: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$  dado por  $T(x) = x + a$  onde  $a \neq O$ . Note que

$$d_G(O, -a) = \ln(1 + \|a\|) \neq \ln \left( \frac{1 + \|a\|}{1 + \|a\|^2} \right) = d_G(a, O) = d_G(T(O), T(-a)).$$

3.  $d_F$  não é invariante por rotações entorno da origem. De fato, considere  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{B}^2 - \{O\}$ ,  $P = (-a_2, a_1)$ ,  $Q = (a_2, -a_1)$  e rotação de  $\pi/4$  entorno da origem

$$R = \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & \text{sen } \pi/4 \\ -\text{sen } \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

assim, por (6.15) e como  $d_F$  é invariante por rotações, obtemos

$$d_G(P, Q) = d_F(P, Q) + \underbrace{\ln \left( \frac{1 + \langle a, Q \rangle}{1 + \langle a, P \rangle} \right)}_0 = d_F(P, Q)$$

e

$$d_G(RP, RQ) = d_F(RP, RQ) + \ln \left( \frac{1 + \langle a, RQ \rangle}{1 + \langle a, RP \rangle} \right) = d_F(P, Q) + \ln \left( \frac{\sqrt{2} - \|a\|^2}{\sqrt{2} + \|a\|^2} \right).$$

Portanto,  $d_G(P, Q) \neq d_G(RP, RQ)$ .

**Teorema 6.1** Dados os pontos  $P, Q \in \mathbb{B}^2$ , tomando um vetor fixo  $a$  com sua norma  $\|a\| < 1$  e sendo  $r \geq 1$  um número real. Então

$$d_G(P, Q) = \ln r \Leftrightarrow \|r(1 + \langle a, P \rangle)Q - (1 + \langle a, Q \rangle)P\| = (1 + \langle a, P \rangle)r - (1 + \langle a, Q \rangle). \quad (6.25)$$

**Demonstração.** Para  $P \neq Q$  e a partir da equação (6.16), temos que  $d_G(P, Q) = \ln r$  é equivalente a  $d_F(P, Q) = \ln \tilde{r}$ , em que

$$\tilde{r} = \frac{r(1 + \langle a, P \rangle)}{1 + \langle a, Q \rangle}. \quad (6.26)$$

Por meio da equivalência (5.1) (para  $\lambda = 1$ ), temos:

$$d_F(P, Q) = \ln \tilde{r} \Leftrightarrow \left\| \frac{P}{\tilde{r}} - Q \right\| = \frac{\tilde{r} - 1}{\tilde{r}}.$$

Substituindo (6.26) na expressão acima, obtemos

$$\left\| \frac{(1 + \langle a, Q \rangle)P}{r(1 + \langle a, P \rangle)} - Q \right\| = \frac{r(1 + \langle a, P \rangle) - (1 + \langle a, Q \rangle)}{r(1 + \langle a, P \rangle)}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por  $r(1 + \langle a, P \rangle)$  e observando que a norma é homogênea, adquirimos:

$$\|(1 + \langle a, Q \rangle)P - r(1 + \langle a, P \rangle)Q\| = r(1 + \langle a, P \rangle) - (1 + \langle a, Q \rangle).$$

Como a norma é simétrica,  $\| -u \| = \|u\|$ , podemos reescrever:

$$\|r(1 + \langle a, P \rangle)Q - (1 + \langle a, Q \rangle)P\| = r(1 + \langle a, P \rangle) - (1 + \langle a, Q \rangle).$$

Essa é exatamente a equivalência desejada.

**Observação 6.5** Considere  $P = (0, 0)$  e  $Q \in \mathbb{B}^2$ , com  $d_G(P, Q) = \ln(r)$ . Por meio da relação (6.25), é válida a igualdade:

$$\|rQ\| = r - 1 - \langle a, Q \rangle.$$

Agora vamos isolar  $r$ :

$$r - r\|Q\| = 1 + \langle a, Q \rangle.$$

$$(1 - \|Q\|)r = 1 + \langle a, Q \rangle.$$

Daí, temos

$$r = \frac{1 + \langle a, Q \rangle}{1 - \|Q\|}.$$

Devido a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, conseguimos que

$$r = \frac{1 + \langle a, Q \rangle}{1 - \|Q\|} \geq \frac{1 - \|Q\| \cdot \|a\|}{1 - \|Q\|}.$$

Quando  $\|Q\| \rightarrow 1^-$ , isto é, quando  $Q$  tende a fronteira de  $\mathbb{B}^2$ ,  $r \rightarrow +\infty$ , porque

$$\lim_{\|Q\| \rightarrow 1^-} (1 - \|Q\| \cdot \|a\|) = 1 - \|a\| > 0,$$

consequentemente  $d_G(P, Q) \rightarrow +\infty$ . Isso representa no problema físico de navegação, que se o barco tentasse se deslocar da origem do disco para a borda, ele levaria um tempo infinito para chegar ao seu destino, ou seja, ele nunca chegaria à fronteira. Por outro lado, supondo o caminho contrário, isto é,  $d_G(Q, P) = \ln(r)$  e considerando  $Q = (0, 0)$  e  $P \in \mathbb{B}^2$ , temos que da correspondência (6.25)

$$\|P\| = (1 + \langle a, P \rangle)r - 1.$$

De maneira análoga, vamos isolar o  $r$ :

$$(1 + \langle a, P \rangle)r = 1 + \|P\|.$$

Logo, temos

$$r = \frac{1 + \|P\|}{1 + \langle a, P \rangle}.$$

Novamente, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$r = \frac{1 + \|P\|}{1 + \langle a, P \rangle} \leq \frac{1 + \|P\|}{1 - \|a\| \cdot \|P\|} \leq \frac{2}{1 - \|a\|}.$$

Assim, para  $\|P\| \rightarrow 1^-$ , então  $r \rightarrow \frac{2}{1-\|a\|}$ , como consequência

$$d_G(P, Q) \rightarrow \ln \left( \frac{2}{1-\|a\|} \right).$$

É importante perceber que, se

$$\begin{aligned} r = \frac{2}{1-\|a\|} &\Rightarrow \frac{1+\|P\|}{1+\langle a, P \rangle} = \frac{2}{1-\|a\|} \\ \Rightarrow (1+\|P\|)(1-\|a\|) &= 2(1+\langle a, P \rangle) \geq 2(1-\|a\| \cdot \|P\|) \\ \Rightarrow 1+\|P\| - \|a\| - \|a\| \cdot \|P\| &\geq 2 - 2\|a\| \cdot \|P\| \\ \Rightarrow 0 &\geq 1 - \|P\| + \|a\| - \|a\| \cdot \|P\| = (1-\|P\|)(1+\|a\|), \end{aligned}$$

o que é um absurdo, porque  $P \in \mathbb{B}^2$ . Isto conclui que  $r < \frac{2}{1-\|a\|}$ . Implicando que, se um barco parte da fronteira do disco  $\mathbb{B}^2$  em direção a origem, seu tempo de viagem será finito e varia conforme a intensidade da correnteza (ou vento) representada pelo vetor  $a$ , quanto maior essa força, mais tempo o barco levará para chegar próximo da origem do disco.

### 6.3 CIRCUNFERÊNCIAS

Devido a assimetria da distância 1–Funk perturbada, temos que,

$$d_G(P, Q) \neq d_G(Q, P).$$

Por conta disso, novamente, devemos refletir sobre duas interpretações para a noção de circunferência. Considere um barco partindo do centro no ponto  $P$ , queremos descobrir o conjunto de todos os pontos que ele pode alcançar com uma quantidade de combustível  $\ln r$ , essa será chamada de *tipo 1*. Outra situação é determinar o conjunto de pontos que o barco pode partir para chegar ao centro  $P$  com uma quantidade de combustível  $\ln r$ , essa será chamada de *tipo 2*. Nesse sentido, seguem as definições.

#### 6.3.1 Circunferência 1–Funk perturbada de tipo 1

**Definição 6.2** Dado  $\mathcal{C}$  um ponto em  $\mathbb{B}^2$  e  $r \geq 1$  um número real, definimos a *circunferência 1–Funk perturbada de tipo 1*, com centro  $\mathcal{C}$  e raio  $\ln r$ , como o conjunto dos pontos  $X \in \mathbb{B}^2$  que satisfazem a seguinte equação:

$$d_G(\mathcal{C}, X) = \ln r.$$

**Teorema 6.2** Dados o centro  $\mathcal{C} = (c_1, c_2) \in \mathbb{B}^2$  e o raio  $\ln(r)$ . Denotando  $X = (x_1, x_2)$ ,  $a = (a_1, a_2)$ , a circunferência 1–Funk perturbada de tipo 1 é dada pela equação do tipo elíptico:

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0, \quad (6.27)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= a_1^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) - 2ra_1c_1\bar{\mathcal{C}} + r^2\bar{\mathcal{C}}^2, B = 2\left(a_1a_2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) - r(a_1c_2 + a_2c_1)\bar{\mathcal{C}}\right), \\ C &= a_2^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) - 2ra_2c_2\bar{\mathcal{C}} + r^2\bar{\mathcal{C}}^2, D = 2a_1(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) + 2r(a_1 - c_1)\bar{\mathcal{C}}, \\ E &= 2a_2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) + 2r(a_2 - c_2)\bar{\mathcal{C}}, F = \|\mathcal{C}\|^2 - 1 + 2r\bar{\mathcal{C}} - r^2\bar{\mathcal{C}}^2, \bar{\mathcal{C}} = 1 + \langle a, \mathcal{C} \rangle. \end{aligned} \quad (6.28)$$

**Demonstração.** Denotando  $\bar{X} = 1 + \langle a, X \rangle$ , pelo Teorema 6.1

$$d_G(\mathcal{C}, X) = \ln(r) \iff \|r\bar{\mathcal{C}}X - \bar{X}\mathcal{C}\| = \bar{\mathcal{C}}r - \bar{X}.$$

Tomando o quadrado de ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned} r^2\bar{\mathcal{C}}^2\|X\|^2 - 2r\bar{\mathcal{C}}\bar{X}\langle \mathcal{C}, X \rangle + \bar{X}^2\|\mathcal{C}\|^2 &= r^2\bar{\mathcal{C}}^2 - 2r\bar{\mathcal{C}}\bar{X} + \bar{X}^2, \\ \bar{X}^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) + 2r\bar{\mathcal{C}}\bar{X}(1 - \langle \mathcal{C}, X \rangle) + r^2\bar{\mathcal{C}}^2(\|X\|^2 - 1) &= 0, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$(1 + \langle a, X \rangle)^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) + 2r\bar{\mathcal{C}}(1 + \langle a, X \rangle)(1 - \langle \mathcal{C}, X \rangle) + r^2\bar{\mathcal{C}}^2(\|X\|^2 - 1) = 0.$$

Agora, substituindo em coordenadas  $\bar{X} = 1 + a_1x_1 + a_2x_2$ ,  $\langle \mathcal{C}, X \rangle = c_1x_1 + c_2x_2$  e  $\|X\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ , temos

$$\begin{aligned} (1 + a_1x_1 + a_2x_2)^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) + 2r\bar{\mathcal{C}}(1 + a_1x_1 + a_2x_2)(1 - c_1x_1 - c_2x_2) \\ + r^2\bar{\mathcal{C}}^2(x_1^2 + x_2^2 - 1) &= 0, \\ (1 + a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_1a_2x_1x_2)(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) \\ + 2r\bar{\mathcal{C}}(1 + a_1x_1 + a_2x_2 - c_1x_1 - a_1c_1x_1^2 - a_2c_1x_1x_2 - c_2x_2 - a_1c_2x_1x_2 - a_2c_2x_2^2) \\ + r^2\bar{\mathcal{C}}^2(x_1^2 + x_2^2 - 1) &= 0, \\ \left(a_1^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) - 2a_1c_1r\bar{\mathcal{C}} + r^2\bar{\mathcal{C}}^2\right)x_1^2 + \left(2a_1a_2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) - 2r(a_2c_1 + a_1c_2)\bar{\mathcal{C}}\right)x_1x_2 \\ \left(a_2^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) - 2a_2c_2r\bar{\mathcal{C}} + r^2\bar{\mathcal{C}}^2\right)x_2^2 + \left(2a_1(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) + 2r(a_1 - c_1)\bar{\mathcal{C}}\right)x_1 \\ \left(2a_2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) + 2r(a_2 - c_2)\bar{\mathcal{C}}\right)x_2 + \left(\|\mathcal{C}\|^2 - 1 + 2r\bar{\mathcal{C}} - r^2\bar{\mathcal{C}}^2\right) &= 0, \end{aligned}$$

o que é equivalente a (6.27) e (6.28).

Consideremos o discriminante  $I = B^2 - 4AC$ :

$$I = 4 \left( a_1 a_2 (\|C\|^2 - 1) - r(a_1 c_2 + a_2 c_1) \bar{C} \right)^2 - 4 \left( a_1^2 (\|C\|^2 - 1) - 2r a_1 c_1 \bar{C} + r^2 \bar{C}^2 \right) \left( a_2^2 (\|C\|^2 - 1) - 2r a_2 c_2 \bar{C} + r^2 \bar{C}^2 \right),$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{I}{4} &= \left( a_1 a_2 (\|C\|^2 - 1) - r(a_1 c_2 + a_2 c_1) \bar{C} \right)^2 \\ &\quad - \left( a_1^2 (\|C\|^2 - 1) - 2r a_1 c_1 \bar{C} + r^2 \bar{C}^2 \right) \left( a_2^2 (\|C\|^2 - 1) - 2r a_2 c_2 \bar{C} + r^2 \bar{C}^2 \right) \\ &= a_1^2 a_2^2 (\|C\|^2 - 1)^2 - 2r a_1 a_2 (a_1 c_2 + a_2 c_1) (\|C\|^2 - 1) \bar{C} + r^2 (a_1 c_2 + a_2 c_1)^2 \bar{C}^2 \\ &\quad - a_1^2 a_2^2 (\|C\|^2 - 1)^2 + 2r a_1^2 a_2 c_2 (\|C\|^2 - 1) \bar{C} - r^2 a_1^2 (\|C\|^2 - 1) \bar{C}^2 \\ &\quad + 2r a_1 a_2^2 c_1 (\|C\|^2 - 1) \bar{C} - 4r^2 a_1 a_2 c_1 c_2 \bar{C}^2 + 2r^3 a_1 c_1 \bar{C}^3 \\ &\quad - r^2 a_2^2 (\|C\|^2 - 1) \bar{C}^2 + 2r^3 a_2 c_2 \bar{C}^3 - r^4 \bar{C}^4. \end{aligned}$$

Agrupando os termos do lado direito em potências de  $r$ , adquirimos

$$\begin{aligned} \frac{I}{4} &= -r^4 \bar{C}^4 + 2r^3 \langle a, C \rangle \bar{C}^3 + r^2 \bar{C}^2 \left[ (a_1 c_2 + a_2 c_1)^2 - a_1^2 (\|C\|^2 - 1) - 4a_1 a_2 c_1 c_2 - a_2^2 (\|C\|^2 - 1) \right] \\ &\quad - 2r a_1 a_2 (\|C\|^2 - 1) \bar{C} \left[ (a_1 c_2 + a_2 c_1) - a_1 c_2 - a_2 c_1 \right]. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} &(a_1 c_2 + a_2 c_1)^2 - a_1^2 (\|C\|^2 - 1) - 4a_1 a_2 c_1 c_2 - a_2^2 (\|C\|^2 - 1) \\ &= a_1^2 c_2^2 + 2a_1 a_2 c_1 c_2 + a_2^2 c_1^2 - a_1^2 (c_1^2 + c_2^2 - 1) - 4a_1 a_2 c_1 c_2 - a_2^2 (c_1^2 + c_2^2 - 1) \quad (6.29) \\ &= a_1^2 + a_2^2 - (a_1^2 c_1^2 + 2a_1 a_2 c_1 c_2 + a_2^2 c_2^2) = \|a\|^2 - \langle a, C \rangle^2. \end{aligned}$$

Logo, conseguimos

$$\begin{aligned} \frac{I}{4} &= -r^4 \bar{C}^4 + 2r^3 \langle a, C \rangle \bar{C}^3 + r^2 \bar{C}^2 \left[ \|a\|^2 - \langle a, C \rangle^2 \right] \\ &= -r^2 \bar{C}^2 \left( r^2 \bar{C}^2 - 2r \langle a, C \rangle \bar{C} + \left[ \langle a, C \rangle^2 - \|a\|^2 \right] \right) \\ &= -r^2 \bar{C}^2 \left( \left[ r \bar{C} - \langle a, C \rangle \right]^2 - \|a\|^2 \right) \\ &= -r^2 \bar{C}^2 \left( r \bar{C} - \langle a, C \rangle - \|a\| \right) \left( r \bar{C} - \langle a, C \rangle + \|a\| \right). \quad (6.30) \end{aligned}$$

Neste momento, como  $r, \bar{C} > 0$ , e pela desigualdade de Cauchy–Schwarz temos

$$\langle a, C \rangle \leq |\langle a, C \rangle| \leq \|a\| \cdot \|C\| < \|a\| \quad (\text{pois } C \in \mathbb{B}^2), \quad (6.31)$$

segue que  $r\bar{C} - \langle a, \mathcal{C} \rangle + \|a\| > 0$ . Por outro lado, como  $r \geq 1$  e  $\bar{C} = 1 + \langle a, \mathcal{C} \rangle > 0$ , conseguimos

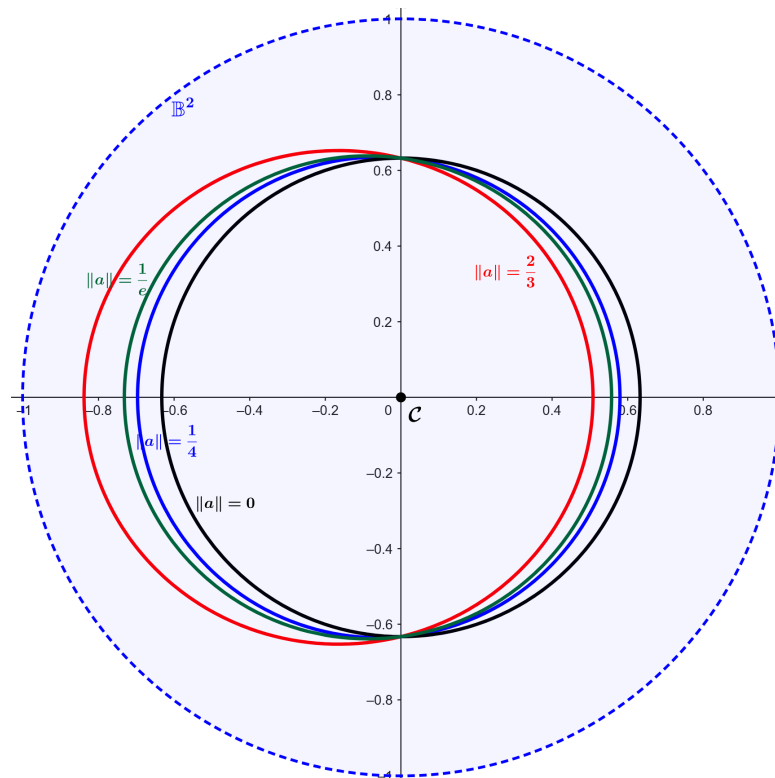
$$r\bar{C} - \langle a, \mathcal{C} \rangle - \|a\| \geq \bar{C} - \langle a, \mathcal{C} \rangle - \|a\| = 1 - \|a\| > 0 \text{ (pois } a \in \mathbb{B}^2\text{)}. \quad (6.32)$$

Portanto, de (6.31) e (6.32) em (6.30), obtemos que  $I < 0$ . Isso nos diz que a equação (6.27) é do tipo elíptico.

**Exemplo 6.1** Considere  $\mathcal{C} = (0, 0)$ ,  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{B}^2$  e  $r = e$ . A equação da circunferência de 1–Funk perturbada de tipo 1 de centro  $\mathcal{C}$  e raio  $\ln r = 1$  (veja a Figura 23) é dada por

$$(e^2 - a_1^2)x_1^2 - 2a_1a_2x_1x_2 + (e^2 - a_2^2)x_2^2 + 2a_1(e - 1)x_1 + 2a_2(e - 1)x_2 - (e - 1)^2 = 0.$$

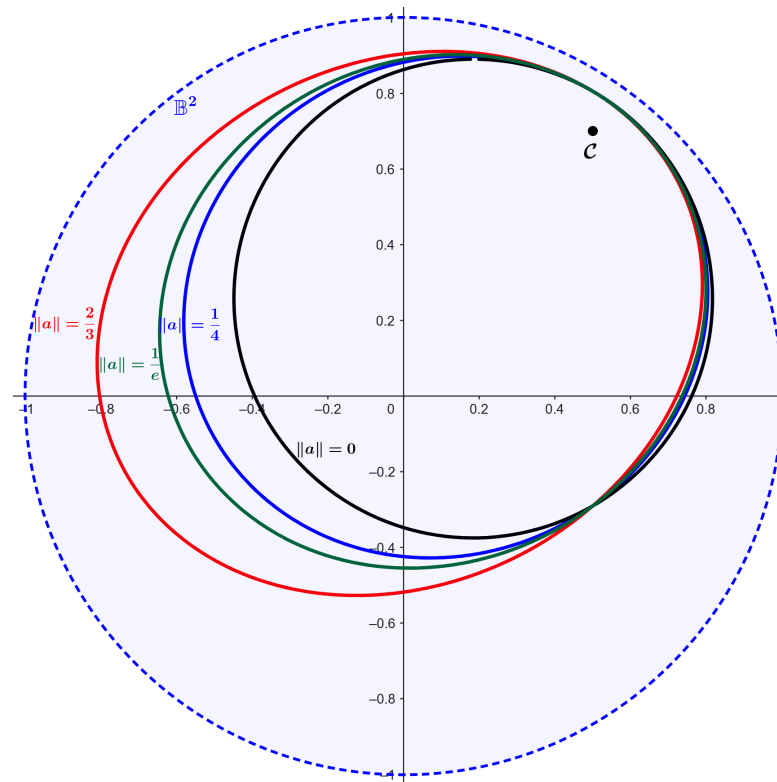
Figura 23 – Circunferências 1–Funk perturbada de tipo 1 e raio 1 centradas na origem com  $a = (0, 0)$  (preto),  $a = (\frac{1}{4}, 0)$  (azul),  $a = (\frac{1}{e}, 0)$  (verde) e  $a = (\frac{2}{3}, 0)$  (vermelho)



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

**Exemplo 6.2** Considere  $\mathcal{C} = (0.5, 0.7)$ ,  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{B}^2$  e  $r = e$ . Os gráficos das equações da circunferência de 1–Funk perturbada de tipo 1 de centro  $\mathcal{C}$  e raio  $\ln r = 1$  são elipses (veja a Figura 24).

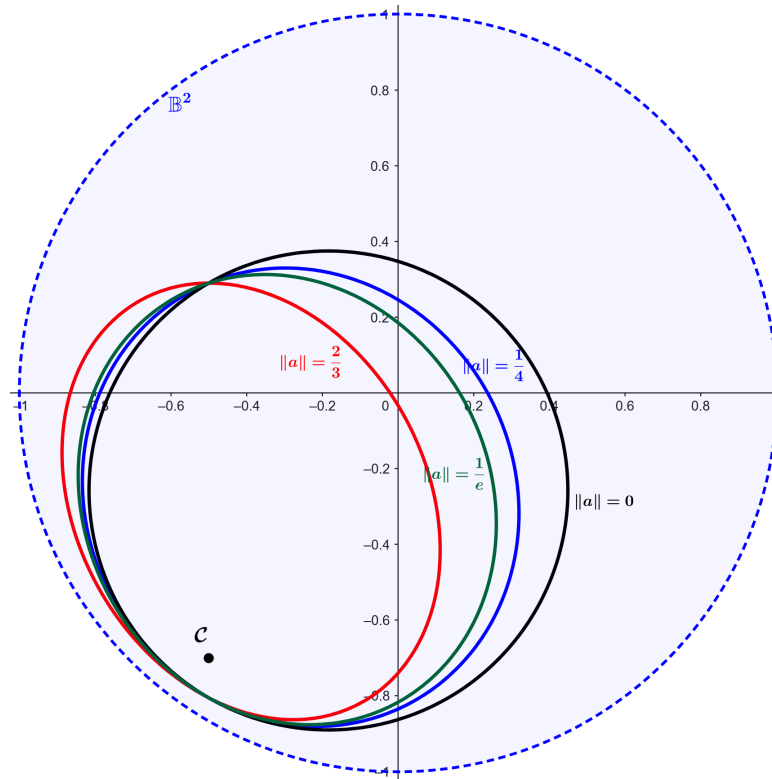
Figura 24 – Circunferências 1–Funk perturbada de tipo 1 e raio 1 centradas em  $\mathcal{C} = (0.5, 0.7)$  com  $a = (0, 0)$  (preto),  $a = (\frac{1}{4}, 0)$  (azul),  $a = (\frac{1}{e}, 0)$  (verde) e  $a = (\frac{2}{3}, 0)$  (vermelho)



Fonte: Autores (2025). Construção no *software Geogebra 6.0*.

**Exemplo 6.3** Considere  $\mathcal{C} = (-0.5, -0.7)$ ,  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{B}^2$  e  $r = e$ . Os gráficos das equações da circunferência de 1–Funk perturbada de tipo 1 de centro  $\mathcal{C}$  e raio  $\ln r = 1$  são elipses (veja a Figura 25).

Figura 25 – Circunferências 1–Funk perturbada de tipo 1 e raio 1 centradas em  $\mathcal{C} = (-0.5, -0.7)$  com  $a = (0, 0)$  (preto),  $a = (\frac{1}{4}, 0)$  (azul),  $a = (\frac{1}{e}, 0)$  (verde) e  $a = (\frac{2}{3}, 0)$  (vermelho)



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

### 6.3.2 Circunferência 1–Funk perturbada de tipo 2

**Definição 6.3** Dado  $\mathcal{C}$  um ponto em  $\mathbb{B}^2$  e  $r \geq 1$  um número real, definimos a *circunferência 1–Funk perturbada de tipo 2*, com centro  $\mathcal{C}$  e raio  $\ln r$ , como o conjunto dos pontos  $X \in \mathbb{B}^2$  que satisfazem a seguinte equação:

$$d_G(X, \mathcal{C}) = \ln r.$$

**Teorema 6.3** Dado o centro  $\mathcal{C} = (c_1, c_2) \in \mathbb{B}^2$  e o raio  $\ln r$ . Denotando  $X = (x_1, x_2)$ ,  $a = (a_1, a_2) \neq O$ , a circunferência 1–Funk perturbada de tipo 2 é dado por uma equação geral de segundo grau

$$Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0, \quad (6.33)$$

onde

$$\begin{aligned}
A &= \bar{C}^2 - 2ra_1c_1\bar{C} + r^2a_1^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1), \\
B &= 2\left(-r(a_1c_2 + a_2c_1)\bar{C} + r^2a_1a_2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\right), \\
C &= \bar{C}^2 - 2ra_2c_2\bar{C} + r^2a_2^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1), D = 2r(a_1 - c_1)\bar{C} + 2a_1r^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1), \\
E &= 2r(a_2 - c_2)\bar{C} + 2a_2r^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1), F = -\bar{C}^2 + 2r\bar{C} + r^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1), \\
\bar{C} &= 1 + \langle a, \mathcal{C} \rangle,
\end{aligned} \tag{6.34}$$

a qual dependendo de  $r$  podemos ver o tipo de cônica que é:

- Se  $r < \frac{\bar{C}}{\|a\| + \langle a, \mathcal{C} \rangle}$ , então a equação é de tipo elíptico.
- Se  $r = \frac{\bar{C}}{\|a\| + \langle a, \mathcal{C} \rangle}$ , então a equação é de tipo parabólico.
- Se  $r > \frac{\bar{C}}{\|a\| + \langle a, \mathcal{C} \rangle}$ , então a equação é de tipo hiperbólico.

**Demonstração.** Denotando  $\bar{X} = 1 + \langle a, X \rangle$ , pelo Teorema 6.1

$$d_G(X, \mathcal{C}) = \ln(r) \iff \|r\bar{X}\mathcal{C} - \bar{C}X\| = \bar{X}r - \bar{C}.$$

Tomando o quadrado de ambos os lados, adquirimos

$$r^2\bar{X}^2\|\mathcal{C}\|^2 - 2r\bar{C}\bar{X}\langle \mathcal{C}, X \rangle + \bar{C}^2\|X\|^2 = r^2\bar{X}^2 - 2r\bar{C}\bar{X} + \bar{C}^2,$$

$$\bar{C}^2(\|X\|^2 - 1) + 2r\bar{C}\bar{X}(1 - \langle \mathcal{C}, X \rangle) + r^2\bar{X}^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\bar{C}^2(\|X\|^2 - 1) + 2r\bar{C}(1 + \langle a, X \rangle)(1 - \langle \mathcal{C}, X \rangle) + r^2(1 + \langle a, X \rangle)^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) = 0.$$

Agora, substituindo em coordenadas  $\bar{X} = 1 + a_1x_1 + a_2x_2$ ,  $\langle \mathcal{C}, X \rangle = c_1x_1 + c_2x_2$  e  $\|X\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ , temos

$$\begin{aligned}
&\bar{C}^2(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 2r\bar{C}(1 + a_1x_1 + a_2x_2)(1 - c_1x_1 - c_2x_2) \\
&\quad + r^2(1 + a_1x_1 + a_2x_2)^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) = 0, \\
&\quad \bar{C}^2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\
&\quad + 2r\bar{C}(1 + a_1x_1 + a_2x_2 - c_1x_1 - a_1c_1x_1^2 - a_2c_1x_1x_2 - c_2x_2 - a_1c_2x_1x_2 - a_2c_2x_2^2) \\
&\quad + r^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)(1 + a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2a_1a_2x_1x_2) = 0, \\
&\left(\bar{C}^2 - 2a_1c_1r\bar{C} + a_1^2r^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\right)x_1^2 + \left(-2r(a_2c_1 + a_1c_2)\bar{C} + 2a_1a_2r^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\right)x_1x_2 \\
&\quad \left(\bar{C}^2 - 2a_2c_2r\bar{C} + a_2^2r^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\right)x_2^2 + \left(2r(a_1 - c_1)\bar{C} + 2a_1r^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\right)x_1 \\
&\quad \left(2r(a_2 - c_2)\bar{C} + 2a_2r^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\right)x_2 + \left(-\bar{C}^2 + 2r\bar{C} + r^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\right) = 0,
\end{aligned}$$

o que é equivalente a (6.33) e (6.34).

Agora, consideremos o discriminante  $I = B^2 - 4AC$ :

$$I = 4 \left( -r(a_1c_2 + a_2c_1)\bar{\mathcal{C}} + r^2a_1a_2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) \right)^2 - 4 \left( \bar{\mathcal{C}}^2 - 2ra_1c_1\bar{\mathcal{C}} + r^2a_1^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) \right) \left( \bar{\mathcal{C}}^2 - 2ra_2c_2\bar{\mathcal{C}} + r^2a_2^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) \right),$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{I}{4} &= \left( -r(a_1c_2 + a_2c_1)\bar{\mathcal{C}} + r^2a_1a_2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) \right)^2 \\ &\quad - \left( \bar{\mathcal{C}}^2 - 2ra_1c_1\bar{\mathcal{C}} + r^2a_1^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) \right) \left( \bar{\mathcal{C}}^2 - 2ra_2c_2\bar{\mathcal{C}} + r^2a_2^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) \right), \\ &= r^2(a_1c_2 + a_2c_1)^2\bar{\mathcal{C}}^2 - 2r^3a_1a_2(a_1c_2 + a_2c_1)(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\bar{\mathcal{C}} + r^4a_1^2a_2^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)^2 \\ &\quad - \bar{\mathcal{C}}^4 + 2ra_2c_2\bar{\mathcal{C}}^3 - r^2a_2^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\bar{\mathcal{C}}^2 \\ &\quad + 2ra_1c_1\bar{\mathcal{C}}^3 - 4r^2a_1a_2c_1c_2\bar{\mathcal{C}}^2 + 2r^3a_1a_2^2c_1(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\bar{\mathcal{C}} \\ &\quad - r^2a_1^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\bar{\mathcal{C}}^2 + 2r^3a_1^2a_2c_2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\bar{\mathcal{C}} - r^4a_1^2a_2^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Agrupando os termos do lado direito em potências de  $r$ , conseguimos

$$\begin{aligned} \frac{I}{4} &= 2r^3a_1a_2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1)\bar{\mathcal{C}} \left[ (a_1c_2 + a_2c_1) - (a_1c_2 + a_2c_1) \right] \\ &\quad + r^2\bar{\mathcal{C}}^2 \left[ (a_1c_2 + a_2c_1)^2 - a_1^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) - 4a_1a_2c_1c_2 - a_2^2(\|\mathcal{C}\|^2 - 1) \right] \\ &\quad + 2r(a_1c_1 + a_2c_2)\bar{\mathcal{C}}^3 - \bar{\mathcal{C}}^4. \end{aligned}$$

Assim, por (6.29), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{I}{4} &= r^2\bar{\mathcal{C}}^2 \left[ \|a\|^2 - \langle a, \mathcal{C} \rangle^2 \right] + 2r\langle a, \mathcal{C} \rangle\bar{\mathcal{C}}^3 - \bar{\mathcal{C}}^4 \\ &= \bar{\mathcal{C}}^2 \left[ r^2\|a\|^2 - r^2\langle a, \mathcal{C} \rangle^2 + 2r\langle a, \mathcal{C} \rangle\bar{\mathcal{C}} - \bar{\mathcal{C}}^2 \right] \\ &= \bar{\mathcal{C}}^2 \left[ \left( r\|a\| \right)^2 - \left( r\langle a, \mathcal{C} \rangle - \bar{\mathcal{C}} \right)^2 \right] \\ &= \bar{\mathcal{C}}^2 \left( r\|a\| - r\langle a, \mathcal{C} \rangle + \bar{\mathcal{C}} \right) \left( r\|a\| + r\langle a, \mathcal{C} \rangle - \bar{\mathcal{C}} \right). \end{aligned} \tag{6.35}$$

Sabemos que  $r, \bar{\mathcal{C}} > 0$  e, por (6.31), adquirimos

$$r\|a\| - r\langle a, \mathcal{C} \rangle + \bar{\mathcal{C}} = r(\|a\| - \langle a, \mathcal{C} \rangle) + \bar{\mathcal{C}} > 0. \tag{6.36}$$

Observe que, como  $a \in \mathbb{B}^2$  e pela desigualdade (6.31), temos

$$0 < \|a\| + \langle a, \mathcal{C} \rangle < 1 + \langle a, \mathcal{C} \rangle = \bar{\mathcal{C}} \Rightarrow 1 < \frac{\bar{\mathcal{C}}}{\|a\| + \langle a, \mathcal{C} \rangle}.$$

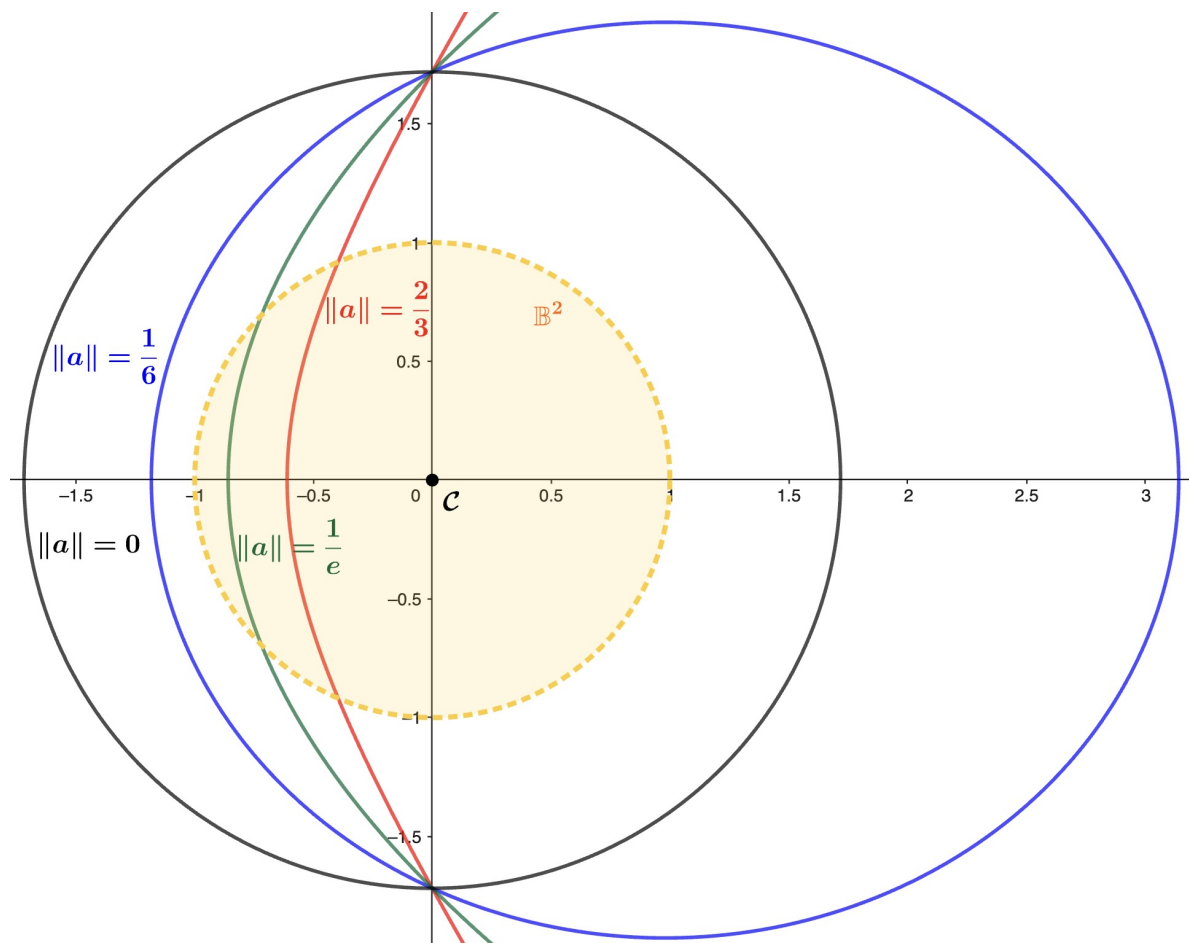
Assim, como  $r > 1$  e por (6.36) em (6.35), existem as seguintes possibilidades:

- Se  $r < \frac{\bar{c}}{\|a\| + \langle a, \mathcal{C} \rangle}$ , então  $I < 0$ . Nesse caso, a equação (6.33) é do tipo elíptico.
- Se  $r = \frac{\bar{c}}{\|a\| + \langle a, \mathcal{C} \rangle}$ , então  $I = 0$ . Nesse caso, a equação (6.33) é do tipo parabólico.
- Se  $r > \frac{\bar{c}}{\|a\| + \langle a, \mathcal{C} \rangle}$ , então  $I > 0$ . Nesse caso, a equação (6.33) é do tipo hiperbólico.

**Exemplo 6.4** Considere  $\mathcal{C} = (0, 0)$ ,  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{B}^2$  e  $r = e$ . A equação da circunferência de 1–Funk perturbada de tipo 2 de centro  $\mathcal{C}$  e raio  $\ln r = 1$  (veja a Figura 26) é dada por

$$(1 - e^2 a_1^2) x_1^2 - 2e^2 a_1 a_2 x_1 x_2 + (1 - e^2 a_2^2) x_2^2 - 2e(e - 1) a_1 x_1 - 2e(e - 1) a_2 x_2 - (e - 1)^2 = 0.$$

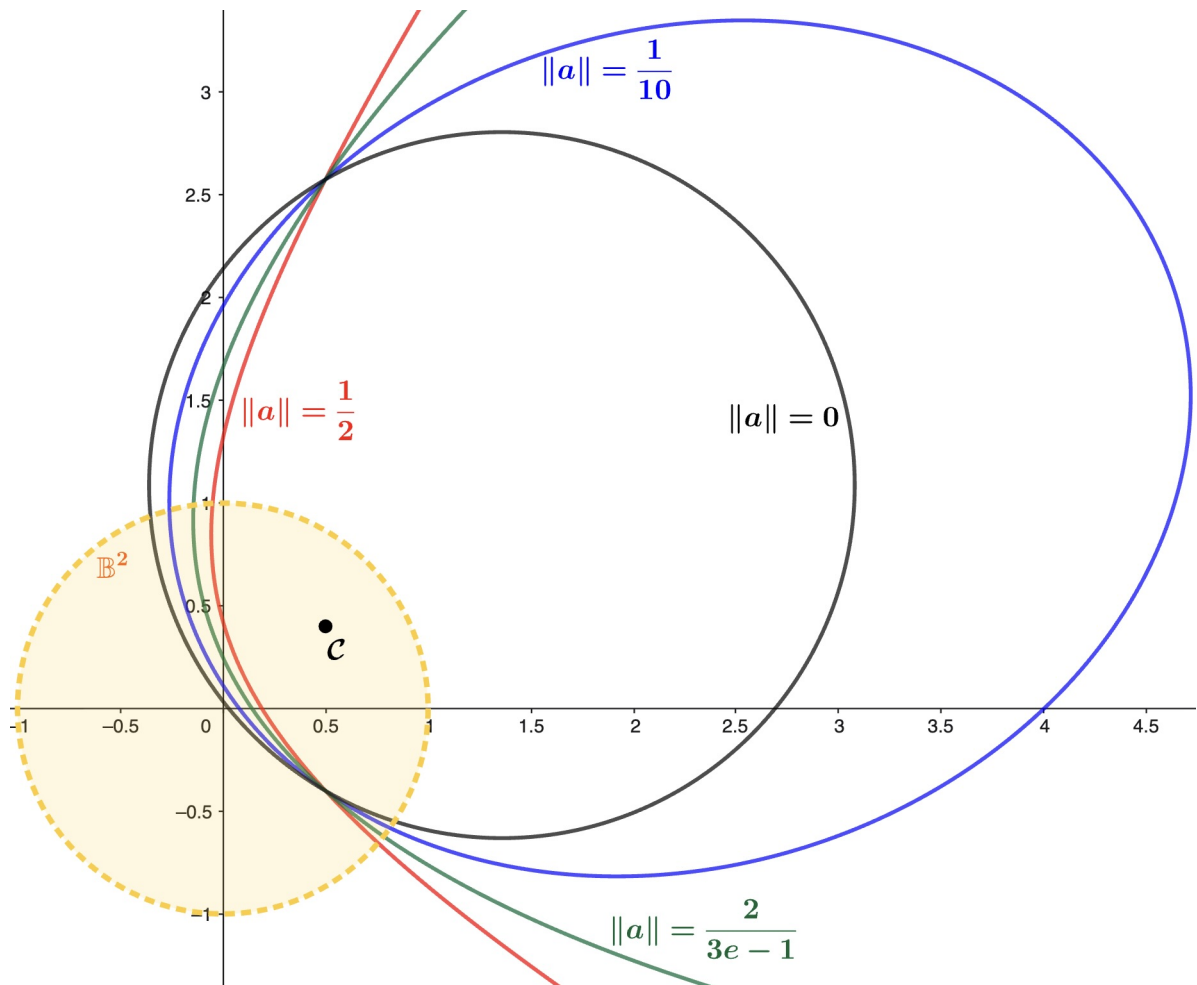
Figura 26 – Circunferências 1–Funk perturbada de tipo 2 e raio 1 centradas na origem com  $a = (0, 0)$  (preto),  $a = (\frac{1}{6}, 0)$  (azul),  $a = (\frac{1}{e}, 0)$  (verde) e  $a = (\frac{2}{3}, 0)$  (vermelho)



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

**Exemplo 6.5** Considere  $\mathcal{C} = (0.5, 0.4)$ ,  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{B}^2$  e  $r = e$ . Os gráficos das equações da circunferência de 1–Funk perturbada de tipo 2 de centro  $\mathcal{C}$  e raio  $\ln r = 1$  são arcos de elipses, parábolas e hipérbolas (veja a Figura 27).

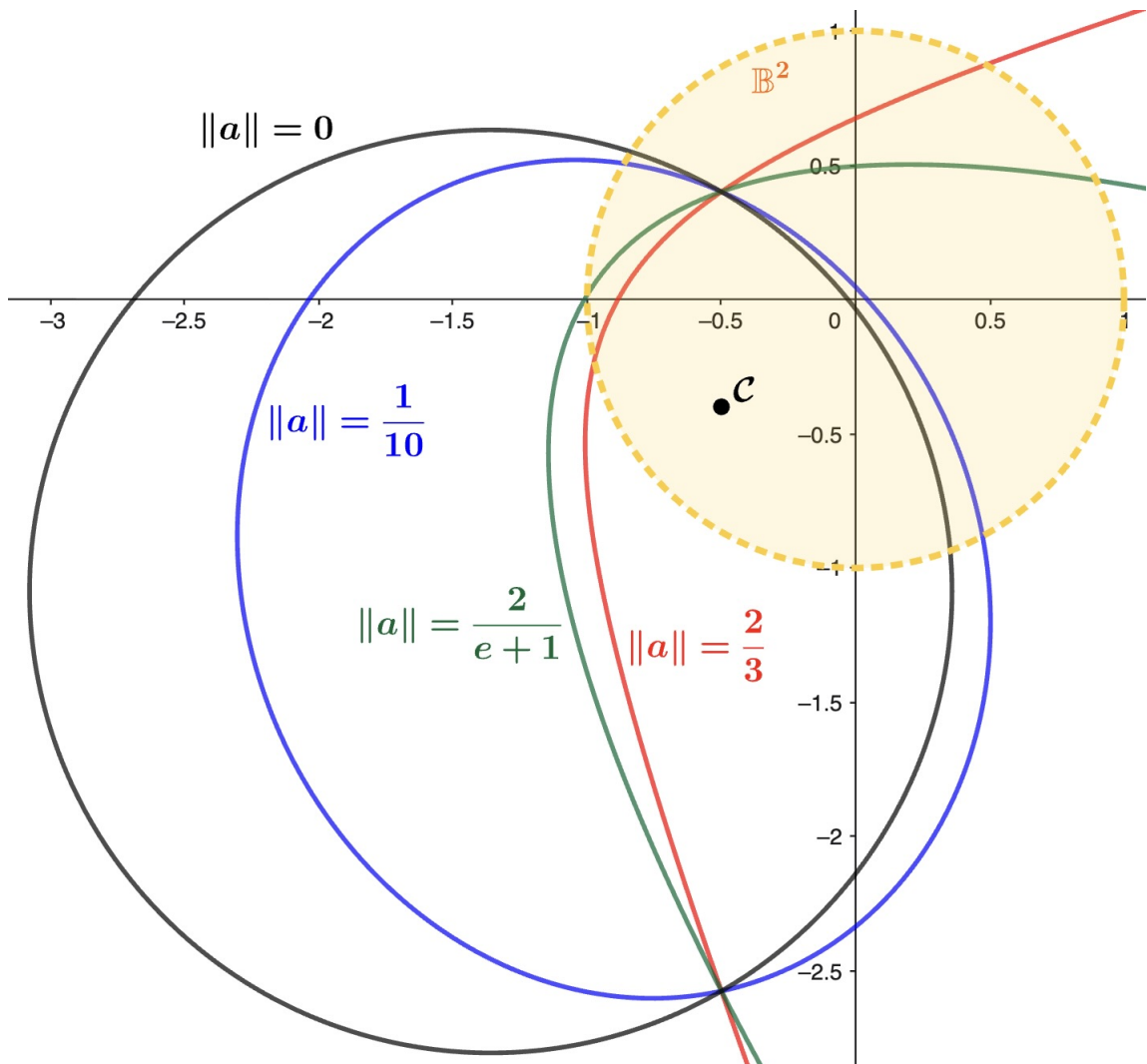
Figura 27 – Circunferências 1–Funk perturbada de tipo 2 e raio 1 centradas em  $\mathcal{C} = (0.5, 0.4)$  com  $a = (0, 0)$  (preto),  $a = (\frac{1}{10}, 0)$  (azul),  $a = (\frac{2}{3e-1}, 0)$  (verde) e  $a = (\frac{1}{2}, 0)$  (vermelho)



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

**Exemplo 6.6** Considere  $\mathcal{C} = (-0.5, -0.4)$ ,  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{B}^2$  e  $r = e$ . Os gráficos das equações da circunferência de 1–Funk perturbada de tipo 2 de centro  $\mathcal{C}$  e raio  $\ln r = 1$  são arcos de elipses, parábolas e hipérbolas (veja a Figura 28).

Figura 28 – Circunferências 1-Funk perturbada de tipo 2 e raio 1 centradas em  $\mathcal{C} = (-0.5, -0.4)$  com  $a = (0, 0)$  (preto),  $a = (\frac{1}{10}, 0)$  (azul),  $a = (\frac{2}{e+1}, 0)$  (verde) e  $a = (\frac{2}{3}, 0)$  (vermelho)



Fonte: Autores (2025). Construção no software Geogebra 6.0.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi apresentado nos capítulos iniciais, conforme o desenvolvimento das sociedades, exemplificado pelas expansões marítimas do período histórico das Grandes Navegações, fez surgir a necessidade de buscar rotas ótimas, cuja definição está diretamente vinculada ao espaço explorado.

Diante disso, a métrica euclidiana por ser elaborada com base em um espaço plano ou tridimensional ideal, isotrópico e simétrico, pode não ser capaz de mensurar todas as adversidades de um problema físico de navegação, como a força dos ventos ou correntes marítimas. Portanto, para superar essa limitação conceitual, ao modelar o problema de navegação de Ernst Zermelo, revisamos métricas não-euclidianas, entre elas a *métrica de  $\lambda$ -Funk* no disco unitário, na qual notamos que suas geodésicas permaneceram como linhas retas.

A partir desses resultados, conferimos e aprofundamos a indução de uma fórmula de distância entre dois pontos, evidenciando que o tempo de viagem equivale a própria distância e que esta é assimétrica. Isto é, ao tomarmos um barco navegando a favor da correnteza, é intuitivo que ele levará um tempo menor para se deslocar de um lugar a outro, em comparação ao trajeto inverso, movendo-se contra a força da correnteza. Portanto, o tempo levado na ida pode não ser o mesmo valor que na volta.

Observamos que, esse recurso foi utilizado ao derivar expressões para as circunferências, sendo que a *Circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 1* equivale ao alcance máximo que um barco, saindo do centro, pode chegar com uma quantidade fixa de combustível, por outro lado, a *Circunferência de  $\lambda$ -Funk do tipo 2* é o mesmo que, averiguar todos os possíveis pontos de partida de onde o barco pode sair para transportar-se até o centro, com uma quantia limitada de combustível. Nesse contexto, o total de combustível é igual ao raio da circunferência.

Com base nisso, conseguimos investigar o tempo mínimo de deslocamento de uma embarcação em três cenários distintos: no primeiro, é calculado o tempo levado para deslocar-se de uma praia com litoral retilíneo até uma ilha, que consiste em obter a distância entre um segmento de reta e um ponto, no segundo, é analisada a situação contrária, que é dada pela distância de um ponto até um segmento

de reta, por último, foi estabelecida a distância entre duas ilhas com litorais retilíneos, caracterizadas por segmentos de retas sem interseção e com inclinações iguais.

Em sequência, no último capítulo, propomos uma nova métrica, nomeada “*métrica  $G$* ”, a qual adiciona uma perturbação na métrica 1–*Funk* associada ao vetor  $a$ . Nos voltamos a interpretação da *métrica  $G$*  como um problema de navegação, aplicando a construção de Zermelo a  $G$  e encontramos fórmulas explícitas para os dados de navegação  $(h, W)$ . Confirmando nossa hipótese, vinculando o parâmetro de perturbação  $a$  a um sentido físico, este representa a ação de uma segunda força inconstante e externa ao barco, como a correnteza (ou vento), que influencia o movimento da embarcação no disco.

Dessa forma, começamos a estudar as estruturas geométricas de  $G$ . Em razão desta ser uma nova métrica, foi preciso verificarmos cada propriedade geométrica. Assim, constatamos que  $G$  é uma métrica de Randers quando a norma euclidiana de  $a$  é menor que um. Além disso, demonstramos por meio da equação de Hamel que essa métrica é projetivamente plana, isso significa que o menor caminho ligando dois pontos é uma reta.

Devido a isso, fomos capazes de induzir uma fórmula para a distância entre dois pontos, comprovamos que esta não é simétrica, não é invariante por translações e diferente da métrica de Funk, a *métrica  $G$* , varia por rotações. Uma observação interessante foi que, se um barco parte da origem do disco, enfrentando a ação da correnteza, a qual o atrai para o centro, tentando alcançar a borda, ele nunca chegaria, pois seria impossível sair do domínio, no entanto, tomando o caminho inverso, se o barco partisse da borda para o centro, seu tempo seria finito e dependeria da intensidade da correnteza ou vento dada pelo vetor  $a$ .

Passamos a indagar o que configuraria uma circunferência na *métrica  $G$*  e como seria o seu formato. Novamente, por conta da assimetria, descrevemos duas categorias de circunferências, a *circunferência de 1–Funk perturbada de tipo 1*, a qual corresponde ao conjunto de pontos de alcance máximo de um barco saindo de um centro fixo e com um limite de combustível  $\ln r$ , mostramos que essas serão sempre elipses. Por outro lado, o conjunto de possíveis pontos de partidas que um barco pode tomar para chegar ao centro com essa mesma quantidade de combustível, retrata a *circunferência de 1–Funk perturbada de tipo 2*, descobrimos que estas revelam-se

ainda mais fascinantes, pois podem variar conforme o valor de  $r$ , sendo identificadas por elipses, parábolas ou hipérbolas.

Durante este trabalho, examinando uma situação física de navegação, percebemos que o conceito de métrica e suas noções geométricas variam conforme o espaço em que estão definidas, pois precisam abranger possíveis interferências, assim ao nos questionarmos sobre rotas ótimas e arco de alcance máximo, muitas vezes as propriedades desses conceitos se distinguem da geometria mais conhecida, a euclidiana.

Nessa perspectiva, refletimos sobre outras métricas, como a de Funk. Diante da escassez de estudos sobre generalizações específicas da métrica de Funk, este trabalho buscou contribuir para sanar essa lacuna. Com esse objetivo, formulamos uma nova métrica derivada de sua perturbação. A validação das hipóteses acerca do comportamento dessa nova métrica representa, portanto a essência da contribuição dessa pesquisa.

A partir da leitura desse texto, outros questionamentos podem surgir. Por exemplo, ao considerarmos um barco partindo de uma ilha com litoral em linha reta, em direção a um ponto da costa (ou vice-versa) e determinar um ponto intermediário no trajeto; supor que um barco partindo do litoral (linha) queira se encontrar em algum ponto do oceano com outra embarcação vinda de uma ilha, ambos na mesma velocidade e chegando no mesmo instante; ou imaginar dois barcos saindo do mesmo ponto, um alcançando uma ilha e outro uma costa simultaneamente. Essas perguntas fariam surgir conceitos a respeito das cônicas, que configurariam parábolas de  $\lambda$ -Funk, nesse sentido, em colaboração do discente Alexandre Henrique Rodrigues Filho, já submetemos um artigo, numa revista nacional com corpo editorial e revisor, a respeito das parábolas de  $\lambda$ -Funk (CHÁVEZ et al., 2025). No âmbito de pesquisas futuras, seria produtivo estabelecer as condições geométricas para a formação de elipses e hipérbolas na métrica de  $\lambda$ -Funk, ampliando assim o conhecimento sobre esse espaço.

## REFERÊNCIAS

- CAMARGO, I. d.; BOULOS, P. **Geometria analítica: um tratamento vetorial**. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- CARMO, M. P. do. **Geometria Riemanniana**. 6. ed. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2019. VOL-1. (Projeto Euclides, VOL-1). ISBN 9788524404931.
- CHENG, X.; SHEN, Z. **Finsler Geometry: An approach via Randers spaces**. 1. ed. [S.l.]: Science Press Beijing-Springer, 2012. VOL-1.
- CHÁVEZ, N. M. S. et al. Geometria de um problema de navegação: a  $\lambda$ -funk métrica de finsler. **Ciência e Natura**, Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), v. 47, n. 1, p. e88467, 2025. ISSN 2179-460X. Disponível em: <<https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/88467>>.
- CHÁVEZ, N. M. S. et al. Um problema de navegação de zermelo: Métrica de funk. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), v. 7, n. 1, p. e3010, 2021. ISSN 24472689. Disponível em: <<https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/4574>>.
- CHÁVEZ, N. M. S. et al. Parábolas  $\lambda$ -funk. *Submitted*, 2025. Manuscrito submetido.
- CHÁVEZ, N. M. S.; MOYSES, J. R.; LEÓN, V. A. M. Sobre as parábolas de funk. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), v. 10, n. 1, p. e3001, 2024. ISSN 24472689. Disponível em: <<https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/6680>>.
- FINSLER, P. **Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen**. [S.l.]: Göttingen, 1918.
- FUNK, P. Über Geometrien bei denen die Geraden die Kurzesten sind. **Math. Ann.**, Institute of Mathematics/Polish Academy of Sciences, v. 101, p. 226 – 237, 1929. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01454835>>.
- GUO, E.; MO, X. **The geometry of spherically symmetric Finsler manifolds**. 1. ed. [S.l.]: Springer Singapore, 2018. VOL-1. (SpringerBriefs in Mathematics, VOL-1). ISBN 9789811315978.
- HRYNIEWICZ, U. L.; SALOMÃO, P. A. S. **Introdução à geometria Finsler**. [S.l.]: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2013. (Publicações Matemáticas do IMPA). 29º Colóquio Brasileiro de Matemática. ISBN 978-85-244-0358-3.
- HUANG, L.; MO, X. Projectively flat Finsler metrics with orthogonal invariance. **Ann. Polon. Math.**, Institute of Mathematics/Polish Academy of Sciences, v. 107, n. 3, p. 259 – 270, 2013. Disponível em: <<https://www.impan.pl/en/publishing-house/journals-and-series/annales-polonici-mathematici/all/107/3/84641/projectively-flat-finsler-metrics-with-orthogonal-invariance>>.
- LEÓN, V. A. M. et al. Geometry of a perturbed funk metric on the unit disk. *Submitted*, 2025. Manuscrito submetido.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1999. v. 2.

MOYSES, J. R. **Sobre a Métrica de Funk no Plano Cartesiano: Modelando um Problema de Navegação**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso - Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2022.

RANDERS, G. On an asymmetrical metric in the four-space of general relativity. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 59, p. 195–199, Jan 1941. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.59.195>>.

SANTOS, N. M. d.; ANDRADE, D. **Vetores e matrizes: Uma introdução à álgebra linear**. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

SHEN, Z. **Lectures on Finsler Geometry**. 1. ed. [S.l.]: World Scientific, 2001. VOL-1. ISBN 9789812811622.

STEWART, J. **Cálculo, volume II**. 7. ed. americana. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. ISBN 978-85-221-1461-0.

TALBOT, J. Going against the flow: finding the optimal path. **European Journal of Physics**, v. 31, n. 1, p. 205 – 213, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0143-0807/31/1/018>>.

WIBAUX, P. Portugal in the last quarter of the fifteenth century: The india road. **The British Historical Society of Portugal**, 2013. Disponível em: <[theindiaroad.com](http://theindiaroad.com)>.