



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE  
CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA  
(ILACVN)**

**LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**SOBRE A MÉTRICA DE FUNK NO PLANO CARTESIANO:  
MODELANDO UM PROBLEMA DE NAVEGAÇÃO**

**JUNIOR RODRIGUES MOYSES**

Foz do Iguaçu  
2022

**SOBRE A MÉTRICA DE FUNK NO PLANO CARTESIANO:  
MODELANDO UM PROBLEMA DE NAVEGAÇÃO**

**JUNIOR RODRIGUES MOYSES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Newton Mayer Solórzano Chávez

Foz do Iguaçu  
2022

JUNIOR RODRIGUES MOYSES

**SOBRE A MÉTRICA DE FUNK NO PLANO CARTESIANO:  
MODELANDO UM PROBLEMA DE NAVEGAÇÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**



---

Orientador: Prof. Dr. Newton Mayer Solórzano Chávez  
(UNILA)



---

Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León  
(UNILA)



---

Prof. Dr. Benedito Leandro Neto  
(UFG)

Foz do Iguaçu, 15 de julho de 2022.

## TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor(a): Junior Rodrigues Moyses

Curso: Licenciatura Plena em Matemática

	Tipo de Documento
<input checked="" type="checkbox"/> graduação	<input type="checkbox"/> artigo
<input type="checkbox"/> especialização	<input checked="" type="checkbox"/> trabalho de conclusão de curso
<input type="checkbox"/> mestrado	<input type="checkbox"/> monografia
<input type="checkbox"/> doutorado	<input type="checkbox"/> dissertação
	<input type="checkbox"/> tese
	<input type="checkbox"/> CD/DVD – obras audiovisuais
	<input type="checkbox"/> _____

Título do trabalho acadêmico: Sobre a Métrica de Funk no plano cartesiano: Modelando um problema de navegação

Nome do orientador(a): Newton Mayer Solórzano Chávez

Data da Defesa: 15/07/2022

### Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor(a):

a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons Licença 3.0 Unported*.

Foz do Iguaçu, 09 de Julho de 2022.



Assinatura do Responsável

Dedico este trabalho ao Grupo de  
Pesquisa de Geometria e Topologia da  
UNILA

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar agradeço ao meu professor orientador não só pela constante orientação neste trabalho, mas sobretudo pela sua amizade e pelas motivações ao longo desses anos, sempre me incentivando a nunca desistir de aprender.

Aos professores da banca pelas orientações e por tornar possível a possibilidade de apresentação deste trabalho.

Aos colegas de curso e aos professores, por todos os momentos, todas as conversas e discussões que, sem dúvidas, contribuíram não somente para minha formação acadêmica, mas também para minha vida pessoal.

E por fim, mas não menos importante, à minha família e meus amigos mais próximos que sempre estiveram presentes nos momentos mais difíceis e por sempre acreditarem no meu potencial.

*"O mais importante é nunca parar de questionar. A curiosidade tem uma razão para existir... Nunca perca sua sagrada curiosidade."*  
**Albert Einstein**

## RESUMO

Neste trabalho, abordamos um problema de navegação de Zermelo no plano, onde foram consideradas presentes forças externas (como vento ou correnteza) concêntricas e simétricas. Este problema físico foi transformado num problema geométrico bidimensional, onde um disco aberto unitário centrado na origem do plano cartesiano foi munido de uma métrica de Randers, denominada “métrica de Funk sobre o disco unitário”, na qual obtivemos uma distância não simétrica, portanto não euclidiana. Caracterizamos as circunferências nesta nova geometria construída e, logo, obtivemos fórmulas para as distâncias de ponto a ponto, de ponto a reta, de reta a ponto e entre retas.

**Palavras-chaves:** métrica de Funk; métrica de Randers; problema de navegação de Zermelo; distâncias; circunferências.

## RESUMEN

En este trabajo, abordamos a un problema de navegación de Zermelo en el plano, donde se consideraron presentes fuerzas externas concéntricas y simétricas (como el viento o la corriente de un río). Este problema físico se transformó en un problema geométrico bidimensional, donde un disco unitario abierto centrado en el origen del plano cartesiano es dotado de una métrica de Randers, llamada "métrica de Funk en el disco unitario", la cual es no simétrica, por lo tanto no euclidiana. Caracterizamos las circunferencias en esta nueva geometría construida y, luego, obtuvimos fórmulas para las distancias de punto a punto, de punto a recta, de recta a punto y entre rectas.

**Palabras clave:** métrica de Funk; métrica de Randers; problema de navegación de Zermelo; distancias; circunferencias.

## ABSTRACT

In this work, we approach a zermelo navigation problem in the plane, where concentric and symmetrical external forces (such as wind or current) were considered present. This physical problem was transformed into a two-dimensional geometric problem, where a unit open disk centered on the origin of the Cartesian plane was with a Randers metric, called "Funk metric on the unit disk", in which we obtained a non-symmetric distance, therefore not Euclidean. The main objective of this work was to characterize the distances and circumferences in this new constructed geometry. We characterizethe circumferences in this new geometry constructed and, therefore, we obtained formulas for distances from point to point, from point to straight, from straight to point and between straight.

**Keywords:** Funk metric; Randers metric; Zermelo navigation problem; distances; circles.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Geometria Táxi . . . . .	16
Figura 2 – "Circunferência Táxi" . . . . .	17
Figura 3 – Menores caminhos em um rio com fluxo de correnteza . . . . .	18
Figura 4 – Campo vetorial $T$ em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	23
Figura 5 – Força resultante $T_x$ . . . . .	29
Figura 6 – Solução positiva $F$ . . . . .	29
Figura 7 – Campo de forças sobre $\mathbb{B}^2$ . . . . .	32
Figura 8 – Interpretação geométrica do Teorema 4.1 . . . . .	41
Figura 9 – Circunferência de Funk do tipo 1 de centro $P = (0, 0)$ e de raio 1 . . . . .	43
Figura 10 – Circunferência de Funk do tipo 1 de centro $P = (0.5, 0.5)$ e de raio 1 . . . . .	44
Figura 11 – Circunferência de Funk do tipo 2 de centro $P = (0.5, 0.5)$ e de raio 1 . . . . .	45
Figura 12 – Circunferência de Funk do tipo 2 de centro $P = (0, 0)$ e de raio 1 . . . . .	46
Figura 13 – Circunferência de Funk do tipo 2 de centro $P = (0, 0)$ e de raio $\ln 1.5$ . . . . .	47
Figura 14 – Circunferência de Funk do tipo 2 de centro $P = (0.27, 0.13)$ e de raio $\ln 1.5$ . . . . .	48
Figura 15 – Distância de Funk de ponto à reta rotacionados . . . . .	54
Figura 16 – Distância de Funk de ponto à reta . . . . .	54
Figura 17 – Distância de Funk de reta à ponto rotacionados . . . . .	58
Figura 18 – Distância de Funk de reta à ponto . . . . .	59
Figura 19 – Distância de Funk entre retas . . . . .	61
Figura 20 – Retas não concorrentes com inclinações distintas . . . . .	62

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
1.1	REFLETINDO SOBRE MENORES CAMINHOS	16
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>20</b>
2.1	MÉTRICAS	24
<b>3</b>	<b>MÉTRICA DE FUNK</b>	<b>28</b>
3.1	DISTÂNCIA INDUZIDA PELA MÉTRICA DE FUNK	33
<b>4</b>	<b>GEOMETRIA DE FUNK</b>	<b>39</b>
4.1	CIRCUNFERÊNCIA DE FUNK DO TIPO 1	43
4.2	CIRCUNFERÊNCIA DE FUNK DO TIPO 2	44
4.3	DISTÂNCIA DE FUNK DE PONTO À RETA	48
4.4	DISTÂNCIA DE FUNK DE RETA À PONTO	55
4.5	DISTÂNCIA DE FUNK ENTRE RETAS	59
4.5.1	Distância de Funk entre retas com inclinações iguais	60
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>63</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>65</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Quem nunca teve a ideia de "cortar por um atalho" através de um caminho "na diagonal", pois andaria menos? Ou ainda, para medir a distância entre dois pontos desenhados em um papel, utilizou uma régua para medir o comprimento de um segmento de reta que une estes dois pontos?

Estes são exemplos bem adequados para que possamos utilizar a ideia da famosa Desigualdade Triangular, na qual a medida de um lado de um triângulo é sempre menor do que a soma dos outros dois. Mas, será que isso sempre acontece? Ou ainda, será que uma linha reta sempre é o caminho mais curto?

De uma maneira muito intuitiva e introdutória, podemos pensar no exemplo do nosso planeta. Como sabemos, seu formato esférico impossibilita realizar uma trajetória retilínea de Brasil até o Japão, por exemplo. Não podemos passar pelo interior do planeta para prosseguir por essa rota. Assim, os caminhos são realizados através de curvas ao longo da superfície esférica da Terra.

Além deste exemplo, também podemos pensar em um barco navegando em um rio, onde existem algumas forças que interferem no seu deslocamento, como por exemplo, o vento ou a correnteza. Estes tipos de forças extrínsecas ao barco são as chamadas forças externas do sistema (barco). Desta forma, podemos definir um campo de força sobre este rio, como sendo a resultante da soma de todas estas forças, ou ainda, indicando a direção e intensidade que um barco parado irá ser empurrado.

Este exemplo ilustra bem os problemas propostos por Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871 – 1953), um matemático e filósofo alemão que teve grande importância para os fundamentos da Matemática. Em 1931, Zermelo propôs um problema de controle físico de navegação, que lida com um barco navegando em um corpo de água. Além das forças externas do barco, que já mencionamos, o barco também possui forças internas, como por exemplo, o motor. Desta forma, o barco será capaz de alcançar uma velocidade máxima e o problema consiste em obter o melhor controle para se chegar no destino no menor tempo possível.

Descartando as forças externas e partindo de um ponto  $A$  até um ponto  $B$ , nossa "percepção euclidiana" nos indica que o melhor caminho à percorrer é ao longo de um segmento de reta. Entretanto, ao considerar as forças externas, o melhor

caminho nem sempre é uma linha reta. Zermelo estudou alguns casos especiais, os chamados "Problemas de Navegação de Zermelo", mas estamos interessados apenas num destes, no problema no  $\mathbb{R}^2$ .

Desta maneira, nosso objetivo principal foi realizar um estudo sobre distâncias e circunferências a partir de um Problema de Navegação de Zermelo, modelado por meio de uma métrica do tipo Randers, que é uma métrica não euclidiana. Além disso, também procuramos apresentar os conceitos e os resultados de uma forma clara e didática, levantando questionamentos e reflexões para que aqueles que possuam conhecimentos básicos de Geometria Analítica e de Cálculo Diferencial possam acompanhar, sem muitas dificuldades, nosso estudo sobre a métrica de Funk. Isto se deu pela evidente falta de exemplos concretos e menos abstratos para quem está iniciando seus estudos na área da chamada Geometria de Finsler.

Para isso, foi realizado um trabalho de cunho exploratório, onde foram utilizados resultados obtidos, principalmente, por SHEN (2001) e CHENG e SHEN (2012), para desenvolver nossas ideias e cálculos. Por outro lado, também foi utilizado o *software Geogebra* 5.0 para construir as imagens dos exemplos, além de servir como uma ferramenta para testar e verificar nossos resultados.

Antes de darmos início de fato ao nosso trabalho, na próxima seção, buscamos ainda levantar algumas reflexões para que o leitor se introduza nas concepções que queremos propôr, até mesmo pelo fato de que, ao utilizar uma geometria não euclidiana, muitas concepções que temos sobre objetos e conceitos geométricos podem não serem corretas, na ausência de um estudo mais detalhado. Desta forma, estas ideias foram caracterizadas através de questionamentos e exemplos da nossa realidade para que o leitor construa por si só esta percepção.

No Capítulo 2, foram apresentados alguns conceitos e propriedades iniciais que nos serão úteis ao longo do desenvolvimento do trabalho. Este capítulo foi dividido em 2 seções. Na primeira delas trouxemos resultados relacionados à Geometria Euclidiana, na qual é bem provável que o leitor já tenha uma certa familiaridade e, na segunda seção, foram abordadas algumas reflexões sobre o conceito de métrica, além de apresentarmos algumas definições e propriedades sobre tal conceito.

No Capítulo 3 foi onde realmente iniciamos o desenvolvimento dos cálculos de nosso trabalho. Dividido em 2 seções, na primeira delas nosso objetivo foi, a

partir de um problema de navegação, obter uma fórmula para a Métrica de Funk sobre a bola aberta, unitária e centrada na origem do plano cartesiano, onde tal conjunto foi munido de um campo de forças concêntricas e simétricas. Esta métrica (Exemplo 3.1) nos serviu como objeto de estudo no decorrer dos resultados posteriores.

Na segunda seção deste capítulo, nosso foco foi em obter uma fórmula para a distância induzida pela métrica obtida anteriormente, ao longo de uma curva que realiza o menor caminho entre dois pontos contidos na bola aberta (Teorema 3.1). Algumas hipóteses iniciais surgiram naturalmente, como por exemplo, "será que esta distância é simétrica, isto é, a distância para chegar de um ponto à outro é a mesma ao realizar o caminho inverso?" ou ainda "se um barco navega sobre o disco, será que uma hora ele é capaz de sair deste domínio?". Como mencionado, são percepções que não podemos concluir sem antes verificar alguns resultados.

No Capítulo 4, foi desenvolvido um estudo de algumas propriedades geométricas utilizando a tal métrica de Funk. Conceitos de circunferências (relações (4.3) e (4.4)) e de distâncias (de ponto à reta (4.18), de reta à ponto (4.26) e entre retas (4.28)) foram surgindo a partir do problema em determinar o alcance máximo de um barco navegando com combustível limitado ou, ainda, de se obter o tempo de viagens entre uma ilha isolada e uma praia com costa retilínea, respectivamente. "Será que as circunferências de Funk são únicas, ou ainda, possuem o mesmo formato redondo que conhecemos?", "será que os caminhos que realizam as menores distâncias entre pontos e retas são segmentos perpendiculares à reta dada, como ocorre na geometria Euclidiana?", ou ainda, "será que sempre é possível obter uma menor distância entre duas praias retilíneas, considerando que o 'mundo do estudo' é uma bola aberta?" são questões que pudemos levantar previamente.

Este último capítulo foi dividido em 4 seções e, em cada uma delas, foram desenvolvidos cálculos para obtenção de fórmulas e algumas observações de cada um dos seguintes temas: circunferências, distância de ponto à reta, distância de reta à ponto e distância entre retas.

Por fim, considerando que esta pesquisa foi fruto de um projeto de Iniciação Científica, desenvolvido nos anos de 2020 e 2021, atrelado ao Grupo de Pesquisa de Geometria e Topologia da UNILA, é possível encontrar alguns dos resultados aqui obtidos no nosso trabalho publicado (CHÁVEZ et al., 2021). Vale ressaltar que

neste presente texto apresentamos tais resultados com mais detalhes e alguns outros adicionais foram incluídos.

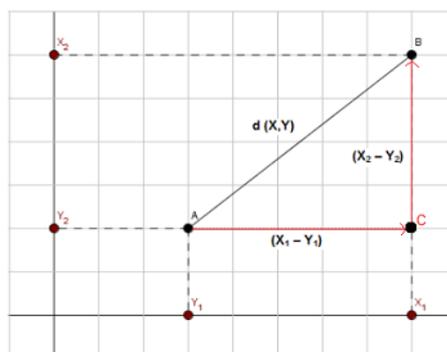
### 1.1 REFLETINDO SOBRE MENORES CAMINHOS

Caso você tenha pensado que os caminhos mais curtos são sempre direções retílineas, não se preocupe. Afinal, quase toda a geometria que aprendemos na escola é a Geometria Euclidiana, na qual se aplica muito bem aos objetos planos e espaciais em um espaço que não possui nenhum tipo de interferência ou restrição. Entretanto, ao longo da história, muitos estudiosos se dedicaram à estudos de outros tipos de geometria, as não-euclidianas, onde obtiveram resultados que vão além da nossa "percepção euclidiana".

Para darmos ao leitor uma maior ideia do problema do trabalho, apresentamos mais alguns exemplos. O primeiro deles é bem comum de serem utilizados como proposta na educação básica quando é abordado o tema de geometria não-euclidiana: a Geometria Táxi. Isto se dá devido a suas facilidades de compreensão e visualização nos modelos geográficos urbanos.

Nesta geometria, "não existem diagonais", ou ainda, para ir de um ponto à outro você só pode percorrer por caminhos horizontais e verticais. Como mostra a Figura 1, para ir do ponto  $A$  até o ponto  $B$ , não se pode seguir por uma linha reta. Um dos caminhos possíveis é seguir em direção do ponto  $C$  e depois em direção do ponto  $B$ .

Figura 1 – Geometria Táxi



Fonte: Adaptada de GUSMÃO, SAKAGUTI e PIRES (2017, fig. 2, p. 219)

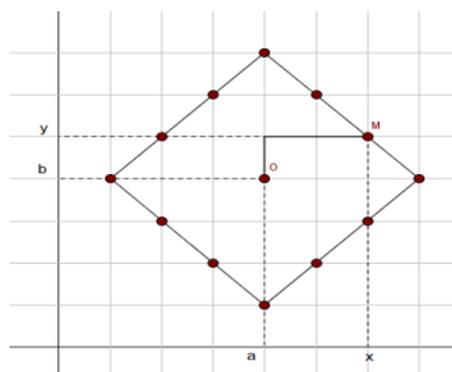
Vale ressaltar que o caminho sugerido no parágrafo anterior não é o único caminho mais rápido. Por exemplo, poderíamos denotar uma regra de que, para ir de  $A$  até  $B$ , só é possível seguir em direções para a direita e para cima. Verifique, neste caso, que existe mais de um caminho que o menor percurso é o mesmo.

Esta é uma ideia que vai um pouco além de nossa percepção usual. Ora, como é possível ir de um ponto à outro por diferentes caminhos e, ainda sim, percorrer a menor distância possível? Pense nisso como um problema aplicado na sua cidade, por exemplo, onde você só pode ir ao longo das ruas e nem sempre é possível "cortar" por atalhos de uma quadra à outra. Pode ser que agora o problema tenha ficado mais visível para você, caro leitor.

Nesta métrica, ainda, também podemos perceber que a nossa concepção sobre o formato de uma uma circunferência nem sempre está correta. Os autores (GUSMÃO; SAKAGUTI; PIRES, 2017) apresentam como seriam as formas de algumas circunferências nesta métrica (aquela mesmo, redonda como nossa "percepção euclidiana" nos remete).

Como podemos ver na Figura 2, a circunferência de centro  $O$  possui formato de losango. Além das circunferências, outros objetos geométricos também podem não possuir os mesmos formatos que estamos habituados.

Figura 2 – "Circunferência Táxi"

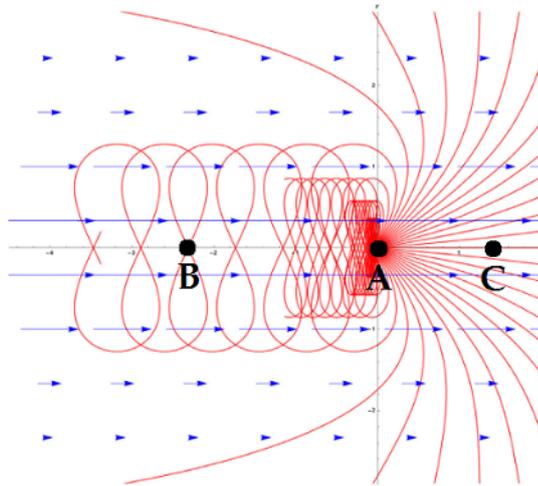


Fonte: GUSMÃO, SAKAGUTI e PIRES (2017, fig. 4, p. 221)

Agora, imagine um rio que possui um fluxo na horizontal, da esquerda para a direita. Assim, queremos encontrar a rota ótima para chegar de um ponto à outro no menor tempo possível. No artigo científico publicado (KOPACZ, 2017), o autor

estudou os menores caminhos para se chegar de um ponto à outro em um exemplo como este do rio, como mostra a figura abaixo:

Figura 3 – Menores caminhos em um rio com fluxo de correnteza



Fonte: Adaptada de (KOPACZ, 2017, cap. 5, fig. 14, p. 540)

Como podemos observar na Figura 3, partindo de um ponto  $A$  até um ponto  $C$ , à direita, o melhor caminho é seguir por uma linha reta. Intuitivamente, esta é a mesma direção que o fluxo da água empurra o barco (representado pelas setas azuis), facilitando esta rota. Mas, para ir até um ponto  $B$ , à direita de  $A$ , o fluxo do rio dificulta essa trajetória. Nesse sentido, ir na direção diretamente contrária à este fluxo pode não ser a melhor alternativa.

Perceba que, neste exemplo existe um fator, ou uma força, presente no sistema que interfere na tomada da decisão do melhor caminho à se percorrer, assim como mencionado nos problemas de Zermelo. Matematicamente, o fluxo da água pode ser traduzido como um campo de forças que atua sobre o meio (o rio).

Por ora, apresentamos estes exemplos apenas para refletirmos sobre nosso questionamento de que nem sempre os menores caminhos são linhas retas e, acrescentado à isto, quando estudamos um tipo de geometria não-euclidiana, muitas de nossas percepções não podem ser concluídas de imediato, sem que seja feito um estudo mais aprofundado.

Do Capítulo 3 em diante, veremos melhor de maneira mais prática como relacionar os conceitos de menores caminhos, de distâncias e de geometria, por meio da linguagem matemática. Entretanto, neste primeiro momento, à grosso modo,

podemos antecipar que, se sabemos calcular distâncias, então podemos construir objetos geométricos. Por exemplo, a partir da definição de circunferência, esta é o lugar geométrico de todos os pontos que possuem a mesma distância de um determinado ponto, do seu centro. Assim, se sabemos calcular a distância entre pontos, então podemos encontrar todos os pontos de uma circunferência e estudar sua forma geométrica (Seções 4.1 e 4.2).

## 2 PRELIMINARES

Antes de darmos início ao nosso trabalho, vamos apresentar neste capítulo algumas definições e propriedades de conceitos que utilizaremos ao longo do texto. Definições e estudos mais aprofundados podem ser encontrados em referenciais teóricos de Geometria Analítica (CAMARGO; BOULOS, 2005), de Álgebra Linear (SANTOS; ANDRADE, 2015), de Cálculo (GUIDORIZZI, 2013a; GUIDORIZZI, 2013b), de Geometria Diferencial (CARMO, 2014; TENENBLAT, 2008) e de Análise Real (LIMA, 1999; LIMA, 2016).

Algumas considerações iniciais:

- Consideramos o plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  sendo o conjunto de todos os pares ordenados  $(x_1, x_2)$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são números reais;
- Consideramos um *vetor* como sendo uma *classe de equipolência* de um segmento orientado, isto é, a classe de todos os segmentos orientados com mesma direção, mesmo comprimento e mesmo sentido. Para um segmento orientado com origem em um ponto  $P$  e extremidade em um ponto  $Q$ , denotamos o vetor por  $\overrightarrow{PQ}$ , ou ainda, por qualquer letra  $(u, v, y, \dots)$ , desde que tenham mesmas coordenadas;
- Sejam  $P = (p_1, p_2)$  e  $Q = (q_1, q_2)$  dois pontos do  $\mathbb{R}^2$ . As coordenadas do vetor  $\overrightarrow{PQ}$  são dadas por  $Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ .

**Definição 2.1 (Produto interno e norma euclidiana em  $\mathbb{R}^2$ )** Sejam  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$  vetores em  $\mathbb{R}^2$ . Definimos o produto interno entre  $u$  e  $v$ , denotado por  $\langle u, v \rangle$ , como sendo o número real definido por:

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2.$$

A norma de  $u$ , denotada por  $\|u\|$ , é definida por:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

**Observação 2.1** Embora seja mais comum definir norma e produto interno euclidiano em termos de vetores, poderíamos considerar na definição acima pontos  $P$  e  $Q$  do  $\mathbb{R}^2$ , de maneira que qualquer  $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  pode ser representado pela operação

$O + \overrightarrow{OX}$ , onde  $O$  é a origem do plano cartesiano (perceba que  $X$  e  $\overrightarrow{OX}$  possuem as mesmas coordenadas). Assim, em termos de pontos, a Definição (2.1) segue análoga.

**Definição 2.2 (Distância euclidiana em  $\mathbb{R}^2$ )** Dados dois pontos quaisquer  $P = (p_1, p_2)$  e  $Q = (q_1, q_2)$  no  $\mathbb{R}^2$ , a distância euclidiana entre  $P$  e  $Q$  é dada pela função  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}.$$

Observe que a norma de um vetor é exatamente o seu comprimento.

**Propriedades 2.1 (Produto interno e norma euclidiana)** Quaisquer que sejam os vetores  $x, y$  e  $z$  do  $\mathbb{R}^2$ , o produto interno e a norma euclidiana satisfazem as seguintes propriedades:

1.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;
2.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ ;
3.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
4.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  (ou  $\|x\| \geq 0$ ), onde a igualdade ocorre somente se  $x = \vec{0} = (0, 0)$ ;
5. (Desigualdade Triangular)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .
6. É conveniente apresentarmos mais uma propriedade, pois a utilizaremos em diversos momentos do nosso estudo. Utilizando as propriedades acima e da própria definição de norma, temos que:

Dados dois pontos  $P$  e  $Q$  quaisquer do  $\mathbb{R}^2$ , vale:

$$\|P + Q\|^2 = \|P\|^2 + 2\langle P, Q \rangle + \|Q\|^2.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|P + Q\|^2 &= \langle P + Q, P + Q \rangle = \langle P + Q, P \rangle + \langle P + Q, Q \rangle \\ &= \langle P, P \rangle + 2\langle P, Q \rangle + \langle Q, Q \rangle = \|P\|^2 + 2\langle P, Q \rangle + \|Q\|^2. \end{aligned}$$

**Definição 2.3 (Ângulo entre vetores)** O ângulo  $\theta \in [0, \pi]$  formado entre dois vetores não nulos  $u$  e  $v$  é definido por:

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

**Definição 2.4 (Bola aberta em  $\mathbb{R}^2$ )** Uma bola aberta (ou disco aberto) com centro em  $P \in \mathbb{R}^2$  e raio  $r > 0$  é o conjunto  $\mathbb{B}_r(P)$  definido por:

$$\mathbb{B}_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \|X - P\| < r\}.$$

Em outras palavras,  $\mathbb{B}_r(P)$  é o conjunto de todos os pontos do  $\mathbb{R}^2$  tais que sua distância euclidiana até o ponto  $P$  é menor do que o raio  $r$ . Ao longo do texto, usaremos a notação  $\mathbb{B}^2$  para representar a bola aberta, unitária e centrada na origem do plano cartesiano.

Chamamos de fronteira ou borda de  $\mathbb{B}_r(P)$  o conjunto  $\partial\mathbb{B}_r(P)$  de todos os pontos  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  equidistantes de  $P$  à uma distância  $r$ . Em termos algébricos:

$$\partial\mathbb{B}_r(P) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \|X - P\| = r\}.$$

O conjunto  $\partial\mathbb{B}_r(P)$  nada mais é do que uma circunferência euclidiana, centrada em  $P$  e de raio  $r$ .

**Definição 2.5 (Conjunto aberto)** Um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  é dito aberto se, para todo  $X \in A$ , existe uma bola aberta centrada em  $X$  e contida inteiramente em  $A$ . Em termos algébricos,  $A$  é aberto se, e somente se,

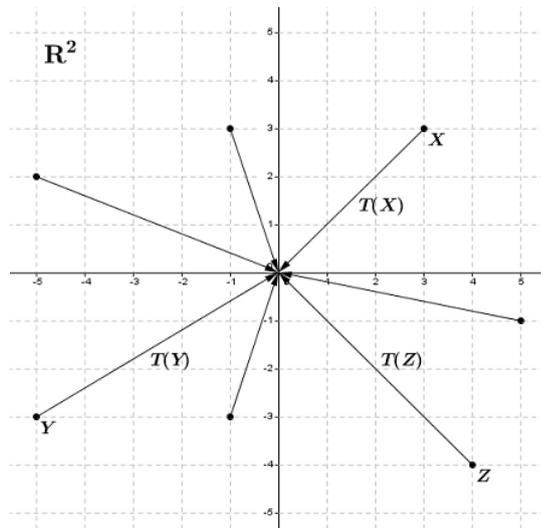
$$\forall X \in A, \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } \mathbb{B}_\epsilon(X) \subset A.$$

Em particular, a bola  $\mathbb{B}_r(P)$  é um conjunto aberto.

Dada uma função  $T$  definida por uma aplicação (ou transformação) de um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , muitas vezes, quando consideramos o seu significado físico ou geométrico, é conveniente representarmos  $T(x)$ , para todo  $x \in \Omega$ , como um vetor e, assim, definimos  $T$  como sendo um campo vetorial.

**Definição 2.6 (Campo vetorial)** Um campo vetorial em um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  que associa à cada elemento  $x \in \Omega$  um vetor  $T(x) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 2.1** Para cada  $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , consideramos o campo vetorial  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definido por  $T(X) = -X = (-x_1, -x_2)$  (Veja a Figura 4).

Figura 4 – Campo vetorial  $T$  em  $\mathbb{R}^2$ 

Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

**Definição 2.7 (Curva diferenciável parametrizada regular de classe  $C^k$  em  $\mathbb{R}^2$ )**

Uma curva parametrizada  $\alpha$  em um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $\alpha : I \rightarrow \Omega$  definida em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .

Uma curva parametrizada  $\alpha$  é dita diferenciável se  $\alpha$  for de classe  $C^k$ , para algum  $k > 0$ , isto é, cada coordenada de  $\alpha$  é de classe  $C^k$ .

Uma curva parametrizada  $\alpha$  é dita regular se, para todo  $t \in I$ , têm-se  $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ . Uma curva parametrizada  $\alpha$  é dita regular por partes se existe uma partição  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  de  $I$  tal que  $\alpha$  é regular em todo subintervalo  $]t_{i-1}, t_i[$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Por fim, mas não menos importante, dada uma curva regular, podemos calcular o seu comprimento de arco. Intuitivamente, se uma partícula se desloca ao longo de uma curva, podemos calcular o comprimento deste trajeto. Este conceito nos será bastante importante, na medida que iremos utilizar esta ideia para realizarmos cálculos de distâncias, como veremos mais adiante.

**Definição 2.8 (Comprimento de arco em  $\mathbb{R}^2$ )** Seja  $\alpha : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular de classe  $C^1$ . Para algum  $t_0 \in ]a, b[$  dado, definimos o comprimento de arco de  $\alpha$  por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau.$$

## 2.1 MÉTRICAS

Quando pesquisamos em algumas bibliografias de Geometria de Finsler, as definições de métrica mais comuns envolvem o conceito de distâncias, como por exemplo SHEN (2001) e CHERN e SHEN (2005), nos levando a designar um segundo grau de abstração para podermos compreender o que é uma métrica, especificamente. Também é possível encontrar que uma métrica é uma generalização de distância, ou ainda, uma função distância (SHEN, 2001). Mas, de que forma isto ocorre?

Uma métrica é uma função que nos permite calcular a quantidade de espaço quando se percorre por qualquer comprimento de curva (veja a Definição 2.11) e a distância (veja a Definição 2.12) nos fornece a menor destas quantidades. É a métrica que nos determina o comportamento da distância em um espaço.

Por outro lado, se a fórmula da distância nos permite construir objetos geométricos, então, de uma maneira geral, a métrica definida é quem "determina" toda esta construção, toda uma geometria. Por exemplo, por trás da Geometria Euclidiana existe uma Métrica Euclidiana.

Um dos matemáticos que dedicou seu tempo para estudar outros tipos de geometrias, consequentemente, outros tipos de métricas, além da usual euclidiana, foi o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) que, em 1854, publicou concepções sobre uma métrica que generaliza as Métricas Euclidianas (BOYER, 2010, p. 377). Consequentemente, tais tipos de métricas são chamadas de Métricas Riemmanianas.

Algumas definições formais de Métricas Riemmanianas podem ser encontradas em referências avançadas de Geometria Riemmaniana e Diferencial (CARMO, 2014; CARMO, 2019), mas nós fixaremos apenas nos casos destas métricas em conjuntos abertos do  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.9 (Métrica Riemmaniana em  $\mathbb{R}^2$ )** *Sejam  $a_{ij} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $i, j = 1, 2$ , funções diferenciáveis, onde a matriz  $[a_{ij}(x)]_{2 \times 2}$  é simétrica e positiva definida para todo  $x \in \Omega$ . Para qualquer vetor  $y_x = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , definimos a Métrica Riemmaniana sobre  $\Omega$  como sendo a quantidade*

$$\alpha(x, y_x) = \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + [a_{12}(x) + a_{21}]y_1y_2 + a_{22}(x)y_2^2}. \quad (2.1)$$

Observe que, a Métrica Euclidiana é um caso particular desta métrica, tomando o caso em que  $a_{11}(x) = a_{22}(x) = 1$  e  $a_{12}(x) = a_{21}(x) = 0$  (veja a Definição 2.2).

**Exemplo 2.2** A função  $\alpha$  sobre  $\Omega \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^4$  definida por

$$\alpha(x, y_x) = \sqrt{x_1(y_1^2 + y_2^2)}$$

é uma Métrica Riemmaniana, pois os coeficientes  $a_{ij}(x)$  são dados pela matriz

$$[a_{ij}]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix},$$

que é simétrica e positiva definida para todo  $x \in \Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\}$ .

É conveniente mencionar que existem muitos outros tipos de métricas que não apresentaremos aqui, pois, para que o leitor compreenda melhor possível as ideias, nos fixaremos apenas naquelas que, de alguma forma, possuem relações com o tipo de métrica que utilizaremos no nosso estudo.

Uma generalização das Métricas Riemmanianas são as chamadas *Métricas de Finsler*, um tipo de métrica que também generaliza as Métricas de Randers que utilizaremos mais adiante. Para nosso propósito, nos restringiremos apenas para as métricas do tipo Randers, mas estudos mais aprofundados sobre a geometria de Finsler podem ser encontrados em CHERN e SHEN (2005), SHEN (2001) e CHENG e SHEN (2012).

**Definição 2.10 (Métrica de Randers)** Seja  $\alpha$  uma Métrica Riemmaniana sobre  $\Omega$  dada em (2.1) e uma aplicação  $\beta$  da forma  $\beta(x, y_x) = b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2$ , onde  $b_1, b_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$  são funções diferenciáveis que satisfazem a condição:

$$\sqrt{a^{11}(x)[b_1(x)]^2 + [a^{12}(x) + a^{21}(x)]b_1(x)b_2(x) + a^{22}(x)[b_2(x)]^2} < 1,$$

com  $[a^{ij}(x)] = [a_{ij}(x)]^{-1}$ , para todo  $x \in \Omega$ .

Uma Métrica de Randers sobre  $\Omega$  é uma função  $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(x, y_x) = \alpha(x, y_x) + \beta(x, y_x).$$

Estas métricas podem ser interpretadas como uma perturbação de uma Métrica Riemmaniana  $\alpha$  por  $\beta$ .

**Exemplo 2.3** Dada a Métrica Riemmaniana do Exemplo 2.2, considere a aplicação  $\beta = b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2$ , onde as funções  $b_1, b_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis e definidas por  $b_1(x) = x_1$  e  $b_2(x) = 0$ . Observe que  $b_1$  e  $b_2$  só satisfazem a condição sobre a Métrica de Randers caso  $0 < x_1 < 1$ .

De fato, tomando a matriz inversa de  $[a_{ij}(x)]$ :

$$[a^{ij}(x)] = \begin{bmatrix} x_1^{-1} & 0 \\ 0 & x_1^{-1} \end{bmatrix},$$

temos que

$$\sqrt{a^{11}(x)[b_1(x)]^2 + [a^{12} + a^{21}]b_1(x)b_2(x) + a^{22}[b_2(x)]^2} = x_1.$$

Assim, para que a raiz acima seja menor do que 1, basta que  $0 < x_1 < 1$ . Desta maneira, vamos definir a Métrica de Randers sobre o subconjunto

$$\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 < 1\} \subset \Omega.$$

Portanto, a Métrica de Randers  $F : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$F(x, y_x) = \alpha(x, y_x) + \beta(x, y_x) = \sqrt{x_1(y_1^2 + y_2^2)} + x_1 y_1.$$

Visto que trabalharemos mais adiante com uma métrica do tipo Randers é conveniente apresentarmos a seguinte definição:

**Definição 2.11 (Comprimento de arco do tipo Randers)** Seja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$  uma parametrização de uma curva regular por partes. O comprimento de arco do tipo Randers é definido como sendo

$$\mathcal{L}_F(\alpha) = \int_a^b F(\alpha(t), \alpha'(t)) dt, \quad (2.2)$$

onde  $F$  é uma Métrica de Randers.

A definição anterior nos fornece uma ferramenta para o cálculo do comprimento de qualquer curva sobre uma métrica de Randers.

**Definição 2.12 (Distância induzida por uma métrica  $F$ )** Considere o comprimento de arco definido em (2.2). Para quaisquer  $P, Q \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , a distância induzida pela métrica  $F$  é definida pela quantidade

$$d_F(P, Q) = \inf_{\alpha} \{\mathcal{L}_F(\alpha)\},$$

onde ínfimo é tomado pelo conjunto de todas as curvas regulares por partes  $\alpha$  tais que  $\alpha(a) = P$  e  $\alpha(b) = Q$ .

Mais adiante, conseguiremos interpretar fisicamente estas quantidades (veja Teorema 4.1).

### 3 MÉTRICA DE FUNK

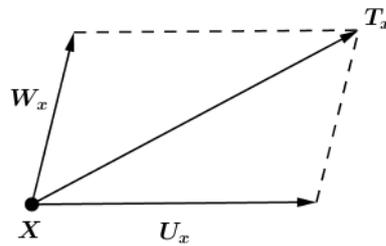
Daqui em diante, daremos início de fato ao nosso estudo sobre a *Métrica de Funk* no plano, que é um caso particular de métricas do tipo Randers. Desta maneira, nesta primeira parte do capítulo, iremos estudar as Métricas de Randers em um subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  obtidas através de um Problema de Navegação de Zermelo, isto é, iremos construir um problema geométrico a partir de um problema físico de um barco navegando. Vale destacar que sempre é possível mostrar que uma Métrica de Randers pode ser induzida por um dos problemas de Zermelo e vice-versa (CHENG; SHEN, 2012, cap. 2).

Suponha que um barco, com vetor posição  $\alpha(t) : [0, t_0] \rightarrow \Omega$ , possua uma força interna constante (como a força de um motor) numa velocidade constante  $\alpha'(t)$ , tal que  $\|\alpha'(t)\| = 1$ . Sem a presença de forças externas, um segmento de reta descreve o menor caminho para o barco chegar de um ponto à outro. Assim,

$$\int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^t 1 dt = t, \text{ para } t \in [0, t_0]. \quad (3.1)$$

Isto quer dizer que o comprimento do segmento de reta é exatamente o tempo de viagem do barco. Agora, vamos verificar se o mesmo ocorre ao considerar forças externas.

Seja  $x \in \Omega$  a posição do barco e  $U_x$  a velocidade constante impulsionada pela sua força interna. Agora, considere que seja exercida uma força externa  $W_x$  (a correnteza da água ou a força do vento, por exemplo), com  $\|W_x\| < \|U_x\| = 1$ , assegurando que o barco possa ir para todas as direções possíveis. A força resultante  $T_x$  da soma entre as forças internas e externas é a direção e velocidade que o barco se movimenta ao se considerar todas as forças exercidas à ele.

Figura 5 – Força resultante  $T_x$ 

Fonte: Autores (2022). Construção no *software Geogebra 5.0*.

Assim, como mostra a Figura 5, temos

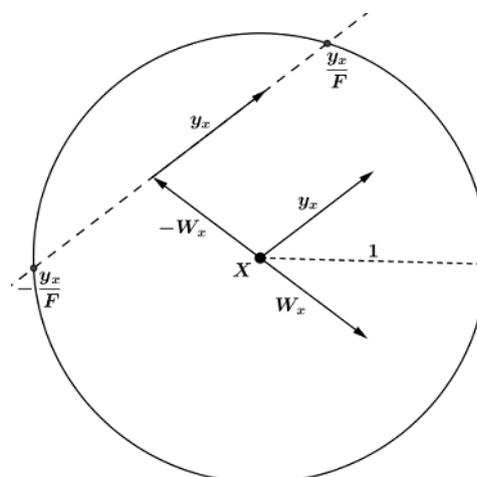
$$T_x = U_x + W_x.$$

Da condição  $\|U_x\| = 1$ , segue

$$\|T_x - W_x\| = \|U_x\| = 1. \quad (3.2)$$

Por outro lado, para qualquer vetor  $y_x \in \mathbb{R}^2$  não nulo, existe uma única solução positiva  $F(x, y_x)$  para a equação (veja a Figura 6).

$$\left\| \frac{y_x}{F(x, y_x)} - W_x \right\| = 1. \quad (3.3)$$

Figura 6 – Solução positiva  $F$ 

Fonte: Autores (2022). Construção no *software Geogebra 5.0*.

Assim, de (3.2) e (3.3), temos

$$T_x = \frac{T_x}{F(x, T_x)} \Rightarrow F(x, T_x) = 1.$$

Dessa forma, para qualquer curva suave  $\alpha(t) : [0, t_0] \rightarrow \Omega$ , com  $\alpha'(t) = T_{\alpha(t)}$ , o comprimento de arco do tipo Randers de  $\alpha$  é dado por (2.2)

$$\int_0^t F(\alpha(t), T_{\alpha(t)}) dt = \int_0^t 1 dt = t, \text{ para } t \in [0, t_0]. \quad (3.4)$$

**Observação 3.1** *A identidade (3.4) nos fornece o nexo entre o mundo geométrico (comprimento de arco) e o mundo físico de navegação. Isto é, o comprimento de arco da métrica  $F$  nada mais é que o tempo de viagem de um barco que navega sobre uma curva  $\alpha$ . Mais do que isso, podemos concluir que, mesmo quando há influência de uma força externa, a distância de um ponto à outro pode ser interpretado como sendo o menor tempo para chegar de um ponto à outro e este tempo será determinado pelo comprimento de arco do tipo Randers da métrica  $F$  sobre o menor caminho que liga estes pontos, ou ainda, o caminho que é realizado no menor tempo entre estes pontos.*

Para obter uma fórmula para a função  $F$ , de (3.3), temos

$$\|y_x - FW_x\|^2 = F^2,$$

ou ainda, usando a Propriedade 6 do produto interno e norma euclidiana, teremos

$$(1 - \|W_x\|^2)F^2 + 2F\langle W_x, y_x \rangle - \|y_x\|^2 = 0.$$

As raízes da equação acima são dadas por:

$$F = \frac{-\langle W_x, y_x \rangle}{1 - \|W_x\|^2} \pm \frac{\sqrt{\langle W_x, y_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)}}{1 - \|W_x\|^2}. \quad (3.5)$$

Para assegurar que  $F > 0$ , observe que, como  $y_x$  é não nulo e  $\|W_x\| < 1$ , então  $\|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2) > 0$ . Ainda, somando  $\langle W_x, y_x \rangle^2$  na desigualdade, obtemos

$$\langle W_x, y_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2) > \langle W_x, y_x \rangle^2.$$

Assim,

$$F_1 = -\langle W_x, y_x \rangle + \sqrt{\langle W_x, y_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)} > 0$$

OU

$$F_2 = -\langle W_x, y_x \rangle - \sqrt{\langle W_x, y_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)} < 0,$$

isto é, somente uma das raízes de  $F$  é positiva, como já tínhamos observado em (3.3).

Portanto, de (3.5), temos que a métrica  $F$  é dada por:

$$F = \frac{\sqrt{\langle W_x, y_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)}}{1 - \|W_x\|^2} - \frac{\langle W_x, y_x \rangle}{1 - \|W_x\|^2}. \quad (3.6)$$

**Observação 3.2** A métrica  $F$  obtida é do tipo Randers, segundo a Definição 2.10. De fato,  $F$  é da forma  $F = \alpha + \beta$ , onde

$$\alpha = \frac{\sqrt{\langle W_x, y_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)}}{1 - \|W_x\|^2} \text{ e } \beta = \frac{-\langle W_x, y_x \rangle}{1 - \|W_x\|^2}$$

**Exemplo 3.1 (Métrica de Funk sobre o disco unitário e aberto)** (Ver (FUNK, 1929))

Considere o campo vetorial  $W_x = -x = (-x_1, -x_2)$  definido sobre  $\mathbb{B}^2$  o disco (ou bola) unitário, aberto e centrado na origem do plano cartesiano (veja Figura 7). Para  $y_x = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  um vetor qualquer, a métrica  $F$  obtida em (3.6) fica

$$F(x, y_x) = \frac{\sqrt{(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (y_1^2 + y_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}}{1 - x_1^2 - x_2^2} + \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}. \quad (3.7)$$

Ou ainda, podemos escrever

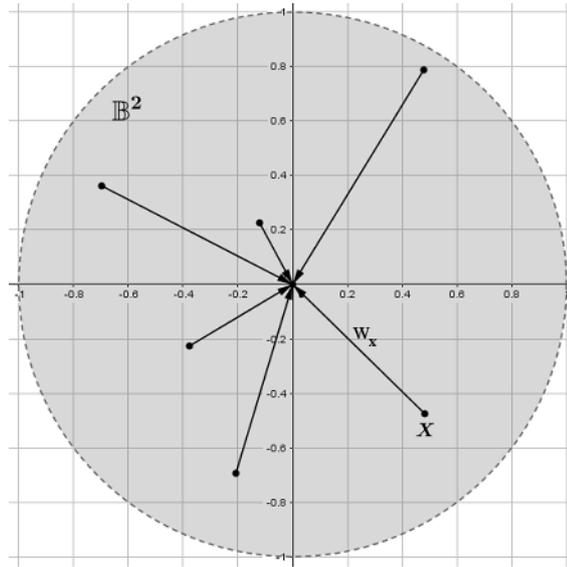
$$F(x, y_x) = \sqrt{a_{11}(x)y_1^2 + 2a_{12}(x)y_1 y_2 + a_{22}(x)y_2^2} + b_1(x)y_1 + b_2(x)y_2,$$

onde os coeficientes são dados por

$$a_{ij}(x) = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2} \begin{pmatrix} 1 - x_2^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & 1 - x_1^2 \end{pmatrix}, \quad b_1(x) = \frac{x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2} \text{ e } b_2(x) = \frac{x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Recomendamos que o leitor atente-se ao Exemplo 3.1 e ao conjunto  $\mathbb{B}^2$  definido, pois nos serão bastante úteis a partir de agora, ao utilizarmos esta métrica  $F$  obtida como nosso objeto de estudo para os próximos resultados.

Observe que a forma explicitada de (3.7) é um tanto mais complexa que a forma geral de (3.6), esta última é até mais fácil de manusear utilizando apenas as propriedades de produto interno e norma euclidiana. Assim, por simplicidade de notações, quando nos referirmos à Métrica de Funk, utilizaremos a fórmula obtida em (3.6), onde  $W$  é o campo vetorial definido no Exemplo 3.1 sobre conjunto  $\mathbb{B}^2$ .

Figura 7 – Campo de forças sobre  $\mathbb{B}^2$ 

Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

Antes de finalizar este capítulo, observe que, na equação (3.4), tomamos uma parametrização  $\alpha$  específica (tal que  $\alpha' = T_\alpha$ ). Em seguida, mostraremos uma propriedade de  $F$  que nos permite escolher qualquer reparametrização de  $\alpha$ .

**Observação 3.3** ( *$F$  é homogênea*) Seja  $\lambda > 0$  um número real. Da equação (3.6) e pelas propriedades do produto interno e norma euclidiana (Propriedades 2.1), temos

$$\begin{aligned} F(x, \lambda y_x) &= \frac{\sqrt{\langle W_x, \lambda y_x \rangle^2 + \|\lambda y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)}}{1 - \|W_x\|^2} - \frac{\langle W_x, \lambda y_x \rangle}{1 - \|W_x\|^2} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda^2 \langle W_x, y_x \rangle^2 + \lambda^2 \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)}}{1 - \|W_x\|^2} - \frac{\lambda \langle W_x, y_x \rangle}{1 - \|W_x\|^2} \\ &= \lambda \left[ \frac{\sqrt{\langle W_x, y_x \rangle^2 + \|y_x\|^2(1 - \|W_x\|^2)}}{1 - \|W_x\|^2} - \frac{\langle W_x, y_x \rangle}{1 - \|W_x\|^2} \right] = \lambda F(x, y_x). \end{aligned}$$

Ou seja, a métrica  $F$  é uma função positiva homogênea de grau 1 em  $y_x$ .

**Observação 3.4** (*Invariância do comprimento de arco por uma reparametrização*)

Da observação anterior, temos a implicação da invariância do comprimento de arco do tipo Funk ao tomar uma reparametrização qualquer da curva  $\alpha$  na equação (3.4).

De fato, considere  $\phi : [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$  com derivada positiva  $\phi'(t) > 0$  (pois preserva a orientação de  $\alpha$ ) e diferenciável de classe  $C^1$ . Tomando a mudança de variável  $u = \phi(t)$

( $du = \phi'(t)dt$ ) em (3.4) e considerado a homogeneidade da  $F$ , temos

$$\int_0^{t_0} F(\alpha(\phi(t)), \alpha'(\phi(t))) \phi'(t) dt = \int_{\phi(0)}^{\phi(t_0)} F(\alpha(u), \alpha'(u)) du,$$

que é exatamente o comprimento de arco do tipo Randers, em (3.4).

### 3.1 DISTÂNCIA INDUZIDA PELA MÉTRICA DE FUNK

Como já vinhamos refletindo desde o início deste trabalho, agora que obtemos a Métrica de Funk, na qual utilizaremos no decorrer de nosso estudo, para que possamos calcular distâncias em  $\mathbb{B}^2$ , precisamos conhecer as curvas que realizam os menores caminhos nesta métrica.

Apenas por curiosidade, na literatura as curvas que possuem a propriedade de minimizar as distâncias são chamadas de *geodésicas*. Para mais detalhes sobre geodésicas em *superfícies* consultar TENENBLAT (2008) e sobre geodésicas em *espaços de Finsler* consultar SHEN (2001). Para nosso propósito, fixaremos apenas na ideia de menores caminhos.

Casos mais genéricos das métricas de Funk em bolas unitárias do  $\mathbb{R}^n$  foram estudados por SHEN (2001, ex. 9.2.1), onde constata que os menores caminhos são, de fato, segmentos de reta. Desta forma, mesmo que a métrica  $F$  seja um tipo de métrica não euclidiana, ainda assim, seus menores caminhos são linhas retas. Esta propriedade torna  $F$  um tanto mais tratável para desenvolver cálculos de distância.

Como vimos na Observação 3.1, utilizando a integral de comprimento de arco do tipo Randers, da Definição 2.2, através de uma curva que realiza o menor caminho de um ponto à outro, podemos calcular a distância induzida pela Métrica de Funk  $F$ , ou ainda, o tempo de viagem para ir de um ponto à outro. Portanto, podemos tomar a curva  $\alpha$  como sendo uma parametrização de um segmento de reta e realizar o cálculo da distância em  $\mathbb{B}^2$ .

Sejam  $P, Q \in \mathbb{B}^2$  dois pontos distintos e suponha que um barco parta do ponto de origem  $P$  com destino à  $Q$ . Queremos obter o menor tempo possível para esta viagem, ou ainda, calcular a distância entre estes dois pontos.

**Teorema 3.1 (Distância induzida pela Métrica de Funk)** Sejam  $P, Q \in \mathbb{B}^2$  dois pontos distintos. A distância induzida pela Métrica de Funk  $d_F$  de  $P$  à  $Q$  é dada por

$$d_F(P, Q) = \ln \left( \frac{\sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{k} - \langle Q, Q - P \rangle} \right), \quad (3.8)$$

onde  $k = \langle P, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2(1 - \|P\|^2)$ .

**Demonstração 3.1** Pela Observação 3.4, podemos considerar a seguinte parametrização de reta:  $\alpha(t) = P + (Q - P)t$ , com  $t \in [0, 1]$ . Note que  $\alpha(0) = P$  e  $\alpha(1) = Q$ . Assim, conforme a Definição 2.12, a distância de  $P$  até  $Q$  é dada pela integral:

$$d_F(P, Q) = \mathcal{L}_F(\alpha([0, 1])) = \int_0^1 F(\alpha(t), \alpha'(t)) dt,$$

onde  $F$  é dada por (3.6). Assim,

$$\begin{aligned} d_F(P, Q) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle^2 + \|\alpha'(t)\|^2(1 - \|\alpha(t)\|^2)}}{1 - \|\alpha(t)\|^2} - \frac{\langle -\alpha(t), \alpha'(t) \rangle}{1 - \|\alpha(t)\|^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\langle P + (Q - P)t, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2(1 - \|P + (Q - P)t\|^2)}}{1 - \|P + (Q - P)t\|^2} + \\ &\quad + \frac{\langle P + (Q - P)t, Q - P \rangle}{1 - \|P + (Q - P)t\|^2} dt. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Observe que, utilizando as propriedades de produto interno e norma euclidiana (veja Propriedades 2.1), teremos

$$\begin{aligned} &\langle P + (Q - P)t, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2(1 - \|P + (Q - P)t\|^2) \\ &= (\langle P, Q - P \rangle + \|Q - P\|^2 t)^2 \\ &\quad + \|Q - P\|^2(1 - \|P\|^2 - 2\langle P, Q - P \rangle t - \|Q - P\|^2 t^2) \\ &= \langle P, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2(1 - \|P\|^2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Note que  $k = \langle P, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2(1 - \|P\|^2)$  é uma constante real positiva e seria igual à zero se, e somente se  $P = Q$ . Por outro lado,

$$\langle P + (Q - P)t, Q - P \rangle = \langle P, Q - P \rangle + \|Q - P\|^2 t \quad (3.11)$$

e

$$1 - \|P + (Q - P)t\|^2 = 1 - \|P\|^2 - 2t\langle P, Q - P \rangle - \|Q - P\|^2 t^2. \quad (3.12)$$

Substituindo as equações (3.10), (3.11) e (3.12) em (3.9), teremos

$$d_F(P, Q) = I_1(P, Q) + I_2(P, Q), \quad (3.13)$$

onde

$$I_1(P, Q) = \sqrt{k} \int_0^1 \frac{1}{1 - \|P\|^2 - 2t\langle P, Q - P \rangle - \|Q - P\|^2 t^2} dt, \quad (3.14)$$

com

$$k = \langle P, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2(1 - \|P\|^2) > 0, \quad (3.15)$$

e

$$I_2(P, Q) = \int_0^1 \frac{\langle P, Q - P \rangle + \|Q - P\|^2 t}{1 - \|P\|^2 - 2t\langle P, Q - P \rangle - \|Q - P\|^2 t^2} dt. \quad (3.16)$$

Calculando as raízes do polinômio  $1 - \|P\|^2 - 2t\langle P, Q - P \rangle - \|Q - P\|^2 t^2$ , obtemos

$$t_{1,2} = \frac{2\langle P, Q - P \rangle \pm \sqrt{4\langle P, Q - P \rangle^2 + 4(1 - \|P\|^2)\|Q - P\|^2}}{-2\|Q - P\|^2} = \frac{-\langle P, Q - P \rangle \pm \sqrt{k}}{\|Q - P\|^2}.$$

Considere

$$t_1 = \frac{-\langle P, Q - P \rangle + \sqrt{k}}{\|Q - P\|^2} \text{ e } t_2 = \frac{-\langle P, Q - P \rangle - \sqrt{k}}{\|Q - P\|^2}. \quad (3.17)$$

Assim, podemos escrever

$$1 - \|P\|^2 - 2t\langle P, Q - P \rangle - \|Q - P\|^2 t^2 = -\|Q - P\|^2(t - t_1)(t - t_2). \quad (3.18)$$

Por outro lado, pelo método das frações parciais, sejam  $a$  e  $b$  dois números reais tais que

$$\frac{1}{(t - t_1)(t - t_2)} = \frac{a}{t - t_1} + \frac{b}{t - t_2} = \frac{a(t - t_2) + b(t - t_1)}{(t - t_1)(t - t_2)}. \quad (3.19)$$

Para resolver a equação  $1 = a(t - t_2) + b(t - t_1)$ , recorremos ao sistema

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -at_2 - bt_1 = 1 \end{cases},$$

cuja solução é

$$a = \frac{-1}{t_2 - t_1} \text{ e } b = \frac{1}{t_2 - t_1}, \quad (3.20)$$

destacando que  $t_2 - t_1 = \frac{-2\sqrt{k}}{\|Q-P\|^2} \neq 0$ , pois  $k > 0$  (por (3.15)) e  $P \neq Q$ .

Sendo assim, substituindo (3.20) em (3.19) e depois em (3.14), também considerando (3.18), teremos

$$\begin{aligned}
I_1(P, Q) &= \sqrt{k} \int_0^1 \frac{1}{-\|Q-P\|^2(t_2-t_1)} \left( \frac{1}{t-t_2} - \frac{1}{t-t_1} \right) dt \\
&= \frac{-\sqrt{k}}{\|Q-P\|^2(t_2-t_1)} [\ln |t-t_2| - \ln |t-t_1|]_0^1 \\
&= \frac{-\sqrt{k}}{\|Q-P\|^2(t_2-t_1)} \left[ \ln \left| \frac{t-t_2}{t-t_1} \right| \right]_0^1 \\
&= \frac{-\sqrt{k}}{\|Q-P\|^2} \frac{\|Q-P\|^2}{-2\sqrt{k}} \left[ \ln \left| \frac{1-t_2}{1-t_1} \right| - \ln \left| \frac{-t_2}{-t_1} \right| \right] \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t_1(1-t_2)}{t_2(1-t_1)} \right|. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Para determinarmos  $I_2(P, Q)$ , observe que, fazendo a mudança de variável  $u = 1 - \|P\|^2 - 2t\langle P, Q-P \rangle - \|Q-P\|^2 t^2 = -\|Q-P\|^2(t-t_1)(t-t_2)$  (por (3.18)), temos que  $du = -2\langle P, Q-P \rangle - 2\|Q-P\|^2 t$ . Assim, utilizando esta mudança em (3.16), teremos

$$\begin{aligned}
I_2(P, Q) &= \frac{-1}{2} [\ln | -\|Q-P\|^2(t-t_1)(t-t_2) |]_0^1 \\
&= \frac{-1}{2} [\ln | -\|Q-P\|^2(1-t_1)(1-t_2) | - \ln | -\|Q-P\|^2(-t_1)(-t_2) |] \\
&= \frac{-1}{2} \ln \left| \frac{-\|Q-P\|^2(1-t_1)(1-t_2)}{-\|Q-P\|^2 t_1 t_2} \right| \\
&= \frac{-1}{2} \ln \left| \frac{(1-t_1)(1-t_2)}{t_1 t_2} \right|. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Antes de prosseguirmos, mostraremos a seguinte afirmação:

**Afirmação 3.1**  $t_1 > 1$ .

De fato, de (3.17),

$$\begin{aligned}
t_1 > 1 &\Leftrightarrow \frac{-\langle P, Q-P \rangle + \sqrt{k}}{\|Q-P\|^2} > 1 \\
&\Leftrightarrow -\langle P, Q-P \rangle + \sqrt{k} > \|Q-P\|^2 \\
&\Leftrightarrow \langle P, Q-P \rangle + \|Q-P\|^2 < \sqrt{k} \\
&\Leftrightarrow 2\langle P, Q-P \rangle \|Q-P\|^2 + \|Q-P\|^4 < \|Q-P\|^2(1 - \|P\|^2).
\end{aligned}$$

Como  $P \neq Q$ , então podemos dividir a desigualdade acima por  $\|Q - P\| \neq 0$ , obtendo assim:

$$\begin{aligned} 2\langle P, Q - P \rangle + \|Q - P\|^2 &< 1 - \|P\|^2 \\ \Leftrightarrow 2\langle P, Q \rangle - 2\|P\|^2 + \|Q\|^2 - 2\langle Q, P \rangle + \|P\|^2 &< 1 - \|P\|^2 \\ \Leftrightarrow \|Q\|^2 &< 1, \end{aligned}$$

na qual é verdadeira esta desigualdade, pois  $Q \in \mathbb{B}^2$ . Logo,  $t_1 > 1$ .

Desta forma, substituindo em (3.13) as fórmulas de  $I_1(P, Q)$  e  $I_2(P, Q)$  obtidas em (3.21) e (3.22), teremos

$$\begin{aligned} d_F(P, Q) &= I_1(P, Q) + I_2(P, Q) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t_1(1-t_2)}{t_2(1-t_1)} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1-t_1)(1-t_2)}{t_1 t_2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t_1^2}{(1-t_1)^2} \right| \\ &= \ln \left( \sqrt{\left| \frac{t_1^2}{(1-t_1)^2} \right|} \right) \\ &= \ln \left| \frac{t_1}{1-t_1} \right| \end{aligned}$$

Pela Afirmação 3.1, como  $t_1 > 1$ , então  $t_1 > t_1 - 1 > 0$ . Isto é,  $\frac{t_1}{t_1-1} > 1$ . Assim,

$$d_F(P, Q) = \ln \left( \frac{t_1}{t_1 - 1} \right). \quad (3.23)$$

Substituindo  $t_1$  em (3.23), teremos:

$$\begin{aligned} d_F(P, Q) &= \ln \left( \frac{\left( \frac{-\langle P, Q-P \rangle + \sqrt{k}}{\|Q-P\|^2} \right)}{\left( \frac{-\langle P, Q-P \rangle + \sqrt{k}}{\|Q-P\|^2} \right) - 1} \right) \\ &= \ln \left( \frac{\sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle - \|Q - P\|^2} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Observe que, pelas propriedades de produto interno e norma euclidiana (veja Propriedades 2.1), temos que

$$\langle P, Q - P \rangle - \|Q - P\|^2 = \langle Q, Q - P \rangle. \quad (3.25)$$

Assim, substituindo (3.25) em (3.24), obtemos:

$$d_F(P, Q) = \ln \left( \frac{\sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{k} - \langle Q, Q - P \rangle} \right),$$

como queríamos mostrar.

**Observação 3.5** Podemos perceber que nas operações acima foram utilizados o produto interno e a norma euclidiana usuais do  $\mathbb{R}^2$ , assim, podemos generalizar os resultados para  $\mathbb{R}^n$ . Desta maneira, podemos dizer que esta distância obtida pode ser generalizada para  $\mathbb{R}^n$ .

**Observação 3.6** Da Afirmação 3.1 e da equação (3.23) temos que  $d_F(P, Q)$  está bem definida para quaisquer  $P$  e  $Q$  distintos.

**Observação 3.7 (Distância não simétrica)** A distância induzida pela Métrica de Funk  $F$  é não simétrica. De fato, considere a origem do plano cartesiano  $O$  e um ponto  $P \in \mathbb{B}^2$  distinto de  $O$ . Assim, da fórmula (3.8),

$$d_F(O, P) = -\ln(1 - \|P\|) \neq \ln(1 + \|P\|) = d_F(P, O). \quad (3.26)$$

**Observação 3.8 (Distância variante por translação)** A distância  $d_F$  é variante por translação. De fato, considere uma aplicação  $T : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ , definida por  $T(x) = x - P$ , onde  $P \in \mathbb{B}^2$  distinto da origem  $O$ . Assim, de 3.26,

$$\begin{aligned} d_F(O, P) &= -\ln(1 - \|P\|^2) = -\ln(1 - \|-P\|^2) \\ &= d_F(O, -P) \neq d_F(-P, O) = d_F(T(O), T(P)). \end{aligned}$$

Em outras palavras, a distância da origem  $O$  até um ponto  $P$  não é a mesma distância de  $T(O)$  até  $T(P)$ , que é uma translação dos pontos  $O$  e  $P$ , respectivamente, pela aplicação  $T$ .

**Observação 3.9 (Distância invariante por rotação)** A distância  $d_F$  é invariante por rotação. Iremos utilizar o resultado obtido no Teorema 4.1 para demonstrar esta afirmação, mas à princípio, podemos observar que o produto interno e a norma euclidiana são invariantes por rotação (verifique as Propriedades 2.1).

## 4 GEOMETRIA DE FUNK

Obtida a fórmula (3.8) no Teorema 3.1 que nos permite calcular a distância induzida pela métrica  $F$  entre dois pontos distintos sobre  $\mathbb{B}^2$ , podemos iniciar um estudo sobre algumas propriedades geométricas do plano, conforme nossas reflexões abordadas nos capítulos iniciais.

Nosso objetivo neste capítulo é caracterizar as "circunferências de Funk". Note que, o termo "circunferências" encontra-se no plural, devido ao fato de que a distância  $d_F$  é não simétrica (veja a Observação 3.7). Desta maneira, para obter uma equação destas circunferências, precisamos estar atentos em que sentido queremos caracterizá-las, isto é, se estas partem do seus centros ou partem no sentido de seus centros.

Para entendermos melhor estes processos, é conveniente contextualizarmos esta construção geométrica em um problema físico. Considere um barco posicionado em um ponto  $P \in \mathbb{B}^2$ . Queremos obter o alcance que este barco pode chegar levando um tempo constante, que pode ser determinado por uma certa quantidade limitada de combustível. Ou ainda, queremos encontrar os lugares geométricos sobre  $\mathbb{B}^2$  que são equidistantes do ponto de partida  $P$ . Note que este problema é equivalente ao problema geométrico de se obter uma circunferência de centro  $P$ . Considerando o problema inverso, partindo de pontos sobre a circunferência em direção de seu centro, podemos determinar um segundo tipo de circunferência de Funk.

Inicialmente, perceba que, de certa forma, a fórmula (3.8) ainda é um pouco complicada, ainda mais quando consideramos o desenvolvimento dos cálculos que iremos propôr. Neste sentido, o próximo teorema nos permite tornar a (3.8) um pouco mais tratável para nosso estudo e sobre ela é possível dar uma interpretação geométrica.

**Teorema 4.1** *Considere dois pontos distintos  $P, Q \in \mathbb{B}^2$  e  $r > 1$ , tal que  $d_F(P, Q) = \ln r$ . Assim,  $P, Q$  e  $r$  satisfazem a igualdade:*

$$\left\| \frac{P}{r} - Q \right\| = \frac{r-1}{r}. \quad (4.1)$$

**Demonstração 4.1** Considerando a hipótese de que  $d_F(P, Q) = \ln r$ , a fórmula (3.8) e a relação (3.25), temos que

$$r = \frac{\sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle}{\sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle - \|Q - P\|^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} r \left( \sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle - \|Q - P\|^2 \right) &= \sqrt{k} - \langle P, Q - P \rangle \\ \Leftrightarrow (r - 1)\sqrt{k} &= (r - 1)\langle P, Q - P \rangle + r\|Q - P\|^2 \\ \Leftrightarrow (r - 1)^2 k &= \left[ (r - 1)\langle P, Q - P \rangle + r\|Q - P\|^2 \right]^2 \\ \Leftrightarrow (r - 1)^2 k &= (r - 1)^2 \langle P, Q - P \rangle^2 + r^2 \|Q - P\|^4 + 2r(r - 1)\langle P, Q - P \rangle \|Q - P\|^2. \end{aligned}$$

Substituindo  $k$ , definido em (3.15), na equação acima, teremos:

$$\begin{aligned} &(r - 1)^2 \left( \langle P, Q - P \rangle^2 + \|Q - P\|^2(1 - \|P\|^2) \right) \\ &= (r - 1)^2 \langle P, Q - P \rangle^2 + r^2 \|Q - P\|^4 + 2r(r - 1)\langle P, Q - P \rangle \|Q - P\|^2 \\ \Leftrightarrow &(r - 1)^2 (1 - \|P\|^2) \|Q - P\|^2 \\ &= \left[ r^2 \|Q - P\|^2 + 2r(r - 1)\langle P, Q - P \rangle \right] \|Q - P\|^2. \end{aligned}$$

Note que,  $\|Q - P\| \neq 0$  (pois  $P \neq Q$ ) e  $r - 1 \neq 0$  (pois  $r > 1$ ). Assim, dividindo toda a equação acima por  $(r - 1)^2 \|Q - P\|^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} 1 - \|P\|^2 &= \left( \frac{r}{r - 1} \right)^2 \|Q - P\|^2 + 2 \left( \frac{r}{r - 1} \right) \langle P, Q - P \rangle \\ \Leftrightarrow \|P\|^2 + \left( \frac{r}{r - 1} \right)^2 \|Q - P\|^2 + 2 \left( \frac{r}{r - 1} \right) \langle P, Q - P \rangle &= 1. \end{aligned}$$

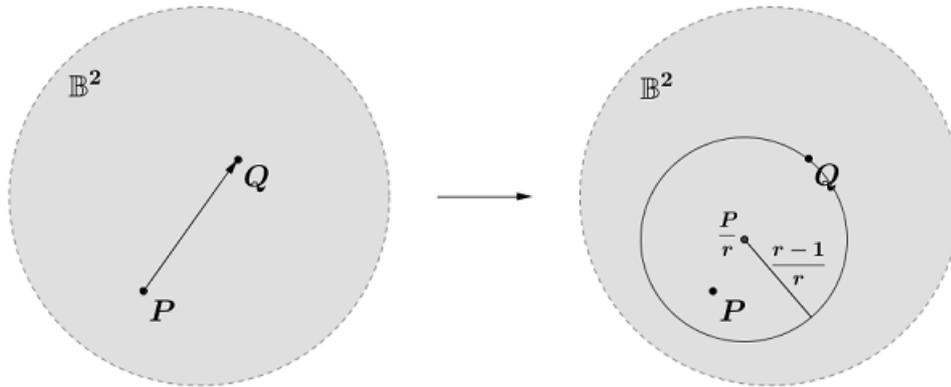
Observe que, o lado esquerdo da igualdade acima pode ser simplificado completando quadrado. Assim,

$$\begin{aligned} &\left\| P + \left( \frac{r}{r - 1} \right) (Q - P) \right\|^2 = 1 \\ \Leftrightarrow &\left\| \frac{(r - 1)P + r(Q - P)}{r - 1} \right\|^2 = 1 \\ \Leftrightarrow &\| -P + rQ \| = r - 1 \\ \Leftrightarrow &\left\| \frac{P}{r} - Q \right\| = \frac{r - 1}{r}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

Geometricamente, a relação (4.1) nos indica que o ponto  $Q$  pertence à uma circunferência euclidiana de centro  $\frac{P}{r}$  e de raio  $\frac{r-1}{r}$ , como mostra a Figura 8.

Figura 8 – Interpretação geométrica do Teorema 4.1



Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

**Observação 4.1** Observe que, o Teorema 4.1 é uma bi-equivalência, isto é, poderia ser escrito como:

$$d_F(P, Q) = \ln r \Leftrightarrow \left\| \frac{P}{r} - Q \right\| = \frac{r-1}{r}.$$

A partir do Teorema 4.1, observamos duas situações interessantes.

**Observação 4.2** Considere  $P = (0, 0)$  e  $Q \in \mathbb{B}^2$ , com  $d_F(P, Q) = \ln r$ . Da relação (4.1), vale a igualdade:

$$\|Q\| = \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r}.$$

Fazer  $\|Q\| \rightarrow 1$  é equivalente a fazer  $r \rightarrow \infty$ , isto é, fazer  $Q$  tender à fronteira de  $\mathbb{B}^2$  é o mesmo que fazer  $r$  tender ao infinito e, conseqüentemente, fazer  $d_F(P, Q) \rightarrow \infty$ . Em outras palavras, se um barco parte da origem do disco em direção à fronteira, ele levará um tempo infinito para chegar ao destino, ou seja, ele nunca chega à fronteira. Por outro lado, considerando o caminho inverso, isto é,  $d_F(Q, P) = \ln r$ , teremos da relação (4.1)

$$\|Q\| = r - 1.$$

Assim, fazer  $\|Q\| \rightarrow 1$  é equivalente à fazer  $r \rightarrow 2$ , isto é, se um barco parte da fronteira de  $\mathbb{B}^2$  em direção à origem do disco, logo o tempo mínimo de viagem é igual à  $\ln 2$  unidades de tempo.

O Teorema 4.1 também nos permite mostrar com mais facilidade a invariância por rotação da distância  $d_F$ , como previsto na Observação 3.9.

**Observação 4.3 (Distância  $d_F$  é invariante por rotação)** Seja  $R$  uma rotação do plano em  $\theta$  graus, definida por

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Rotacionando os pontos  $P = (a, b), Q = (c, d) \in \mathbb{B}^2$ , obtemos

$$P^* = RP = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta + b \text{sen } \theta \\ -a \text{sen } \theta + b \cos \theta \end{pmatrix}$$

e

$$Q^* = RQ = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cos \theta + d \text{sen } \theta \\ -c \text{sen } \theta + d \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, pela invariância da norma euclidiana por qualquer rotação, temos

$$\left\| \frac{P^*}{r} - Q^* \right\| = \left\| R \left( \frac{P}{r} - Q \right) \right\| = \left\| \frac{P}{r} - Q \right\|$$

Ou ainda,

$$\left\| \frac{P^*}{r} - Q^* \right\| = \left\| \frac{P}{r} - Q \right\|. \quad (4.2)$$

Comparando a relação (4.2) com o Teorema 4.1, temos que

$$d_F(RP, RQ) = \ln r \Leftrightarrow \left\| \frac{P^*}{r} - Q^* \right\| = \frac{r-1}{r} = \left\| \frac{P}{r} - Q \right\| \Leftrightarrow d_F(P, Q) = \ln r.$$

Portanto,  $d_F(RP, RQ) = d_F(P, Q)$ . Isto é, a distância  $d_F$  é invariante por rotação.

Frente a resultado do Teorema 4.1, neste momento podemos caracterizar as "circunferências de Funk".

#### 4.1 CIRCUNFERÊNCIA DE FUNK DO TIPO 1

**Definição 4.1 (Circunferência de Funk do tipo 1)** Considere um ponto  $P \in \mathbb{B}^2$  qualquer e um número real  $r > 1$ . Definimos uma Circunferência de Funk do tipo 1, de centro  $P$  e de raio  $\ln r$ , como sendo o lugar geométrico dos pontos  $Q \in \mathbb{B}^2$  tais que  $d_F(P, Q) = \ln r$ . Ou ainda, do Teorema 4.1, as circunferências do tipo 1, de centro  $P$  e raio  $\ln r$ , são caracterizadas pela equação:

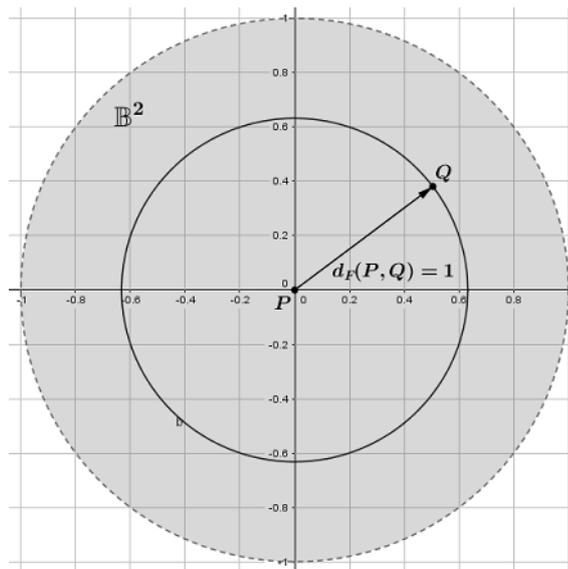
$$\left\| \frac{P}{r} - Q \right\| = \frac{r-1}{r}. \quad (4.3)$$

**Observação 4.4** Note que, a equação (4.3) possui a forma de uma circunferência euclidiana, de centro  $\frac{P}{r}$  e de raio  $\frac{r-1}{r}$ . Em outras palavras, as Circunferências de Funk do tipo 1 são nada mais do que circunferências euclidianas deslocadas à uma taxa de  $1 - \frac{1}{r}$  em direção da origem e contraídas à uma taxa de  $1 - \frac{r-1}{r \ln r}$ .

**Exemplo 4.1** Considere  $P = (0, 0)$  e  $r = e$ . A equação da circunferência de Funk do tipo 1 de centro  $P$  e raio  $\ln r = 1$  (veja a Figura 9) é dada por:

$$x^2 + y^2 = (1 - e^{-1})^2.$$

Figura 9 – Circunferência de Funk do tipo 1 de centro  $P = (0, 0)$  e de raio 1



Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

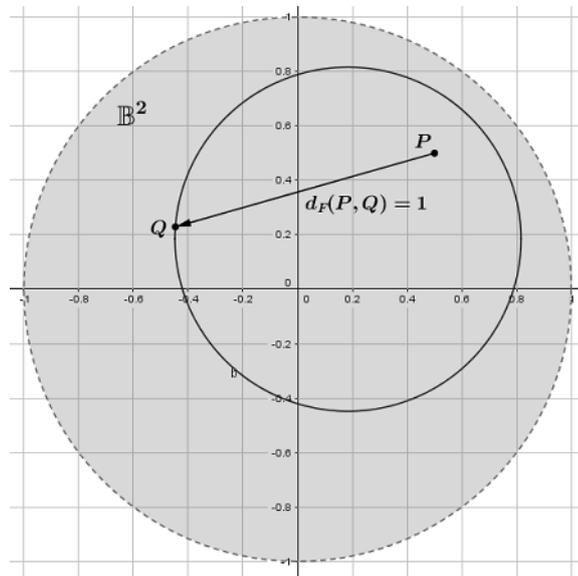
**Exemplo 4.2** Considere  $P = (0.5, 0.5)$  e  $r = e$ . A equação da circunferência de Funk do tipo 1 de centro  $P$  e raio  $\ln r = 1$  (veja a Figura 10) é dada por:

$$\left(x - \frac{0.5}{e}\right)^2 + \left(y - \frac{0.5}{e}\right)^2 = (1 - e^{-1})^2,$$

ou ainda,

$$(x - 0.18)^2 + (y - 0.18)^2 = (1 - e^{-1})^2.$$

Figura 10 – Circunferência de Funk do tipo 1 de centro  $P = (0.5, 0.5)$  e de raio 1



Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

## 4.2 CIRCUNFERÊNCIA DE FUNK DO TIPO 2

**Definição 4.2 (Circunferência de Funk do tipo 2)** Considere um ponto  $P \in \mathbb{B}^2$  qualquer e um número real  $r > 1$ . Definimos uma Circunferência de Funk do tipo 2, de centro  $P$  e de raio  $\ln r$ , como sendo o lugar geométrico dos pontos  $Q \in \mathbb{B}^2$  tais que  $d_F(Q, P) = \ln r$ . Ou ainda, do Teorema 4.1, as circunferências do tipo 2, de centro  $P$  e raio  $\ln r$  são caracterizadas pela equação:

$$\|Q - rP\| = r - 1. \quad (4.4)$$

**Observação 4.5** Note que, inicialmente observando a forma da equação (4.4), é uma forma de circunferência euclidiana no  $\mathbb{R}^2$ , de centro  $rP$  e de raio  $r - 1$ . Em outras

palavras, as Circunferências de Funk do tipo 2 são nada mais do que circunferências euclidianas deslocadas à uma taxa de  $r - 1$  na direção oposta origem e expandidas à uma taxa de  $\frac{r-1}{\ln r} - 1$ .

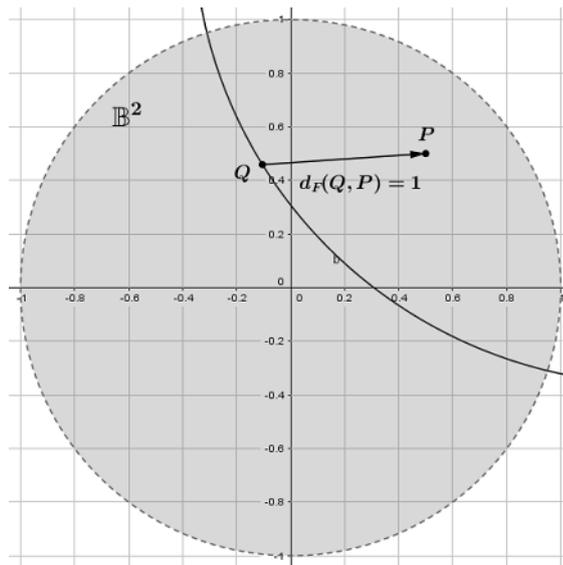
**Exemplo 4.3** Considere  $P = (0.5, 0.5)$  e  $r = e$ . A equação da circunferência de Funk do tipo 2 de centro  $P$  e raio  $\ln r = 1$  (veja a Figura 11) é dada por:

$$(x - 0.5e)^2 + (y - 0.5e)^2 = (e - 1)^2,$$

ou ainda,

$$(x - 1.36)^2 + (y - 1.36)^2 = (e - 1)^2.$$

Figura 11 – Circunferência de Funk do tipo 2 de centro  $P = (0.5, 0.5)$  e de raio 1



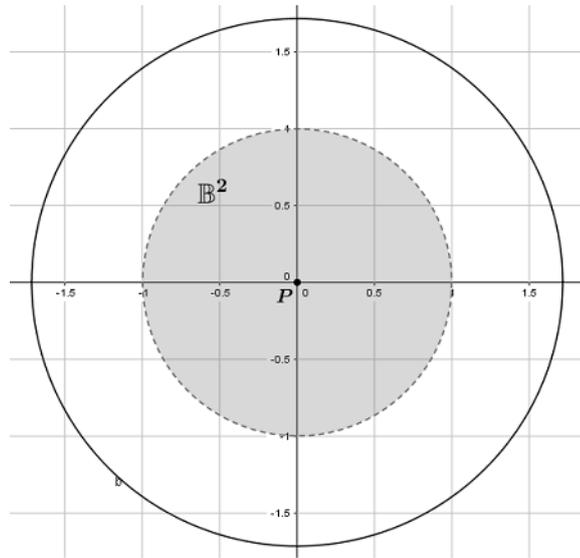
Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

Note que no Exemplo 4.3, a curva obtida nada mais é do que apenas um arco de circunferência em  $\mathbb{B}^2$ . Ainda é possível que a curva não tenha nenhuma solução, como mostra o próximo exemplo.

**Exemplo 4.4** Considere  $P = (0, 0)$  e  $r = e$ . A equação da circunferência de Funk do tipo 2 de centro  $P$  e raio  $\ln r = 1$  é dada por:

$$x^2 + y^2 = (e - 1)^2.$$

Figura 12 – Circunferência de Funk do tipo 2 de centro  $P = (0, 0)$  e de raio 1



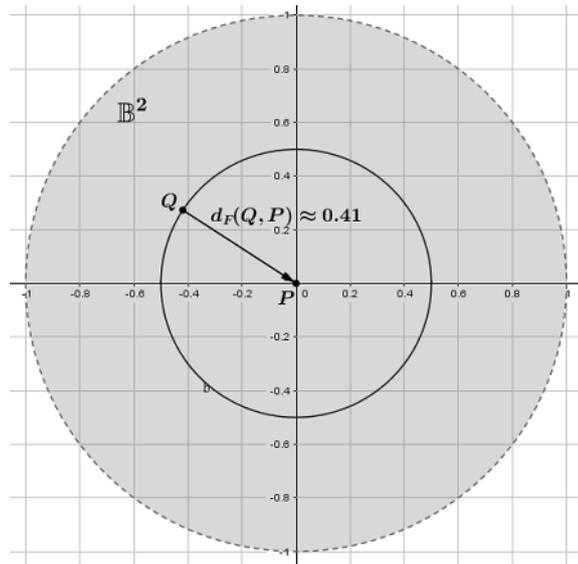
Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

Observe que, como  $e - 1 > 1$ , neste caso, não existem soluções  $Q = (x, y) \in \mathbb{B}^2$  tais que  $\|Q\| = e - 1$  (veja a Figura 12). Este problema vem diretamente da Observação 4.2 que nos indica que, se  $P = (0, 0)$ , então o raio máximo de uma Circunferência de Funk do tipo 2 é igual a  $\ln 2$ , isto é, para estes tipos de circunferências  $r$  é limitado no intervalo  $]1, 2[$ . Observe o próximo exemplo, tomando  $r \in ]1, 2[$ .

**Exemplo 4.5** Considere  $P = (0, 0)$  e  $r = 1.5$ . A equação da circunferência de Funk do tipo 2 de centro  $P$  e raio  $\ln r \approx 0.41$  (veja a Figura 13) é dada por:

$$x^2 + y^2 = (0.5)^2.$$

Figura 13 – Circunferência de Funk do tipo 2 de centro  $P = (0, 0)$  e de raio  $\ln 1.5$



Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

**Exemplo 4.6** Considere uma circunferência dada pela equação:

$$(x - 0.4)^2 + (y - 0.2)^2 = (0.5)^2. \quad (4.5)$$

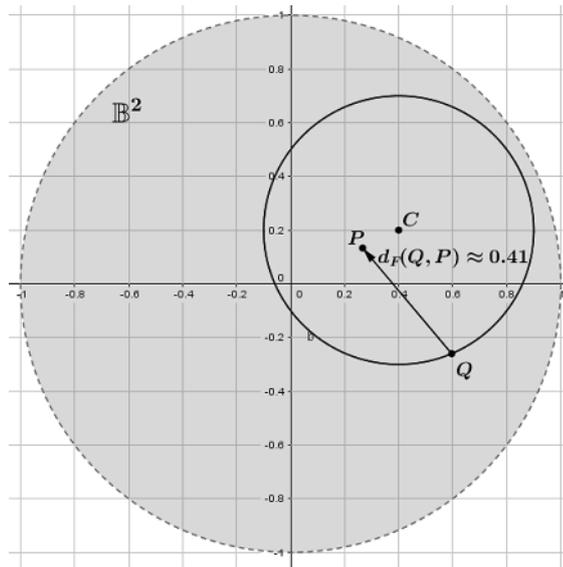
Queremos obter o centro de Funk desta circunferência, isto é, queremos encontrar o  $P \in \mathbb{B}^2$  que satisfaz  $d_F(Q, P) = \ln r$ , para todo  $Q$  sobre a circunferência e para algum  $r > 1$ .

Comparando (4.5) com a equação (4.4), temos que  $P$  e  $r$  satisfazem:

$$\begin{cases} r - 1 = 0.5 \\ rP = (0.4, 0.2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1.5 \\ P = \frac{1}{1.5}(0.4, 0.2) \approx (0.27, 0.13) \end{cases}$$

Portanto, o centro de Funk da circunferência é o ponto  $P = (0.27, 0.13)$ , tal que  $d_F(Q, P) = \ln 1.5$ , para todo ponto  $Q$  sobre a circunferência (veja a Figura 14).

Figura 14 – Circunferência de Funk do tipo 2 de centro  $P = (0.27, 0.13)$  e de raio  $\ln 1.5$



Fonte: Autores (2022). Construção no *software Geogebra 5.0*.

### 4.3 DISTÂNCIA DE FUNK DE PONTO À RETA

Agora com os resultados das equações das Circunferências de Funk dos tipos 1 e 2, podemos realizar algumas construções geométricas com estes objetos, com o objetivo de obter fórmulas das distâncias entre retas e pontos, frente de que, nestes casos, a utilização da fórmula de distância induzida por  $F$  obtida em (3.8) iria dificultar um pouco os cálculos destes próximos capítulos.

Para isto, vamos primeiro observar que, dadas uma reta e uma circunferência é possível estes objetos estarem em três posições relativas entre eles: possuir 2 intersecções distintas, 1 ou nenhuma. Neste sentido, nosso objetivo é construir uma circunferência que possui intersecção com a reta e, em seguida, derivar a equação desta circunferência em relação à seu raio para obter pontos críticos.

Em outras palavras, estamos interessados em otimizar a circunferência construída para obter o menor raio possível tal que a circunferência possua apenas uma intersecção com a reta dada. Note que, este ponto de intersecção é o ponto que irá realizar a menor distância possível entre o centro da circunferência e a reta.

Antes de partimos para as definições e resultados deste capítulo, vamos primeiro exemplificar nosso estudo em um problema físico. Considere uma ilha

isolada em um ponto  $P \in \mathbb{B}^2$  e que um barco irá partir desta ilha em direção à uma praia com a costa retilínea que pode ser descrita por uma reta  $l \subset \mathbb{B}^2$ . Considerando que o barco navegue com velocidade constante, queremos obter o menor tempo possível desta viagem e a direção que o barco deve seguir para isto (ou ainda, o ponto sobre a reta que o barco irá desembarcar).

Desta forma, levando em consideração as posições relativas entre uma reta e uma circunferência, podemos considerar que a ilha esteja posicionada no centro de uma Circunferência de Funk do tipo 1 e derivar o menor tempo de viagem possível, obtendo também a direção procurada.

Por ora, vamos à definição.

**Definição 4.3 (Distância de Funk de ponto à reta)** Definimos a distância de Funk do ponto  $P$  à reta  $l$  como sendo a quantidade  $d_F(P, l) \in \mathbb{R}$  que satisfaz:

$$d_F(P, l) = \min\{d_F(P, Q) | Q \in l\}.$$

Dizemos que  $Q^* \in l$  é o ponto que realiza a distância de  $P$  até  $l$  se, e somente se,

$$d_F(P, Q^*) \leq d_F(P, Q), \text{ para todo } Q \in l.$$

Para facilitar nosso estudo para obtenção de uma fórmula para  $d_F(P, l)$  e considerando a invariância por rotação da distância  $d_F$  (Observação 4.3), vamos primeiro considerar o caso particular em que  $l$  é uma reta constante do tipo  $y = y_0$ , com  $|y_0| < 1$ .

### Caso particular da reta constante:

Considere um ponto  $P \in \mathbb{B}^2$  e uma reta  $l : y = y_0$ , com  $y_0 \in \mathbb{R}$  e  $|y_0| < 1$ . Tome uma Circunferência de Funk do tipo 1 de centro em  $P = (a, b)$  e que contenha um ponto  $Q = (x, y_0) \in l$ . Assim, considerando que o raio desta circunferência seja  $\ln r$  e, de (3.8), a equação desta circunferência é dada por:

$$\left(x - \frac{a}{r}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{b}{r}\right)^2 = \left(\frac{r-1}{r}\right)^2. \quad (4.6)$$

Observe que a equação (4.6) é uma equação do segundo grau em  $x$  e, dependendo de  $r$ , é possível obter duas, uma ou nenhuma solução para  $x$ . Assim, como estamos

interessados em minimizar a distância, derivando a equação (4.6) em relação à variável  $x$ , obtemos a igualdade  $x = \frac{a}{r}$ . Observe que, neste sentido, já obtemos o ponto que realiza a menor distância de  $P$  à  $l$ , isto é, o ponto  $Q^* = (\frac{a}{r}, y_0)$ . Por outro lado, substituindo  $x = \frac{a}{r}$  na (4.6), teremos

$$\begin{aligned} \left(y_0 - \frac{b}{r}\right)^2 &= \left(\frac{r-1}{r}\right)^2 \\ \Leftrightarrow y_0^2 - 2\frac{by_0}{r} + \frac{b^2}{r^2} &= \frac{r^2 - 2r + 1}{r^2} \\ \Leftrightarrow y_0^2 r^2 - 2by_0 r + b^2 &= r^2 - 2r + 1 \\ \Leftrightarrow (1 - y_0^2)r^2 - 2(1 - by_0)r + 1 - b^2 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação acima para  $r$  encontramos duas raízes dadas por:

$$r = \frac{1 - by_0 \pm \sqrt{(1 - by_0)^2 - (1 - y_0^2)(1 - b^2)}}{1 - y_0^2}. \quad (4.7)$$

Note que,

$$\begin{aligned} (1 - by_0)^2 - (1 - y_0^2)(1 - b^2) &= 1 - 2by_0 + b^2y_0^2 - (1 - b^2 - y_0^2 + b^2y_0^2) \\ &= b^2 + y_0^2 - 2by_0 = (b - y_0)^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Assim, substituindo (4.8) em (4.7), obtemos as raízes

$$r = \frac{1 - by_0 \pm |b - y_0|}{1 - y_0^2}. \quad (4.9)$$

Observe que, que precisamos verificar se  $r > 1$ . Assim, sabendo que  $1 - y_0^2 > 0$ , obtemos a desigualdade:

$$\begin{aligned} 1 - by_0 \pm |b - y_0| &> 1 - y_0^2 \\ \Leftrightarrow \pm |b - y_0| &> y_0(b - y_0). \end{aligned}$$

Vamos considerar 2 casos:

$$\begin{cases} \text{se } b - y_0 > 0 \Rightarrow \pm(b - y_0) > y_0(b - y_0) \Rightarrow \pm 1 > y_0 \\ \text{se } b - y_0 < 0 \Rightarrow \pm(y_0 - b) > y_0(b - y_0) \Rightarrow \pm(-1) < y_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Em ambos os casos,  $r > 1$  se, e somente se, considerarmos o sinal de + em (4.9), pois  $-1 < y_0 < 1$ . Portanto,

$$r = \frac{1 - by_0 + |b - y_0|}{1 - y_0^2}. \quad (4.11)$$

Esta última expressão para  $r$  ainda pode ser melhorada analisando separadamente cada caso, como em (4.10).

**Caso  $b > y_0$ :** De (4.11),  $r$  é dado por

$$r = \frac{1 - by_0 + b - y_0}{1 - y_0^2} = \frac{(1 - y_0)(1 + b)}{(1 - y_0)(1 + y_0)} = \frac{1 + b}{1 + y_0}. \quad (4.12)$$

**Caso  $b < y_0$ :** De (4.11),  $r$  é dado por

$$r = \frac{1 - by_0 + y_0 - b}{1 - y_0^2} = \frac{(1 + y_0)(1 - b)}{(1 - y_0)(1 + y_0)} = \frac{1 - b}{1 - y_0}. \quad (4.13)$$

Definimos a função  $\sigma(x)$  por

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Considerando (4.12), (4.13), a função (4.14) e substituindo em (4.11), obtemos:

$$r = \frac{1 + \sigma(b - y_0)b}{1 + \sigma(b - y_0)y_0}.$$

Portanto, a distância de Funk do ponto  $P = (a, b) \in \mathbb{B}^2$  até a reta  $l : y = y_0 \subset \mathbb{B}^2$  é dada por:

$$d_F(P, l) = \ln r = \ln \frac{1 + \sigma(b - y_0)b}{1 + \sigma(b - y_0)y_0}, \quad (4.15)$$

e esta distância é realizada pelo ponto  $Q^* = \left(\frac{a}{r}, y_0\right) \in l$ .

### Caso geral:

Considere agora a reta  $l$  da forma  $l : y = \alpha x + c \subset \mathbb{B}^2$ . Observe que,  $l$  é uma reta que possui inclinação angular  $\alpha = \tan \theta$ , com  $\theta \in ] -\pi, \pi[$ . Sendo assim, caso rotacionarmos o plano em  $\theta$  graus no sentido horário,  $l$  passará a ser uma reta constante e horizontal da forma  $l' : y = y_0$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ , recaindo ao caso particular que acabamos de estudar. Desta forma, é conveniente realizarmos este procedimento, considerando que a distância induzida  $d_F$  é invariante por rotação.

Assim, seja  $R$  uma rotação do plano em  $\theta$  graus no sentido anti-horário, isto é,

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Obtendo as novas coordenadas do ponto  $P = (a, b) \in \mathbb{B}^2$ , temos

$$P' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta \\ b \cos \theta - a \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

**Observação 4.6** Note que, de (4.15), precisamos conhecer também a ordenada  $y \in \mathbb{R}$  dos pontos sobre a reta  $l'$ . Para isto, faremos uma análise do comportamento desta reta no  $\mathbb{R}^2$ .

Dado que  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ , logo a reta  $l$  possui interseção com o eixo  $OY$ . Como a reta  $l$  é o conjunto de todos os pontos que satisfazem  $y = \alpha x + c$ , logo o ponto  $(0, c)$  pertence à  $l$ . Assim, podemos rotacionar este ponto para obter a ordenada de todos os pontos sobre a reta. Desta forma,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \sin \theta \\ c \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Logo, os pontos da reta  $l'$  são da forma  $(x, c \cos \theta)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , e, conseqüentemente, esta reta é da forma  $l' : y = c \cos \theta$ .

Sendo assim, considerando a observação anterior e substituindo (4.16) em (4.15), teremos que a *distância de Funk* de um ponto  $P = (a, b)$  à reta  $l : y = \alpha x + c$  é dada por

$$d_F(P, l) = d_F(P', l') = \ln r = \ln \frac{1 + \sigma(b \cos \theta - a \sin \theta - c \cos \theta)(b \cos \theta - a \sin \theta)}{1 + \sigma(b \cos \theta - a \sin \theta - c \cos \theta)c \cos \theta}, \quad (4.18)$$

tal que  $\theta = \arctan \alpha \in ]\pi, \pi[$ . O ponto sobre  $l'$  que realiza a distância de  $P'$  até  $l'$  é dado por

$$Q' = \left( \frac{a \cos \theta + b \sin \theta}{r}, c \cos \theta \right) \in l'.$$

Para obter o ponto  $Q^* \in l$  que realiza a distância inicial, basta rotacionar  $\theta$  graus o ponto  $Q'$  no sentido contrário, isto é,

$$Q^* = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a \cos \theta + b \sin \theta}{r} \\ c \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

**Observação 4.7** Caso a reta  $l$  seja uma reta vertical da forma  $l : x = c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , basta rotacionar o plano cartesiano em  $90^\circ$  e recair ao caso particular da reta constante e horizontal.

**Exemplo 4.7** Considere o ponto  $P = (0.4, 0.2)$  e a reta  $l : y = (\tan 30^\circ)x + 0.5$  sobre  $\mathbb{B}^2$ . Inicialmente, rotacionando o plano  $30^\circ$  no sentido horário, obtemos as novas coordenadas de  $P$  através do ponto:

$$P' = (0.4 \cos 30^\circ + 0.2 \sin 30^\circ, 0.2 \cos 30^\circ - 0.4 \sin 30^\circ) \approx (0.45, -0.03).$$

Com nova reta  $l' : y = 0.5 \cos 30^\circ$ , obtida pela rotação de  $l$ , temos que a distância de Funk de  $P'$  até  $l'$  é dada por:

$$\begin{aligned} d_F(P', l') &= \ln r = \ln \frac{1 + \sigma(0.2 \cos 30^\circ - 0.4 \sin 30^\circ - 0.5 \cos 30^\circ)(0.2 \cos 30^\circ - 0.4 \sin 30^\circ)}{1 + \sigma(0.2 \cos 30^\circ - 0.4 \sin 30^\circ - 0.5 \cos 30^\circ)0.5 \cos 30^\circ} \\ &= \ln \frac{1 - (0.2 \cos 30^\circ - 0.4 \sin 30^\circ)}{1 - 0.5 \cos 30^\circ} \approx \ln 1.81 \approx 0.59, \end{aligned}$$

e esta distância é realizada pelo ponto

$$Q' \approx \left( \frac{0.4 \cos 30^\circ + 0.2 \sin 30^\circ}{1.81}, 0.5 \cos 30^\circ \right) \approx (0.25, 0.43),$$

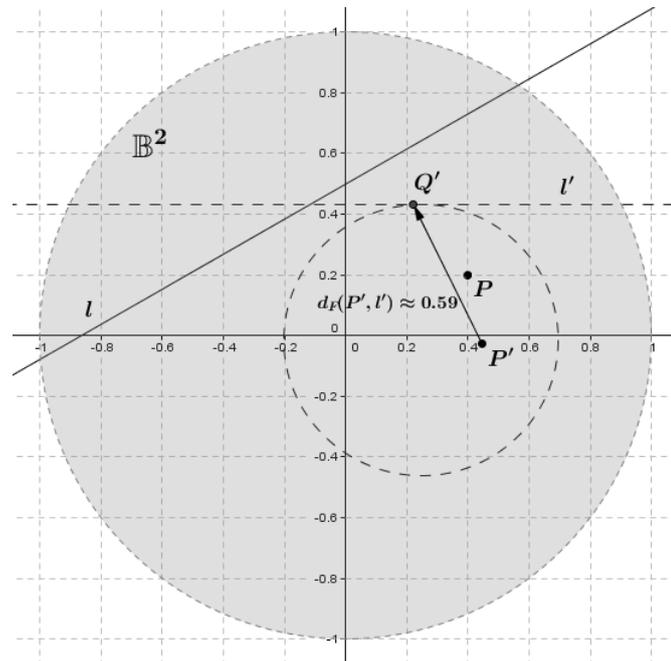
na reta  $l'$  (veja Figura 15). Por outro lado, para encontrar o ponto  $Q^* \in l$  que realiza a distância  $d_F(P, l)$ , rotacionamos o plano cartesiano em  $30^\circ$  no sentido anti-horário (veja Figura 16), obtendo assim

$$Q^* \approx \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.43 \end{pmatrix} \approx (0.0015, 0.4974).$$

Pela invariância por rotação da distância de Funk, temos que

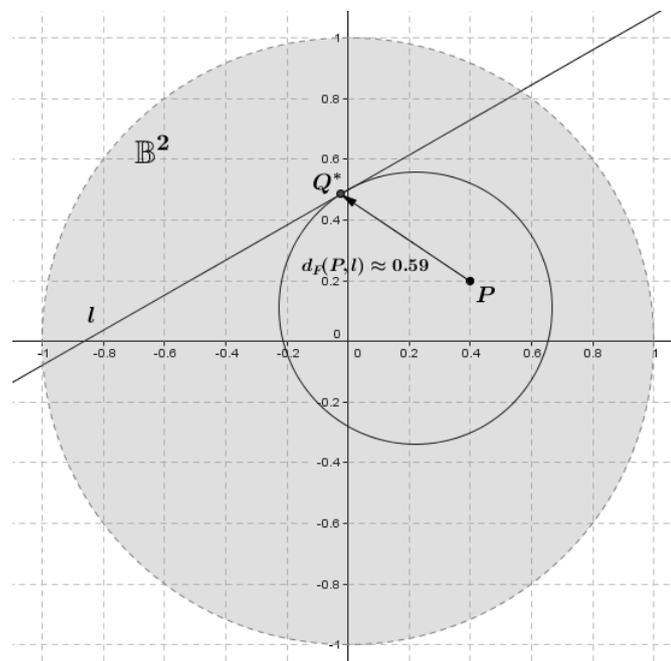
$$d_F(P, l) = d_F(P, Q^*) = d_F(P', l') \approx 0.59.$$

Figura 15 – Distância de Funk de ponto à reta rotacionados



Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

Figura 16 – Distância de Funk de ponto à reta



Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

Observe que, no Exemplo 4.7, o caminho que realiza a menor distância do ponto  $P$  até a reta  $l$  não é *perpendicular* à reta, como ocorre na Geometria Euclidiana.

De fato, tomando um ponto  $P = (a, b) \in \mathbb{B}^2$  e uma reta constante  $l : y = y_0 \subset \mathbb{B}^2$ , o ponto sobre a reta que realiza a menor distância de  $P$  à  $l$  é  $Q = \left(\frac{a}{r}, y_0\right)$  e o caminho para tal é seguir através do segmento de reta com extremidades  $P$  e  $Q$ .

Assim, podemos determinar o ângulo  $\phi$  formado entre o segmento  $\overline{PQ}$  e a reta  $l$  determinando o ângulo entre os vetores  $u = \overrightarrow{PQ}$  e  $v = (1, 0) \in l$  (veja Definição 2.3). Como  $u$  tem coordenadas  $\left(a\frac{1-r}{r}, y_0 - b\right)$ , então

$$\cos \phi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{a \left(\frac{1-r}{r}\right)}{\|\overrightarrow{PQ}\|}.$$

Desta forma, para que o segmento  $\overline{PQ}$  seja perpendicular à reta  $l$ , é necessário que  $a = 0$ . De fato,

$$\cos 90^\circ = 0 = \frac{a(1-r)}{r\|\overrightarrow{PQ}\|} \Leftrightarrow a = 0.$$

Em outras palavras, o caminho mais rápido para chegar do ponto  $P$  até a reta  $l$  só é perpendicular à reta  $l$  se, e somente se,  $P$  está sobre o eixo  $OY$ .

Caso a reta  $l$  tenha inclinação não nula, basta apenas verificar se, ao rotacionar o ponto  $P$ , o novo ponto  $P'$  está sobre  $OY$ .

#### 4.4 DISTÂNCIA DE FUNK DE RETA À PONTO

Neste capítulo, faremos um estudo semelhante ao do capítulo anterior. Desta vez, considere que um barco irá partir de uma praia com a costa retilínea em direção à uma ilha isolada em algum ponto  $P \in \mathbb{B}^2$ . Considerando que o barco permaneça em velocidade constante, queremos obter o menor tempo possível desta viagem e o ponto sobre a praia que o barco deve partir para isto ocorra.

Assim, nosso problema consiste em construir uma circunferência de Funk do tipo 2 de centro em  $P$  que possua interseção com a reta  $l$ , que descreve o lugar geométrico que representa a praia em  $\mathbb{B}^2$ .

**Definição 4.4 (Distância de Funk de reta à ponto)** Definimos a distância de Funk da reta  $l$  ao ponto  $P$  como sendo a quantidade  $d_F(l, P) \in \mathbb{R}$  que satisfaz:

$$d_F(l, P) = \min\{d_F(Q, P) | Q \in l\}.$$

Dizemos que  $Q^* \in l$  é o ponto que realiza a distância de  $l$  até  $P$  se, e somente se,

$$d_F(Q^*, P) \leq d_F(Q, P), \text{ para todo } Q \in l.$$

Inicialmente, também consideraremos o caso particular da reta constante, embora desta vez utilizaremos uma circunferência do tipo 2.

### Caso particular da reta constante:

Considere um ponto  $P \in \mathbb{B}^2$  e uma reta  $l : y = y_0$ , com  $y_0 \in \mathbb{R}$  e  $|y_0| < 1$ . Tomando uma Circunferência de Funk do tipo 2 de centro em  $P = (a, b)$  e que contenha um ponto  $Q = (x, y_0) \in s$ , considere que o raio desta circunferência seja igual à  $\ln r$ . De (3.8), a equação desta circunferência é dada por:

$$(x - ar)^2 + (y_0 - br)^2 = (r - 1)^2. \quad (4.20)$$

A (4.20) é uma equação de segundo grau na variável  $x$  e, dependendo do raio da circunferência, é possível obter no máximo até 2 soluções. Estamos interessados na igualdade  $x = ar$  tal que minimiza a distância. Assim,

$$\begin{aligned} y_0^2 - 2by_0r + b^2r^2 &= r^2 - 2r + 1 \\ \Rightarrow (1 - b^2)r^2 - 2(1 - by_0)r + 1 - y_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

As raízes da equação acima são dadas por:

$$r = \frac{1 - by_0 \pm \sqrt{(1 - by_0)^2 - (1 - b^2)(1 - y_0^2)}}{1 - b^2}. \quad (4.21)$$

Note que da igualdade (4.8), as raízes de (4.21) são

$$r = \frac{1 - by_0 \pm |b - y_0|}{1 - b^2}.$$

Para assegurar que  $r > 1$ , de (4.10), obtemos

$$r = \frac{1 - by_0 + |b - y_0|}{1 - b^2}. \quad (4.22)$$

Melhorando a fórmula de  $r$ , vamos analisar os seguintes casos:

**Caso  $b > y_0$ :** De (4.22),  $r$  é dado por

$$r = \frac{1 - by_0 + b - y_0}{1 - b^2} = \frac{(1 - y_0)(1 + b)}{(1 - b)(1 + b)} = \frac{1 - y_0}{1 - b}. \quad (4.23)$$

**Caso  $b < y_0$ :** De (4.11),  $r$  é dado por

$$r = \frac{1 - by_0 + y_0 - b}{1 - b^2} = \frac{(1 + y_0)(1 - b)}{(1 - b)(1 + b)} = \frac{1 + y_0}{1 + b}. \quad (4.24)$$

Assim, considerando a função  $\sigma$  definida em (4.14) e cada caso observado em (4.23) e (4.24), temos que (4.22) fica

$$r = \frac{1 - \sigma(b - y_0)y_0}{1 - \sigma(b - y_0)b}.$$

Portanto, a distância de Funk da reta  $l : y = y_0 \subset \mathbb{B}^2$  até o ponto  $P = (a, b) \in \mathbb{B}^2$  é dada por:

$$d_F(l, P) = \ln r = \ln \frac{1 - \sigma(b - y_0)y_0}{1 - \sigma(b - y_0)b}, \quad (4.25)$$

onde esta distância é realizada pelo ponto  $Q^* = (ar, y_0) \in l$  e

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

**Caso geral:**

Agora, considere uma reta  $l$  da forma  $l : y = \alpha x + c \subset \mathbb{B}^2$ . Dada sua inclinação  $\alpha = \tan \theta$ , com  $\theta \in ]\pi, \pi[$ , vamos rotacionar o plano cartesiano em  $\theta$  graus no sentido horário, onde  $l$  passará a ser uma reta constante e horizontal da forma  $l' : y = y_0$ , recaindo ao caso anterior. De (4.16), as novas coordenadas do ponto  $P = (a, b) \in \mathbb{B}^2$  são dadas pelo ponto  $P' = (a \cos \theta + b \sin \theta, b \cos \theta - a \sin \theta)$

Logo, considerando a Observação 4.6 e (4.25), a *distância de Funk* da reta  $l : y = \alpha x + c$  até o ponto  $P = (a, b)$  é dada por

$$d_F(l, P) = d_F(l', P') = \ln r = \ln \frac{1 - \sigma(b \cos \theta - a \sin \theta - c \cos \theta)c \cos \theta}{1 - \sigma(b \cos \theta - a \sin \theta - c \cos \theta)(b \cos \theta - a \sin \theta)}, \quad (4.26)$$

tais que  $\theta = \arctan \alpha \in ]-\pi, \pi[$  e o ponto  $Q^* \in l$  que realiza esta distância é obtido pela rotação do ponto  $Q' = ((a \cos \theta + b \sin \theta)r, c \cos \theta) \in l'$  em  $\theta$  graus no sentido anti-horário, como realizado em (4.19).

**Exemplo 4.8** Considere o ponto  $P = (0.4, 0.2)$  e a reta  $l : y = (\tan 30^\circ)x + 0.5$  sobre  $\mathbb{B}^2$ . Do Exemplo 4.7, as coordenadas de  $P'$  ( $P$  rotacionado  $30^\circ$  no sentido horário) são

$$P' = (0.4 \cos 30^\circ + 0.2 \sin 30^\circ, 0.2 \cos 30^\circ - 0.4 \sin 30^\circ) \approx (0.45, -0.03).$$

Rotacionando a reta  $l$  (veja a Figura 17), obtemos a nova reta  $l' : y = 0.5 \cos 30^\circ$ , onde a distância de  $l'$  até  $P'$  é dada por

$$\begin{aligned} d_F(l', P') &= \ln r = \ln \frac{1 - \sigma(0.2 \cos 30^\circ - 0.4 \sin 30^\circ - 0.5 \cos 30^\circ)0.5 \cos 30^\circ}{1 - \sigma(0.2 \cos 30^\circ - 0.4 \sin 30^\circ - 0.5 \cos 30^\circ)(0.2 \cos 30^\circ - 0.4 \sin 30^\circ)} \\ &= \ln \frac{1 + 0.5 \cos 30^\circ}{1 + 0.2 \cos 30^\circ - 0.4 \sin 30^\circ} \approx \ln 1.47 \approx 0.39 \end{aligned}$$

e é realizada pelo ponto

$$Q' \approx ((0.4 \cos 30^\circ + 0.2 \sin 30^\circ)1.47, 0.5 \cos 30^\circ) \approx (0.66, 0.43).$$

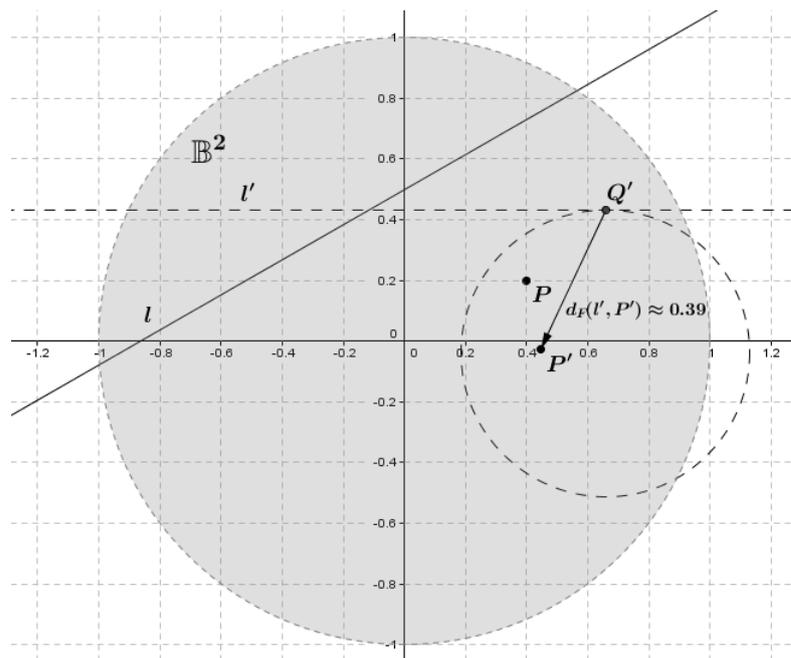
Para obter o ponto  $Q^*$  sobre a reta inicial  $l$  (veja a Figura 18), rotacionamos  $Q'$  em  $30^\circ$  no sentido anti-horário e obtemos

$$Q^* \approx (0.36, 0.70). \quad (4.27)$$

Assim, de (4.26), a distância de Funk da reta  $l$  até o ponto  $P$  é

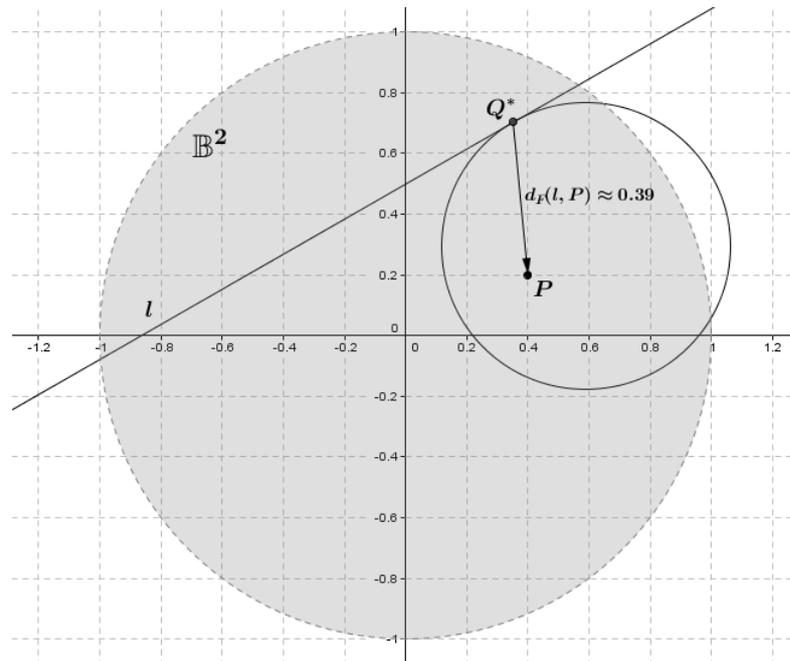
$$d_F(l, P) = d_F(Q^*, P) = d_F(l', P') \approx 0.39.$$

Figura 17 – Distância de Funk de reta à ponto rotacionados



Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

Figura 18 – Distância de Funk de reta à ponto



Fonte: Autores (2022). Construção no *software Geogebra 5.0*.

Observe que, assim como ocorre nas distâncias de ponto à reta, podemos observar pelo Exemplo 4.8 que o caminho mais rápido nem sempre é o caminho perpendicular à reta  $l$ . A demonstração deste resultado é semelhante ao que fizemos no capítulo anterior, concluindo também que, estes caminhos só são perpendiculares caso  $P$  (ou o ponto  $P^*$  rotacionado) pertença ao eixo  $OY$ , no caso em que a reta  $l$  seja constante e horizontal (ou para uma reta com inclinação não nula, respectivamente).

#### 4.5 DISTÂNCIA DE FUNK ENTRE RETAS

Finalmente, faremos uma análise sobre as distâncias entre retas. Veremos que os cálculos naturalmente irão surgir a partir das fórmulas de distâncias entre ponto e reta, obtidas nos capítulos anteriores.

**Definição 4.5 (Distância de Funk entre retas)** Considere  $l_1, l_2 \subset \mathbb{B}^2$  duas retas quaisquer. Definimos a distância de Funk da reta  $l_1$  à reta  $l_2$  como sendo a quantidade  $d_F(l_1, l_2) \in \mathbb{R}$  tal que

$$d_F(l_1, l_2) = \min\{d_F(P, l_2) | P \in l_1\}.$$

Dizemos que  $P^* \in l_1$  é o ponto que realiza a distância de  $l_1$  até  $l_2$  se, e somente se,

$$d_F(P^*, l_2) \leq d_F(P, l_2), \text{ para todo } P \in l_1.$$

Inicialmente, antes de obtermos uma fórmula para o cálculo de distâncias entre retas, precisamos considerar algumas posições relativas entre elas.

**Definição 4.6 (Posições relativas entre retas em  $\mathbb{B}^2$ )** Sejam  $l_1$  e  $l_2$  duas retas quaisquer contidas em  $\mathbb{B}^2$ . Estas retas satisfazem uma, e apenas uma, das seguintes relações:

1.  $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ ;
2.  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ , onde  $\emptyset$  é o conjunto vazio.

No caso 1, dizemos que  $l_1$  e  $l_2$  são **retas concorrentes** e, no caso 2, **retas não concorrentes**.

Observe que, da Definição 4.6, se duas retas  $l_1$  e  $l_2$  são *concorrentes* em  $\mathbb{B}^2$ , então existe pelo menos um ponto  $P \in \mathbb{B}^2$  em comum entre elas e, conseqüentemente, a distância entre elas é nula. Sendo assim, consideraremos apenas os casos em que  $l_1$  e  $l_2$  são *retas não concorrentes*.

#### 4.5.1 Distância de Funk entre retas com inclinações iguais

Sejam  $l_1$  e  $l_2$ , contidas em  $\mathbb{B}^2$ , duas retas distintas e com inclinações iguais da forma  $l_1 : y = ax + b_1$  e  $l_2 : y = ax + b_2$ . Sendo a inclinação destas retas dada por  $a = \tan \theta$ , com  $\theta \in ] -\pi, \pi[$ , podemos obter a distância de  $l_1$  até  $l_2$  a partir da rotação destas retas num ângulo de  $\theta$  graus no sentido horário, como já fizemos nos capítulos anteriores. Assim, as retas  $l'_1$  e  $l'_2$  obtidas pela rotação de  $l_1$  e  $l_2$ , respectivamente, são retas constantes da forma:

$$\begin{cases} l'_1 : y = b_1 \cos \theta \in \mathbb{R}, \\ l'_2 : y = b_2 \cos \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Logo, tomando um ponto  $P' \in l'_1$ , este ponto tem coordenadas da forma  $(x', c_1 \cos \theta)$  e, por (4.15), a *distância de Funk* da reta  $l_1$  até a reta  $l_2$  é dada por:

$$d_F(l_1, l_2) = d_F(l'_1, l'_2) = d_F(P', l'_2) = \ln \frac{1 + \sigma(b_1 \cos \theta - b_2 \cos \theta)b_1 \cos \theta}{1 + \sigma(b_1 \cos \theta - b_2 \cos \theta)b_2 \cos \theta} \quad (4.28)$$

Observe que (4.28) depende apenas dos valores  $b_1$ ,  $b_2$  e  $\theta$  que são valores constantes dados pelas retas  $l_1$  e  $l_2$ . Ou ainda, a distância de Funk de  $l'_1$  até  $l'_2$  independe da abscissa  $x'$  do ponto de  $P'$  sobre a reta  $l'_1$  para realizar tal distância, independendo assim, da escolha inicial do ponto  $P'$ .

Pela invariância por rotação da distância de Funk  $d_F$ , considerando realizar o cálculo da distância de  $l_1$  até  $l_2$ , sem rotacioná-las, esta distância também independe da escolha inicial do ponto  $P$  sobre  $l_1$ . Em termos algébricos,

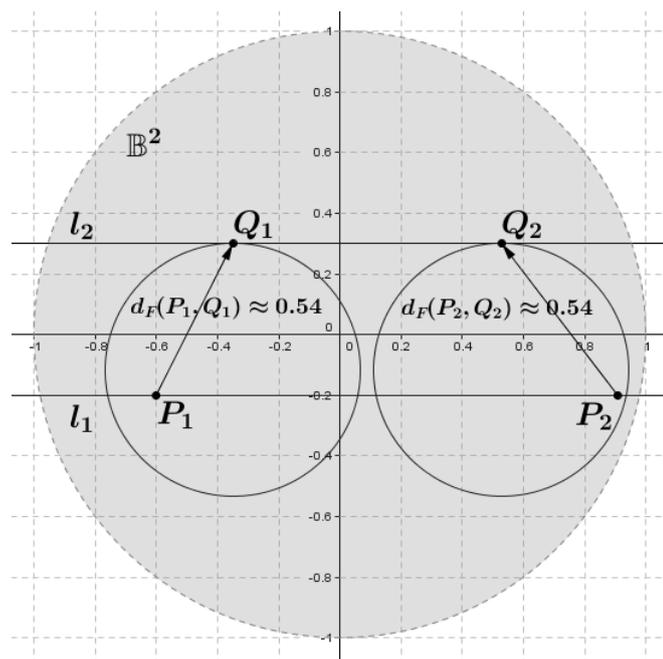
$$d_F(l_1, l_2) = d_F(P, l_2) = \ln r \text{ é constante, para todo } P \in l_1. \quad (4.29)$$

**Exemplo 4.9** Considere as retas  $l_1 : y = -0.2$  e  $l_2 : y = 0.3$ . De (4.28), a distância de  $l_1$  até a reta  $l_2$  é dada por:

$$d_F(l_1, l_2) = \ln \frac{1 + 0.2}{1 - 0.3} \approx 0.54.$$

Por outro lado, esta distância permanece constante independente da escolha do ponto inicial  $P$  sobre a reta  $l_1$  (veja a Figura 19).

Figura 19 – Distância de Funk entre retas



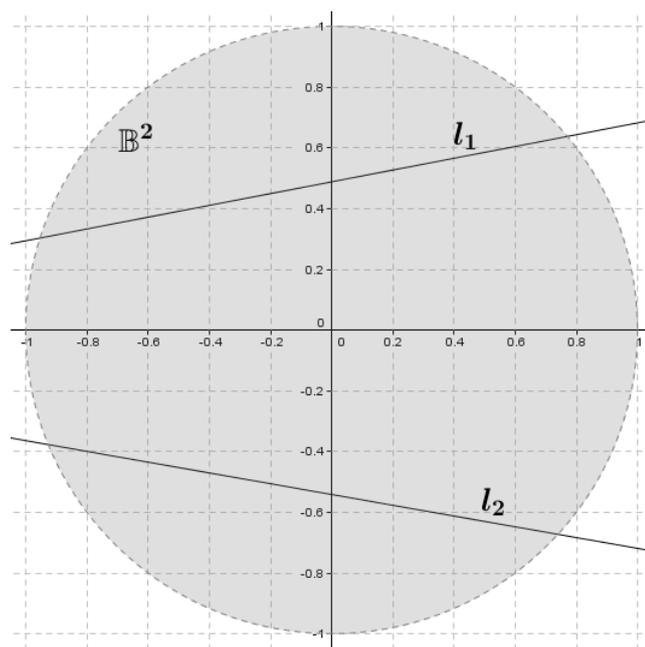
Fonte: Autores (2022). Construção no software Geogebra 5.0.

Usualmente, na Geometria Euclidiana, as definições de *paralelismo* em  $\mathbb{R}^2$  estão relacionadas ao fato de duas retas não possuir interseção. Entretanto, retas com estas propriedades são também retas distintas que possuem inclinações iguais, como  $l_1$  e  $l_2$  que acabamos de estudar. E mais, o cálculo da distância euclidiana entre retas paralelas também independe da escolha inicial do ponto sobre uma destas retas, assim como observado em (4.29).

Desta maneira, na Geometria de Funk, poderíamos definir retas paralelas baseada na relação (4.29) e, assim, ao tomar duas retas paralelas utilizando a Métrica de Funk  $F$  seria o mesmo que tomar duas retas paralelas utilizando a Métrica Euclidiana. Ou até mesmo definir retas paralelas baseadas em suas inclinações iguais e, conseqüentemente, a distância obtida em (4.28) melhor se intitularia como "*distância de Funk entre retas paralelas*".

O problema surge se pensarmos nas definições de retas paralelas como sendo retas que nunca se encontram. Desta maneira, teríamos "retas paralelas" com inclinações distintas sobre  $\mathbb{B}^2$  (como mostra a Figura 20). Ainda não seria nenhum impedimento a existência de retas com estas propriedades, entretanto, para estes tipos de retas, não é possível obter a distância de Funk entre elas. Por isso, preferimos não apresentar nenhuma definição formal sobre paralelismo.

Figura 20 – Retas não concorrentes com inclinações distintas



Fonte: Autores (2022). Construção no *software Geogebra 5.0*.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde os capítulos iniciais, já vínhamos levantando algumas reflexões sobre como algumas concepções que temos à respeito de conceitos geométricos podem não se aplicar ao utilizar uma geometria não euclidiana. Embora as métricas de Funk são alguns exemplos com estas propriedades, vimos na Seção 3.1 que os menores caminhos nas métricas de Funk sobre um disco aberto e unitário do  $\mathbb{R}^n$  ainda são linhas retas, conforme o estudo realizado por SHEN (2001).

Por outro lado, a fórmula obtida neste mesmo capítulo da distância induzida pela métrica  $F$  nos permitiu constatar que a distância, neste caso, não é simétrica. Como pudemos afirmar que o tempo de viagem é equivalente a distância, assim, dizer que a distância não é simétrica é o mesmo que dizer que o tempo de viagem de um ponto a outro não é o mesmo, considerando o caminho inverso.

De fato, se pensarmos intuitivamente num barco navegando, se ele segue numa direção que é a mesma que o fluxo da água o empurra, por exemplo, esta viagem é facilitada por esta força externa. O mesmo não ocorre quando o barco parte para a direção contrária, apresentando uma maior dificuldade para conter esta resistência da água e, portanto, realiza a viagem num tempo maior.

Ainda sobre o tempo de viagem, pudemos concluir, como mostrou a Observação 4.2, que se um barco parte da origem do plano cartesiano com destino à borda de  $\mathbb{B}^2$ , ele nunca chegará, isto é, uma vez ali dentro, não é possível "sair" deste domínio. Entretanto, caso um barco parta da fronteira de  $\mathbb{B}^2$  em direção à origem do plano, o tempo mínimo desta viagem é igual a  $\ln 2$  unidades de tempo, que nos permitiu concluir que sempre é possível "entrar" na bola aberta. Este fato foi o que permitiu observar que, quando construímos uma circunferência de Funk do tipo 2, é possível que existam soluções que não pertencem ao domínio  $\mathbb{B}^2$ . Todavia, apenas foi considerado tal domínio como relevante para nosso estudo, de certa forma, "o mundo de nossa métrica".

Por sua vez, visto que a distância não é simétrica, as circunferências de Funk puderam ser obtidas através de dois processos distintos: no sentido do seu centro até a curva e vice-versa - caracterizando assim os dois tipos apresentados nas Seções 4.1 e 4.4. Além disso, como as circunferências do tipo 1 foram obtidas partindo

do problema de encontrar os lugares geométricos que um barco em  $\mathbb{B}^2$  pode alcançar em um determinado tempo constante, logo ele não pode sair de ali, isto é, todos os pontos de sua curva estão contidos neste mesmo conjunto.

Uma observação curiosa sobre os dois tipos de circunferências (as do tipo 2 somente quando existe como solução uma curva fechada) foi que os lugares geométricos que as caracterizam são nada mais do que circunferências euclidianas deslocadas, contrariando a ideia inicial que prevíamos de que seus formatos seriam ovais, por conta da natureza do campo de forças utilizado. Ainda, quando as circunferências do tipo 2 não eram curvas fechadas, elas também possuíam como soluções arcos de circunferências em  $\mathbb{B}^2$ .

Assim como nas circunferências, todos os conceitos geométricos que envolvem distâncias nos fizeram considerar casos em que não consideraríamos na geometria euclidiana, como por exemplo, obter fórmulas distintas que determinam o tempo de viagem de uma ilha isolada até uma praia com a costa retilínea e vice-versa, ou ainda, em uma linguagem matemática, o surgimento de diferentes tipos de cônicas, se pensarmos em um estudo posterior à este trabalho.

Uma observação muito interessante sobre os caminhos que realizam estas distâncias entre uma ilha e uma praia e vice-versa foi que nem sempre eram perpendiculares à costa da praia, conforme as fórmulas obtidas nas Seções 4.3 e 4.4. Por fim, conseguimos calcular o tempo mínimo de viagem entre duas ilhas quando suas costas são caracterizadas por retas não concorrentes com inclinações iguais. O caso em que retas não concorrentes possuem inclinações distintas é um possível estudo futuro a se pensar.

Ao longo de todo o trabalho, percebemos através do estudo da métrica  $F$  como as ideias foram relacionadas, conforme as questões levantadas nos capítulos iniciais, sobre como nossa "concepção euclidiana" nos influencia a premeditar certas constatações. Além das problemáticas aqui apresentadas, outros questionamentos podem surgir naturalmente, como por exemplo, buscar por lugares que dividem na metade os tempos de viagem entre uma ilha e uma praia, ou ainda, buscar por lugares intermediários de alcance de uma viagem limitada de um ponto à outro dado, fazendo surgir assim, respectivamente, as caracterizações das *cônicas de Funk*, como as *parábolas* e as *elipses*, além de outros conceitos e propriedades geométricas do plano.

## REFERÊNCIAS

- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- CAMARGO, I. d.; BOULOS, P. **Geometria analítica / um tratamento vetorial**. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.
- CARMO, M. P. d. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- CARMO, M. P. d. **Geometria Riemanniana**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.
- CHENG, X.; SHEN, Z. **Finsler Geometry: An Approach via Randers Spaces**. [S.l.]: Springer Berlin, Heidelberg, 2012.
- CHERN, S.-S.; SHEN, Z. **Riemann-finsler geometry**. v. 6. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2005.
- CHÁVEZ, N. M. S. et al. Um problema de navegação de Zermelo: Métrica de Funk. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 7, n. 1, p. e3010, mar. 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/4574/2865>>. Acesso em: 10 jun. 2022.
- FUNK, P. Über Geometrien, bei denen die Geraden die Kürzesten sind. **Mathematische Annalen**, v. 101, p. 226–237, dez. 1929.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. v. 1, 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. v. 3, 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- GUSMÃO, N. L.; SAKAGUTI, F. Y.; PIRES, L. A. A geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, n. 2, p. 211–235, 2017. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/30307/pdf>>. Acesso em: 10 jun. 2022.
- KOPACZ, P. Application of planar Randers geodesics with river-type perturbation in search models. **Applied Mathematical Modelling**, v. 49, p. 531–553, maio 2017. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X17303244>>. Acesso em: 10 jun. 2022.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise**. v. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 1999.
- LIMA, E. L. **Análise no Espaço Rn**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- SANTOS, N. M. d.; ANDRADE, D. **Vetores e matrizes: Uma introdução à álgebra linear**. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.
- SHEN, Z. **Lectures on Finsler geometry**. Singapore, USA: World Scientific, 2001.
- TENENBLAT, K. **Introdução à geometria diferencial**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2008.