



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE TECNOLOGIA,
INFRAESTRUTURA E TERRITÓRIO (ILATIT)**

**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA CIVIL (PPGECI)**

REFINAMENTO ADAPTATIVO NA ANÁLISE NÃO LINEAR VIA MÉTODO SECANTE PARA VIGAS DE CONCRETO ARMADO

PAULA MARIA AIRES GRACITE

Foz do Iguaçu

2021



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE TECNOLOGIA,
INFRAESTRUTURA E TERRITÓRIO (ILATIT)**

**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA CIVIL (PPGECI)**

REFINAMENTO ADAPTATIVO NA ANÁLISE NÃO LINEAR VIA MÉTODO SECANTE PARA VIGAS DE CONCRETO ARMADO

PAULA MARIA AIRES GRACITE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Engenharia Civil

Orientador: Prof. Dr. André Jacomel Torii

Foz do Iguaçu

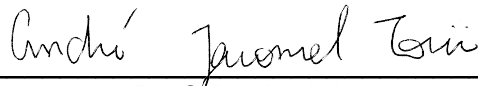
2021

PAULA MARIA AIRES GRACITE

**REFINAMENTO ADAPTATIVO NA ANÁLISE NÃO LINEAR VIA MÉTODO SECANTE
PARA VIGAS DE CONCRETO ARMADO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Engenharia Civil.

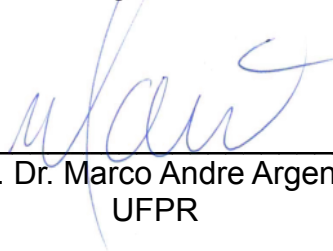
BANCA EXAMINADORA



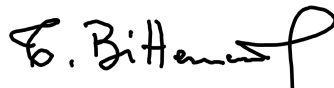
Orientador: Prof. Dr. André Jacomel Torii.
UNILA



Prof. Dr. Ivan Dario Gomez Araujo.
UNILA



Prof. Dr. Marco Andre Argenta.
UFPR



Prof. Dr. Tulio Nogueira Bittencourt.
USP

Foz do Iguaçu, 14 de Julho de 2021.

Catálogo elaborado pelo Setor de Tratamento da Informação
Catálogo de Publicação na Fonte. UNILA - BIBLIOTECA LATINO-AMERICANA - PTI

G731r

Gracite, Paula Maria Aires.

Refinamento adaptativo na análise não linear via método secante para vigas de concreto armado / Paula Maria Aires Gracite. - Foz do Iguaçu-PR, 2021.

88 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana. Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Foz do Iguaçu-PR, 2021.

Orientador: André Jacomel Torii.

1. Refinamento adaptativo. 2. Análise não-linear. 3. Vigas concreto armado. 4. Método Secante. 5. Momento-Curvatura. I. Torii, André Jacomel. II. Título.

CDU 691.328

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por estar comigo e me dar suporte durante toda a trajetória do mestrado e me abençoar com mais essa conquista.

Ao Professor André pela orientação, conhecimento compartilhado, amizade e conselhos e todo tipo de suporte durante a realização deste trabalho.

Ao Gabriel Figueiredo de Melo pela bela dissertação desenvolvida na qual foi usada como referência neste trabalho e por todas as informações e conhecimentos compartilhados, além da prontidão em sempre ajudar quando preciso.

Aos membros da banca de avaliação, desde a qualificação até a defesa final, que contribuíram com seus apontamentos trazendo maior qualidade no desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

Ao meu esposo Gabriel por todo o amor, paciência, ajuda com programação e apoio emocional, sempre me incentivando qual fosse o meu resultado. Aos meus pais e minha irmã também por todo apoio, palavras de incentivo e torcida desde o início do mestrado.

Aos colegas do mestrado que dividiam caronas para Foz do Iguaçu de madrugada: Thiago, Adriana e Luana. Pela ajuda nas disciplinas, pela amizade, pelo incentivo e positividade sempre.

À instituição UNILA, pela bolsa de estudos DS-UNILA concedida.

RESUMO

Neste trabalho são desenvolvidos e comparados critérios de refino adaptativo para análise não linear de vigas de concreto armado sob flexão simples. Inicialmente são desenvolvidos estimadores de erro de deslocamento e curvatura, considerando uma representação inexata da rigidez à flexão ao longo da viga. Estes estimadores de erros são então utilizados para identificar quais elementos da malha precisam ser refinados. O método desenvolvido por Melo (2019) é utilizado para realizar a análise não-linear das vigas de concreto armado. Este método baseia-se na solução iterativa do sistema de equações não-linear utilizando a rigidez Secante e diagramas momento-curvatura calculado previamente para as seções analisadas. A estratégia de refino adaptativo é validada através de exemplos numéricos. Os resultados demonstram que a técnica desenvolvida possibilita a obtenção de resultados precisos com significativa redução de esforço computacional. Além disso, observou-se que o estimador de erro de deslocamentos se mostra mais eficiente do que o estimador de erro de curvaturas para o contexto do refino adaptativo, possibilitando uma maior redução do esforço computacional necessário.

Palavras-chaves: Refinamento adaptativo. Análise não-linear. Vigas concreto armado. Método Secante. Momento-Curvatura.

Abstract

In this work we develop and compare criteria for adaptive mesh refinement for non-linear analysis of reinforced concrete beams subject to bending. First, displacement and curvature error estimates are developed, considering inexact representation of the flexure stiffness along the beam. These error estimates are then employed to identify which elements need to be refined. The method developed by Melo (2019) is used for the non-linear analysis of the reinforced concrete beams. This method is based on an iterative solution of the system of non-linear equations using Secant stiffness and moment-curvature diagrams evaluated before the analysis. The proposed strategy for adaptive refinement is validated by numerical examples. The results demonstrate that the technique developed gives accurate results with a significant reduction of the required computational effort. Besides, it is observed that the displacement error estimate is more effective than the curvature error estimate in the context of adaptive mesh refinement, allowing a larger reduction of the required computational effort.

Keywords: Adaptive refinement; Nonlinear analysis; Reinforced concrete beams; Secant method; Moment-Curvature.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	OBJETIVO GERAL	13
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	13
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1	ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO	15
2.1.1	Não linearidade física do concreto armado	16
2.2	MODELOS CONSTITUTIVOS PARA OS MATERIAIS	18
2.2.1	Concreto	19
2.2.1.1	Concreto sob compressão uniaxial	19
2.2.1.2	Concreto sob tração uniaxial	21
2.2.2	Aço	24
2.3	MEF PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO	27
2.3.1	Métodos Iterativos de Solução de Sistemas de Equações Não Lineares	28
2.3.1.1	Método de Newton Raphson	29
2.3.1.2	Método de Newton Raphson Modificado	31
2.3.1.3	Método Secante	32
2.3.2	Método de análise de Melo (2019)	33
2.4	REFINAMENTO ADAPTATIVO	37
2.4.1	Erros nas soluções de elementos finitos	38
2.4.1.1	Estimativas de Erro	39
2.4.2	Estratégias Adaptativas	40
2.4.2.1	Refinamento h	40
2.4.2.2	Refinamento p	42
2.4.2.3	Refinamento hp	42
3	REFINO ADAPTATIVO DO TIPO H NA ANÁLISE NÃO LINEAR DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO	43

3.1	CRITÉRIO DE REFINAMENTO ADAPTATIVO COM ESTIMADOR DE ERRO HEURÍSTICO	45
3.2	FORMULAÇÃO DOS ESTIMADORES DE ERRO	47
3.2.1	Erro de deslocamento	48
3.2.2	Erro de curvatura	50
3.2.3	Estimadores de erros relativos e refino adaptativo	52
3.3	ESTRATÉGIA DE REFINO ADAPTATIVO	53
4	EXEMPLOS PROPOSTOS	56
4.1	Exemplo 1	56
4.1.1	Concreto	57
4.1.2	Aço	58
4.1.3	Parâmetros	60
4.2	Exemplo 2	61
4.2.1	Concreto	62
4.2.2	Aço	62
4.2.3	Parâmetros	63
5	RESULTADOS	65
5.1	ANÁLISE SEM REFINO ADAPTATIVO	65
5.1.1	Exemplo 1	65
5.1.2	Exemplo 2	67
5.2	ANÁLISE COM REFINO ADAPTATIVO E ESTIMADOR DE ERRO RELATIVO DE CURVATURA	68
5.2.1	Exemplo 1	69
5.2.2	Exemplo 2	72
5.3	ANÁLISE COM REFINO ADAPTATIVO E ESTIMADOR DE ERRO RELATIVO DE DESLOCAMENTO	74
5.3.1	Exemplo 1	74
5.3.2	Exemplo 2	78
5.4	COMPARAÇÃO ENTRE OS ESTIMADORES DE ERRO	79
5.4.1	Exemplo 1	79
5.4.2	Exemplo 2	81
6	CONCLUSÃO	83

Referências	86
------------------------------	-----------

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama tensão-deformação do concreto: (a) linear; (b) não linear.	16
Figura 2 – Relação momento-curvatura idealizada para uma seção de concreto armado.	17
Figura 3 – Relação tensão-deformação típica do concreto sujeito a compressão uniaxial.	20
Figura 4 – Modelo constitutivo de Hognestad (1951).	20
Figura 5 – Diagrama tensão-deformação do concreto sob compressão uniaxial de acordo com a NBR 6118.	21
Figura 6 – Curva tensão-deformação do concreto sob tração uniaxial.	22
Figura 7 – Diagrama tensão-deformação bilinear de tração para o concreto não fissurado.	22
Figura 8 – Curva tensão-deformação do concreto na tração por Stramondinoli e La Rovere, 2008.	23
Figura 9 – Diagrama tensão-deformação do aço sem patamar de escoamento.	25
Figura 10 – Diagrama tensão-deformação do aço com patamar de escoamento.	25
Figura 11 – Modelo elasto-plástico perfeito.	26
Figura 12 – Modelo elasto-plástico com endurecimento linear.	26
Figura 13 – Modelo trilinear.	26
Figura 14 – Discretização de sólidos contínuos.	28
Figura 15 – Procedimento incremental iterativo.	29
Figura 16 – Método de Newton Raphson.	30
Figura 17 – Método de Newton Raphson Modificado.	32
Figura 18 – Método da rigidez secante com uso do diagrama momento-curvatura.	33
Figura 19 – Elemento Finito de viga com dois nós e quatro graus de liberdade.	34
Figura 20 – Diagrama momento-curvatura com atualização da rigidez secante.	36
Figura 21 – Subdivisão usada para elementos quadriláteros.	41
Figura 22 – Refinamento h, gerando nós irregulares, representado em branco.	41
Figura 23 – Representação da rigidez exata (curva em vermelho) e da rigidez aproximada (reta em azul) no elemento finito de viga.	45
Figura 24 – Fluxograma do procedimento de refino adaptativo.	55
Figura 25 – Dimensões (em metros) e seção transversal da viga V1.	57
Figura 26 – Diagrama Tensão-Deformação do concreto da viga V1.	58
Figura 27 – Diagrama Tensão-Deformação do modelo bilinear com encruamento.	59
Figura 28 – Diagrama Tensão-Deformação para o aço da viga V1.	59
Figura 29 – Amostra de pontos da seção transversal da viga v1.	60

Figura 30 – Diagrama Momento-Curvatura da viga v1.	61
Figura 31 – Dimensões e seção transversal da viga J-4.	61
Figura 32 – Diagrama Tensão-Deformação para o concreto da viga J4.	62
Figura 33 – Diagrama Tensão-Deformação para o aço da viga J4.	63
Figura 34 – Amostra de pontos da seção transversal da viga J4.	64
Figura 35 – Diagrama Momento-Curvatura da viga J4.	64
Figura 36 – Diagrama carga-deslocamento para o tipo 1 de carregamento da viga V1, sem refino adaptativo da malha.	66
Figura 37 – Diagrama carga-deslocamento para o tipo 2 de carregamento da viga V1, sem refino adaptativo da malha.	66
Figura 38 – Diagrama carga-deslocamento para a viga J4, sem refino adaptativo da malha.	68
Figura 39 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos da viga V1 sob carregamento do tipo 1, considerando o estimador de erro relativo de curvatura.	70
Figura 40 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 1 de carregamento da viga V1, sem e com refino adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de curvatura.	71
Figura 41 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos na análise da viga V1 sob carregamento do tipo 2, considerando o estimador de erro relativo de curvatura.	71
Figura 42 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 2 de carregamento da viga V1, sem e com refino adaptativo, considerando o erro relativo de curvatura.	72
Figura 43 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos na análise da viga J4, considerando o estimador de erro relativo de curvatura.	73
Figura 44 – Diagrama Carga-Deslocamento para a viga J4, sem e com refino adaptativo, considerando o erro relativo de curvatura.	74
Figura 45 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos na análise da viga V1 sob carregamento do tipo 1, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento.	75
Figura 46 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 1 de carregamento da viga V1, sem e com refinamento adaptativo, considerando o erro relativo de deslocamento.	76
Figura 47 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos na análise da viga V1 sob carregamento do tipo 2, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento.	77

Figura 48 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 2 de carregamento da viga V1, sem e com refinamento adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento.	77
Figura 49 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos na análise da viga J4, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento.	78
Figura 50 – Diagrama Carga-Deslocamento para a viga J4, sem e com refinamento adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento.	79
Figura 51 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 1 de carregamento da viga V1, sem e com refinamento adaptativo, considerando os erros relativo de curvatura e deslocamento.	80
Figura 52 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 2 de carregamento da viga V1, sem e com refinamento adaptativo, considerando os erros relativo de curvatura e deslocamento.	81
Figura 53 – Diagrama Carga-Deslocamento para a viga J4, sem e com refinamento adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de curvatura e deslocamento.	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedade dos materiais da viga V1.	56
Tabela 2 – Propriedade dos materiais da viga J4.	61

1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural parte de uma configuração inicial de um ou mais elementos de uma estrutura com materiais, características geométricas e condições de contorno particulares. Após sofrer um carregamento externo imposto, a estrutura apresentará um comportamento como resposta que é representado por deslocamentos, deformações e tensões resultantes. Assim, em estruturas de concreto armado integrantes dos projetos de engenharia, é realizado o levantamento das cargas atuantes e obtido um pré-dimensionamento da mesma que quando submetida à análise estrutural, obtém-se os esforços e deslocamentos. Com essa resposta podem ser realizadas verificações de segurança através do atendimento ao estado limite último (ELU), obtendo a capacidade resistente da estrutura, e o estado limite de serviço (ELS), com as deformações e deslocamentos. Ainda, se não atendidas essas verificações, redimensiona-se a estrutura e inicia a análise estrutural novamente.

Estruturas de concreto armado unem dois diferentes materiais: o aço e o concreto, trabalhando juntos para resistirem aos esforços solicitantes. O concreto possui baixa resistência à tração, se comparada à compressão, levando-o a uma fissuração mesmo com baixa carga atuante e conseqüentemente à perda de rigidez da estrutura. Além disso, ocorre a plastificação do concreto comprimido e o escoamento do aço. Essas características conferem ao concreto armado um comportamento não linear físico, fazendo com que a deformação não seja proporcional ao aumento de tensão. Ainda, mudanças na geometria inicial da estrutura, quando submetidas à carregamentos horizontais, causam comportamento não linear geométrico, tornando a relação deformação-deslocamento não linear.

Mesmo com os avanços dos estudos em análise estrutural, a análise linear, um modelo simples e fácil de ser implementado, uma vez que admite leis lineares de tensão e deformação para o comportamento dos materiais (desconsiderando as não linearidades) é ainda o modelo mais utilizado para obter os esforços e deslocamentos das estruturas de projetos usuais de engenharia, como edifícios em concreto armado. Simplificações podem ser adotadas para considerar as não linearidades, através de recomendações da NBR 6118/2014, como por exemplo, o uso de coeficientes redutores de rigidez à flexão, para obter uma consideração aproximada da não linearidade física e o uso de um coeficiente majorador de esforços horizontais, para a não linearidade geométrica.

No entanto, para realizar uma análise mais refinada das estruturas, considerando as não linearidades, física e/ou geométrica, pode-se adotar a análise

não linear. Segundo Junges (2016), os modelos mais refinados, muitas vezes, são desenvolvidos e utilizados por um público menor, através de pesquisadores de universidades como resultado de estudos mais específicos, que demandam um conhecimento maior de modelagem e análise estrutural. Mas, a autora também afirma que para estruturas onde há maior sensibilidade as não linearidades, como estruturas já dimensionadas ou com alteração de cargas atuantes, os modelos desenvolvidos podem ter aplicação prática em escritórios de projetos, para realização de verificação de segurança. De acordo com Stramondinoli (2007), por meio da análise não linear pode-se obter uma visão global do funcionamento da estrutura, desde o processo de formação e propagação de fissuras até os mecanismos de colapso estrutural. Esse tipo de análise pode ser usado em várias situações: estruturas muito esbeltas, estruturas sujeitas a terremotos ou furacões e/ou na verificação de capacidade resistente de estruturas existentes, mas, sujeitas a novas cargas não previstas anteriormente.

A análise não linear se torna mais complexa, comparada à análise linear, e conseqüentemente, sua implementação computacional também é mais trabalhosa, necessitando de procedimentos incrementais e iterativos para a solução das equações de equilíbrio não lineares da estrutura, aliado a métodos numéricos, como o método dos elementos finitos (MEF). Esse, conforme Soriano (2009), é uma ferramenta numérica de solução aproximada de problemas, através da discretização do meio contínuo em elementos de dimensões finitas, ou elementos finitos, com seus contornos conectados, gerando a malha de elementos finitos. Assim, a análise por meio do MEF tem seus resultados convergindo para a solução exata há medida que a malha de elementos finitos é refinada (Cook, 1995).

Segundo Zienkiewicz (2000), um processo inteligente deve ser pensado ao refinar a malha, de modo que o refino aumentando o número de elementos ocorra nas regiões de maior interesse, garantindo um equilíbrio entre esforço computacional e a precisão pretendida da solução. Nesse contexto insere-se o refinamento adaptativo na análise, aprimorando a solução da malha de elementos finitos por meio de estimadores de erro que comandem o refino, alterando automaticamente o modelo dentro do domínio, nos locais onde a precisão não foi satisfatória.

Diante disso, este trabalho tem a finalidade de apresentar uma estratégia de refino adaptativo do tipo h na análise não linear de vigas de concreto armado. Para isso, são desenvolvidos diferentes critérios de refino da malha de elementos finitos com base em estimadores de erro a posteriori elaborados para comandar o refino adaptativo. Estes estimadores são desenvolvidos considerando que o erro é proveniente da representação inexata da rigidez ao longo do elemento.

Para realizar a análise não linear via método secante das vigas de concreto armado, é adotado o método de análise de Melo (2019). Ele utiliza diagramas

momento-curvatura da seção transversal das vigas, obtidos antes da análise estrutural, para consideração da não linearidade física e usa o método iterativo secante para obter a solução das equações de equilíbrio não lineares. Não é inserida na análise a não linearidade geométrica.

A partir das rotinas computacionais implementadas no software Matlab, obtidas de Melo (2019), se adquirem os dados de momento-curvatura das seções transversais das vigas e posterior realização da análise não linear via método secante. Com isso, será criada uma complementação desenvolvendo novas rotinas computacionais que gerem o refinamento adaptativo do tipo h da malha de elementos finitos das vigas de concreto armado, sujeitas à flexão simples e carregamento monotônico. Na estratégia de refinamento adaptativo do tipo h é adotado que o elemento é dividido ao meio com base na avaliação dos estimadores de erro dentro do elemento, onde ele é comparado com uma tolerância adotada de erro.

Portanto, a hipótese é de que com a estratégia de refinamento adaptativo do tipo h inserida na análise não linear via método secante (com uso dos diagramas momento-curvatura da seção das vigas previamente calculados) será obtida uma análise não linear mais simplificada e com resultados precisos aliado à redução de custo computacional, em termos de redução de número de elementos da malha ao adotar os estimadores desenvolvidos.

1.1 OBJETIVO GERAL

Desenvolver, testar e comparar critérios de refino adaptativo da malha de elementos finitos de vigas de concreto armado em análise não linear, com método secante e utilizando diagramas momento-curvatura de seção transversal previamente calculados, para consideração da não linearidade física.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver e implementar critérios de refinamento adaptativo da malha de elementos finitos unidimensional, com base em estimadores de erro relativos.
- Testar e comparar os diferentes critérios de refinamento adaptativo da malha, baseados nos estimadores de erros desenvolvidos, avaliando a precisão dos resultados e eficiência computacional, em termos de redução de número de elementos da malha.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho, além desse capítulo inicial, se estrutura em mais cinco capítulos. No Capítulo 2 é realizada a revisão de literatura, para embasamento teórico no desenvolvimento do estudo, apresentando os temas e subtemas que envolvem a análise não linear de estruturas de concreto armado até o refinamento adaptativo de malhas de elementos finitos. O Capítulo 3 apresenta o desenvolvimento do objetivo do estudo, descrevendo como foi realizado o refino adaptativo proposto, explicando os estimadores de erros desenvolvidos e a estratégia de refino adotada. O Capítulo 4 mostra os exemplos propostos e as considerações usadas para sua aplicação no estudo. Os resultados da aplicação dos exemplos, discussões e comparações são descritas no Capítulo 5. Por fim, no Capítulo 6, são sumarizadas as conclusões obtidas com o trabalho realizado e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é realizada a revisão de literatura do tema que envolve a compreensão da análise não linear em estruturas de concreto armado até o refinamento adaptativo de malhas de elementos finitos, com o objetivo de entender e ter embasamento teórico para o desenvolvimento da pesquisa.

2.1 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

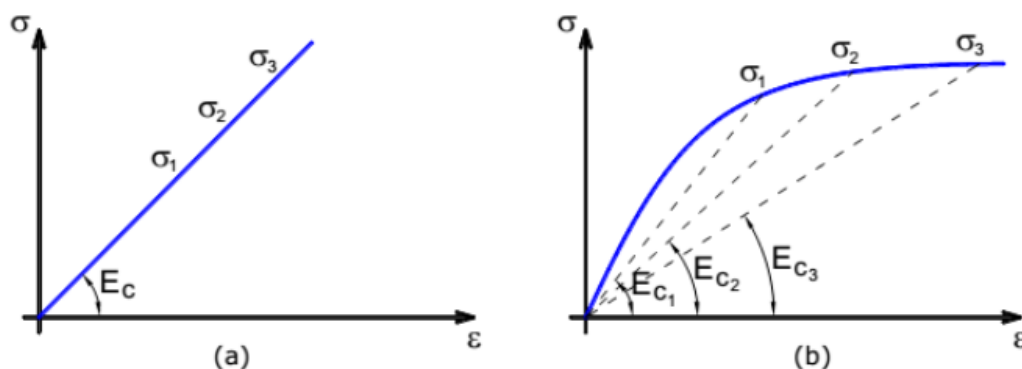
As estruturas de concreto armado podem ser analisadas de acordo com sua complexidade, com os modelos constitutivos adotados para os materiais e/ou da precisão esperada para sua resposta estrutural.

A análise elástica linear ainda é o modelo mais usado para dimensionamento das estruturas usuais de concreto armado. Ela admite uma relação linear entre tensões e deformações, ao desconsiderar as não linearidades, tornando-a simples e fácil de ser implementada. Conforme Rêgo (2005), na análise linear de uma viga de concreto armado a rigidez é adotada como constante, independente dos esforços internos desenvolvidos, em todas as seções ao longo da viga. No entanto, a distribuição de rigidez ao final da análise, através de resultados teóricos e experimentais, é diferente da rigidez inicialmente adotada, ou seja, a rigidez varia e depende de armadura, geometria, resistência e propriedades dos materiais aço e concreto, além do tipo e modo de carregamento e solicitações. Assim, o diagrama de momento final depende da distribuição final de rigidez tornando o problema não linear.

No caso do material linear, demonstrado pelo diagrama tensão-deformação da Figura 1, (a), admite-se que seu módulo de elasticidade será sempre o mesmo, ou seja, o concreto deformará sempre proporcionalmente à tensão aplicada sobre ele (uma reta). Já no caso do material não-linear, o diagrama tensão-deformação da Figura 1, (b), seu módulo de elasticidade, e conseqüentemente sua rigidez à flexão EI , admitirão diferentes valores. Logo, a estimativa da deformação torna-se mais complexa que na forma linear.

Segundo Cook et al. (1974), a não linearidade em mecânica estrutural pode ser classificada em: não linearidade física, geométrica e de contato. A rigidez e as forças atuantes são funções dos deslocamentos em problemas que consideram as não linearidades, tornando-os não lineares.

Figura 1 – Diagrama tensão-deformação do concreto: (a) linear; (b) não linear.



Fonte – (Pinto, 1997)

Os materiais aço e concreto apresentam comportamentos não lineares que são considerados nas análises através de leis constitutivas que estejam mais próximas do desempenho real desses materiais quando sujeitos às solicitações. Assim, o comportamento não linear em estruturas de concreto armado pode se apresentar através da não linearidade física, relacionado com as características do material, e por meio da não linearidade geométrica, referente às alterações devido à mudança na geometria inicial da estrutura quando submetida a carregamentos.

2.1.1 Não linearidade física do concreto armado

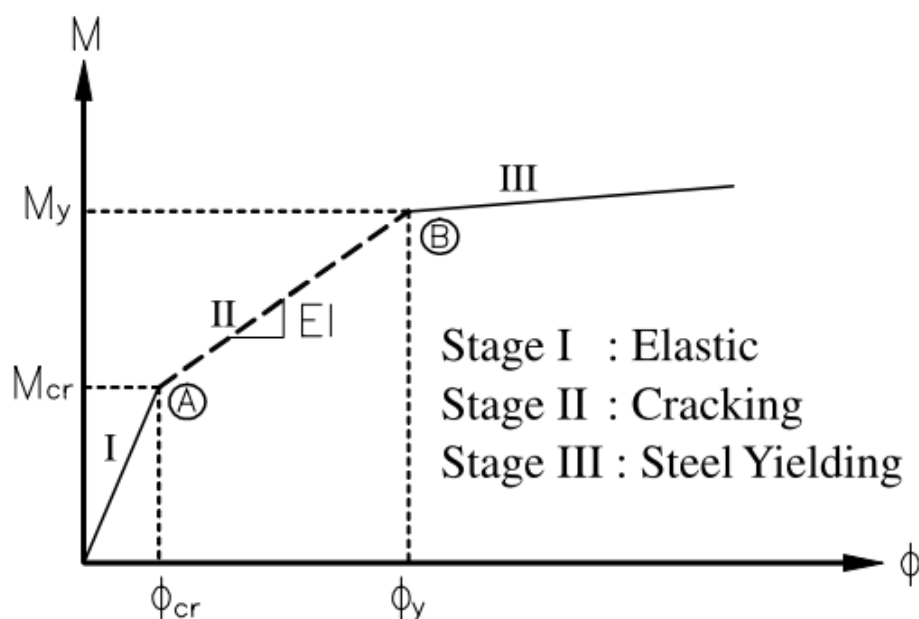
As relações constitutivas não lineares do concreto e do aço, os efeitos de fissuração, retração e fluência do concreto e efeito do escoamento da armadura são fatores que conferem ao concreto armado o seu comportamento não linear, caracterizando, assim, a não linearidade física (NLF) do concreto armado.

Segundo Penna (2011), o comportamento não linear do concreto pode ser representado através de modelos unidimensionais, conferindo simplicidade e resultados satisfatórios. A partir disso, duas abordagens numéricas podem ser usadas para tratar o comportamento não linear das estruturas de concreto armado: as que usam relações momento-curvatura e as que usam leis tensão deformação. A primeira considera seções transversais homogêneas e faz com que as relações momento-curvatura conduzam a análise-não linear. A segunda considera seções transversais decompostas em subdomínios e a contribuição de cada um desses na rigidez do elemento finito.

A Figura 2 ilustra os três estágios de idealização da relação momento-curvatura: o primeiro é a fissuração, o segundo o escoamento do aço e o terceiro vai até o limite de tensão útil no concreto. Seções com menor teor de aço resultam em

uma relação momento-curvatura aproximadamente linear até o escoamento do aço e conforme esse escoar, ocorre um grande incremento na curvatura, seguido de um aumento vagaroso do momento até o valor máximo, após ele decresce. Além disso, a curvatura representando o declínio do perfil de deformação da seção de uma viga, pode ser calculada pela teoria clássica de viga se as deformações forem medidas desde o aumento do momento fletor até a falha, permitindo a obtenção da relação momento-curvatura de uma seção (Kwak e Kim, 2002).

Figura 2 – Relação momento-curvatura idealizada para uma seção de concreto armado.



Fonte – (Kwak e Kim, 2002)

Kwak e Kim (2002), em sua pesquisa, elaboraram um modelo para análise não linear física de vigas de concreto armado, utilizando a relação momento-curvatura das seções previamente calculadas. O aço foi modelado como elasto-plástico com encruamento, o concreto sob compressão foi representado pela curva tensão-deformação de Scott et al (1982) e sob tração usou dois trechos lineares, sendo um até a fissuração e outro trecho decaindo ao considerar o efeito de “tension-stiffening”.

Conforme Melo (2019), o método utilizando as relações momento-curvatura, previamente calculados, é mais simples e possui um custo computacional menor que o método das lamelas. De forma geral, essa formulação utiliza a relação entre os esforços e suas curvaturas ou deformações, e assim, a seção transversal pode ser representada por relações que associam esforços solicitantes na seção com as respectivas deformações. Logo, após estimados os esforços de acordo com a deformação, é possível obter a matriz de rigidez dos elementos, conseqüentemente, as forças internas e a trajetória de equilíbrio. Mesmo havendo a necessidade de calcular

antecipadamente as relações momento-curvatura das seções transversais, ainda há a vantagem de se obter os esforços de forma direta, sem realizar a integração da seção transversal a cada iteração, reduzindo assim o custo computacional.

A não linearidade física do concreto armado é muitas vezes complexa de ser representada dentro de um modelo de análise estrutural. Em modelos que adotam o método dos elementos finitos, discretizando a estrutura, a representação desse comportamento não linear físico usa modelos constitutivos, baseados na relação tensão-deformação.

2.2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA OS MATERIAIS

Diversos são os modelos na literatura utilizados para representar o comportamento dos materiais, onde são classificados de acordo com a hipótese adotada. Para o concreto armado pode-se destacar o modelo elástico, baseado na teoria da elasticidade, um dos mais simples e mais utilizados e onde as deformações aplicadas são reversíveis; o modelo plástico, segundo a teoria da plasticidade, onde ocorrem as deformações residuais não reversíveis; e modelos que consideram a mecânica da fratura e do dano, que buscam representar o mecanismo interno da micro-fissuração. Modelos combinados também são usados, como o modelo elasto-plástico (Chen, 1982).

O modelo elástico linear é um dos mais usados para representar o comportamento do concreto armado, porém, não representa o seu comportamento complexo esperado, que inclui também a sua não-linearidade, evidenciada a partir da fissuração do concreto. Logo, o comportamento do concreto armado no modelo elástico não linear é representado por funções não lineares que representem a curva tensão-deformação não linear.

Segundo Junges (2016), uma série de fatores podem influenciar na adoção do modelo constitutivo a ser aplicado na análise estrutural. Como o tipo de estrutura a ser analisada, tipo de solicitações, finalidade da análise, facilidade de implementação computacional e na definição das variáveis do modelo.

Assim, para se realizar uma análise não linear de estruturas é necessário conhecer os materiais envolvidos para que se possa através de leis constitutivas representar o comportamento dos mesmos de maneira adequada à finalidade de análise. No caso do concreto armado se faz necessário conhecer as leis constitutivas que definem as relações tensão-deformação dos materiais concreto e aço sob carregamento, além da interação entre esses dois materiais, e assim obter um modelo matemático que represente adequadamente tudo isso e que possa ser implementado

computacionalmente.

A seguir são descritas características do comportamento experimental dos materiais que compõem o concreto armado, quando submetidos à solicitações de compressão e tração. Foi restringida a descrição para ser voltada ao Grupo I de classificação de resistência dos concretos pela NBR 6118/2014, ou seja, os concretos de 20 MPa a 50 MPa; apresentou-se somente o concreto sob estado uniaxial de tensão. Foram comentados com mais detalhes apenas os modelos constitutivos para o concreto e aço usados no presente trabalho. Logo, o objetivo desta seção é apresentar uma breve revisão dos modelos constitutivos unidimensionais frequentemente utilizados para o concreto.

2.2.1 Concreto

Com o efeito da retração e liberação de calor, o concreto já apresenta microfissuras antes de ser submetido a carregamento. A partir disso, e aumentando as cargas, as fissuras aumentam contribuindo para o seu comportamento não linear. Assim, de acordo com o tipo de carregamento imposto, compressão ou tração, o concreto pode apresentar comportamentos para a curva tensão-deformação de formas distintas.

2.2.1.1 Concreto sob compressão uniaxial

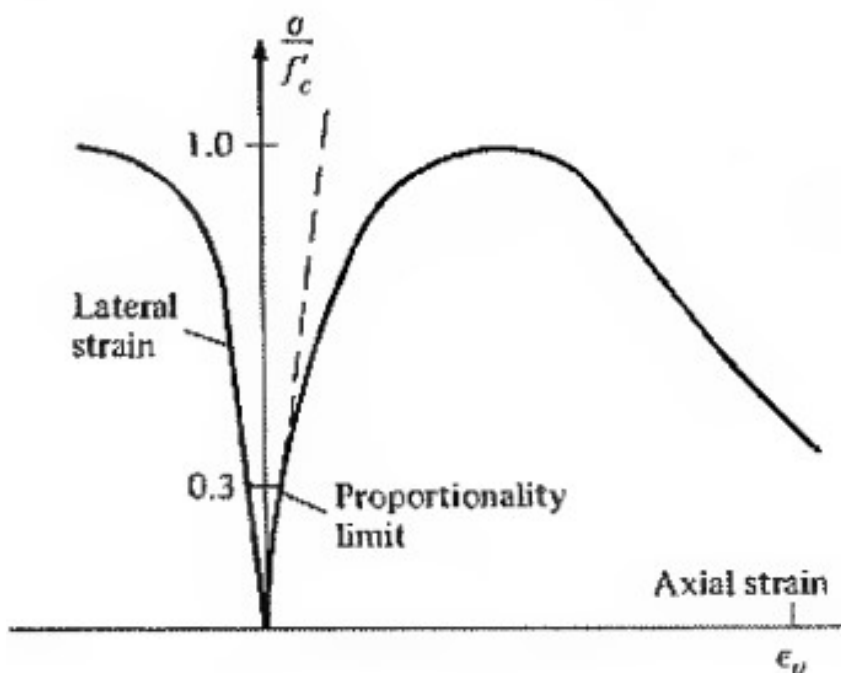
A curva tensão-deformação do concreto, vista na Figura 3, pode ser dividida em algumas fases: primeiro, uma fase elástica, com aumento de tensão aproximadamente proporcional com a deformação (linear); quando ocorre a propagação de fissuras de até 30% da tensão máxima, levando a redução da rigidez, se tem a segunda fase da curva; a terceira fase, as fissuras evoluem até atingir o nível de tensão máxima e o comportamento do concreto torna-se bastante não linear; por último, mesmo com a redução da tensão, as deformações continuam aumentando até a ruptura do concreto, fase chamada de amolecimento (Chen, 1982).

Cabe salientar que o foco dessa pesquisa não é desenvolver, validar ou revisar os vários modelos constitutivos existentes para o concreto armado. Dentre muitos modelos constitutivos propostos na literatura para representar o comportamento do concreto, sob compressão uniaxial, e para concretos de baixa resistência, estão os modelos de: Hognestad (1951), Popovics (1970), Wang et al. (1978), Tsai (1988), o código CEB-FIP (1990) e NBR 6118/2014.

O modelo de Hognestad (1951), apresenta a relação tensão-deformação através de uma equação do 2º grau para o trecho ascendente da curva e uma reta para

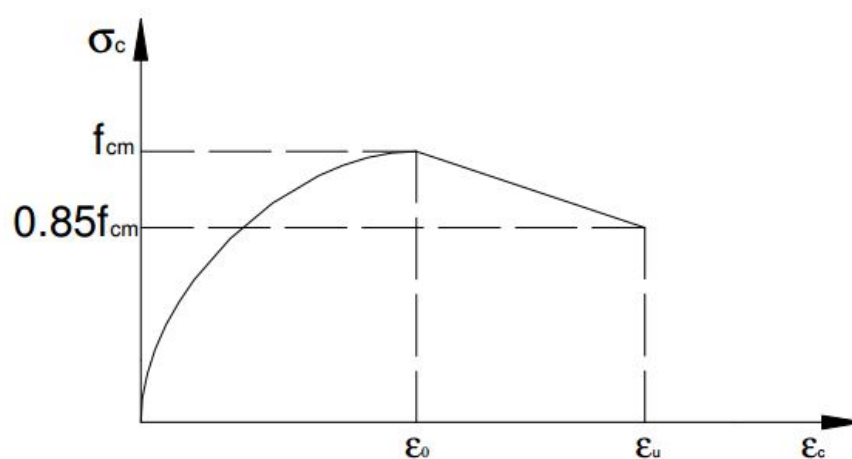
o trecho descendente, depois de alcançado a resistência do concreto até a deformação última. Isso pode ser visto pela Figura 4.

Figura 3 – Relação tensão-deformação típica do concreto sujeito a compressão uniaxial.



Fonte – (Chen,1982)

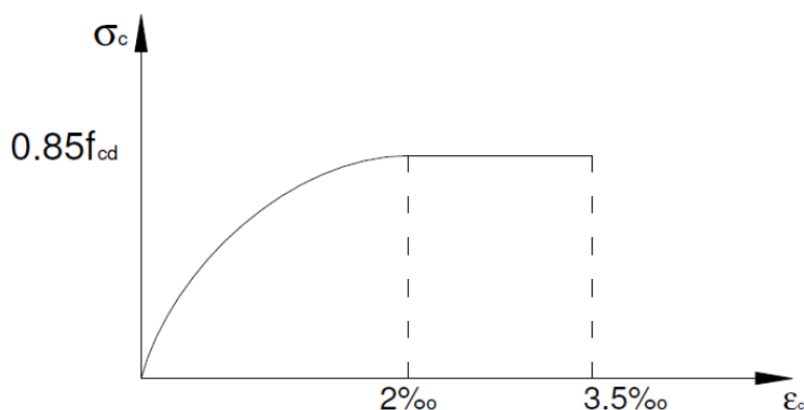
Figura 4 – Modelo constitutivo de Hognestad (1951).



Fonte – (Stramondinoli, 2007)

O diagrama tensão-deformação parábola-retângulo do concreto sob compressão uniaxial, mostrado na Figura 5, é o modelo proposto pela NBR 6118 para projetos de concreto armado, em análises no estado-limite último

Figura 5 – Diagrama tensão-deformação do concreto sob compressão uniaxial de acordo com a NBR 6118.



Fonte – (NBR 6118/2014)

A relação tensão-deformação para o diagrama parábola-retângulo é definida pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} \sigma_c = 0.85f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] & \text{para } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ \sigma_c = 0.85f_{cd} & \text{para } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (2.1)$$

Para $f_{ck} \leq 50$ MPa: $n = 2$

Para $f_{ck} \geq 50$ MPa: $n = 1.4 + 23.4 \left[\frac{90 - f_{ck}}{100} \right]^4$

onde, σ_c é a tensão no concreto, f_{cd} a resistência à compressão de cálculo, f_{ck} a resistência característica do concreto, ε_c a deformação no concreto, ε_{c2} a deformação do concreto no início do patamar elástico, ε_{cu} a deformação do concreto na ruptura. Para concretos com até 50 MPa de resistência característica, pode-se adotar ε_{c2} igual a 0,2% e ε_{cu} igual a 0,35%.

2.2.1.2 Concreto sob tração uniaxial

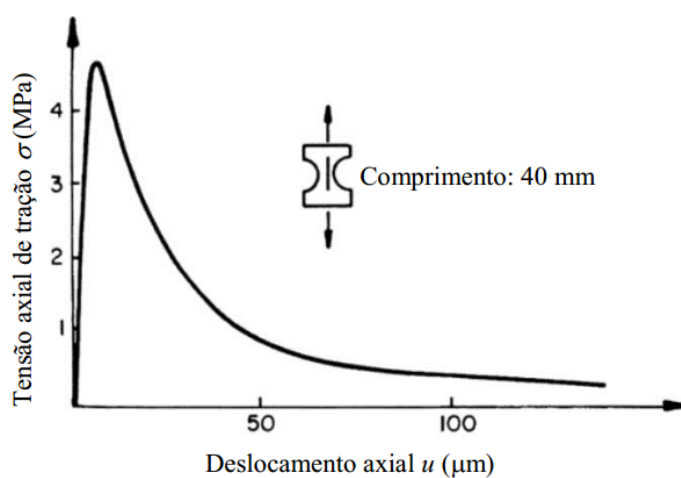
O concreto em ensaio submetido à tração uniaxial apresenta um comportamento quase linear até o início da fissuração, quando se alcança a sua resistência à tração. Assim, o concreto se mostra mais frágil do que na compressão e a fissuração se torna bastante relevante no seu comportamento, onde é comum a representação do mesmo através dos conceitos de mecânica da fratura.

A curva tensão-deformação do concreto sob tração uniaxial, representada pela Figura 6 e obtida do ensaio de Peterson (1981), apresenta geralmente

um limite de elasticidade entre 60% e 80% da resistência à tração e acima disso a fissuração aumenta levando ao rápido colapso do concreto (Chen e Han, 1988).

Na atuação em conjunto do concreto e do aço em uma estrutura, o comportamento deles apresenta um efeito conhecido como “tension-stiffening”, devido a transferência de tensões resultante da aderência entre o concreto e o aço. Isto é, após o início da fissuração, o concreto ainda colabora com a resistência do elemento, vinda da interação entre aço e concreto (Stramondinoli, 2007).

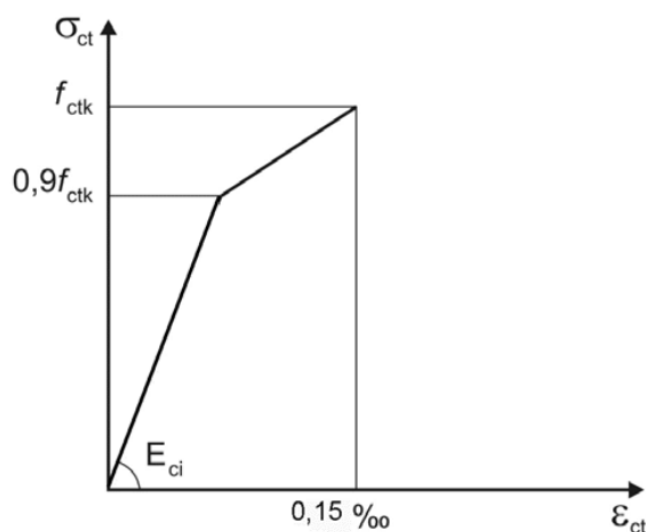
Figura 6 – Curva tensão-deformação do concreto sob tração uniaxial.



Fonte – (Chen e Han (1988))

A NBR 6118 apresenta um modelo simplificado do concreto sob tração uniaxial, antes da fissuração, denominado de bilinear, que é apresentado na Figura 7.

Figura 7 – Diagrama tensão-deformação bilinear de tração para o concreto não fissurado.

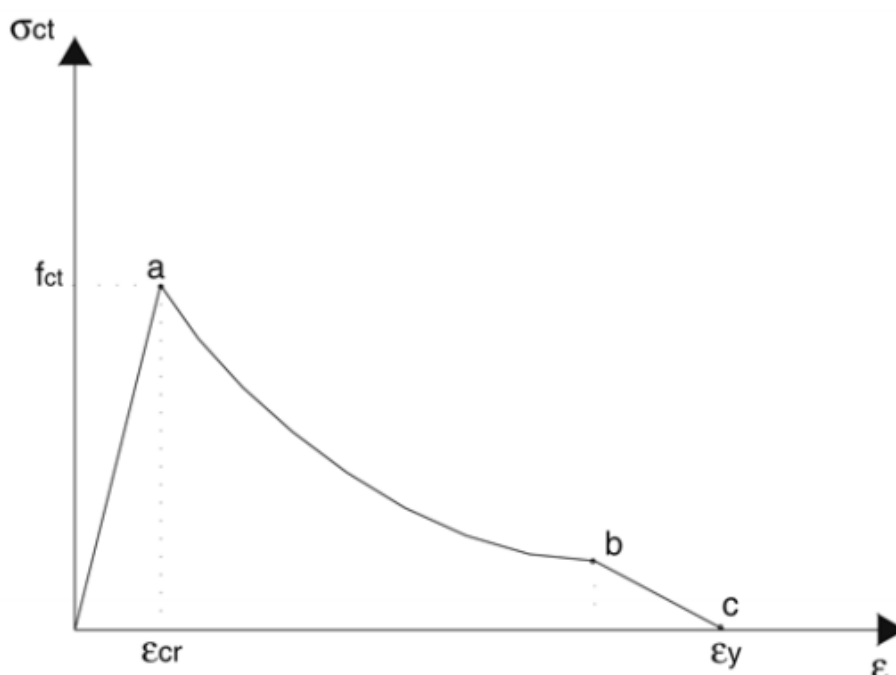


Fonte – (NBR 6118:2014)

O trabalho de Stramandinoli e La Rovere (2008) é um exemplo do estudo da modelagem do concreto à tração, onde é apresentado o modelo de *tension-stiffening*. Este modelo foi usado nos exemplos propostos desta pesquisa, para possibilitar a comparação com alguns resultados apresentados por Stramandinoli e La Rovere (2008), por isso é descrito com mais detalhes.

No modelo de *tension-stiffening* de Stramandinoli e La Rovere (2008), após ser alcançada a resistência à tração do concreto, é realizada a modificação da equação constitutiva do concreto tracionado, considerando uma mesma tensão média ao longo de toda a zona fissurada do concreto e através de um decaimento exponencial da tensão (pós atingir a resistência à tração) que é função de um parâmetro α , que por sua vez, depende da taxa de armadura longitudinal ρ e da relação entre os módulos de elasticidade do concreto e do aço. O diagrama tensão-deformação é apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Curva tensão-deformação do concreto na tração por Stramandinoli e La Rovere, 2008.



Fonte – (Stramandinoli e La Rovere, 2008)

Os três trechos do diagrama tensão-deformação são definidos pelas equações a seguir.

$$\sigma_{ct} = E_c \cdot \varepsilon_{ct} \text{ para } \varepsilon_{ct} < \varepsilon_{cr}, \quad (2.2)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ct} \cdot e^{-\alpha \frac{\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{cr}}} \text{ para } \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{ct} < \varepsilon_{s2}, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ct} \cdot e^{-\alpha \frac{\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{cr}}} - (\varepsilon_{ct} - \varepsilon_{s2}) \cdot \frac{f_{ct} \cdot e^{-\alpha \frac{\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{cr}}}}{\varepsilon_y - \varepsilon_{s2}} \text{ para } \varepsilon_{s2} < \varepsilon_{ct} < \varepsilon_y, \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ct} = 0 \text{ para } \varepsilon_y < \varepsilon_{ct}, \quad (2.5)$$

onde σ_{ct} é a tensão no concreto tracionado, f_{ct} é a resistência à tração do concreto, ε_{ct} é a deformação no concreto tracionado, ε_{cr} é a deformação na tensão máxima de tração f_{ct} (início da fissuração no concreto), ε_{s2} é a deformação no início do terceiro trecho da curva e ε_y é a deformação no início do escoamento do aço.

O parâmetro α é dado por

$$\alpha = 0.017 + 0.255(n\rho) - 0.106(n\rho)^2 + 0.016(n\rho)^3, \quad (2.6)$$

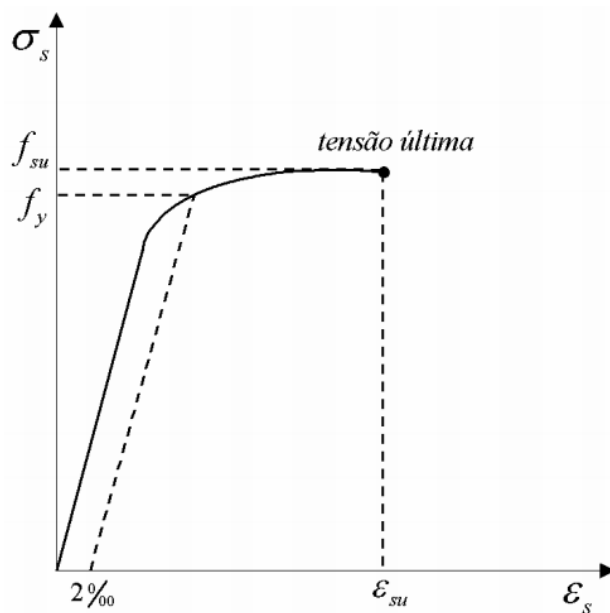
onde ρ é a taxa de armadura e n é a relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto (E_s/E_c).

2.2.2 Aço

A relação tensão-deformação adotada para o aço na tração e na compressão é a mesma, uma vez que não observam-se alterações significativas do comportamento do material quando submetido à tração ou à compressão. Logo, basta conhecer as propriedades do aço sob um estado uniaxial de tensões. Essas propriedades, obtidas através de ensaios experimentais, diferem de acordo com o tratamento dado no processo de fabricação do aço, onde o tratamento a frio (encruamento) não apresenta patamar de escoamento na relação tensão-deformação (Figura 9) e o tratamento a quente com patamar de escoamento (Figura 10).

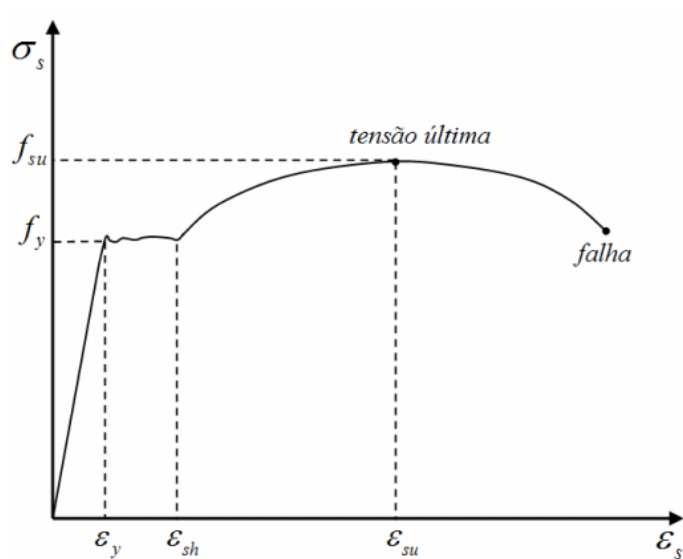
O comportamento mecânico dos aços usualmente utilizados em concreto armado pode ser representado adequadamente com modelos mais simples do que aqueles utilizados para o concreto. Os modelos mais utilizados para cargas monótonas de tração são: modelo elasto-plástico perfeito, apresentado na Figura 11 (recomendação NBR 6118); modelo elasto-plástico com endurecimento linear, apresentado na Figura 12; e modelo trilinear, apresentado na Figura 13.

Figura 9 – Diagrama tensão-deformação do aço sem patamar de escoamento.



Fonte – (Araújo, 2003)

Figura 10 – Diagrama tensão-deformação do aço com patamar de escoamento.



Fonte – (Kwon, 2000)

Figura 11 – Modelo elasto-plástico perfeito.

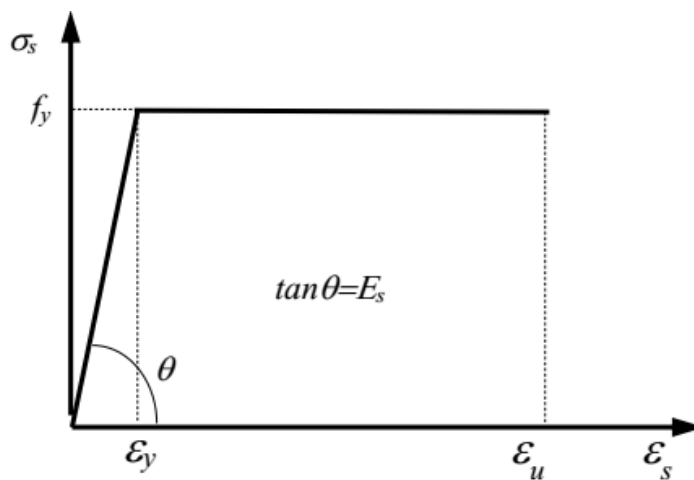


Figura 12 – Modelo elasto-plástico com endurecimento linear.

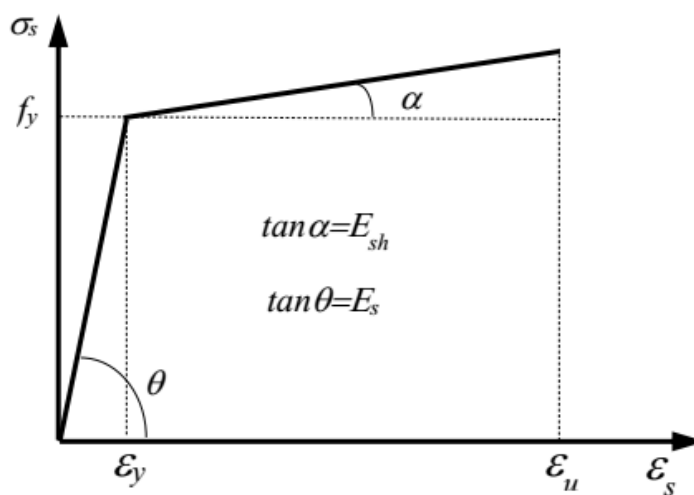
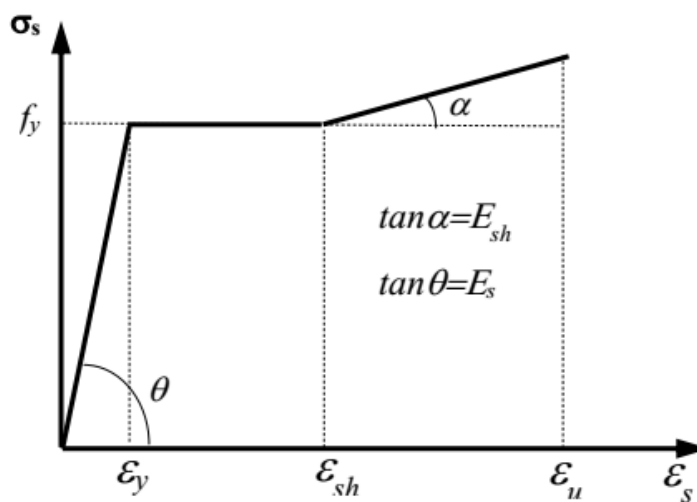


Figura 13 – Modelo trilinear.



2.3 MEF PARA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

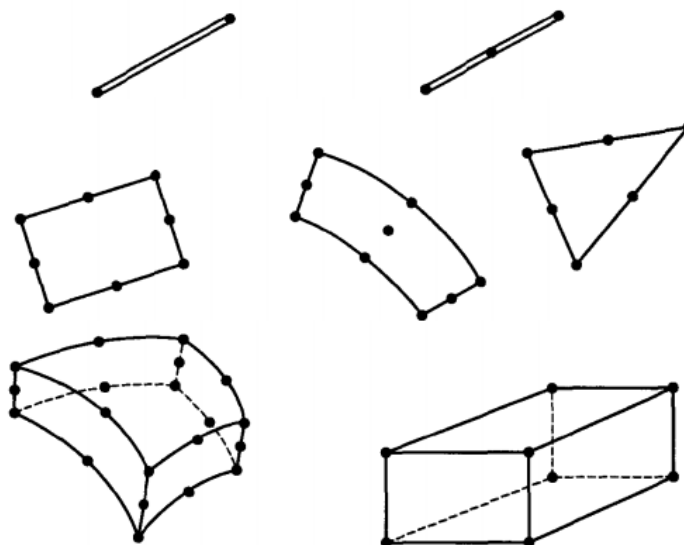
O Método dos Elementos Finitos é um método aproximado de solução para problemas de valores de contorno regidos por equações diferenciais. No caso da Mecânica das Estruturas, o método é frequentemente empregado para análise estrutural, através da modelagem numérica do problema. Logo, para a idealização deste problema físico para um modelo numérico é necessário adotar hipóteses que levem a equações diferenciais que comandem o processo. Como a solução por elementos finitos é um procedimento numérico, esta deve ter sua precisão avaliada e caso os critérios não sejam cumpridos, deve ser repetida com parâmetros ou malhas mais refinadas até que a precisão da solução pretendida seja suficiente (Bathe, 1996).

O MEF tem como base a divisão do corpo sólido ou meio contínuo em vários elementos (Figura 14) ou seja, dividindo o domínio em subdomínios, chamados elementos finitos, que possuem suas extremidades ligadas por nós. Assim, funções de aproximação, geralmente polinomiais, são usadas para definir o campo de deslocamentos ou de tensões dentro de cada elemento, interpolando os valores de deslocamentos nodais ou tensões. Após, obtém-se a matriz de rigidez e o vetor de forças equivalentes de cada elemento na matriz de rigidez e vetor de forças da estrutura como um todo, formando as equações de equilíbrio de forças da estrutura onde a solução da mesma resulta nos deslocamentos nodais. Logo, a partir destes e das funções de interpolação internas para cada elemento, pode-se chegar nos deslocamentos em qualquer ponto da estrutura, e por consequência, nas deformações específicas e tensões (La Rovere, 2002).

Como a solução do problema depende dessa divisão do domínio ou do número de divisão dos elementos, observa-se que quanto melhor discretizado o meio contínuo, quanto maior for o número de elementos utilizados, maior será a precisão da solução obtida por esse método. No entanto, quanto maior o número de elementos, maior o custo computacional para exercer todos os cálculos que a análise demanda (Fisch e Belytschko, 2007).

Com o avanço do MEF e dos modelos para análise não linear de estruturas, a análise numérica se tornou uma alternativa para a modelagem dos vários tipos de estruturas, materiais e solicitações (Peres et al, 2014). Para estruturas de concreto armado são usados modelos de elementos finitos de barras, elementos de placas, cascas ou sólidos. Sendo que o modelo de elementos de barras possui uma formulação mais simples e de menor esforço computacional comparado com elementos planos ou sólidos (Junges, 2016).

Figura 14 – Discretização de sólidos contínuos.



Fonte – (Adaptado de Bathe (1996))

Conforme Bathe (1996), para pequenos deslocamentos e condições de contorno e cargas constantes no tempo, a equação de equilíbrio é da forma:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (2.7)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez global da estrutura, \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos e \mathbf{F} o vetor das forças totais aplicadas.

De acordo com Cook et al. (1989), para os problemas estáticos não lineares, a solução da não linearidade está vinculada à matriz de rigidez ou ao vetor de forças atuantes serem dependentes dos deslocamentos. Ou seja, analisando a Equação 2.7, o problema se torna não linear porque a matriz \mathbf{K} e o vetor de forças \mathbf{F} são dependentes do vetor de deslocamentos \mathbf{U} . Assim, faz-se necessário o uso de métodos de solução de sistemas de equações não lineares, em busca de se obter a configuração de equilíbrio da estrutura.

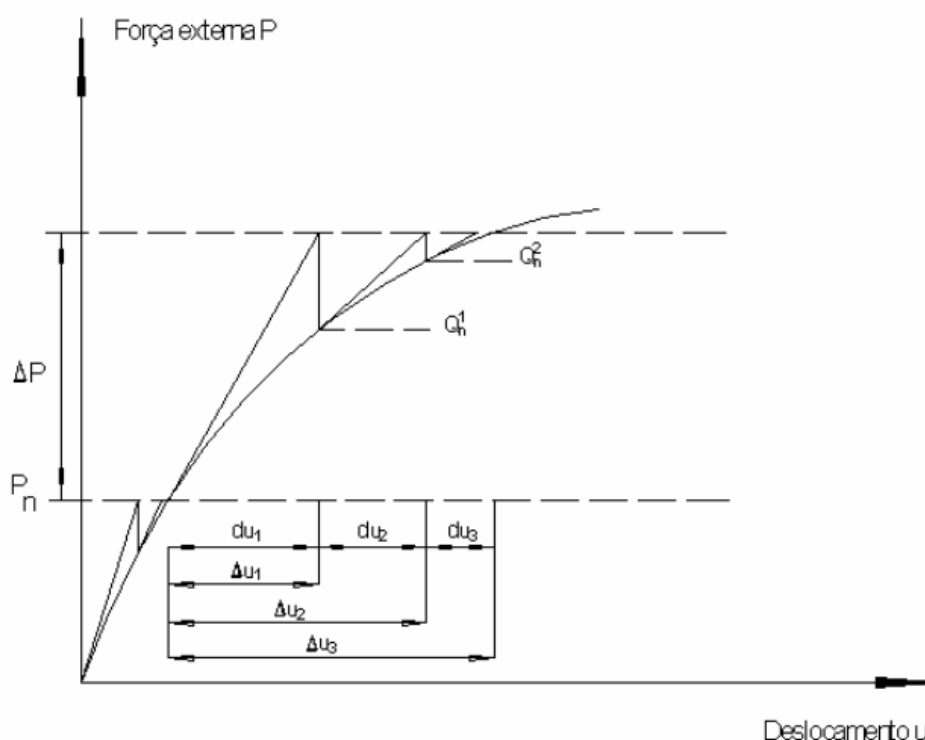
2.3.1 Métodos Iterativos de Solução de Sistemas de Equações Não Lineares

A dependência que a rigidez e as forças internas possuem em relação aos deslocamentos são uma dificuldade na solução dos sistemas de equações não lineares, levando ao desenvolvimento de várias alternativas que tentam resolver

esse problema, convergindo os resultados e, ao mesmo tempo, trazendo eficiência computacional.

A solução de um sistema de equações de equilíbrio não lineares é realizada através de procedimentos iterativos e/ou incrementais. Procedimentos de solução incremental não iterativos geram uma aproximação da matriz de rigidez tangencial obtida na linearização de equações de equilíbrio não lineares. Também geram cargas desbalanceadas remanescentes ao final de cada incremento de carga, levando a fontes de erro acumuladas nas soluções obtidas. Já o procedimento incremental iterativo, ilustrado na Figura 15, minimiza a separação entre a solução numérica e a solução analítica, onde se introduz iterações de equilíbrio a cada passo de carga.

Figura 15 – Procedimento incremental iterativo.



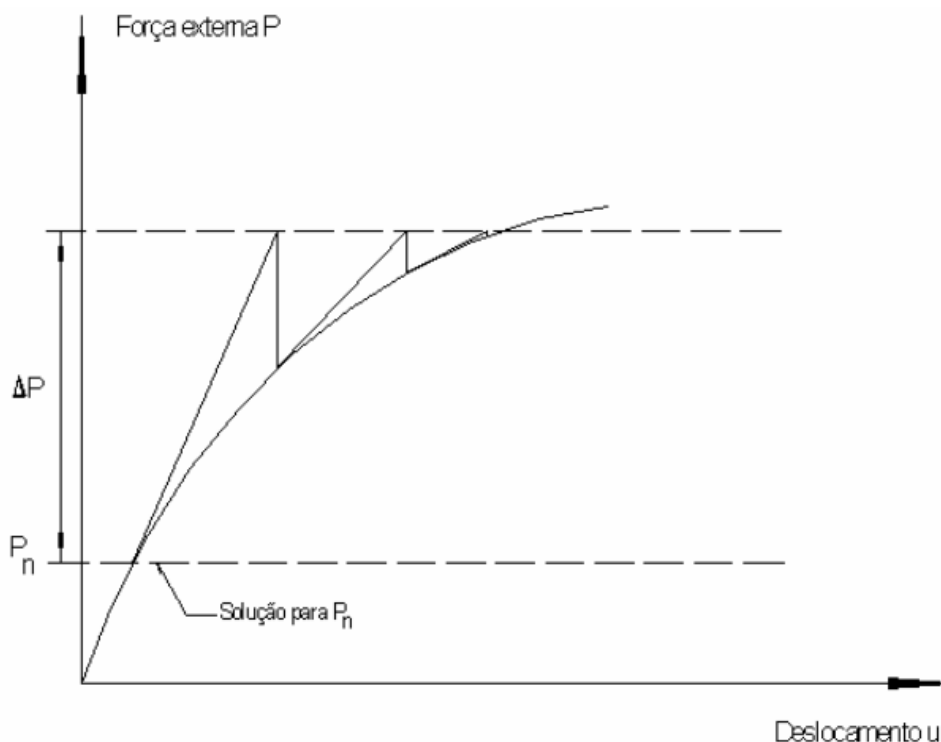
Segundo Souza (2015), as formulações para solução de sistemas não lineares foram abordadas por diversos autores, onde alguns métodos são mais difundidos dentro das análises de elementos finitos (MEF): Método de Newton-Raphson e o Método de Newton-Raphson Modificado. Além desses, será abordado também o Método Secante, que foi o método utilizado nessa pesquisa.

2.3.1.1 Método de Newton Raphson

Este é o método mais clássico na literatura e numa forma mais sucinta de descrevê-lo: é o método onde a matriz tangente de rigidez é atualizada e calculada

a cada iteração. A representação gráfica do método de Newton Raphson é vista na Figura 16.

Figura 16 – Método de Newton Raphson.



A expressão seguinte define basicamente o método de Newton Raphson:

$$x^{K+1} = x^K - J^{-1}(x^K)F(x^K) \quad (2.8)$$

onde x^K é vetor solução na k -ésima iteração, x^{K+1} indica a iteração subsequente, $J(x)^K$ é a matriz Jacobiana, logo, $J^{-1}(x^K)$ é a inversa da matriz Jacobiana.

Descrevendo em termos da matriz de rigidez, o método atualiza a mesma, $\mathbf{K}(\mathbf{u})$, usando o último valor de deslocamento \mathbf{u} . E assim sucessivamente até atingir a convergência dos resultados. Assim, o método busca traçar tangentes no diagrama carga-deslocamento do elemento, isto é, a rigidez tangente, e assim, os deslocamentos são iterados até a convergência do sistema (Cook et al., 1989; Bathe, 1996).

A convergência quadrática do método, alcançada na maioria dos casos, é uma vantagem do método, desde que a estimativa inicial tenha uma boa aproximação da solução e que exista a inversa da matriz Jacobiana $J^{-1}(x^K)$. No entanto, o método tem como desvantagem o elevado esforço computacional, uma vez que a matriz de rigidez é recalculada e atualizada a cada iteração, que muitas vezes é desnecessário (Souza, 2015).

Portanto, Silveira et al. (1999) apresentam como um problema intrínseco do método de Newton Raphson, o fato do método divergir próximo a pontos limites na trajetória de equilíbrio. Isso porque a matriz de rigidez tangente torna-se quase singular nestas situações, dificultando ou até impedindo a solução do sistema de equações necessário.

Daqui podem surgir então, estratégias de iteração que resolverão esse problema da convergência. O Método do Comprimento do Arco é um dos mais conhecidos para esse tipo de problema e apresenta versões de Riks (1972) e Wempner (1971) e Crisfield (2000).

Esse método busca resolver o problema da convergência controlando, ao mesmo tempo, a carga e o deslocamento, impedindo os pontos limites na trajetória de equilíbrio como os “saltos” por controle de carga (*snap-through*) e os “saltos” por controle de deslocamento (*snapback*). Para isso, uma restrição através de uma equação circular foi imposta por Riks (1972) com a finalidade de encontrar um parâmetro de carga que limita os resultados dentro de um arco. Esta técnica pode ser associada tanto ao método de Newton-Raphson quanto ao Newton-Raphson Modificado (Sousa e Ikeda, 2017).

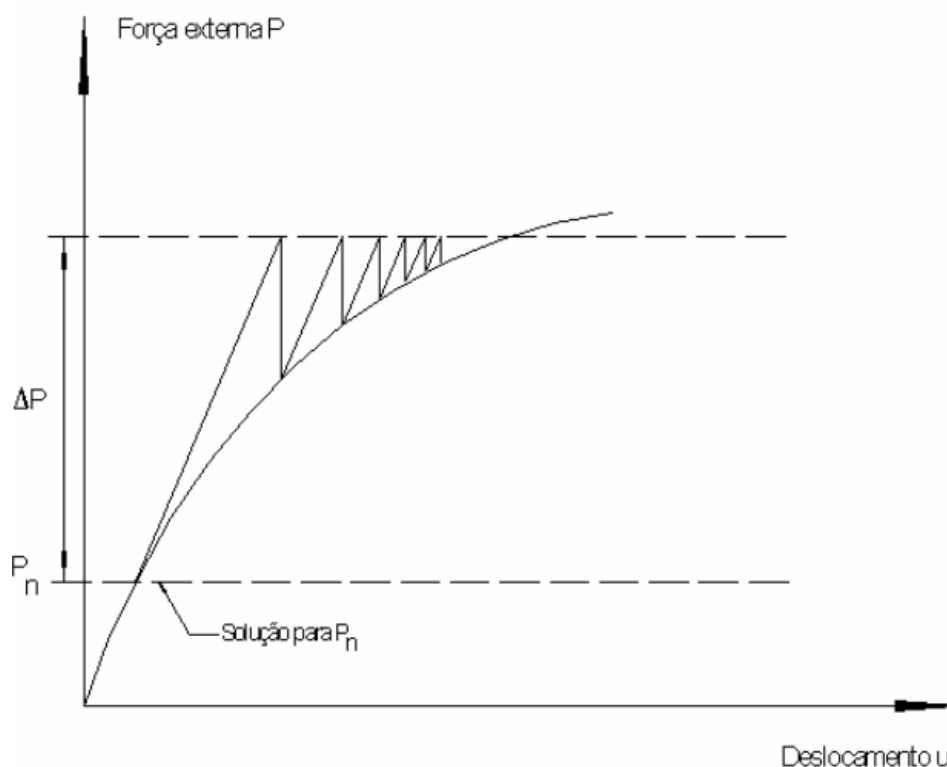
2.3.1.2 Método de Newton Raphson Modificado

Na busca de um método que não necessite atualizar a matriz de rigidez a cada iteração, foi proposto o Método de Newton Raphson Modificado. Neste método a matriz de rigidez tangente não é atualizada a cada nova iteração, permitindo uma redução do esforço computacional. De forma geral esta modificação aumenta o número de iterações necessárias para convergência. Porém, o esforço computacional total necessário pode ser reduzido, tornando a estratégia eficiente para muitos casos.

Se baseando na obtenção de redução em custo computacional, o método de Newton Raphson Modificado é geralmente mais eficiente que o primeiro, pois a matriz de rigidez só é recalculada a cada incremento de carga, levando a um ganho de tempo de processamento de cada iteração (Cook et al., 1989).

No entanto, estruturas com pontos limites no caminho de equilíbrio podem demonstrar dificuldades de convergência seja pelo método de Newton Raphson ou pelo Modificado, levando a ocorrência de fenômenos de *snap-through* e/ou *snap-back*, devido a haver controle somente de carga ou deslocamento nesses tipos de métodos (Sousa e Júnior, 2017).

Figura 17 – Método de Newton Raphson Modificado.



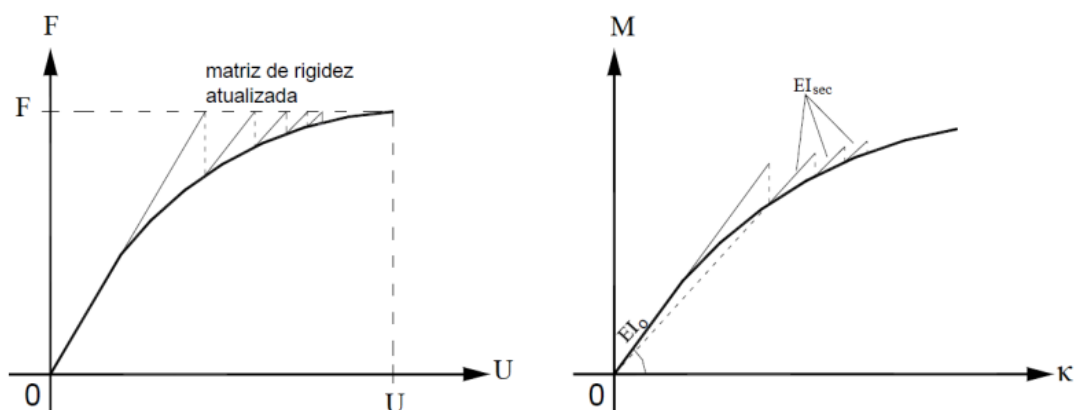
2.3.1.3 Método Secante

No método secante, a matriz de rigidez secante só é recalculada a cada incremento de carga, ou seja, ela é estabelecida somente no início de cada passo de carga. Logo, qual método usar é uma questão de eficiência computacional, desde que ocorra convergência (Bathe, 1996).

O método secante com uso dos diagramas momento-curvatura foi utilizado no trabalho recente de Melo (2019) para solucionar as equações de equilíbrio não lineares. Ele foi aplicado para vigas de concreto armado usando os diagramas momento-curvatura da seção transversal, calculados antes da análise estrutural. Pode-se notar pela Figura 18 que a rigidez da estrutura é atualizada a cada iteração a partir da atualização da rigidez secante EI_{sec} que é proveniente da reta secante que corta o ponto de interesse na curva momento-curvatura.

Diferente da matriz tangente, a matriz secante não se torna singular próximo ao ponto de colapso. Logo, o método não possui dificuldades de convergência nos pontos limites da trajetória de equilíbrio, apresenta maior estabilidade e não necessita de incrementos de carga para obtenção de resultados (Melo, 2019).

Figura 18 – Método da rigidez secante com uso do diagrama momento-curvatura.



Fonte – (Melo, 2019)

2.3.2 Método de análise de Melo (2019)

O método de análise não linear de vigas de concreto armado desenvolvido por Melo (2019), utiliza um elemento finito de viga e faz uso de diagramas momento-curvatura da seção transversal da viga, previamente calculado, para consideração da não linearidade física (inserindo a variação de rigidez) e uso do método secante para solução das equações não lineares. Segundo Melo (2019), as rotinas computacionais desse modelo se mostraram eficientes e precisas, tornando seu uso adequado para verificação em serviço e análise de estado limite último de vigas de concreto armado sujeitas à flexão e que utilizem uma malha suficientemente refinada nos pontos mais críticos de esforços. A formulação desse modelo é apresentada resumidamente nos parágrafos seguintes.

O elemento finito utilizado, ilustrado na Figura 19, possui dois nós e quatro graus de liberdade, sendo dois deslocamentos por ponto nodal: deslocamento transversal e deslocamento angular ou rotação. Foi usado a teoria de viga de Euler-Bernouli para representação matemática do modelo, onde não considera os efeitos da deformação por cisalhamento e as seções se mantêm planas e normais após a deformação. O modelo também considera apenas carregamentos monotônicos.

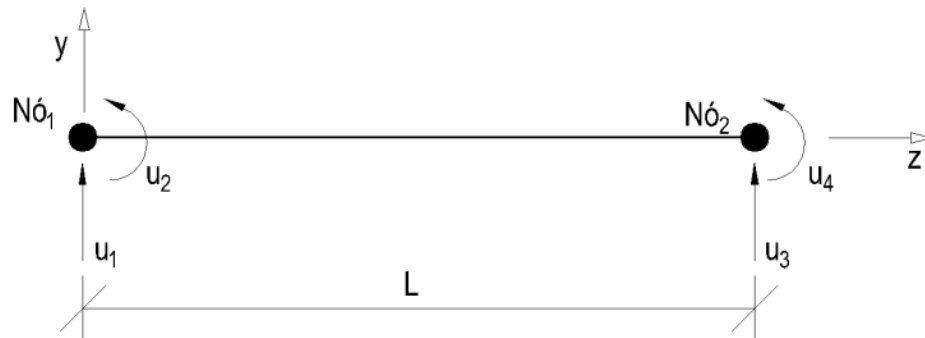
A formulação do MEF foi realizada com o método de Rayleigh-Ritz, que utiliza os princípios variacionais. Conforme Cook et al. (1989), a matriz de rigidez, relacionando forças e deslocamentos no elemento, é definida por

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}(z)^T EI(z) \mathbf{B}(z) dz, \quad (2.9)$$

onde \mathbf{k} é a matriz de rigidez do elemento, EI é a rigidez à flexão da seção transversal, \mathbf{B} é o vetor das segundas derivadas das funções de forma, z é a direção do eixo

longitudinal e L é o comprimento do elemento.

Figura 19 – Elemento Finito de viga com dois nós e quatro graus de liberdade.



Fonte – (Melo, 2019)

Percebe-se que a matriz da rigidez depende da rigidez à flexão EI . Neste trabalho é adotada a rigidez secante, dada por

$$EI_{sec} = \frac{M}{\kappa}, \quad (2.10)$$

onde κ é a curvatura no nós do elemento e M é o momento fletor.

A partir dos diagramas momento-curvatura da seção transversal da viga, que são calculados previamente, são obtidos os valores de momento fletor M correspondente de acordo com o valor de curvatura nos nós dos elementos. Estas são obtidas com a Equação 2.11 e a Equação 2.12.

$$\kappa_1 = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} & -\frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & -\frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = -\frac{6}{L^2}u_1 - \frac{4}{L}u_2 + \frac{6}{L^2}u_3 - \frac{2}{L}u_4, \quad (2.11)$$

$$\kappa_2 = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{6}{L^2}u_1 + \frac{2}{L}u_2 - \frac{6}{L^2}u_3 + \frac{4}{L}u_4, \quad (2.12)$$

onde κ_1 é a curvatura no nó 1 e κ_2 é a curvatura no nó 2 do elemento; u_1 é o deslocamento vertical no nó 1, u_2 a rotação no nó 1, u_3 o deslocamento vertical no nó 2 e u_4 a rotação no nó 2.

A rigidez EI ao longo de um dado elemento finito pode variar de maneira arbitrária, o que dificulta a avaliação de sua matriz de rigidez. Por este motivo

Melo (2019) adotou uma aproximação linear da rigidez EI dentro do elemento, dada por

$$EI(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right) EI_{sec,1} + \left(\frac{z}{L}\right) EI_{sec,2}, \quad (2.13)$$

onde $EI_{sec,1}$ é a rigidez secante no nó 1 do elemento, $EI_{sec,2}$ é a rigidez secante no nó 2.

Substituindo a rigidez da Equação 2.13 na Equação 2.9 e realizando a integração ao longo de z , obtém-se a matriz de rigidez do elemento

$$\mathbf{k} = EI_{sec,1} \mathbf{k}_1 + EI_{sec,2} \mathbf{k}_2, \quad (2.14)$$

onde, calculando as integrais, obtém-se as parcelas de rigidez dos nós definidas por

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^3} & \frac{4}{L^2} & -\frac{6}{L^3} & \frac{2}{L^2} \\ \frac{4}{L^2} & \frac{3}{L} & -\frac{4}{L^2} & \frac{1}{L} \\ -\frac{6}{L^3} & -\frac{4}{L^2} & \frac{6}{L^3} & -\frac{2}{L^2} \\ \frac{2}{L^2} & \frac{1}{L} & -\frac{2}{L^2} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^3} & \frac{2}{L^2} & -\frac{6}{L^3} & \frac{4}{L^2} \\ \frac{2}{L^2} & \frac{1}{L} & -\frac{2}{L^2} & \frac{1}{L} \\ -\frac{6}{L^3} & -\frac{2}{L^2} & \frac{6}{L^3} & -\frac{4}{L^2} \\ \frac{4}{L^2} & \frac{1}{L} & -\frac{4}{L^2} & \frac{3}{L} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Nota-se que a matriz de rigidez resultante é a soma de duas parcelas, representando a influência da rigidez de cada nó. Assim, a matriz de rigidez do elemento pode ser avaliada de maneira simples, facilitando a implementação e aumentando a eficiência das rotinas computacionais.

Somando a contribuição da rigidez de todos os elementos, onde as matrizes de rigidez dos elementos podem ser sobrepostas conforme suas conectividades, se obtém a matriz de rigidez global da estrutura \mathbf{K} . Após aplicar as condições de contorno, o sistema de equações não lineares pode ser resolvido com o método secante resolvendo-se os sistemas lineares

$$\mathbf{K}_i \mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}, \quad (2.17)$$

onde \mathbf{K}_i é a matriz de rigidez secante da estrutura obtida com os deslocamentos \mathbf{U}_i na iteração i .

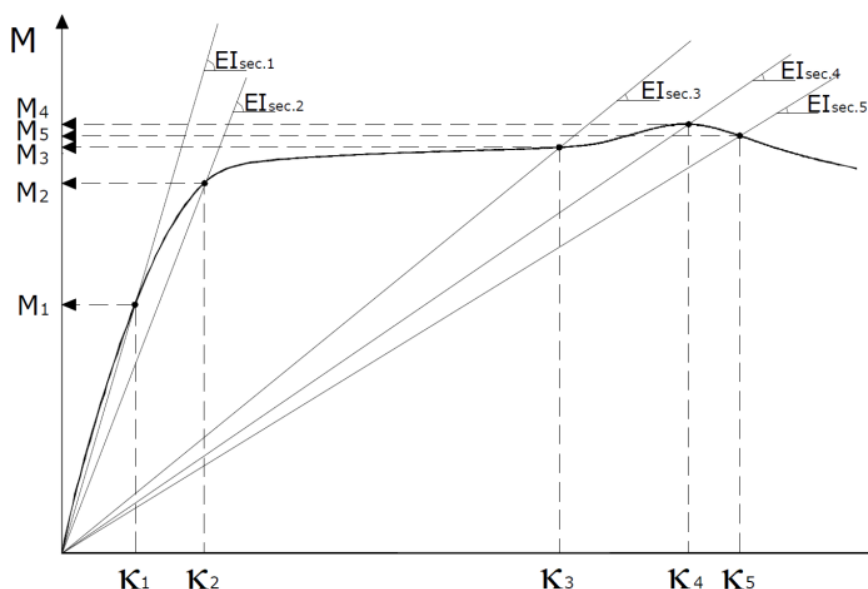
Uma vez que o problema tratado aqui envolve apenas vigas, a rigidez secante pode ser avaliada a partir do diagrama momento-curvatura da seção transversal da viga. Os diagramas momento-curvatura podem ser obtidos com qualquer técnica disponível na literatura e está fora do escopo deste trabalho. Neste trabalho foi utilizado o método descrito por Melo (2021) para esta finalidade.

Esse método consiste em atualizar a matriz de rigidez total da estrutura, a partir da atualização da rigidez secante EI_{sec} , a cada iteração da análise até a sua convergência, representada na Figura 20. Considerando que o diagrama momento-curvatura da seção seja conhecido, a rigidez secante à flexão pode ser avaliada computacionalmente como

$$EI_{sec} = \frac{M(\kappa)}{\kappa} \quad (2.18)$$

κ é a curvatura em um dado ponto, $M(\kappa)$ é o momento corresponde a esta curvatura no diagrama e EI_{sec} representa a inclinação da reta secante ao ponto $M(\kappa) \times \kappa$ no diagrama.

Figura 20 – Diagrama momento-curvatura com atualização da rigidez secante.



Fonte – (Melo, 2019)

O valor de curvatura nos nós é atualizado a cada iteração, através da Equação 2.11 e da Equação 2.12 fazendo uso de valores de deslocamentos \mathbf{U} obtidos na iteração anterior. Como solução inicial adota-se $\mathbf{U} = 0$, ou seja, todos os deslocamentos/curvaturas nulas. Assim, a rigidez inicial adotada é igual à rigidez tangente inicial. Caso o diagrama momento-curvatura não seja conhecido em sua forma ana-

lítica, mas apenas para um conjunto discreto de valores de curvatura, é necessário ainda interpolar os valores do diagrama antes de avaliar a Equação 2.18.

Assim, obtido o valor da curvatura, chega-se no momento correspondente através da curva momento-curvatura, e com esses dois, obtém-se a rigidez secante EI_{sec} (Equação 2.10). Por fim, ocorre a atualização da matriz de rigidez com os valores de rigidez secante obtidos.

As iterações do método secante são realizadas até que o critério de convergência

$$\|\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_{n-1}\| \leq \gamma \quad (2.19)$$

seja satisfeito, onde \mathbf{U}_n são os deslocamentos na iteração atual, \mathbf{U}_{n-1} os deslocamentos na iteração anterior e γ é o critério de parada ou tolerância adotado. É também definido um número máximo de iterações a serem realizadas, caso não seja possível determinar uma configuração de equilíbrio.

O método secante utilizando a curva momento-curvatura, previamente calculada, tem um grande benefício pelo fato de não ser necessário realizar o carregamento incremental no processo, fazendo as iterações a cada passo de carga. Sendo assim, o carregamento é inserido uma única vez, feitas as iterações e obtida a configuração de equilíbrio da estrutura. Isto reduz drasticamente o esforço computacional necessário e a complexidade das rotinas computacionais envolvidas.

2.4 REFINAMENTO ADAPTATIVO

O MEF é um método aproximado de solução. Na maior parte dos casos de interesse prático pode-se demonstrar que o erro do método tende a zero quando o tamanho dos elementos é reduzido e/ou o grau das funções de aproximação é aumentado indefinidamente. Este procedimento de redução do tamanho dos elementos (com conseqüente aumento no número de elementos) e/ou aumento do grau das funções de aproximação recebe o nome de refino de malha.

Na prática o tamanho dos elementos não pode ser reduzido indefinidamente e a ordem das funções de aproximação também não pode ser aumentada deste modo. Assim, o MEF apresenta de forma geral erros de aproximação. Neste contexto, o principal objetivo do refino da malha é obter soluções precisas o suficiente para a finalidade desejada com o menor custo computacional possível.

Caso a malha seja refinada levando em consideração os resultados de uma análise anterior, temos o chamado refino adaptativo. De forma geral o refino

adaptativo é feito estimando-se o erro da solução obtida com uma malha inicial e refinando-se a malha nas regiões do domínio onde o erro seja superior a uma dada tolerância.

Segundo Rachowicz (2000), a justificativa lógica do uso das metodologias adaptativas está no uso de uma malha grosseira inicialmente nos locais onde a solução não é suave, sem que haja redução de precisão. Comumente usa-se processo adaptativo que parte de uma malha inicial, estimando o erro da aproximação e refinando a malha nos locais de maiores erros. Isso, repetido até o cumprimento de alguns requisitos de precisão.

A junção do MEF com o algoritmo adaptativo gera o MEF adaptativo, com objetivo de realizar um controle automático do erro quantitativo de discretização, tendo como base um estimador de erro a ser comparado com uma tolerância admissível. A malha final deve ser eficiente, ou seja, satisfazer o controle do erro, e confiável no sentido de garantir esse controle (Lakhany e Whiteman, 1999).

2.4.1 Erros nas soluções de elementos finitos

Conforme Pereira (1996), vários são os tipos de erros nas soluções de elementos finitos: erro de modelação, erro de discretização do domínio, erro de discretização das funções e erro numérico. O erro de modelação é referente ao modelo matemático do tipo de problema; o erro de discretização do domínio é aquele decorrente de uma representação não exata do domínio do problema; o erro de discretização das funções é aquele consequente da impossibilidade de se representar a solução exata com funções de grau pré-determinada; e, por fim, o erro numérico é aquele proveniente de operações numéricas realizadas durante o procedimento de solução, como integração numérica e solução numérica de sistemas de equações.

A confiabilidade do método de elementos finitos depende de uma análise especial do erro obtido nas soluções do modelo matemático, fazendo uso de metodologias capazes de estimar o erro adequadamente (Gonsalvez, 2016).

De acordo com Zhu e Zienkiewicz (1988) o erro do MEF é definido como

$$e(x) = u(x) - u_h(x) \quad (2.20)$$

onde $u(x)$ é a solução exata e $u_h(x)$ é a solução aproximada do MEF.

Para obter uma medida global do erro deve ser utilizada uma norma, obtendo uma medida escalar do erro, para toda a malha. Logo, para o campo de

deslocamentos, tem-se a norma de máximo definida por:

$$\|\mathbf{e}\|_L = \text{Max}_{\Omega} |\mathbf{e}| \quad (2.21)$$

Segundo Pereira (1996), a norma energética é a mais importante num método adaptativo, e a mais utilizada na literatura. Assim, a mesma é definida no campo de tensões como

$$\|\mathbf{e}\|_E = \left(\int_{\Omega} \mathbf{e}_{\sigma}^T \mathbf{f} \mathbf{e}_{\sigma} d\Omega \right)^{1/2}, \quad (2.22)$$

onde \mathbf{e}_{σ} é o vector do erro do campo de tensões, \mathbf{f} é a matriz de flexibilidade infinitesimal e Ω é o domínio do problema.

O erro relativo percentual η pode traduzir a precisão pretendida na solução, ou seja, uma maneira de avaliar a qualidade global de uma solução aproximada. Logo, o erro relativo percentual na norma energética, segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), é dado por:

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|_E}{\|\mathbf{u}\|_E} 100\% \quad (2.23)$$

onde $\|\mathbf{u}\|_E$ é a norma da solução analítica ou uma função aproximadora da mesma.

2.4.1.1 Estimativas de Erro

As estimativas de erros de discretização são classificadas como *a priori* e *a posteriori*. *A priori* são estimativas de erro que podem ser obtidas antes de se ter a solução do problema e *a posteriori* quando o erro é avaliado a partir de informações obtidas de soluções aproximadas.

Estimadores de erro *a priori* são aqueles que não dependem de uma solução aproximada para o problema. Ou seja, são gerais e valem para um conjunto de problemas com características semelhantes. Através desse tipo de estimadores de erro é possível demonstrar, por exemplo, que o MEF converge para uma dada classe de problemas quando a malha é refinada. No entanto, embora esse tipo de estimativa de erro seja relevante do ponto de vista teórico, é de difícil aplicação na prática, tornando-a pouco utilizada (Aymone, 1996).

Estimadores de erro *a posteriori* são aqueles baseados em uma solução aproximada de um dado problema. Esse termo representa o fato de que estes estimadores podem ser utilizados apenas após obtermos uma solução aproximada para o problema.

Esse tipo de estimativa de erros abrange cálculos locais, e não globais, fazendo disso umas das suas principais características. Eles garantem uma precisão assintótica quando vinculados a algoritmos de refinamento adaptativos do tipo h , onde h é o tamanho dos elementos.

Para os estimadores de erro encontrados na literatura, que saem do escopo do que é desenvolvido nesse trabalho, é assumido uma representação exata da rigidez e o erro é estimado da interpolação de elementos finitos ou da aproximação do MEF. Nesse trabalho isto não se aplica. Devido ao elemento finito de viga, utilizado nesse trabalho, é assumido o contrário do que se vê na literatura sobre o assunto: o erro é proveniente apenas da representação não exata da rigidez ao longo do elemento finito. Assim, vale ressaltar que não foram encontradas referências da literatura utilizando essa abordagem para desenvolvimento de estimadores de erro.

2.4.2 Estratégias Adaptativas

Estratégias adaptativas são aquelas que envolvem um procedimento iterativo de refino da malha em função do erro da solução aproximada obtida com uma dada malha. Por este motivo, as estratégias de refino adaptativo dependem de estimadores *a posteriori* adequados.

2.4.2.1 Refinamento h

O refinamento h , de forma sucinta, se baseia no refinamento da malha de elementos finitos através da redução do tamanho dos elementos (com consequente aumento no número de elementos), o que implica na redução dos erros. Assim, o tamanho do elemento, denominado h , que é reduzido nesse refinamento.

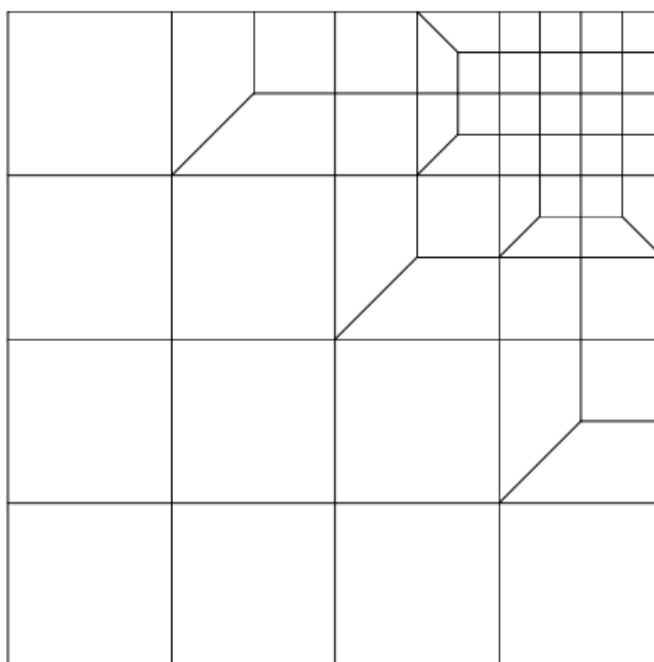
Conforme Aymone (1996), a implementação na malha se dá por um algoritmo que subdivide os elementos em torno de um nó, evitando nós irregulares, como mostrado na Figura 21. A subdivisão adotada é feita conforme o tipo de elemento. Logo, elementos planos, após refinados surgem elementos trapezoidais; elementos tridimensionais geram uma forma semelhante ao tronco de pirâmide. Isso de tal maneira que não gerem nós irregulares.

Caso a formulação do MEF adotada permita, durante o refino podem surgir nós irregulares, ou seja, que não estão contidos em todos os elementos que lhes são adjacentes. Esse tipo de subdivisão é apresentado na Figura 22.

O refinamento h pode ser realizado gerando uma nova malha completa no refinamento e ignorando a malha inicial. Outra forma é através de uma apropriada subdivisão dos elementos com erro superior ao admissível. E pode ser feito o refino h em busca de realocação dos nós da malha, mantendo inalterado as suas

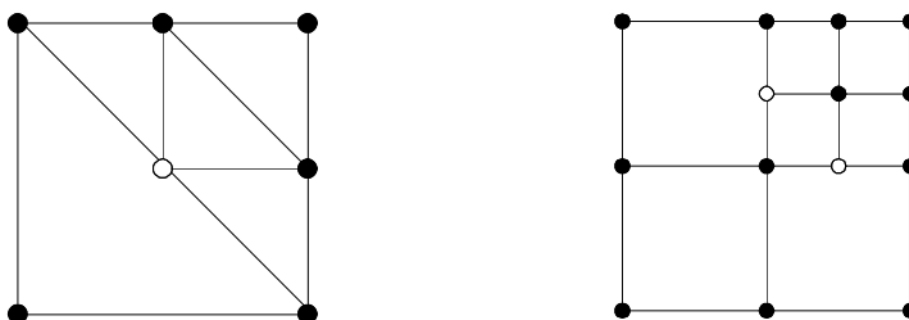
conectividades, mas alterando o tamanho dos elementos, que pode ser definido como refinamento r . Em todas essas formas descritas, o grau dos polinômios interpoladores permanece constante na discretização dos elementos de origem gerando elementos menores (Cook et al., 1989).

Figura 21 – Subdivisão usada para elementos quadriláteros.



Fonte – (Pereira, 1996)

Figura 22 – Refinamento h , gerando nós irregulares, representado em branco.



Fonte – (Pereira, 1996)

O refino do tipo h é muito importante pois é mais simples de ser realizado computacionalmente. Isso se deve ao fato de que neste caso a formulação básica dos elementos (grau da aproximação) permanece inalterada. Além disso, o refino do tipo h é necessário quando aumentar a ordem da aproximação não garante

convergência do MEF, como em problemas envolvendo soluções descontínuas ou singulares.

2.4.2.2 Refinamento p

Em síntese, o refinamento p da malha consiste em redução dos erros aumentando a ordem polinomial das funções de interpolação em cada elemento, mantendo-se o número e a topologia dos elementos. Logo, a malha inicial é mantida inalterada durante todo o processo de refino, até que um dado erro local seja alcançado.

Na maioria dos casos o refino do tipo p possui uma taxa de convergência mais acelerada e é capaz de obter soluções mais precisas (para um mesmo grau de liberdade) do que o refino do tipo h. Porém, o refino do tipo p é menos utilizado que o refino do tipo h por dois motivos principais. Primeiro, o refino do tipo p é mais complexo do ponto de vista computacional, pois envolve alteração na formulação dos elementos finitos. Isso torna o refino complexo principalmente em problemas bi e tri-dimensionais, onde elementos de graus diferentes podem ter bordas/faces em comum. Segundo, o refino polinomial do tipo p não garante convergência para problemas envolvendo soluções descontínuas ou singulares.

2.4.2.3 Refinamento hp

O refinamento hp é uma combinação do refino h e o refino p, ou seja, aumenta-se o número de elementos, aumentando o grau dos elementos da malha. Isso torna o método mais eficiente no controle de erro para um grande número de problemas.

Esse tipo de estratégia de refino pode ser realizado fazendo primeiro um refino h da malha, passando pelas singularidades do problema, caso tenha, e após inserindo o refino p da malha, de forma uniforme, até alcançar a precisão desejada. O refino combinado h e p também pode ser feito projetando os parâmetros simultaneamente das duas estratégias de refino da malha em cada iteração do problema, até obter a precisão adequada.

3 REFINO ADAPTATIVO DO TIPO H NA ANÁLISE NÃO LINEAR DE VI- GAS DE CONCRETO ARMADO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma estratégia de refino adaptativo do tipo h para vigas de concreto armado. Esta estratégia tem como base estimadores de erro *a posteriori* desenvolvidos para guiar o processo. Esse refino foi inserido no contexto da análise não linear de vigas de concreto armado, adotando um modelo de elementos finitos para realização da análise não linear.

Foi adotado o método de análise de Melo (2019) para a análise não linear de vigas de concreto armado. Como já descrito na subseção 2.3.2, esse método utiliza diagramas momento-curvatura da seção transversal da viga, calculados antes da análise estrutural, para consideração da não linearidade física através da variação de rigidez. O método secante é usado nesse modelo para solução das equações não lineares.

No entanto, esse trabalho não tem relação com desenvolvimento de modelo constitutivo ou modelo de análise, ou seja, não faz parte de nenhum objetivo validar qualquer modelo constitutivo dos materiais ou de análise não linear. Por este motivo são adotados modelos constitutivos comumente encontrados na literatura.

Inicialmente, foram usadas as rotinas obtidas por Melo (2019) que utilizam o método de obtenção de diagrama momento-curvatura (ver Melo (2021) para mais detalhes) e o modelo de análise não linear com método secante, para obtenção dos dados de momento e curvatura de seções transversais de vigas de concreto armado, bem como para realizar a análise não linear de vigas.

A partir dessas rotinas, implementadas no software MatLab, foi realizada uma complementação, através do desenvolvimento de novas rotinas computacionais. Estas geram o refinamento adaptativo da malha de elementos finitos de vigas de concreto armado, sujeitas à flexão e carregamento monotônico. Foi utilizada como estratégia adaptativa o refino do tipo h, através da divisão de elementos da malha por meio de estimadores de erro. Isto é, refino com base na avaliação do erro acumulado dentro do elemento, identificando os elementos que realmente precisam ser divididos, de acordo com um critério de tolerância adotado. Com a malha refinada obtém-se resultados precisos aliado à redução de custo computacional, ao evitar a divisão de

elementos desnecessários.

A elaboração e formulação dos estimadores de erro, aqui apresentados, não tem relação com o que geralmente é estudado na literatura em relação ao erro. Isso porque identificou-se que o erro do MEF no contexto de vigas de Euler-Bernoulli decorre principalmente do erro de aproximação da rigidez da viga. Ou seja, o erro depende muito pouco das funções de aproximação adotadas.

Deste modo, neste trabalho foi assumido que o erro é proveniente apenas da representação não exata da rigidez. Isso se deve ao fato do elemento utilizado, o elemento de viga unidimensional, apresentar a solução exata nos nós. Consequentemente, foi usada a rigidez exata nos nós e todo erro de representação da rigidez existente ocorreu dentro do elemento, logo, interessando o erro acumulado dentro dele. Vale salientar que o elemento finito apresenta a solução exata nos nós, caso a rigidez exata seja utilizada, desde que os carregamentos distribuídos sejam substituídos por carregamentos concentrados mecanicamente equivalentes (Cook et al., 1989),

Portanto, seguindo o método de Melo (2019), usou-se uma aproximação linear para representação da rigidez ao longo do elemento, que foi definido pela Equação 3.1, já ilustrada na subseção 2.3.2 e repetida abaixo por conveniência.

$$EI(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right) EI_{sec,1} + \left(\frac{z}{L}\right) EI_{sec,2}, \quad (3.1)$$

onde z é o eixo do elemento, $EI_{sec,1}$ é a rigidez secante no nó 1 do elemento, $EI_{sec,2}$ é a rigidez secante no nó 2.

De forma geral, a rigidez exata na viga pode variar de maneira não linear. Logo, pode existir uma diferença entre a rigidez exata e a rigidez aproximada ao longo do elemento, que é justamente o erro da aproximação de representação da rigidez, definido inicialmente aqui como e . Isso pode ser melhor visualizado através da Figura 23.

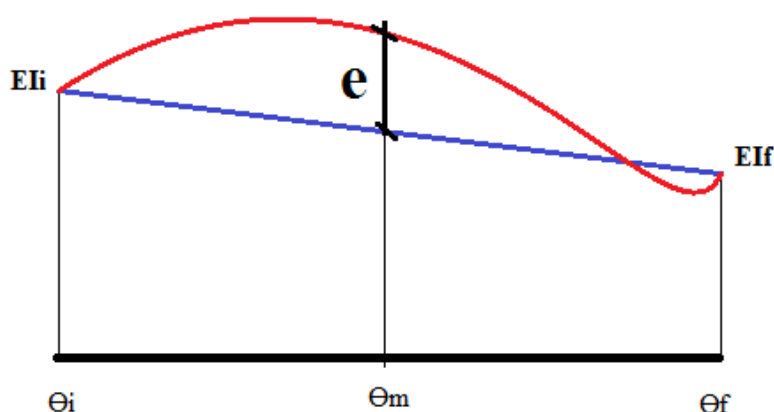
A Figura 23 ilustra o elemento de viga unidimensional, com as curvas de representação da rigidez exata, em vermelho, e por aproximação linear, a reta em azul. Os nós do elemento possuem valores exatos de rigidez secante, que foi definido como rigidez secante no nó 1, ou nó inicial i , denotado como $EI_{sec,1}$, e rigidez secante no nó 2, ou nó final f , denotado como $EI_{sec,2}$.

Como o método de Melo (2019), adotado neste trabalho, usa o método da rigidez secante utilizando a curva momento-curvatura, esses valores de rigidez secante nos nós são oriundos da relação já descrita na subseção 2.3.2, e que é apresentada novamente na Equação 3.2

$$EI_{sec} = \frac{M(\kappa)}{\kappa}, \quad (3.2)$$

onde $M(\kappa)$ é uma função não linear, que pode ser descrita por um diagrama momento-curvatura que relaciona as curvaturas de uma seção transversal com seus respectivos momentos fletores. EI_{sec} é a rigidez à flexão secante e κ é a curvatura nos nós do elemento. O momento é obtido do diagrama momento-curvatura ao entrar com o valor da curvatura no nó inicial e final do elemento finito de viga. O valor de curvatura vem da solução da Equação 2.11 e a Equação 2.12, descritas na subseção 2.3.2.

Figura 23 – Representação da rigidez exata (curva em vermelho) e da rigidez aproximada (reta em azul) no elemento finito de viga.



Fonte – (Autor)

Com base no erro de representação da rigidez ao longo do elemento, foram desenvolvidos estimadores de erro para realização do refino adaptativo da viga. Foi elaborado, primeiramente, um estimador de erro heurístico (intuitivo), como um critério inicial de refino. Posteriormente foram elaborados estimadores de erro com embasamento matemático. Esses estimadores são apresentados nas seções a seguir.

3.1 CRITÉRIO DE REFINAMENTO ADAPTATIVO COM ESTIMADOR DE ERRO HEURÍSTICO

Partindo desses conceitos descritos, inicialmente foi desenvolvido um estimador de erro heurístico para comandar o refino adaptativo da malha, baseado no erro de representação da rigidez e usando um parâmetro de caracterização da mesma no meio do elemento, como mostrado na Figura 23.

Considere a rigidez

$$EI_{hm} = \frac{EI_{sec,1} + EI_{sec,2}}{2}. \quad (3.3)$$

que é a média entre a rigidez secante dos nós inicial e final. Ou seja, EI_{hm} é a rigidez secante aproximada média, obtida da aproximação linear no meio do elemento.

O erro de representação da rigidez secante é dado por

$$e = |EI_m - EI_{hm}|. \quad (3.4)$$

onde EI_m é a rigidez secante média exata, calculada com a curvatura κ_m no meio do elemento. Note que o erro acima é na realidade a diferença entre a rigidez exata no meio do elemento e a rigidez aproximada média (decorrente de uma aproximação linear no meio do elemento).

O erro de rigidez da Equação 3.4 pode ser escrito na forma relativa, resultando em

$$\Delta e_{EI} = \left| \frac{EI_m - EI_{hm}}{EI_{hm}} \right|. \quad (3.5)$$

ou ainda

$$\Delta e_{EI} = \left| \frac{EI_m}{EI_{hm}} - 1 \right|. \quad (3.6)$$

Analisando o estimador da Equação 3.6, pode-se concluir que ele é influenciado somente pelo erro de representação da rigidez secante, obtido nesse caso no meio do elemento. O erro de rigidez pode ser medido em qualquer posição dentro do elemento, porém, como o mesmo é nulo no nós, optou-se por mensurá-lo no meio do elemento, por considerar-se que esta posição é mais representativa para efeitos de avaliação do erro.

Assim, o critério inicial de refinamento adaptativo usando esse estimador indica os elementos que necessitam de refino dentro da malha. Logo, os elementos são refinados se for satisfeita a seguinte comparação

$$\Delta e_{EI} \geq \Delta e_{EI,max}. \quad (3.7)$$

Desse modo, a depender da qualidade de representação da rigidez secante no meio do elemento, maior ou menor pode ser o erro de sua aproximação. Então, foi usado inicialmente esse estimador de erro para guiar o refino adaptativo.

Porém, mais tarde, realizou-se a formulação matemática de estimadores de erro, baseado na ideia inicial do erro de representação da rigidez ao longo do elemento, descritos na seção 3.2.

Como a representação da rigidez é considerada aqui a fonte dos erros de aproximação, o refino adaptativo refina elementos nas regiões onde o erro de rigidez foi superior ao valor admissível. Nas regiões onde a rigidez possuir variação quase linear o erro de rigidez será pequeno e, conseqüentemente, não haverá necessidade de refino da malha.

Portanto, para cumprir a proposta de diferentes critérios de refinamento adaptativo da malha foi realizada a formulação matemática de estimadores de erro, que segue apresentada abaixo.

3.2 FORMULAÇÃO DOS ESTIMADORES DE ERRO

Partindo da equação da linha elástica, conforme Hibbeler (2010), tem-se

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI(x)}, \quad (3.8)$$

sendo v os deslocamentos transversais, x o eixo da viga, $M(x)$ o momento aplicado e $EI(x)$ a rigidez à flexão.

Considerando uma rigidez aproximada, denominada por $EI_h(x)$, temos a relação

$$\frac{d^2v_h}{dx^2} = \frac{M_h(x)}{EI_h(x)}, \quad (3.9)$$

onde $M_h(x)$ é o momento obtido com a rigidez aproximada e v_h é o deslocamento transversal aproximado.

Dado ao fato de se obter um deslocamento aproximado, por meio da rigidez aproximada $EI_h(x)$, o erro de deslocamento existente resulta

$$e(x) = v_h(x) - v(x), \quad (3.10)$$

onde $e(x)$ é o erro de deslocamento.

Para definir um critério de refino adaptativo é necessário estimar de maneira apropriada o erro da Equação 3.10. Na seção seguinte é apresentada a de-

monstração da obtenção do erro de deslocamento através do erro de curvatura. Este último é demonstrado na subseção 3.2.2.

3.2.1 Erro de deslocamento

Avaliando ainda a Equação 3.8, pôde-se denotar a curvatura κ pela derivada segunda do deslocamento. Segundo Hibbeler (2010), a curvatura κ é definida como

$$\kappa(x) = \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (3.11)$$

De modo análogo à obtenção do deslocamento transversal aproximado, a curvatura aproximada resulta

$$\kappa_h(x) = \frac{d^2v_h}{dx^2}. \quad (3.12)$$

Subtraindo a Eq. (3.12) da Eq. (3.11), obtém-se

$$\frac{d^2v_h}{dx^2} - \frac{d^2v}{dx^2} = \kappa_h(x) - \kappa(x). \quad (3.13)$$

Integrando duas vezes ao longo do comprimento da viga obtém-se

$$\int_0^L \int_0^L \left(\frac{d^2v_h}{dx^2} - \frac{d^2v}{dx^2} \right) dx dx = \int_0^L \int_0^L (\kappa_h(x) - \kappa(x)) dx dx. \quad (3.14)$$

A diferença entre a curvatura aproximada e a curvatura exata é o erro de curvatura

$$e_\kappa(x) = \kappa_h(x) - \kappa(x), \quad (3.15)$$

onde $\kappa_h(x)$ é a curvatura obtida com o deslocamento aproximado v_h e $\kappa(x)$ é a curvatura obtida com o deslocamento exato v .

Substituindo a Eq. (3.15) na Eq. (3.14),temos

$$\int_0^L \int_0^L \left(\frac{d^2v_h}{dx^2} - \frac{d^2v}{dx^2} \right) dx dx = \int_0^L \int_0^L e_\kappa(x) dx dx, \quad (3.16)$$

$$\int_0^L \int_0^L \frac{d^2v_h}{dx^2} dx dx - \int_0^L \int_0^L \frac{d^2v}{dx^2} dx dx = \int_0^L \int_0^L e_\kappa(x) dx dx, \quad (3.17)$$

$$v_h(L) - v_h(0) - v(L) + v(0) = \int_0^L \int_0^L e_\kappa(x) dx dx. \quad (3.18)$$

Da substituição da definição de erro de deslocamento, Eq. (3.10), na equação acima chega-se em

$$e(L) - e(0) = \int_0^L \int_0^L e_\kappa dx dx. \quad (3.19)$$

Onde o incremento de erro na viga é definido por

$$\Delta e = e(L) - e(0), \quad (3.20)$$

e substituindo a definição acima do incremento Δe na Eq. (3.19), resulta

$$\Delta e = \int_0^L \int_0^L e_\kappa(x) dx dx. \quad (3.21)$$

Com a equação acima é possível notar que o incremento de erro de deslocamento acumulado dentro do elemento de viga pode ser avaliado integrando-se duas vezes o erro de curvatura. Este é o erro efetivamente gerado dentro do elemento de viga, descontando-se os erros provenientes dos elementos vizinhos. Além disso, esta expressão é de certa maneira intuitiva, uma vez que o deslocamento pode ser obtido integrando-se a curvatura duas vezes.

Porém, para finalidades computacionais, é interessante obter um estimador de erro que evite o processo de integração. Assim, da Eq. (3.21), tomou-se o valor máximo em módulo do erro de curvatura dentro do elemento de viga, de onde resulta a inequação

$$|\Delta e| \leq \int_0^L \int_0^L \max_{x \in [0, L]} |e_\kappa(x)| dx dx. \quad (3.22)$$

Considerando o valor máximo do erro dentro do elemento podemos escrever ainda

$$|\Delta e| \leq \max_{x \in [0, L]} |e_\kappa(x)| \int_0^L \int_0^L dx dx, \quad (3.23)$$

e, finalmente,

$$|\Delta e| \leq L^2 \max_{x \in [0, L]} |e_\kappa(x)|. \quad (3.24)$$

Este resultado demonstra que o erro de deslocamento gerado dentro do elemento pode ser estimado a partir do erro máximo de curvatura e do comprimento do elemento. Este estimador de erro é de simples utilização, mas requer a avaliação do erro de curvatura, analisado na próxima seção.

3.2.2 Erro de curvatura

Aqui adotou-se a hipótese de que o momento fletor $M_h(x)$, obtido com a rigidez aproximada, é igual ao momento fletor obtido com a rigidez exata, $M(x)$, ou seja

$$M_h(x) = M(x). \quad (3.25)$$

Esta hipótese claramente é inválida no caso geral. Porém, será precisa para um procedimento de refino adaptativo da malha que garanta a convergência do momento fletor aproximado, i.e., que garanta $M_h(x) \rightarrow M(x)$ à medida que a malha é refinada. Como o objetivo aqui é obter um estimador de erro, que obviamente não será exato, esta aproximação não terá impacto significativo. Esta hipótese é discutida em maiores detalhes ao final desta seção.

Adotando a hipótese da Eq. (3.25) e substituindo-a na Eq. (3.9), chega-se em

$$\frac{d^2 v_h}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_h(x)}. \quad (3.26)$$

As Eq. (3.8) e (3.26) podem ser escritas em função da curvatura como

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI(x)}, \quad (3.27)$$

e

$$\kappa_h(x) = \frac{M(x)}{EI_h(x)}. \quad (3.28)$$

Multiplicando o lado direito da Eq. (3.27) por $EI_h(x)/EI(x)$, sem alterar o resultado, obtém-se

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI_h(x)} \frac{EI_h(x)}{EI(x)}. \quad (3.29)$$

Substituindo a Eq. (3.28) na equação acima, temos

$$\kappa(x) = \kappa_h(x) \frac{EI_h(x)}{EI(x)}. \quad (3.30)$$

Substituindo a Eq. (3.30) na Eq. (3.15), tem-se

$$e_\kappa(x) = \kappa_h(x) - \kappa_h(x) \frac{EI_h(x)}{EI(x)}, \quad (3.31)$$

e, portanto,

$$e_\kappa(x) = \kappa_h(x) \left(1 - \frac{EI_h(x)}{EI(x)} \right). \quad (3.32)$$

Multiplicando por $EI(x)/EI(x)$, tem-se então o erro de curvatura dado por

$$e_\kappa(x) = -\frac{\kappa_h(x)}{EI(x)} (EI_h(x) - EI(x)). \quad (3.33)$$

Esta equação mostra que o erro de curvatura ocasionado pela rigidez aproximada é função do erro de rigidez ($EI_h(x) - EI(x)$) e da relação entre a curvatura aproximada e a rigidez exata. Esta expressão pode ser facilmente avaliada computacionalmente, pois envolve apenas os valores de rigidez aproximados e exatos e a curvatura aproximada, obtidos na análise estrutural.

Voltando agora para a hipótese da Eq. (3.25), segundo a qual as expressões acima foram obtidas. De fato, esta hipótese só é válida em estruturas isostáticas. Por este motivo, as expressões acima são apenas estimativas de erro e não correspondem ao erro exato no caso geral.

Porém, quando $M_h(x) \rightarrow M(x)$, ou seja, quando o refino da malha ocasionar a convergência do momento fletor, as expressões acima são uma boa estimativa para o erro de curvatura. Além disso, quando a malha empregada garantir uma boa aproximação do momento fletor, mesmo sem o uso do refino adaptativo, há precisão para o uso das expressões obtidas.

Então, adotou-se a suposição de que o refino da malha garante a convergência da representação do campo de rigidez, ou seja,

$$EI_h(x) \rightarrow EI(x), \quad (3.34)$$

das Eq. (3.8) e (3.9) tem-se então

$$M_h(x) \rightarrow M(x), \quad (3.35)$$

$$v_h(x) \rightarrow v(x). \quad (3.36)$$

Esses resultados mostram que a convergência da aproximação da rigidez garantirá a convergência do momento fletor. Logo, a hipótese $M_h(x) = M(x)$ é precisa à medida que a representação da rigidez é melhorada pelo refino adaptativo. Portanto, quanto melhor o refino empregado na malha, melhor a representação da rigidez e, conseqüentemente, o momento fletor obtido com a rigidez aproximada se torna mais preciso.

Neste contexto, os estimadores de erro mostrados acima são assintóticos, ou seja, não são exatos mas convergem para o valor real quando a representação da rigidez da viga é melhorada. Desta maneira, podem ser utilizados no contexto do refino adaptativo.

3.2.3 Estimadores de erros relativos e refino adaptativo

Os critérios de refino adaptativo geralmente são definidos em termos de estimadores de erros relativos e um dado valor máximo especificado é normalmente utilizado como critério de parada para o processo de análise ou estratégia de refino adaptativo. Assim, o erro relativo de curvatura $\mathcal{E}_\kappa(x)$ pode ser definido como¹

$$\mathcal{E}_\kappa(x) = \frac{\kappa_h(x) - \kappa(x)}{\kappa(x)}, \quad (3.37)$$

Substituindo a Eq.(3.27) e a Eq.(3.28) na equação acima, e realizando as manipulações algébricas, obtém-se o estimador de erro relativo de curvatura

$$\mathcal{E}_\kappa(x) = \frac{EI(x)}{EI_h(x)} - 1. \quad (3.38)$$

Note que o erro relativo de curvatura depende apenas da relação entre a rigidez exata e a rigidez aproximada, isto é, o erro relativo de curvatura é afetado apenas pelo erro de representação de rigidez. É possível notar também que esse estimador, deduzido matematicamente, é equivalente ao estimador de erro relativo heurístico, descrito na seção 3.1, onde é dependente da mesma relação entre a rigidez exata e a rigidez aproximada, mas, tomadas com referência na metade do elemento finito (Eq.(3.6)).

¹ Neste trabalho o símbolo e é utilizado para representar o erro absoluto, enquanto o símbolo \mathcal{E} é utilizado para representar o erro relativo.

Já o erro relativo de deslocamento dentro de um elemento pode ser definido como

$$\mathcal{E}(x) = \frac{\Delta e}{\Delta v}, \quad (3.39)$$

onde Δe é o incremento de erro de deslocamento e Δv é a variação de deslocamento entre os nós do elemento e dado por

$$\Delta v = v(L) - v(0). \quad (3.40)$$

Note que foi usado o incremento de deslocamento Δv , pois Δe foi definido como o incremento de erro na Eq. (3.21).

Substituindo a Eq. (3.24) na Eq.(3.39), resulta

$$|\mathcal{E}(x)| \leq \frac{L^2}{|\Delta v|} \max_{x \in [0, L]} |e_\kappa(x)|. \quad (3.41)$$

Assim, o estimador de erro relativo de deslocamento, usado nas análises adaptativas, é definido como

$$|\mathcal{E}(x)| \approx \frac{L^2}{|\Delta v|} \max_{x \in [0, L]} |e_\kappa(x)|. \quad (3.42)$$

Na prática não é possível determinar o erro máximo de curvatura $e_\kappa(x)$ dentro de um dado elemento, pois seria necessário avaliar o erro ao longo de todo elemento. Por este motivo, computacionalmente o valor máximo do erro de curvatura em cada elemento foi substituído pelo erro de curvatura avaliado no meio do elemento.

3.3 ESTRATÉGIA DE REFINO ADAPTATIVO

A estratégia de refino adaptativo empregada nesse trabalho é o refino tipo H, onde os elementos são divididos para se aumentar a precisão dos resultados. A estratégia consiste em encontrar os elementos que devem ser refinados, estimando o erro dentro do elemento e comparando com um valor pré-definido de variação máxima de erro. Ou seja, busca-se aumentar o número de elementos automaticamente, nas regiões de erro elevado, melhorando a solução do problema.

Essa estratégia foi implementada computacionalmente através da rotina denominada "posteriori". Nela, os elementos a serem refinados são separados dentro de um vetor, denominado "divide", por meio da comparação entre o estimador de erro utilizado com a variação máxima de erro pré-estabelecida para cada elemento

da malha. Ou seja, se o valor do estimador de erro superar a variação máxima de erro, o elemento é refinado.

Como o erro foi considerado proveniente apenas da representação da rigidez secante ao longo do elemento, o mesmo é refinado quando o erro relativo (de curvatura ou de deslocamento) for maior do que um limite especificado.

Assim, caso seja adotado como estimador o erro relativo de curvatura, o elemento será refinado quando

$$|\mathcal{E}_\kappa(x)| > \alpha, \quad (3.43)$$

onde α é uma tolerância pré-definida. Logo, quanto maior o valor de α menos refinada a malha tende a ser.

Caso seja adotado como estimador o erro relativo de deslocamento, o elemento será refinado quando

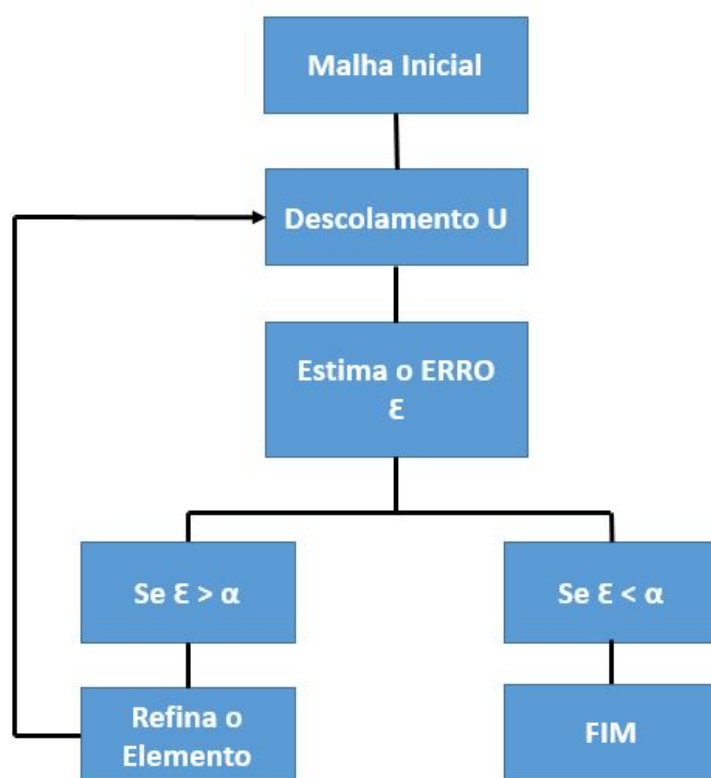
$$|\mathcal{E}(x)| > \alpha, \quad (3.44)$$

onde $|\mathcal{E}(x)|$ é avaliado com o estimador da Eq. (3.42).

A Figura 24 apresenta o fluxograma do procedimento de refino adaptativo que ocorre na malha de elementos finitos adotada inicialmente na análise. Este processo é feito passando por todos os elementos da malha até encerrar (se o erro for inferior à tolerância) ou gerando uma nova malha com os novos elementos inseridos (se o erro for superior à tolerância).

Portanto, o critério de refino adaptativo se dá em encontrar os elementos ao longo da malha inicial onde o erro relativo, seja de curvatura ou de deslocamento, ultrapassa o limite máximo pré-definido de variação de rigidez. Quando isto ocorre o elemento é dividido ao meio. Caso contrário o elemento permanece inalterado. Uma nova análise é realizada e o procedimento de refino da malha é refeito. O procedimento é repetido iterativamente até que o erro estimado em todos os elementos seja inferior ao critério de tolerância α .

Figura 24 – Fluxograma do procedimento de refino adaptativo.



Fonte – (Autor)

4 EXEMPLOS PROPOSTOS

Neste capítulo são apresentados os dados e parâmetros adotados de alguns exemplos experimentais da literatura de vigas de concreto armado, para validação das rotinas desenvolvidas neste trabalho.

O exemplo 1 descreve uma viga teórica, viga V1, simplesmente apoiada, do estudo de Stramondinoli (2007) submetida a dois tipos de carregamento, sendo o tipo 1 com flexão a três pontos e o tipo 2 com flexão a quatro pontos. O exemplo 2 corresponde a uma viga simplesmente apoiada com flexão a três pontos, ensaiada no trabalho de Burn e Siess (1962).

Nas seções a seguir são descritas as propriedades do aço e concreto, a seção transversal com a área de aço, as características geométricas e as leis constitutivas adotadas para cada exemplo, os parâmetros de integração da seção transversal e o número de incrementos de rotação ou curvatura.

Esses dados foram inseridos em rotinas computacionais baseadas no trabalho de Melo et al. (2021), gerando como saída o diagrama tensão-deformação do concreto e do aço, a amostra de pontos usada da seção transversal e o diagrama momento-curvatura resultante para cada exemplo de seção transversal de viga, que seguem apresentados nas seções abaixo.

Primeiramente, foi realizada a análise não linear nas vigas dos exemplos sem implementação do refino adaptativo. Para isso, foram adotadas malhas uniformes, que foram obtidas refinando-se a viga até atingir convergência dos resultados. As malhas iniciais adotadas para o refino adaptativo correspondem à menor discretização uniforme capaz de garantir convergência do processo adaptativo. O número e tamanho das malhas adotadas para cada exemplo são também descritos a seguir.

4.1 EXEMPLO 1

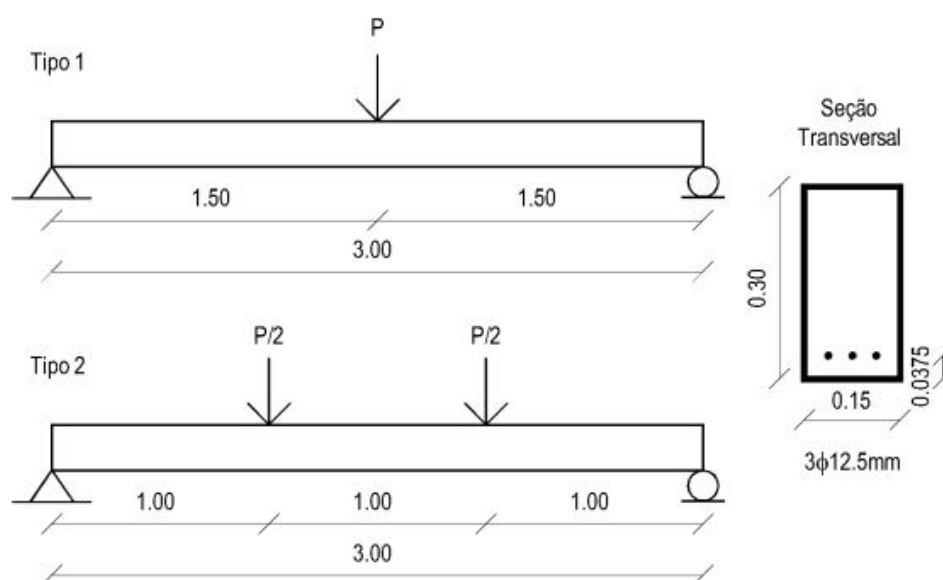
As propriedades dos materiais são vistas na Tabela 1 e as características geométricas, tipo de carregamento e seção transversal da viga V1 do estudo de Stramondinoli (2007) são mostradas na Figura 25.

Tabela 1 – Propriedade dos materiais da viga V1.

$f_{cm}(MPa)$	$f_{tm}(MPa)$	ε_0	α	$f_y(MPa)$	$E_s(MPa)$	ε_u	S_h
20	2	0,002	0,088	500	200000	0,03	0,05

onde f_{cm} é a resistência à compressão do concreto; f_{tm} é a resistência à tração do concreto; f_y é a tensão de escoamento do aço; E_s é o módulo de elasticidade do aço; ε_0 é a deformação na tensão máxima f_{cm} ; α é o parâmetro de *tension-stiffening*; ε_u é a deformação última; S_h é o fator de encruamento do aço “*strain hardening*”.

Figura 25 – Dimensões (em metros) e seção transversal da viga V1.



Fonte – (Melo, 2019)

Foram adotadas as mesmas leis constitutivas utilizadas por Stramondinoli (2007), onde o modelo constitutivo do concreto e do aço e os parâmetros adotados para implementação do exemplo seguem descritos nas seções abaixo.

4.1.1 Concreto

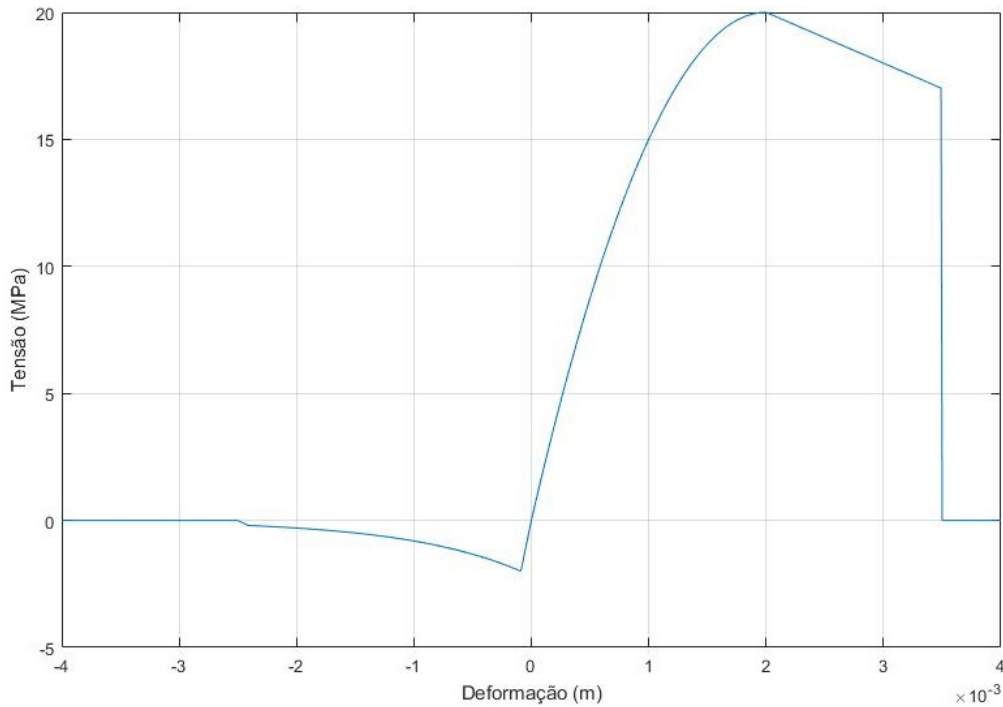
O modelo constitutivo adotado para o concreto na tração foi o modelo trilinear, considerando o efeito *tension-stiffening* desenvolvido em Stramondinoli e La Rovere (2008), que foi comentado na subseção 2.2.1.2. Para o concreto na compressão uniaxial foi adotado o modelo de Hognestad (1951), onde as equações que regem a formação do diagrama tensão-deformação para esse modelo são as seguintes:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \text{ para } \varepsilon_c < \varepsilon_0 \quad (4.1)$$

$$\sigma_c = f_{cm} \left[1 - 0.15 \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right] \text{ para } \varepsilon_0 < \varepsilon_c < \varepsilon_u \quad (4.2)$$

A relação tensão-deformação do concreto é mostrada na Figura 26.

Figura 26 – Diagrama Tensão-Deformação do concreto da viga V1.



Fonte – (Autor)

4.1.2 Aço

Para o aço, a lei constitutiva usada, mesma de Stramondinolli (2007), foi a do modelo bilinear com encruamento e curva parabólica, como visto no diagrama da Figura 27. O modelo é descrito pelas equações seguintes:

Para $\varepsilon_s < 0.8\varepsilon_y$

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s. \quad (4.3)$$

Para $0.8\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq 1.2\varepsilon_y$

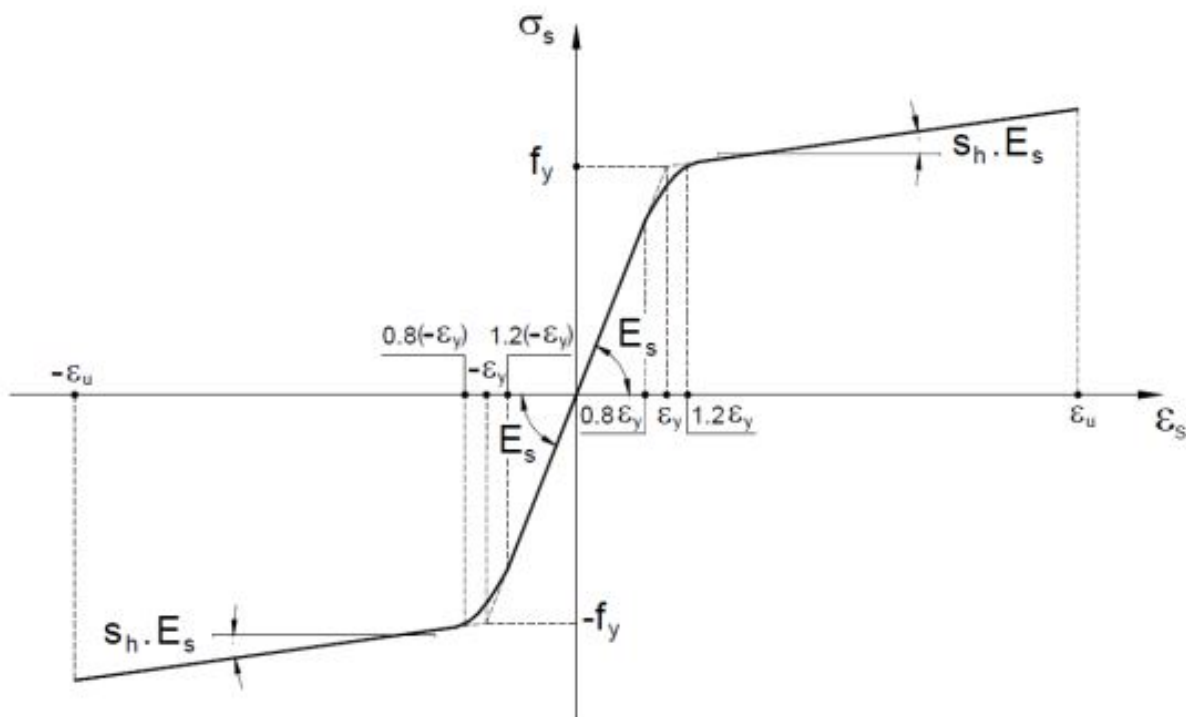
$$\sigma_s = E_s \left[(S_h - 1) \varepsilon_s \frac{\varepsilon_s}{0.8\varepsilon_y} + (3 - 2S_h) \varepsilon_s - 0.8\varepsilon_y (1 - S_h) \right]. \quad (4.4)$$

Para $\varepsilon_s > 1.2\varepsilon_y$

$$\sigma_s = f_y + S_h E_s (\varepsilon_s - \varepsilon_y). \quad (4.5)$$

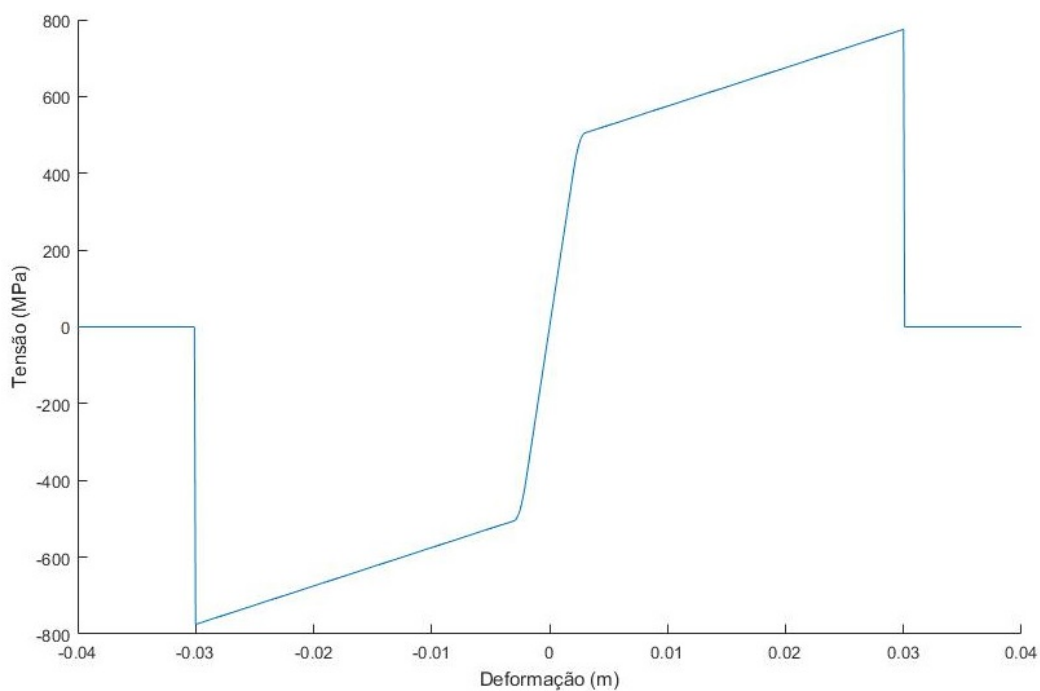
Logo, o diagrama tensão-deformação do aço obtido para o exemplo é mostrado na Figura 28.

Figura 27 – Diagrama Tensão-Deformação do modelo bilinear com encruamento.



Fonte – (Stramondinoli,2007)

Figura 28 – Diagrama Tensão-Deformação para o aço da viga V1.

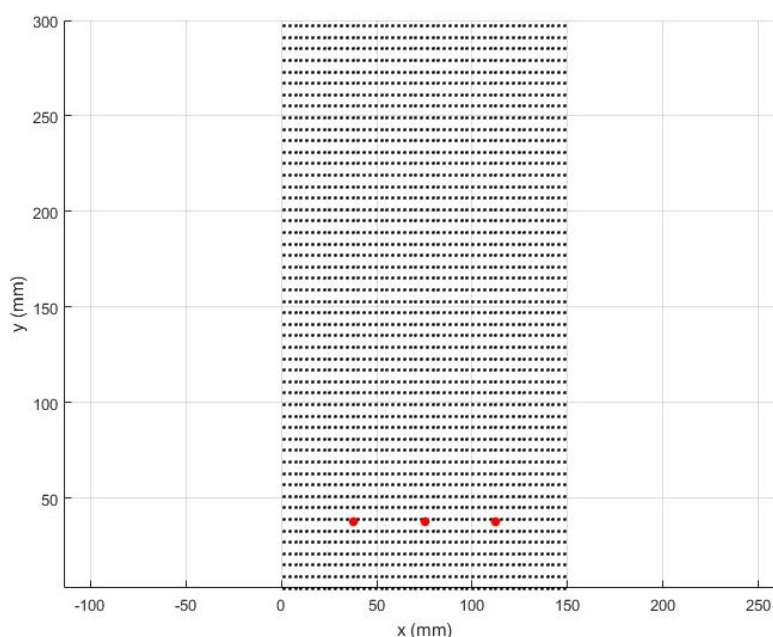


Fonte – (Autor)

4.1.3 Parâmetros

Foi adotada uma malha de 50 por 50 pontos para integração da seção transversal e 500 incrementos de rotação, representada na Figura 29. Esses parâmetros, juntamente com os dados iniciais do problema, foram usados nas rotinas para obtenção do diagrama momento-curvatura, conforme Melo et al. (2021). O diagrama momento-curvatura da seção é mostrado na Figura 30.

Figura 29 – Amostra de pontos da seção transversal da viga v1.



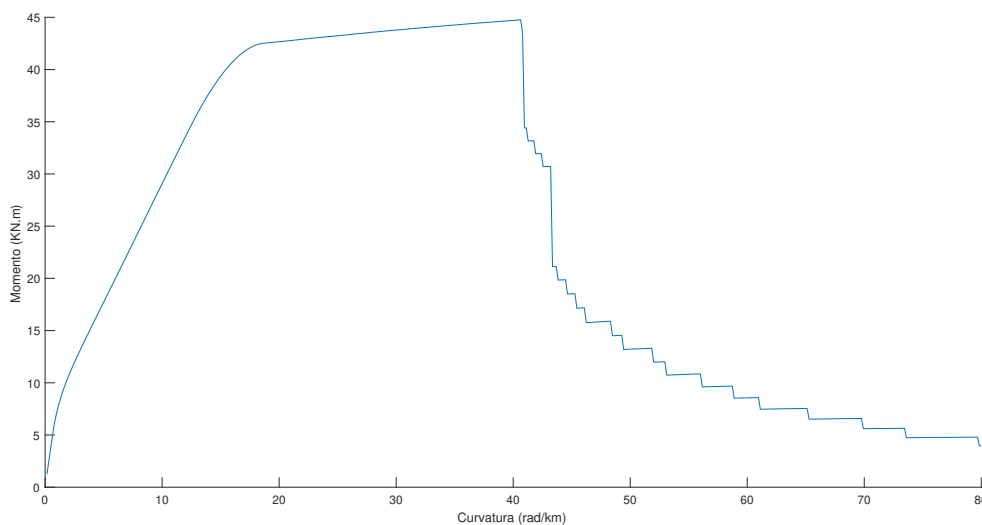
Fonte – (Autor)

Para a análise sem refino adaptativo da malha foi primeiramente realizada a análise da viga com malhas uniformes, aumentando o número de elementos até sua convergência. Então, partiu-se de uma malha inicial com apenas 2 elementos até a malha de 200 elementos, onde houve convergência e obteve-se a carga de ruptura e deslocamento vertical total da viga. Isso foi feito para mais tarde comparar a eficiência computacional, em relação ao número de elementos da malha, ao se comparar a análise com malha uniforme refinada manualmente e a análise com implementação de refinamento adaptativo.

Para o tipo 1 de carregamento foi adotada uma malha inicial de 2 elementos (na análise sem e com refino), em seguida 10 elementos, 50, 100 até a malha final de 200 elementos.

Para o tipo 2 de carregamento foi adotada uma malha inicial de 4 elementos (na análise sem e com refino), 6, 12, 24 e 36 elementos.

Figura 30 – Diagrama Momento-Curvatura da viga v1.



Fonte – (Autor)

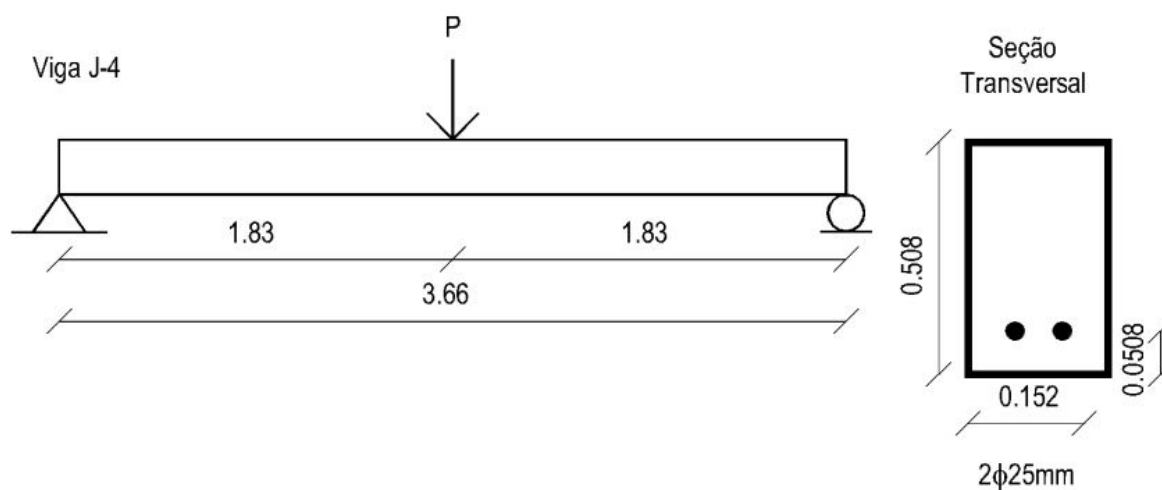
4.2 EXEMPLO 2

A Tabela 2 indica as propriedades dos materiais e as características geométricas e seção transversal da viga J4 estão representadas pela Figura 31.

Tabela 2 – Propriedade dos materiais da viga J4.

f_{cm} (MPa)	ε_0	f_y (MPa)	E_s (MPa)	ε_u
33,23	0,002	309,6	203000	0,1

Figura 31 – Dimensões e seção transversal da viga J-4.



Fonte – (Melo, 2019)

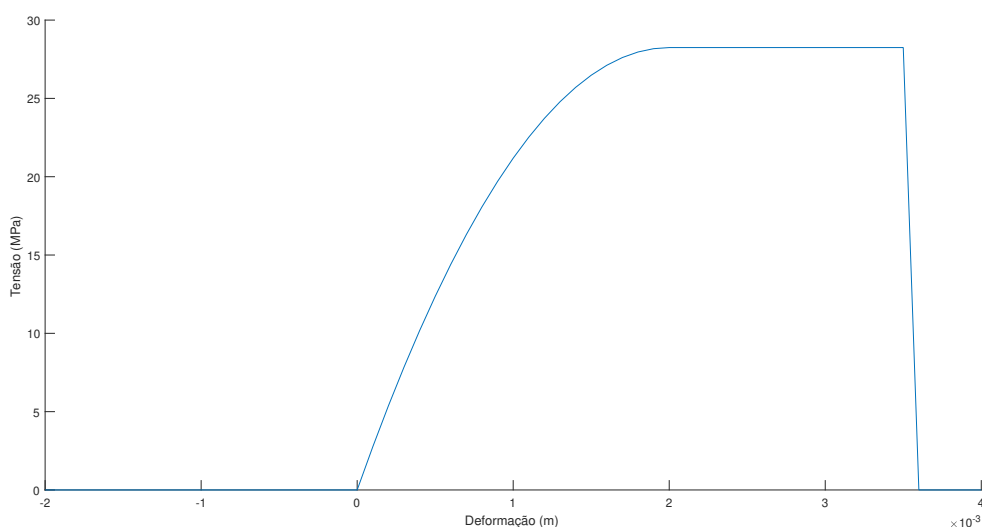
Nesse exemplo foram adotadas leis constitutivas para representar o comportamento dos materiais baseada na NBR 6118:2014, onde o modelo constitutivo utilizado para o concreto e o aço são descritos a seguir.

4.2.1 Concreto

O concreto sob compressão uniaxial foi representado pelo modelo da NBR 6118:2014 que usa o diagrama tensão-deformação parábola-retângulo para caracterização do comportamento do concreto. O diagrama e as expressões que o descrevem foram mostrados na subseção 2.2.1.2.

Foi desconsiderado o concreto na tração uniaxial para esse exemplo, adotando somente o concreto na compressão uniaxial. Logo, o diagrama tensão-deformação do concreto obtido para a viga J4 é mostrado na Figura 32.

Figura 32 – Diagrama Tensão-Deformação para o concreto da viga J4.



Fonte – (Autor)

4.2.2 Aço

Para o aço, tanto na tração como na compressão, foi usado o modelo elasto-plástico perfeito, recomendado pela NBR 6118:2014 (ver seção 2.2.2). As leis que formam esse diagrama são as seguintes

Para $\varepsilon_s < \varepsilon_y$

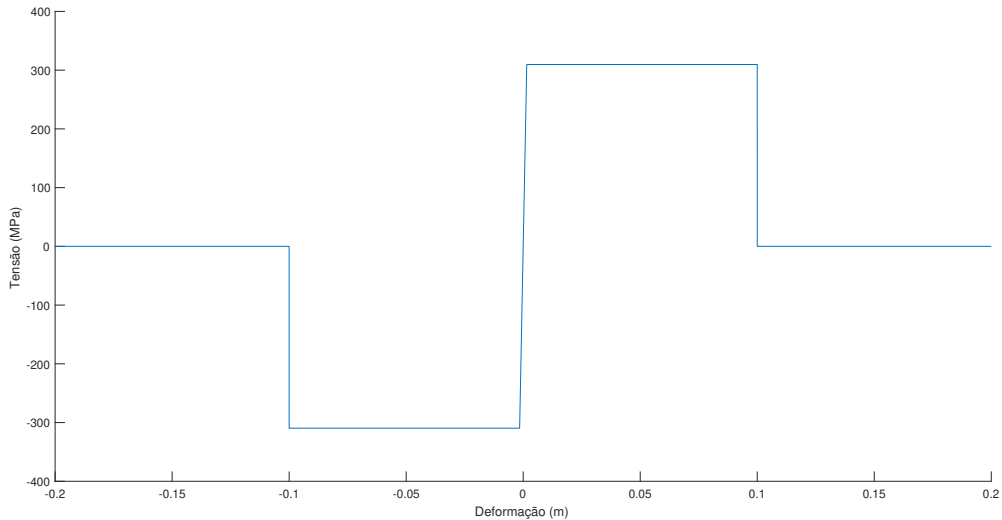
$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s. \quad (4.6)$$

Para $\varepsilon_s > \varepsilon_y$

$$\sigma_s = f_y. \quad (4.7)$$

Logo, o diagrama tensão-deformação do aço obtido para o exemplo é mostrado na Figura 33.

Figura 33 – Diagrama Tensão-Deformação para o aço da viga J4.



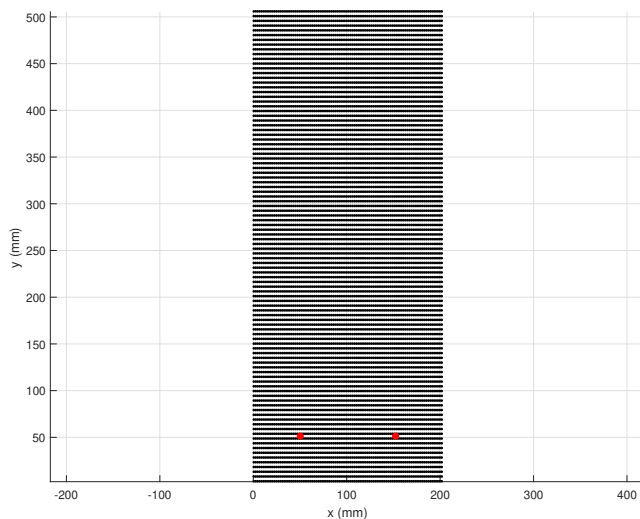
Fonte – (Autor)

4.2.3 Parâmetros

Para esse exemplo foi adotada uma malha de 100 por 100 pontos para integração da seção transversal e 500 incrementos de rotação, representada na Figura 34. Com isso e os dados iniciais, foi possível obter o diagrama momento-curvatura, conforme Melo et al. (2021), apresentado na Figura 35.

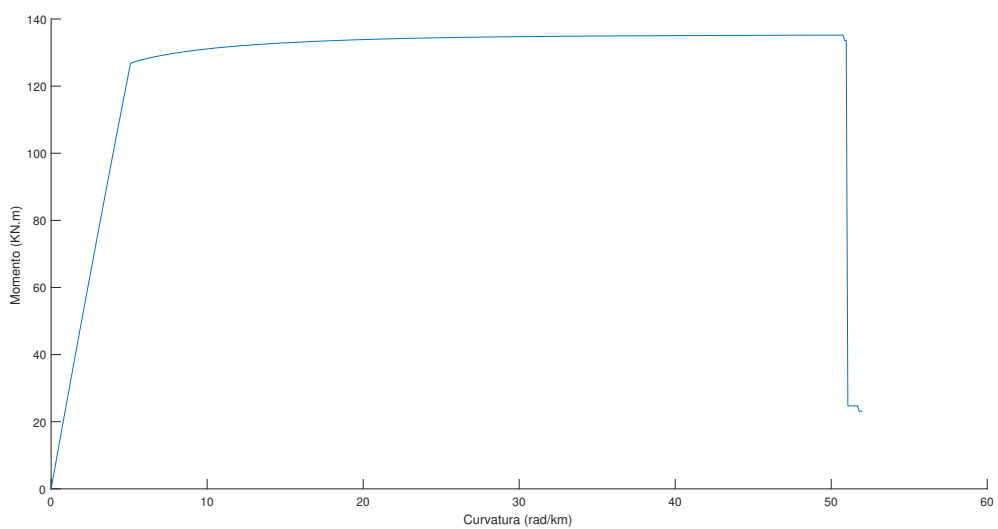
Para a análise sem refino adaptativo da malha foi realizada a análise da viga com malhas uniformes, aumentando o número de elementos até sua convergência. Partiu-se de uma malha inicial com apenas 2 elementos, em seguida 10, 50, 100, 200, 300 e 400 elementos.

Figura 34 – Amostra de pontos da seção transversal da viga J4.



Fonte – (Autor)

Figura 35 – Diagrama Momento-Curvatura da viga J4.



Fonte – (Autor)

5 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos da análise não linear, com método secante, utilizando diagramas momento-curvatura previamente calculados, sendo realizada inicialmente sem implementação de refino adaptativo da malha e em seguida usando o refinamento adaptativo do tipo h e considerando estimadores de erro relativos de curvatura e deslocamento para os exemplos propostos no Capítulo 4.

5.1 ANÁLISE SEM REFINO ADAPTATIVO

Nesta seção foi realizado a análise não linear das vigas dos exemplos, sem a implementação do refino adaptativo, em busca de usar esses resultados como comparação com as malhas refinadas sob diferentes estimadores de erro, avaliando a resposta estrutural e a eficiência computacional.

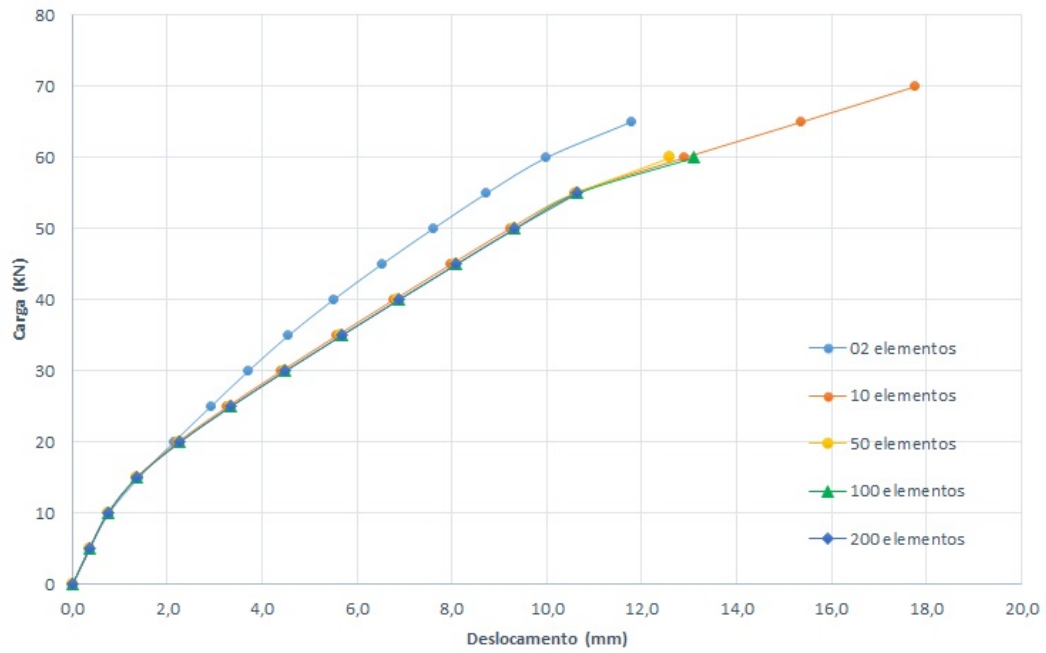
5.1.1 Exemplo 1

A Figura 36 e a Figura 37 ilustram as curvas carga-deslocamento obtidas da análise não linear da viga V1, sob o tipo 1 e tipo 2 de carregamento, respectivamente. Foram realizadas as análises com número crescente de elementos, até a convergência da análise. Ou seja, a partir da malha final obtida ocorre a convergência da carga de ruptura.

É possível notar que a curva carga-deslocamento da viga V1, com o carregamento do tipo 1, simulada com apenas 2 elementos finitos e sem implementação computacional de refino adaptativo, obteve um deslocamento vertical total da viga próximo de 12 mm e carga de ruptura de 65 KN. Aumentando o número de elementos, chegando em 200, a carga de ruptura converge para 55 KN e 11 mm de deslocamento vertical total. A carga de ruptura da viga obtida por Stramondinoli foi de cerca de 59 KN.

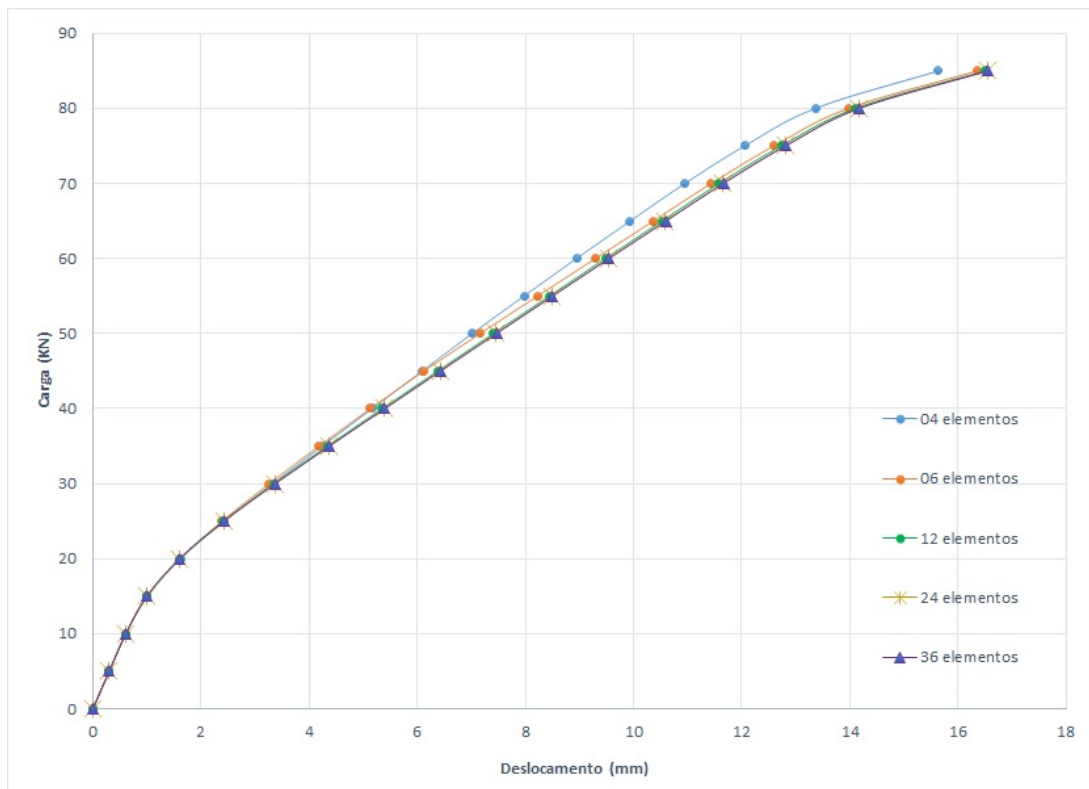
Vale ressaltar que foi observado nas análises que a partir de 200 elementos ocorreu a convergência da carga de ruptura da viga em 55 KN, não ocorrendo grande variação para refinamentos posteriores. Logo, essa foi a malha adotada como a malha uniforme com número de elementos em que os resultados convergiram.

Figura 36 – Diagrama carga-deslocamento para o tipo 1 de carregamento da viga V1, sem refino adaptativo da malha.



Fonte – (Autor)

Figura 37 – Diagrama carga-deslocamento para o tipo 2 de carregamento da viga V1, sem refino adaptativo da malha.



Fonte – (Autor)

Com o diagrama carga-deslocamento mostrado na Figura 37, da análise feita com o carregamento do tipo 2, é possível verificar que os resultados convergem com poucos elementos. A carga de ruptura resultou em 85 KN para todas as curvas simuladas, variando apenas o deslocamento vertical total da viga. Para Stramondinoli, a viga rompeu com cerca de 86 KN.

Com apenas esses dois resultados, nota-se a importância de um refino da malha de elementos finitos para se obter a resposta da estrutura com maior precisão. Para a viga sujeita ao carregamento do tipo 1, observa-se a necessidade de uma malha uniforme com elevado número de elementos para se alcançar a convergência e maior precisão nos resultados. Porém, para o carregamento do tipo 2, apenas um refino eficiente, com menos elementos e sendo refinado só onde é necessário, é suficiente para convergência dos resultados.

5.1.2 Exemplo 2

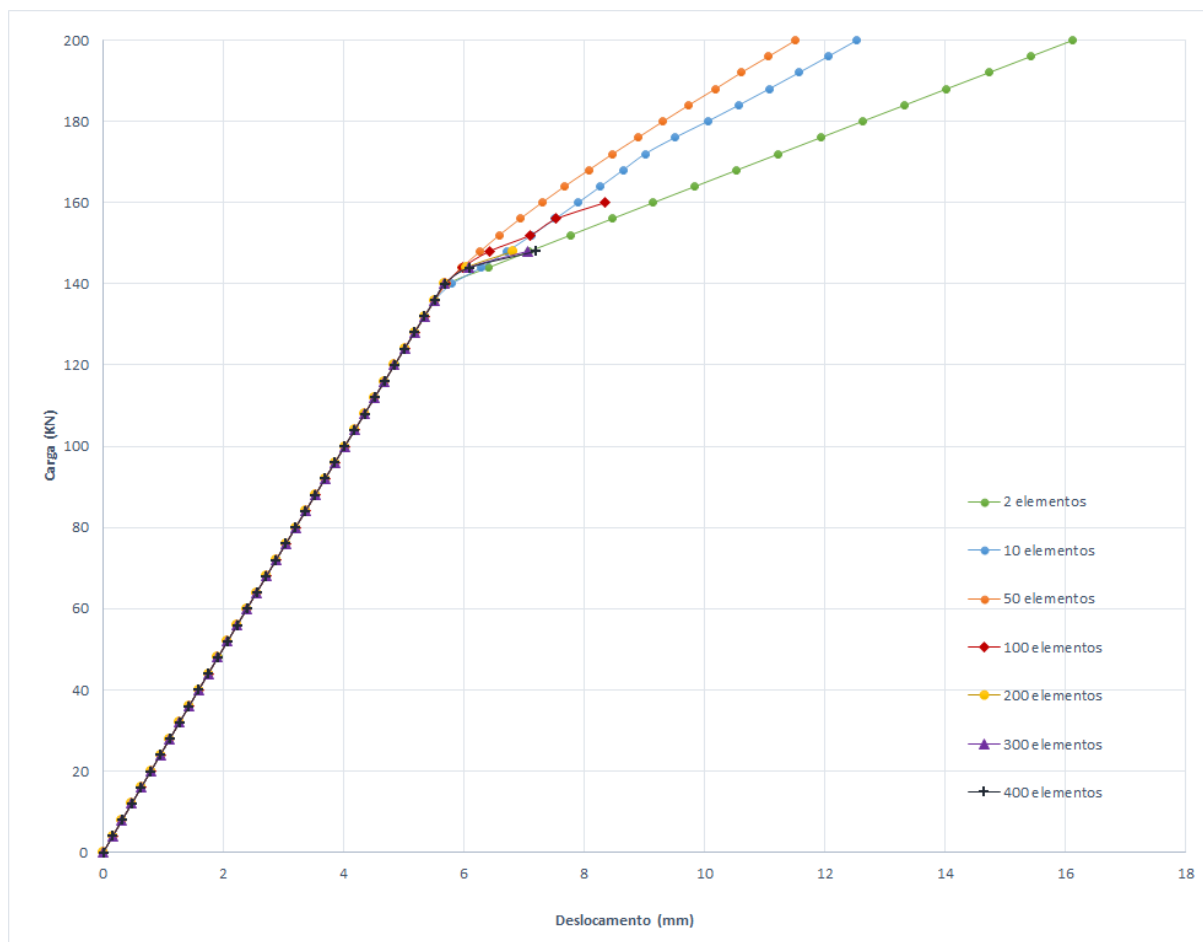
A Figura 38 demonstra as curvas carga-deslocamento obtidas da análise não linear da viga J4 ensaiada por Burn e Siess (1962). Do mesmo modo que no exemplo anterior, também foram feitas as análises com malhas de número crescente de elementos, até sua convergência.

Nota-se pelo diagrama que a partir da malha de 100 elementos, a análise obteve a trajetória até a carga de ruptura; a partir da malha de 200 elementos a carga de ruptura da viga converge para 148 KN. No entanto, houve variação no deslocamento da viga. A partir da malha de 300 elementos o deslocamento teve pequena variação, sendo essa a malha final adotada, resultando em 148 KN de carga de ruptura e 7,05 mm de deslocamento vertical total da viga. A malha com 400 elementos obteve aproximadamente o mesmo deslocamento.

Nesse exemplo, por ser adotado as leis constitutivas da NBR 6118/2014 para o concreto e o aço, foi obtido carga de ruptura para a viga com um valor bem inferior ao obtido por Burn e Siess (1962), que usavam modelos constitutivos distintos, chegando em torno de 175 KN.

É possível denotar que nesse exemplo é necessário uma malha bem refinada para obter a convergência da viga, ou seja, uma malha densa em número de elementos (a partir de 200) se justifica para obter maior precisão nos resultados, principalmente após o trecho pós-escoamento da curva carga-deslocamento.

Figura 38 – Diagrama carga-deslocamento para a viga J4, sem refino adaptativo da malha.



Fonte – (Autor)

5.2 ANÁLISE COM REFINO ADAPTATIVO E ESTIMADOR DE ERRO RELATIVO DE CURVATURA

Os resultados das análises desta seção foram inseridas a implementação do refino adaptativo das vigas dos exemplos, considerando um critério inicial implementado, através do estimador de erro relativo de curvatura. Como já mostrado na subseção 3.2.3, esse erro relativo depende apenas da relação entre a rigidez exata e a rigidez aproximada, ou seja, é influenciado apenas pelo erro de representação de rigidez.

5.2.1 Exemplo 1

Para a viga V1, com o tipo 1 de carregamento e com implementação de refino adaptativo considerando o estimador de erro relativo de curvatura, a malha final obtida resultou em 34 elementos finitos, como apresentado na Figura 39. O critério de tolerância para o erro utilizado foi de 1%.

A Figura 39 apresenta os nós da malha dispostos ao longo da viga em cada valor de carregamento aplicado. Isto é, o eixo vertical representa cada valor de carregamento inserido até se obter a malha final. Assim, de baixo para cima pode-se observar as regiões da viga onde a malha foi refinada ao longo do incremento de carga. Como o elemento foi refinado utilizando o erro relativo de curvatura, a representação da rigidez é quem define onde será refinado. Isso explica esse comportamento de inserção de novos elementos, uma vez que não foi o maior valor de momento (centro da viga) o fator relevante na análise e sim a variação da rigidez ao longo do elemento. Logo, quanto maior essa variação, maior o erro de representação da rigidez.

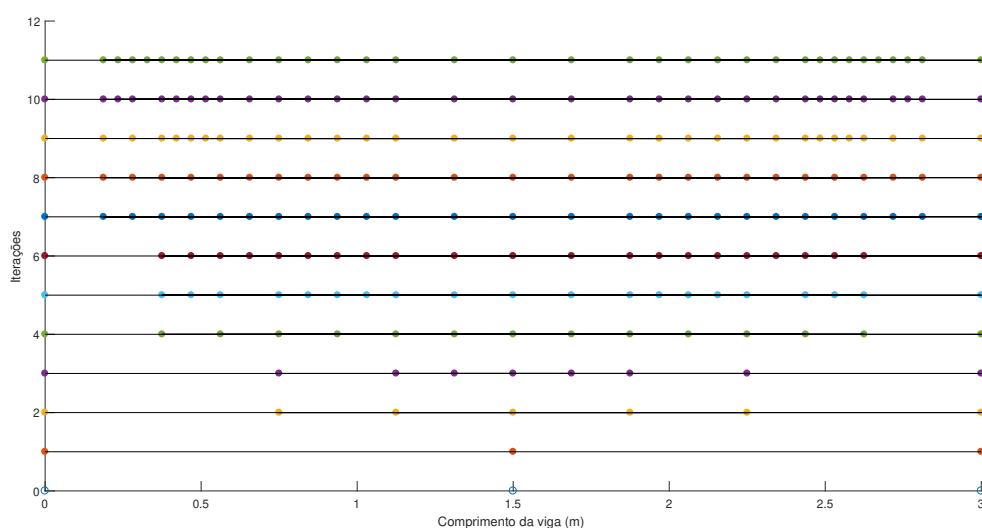
Com esse número de elementos obtidos, os resultados convergiram com uma carga de ruptura de 55 KN e aproximadamente 11 mm de deslocamento vertical total, como mostrado na curva em verde na Figura 40. Foi possível notar, pelo diagrama, que a curva em laranja, que representa a análise com malha uniforme de 200 elementos, se sobrepõe com a curva em verde com estimador de erro relativo de curvatura. Assim, é possível perceber a significativa redução de elementos finitos na análise ao implementar o refino adaptativo com esse estimador de erro. Isso é devido ao fato que a mesma carga de ruptura e deslocamento foi obtida com apenas 34 elementos, enquanto a análise sem refino adaptativo precisou de 200 elementos, evidenciando assim a eficiência computacional em usar o estimador para refino, nesse exemplo.

Para a viga V1, com o tipo 2 de carregamento e com implementação de refino adaptativo considerando o estimador de erro relativo de curvatura, a malha final obtida resultou em 36 elementos finitos, como apresentado na Figura 41. O critério de tolerância para o erro utilizado foi de 1%.

Pode-se notar pela Figura 41, que ao longo das iterações durante o refino adaptativo, os nós da malha se concentraram próximos aos apoios da viga. Pensando no diagrama de momento fletores e analisando a região onde ocorreu a aplicação das cargas, o momento é constante e ali não houve o refino. Esses fatos se devem ao estimador de erro usado, o de curvatura, ser baseado na representação da rigidez. Logo, há uma tendência de que ocorra o refino nas regiões onde há grande variação de momento e conseqüentemente variação de rigidez.

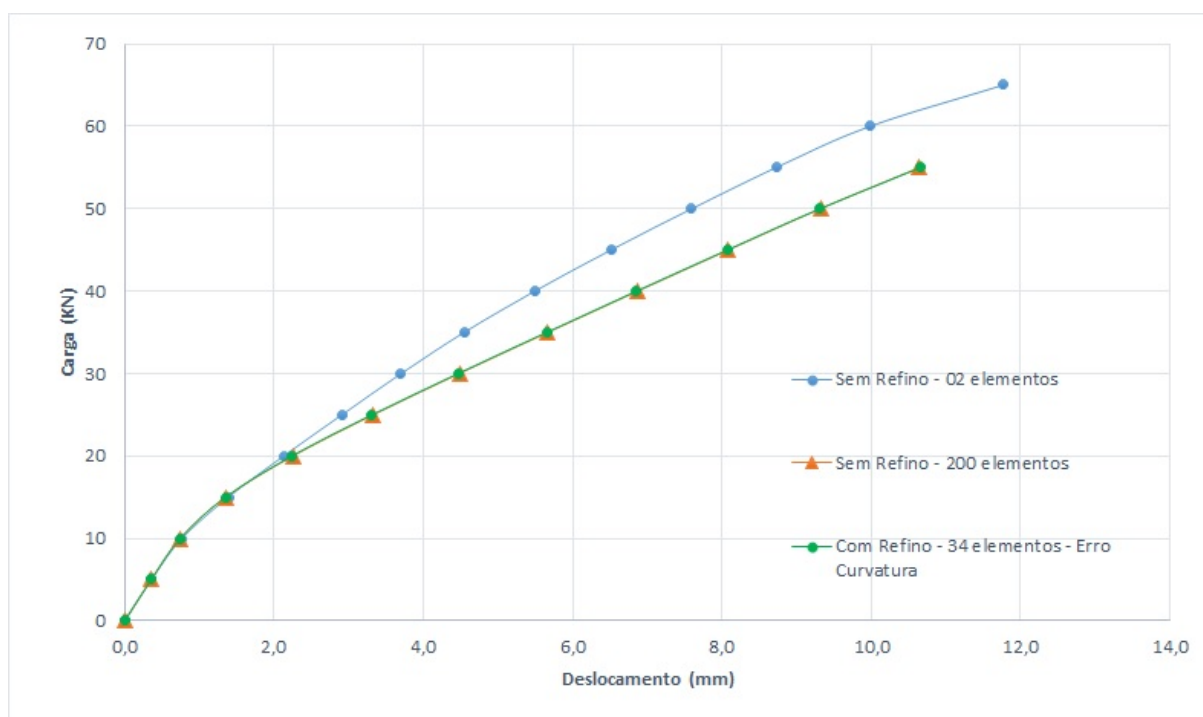
Pelo diagrama carga-deslocamento mostrado da Figura 42 e analisando a curva em verde, foi obtido uma carga de ruptura de 85 kN e o deslocamento vertical total da viga foi de 16,57 mm. Comparando esse resultado com a análise da mesma viga sem refino adaptativo e simulada com 24 elementos (curva em laranja), que resultou na mesma carga de ruptura de quando usado o refino adaptativo, pode-se perceber que nesse caso a malha com uso de refino adaptativo indicou mais elementos do que a malha sem refino. Ainda ocorreu apenas uma variação do deslocamento vertical total da viga de 16,55 mm (sem refino) para 16,57 mm (com refino). Nesse caso, é possível concluir que o refino realizado com esse estimador, para esse tipo de carregamento, não se mostrou um refino eficiente.

Figura 39 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos da viga V1 sob carregamento do tipo 1, considerando o estimador de erro relativo de curvatura.



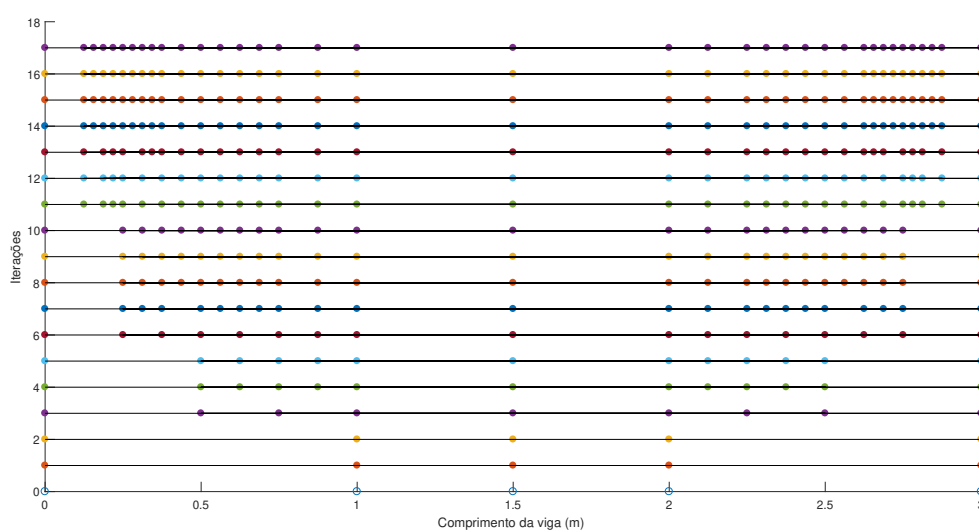
Fonte – (Autor)

Figura 40 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 1 de carregamento da viga V1, sem e com refino adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de curvatura.



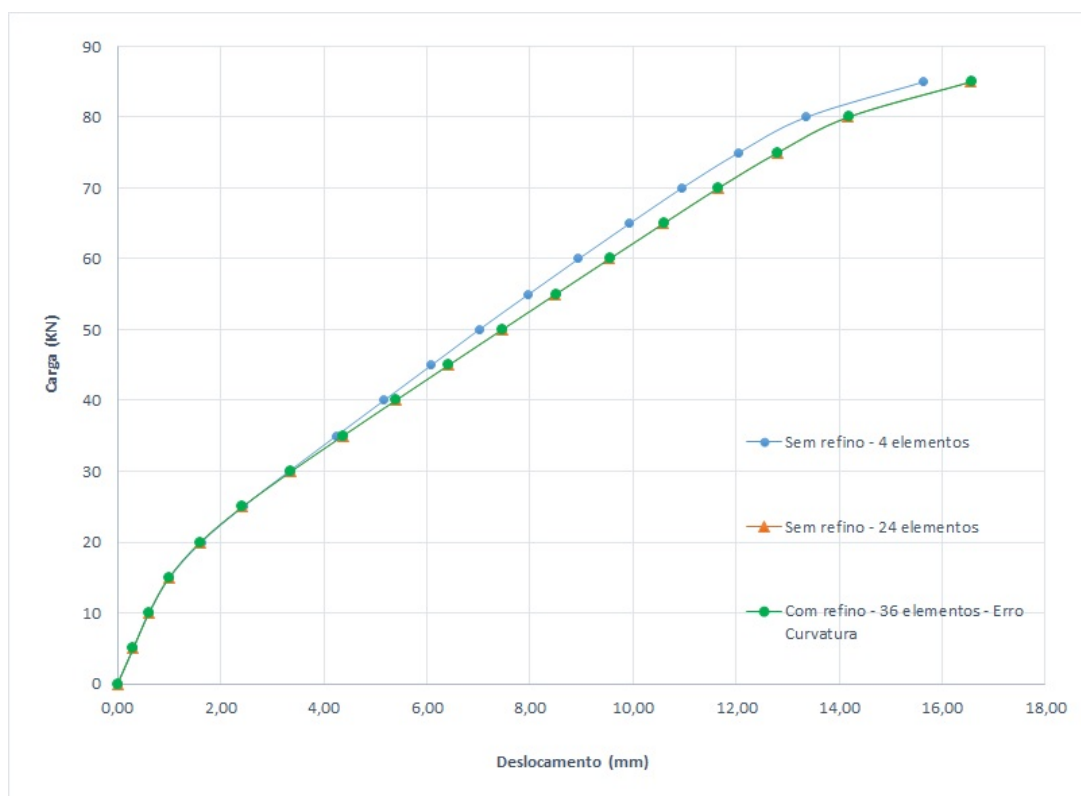
Fonte – (Autor)

Figura 41 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos na análise da viga V1 sob carregamento do tipo 2, considerando o estimador de erro relativo de curvatura.



Fonte – (Autor)

Figura 42 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 2 de carregamento da viga V1, sem e com refino adaptativo, considerando o erro relativo de curvatura.



Fonte – (Autor)

5.2.2 Exemplo 2

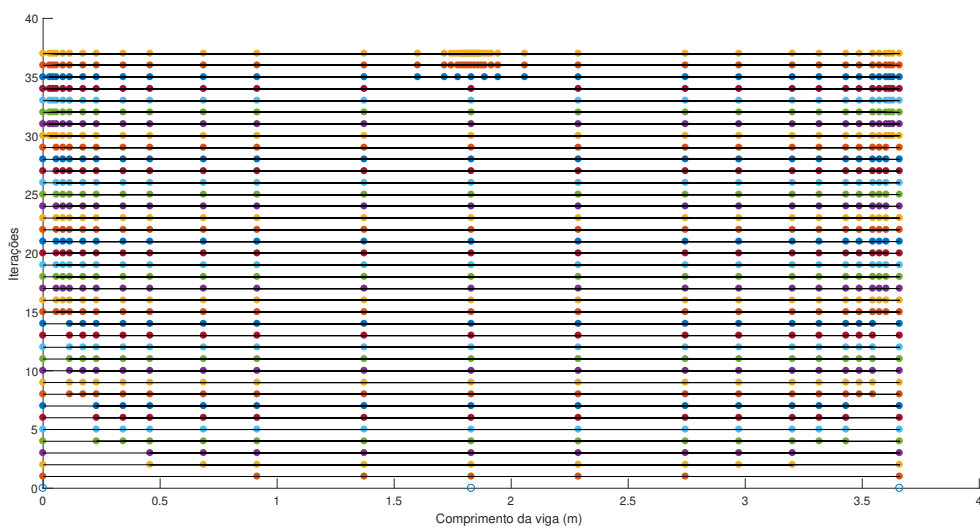
A análise não linear da viga J4 com implementação de refinamento adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de curvatura, resultou em uma malha final composta por 48 elementos, como mostrado na Figura 43. O critério de tolerância para o erro utilizado foi de 1%.

Pode-se notar pela Figura 43 que ao longo das iterações durante o refino adaptativo, os nós da malha tenderam a serem inseridos bastante próximo aos apoios da viga; e nas últimas iterações novos nós inseridos próximo e no centro da viga. Lembrando que o estimador usado, o de curvatura, é baseado no erro de representação da rigidez. Logo, quanto maior a variação de rigidez ao longo do elemento, maior o erro e conseqüentemente maior o refino.

Com a malha resultante do refino, o diagrama carga-deslocamento da viga foi obtido com uma carga de ruptura igual à 148 kN e deslocamento vertical total de 7,21 mm, como mostrado na curva em verde da Figura 44. Comparando essa curva com a curva em laranja, observou-se novamente a relevância do refino adaptativo em obter precisão nos resultados e eficiência computacional na análise. Isso, pelo fato das curvas se aproximarem muito, mas, com um número menor de elementos e sua

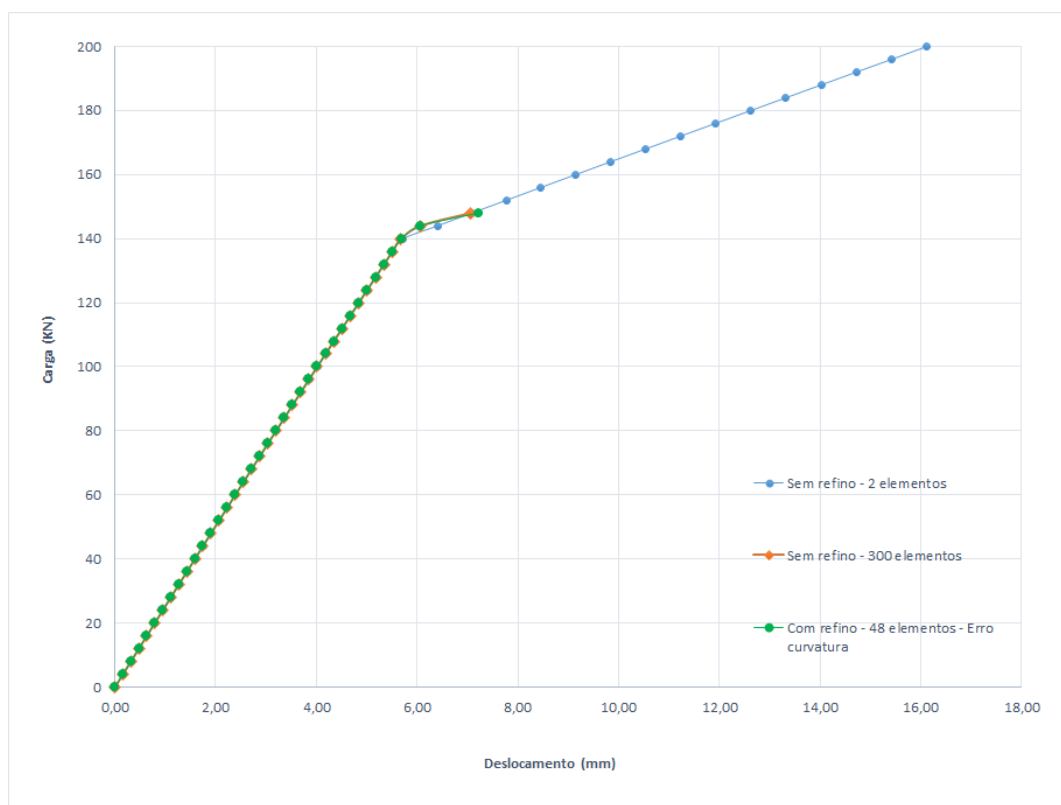
maioria concentrados no centro da viga ou local de aplicação da carga, quando considerado a análise com refino e por estimador de erro relativo de curvatura. Houve uma pequena variação, apenas, no deslocamento, onde na análise com malha uniforme de 300 elementos (curva em laranja) resultou em 7,05 mm, enquanto a análise com refino chegou em 7,21 mm.

Figura 43 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos na análise da viga J4, considerando o estimador de erro relativo de curvatura.



Fonte – (Autor)

Figura 44 – Diagrama Carga-Deslocamento para a viga J4, sem e com refino adaptativo, considerando o erro relativo de curvatura.



Fonte – (Autor)

5.3 ANÁLISE COM REFINO ADAPTATIVO E ESTIMADOR DE ERRO RELATIVO DE DESLOCAMENTO

Nesta seção são apresentados os resultados das análises com uso do refino adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento da Eq. (3.42). É importante ressaltar novamente que o erro máximo de curvatura em cada elemento foi substituído pelo erro de curvatura no meio do elemento. Nesse critério, o erro de deslocamento gerado dentro do elemento pode ser estimado a partir do erro máximo de curvatura e do comprimento do elemento, o que torna simples a sua utilização. Ou seja, a utilização deste estimador de erro não implica dificuldades adicionais em relação ao estimador de erro de curvatura.

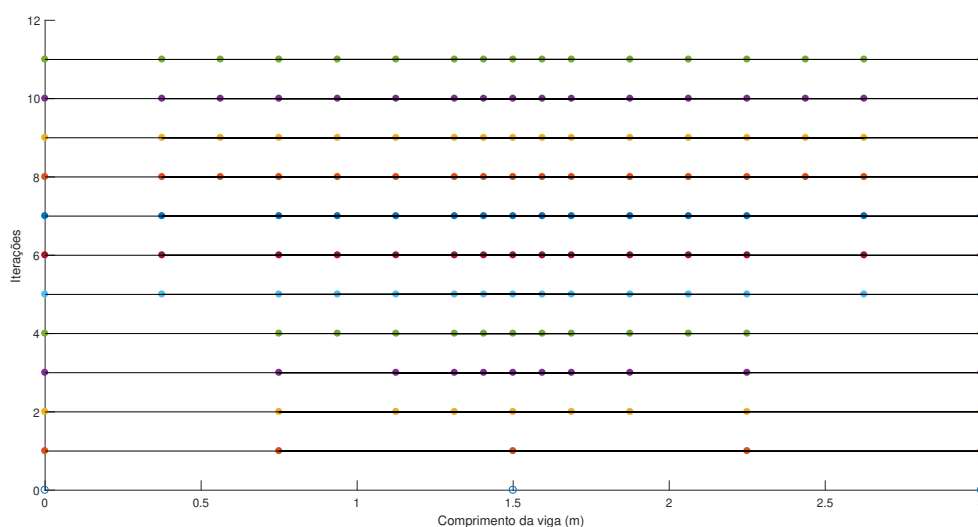
5.3.1 Exemplo 1

A malha final obtida para a viga V1, com o tipo 1 de carregamento e com refino obtido pelo estimador de erro relativo de deslocamento, resultou em 16 elementos finitos, como ilustrado na Figura 45. O critério de tolerância para o erro

utilizado foi de 1%.

Ainda através da Figura 45, nota-se que com esse estimador de erro, a malha foi refinada de maneira mais uniforme ao longo da viga e com um número maior de nós inseridos próximo ao centro da mesma, onde foi aplicado o carregamento concentrado.

Figura 45 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos na análise da viga V1 sob carregamento do tipo 1, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento.



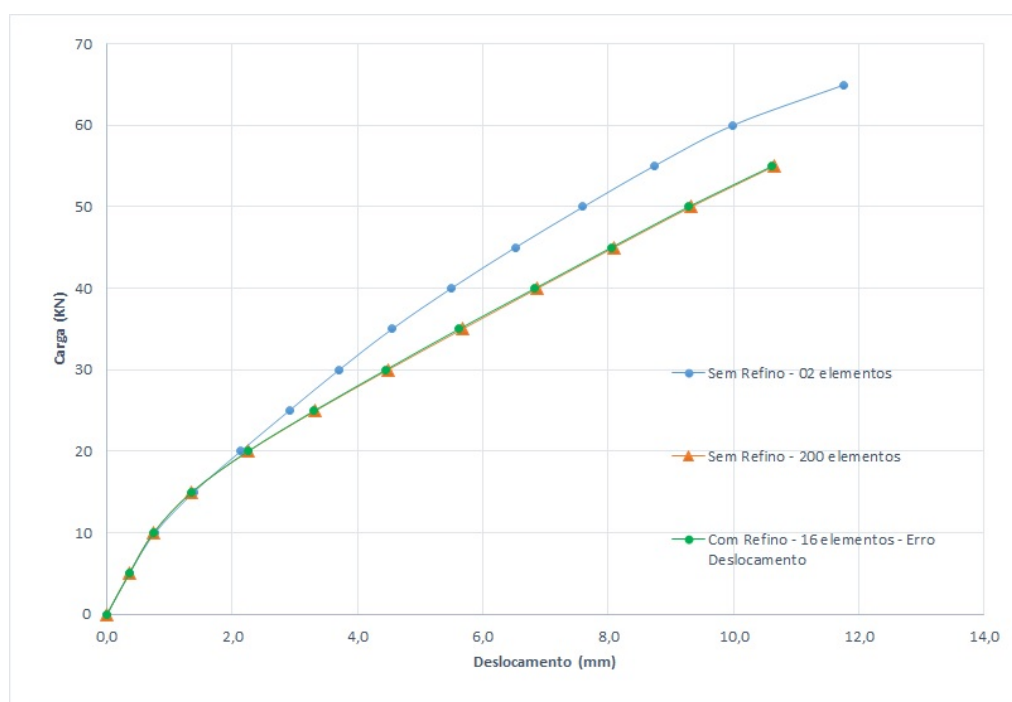
Fonte – (Autor)

A Figura 46 apresenta as curvas carga-deslocamento obtidas da análise da viga V1, sob o tipo 1 de carregamento, sem refino e após refinamento adaptativo com uso do estimador de erro de deslocamento. Com o refino, representado pela curva em verde, a viga rompeu com 55 KN de carga e com aproximadamente 11 mm de deslocamento vertical total. Percebe-se que a mesma resposta estrutural foi obtida com a malha uniforme de 200 elementos finitos, representada pela curva em laranja sobposta à curva em verde com implementação de refino. Logo, nota-se grande economia de esforço computacional ao implementar o refino adaptativo. Além disso, houve também maior precisão nos resultados quando comparado à curva em azul, sem implementação de refino e com malha de apenas 2 elementos, que obteve carga de ruptura de 65 KN.

A malha final obtida para a viga V1, sob o tipo 2 de carregamento e com refino usando o estimador de erro relativo de deslocamento, obteve 8 elementos, como mostrado na Figura 47. O critério de tolerância para o erro utilizado foi de 1%.

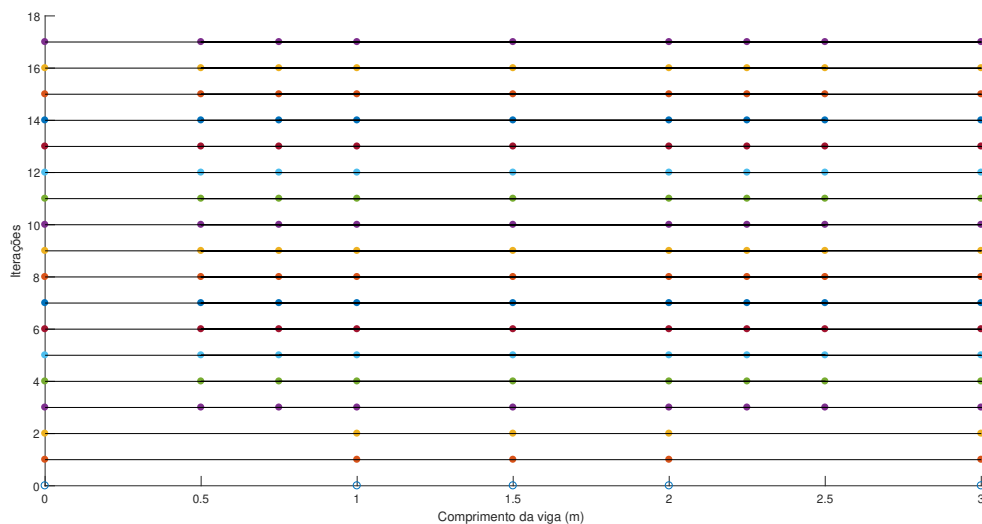
Através do diagrama carga-deslocamento ilustrado na Figura 48, nota-se pelas curvas descritas que a carga de ruptura da viga V1 convergiu para 85 kN em todas as análises, apresentando apenas uma pequena variação do deslocamento vertical total. Para a análise da viga utilizando o refino adaptativo com uso do estimador de erro relativo de deslocamento, obteve-se 16,51 mm de deslocamento. No entanto, a análise sem refino adaptativo e com apenas 4 elementos obteve 15,64 mm.

Figura 46 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 1 de carregamento da viga V1, sem e com refinamento adaptativo, considerando o erro relativo de deslocamento.



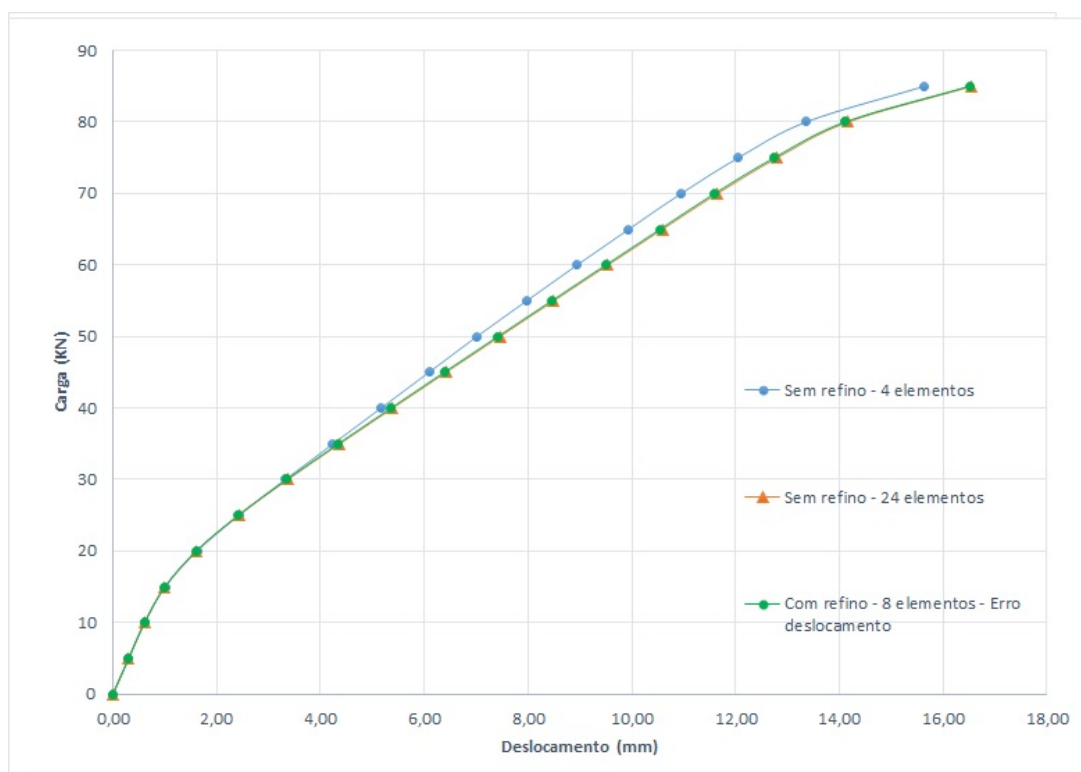
Fonte – (Autor)

Figura 47 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos na análise da viga V1 sob carregamento do tipo 2, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento.



Fonte – (Autor)

Figura 48 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 2 de carregamento da viga V1, sem e com refinamento adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento.

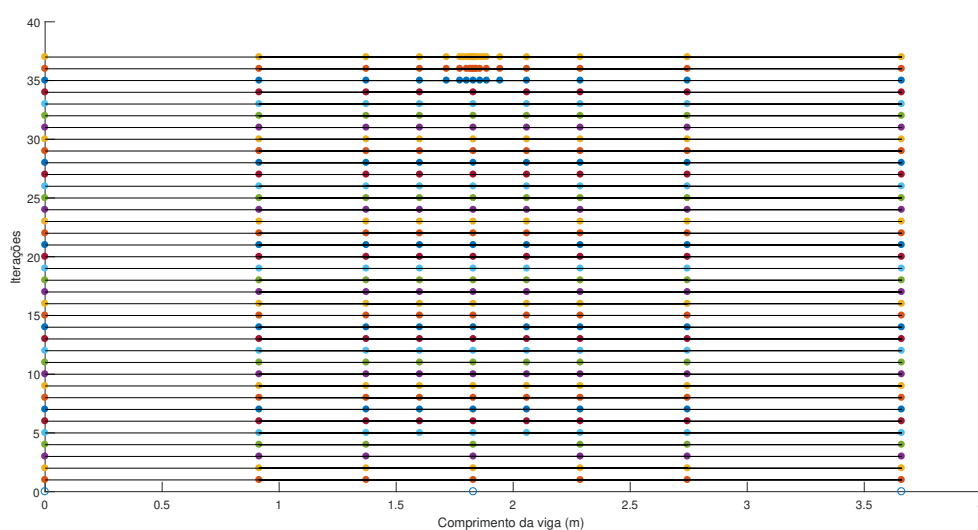


Fonte – (Autor)

5.3.2 Exemplo 2

A viga J4 após refino adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento, obteve uma malha final de 22 elementos finitos, como mostrado na Figura 49. O critério de tolerância para o erro utilizado foi de 1%. Pode-se notar que ao longo dos passos de carga, os elementos novos são inseridos cada vez mais próximos do ponto de aplicação da carga concentrada.

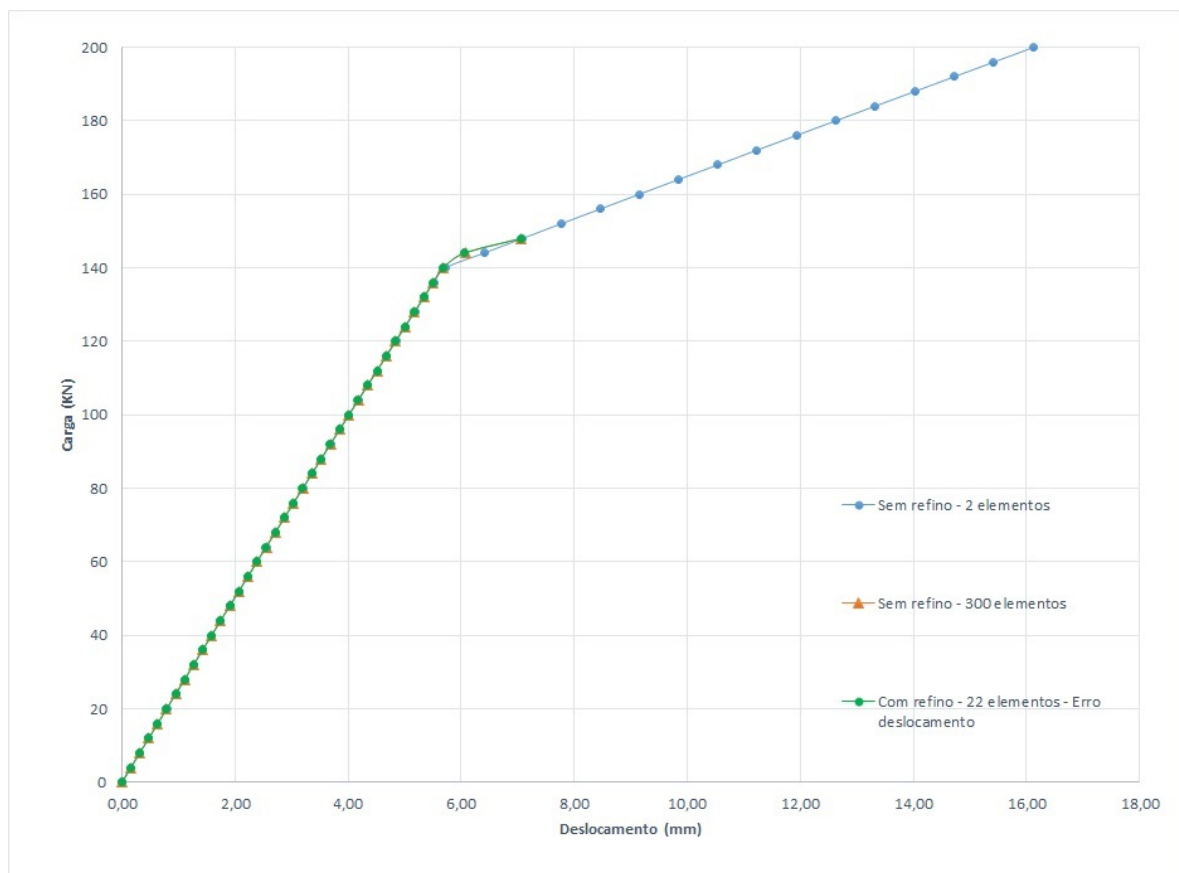
Figura 49 – Refinamento adaptativo da malha de elementos finitos na análise da viga J4, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento.



Fonte – (Autor)

Pela Figura 50, percebe-se que a análise com malha uniforme de 300 elementos (sem refino adaptativo) e a análise com refino adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento, tiveram suas curvas carga-deslocamento praticamente sobrepostas, variando apenas o deslocamento vertical total. Sendo assim, a análise com refino adaptativo resultou em uma carga de ruptura de 148 kN e deslocamento de 7,07 mm. Logo, esse estimador de erro para realização do refino adaptativo na análise contribuiu muito na redução em esforço computacional e precisão de resultados, além de fazer um refino mais eficiente. Isso pode ser visto ao comparar o número de elementos da malha das análises sem e com refino adaptativo. A primeira precisou de 300 elementos para convergir enquanto na segunda foi necessário apenas 22 elementos.

Figura 50 – Diagrama Carga-Deslocamento para a viga J4, sem e com refinamento adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de deslocamento.



Fonte – (Autor)

5.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS ESTIMADORES DE ERRO

Nesta seção foi realizada a comparação dos estimadores de erro desenvolvidos neste trabalho, avaliando a precisão e a eficiência computacional dos mesmos através da carga de ruptura obtida no diagrama carga-deslocamento e número de elementos finitos da malha obtida pós refino adaptativo.

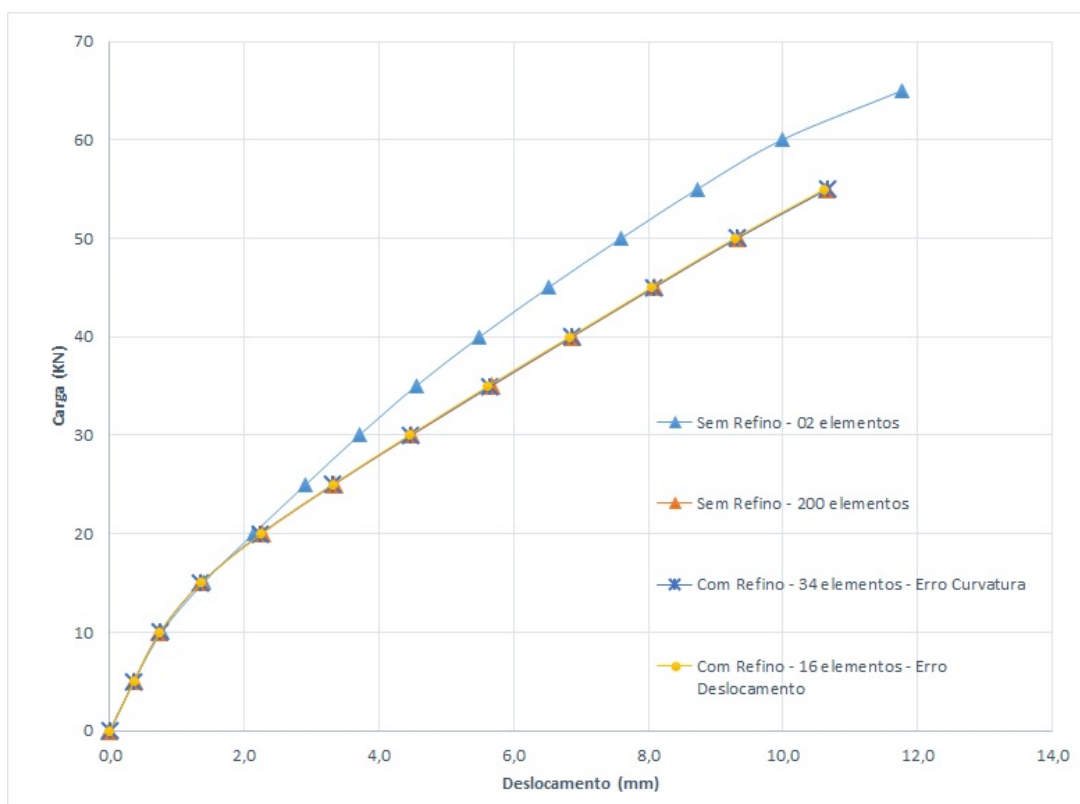
5.4.1 Exemplo 1

A Figura 51 e a Figura 52 ilustram as curvas de carga-deslocamento da análise não linear da viga V1, sob o carregamento tipo 1 e tipo 2, respectivamente, com as curvas sem implementação de refino adaptativo e com refino adaptativo da malha, considerando os estimadores de erro relativo de curvatura e deslocamento.

Pela Figura 51, é possível perceber que as curvas das análises com malha uniforme de 200 elementos e as curvas com implementação de refino, para ambos os estimadores, ficaram sobrepostas, mostrando a convergência delas para uma

mesma carga de ruptura e deslocamento vertical total. O que difere entre elas é o ganho computacional na análise. Ou seja, para esse exemplo e considerando o tipo 1 de carregamento, o estimador de erro de deslocamento foi o que apresentou menor número de elementos na malha final (16 elementos). Logo, menor esforço computacional para obter uma mesma resposta estrutural que os outros estimadores e principalmente com a análise sem refino adaptativo, que precisou de 200 elementos para convergir.

Figura 51 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 1 de carregamento da viga V1, sem e com refinamento adaptativo, considerando os erros relativo de curvatura e deslocamento.



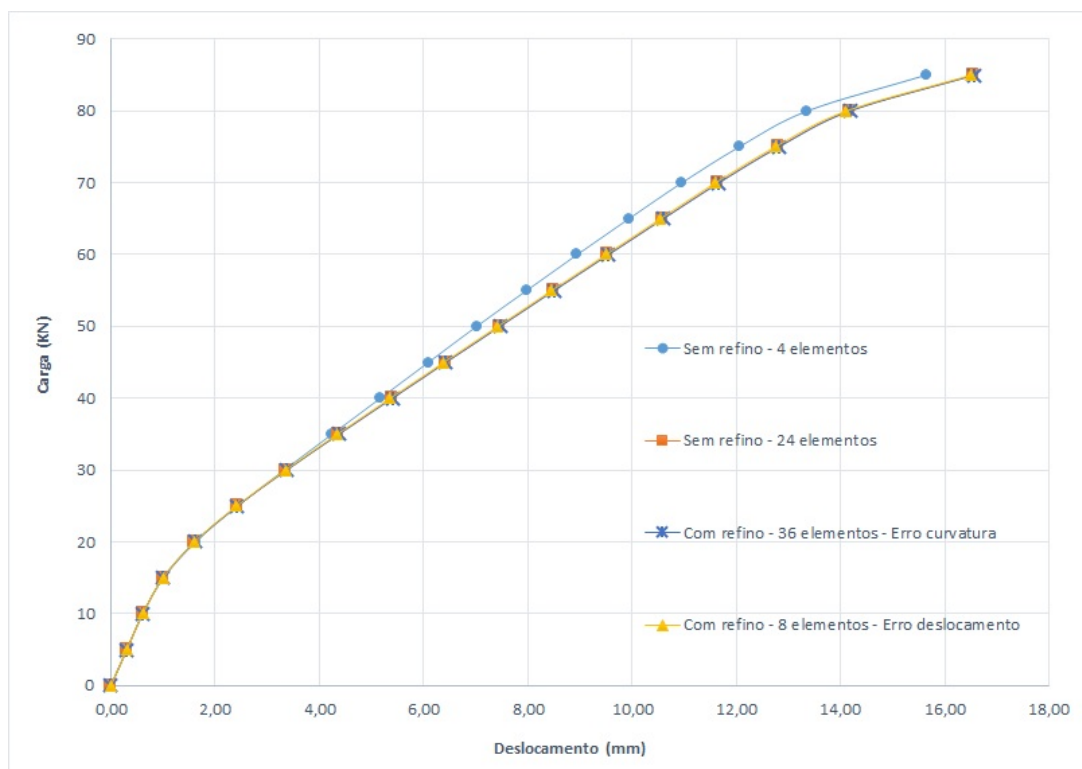
Fonte – (Autor)

Para o carregamento do tipo 2, analisando a Figura 52, nota-se que as curvas das análises sem implementação de refino adaptativo e as curvas com refino adaptativo, para ambos os estimadores, ficaram praticamente sobrepostas, obtendo a mesma carga de ruptura e aproximadamente o mesmo deslocamento vertical total. Mais uma vez, o número de elementos da malha final da análise foi o que divergiu entre os estimadores usados.

No entanto, para esse exemplo sob condição de flexão a quatro pontos, ocorreu que na análise sem refino adaptativo foi preciso somente 24 elementos para a convergência do deslocamento. Porém, usando o estimador de erro relativo de curvatura para o refino da viga, houve um aumento do número de elementos (de 24 para 36 elementos). Isso mostrou, para esse caso, que o estimador de curvatura não

foi eficiente quanto ao ganho computacional, refinando a malha em regiões onde não era necessário.

Figura 52 – Diagrama Carga-Deslocamento para o tipo 2 de carregamento da viga V1, sem e com refinamento adaptativo, considerando os erros relativo de curvatura e deslocamento.



Fonte – (Autor)

Já para o estimador de erro relativo de deslocamento, a malha refinada resultou em apenas 8 elementos. Isso mostra o menor esforço computacional ao se comparar com o estimador de erro relativo de curvatura e principalmente com a análise sem implementação de refino adaptativo da malha, que convergiu com 24 elementos. Logo, esse estimador foi o de maior eficiência computacional, para esse caso estudado.

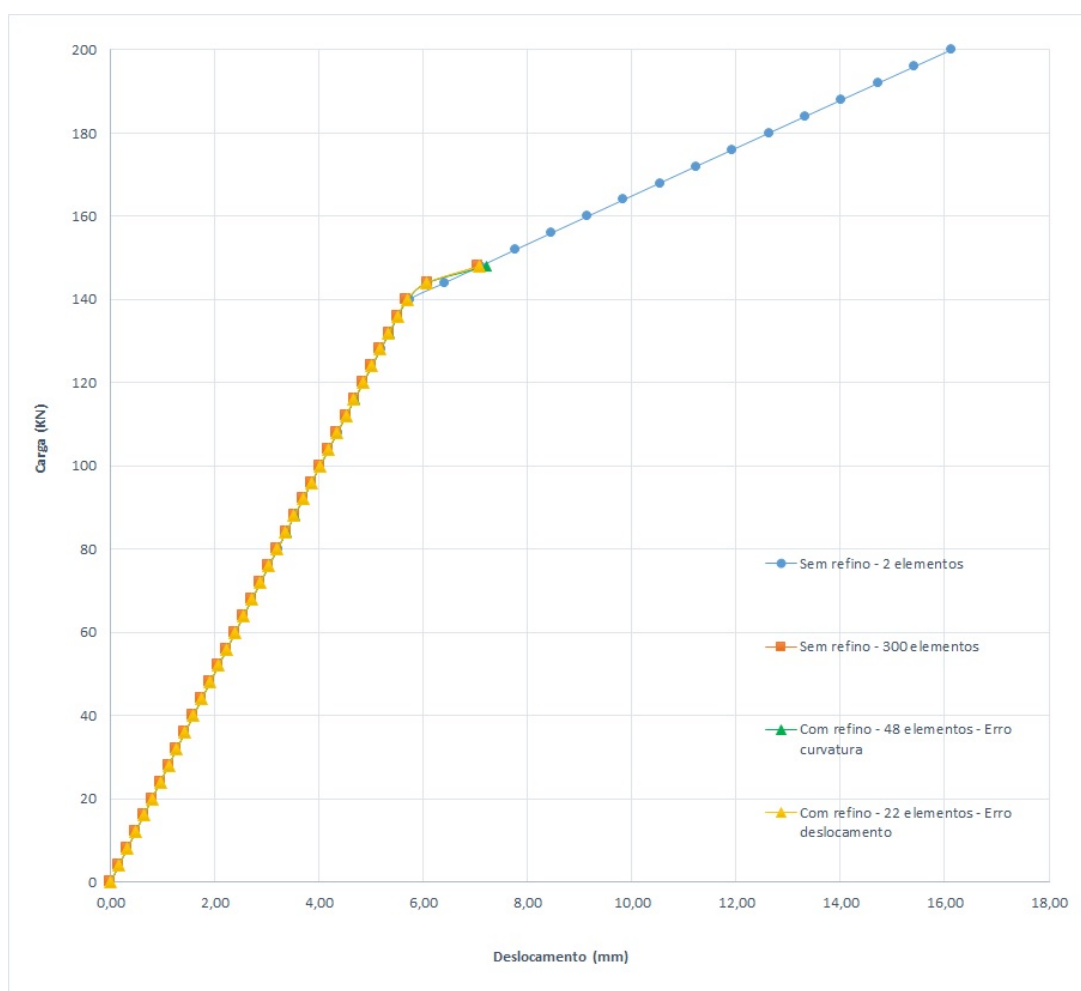
5.4.2 Exemplo 2

A Figura 53 ilustra as curvas de carga-deslocamento da análise não linear da viga J4, representando as análises sem e com refino adaptativo da malha, considerando os estimadores de erro relativo de curvatura e deslocamento.

É possível notar, analisando a Figura 53, que as curvas das análises com malha uniforme de 300 elementos e as curvas com refino adaptativo, para ambos os estimadores, ficaram praticamente sobrepostas, convergindo para uma mesma

carga de ruína, porém, com uma pequena variação no deslocamento vertical total. Houve variação de número de elementos das malhas, reforçando novamente a eficiência computacional na análise. Logo, analisando pela precisão dos resultados e ganho computacional, o estimador de erro relativo de deslocamento foi o de maior ganho, pois apresentou uma malha final com apenas 22 elementos, para obter uma mesma resposta estrutural que o estimador de curvatura (48 elementos). Já a análise com malha uniforme sem refino adaptativo precisou de 300 elementos para convergir para resultados semelhantes.

Figura 53 – Diagrama Carga-Deslocamento para a viga J4, sem e com refinamento adaptativo, considerando o estimador de erro relativo de curvatura e deslocamento.



Fonte – (Autor)

6 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento, teste e comparação de critérios de refinamento adaptativo em malha de elementos finitos de vigas de concreto armado, sujeitas à flexão simples e sob carregamento monotônico. O refino adaptativo dessas vigas foi inserido no contexto da análise não linear, adotando o método de análise de Melo (2019). Esse, conta com diagramas momento-curvatura das seções transversais de viga, obtidos antes da análise estrutural, para consideração da não linearidade física, e usa o método secante para solucionar as equações de equilíbrio não lineares.

O refino adaptativo da malha de elementos finitos foi realizado por meio de critérios de refino baseados em estimadores de erro. Então, a finalidade foi encontrar os elementos que realmente precisassem ser refinados, de acordo com o estimador de erro adotado, até obter uma malha final e com ela os resultados de maior precisão aliado à redução de esforço computacional. Sendo assim, diferentemente do que é visto na literatura, referente a estimadores de erro, foi assumido neste trabalho que o erro é proveniente apenas da representação não exata da rigidez.

Com isso, foi desenvolvido e aplicado, por meio de exemplos da literatura, o estimador de erro relativo de curvatura, que se mostrou dependente apenas do erro de representação da rigidez secante; e o estimador de erro relativo de deslocamento, que pode ser estimado a partir do erro máximo de curvatura e do comprimento do elemento, tornando fácil a sua utilização. Foi ainda demonstrado na formulação desses estimadores que eles são assintóticos, isto é, não são exatos, mas, convergem para o valor exato conforme a representação da rigidez é melhorada, tornando-os adequados para serem aplicados no contexto do refino adaptativo.

Foram realizados testes com os estimadores desenvolvidos, aplicando-os em exemplos da literatura de vigas de concreto armado simplesmente apoiadas e sujeitas à flexão simples. Porém, inicialmente, foram feitos testes com esses exemplos sem a realização do refino adaptativo. Isto é, foram usadas malhas uniformes com número mínimo de elementos até uma malha mais densa, onde houve a convergência dos resultados. Isso serviu de referência para comparações posteriores com as malhas refinadas pelos estimadores de erro desenvolvidos no trabalho. Assim, pôde-se avaliar a resposta estrutural e a eficiência computacional.

Para o exemplo 1, sob o carregamento tipo 1, foi possível concluir dos testes realizados, que tanto a análise não linear com malha uniforme de 200 elementos como as análises com refino adaptativo, para ambos os estimadores, convergiram com

a mesma carga de ruptura, de 55 KN, e deslocamento vertical total, de 11 mm. Isso mostrou que os estimadores desenvolvidos foram precisos para o exemplo estudado, apresentando mesma resposta estrutural que a solução de referência. Concluiu-se também que houve grande ganho computacional nas análises com refino adaptativo. Isto devido à comparação entre a malha uniforme de 200 elementos e as malhas pós refino adaptativo com uso dos estimadores, onde obteve-se com o estimador de erro relativo de curvatura uma malha final de 34 elementos e com o estimador de erro relativo de deslocamento uma malha de 16 elementos. Ainda é possível complementar que o estimador de erro de deslocamento foi o que apresentou menor esforço computacional, comparado ao estimador de erro de curvatura.

Para o exemplo 1, sob carregamento do tipo 2, foi obtida uma resposta estrutural da viga praticamente igual para a análise com malha uniforme e densa, e para a análise com implementação do refinamento adaptativo, através dos estimadores. Logo, a carga de ruptura foi a mesma, de 85 KN, e o deslocamento vertical total ficou entre 16,50 mm e 16,60 mm, aproximadamente. Isso faz com que os estimadores elaborados sejam considerados precisos para o caso estudado. Foi possível complementar que o estimador de erro relativo de curvatura não apresentou eficiência computacional, uma vez que resultou em uma malha de 36 elementos, enquanto a análise com malha uniforme convergiu com uma malha de 24 elementos. Esse tipo de estimador pode estar realizando o refino onde as curvaturas são elevadas, mas o erro de deslocamento é pequeno, pois é baseado no erro de representação da rigidez. Então, o estimador de erro relativo de deslocamento foi o que obteve melhor eficiência computacional, quanto a número de elementos, convergindo com uma malha final de apenas 8 elementos finitos, para o caso estudado.

Para o exemplo 2, a viga J4, obteve-se aproximadamente a mesma resposta estrutural tanto para a análise com malha uniforme e densa como para as análises com refino adaptativo, através dos estimadores de erro. Assim, a carga de ruptura foi de 148 KN e o deslocamento vertical total ficou entre 7,05 mm e 7,20 mm, aproximadamente. Isso mostrou que os estimadores desenvolvidos podem ser considerados precisos, para o exemplo estudado. O estimador de erro relativo de curvatura obteve ganho computacional relevante para esse caso, com malha refinada de 48 elementos, quando comparado à análise sem implementação de refino adaptativo, que precisou de 300 elementos para convergir os resultados. No entanto, o estimador de erro relativo de deslocamento foi o mais eficiente, mostrando o elevado ganho computacional na análise, que resultou em uma malha com apenas 22 elementos.

Em vista disso, foi possível concluir com os testes e comparações realizadas que os estimadores de erro relativos aqui desenvolvidos como critérios de refino adaptativo são precisos para obter a resposta estrutural das vigas de concreto

armado, quando realizada a análise não linear e adotado o método de análise de Melo (2019). Os estimadores também se mostraram responsáveis pelo relevante ganho computacional nas análises, através da redução de número de elementos no processo de refino adaptativo, para os exemplos estudados com carregamento concentrado ou flexão a três pontos. No entanto, para todos os casos aqui estudados, o estimador de erro relativo de deslocamento foi o que apresentou maior ganho computacional, resultando sempre em menor número de elementos na malha refinada. Portanto, esse estimador mostrou um refino mais eficiente se comparada à análise sem implementação de refino adaptativo (malha uniforme e densa) e comparado ao estimador de erro de curvatura.

Logo, os objetivos definidos do trabalho foram cumpridos. Restando como sugestões para trabalhos futuros os seguintes itens:

- Melhoria na representação da rigidez ao longo do elemento e avaliação do impacto sobre o refino adaptativo, uma vez que o comportamento exato da rigidez ao longo do elemento não é, de forma geral, uma função linear, como a que foi usada nesse trabalho.
- Extensão do estimador de erro de deslocamento desenvolvido neste trabalho para problemas 2D envolvendo a flexão de placas.
- Ampliar o refino adaptativo na análise não linear para vigas de concreto armado engastadas e avaliar a influência da área de aço, testando diferentes taxas de armadura.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. V1 2a. edição Editora Dunas, Rio Grande, 2003, 232p. ISBN 8586717010
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- AYMONE, J. L. F. **Implementação de estratégia de refinamento tipo h, sem formação de nós irregulares, no sistema GaeLi**. Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – UFRGS, Porto Alegre, 1996.
- BATHE, K.J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1996.
- BURNS, N. H.; SIESS, C. P. **Load-deformation characteristics of beam-column connections in reinforced concrete**. Urbana, 1962. Civil Engineering Studies, SRS No. 234 – University of Illinois.
- CHEN, W.F. **Plasticity in Reinforced Concrete**. McGraw-Hill, 1982.
- CHEN, W.; HAN D. **Plasticity for Structural Engineers**. New York: J. Ross Publishing, 1988
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finites Element Analysis**. 3.ed. Ed. Jonh Wiley and Sons, Inc., 1989
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990**. London, Thomas Telford, 1993.
- FISCH, J.; BELYTSCHKO. **T.A First Course in Finit Elements**. John Wiley and Sons, 2007.
- GELATTI, F. **Análise não linear física e geométrica de pórticos planos de concreto armado: Modelagem por elementos finitos de barra**. 239 p. Dissertação - Curso de Engenharia Civil, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil - UFSC, Florianópolis, 2012.
- GUO B., BABUSKA I., **The h-p Version of the Finite Element Method**: Part 1 - The Basic Approximation Results; Part 2 - General Results and Applications, *Comput. Mech.*, 1, 21-41 e 203-220, 1986.
- HIBBELER, R.C. **Mechanics of Materials**. 8th edn. Prentice Hall, 2011.
- HOGNESTAD, E. **A study of combined bending and axial load in reinforced con-**

- crete members**. Urbana, Illinois, 1951. Bulletin Series, 399:128 - University of Illinois.
- JUNGES, E. **Modelo de Elementos Finitos para Análise Não Linear Física e Geométrica de Pórticos Tridimensionais de Edifícios de Concreto Armado**. 302 p. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2016.
- KWAK, H.G.; KIM, S. P. **Nonlinear analysis of RC beams based on moment – curvature relation**. Computers and Structures, v. 80, n. 7-8, p.615-628, 2002.
- LA ROVERE, H. L. **Utilização do método dos elementos finitos em projetos de estruturas**. Florianópolis: UFSC, 2002. Apostila.
- LAKHANY, A. M.; WHITEMAN, J. R. **Superconvergent recovery based error estimators**. Mathematics and Computers in Simulation, v. 50, p. 97 - 114, 1999.
- MELO, G. F. de. **Análise não linear de vigas de concreto armado com método secante**. 150 p. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2019.
- MELO, G. F. de.; TORII, A. J.; MEDEIROS, E. M. and KZAM, A. K. L. **MATLAB computational routines for moment-curvature relation of reinforced concrete cross sections**. Rev. IBRACON Estrut. Mater., vol. 14, no. 2, e14202, 2021.
- PENNA, S.S. **Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica: Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2011.
- PEREIRA, O. J. B. A. d'. **UTILIZAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS DE EQUILÍBRIO EM REFINAMENTO ADAPTATIVO**. Tese de Doutorado em Engenharia Civil - Universidade Técnica de Lisboa, 1996.
- PERES, L. M.; PENNA, S. S.; PITANGUEIRA, R. L. S. **Análise Fisicamente Não Linear de Pórticos de Concreto Armado**. XI Simpósio de Mecânica Computacional. Juiz de Fora, MG, 2014.
- PINTO, R. da S. **Análise não linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado**. 128f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.
- RACHOWICZ, W. **An h-adaptive finite element method with highly stretched elements for compressible Navier-Stokes equations**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 189, p. 1141 - 1160, 2000.
- SOUZA, E. A. **Métodos Iterativos para Problemas Não Lineares**. Dissertação (Mes-

trado) - Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2015.

SORIANO, H.L. **Elementos finitos: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

STRAMANDINOLI, R.S.B. e LA ROVERE, H.L. **An Efficient Tension-Stiffening Model for Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Members**. Engineering Structures v.30, n.7, p.2069-80, Ed. Elsevier, 2008.

STRAMANDINOLI, R.S.B. **Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado**. 189 p. Tese (doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2007.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**. 5. ed. Butterworth Heineman, 2000. 618 p. v. 1.

ZHU J. Z., ZIENKIEWICZ O. C., **Adaptive Techniques in the Finite Element Method, Commun. Appl. Numer. Methods**, 4, 197-204, 1988.