INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS
DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)

MATEMÁTICA – LICENCIATURA

ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

EVERTON WESLEY LIVRAMENTO

Foz do Iguaçu
2024

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)

MATEMÁTICA – LICENCIATURA

ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

EVERTON WESLEY LIVRAMENTO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León

Foz do Iguaçu
2024

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

EVERTON WESLEY LIVRAMENTO

ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León
(UNILA)

Prof. Dr. Newton Mayer Solórzano Chávez
(UNILA)

Prof. Dr. Rodrigo Bloot
(UNILA)

Foz do Iguaçu, 26 de abril de 2024.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor: Everton Wesley Livramento

Curso: Matemática – Licenciatura

Tipo de Documento

(X) graduação	(.....) artigo
(.....) especialização	(X) trabalho de conclusão de curso
(.....) mestrado	(.....) monografia
(.....) doutorado	(.....) dissertação
	(.....) tese
	(.....) CD/DVD – obras audiovisuais
	(.....)

Título do trabalho acadêmico: Estabilidade Estrutural de Sistemas Lineares de Equações Diferenciais Ordinárias

Nome do orientador: Víctor Arturo Martínez León

Data da Defesa: 26/04/2024

Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor:

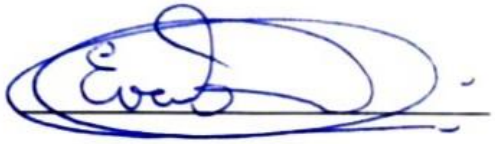
a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons* **Licença 3.0 Unported.**

Foz do Iguaçu, 26 de abril de 2024.



Everton Wesley Livramento

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Dedico esse trabalho aos meus pais, José Luiz Livramento e Lourdes Reiko Taba Livramento, a querida Lucia Helena Marques, cujo amor e apoio foram a base para minha persistência e sucesso, e meus irmãos Everson e Evelise. Enfim, agradeço a todos os familiares por sempre acreditarem em mim.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

AGRADECIMENTOS

Àqueles que estiveram ao meu lado durante esta jornada, dedico este trabalho com profunda gratidão.

Ao meu orientador e amigo, Professor Víctor Arturo Martínez León, quem com sua orientação sábia e paciência infinita foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Gratidão por compartilhar, sua persistência, seu conhecimento e experiência.

Aos meus colegas de curso, por compartilharem risadas, dúvidas e descobertas, agradeço por tornarem essa jornada mais significativa.

Aos amigos, que me apoiaram nos momentos de dúvida e cansaço, agradeço por serem minha força, em especial a equipe da Selkeys Contabilidade Ricardo, Thais, Victor, Renata e Weltter.

A todos os professores e profissionais da Universidade Federal da Integração Latino Americana, em especial da área de Matemática, que contribuíram diretamente para o meu aprendizado, agradeço por inspirarem minha paixão pela ciência dos números.

Este trabalho é dedicado a vocês. Muito obrigado por fazerem parte da minha trajetória acadêmica!

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Os nossos pais amam-nos porquê somos seus filhos, é um fato inalterável. Nos momentos de sucesso, isso pode parecer irrelevante, mas nas ocasiões de fracasso, oferecem um consolo e uma segurança que não se encontram em qualquer outro lugar.
Bertrand Russell

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

RESUMO

Este trabalho estuda a equivalência entre sistemas lineares hiperbólicos e sistemas lineares estruturalmente estáveis, explorando a teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias. Partindo das bases históricas estabelecidas por Newton e Leibniz, investigamos como pequenas perturbações afetam o comportamento das soluções de sistemas lineares, com foco na estabilidade estrutural. Revisamos conceitos fundamentais de álgebra linear e equações diferenciais ordinárias, examinando a Forma Canônica de Jordan e técnicas de resolução de sistemas lineares com coeficientes constantes. Em seguida, introduzimos a teoria qualitativa de sistemas lineares, destacando a importância da matriz hiperbólica e sua relação com a estabilidade estrutural. Demonstramos em detalhe a equivalência entre sistemas lineares hiperbólicos e sistemas lineares estruturalmente estáveis.

Palavras-chaves: Equações diferenciais ordinárias; sistemas lineares; estabilidade estrutural; matriz hiperbólica; Forma Canônica de Jordan.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

RESUMEN

Este trabajo estuda la equivalencia entre sistemas lineales hiperbólicos y sistemas lineales estructuralmente estables, explorando la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. Partiendo de las bases históricas establecidas por Newton y Leibniz, investigamos cómo pequeñas perturbaciones afectan el comportamiento de las soluciones de sistemas lineales, con enfoque en la estabilidad estructural. Revisamos conceptos fundamentales de álgebra lineal y ecuaciones diferenciales ordinarias, examinando la Forma Canónica de Jordan y técnicas de resolución de sistemas lineales con coeficientes constantes. Luego, introducimos la teoría cualitativa de sistemas lineales, destacando la importancia de la matriz hiperbólica y su relación con la estabilidad estructural. Demostramos en detalle la equivalencia entre sistemas lineales hiperbólicos y sistemas lineales estructuralmente estables.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales ordinarias; sistemas lineales; estabilidad estructural; matriz hiperbólica; Forma Canónica de Jordan.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

ABSTRACT

This work studies the equivalence between hyperbolic linear systems and structurally stable linear systems, exploring the qualitative theory of ordinary differential equations. Building on the historical foundations established by Newton and Leibniz, we investigate how small perturbations affect the behavior of solutions of linear systems, focusing on structural stability. We review fundamental concepts of linear algebra and ordinary differential equations, examining the Jordan Canonical Form and techniques for solving linear systems with constant coefficients. Next, we introduce the qualitative theory of linear systems, highlighting the importance of the hyperbolic matrix and its relationship with structural stability. We demonstrate in detail the equivalence between hyperbolic linear systems and structurally stable linear systems.

Keywords: Ordinary differential equations; linear systems; structural stability; hyperbolic matrix; Jordan Canonical Form.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11

2 FUNDAMENTOS 15

2.1 NOÇÕES BÁSICAS DE MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES LINEARES 15

2.2 SISTEMAS AUTÔNOMOS E NÃO AUTÔNOMOS 19

2.3 NOÇÕES BÁSICAS DE CÁLCULO MATRICIAL 20

2.4 SISTEMAS LINEARES 22

2.5 SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE MATRIZES 29

2.6 SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE MATRIZES 30

2.7 O TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE EDO'S LINEARES . 31

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES 35

3.1 O FLUXO ASSOCIADO A UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA LINEAR 35

3.2 CONJUGAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES 42

3.3 SISTEMAS LINEARES BIDIMENSIONAIS 49

3.4 ATRATORES E FONTES 60

3.5 SISTEMAS LINEARES HIPERBÓLICOS 75

4 ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE CAMPOS LINEARES 88

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 98

REFERÊNCIAS 100

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais ordinárias (EDO's) entrelaçam-se com os primórdios do Cálculo, nascido das mentes brilhantes de Newton e Leibniz no final do século XVII. Impulsionadas por desafios físicos, as EDO's expandiram seu domínio para além da física, permeando áreas como biologia, economia, ecologia, química entre outras.

No início, a busca por soluções explícitas era a tônica, mas logo suas limitações se mostraram evidentes. Teoremas de existência e unicidade abriram caminho para a exploração da existência de soluções por métodos mais abrangentes.

No século XIX, a mente visionária de Henri Poincaré deu início à abordagem moderna, focada na análise qualitativa das EDO's. Essa perspectiva, liberta da busca por soluções exatas, revelou-se crucial para desvendar o comportamento das soluções ao longo do tempo.

Um exemplo notável é o sistema massa-mola, onde a análise qualitativa permite prever com precisão seu comportamento oscilatório, abrindo portas para uma compreensão mais profunda de diversos sistemas físicos.

As EDO's continuam a evoluir, impulsionando avanços científicos e tecnológicos em diversas áreas. A busca por soluções cada vez mais precisas e eficientes, aliada à análise qualitativa e à modelagem computacional, contribui para a construção de um futuro mais próspero e sustentável.

Minha jornada no estudo da Matemática incluiu enfrentar desafios em Física, notadamente com o exemplo clássico de um corpo preso por uma mola. Essas experiências foram os catalisadores que despertaram meu interesse em aprofundar minhas pesquisas na área da estabilidade. Durante anos, adquiri conhecimentos e experiência até o momento em que cheguei à Universidade.

Foi na Universidade, durante aulas de Álgebra Linear e Equações Diferenciais Ordinárias, que encontrei a oportunidade de explorar a estabilidade de sistemas lineares. Aqui, a análise dos autovalores e autovetores da matriz jacobiana do sistema se tornou uma ferramenta valiosa. Em particular, aprendi que quando todos os autovalores dessa matriz têm partes reais negativas, o sistema é considerado estável. Além disso, descobri o conceito de estabilidade estrutural em sistemas lineares de

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

EDO's, que é um conceito mais amplo do que a simples estabilidade.

A pergunta que sempre me intrigou foi: por que estudar esse assunto? A resposta surgiu de maneira clara e profunda durante o curso da minha pesquisa. A compreensão da estabilidade não é apenas um exercício acadêmico, mas uma chave para desvendar os segredos do mundo que nos cerca. Isso me motivou a prosseguir nesse campo, pois vi a relevância e o potencial impacto do estudo da estabilidade em diversos domínios da ciência e da engenharia.

Este trabalho visa explorar a estabilidade estrutural de sistemas lineares de EDO's, examinando como as soluções se comportam frente a pequenas perturbações no sistema. Em particular, investigaremos as condições sob as quais um sistema linear de EDO's é estruturalmente estável, adotando como hipótese que o sistema seja hiperbólico, ou seja, que a matriz associada tenha autovalores com parte real diferente de zero.

Para embasar nossa pesquisa bibliográfica, realizamos uma revisão da literatura matemática relacionada aos conteúdos de Álgebra Linear, Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, Análise em $\mathbb{R}^n$ e espaços métricos. A partir dessa revisão, exploramos os seguintes tópicos:

- Espaços vetoriais, matrizes, transformações lineares, autovetores e autovalores (HOFFMAN; R., 1971; HIRSCH; SMALE, 1974); Técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias (LEÓN; SCÁRDUA, 2022).

- Topologia, continuidade, homeomorfismos, Funções diferenciáveis e difeomorfismos, em $\mathbb{R}^n$ (LIMA, 2015).

- Definição de espaço métricos, topologia e continuidades em espaços métricos (LIMA, 2011).

- Sistemas lineares com coeficientes constantes (homogêneos e não homogêneos), enfatizando a Forma Canônica de Jordan (LEÓN; SCÁRDUA, 2022; HIRSCH; SMALE, 1974; SOTOMAYOR, 1979; PERKO, 2001; LANG, 1987).

- Teoria qualitativa de sistemas lineares, introduzindo a noção de matriz hiperbólica e estabilidade estrutural (BENAZIC, 2007; HIRSCH; SMALE, 1974; PERKO, 2001; SOTOMAYOR, 1979).

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

- Demonstração da equivalência de sistemas lineares hiperbólicos (BENAZIC, 2007).

Nossa pesquisa tem como foco o estudo da estabilidade estrutural de sistemas lineares de EDO's, buscando compreender como as soluções se comportam diante de perturbações mínimas no sistema. Mais especificamente, almejamos responder à seguinte questão: sob quais condições um sistema linear de EDO's é estruturalmente estável?

Partimos da hipótese de que o sistema linear em questão é hiperbólico, ou seja, que a matriz associada possui autovalores com partes reais diferentes de zero. Com base nessa hipótese, pretendemos demonstrar um resultado clássico da teoria de estabilidade, que afirma a equivalência entre sistemas lineares hiperbólicos e sistemas lineares estruturalmente estáveis (Teorema 3.6.3 em (BENAZIC, 2007)).

O estudo da estabilidade estrutural de sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias é fundamental em diversos campos, incluindo matemática aplicada, engenharia, física e outras disciplinas. A análise da estabilidade permite prever o comportamento de sistemas dinâmicos ao longo do tempo, projetar sistemas robustos, controlar sistemas dinâmicos e compreender o comportamento de sistemas físicos e naturais. Além disso, é essencial para garantir a segurança, confiabilidade e eficiência de sistemas e processos industriais. Em suma, a estabilidade estrutural desempenha um papel crucial no avanço da ciência e da tecnologia em diversas áreas.

O objetivo geral deste trabalho é demonstrar a equivalência entre sistemas lineares hiperbólicos e sistemas lineares estruturalmente estáveis. Para alcançar esse objetivo, os objetivos específicos incluem o estudo de sistemas lineares com coeficientes constantes (homogêneos e não homogêneos), a introdução do conceito de exponencial de uma matriz e os métodos para calculá-la através da Forma Canônica de Jordan, a investigação da teoria qualitativa de sistemas lineares, abordando a noção de matriz hiperbólica e estabilidade estrutural, e a apresentação de uma demonstração detalhada da equivalência de sistemas lineares hiperbólicos.

Nossa abordagem metodológica baseia-se em uma revisão bibliográfica detalhada. As sessões de estudo e análise foram conduzidas regularmente, com encontros agendados de forma remota ou presencial, e utilizamos referências fundamentais, como as obras de León e Scárdua (LEÓN; SCÁRDUA, 2022), Jorge Sotomayor

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

(SOTOMAYOR, 1979), e Renato Benazic (BENAZIC, 2007), como base teórica para nosso trabalho.

No Capítulo 2, introduzimos alguns conceitos preliminares fundamentais para a compreensão do trabalho. Na primeira seção, abordamos noções básicas de matrizes e transformações lineares, fornecendo notações e terminologias que serão utilizadas ao longo do trabalho. Em seguida, exploramos sistemas autônomos e não autônomos, seguidos por uma discussão sobre cálculo matricial. Posteriormente, investigamos sistemas lineares e norma uniforme de uma matriz, seguidos por uma análise de sequências e séries de matrizes. Concluímos o capítulo com uma discussão sobre o teorema de existência e unicidade de EDO's lineares.

No Capítulo 3, adentramos no estudo das equações diferenciais ordinárias lineares. Iniciamos discutindo o fluxo associado a uma equação diferencial ordinária linear, seguido por uma exploração da conjugação de sistemas lineares. Em seguida, examinamos sistemas lineares bidimensionais e discutimos atratores e fontes. Finalmente, abordamos sistemas lineares hiperbólicos.

No Capítulo 4, concentramo-nos na estabilidade estrutural de campos lineares. Apresentamos alguns resultados prévios para demonstrar que sistemas lineares hiperbólicos são equivalentes a sistemas lineares estruturalmente estáveis.

No último capítulo, apresentamos as conclusões do trabalho, destacando os principais resultados obtidos, suas implicações e possíveis direções para pesquisas futuras.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

2 FUNDAMENTOS

Neste capítulo, estabelecemos as bases necessárias para o entendimento dos conceitos abordados no trabalho. Começamos com noções de Álgebra Linear, Cálculo matricial e sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. As principais referências desse capítulo utilizadas foram (HOFFMAN; R., 1971; LEÓN; SCÁRDUA, 2022).

2.1 Noções básicas de matrizes e transformações lineares

Daqui em diante $\mathbb{K}$ denotará $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Seus elementos serão chamados *escalares*. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, denotaremos

$$I_{m,n} = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Uma *matriz de m-linas e n-colunas com coeficientes em* $\mathbb{K}$ ou simplesmente $\mathbb{K}$*-matriz* $m \times n$ é qualquer função

$$\begin{array}{rccc} A: & I_{m,n} & \to & \mathbb{K} \\ & (i,j) & \mapsto & A(i,j) = a_{i,j} \end{array}$$

onde $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ é chamada a ij*-entrada* da matriz A. Se acostuma denotar:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}].$$

O conjunto de todas as $\mathbb{K}$-matrizes $m \times n$ será denotado por $\mathbb{K}^{m\times n}$. Neste conjunto, temos uma noção de igualdade: se $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$, então $A = B$ se, e só se, $a_{i,j} = b_{i,j}$ para todo $(i,j) \in I_{m,n}$. Também, podemos definir uma soma e um produto por escalar:

$$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}], \quad \alpha A = [\alpha a_{i,j}]\ (\alpha \in \mathbb{K}).$$

Com estas operações $\mathbb{K}^{m\times n}$ se torna um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão mn. Denotaremos por $\theta = [0]$ à matriz nula.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Como $\mathbb{K}^{m\times n}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão mn, ele é isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$, pelo isomorfismo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n} \longleftrightarrow (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \in \mathbb{K}^{mn}.$$

Em particular, uma *matriz linha* $A \in \mathbb{K}^{1\times n}$ (respectivamente, *matriz coluna* $A \in \mathbb{K}^{m\times 1}$) pode ser identificado como um vetor de $\mathbb{K}^n$ (respectivamente, $\mathbb{K}^m$) via o isomorfismo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \longleftrightarrow (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$

$$\left(\text{respectivamente, } \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \longleftrightarrow (a_{m1}, \ldots, a_{m1}) \right).$$

Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$ e $B = [b_{jk}] \in \mathbb{K}^{n\times p}$ definimos a multiplicação $AB = [c_{ik}] \in \mathbb{K}^{m\times p}$ onde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$. São satisfeitas as seguintes propriedades:

1. $A(BC) = (AB)C$, para quaisquer $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B \in \mathbb{K}^{n\times p}, C \in \mathbb{K}^{p\times r}$.
2. $(A + B)C = AC + BC$, para quaisquer $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, C \in \mathbb{K}^{n\times p}$.
3. $A(B + C) = AB + AC$, para quaisquer $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, B, C \in \mathbb{K}^{n\times p}$.

Em $\mathbb{K}^{n\times n}$, definimos

$$I_n = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

onde δ_{ij} é a *delta de Kronecker* e definida por $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. É satisfeito $AI_n = I_nA = A$ para todo $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. I_n é chamada *matriz identidade multiplicativa* em $\mathbb{K}^{n\times n}$. Não é difícil mostrar que com as operações de soma e produto de matrizes $\mathbb{K}^{n\times n}$ é um anel não comutativo com unidade (ver item (j) do Exemplo I.1.5 em (GARCIA; LEQUAIN, 2010)).

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Dado $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ e $k = 0, 1, 2, \ldots$, a potência k-ésima de A define-se indutivamente por:

$$A^0 = I_n,\ A^1 = A \quad \text{e} \quad A^k = A^{k-1}A.$$

Dizemos que $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ é uma matriz *invertível* se, e só se, existe $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = I_n$. No caso de existir esta matriz B, se prova que ela é única e denota-se por A^{-1}.

O conjunto de todas as matrizes invertíveis denota-se por $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ e é chamado *grupo linear* de $\mathbb{K}^n$. Com a operação de produto de matrizes $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ é um grupo não abeliano (ver Exemplo 3 da Seção V.1 em (GARCIA; LEQUAIN, 2010)).

Uma função $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ é chamada de *transformação linear* se, e só se,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y),$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, y \in \mathbb{K}^n$. Denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ ao conjunto de todas as transformações lineares de $\mathbb{K}^n$ em $\mathbb{K}^m$. Com as operações usuais de soma de uma transformação linear e produto de um escalar por uma transformação linear, $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ torna-se um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão mn. Logo, $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ é isomorfo a $\mathbb{K}^{m\times n}$. Podemos explicitar este isomorfismo? Denotemos por $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ à base canônica de $\mathbb{K}^n$ e $f_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, f_m = (0, 0, \ldots, 1)$ à base canônica de $\mathbb{K}^m$. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$, assim temos que existe $a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{K}$ tais que

$$\begin{cases} T(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{m1}f_m \\ T(e_2) = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{m2}f_m \\ \qquad\qquad \vdots \\ T(e_n) = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \cdots + a_{mn}f_m. \end{cases}$$

Definimos:

$$A_T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

a qual é chamada *matriz associada a T nas bases canônicas de $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ respectivamente*. Reciprocamente, dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definimos

$$\begin{array}{rccl} T_A: & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ & x & \mapsto & T_A(x) = Ax. \end{array}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Claramente, $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$. T_A é chamada *transformação linear associada a* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Assim, podemos definir as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rccl} L: & \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m) & \to & \mathbb{K}^{m\times n} \\ & T & \mapsto & L(T)=A_T \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} S: & \mathbb{K}^{m\times n} & \to & \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m) \\ & A & \mapsto & S(A)=T_A \end{array}$$

as quais, pelo visto acima, estão bem definidas. Não é difícil mostrar que $S = L^{-1}$. Portanto, temos explicitado o isomorfismo entre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ e $\mathbb{K}^{m\times n}$. Assim, desde o ponto de vista da álgebra linear, $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ e $\mathbb{K}^{m\times n}$ são indistinguíveis.

O *núcleo* de $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$, denota-se e define-se como

$$\mathrm{Nu}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n;\ Ax = O\}$$

é claro que $\mathrm{Nu}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{K}^n$.

Seja $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um *autovalor* de A se, e só se, existe $x \in \mathbb{K}^n - \{O\}$ tal que $Ax = \lambda x$. Este vetor não nulo x é chamado *autovetor de* A *associado ao autovalor* λ. Da Álgebra Linear, podemos ver que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de A se, e só se, $\mathrm{Nu}(A - \lambda I_n) \neq \{O\}$ se, e só se, $A - \lambda I_n$ não é invertível.

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$, escreveremos $A = [\ A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_n\ ]$ onde

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix},\ 1 \leq j \leq n.$$

O *determinante* é uma função que a cada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ associa um escalar $\det(A) \in \mathbb{K}$ o qual satisfaz:

1. $\det$ é uma função n-linear, i.e., para todo $1 \leq j \leq n$ se satisfaz

$$\det[A_1,\ldots,\alpha A_j+\beta A'_j,\ldots,A_n] = \alpha\det[A_1,\ldots,A_j,\ldots,A_n]+\beta\det[A_1,\ldots,A'_j,\ldots,A_n].$$

2. Se $A_i = A_j$ para $1 \leq i \neq j \leq n$ então $\det[A_1,\ldots,A_n] = 0$.

3. $\det(I_n) = 1$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Por exemplo, $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ verifica $\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Se $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ então $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Como consequência temos, $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ se, e só se, $\det(A) \neq 0$. Portanto, $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se, e só se, $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Note que $\det(A-\lambda I_n)$ é um polinômio de grau n com coeficientes em $\mathbb{K}$ e indeterminada λ, o qual é chamado o *polinômio característico* de A e é denotado por $P_A(\lambda)$.

2.2 Sistemas autônomos e não autônomos

Uma categoria significativa de sistemas de equações diferencias lineares consiste naqueles com coeficientes constantes. Tais modelos frequentemente oferecem uma primeira e bastante adequada aproximação dos fenômenos que buscam descrever. Agora vamos examinar como estudar esses sistemas.

Definição 2.1. Um sistema de n*-equações diferenciais ordinárias de primeira ordem* é expresso como:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' = F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n' = F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde t é uma variável independente que geralmente representa o "tempo", $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são variáveis dependentes de t que assumem valores reais e $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são funções reais definidas em um subconjunto D de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Em muitos casos, as funções $F_1, F_2, \ldots, F_n$ dependem apenas das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e não da variável t. Nesse caso, (2.1) toma a forma

$$\begin{cases} x_1' = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' = F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n' = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{2.2}$$

O sistema (2.2) é denominado *sistema autônomo* enquanto (2.1) é chamado de *não autônomo*.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Definição 2.2. Uma *solução de uma EDO* (2.1) é um conjunto de n funções $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ com valores reais e definidas no mesmo intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ que satisfazem:

1. $(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in D$ para todo $t \in J$.

2. Cada φ_j é diferenciável em J e para todo $t \in J$ satisfaz:

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = F_1(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \\ \varphi_2'(t) = F_2(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_n'(t) = F_n(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)). \end{cases}$$

Para sistemas autônomos, temos:

Definição 2.3. Uma *solução do sistema autônomo* (2.2) é um conjunto de n funções $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ com valores reais e definidas no mesmo intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ que

1. $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in U$ para todo $t \in J$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto que é o domínio de $F_1, \ldots, F_n$.

2. Cada φ_j é diferenciável em J e para todo $t \in J$ satisfaz:

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = F_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \\ \varphi_2'(t) = F_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_n'(t) = F_n(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)). \end{cases}$$

2.3 Noções básicas de cálculo matricial

Uma matriz de ordem $m \times n$ pode ser representada como uma lista ordenada de mn números reais, pertencendo ao espaço euclidiano real de dimensão finita mn, representado por $\mathbb{R}^{mn}$. Denotemos por $\mathbb{R}^{m\times n}$ o conjunto de todas as matrizes retangulares de ordem $m \times n$ com coeficientes reais e definimos $I_{m,n}$ como o conjunto de pares ordenados $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Uma função definida em um intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}^{m\times n}$ é chamada de *função matricial* e pode ser representada como:

$$\begin{array}{rcl} \Phi: & J & \to \mathbb{R}^{m\times n} \\ & t & \mapsto \Phi(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix} = [a_{ij}(t)]. \end{array}$$

Devido ao isomorfismo entre $\mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbb{R}^{mn}$, qualquer função matricial pode ser vista como uma curva em $\mathbb{R}^{mn}$, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} \Phi: & J & \to \mathbb{R}^{mn} \\ & t & \mapsto (a_{11}(t), a_{12}(t), \dots, a_{1n}(t), \dots, a_{m1}(t), a_{m2}(t), \dots, a_{mn}(t)). \end{array}$$

Assim, dada uma função matricial $\Phi(t) = [a_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{mn}$, automaticamente obtemos uma coleção de mn funções reais de variável real a_{ij}, chamadas *funções coordenadas de* Φ. Notavelmente, $a_{ij} : J \to \mathbb{R}$ para todo $(i,j) \in I_{m,n}$. As propriedades comuns dessas funções coordenadas caracterizam as propriedades da função matricial Φ.

Definição 2.4. Seja $\Phi : J \to \mathbb{R}^{m\times n}$ uma função matricial tal que $\Phi(t) = [a_{ij}(t)]$, para todo $t \in J$. Se $t_0 \in J$, dizemos que a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é o *limite de* $\Phi(t)$ *quando* t *tende a* t_0, denotado por

$$\lim_{t\to t_0} \Phi(t) = A,$$

se, e só se,

$$\lim_{t\to t_0} a_{ij}(t) = a_{ij},$$

para todo $(i,j) \in I_{m,n}$.

As regras usuais da álgebra de limites são válidas para funções matriciais. A continuidade de funções matriciais também é definida em termos de suas funções coordenadas.

Definição 2.5. Seja $\Phi : J \to \mathbb{R}^{m\times n}$ uma função matricial tal que $\Phi(t) = [a_{ij}(t)]$, para todo $t \in J$. Dizemos que Φ é *contínua* em $t_0 \in J$ se, e só se, cada a_{ij} é contínua em t_0 para todo $(i,j) \in I_{m,n}$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Definição 2.6. Seja $\Phi : J \to \mathbb{R}^{m\times n}$, onde J é um intervalo aberto. Dizemos que Φ é *diferenciável* em $t_0 \in J$ se, e só se, o seguinte limite existe:

$$\lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}[\Phi(t) - \Phi(t_0)].$$

Em caso afirmativo, denotamos por $\Phi'(t_0)$ o limite anterior.

Dizemos que a função matricial $\Phi : J \to \mathbb{R}^{m\times n}$ é de *classe* C^1 no intervalo J se, e só se, Φ é diferenciável em J e a função derivada Φ' é contínua em J. Procedendo por indução, dizemos que Φ é de *classe* C^k *(*$k > 1$*)* no intervalo J se, e só se, $\Phi^{(k-1)}$ é diferenciável em J e a função derivada k-ésima $\Phi^{(k)}$ é contínua em J.

Definição 2.7. Seja $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^{m\times n}$ uma função matricial tal que $\Phi(t) = [a_{ij}(t)]$, para todo $t \in [a, b]$. Dizemos que Φ é integrável em $[a, b]$ se, e só se, cada a_{ij} é integrável em $[a, b]$. Em caso afirmativo, temos que

$$\int_a^b \Phi(t)dt = \left[\int_a^b a_{ij}(t)dt\right].$$

Naturalmente, muitas das regras do cálculo diferencial e integral que conhecemos podem ser estendidas ao cálculo matricial.

2.4 Sistemas lineares

Voltando à análise dos sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias, agora é evidente que se definirmos

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

então o sistema (2.1) pode ser expresso de forma mais concisa como

$$x' = F(t, x). \tag{2.3}$$

De maneira similar, uma solução de (2.3) é uma função $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : J \to \mathbb{R}^{1\times n} \approx \mathbb{R}^n$ diferenciável em J e satisfaz

1. $(t, \varphi(t)) \in D$ para todo $t \in J$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

2. $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$ para todo $t \in J$.

Considere um caso particularmente significativo de sistemas de equações diferenciais ordinárias quando as funções $F_1, \ldots, F_n$ assumem a forma

$$F_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \ldots + a_{in}(t)x_n + b_i(t),$$

onde $a_{ij},\ b_i : J \to \mathbb{R}$, $(1 \leq i, j \leq n)$ são funções predefinidas. Nesse contexto, o sistema (2.1) pode ser expresso como

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t). \end{cases} \tag{2.4}$$

Este conjunto de equações diferenciais é conhecido como *sistema de equações diferenciais ordinárias lineares*. Se introduzirmos as notações

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix},\ A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

então (2.4) pode ser compactamente representado como

$$x' = A(t)x + b(t). \tag{2.5}$$

Definição 2.8. Para funções matriciais $A : J \to \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b : J \to \mathbb{R}^{n\times 1}$, uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ é uma *solução* da EDO (2.5) se, e só se, φ é diferenciável em $I \subseteq J$ e satisfaz:

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t), \quad \text{para todo } t \in I.$$

Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1 (Exemplo 6.3.2 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** Suponha que $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$ e $b(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$. Então uma solução de $x' = A(t)x + b(t)$ é da forma

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} -t - 1 + C_1 e^t \\ C_2 e^{\frac{1}{2}t^2} \end{bmatrix},\ \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

No exemplo anterior, observamos que existem infinitas soluções para o sistema dado (basta atribuir qualquer valor real às constantes C_1 e C_2), e cada solução representa uma curva diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Este é um fato geral: Dadas as funções matriciais $A : J \to \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b : J \to \mathbb{R}^{n\times 1}$, o sistema (2.5) possui infinitas soluções, todas representando curvas diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$. (Observa-se que estamos identificando geometricamente o espaço de matrizes $\mathbb{R}^{n\times 1}$ com o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. De agora em diante, usaremos essa identificação sem mais comentários). Nas aplicações, é comum buscar uma solução de (2.5) que satisfaça uma condição inicial, ou seja, que possua um valor determinado $x_0 \in \mathbb{R}$ em um instante t_0 dado. Isso é conhecido como um *Problema de Valor Inicial*.

Definição 2.9. Considerando $A : J \to \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b : J \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ funções matriciais, um *Problema de Valor Inicial* (PVI) ou *Problema de Cauchy* associado à EDO linear (2.5) é definido como:

$$\begin{cases} x' &= A(t)x + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $t_0 \in J$ e $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ são valores conhecidos.

Definição 2.10. Uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^{n\times 1}$ definida em um intervalo aberto $I \subseteq J$ é uma *solução* do PVI (2.6) se, e só se, φ é diferenciável em I, $t_0 \in I$, e satisfaz:

$$\begin{cases} \varphi'(t) &= A(t)\varphi(t) + b(t), \text{ para todo } t \in J \\ \varphi(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

A interpretação geométrica da solução do PVI (2.6) é que, dentre todas as soluções (curvas diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$) do sistema dado, escolhemos aquela que, no instante t_0, passa pelo ponto x_0 no espaço $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.2 (Exemplo 6.3.4 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** A solução do PVI

$$\begin{cases} x' &= A(t)x + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

onde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ são as funções matriciais do Exemplo 2.1, $t_0 = 0$ e $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é

$$\varphi(t) = (-t - 1 + e^t, e^{\frac{1}{2}t^2}), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Em relação ao exemplo anterior, surge uma pergunta natural: A função encontrada é a única solução do PVI dado? Em outras palavras, é possível que o PVI do Exemplo 2.2 admita mais de uma solução? Pela interpretação geométrica de uma solução do PVI que demos anteriormente, poderíamos responder que não, já que, dentre todas as soluções possíveis (curvas em $\mathbb{R}^2$), escolhemos aquela que, no instante $t = 0$, passa pelo ponto $(0, 1)$. Observa-se que este raciocínio é correto se soubermos que as soluções de um sistema são disjuntas (isto é, curvas que não se intersectam). No caso de nosso exemplo, poderíamos mostrar com um pouco de paciência que isso é verdade; duas soluções da EDO dada ou são iguais, ou são disjuntas. Esta propriedade é satisfeita para qualquer EDO? De modo mais geral: Todo PVI do tipo (2.6) admite solução? Se a resposta é afirmativa, essa solução é única? Caso contrário, sob que condições um PVI admite solução? O Teorema de Existência e Unicidade para um Sistema Linear de Equações Diferenciais Ordinárias responde a todas essas questões.

A partir de agora, vamos estudar Problemas de Valores Iniciais do tipo

$$\begin{cases} x' &= Ax + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$, J é um intervalo de $\mathbb{R}$, $t_0 \in J$ e $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. A EDO (2.7) é chamada de *sistema linear com coeficientes constantes* porque a função matricial A é constante. No caso em que $b(t) = 0$, para todo $t \in J$, estamos diante de um sistema *homogêneo*; caso contrário, dizemos que é um sistema *não homogêneo*.

Vamos considerar sistemas do tipo:

$$\begin{cases} x' &= Ax \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ são dados. Observe que quando $n = 1$, $A = a \in \mathbb{R}$ e $t_0,\ x_0 \in \mathbb{R}$, o PVI (2.8) é da forma:

$$\left| \begin{array}{rcl} x' &=& ax \\ x(t_0) &=& x_0. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Sabe-se que a função

$$\varphi(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} \tag{2.10}$$

a qual está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, é a única solução do PVI (2.9). Nos exemplos seguintes, é utilizado este para resolver alguns sistemas do PVI.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Exemplo 2.3 (Exemplo 6.4.1 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** A solução do PVI:

$$\begin{cases} x_1' &= 3x_1, & x_1(0) &= -1 \\ x_2' &= -2x_2, & x_2(0) &= 1. \end{cases}$$

é dado por

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \varphi(t) = (-e^{3t}, e^{-2t}) \end{array}.$$

Exemplo 2.4 (Exemplo 6.4.2 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** O PVI

$$\begin{cases} x_1' &= \lambda_1 x_1, & x_1(0) &= x_0^1 \\ x_2' &= \lambda_2 x_2, & x_2(0) &= x_0^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n' &= \lambda_n x_n, & x_n(0) &= x_0^n. \end{cases}$$

tem como solução

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & \varphi(t) = (x_0^1 e^{\lambda_1 t}, x_0^2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, x_0^n e^{\lambda_n t}). \end{array}$$

O seguinte exemplo difere um pouco dos dois anteriores, mas ainda é possível resolver usando técnicas conhecidas:

Exemplo 2.5 (Exemplo 6.4.3 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** A solução do PVI:

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1 + 3x_2, & x_1(0) &= 0 \\ x_2' &= 3x_2, & x_2(0) &= 1. \end{cases}$$

é dado por:

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \varphi(t) = (\frac{3}{5}e^{3t} - \frac{3}{5}e^{-2t}, e^{3t}). \end{array}$$

Nos três exemplos anteriores, a solução é definida em $\mathbb{R}$. Isso levanta a questão: a solução do Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} x' &= Ax \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

está definida em todo $\mathbb{R}$? Os três exemplos anteriores podem sugerir que as técnicas aprendidas em uma disciplina de introdução às equações diferencias ordinárias são

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

suficientes para resolver qualquer PVI do tipo (2.8). No entanto, isso é falso. Por exemplo, tente resolver o PVI

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 5x_2, & x_1(0) = x_0^1 \\ x_2' = -2x_1 - 3x_2, & x_2(0) = x_0^2 \end{cases} \tag{2.11}$$

com as técnicas usadas até agora. Percebemos que não é possível resolver este PVI com essas técnicas. As matrizes associadas aos PVIs dos Exemplos 2.3, 2.4 e 2.5 são, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ e } \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

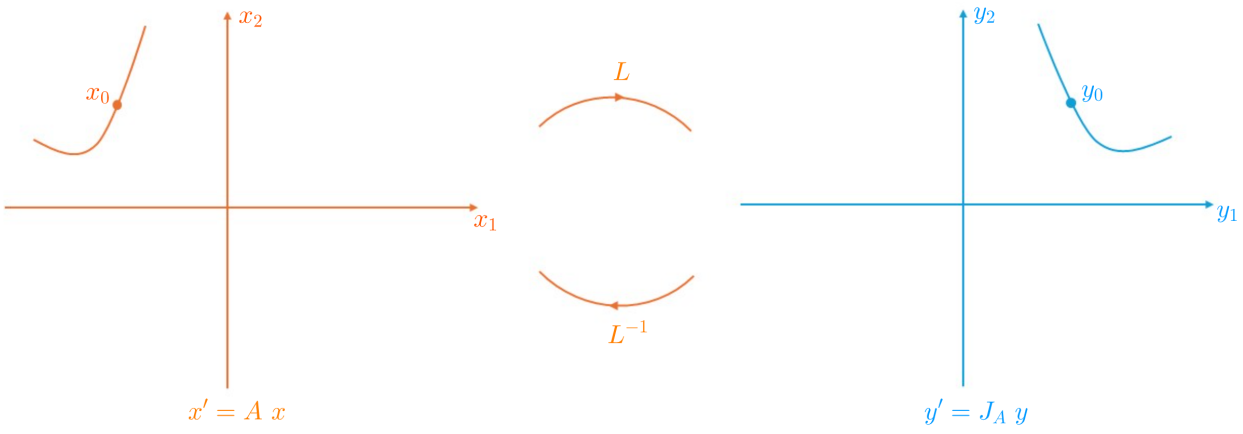
enquanto a matriz associada ao PVI (2.11) é

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

As três primeiras são matrizes triangulares, enquanto a última não. Essa diferença é a razão pela qual pudemos usar técnicas mais simples nos três primeiros exemplos. Prestemos atenção ao PVI (2.11). Considerando a mudança linear de coordenadas (Figura 1)

$$\begin{aligned} L: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto L(x_1, x_2) = (\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2, -\frac{2}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2) = (y_1, y_2) \end{aligned}$$

Figura 1 – Mudança Linear de coordenadas



Fonte: Elaboração do autor

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

transformamos o PVI (2.11) no PVI

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1, & y_1(0) = y_0^1 \\ y_2' = -y_2, & y_2(0) = y_0^2 \end{cases}$$

onde $(y_0^1, y_0^2) = \left(\frac{1}{3}x_0^1 + \frac{1}{3}x_0^2, -\frac{2}{3}x_0^1 - \frac{5}{3}x_0^2\right)$. Usando a técnica dos três primeiros exemplos, chegamos a que

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \varphi(t) = (y_0^1 e^{2t}, y_0^2 e^{-t}) \end{aligned}$$

é solução do PVI (2.11).

Desde que L é uma transformação linear inversível cuja inversa L^{-1} é dada por

$$\begin{aligned} L^{-1} : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (y_1, y_2) &\mapsto L^{-1}(y_1, y_2) = (5y_1 + y_2, -2y_1 - y_2) = (x_1, x_2) \end{aligned}$$

podemos retornar às variáveis originais x_1 e x_2 usando L^{-1} e obtemos que $\psi = L^{-1} \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\psi(t) = \left(\left[\frac{5}{3}x_0^1 + \frac{5}{3}x_0^2\right] e^{2t} - \left[\frac{2}{3}x_0^1 + \frac{5}{3}x_0^2\right] e^{-t}, - \left[\frac{2}{3}x_0^1 + \frac{2}{3}x_0^2\right] e^{2t} + \left[\frac{2}{3}x_0^1 + \frac{5}{3}x_0^2\right] e^{-t} \right)$$

é solução do PVI (2.11).

Voltando ao nosso estudo, estamos interessados em saber se o PVI (2.8) admite solução única. Já sabemos que quando $n = 1$, a solução é dada por $\varphi(t) = x_0 e^{at}$. Procedendo por analogia, é de se esperar que para o caso em que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, uma função do tipo $\varphi(t) = x_0 e^{tA}$ seja solução de (2.8). Mas a expressão anterior faz sentido? Note que a solução do PVI (2.9) envolve a função exponencial

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{3!}a^3 + \dots.$$

Podemos definir

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots?$$

$e^A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$? A resposta a esta questão será dada na próxima seção.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

2.5 Sequências e séries de matrizes

Apresentaremos agora alguns conceitos e resultados da Análise Real relacionados a matrizes. Iniciaremos com as noções topológicas e métricas fundamentais em espaços de matrizes. Como previamente mencionado, uma matriz $m \times n$ pode ser considerada como uma sequência ordenada de mn números reais, assim pertencendo ao espaço euclidiano real de dimensão finita $\mathbb{R}^{mn}$. Abordaremos então os conceitos relevantes para esses espaços.

Seja $|\cdot|$ uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$ (podendo ser a norma euclidiana $|(x_1, \ldots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$), é conhecido que a bola fechada $B_1[0] = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq 1\}$ constitui um subconjunto compacto, isto é, é fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$. Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, consideremos a transformação linear

$$\begin{aligned} T_A: \ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto T_A(x) = Ax. \end{aligned}$$

Claramente, T_A é contínua em $\mathbb{R}^n$, logo $|T_A(x)|$ alcança seu máximo em $B_1[0]$. Denotaremos esse máximo por

$$\|A\| = \max\{|T_A(x)|;\ x \in B_1[0]\}.$$

Observe que a cada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ associamos $\|A\| \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.1 (Proposição 6.5.2 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** $\|\cdot\|$ é uma norma sobre $\mathbb{R}^{n\times n}$ a qual chamaremos *norma uniforme* de $\mathbb{R}^{n\times n}$ associada à norma $|\cdot|$ de $\mathbb{R}^n$, isto é, se satisfazem:

1. $\|A\| \geq 0$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
2. $\|A\| = 0$ então $A = \theta$.
3. $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e para todo $c \in \mathbb{R}$.
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, para todo $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Lema 2.1 (Lema 6.5.4 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** Seja $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ então sua norma uniforme associada $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ satisfaz:

1. $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

2. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, para todo $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

3. $\|A^m\| \leq \|A\|^m$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e para todo $m \in \mathbb{N}$.

2.6 Sequências e séries de matrizes

Definição 2.11. Uma *sequência de matrizes em* $\mathbb{R}^{n\times n}$ é uma função que a cada $k \in \mathbb{N}$ associa $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ chamada o k-ésimo termo da sequência. Quando escrevemos $(A_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$, estamos indicando que "A_k é uma sequência de matrizes em $\mathbb{R}^{n\times n}$".

Exemplo 2.6. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definimos $A_k = \dfrac{1}{k!}A^k$ para $k \geq 0$. Assim, temos $(A_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$.

Definição 2.12. Dada $(A_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dizemos $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$ se,e só se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq k_0$ então $\|A_k - A\| < \varepsilon$. Dizemos que $(A_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ é *convergente* se, e só se, existe $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$. Caso contrário, dizemos que $(A_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ é *divergente*.

Definição 2.13. A toda sequência $(A_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$, lhe podemos associar uma nova sequência $(S_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$, definida por: $S_0 = A_0$, $S_1 = A_0 + A_1$, $S_2 = A_0 + A_1 + A_2$, em geral:

$$S_k = \sum_{j=0}^{k} A_j = A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_k.$$

$(S_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ é chamada *sequência de somas parciais* associada a $(A_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$. Para fazer notar que (S_k) é construído a partir de (A_k), denotaremos $(S_k) = \sum\limits_{k,0} A_k$ a qual é chamada *série de matrizes*.

Definição 2.14. Dizemos que a *série* $\sum\limits_{k,0} A_k$ *é convergente* se, e só se, a sequência de somas parciais (S_k) é convergente e o seu limite o denotaremos por $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$.

Teorema 2.1 (Teorema 6.7.1 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** A série $\sum\limits_{j,0} \dfrac{1}{j!}A^j$ é convergente para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Definição 2.15. Dado $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a *exponencial* de A, denotado por e^A, é a matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ definida por

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j.$$

Observação 2.1.

1. A função exponencial é uma operação que associa a cada matriz uma nova matriz, definida como:

$$\begin{aligned} \exp: \ \mathbb{R}^{n\times n} &\to \mathbb{R}^{n\times n} \\ A &\mapsto \exp(A) = e^A. \end{aligned}$$

2. Para qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, temos a desigualdade $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

3. A exponencial da matriz nula θ é igual à matriz identidade, ou seja, $e^\theta = I_n$.

4. Se $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$, então A pode ser interpretado como um número real. Assim, a exponencial de uma matriz quadrada é a generalização natural da função exponencial estudada no Cálculo.

Teorema 2.2 (Teorema 6.7.8 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** Sejam $A,\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se satisfaz:

1. $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$, para todo $P \in GL(\mathbb{R}^n)$.
2. Se $AB = BA$ então $e^{A+B} = e^Ae^B$.
3. $e^A \in GL(\mathbb{R}^n)$ e $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

2.7 O teorema de existência e unicidade de EDO's lineares

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $t \in \mathbb{R}$ então $tA \in \mathbb{R}^{n\times n}$, assim $e^{tA} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Logo, podemos definir a função matricial

$$\begin{aligned} \Phi_A: \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{n\times n} \\ t &\mapsto \Phi_A(t) = e^{tA}. \end{aligned}$$

Proposição 2.2 (Proposição 6.8.1 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, então $\Phi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, mais ainda

$$\Phi'_A(t) = e^{tA}A = Ae^{tA}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Teorema 2.3 (Teorema 6.8.3 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, então a única solução do PVI

$$\left|\begin{array}{rcl} x' & = & Ax \\ x(0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

é dada por

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & \varphi(t) = e^{tA}x_0. \end{array}$$

Exemplo 2.7 (Exemplo 6.8.5 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** Sejam $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_n \in \mathbb{R}$ denotamos

$$\mathsf{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Então

$$e^{\mathsf{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]} = \mathsf{diag}[e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}].$$

Exemplo 2.8 (Exemplo 6.8.6 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \theta_{n_1\times n_2} & \ldots & \theta_{n_1\times n_m} \\ \theta_{n_2\times n_1} & A_2 & \ldots & \theta_{n_2\times n_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{n_m\times n_1} & \theta_{n_m\times n_2} & \ldots & A_m \end{bmatrix}$$

onde $A_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$, para todo $1 \leq i \leq m$, $\theta_{n_i\times n_j}$ é a matriz nula de $\mathbb{R}^{n_i\times n_j}$ e $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$. Estas matrizes são chamadas *diagonais por blocos* e denota-se $A = \mathsf{diag}[A_1, A_2, \ldots, A_m]$. Então

$$e^A = \mathsf{diag}[e^{A_1}, e^{A_2}, \ldots, e^{A_m}].$$

Observação 2.2. $e^{I_n} = eI_n$ e $e^{\lambda I_n} = e^\lambda I_n$.

Exemplo 2.9 (Exemplo 6.8.8 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** Dizemos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é *nilpotente* se, e só se, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A^m = \theta$. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nilpotente e consideremos $r = \min\{m \in \mathbb{N};\ A^m = \theta\}$, isto é, $A, A^2, \ldots, A^{r-1} \neq \theta$ e $A^r = \theta$. Este número r é chamado *ordem de nilpotência de* A. Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz nilpotente de ordem de nilpotência r então

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{(r-1)!}A^{r-1}.$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Exemplo 2.10 (Exemplo 6.8.9 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022)). Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ da forma: $A = \lambda I + N_n$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$N_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

N_n é uma matriz nilpotente com ordem de nilpotência n chamada *matriz nilpotente canônica de ordem* n. Então

$$e^A = e^\lambda \left[I_n + N_n + \frac{1}{2!}N_n^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}N_n^{n-1} \right].$$

Exemplo 2.11 (Exemplo 6.8.10 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022)). Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Então

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & \operatorname{sen} b \\ -\operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.12 (Exemplo 6.8.11 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022)). Denotemos

$$I_2(a;b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ e } R_2(b) = \begin{bmatrix} \cos b & \operatorname{sen} b \\ -\operatorname{sen} b & \cos b \end{bmatrix}.$$

Agora, denotemos

$$J_{2n}(a;b) = \operatorname{diag}[I_2(a;b), I_2(a;b), \ldots, I_2(a;b)] \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}.$$

Seja $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ da forma $A = J_{2n}(a;b) + N_{2n}^2$, onde

$$N_{2n}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$$e^A = e^a \operatorname{diag}[R_2(b), \ldots, R_2(b)] e^{N_{2n}^2}.$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Como calcular a exponencial de qualquer matriz? Embora os exemplos anteriores demonstrem o cálculo da exponencial de matrizes diagonais por blocos, da forma:

- $\lambda I_n + N_n$,
- $J_{2n}(a;b) + N_{2n}^2$.

Surge a questão: como calcular a exponencial de qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$? A resposta reside em um resultado fundamental da álgebra linear que afirma: "toda matriz pode ser expressa como uma combinação linear das três formas mencionadas, em uma base adequada de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.4 (Forma canônica de Jordan real, seção 3 do Capítulo 7 em (HOFFMAN; R., 1971), seção 6 do Capítulo XI em (LANG, 1987) e seção 8 do Capítulo 1 em (PERKO, 2001))**.** Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ então existe $P \in GL(\mathbb{R}^n)$ tal que $PAP^{-1} = J_A = \mathrm{diag}[J_1, J_2, \ldots, J_m]$ onde cada J_i é uma matriz quadrada da forma:

1. $J_j = \lambda_j I_{n_j} + N_{n_j}$, se λ_j é um autovalor real de A.
2. $J_j = J_{2n_j}(a_j;b_j) + N_{2n_j}^2$, se $a_j + ib_j$ é autovalor complexo de A.

Além disso, a soma das ordens dos blocos da forma $\lambda_j I + N_{n_j}$ é igual à multiplicidade algébrica de λ_j, enquanto a soma das ordens dos blocos da forma $J_{2n_j}(a_j;b_j) + N_{2n_j}^2$ é igual ao dobro da multiplicidade algébrica de $a_j + ib_j$. A matriz $J_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é chamada *Forma canônica de Jordan (Real)* de A e ela é única a menos da ordem dos blocos e do sinal da parte imaginaria b_j das raízes complexas do polinômio característico de A.

Observação 2.3. O problema de determinar a exponencial de uma matriz foi teoricamente resolvido graças ao Teorema da Forma Canônica de Jordan. A expressão para a exponencial de uma matriz A pode ser representada como

$$e^A = e^{P^{-1}J_A P} = P^{-1}e^{J_A}P,$$

onde $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ e J_A é a forma canônica de Jordan da matriz A.

Em resumo, neste capítulo estudamos como a Álgebra Linear é fundamental para o cálculo das soluções de sistemas de EDO's lineares, mas especificamente estamos falando da Forma Canônica de Jordan. Além disso, vimos o teorema de existência e unicidade de EDO's lineares.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES

No presente capítulo, iniciamos o estudo da Teoria Geométrica das EDO's lineares homogêneas com coeficientes constantes. Cabe mencionar que o estudo qualitativo das EDO's forma uma parte importante da Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Como principais referências destacamos (BENAZIC, 2007; SOTOMAYOR, 1979; PERKO, 2001; HIRSCH; SMALE, 1974).

3.1 O fluxo associado a uma equação diferencial ordinária linear

Definição 3.1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. O *fluxo associado à EDO linear* $x' = Ax$ é dada por

$$\begin{array}{rccl} \varphi_A: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (t,x) & \mapsto & \varphi_A(t,x) = e^{tA}x. \end{array}$$

Exemplo 3.1 (Exemplo 6.9.2 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** Dada a EDO

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1 + x_2 \\ x_2' &= -8x_1 - 4x_2. \end{cases}$$

Sua matriz associada é $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Logo, o fluxo associado $\varphi_A : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à EDO linear $x' = Ax$ é dado por

$$\varphi_A(t,(x_1,x_2)) = \left(-\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)e^{-2t} + 2x_1 + \frac{x_2}{2}, (4x_1+2x_2)e^{-2t} - 4x_1 - x_2\right).$$

Exemplo 3.2 (Exemplo 6.9.8 em (LEÓN; SCÁRDUA, 2022))**.** Dada a EDO

$$\begin{cases} x_1' &= 4x_1 + x_3 \\ x_2' &= 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_3' &= x_1 + 4x_3. \end{cases}$$

Sua matriz associada é $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Daí, o fluxo associado $\varphi_A : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ à EDO linear $x' = Ax$ é dado por

$$\begin{aligned} \varphi_A(t,(x_1,x_2,x_3)) &= \frac{1}{2}(x_1+x_3)e^{5t}(1,2,1) + \frac{1}{2}(x_1-x_3)e^{3t}(1,0,-1) \\ &\quad +(-x_1+x_2-x_3)e^{3t}(0,1,0). \end{aligned}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Observação 3.1.

1. Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ define uma EDO $x' = Ax$. Reciprocamente, a toda EDO linear (homogênea com coeficientes constantes) podemos associar uma única matriz. Logo, podemos dizer indistintamente "fluxo associado a uma EDO linear" ou "fluxo associado a uma matriz".

2. A cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ associamos um fluxo φ_A a qual é uma função de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. O que podemos dizer da relação reciproca? isto é, toda função $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um fluxo? se não é verdade, sob que condições podemos caracterizar aquelas funções de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ que são fluxos?

Proposição 3.1 (Proposição 3.1.1 em (BENAZIC, 2007))**.** Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e φ_A seu fluxo associado. São satisfeitas:

1. $\varphi_A(0, x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

2. $\varphi_A(t + s, x) = \varphi_A(t, \varphi_A(s, x))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (Figura 2).

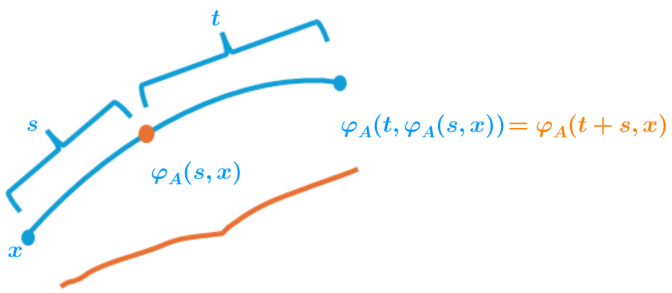
Demonstração. Temos $\varphi_A(t, x) = e^{tA}x$, para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

1. $\varphi_A(0, x) = e^{0A}x = I_n x = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Sejam $t, s \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned}\varphi_A(t + s, x) &= e^{(t+s)A}x = (e^{tA}e^{sA})x \\ &= e^{tA}(e^{sA}x) = e^{tA}\varphi_A(s, x) \\ &= \varphi_A(t, \varphi_A(s, x)).\end{aligned}$$

Figura 2 – Propriedade fundamental do fluxo



Fonte: Elaboração do autor

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Observação 3.2.

1. Seja $\varphi_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o fluxo associado a $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Fixando $t_0 \in \mathbb{R}$ podemos definir a função

$$\begin{array}{rccl}(\varphi_A)_{t_0}: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & (\varphi_A)_{t_0}(x) = \varphi_A(t_0, x) = e^{t_0 A}x.\end{array}$$

   Note que, para $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned}((\varphi_A)_{t_0} \circ (\varphi_A)_{-t_0})(x) &= (\varphi_A)_{t_0}((\varphi_A)_{-t_0}(x)) = (\varphi_A)_{t_0}(e^{-t_0 A}x) \\ &= e^{t_0 A}(e^{-t_0 A}x) = I_n x = x\end{aligned}$$

   e

$$\begin{aligned}((\varphi_A)_{-t_0} \circ (\varphi_A)_{t_0})(x) &= (\varphi_A)_{-t_0}((\varphi_A)_{t_0}(x)) = (\varphi_A)_{t_0}(e^{-t_0 A}x) \\ &= e^{t_0 A}(e^{-t_0 A}x) = I_n x = x.\end{aligned}$$

   Portanto, $(\varphi_A)_{t_0} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ e $(\varphi_A)_{t_0}^{-1} = (\varphi_A)_{-t_0}$. Desta maneira, temos uma família $\{(\varphi_A)_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ em $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ indexado pelo parâmetro t. Mais ainda, pela Proposição 3.1, obtemos

   (a) $(\varphi_A)_{t_1+t_2} = (\varphi_A)_{t_1} \circ (\varphi_A)_{t_2}$, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

   (b) $(\varphi_A)_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

   De fato, para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\begin{aligned}(\varphi_A)_{t_1+t_2}(x) &= e^{(t_1+t_2)A}x = e^{t_1 A + t_2 A}x \\ &= e^{t_1 A}(e^{t_2 A}x) = e^{t_1 A}((\varphi_A)_{t_2}(x)) \\ &= (\varphi_A)_{t_1}((\varphi_A)_{t_2}(x)) = ((\varphi_A)_{t_1} \circ (\varphi_A)_{t_2})(x)\end{aligned}$$

   e

$$(\varphi_A)_0(x) = e^{0A}x = I_n x = x.$$

   Assim, a função

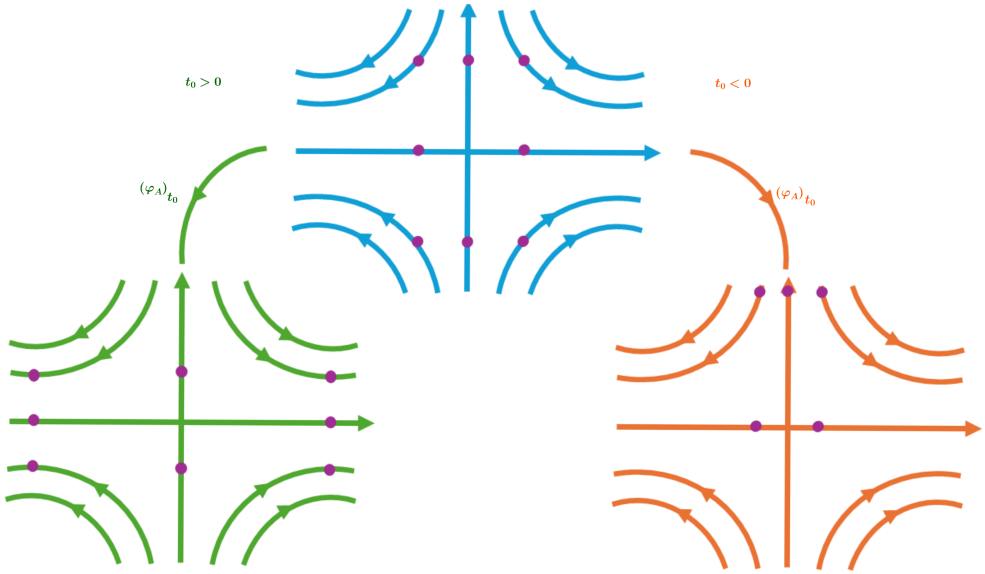
$$\begin{array}{rccl}\Lambda_A: & \mathbb{R} & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \\ & t & \mapsto & \Lambda_A(t) = (\varphi_A)_t\end{array}$$

   é um monomorfismo do grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ no grupo $(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n), \circ)$.

2. Conhecida a posição inicial de todas as partículas, o isomorfismo linear $(\varphi_A)_{t_0}$ interpreta-se geometricamente como a posição das partículas no instante t_0 que fluem ao longo das soluções da EDO $x' = A$, conforme mostrado na Figura 3.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Figura 3 – Interpretação geométrica de $(\varphi_A)_{t_0}$



Fonte: Elaboração do autor

3. Existe $\dfrac{\partial \varphi_A}{\partial t}(t,x)$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. De fato, pelo Proposição 2.2, temos $\Phi_A(t) = e^{tA}$ é diferenciável, logo $\varphi_A(t,x) = e^{tA}x = \Phi_A(t)x$ daí existe $\dfrac{\partial \varphi_A}{\partial t}(t,x)$ e

$$\frac{\partial \varphi_A}{\partial t}(t,x) = \Phi'_A(t)x = A\Phi_A(t)x = A(e^{tA}x) = A\varphi_A(t,x).$$

Da observação anterior temos que o fluxo $\varphi_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Existe $\dfrac{\partial \varphi_A}{\partial t}(t,x)$, para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
2. $(\varphi_A)_t \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
3. $(\varphi_A)_{t_1+t_2} = (\varphi_A)_{t_1} \circ (\varphi_A)_{t_2}$, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
4. $(\varphi_A)_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

Estas propriedades de acima caracterizam os fluxos associados a matrizes quadradas. Mais especificamente, obtemos o seguinte:

Proposição 3.2 (Proposição 3.1.2 em (BENAZIC, 2007))**.** Se $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. Existe $\dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x)$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
2. $F_t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

3. $F_{t_1+t_2}F_{t_1} \circ F_{t_2}$, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

4. $F_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

Então existe $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\varphi_A = F$.

Demonstração. Definamos $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, para $x \in \mathbb{R}^n$, por

$$L(x) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h, x) - F(0, x)}{h}.$$

Pelo item 1 temos que L é bem definido.

Afirmação 3.1. $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pelo item 2 e item 4, tem-se

$$\begin{aligned}
L(\alpha x + \beta y) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(h, \alpha x + \beta y) - F(0, \alpha x + \beta y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{F_h(\alpha x + \beta y) - F_0(\alpha x + \beta y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha F_h(x) + \beta F_h(y) - (\alpha x + \beta y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\alpha \left(\frac{F_h(x) - x}{h}\right) + \beta \left(\frac{F_h(y) - y}{h}\right)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\alpha \left(\frac{F(h, x) - F(0, x)}{h}\right) + \beta \left(\frac{F(h, y) - F(0, y)}{h}\right)\right] \\
&= \alpha L(x) + \beta L(y).
\end{aligned}$$

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz associada a $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Afirmação 3.2. Para $x \in \mathbb{R}^n$ (fixo) a função

$$\begin{array}{rccc}
\psi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\
& t & \mapsto & \psi(t) = F(t, x)
\end{array}$$

é solução do PVI

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = x. \end{cases}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

De fato, pelo item 3, temos

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(t+h,x)-F(t,x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{F_{h+t}(x)-F_t(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(F_h\circ F_t)(x)-(F_0\circ F_t)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{F_h(F_t(x))-F_0(F_t(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{F(h,F(t,x))-F(0,F(t,x))}{h}\\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(0,F(t,x)) = L(F(x,t))\\ &= AF(x,t)\end{aligned}$$

e, pelo item 4, temos $\psi(0) = F(0,x) = F_0(x) = x$.

Logo, pelo Teorema de Existência e Unicidade, tem-se

$$F(t,x) = \psi(t) = e^{tA}x = \varphi_A(t,x), \text{ para todo } (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

Daí, $F = \varphi_A$.

Definição 3.2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. A *órbita ou trajetória* de x pelo fluxo φ_A, denota-se e define-se por

$$\mathcal{O}_A = \{\varphi_A(t,x);\ t\in\mathbb{R}\}.$$

Proposição 3.3 (Proposição 3.1.3 em (BENAZIC, 2007))**.** Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e φ_A seu fluxo associado. São satisfeitas:

1. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ uma e só uma das propriedades seguintes é satisfeita:

   (a) $\mathcal{O}_A(x)\cap\mathcal{O}_A(y) = \emptyset$;

   (b) $\mathcal{O}_A(x) = \mathcal{O}_A(y)$.

2. $x \in \mathrm{Nu}(A)$ se, e só se, $\mathcal{O}_A(x) = \{x\}$. Em particular, $\mathcal{O}_A(O) = \{O\}$.

Demonstração.

1. Suponhamos que $\mathcal{O}_A(x)\cap\mathcal{O}_A(y) \neq \emptyset$. Daí, existe $z \in \mathcal{O}_A(x)\cap\mathcal{O}_A(y)$. Logo, existem $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$z = \varphi_A(t_1,x) = \varphi_A(t_2,y). \tag{3.1}$$

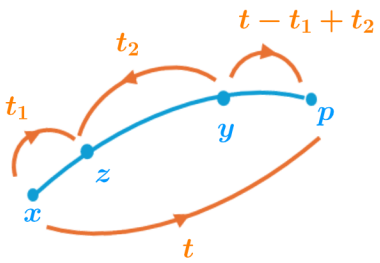
Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Dado $p \in \mathcal{O}_A(x)$ então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $p = \varphi_A(t, x)$. Daí, pelo item 2 da Proposição 3.1 e por (3.1), temos

$$\begin{aligned}\varphi_A(t - t_1 + t_2, y) &= \varphi_A(t - t_1, \varphi_A(t_2, y)) \\ &= \varphi_A(t - t_1, z) = \varphi_A(t, \varphi_A(-t_1, x)) \\ &= \varphi_A(t, x) = p\end{aligned}$$

assim, $p \in \mathcal{O}_A(y)$. Logo, $\mathcal{O}_A(x) \subseteq \mathcal{O}_A(y)$ (Figura 4).

Figura 4 – $\mathcal{O}_A(x) \subseteq \mathcal{O}_A(y)$



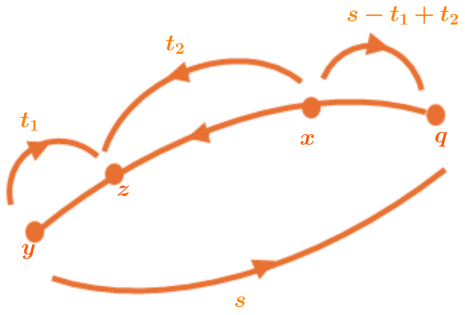
Fonte: Elaboração do autor

Analogamente, dado $q \in \mathcal{O}_A(y)$ então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $q = \varphi_A(s, y)$. Daí, pelo item 2 da Proposição 3.1 e por (3.1), temos

$$\begin{aligned}\varphi_A(s - t_2 + t_1, x) &= \varphi_A(s - t_2, \varphi_A(t_1, x)) \\ &= \varphi_A(s - t_2, z) = \varphi_A(s, \varphi_A(-t_2, z)) \\ &= \varphi_A(s, y) = q\end{aligned}$$

daí, $q \in \mathcal{O}_A(X)$. Assim, $\mathcal{O}_A(y) \subseteq \mathcal{O}_A(x)$. Portanto, $\mathcal{O}_A(x) = \mathcal{O}_A(y)$ (Figura 5).

Figura 5 – $\mathcal{O}_A(y) \subseteq \mathcal{O}_A(x)$



Fonte: Elaboração do autor

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

2. Suponha que $x \in \mathrm{Nu}(A)$, definimos

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto f(t) = \varphi_A(t, x). \end{aligned}$$

Sabemos, pelo item 3 da Observação 3.2, f é diferenciável e

$$f'(t) = \frac{\partial \varphi_A}{\partial t}(t, x) = \Phi'_A(t)x = e^{tA}Ax = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí, existe $c \in \mathbb{R}$ constante tal que $f(t) = c$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, para $t = 0$ temos

$$c = f(0) = e^{0A}x = I_n x = x.$$

Portanto, $\varphi_A(t, x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $\mathcal{O}_A(x) = \{x\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{O}_A(x) = \{x\}$. Daí, $\varphi_A(t, x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, derivando em relação a t obtemos $e^{tA}Ax =$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, para $t = 0$ tem-se $Ax = 0$. Logo, $x \in \mathrm{Nu}(A)$.

Definição 3.3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o conjunto $\mathcal{F}_A$ formado por todas as órbitas do fluxo φ_A, isto é,

$$\mathcal{F}_A = \{\mathcal{O}_A(x);\ x \in \mathbb{R}^n\}$$

o qual é chamado *folheação por curvas* de $\mathbb{R}^n$ gerada por A.

Observe que uma folheação $\mathcal{F}_A$ é um conjunto formado por todas as soluções da EDO $x' = Ax$ as quais podem ser pontos ou curvas de $\mathbb{R}^n$. Portanto, como consequência desse fato, temos que duas soluções de uma EDO linear ou bem coincidem, ou bem são disjuntas.

3.2 Conjugação de sistemas lineares

Definição 3.4. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e consideremos seus fluxos associados φ_A e φ_B. Dizemos que A e B são *topologicamente conjugados*, o que denotamos $A \equiv_{\mathrm{top}} B$, se e só, se existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homeomorfismo, chamado *conjugação topológica*, tal que

$$h\left(\varphi_A(t, x)\right) = \varphi_B(t, h(x)), \ \text{ para todo } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

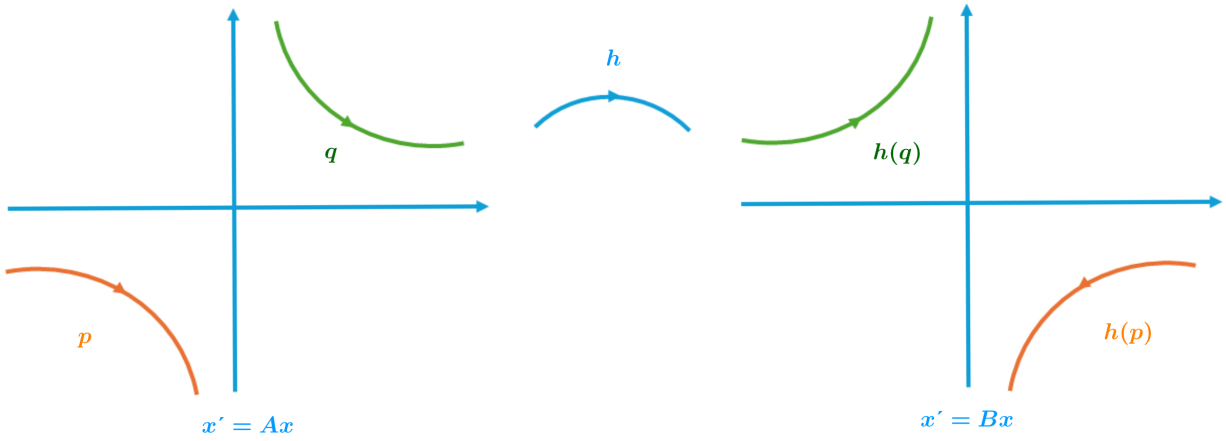
No caso que h é um difeomorfismo de classe C^r, então dizemos que A e B são C^r-*conjugados* ($1 \leq r \leq \infty$), o que denotamos $A \equiv_{C^r} B$, h é chamado C^r-*conjugação*. Finalmente, se h é um isomorfismo linear, então A e B são ditos *linearmente conjugados*, o que se denota $A \equiv_{\text{lin}} B$ e h é chamado *conjugação linear*.

Observação 3.3.

1. As conjugações respeitam o parâmetro "t" e, portanto, respeitam suas orientações.
2. Se $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são conjugados por $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ então

$$h\left(\mathcal{O}_A(x)\right) = \mathcal{O}_B(h(x)), \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ (Figura 6).}$$

Figura 6 – h leva órbitas em órbitas



Fonte: Elaboração do autor

De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, mas arbitrário. Se $y \in h(\mathcal{O}_A(x))$ logo existe $p \in \mathcal{O}_A(X)$ tal que $y = h(p)$. Daí, como $p \in \mathcal{O}_A(x)$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $p = \varphi_A(t, x)$. Assim, como h conjuga A e B, obtemos

$$y = h(p) = h(\varphi_A(t, x)) = \varphi_B(t, h(x))$$

daí, $y \in \mathcal{O}_B(h(x))$. Portanto, $h(\mathcal{O}_A(x)) \subseteq \mathcal{O}_B(h(x))$. Analogamente, se $y \in \mathcal{O}_B(h(x))$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $y = \varphi_B(t, h(x))$. Agora, como h conjuga A e B, tem-se

$$y = \varphi_B(t, h(x)) = h(\varphi_A(t, x))$$

assim, $y \in h(\mathcal{O}_A(x))$. Portanto, $\mathcal{O}_B(h(x)) \subseteq h(\mathcal{O}_A(x))$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

3. Denotaremos por $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente, $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$) ao conjunto de todos os homeomorfismos (respectivamente, difeomorfismos de classe C^r) de $\mathbb{R}^n$. Da análise em várias variáveis reais temos que

$$\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \cdots \subset \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) \tag{3.2}$$

sendo que a classificação “mais fina ” é a linear enquanto a “mais grossa” é a topológica.

Proposição 3.4 (Proposição 3.2.1 em (BENAZIC, 2007))**.** “$\equiv_{\mathrm{top}}$”, “$\equiv_{C^r}$” e “$\equiv_{\mathrm{lin}}$” são relações de equivalências.

Demonstração.

(i) Reflexiva: seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, como $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente, $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$) e

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(\varphi_A(t,x)) = \varphi_A(t,x) = \varphi_A(t,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(x)), \text{ para todo } (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

temos que $A \equiv_{\mathrm{top}} A$ (respectivamente, “$\equiv_{C^r}$” e “$\equiv_{\mathrm{lin}}$”), para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(ii) Simétrica: seja $A \equiv_{\mathrm{top}} B$ (respectivamente, “$\equiv_{C^r}$” e “$\equiv_{\mathrm{lin}}$”), logo existe $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente, $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$) tal que

$$h\left(\varphi_A(t,x)\right) = \varphi_B(t,h(x)), \text{ para todo } (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

daí, como $h^{-1} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente, $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$) e

$$h^{-1}(\varphi_B(t,y)) = \varphi_A(t,h^{-1}(y)), \text{ para todo } (t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

obtemos $B \equiv_{\mathrm{top}} A$ (respectivamente, “$\equiv_{C^r}$” e “$\equiv_{\mathrm{lin}}$”).

(iii) Transitiva: sejam $A \equiv_{\mathrm{top}} B$ e $B \equiv_{\mathrm{top}} C$ (respectivamente, “$\equiv_{C^r}$” e “$\equiv_{\mathrm{lin}}$”), logo existem $h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente, $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$) tais que

$$h_1\left(\varphi_A(t,x)\right) = \varphi_B(t,h_1(x)), \text{ para todo } (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

e

$$h_2\left(\varphi_B(s,y)\right) = \varphi_C(s,h_2(y)), \text{ para todo } (s,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Daí, como $h = h_2 \circ h_1 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ (respectivamente, $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$) e

$$\begin{aligned} h(\varphi_A(t,x)) &= (h_2 \circ h_1)(\varphi_A(t,x)) = h_2(h_1(\varphi_A(t,x))) = h_2(\varphi_B(t,h_1(x))) \\ &= \varphi_C(t,h_2(h_1(x))) = \varphi_C(t,(h_2 \circ h_1)(x)) \\ &= \varphi_C(t,h(x)) \end{aligned}$$

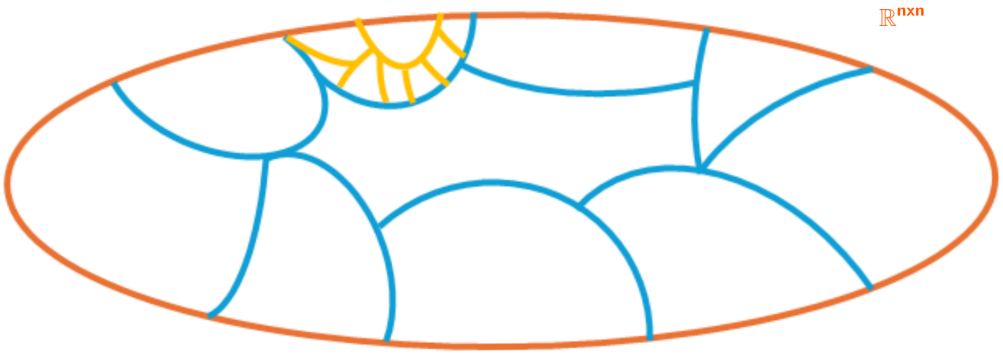
para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Portanto, $A \equiv_{\mathrm{top}} C$ (respectivamente, "$\equiv_{C^r}$" e "$\equiv_{\mathrm{lin}}$").

Observação 3.4.

1. Pela proposição anterior, podemos construir os conjuntos quocientes $\mathbb{R}^n/\equiv_{\mathrm{top}}$, $\mathbb{R}^n/\equiv_{C^r}$ e $\mathbb{R}^n/\equiv_{\mathrm{lin}}$ (Figura 7). Seus elementos são classes de equivalências de matrizes. Por exemplo, se $[A] \in \mathbb{R}^n/\equiv_{\mathrm{top}}$, $B \in [A]$ se, e só, se existe $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ tal que $h(\mathcal{O}_A(x)) = \mathcal{O}_B(h(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Para analisar as propriedades qualitativas das soluções de uma EDO homogênea com coeficientes constantes, basta considerar um representante qualquer de sua classe de equivalência e analisá-la. Uma forma natural de fazê-lo é escolhendo a matriz da classe de equivalência cuja exponencial seja fácil de ser calculada. Mas cada classe de equivalência (seja topológica, C^r ou linear) admitirá um representante tal?

Figura 7 – Partição de $\mathbb{R}^{n\times n}$



Fonte: Elaboração do autor

Proposição 3.5 (Proposição 3.2.2 em (BENAZIC, 2007))**.** Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, são equivalentes:

1. $A \equiv_{C^1} B$.

2. Existe $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ tal que $PA = BP$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

3. $A \equiv_{\text{lin}} B$.

Demonstração.

$(1) \Rightarrow (2)$ Suponha que $A \equiv_{C^1} B$, logo existe $h \in \text{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x), \text{ para todo } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Aqui, temos duas possibilidades:

(a) Se $h(O) = O$: Derivando (3.3) em relação a t, obtemos

$$h'(e^{tA}x)Ae^{tA}x = Be^{tB}h(x), \text{ para todo } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

Em particular, para $t = 0$ em (3.4), tem-se

$$h'(x)Ax = Bh(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Agora, dado $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$, por (3.5), tem-se

$$h'(\lambda x)Ax = B\left(\frac{h(\lambda x)}{\lambda}\right). \tag{3.6}$$

Também, como $h \in \text{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$, em particular, h é diferenciável em O. Logo, temos

$$h(p) = h(O) + h'(O)p + r(p), \text{ para todo } p \in \mathbb{R}^n \tag{3.7}$$

onde

$$\lim_{p \to O} \frac{r(p)}{|p|} = O. \tag{3.8}$$

Assim, fazendo $p = \lambda x$ em (3.7), obtemos

$$\frac{h(\lambda x)}{\lambda} = h'(O)x + \frac{r(\lambda x)}{\lambda}. \tag{3.9}$$

Daí, tomando limite quando $\lambda \to 0$ em (3.9) e usando (3.8), tem-se

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{h(\lambda x)}{\lambda} = h'(O)x \tag{3.10}$$

Por outro lado, tomando limite quando $\lambda \to 0$ em (3.6) e, usando o fato que h' é contínua em O (pois $h \in \text{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$) e por(3.10), temos

$$h'(O)Ax = Bh'(O)x. \tag{3.11}$$

Portanto, como (3.11) claramente é válida para $x = O$, temos que

$$h'(O)Ax = Bh'(O)x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Se segue que

$$h'(O)A = Bh'(O). \tag{3.12}$$

E, como $h \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$ então $h'(O) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Daí, denotando $P = h'(O)$, por (3.12), obtemos $PA = BP$.

(b) Se $h(O) \neq O$: Consideremos a função $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $H(x) = h(x) - h(O)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Claramente, temos que $H(O) = O$.

Afirmação 3.3. $H \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$.

De fato, consideremos a função $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $G(y) = h^{-1}(y + h(O))$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se

$$(G \circ H)(x) = G(H(x)) = h^{-1}(H(x) + h(O)) = h^{-1}(h(x)) = x = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(x)$$

e, também dado $y \in \mathbb{R}^n$ obtemos

$$\begin{aligned}(H \circ G)(y) &= H(G(y)) = H(h^{-1}(y + h(O))) \\ &= h(h^{-1}(y + h(O))) - h(O) = y + h(O) - h(O) = y = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}(y).\end{aligned}$$

Portanto, H é bijetiva e $H^{-1} = G$. Agora, desde que $h \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$ se tem que $H \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$.

Afirmação 3.4. H conjuga A e B.

De fato, dado $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, por (3.3), temos

$$\begin{aligned}H(e^{tA}x) &= h(e^{tA}x) - h(O) = e^{tB}h(x) - h(e^{tA}O) \\ &= e^{tB}h(x) - e^{tB}h(O) = e^{tB}(h(x) - h(O)) \\ &= e^{tB}H(x).\end{aligned}$$

Portanto, H é uma C^1-conjugação entre A e B com $H(O) = O$, logo pelo item (a), temos existe $P = H'(O) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ tal que $PA = BP$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Se existe $P \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ tal que $PA = BP$. Daí, tem-se

$$B = PAP^{-1}. \tag{3.13}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Definamos $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(x) = Px$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Claramente, $h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Agora, vejamos que h conjuga A e B. Sejam $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, pelo item 1 do Teorema 2.2 e por (3.13), tem-se

$$\begin{aligned} h(e^{tA}x) &= Pe^{tA}x = Pe^{tA}P^{-1}(Px) \\ &= e^{t(PAP^{-1})}h(x) \\ &= e^{tB}h(x). \end{aligned}$$

Portanto, $A \equiv_{\text{lin}} B$.

$(3) \Rightarrow (1)$ Se $A \equiv_{\text{lin}} B$ então existe $h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ que conjuga A e B, por (3.2), claramente $h \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^n)$ que conjuga A e B. Portanto, $A \equiv_{C^1} B$.

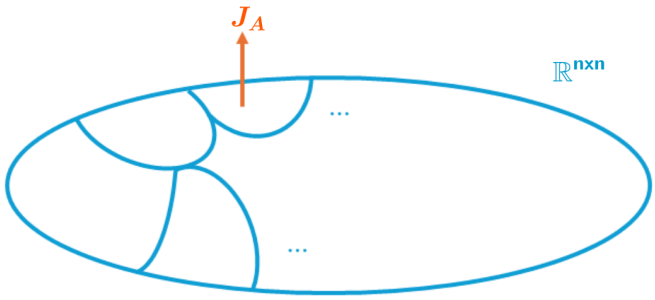
Observação 3.5.

1. Da demonstração da proposição anterior observamos que toda C^1-conjugação h entre A e B induz uma conjugação linear entre A e B.

2. O item 2 da proposição anterior afirma que $A \equiv_{C^1} B$ se, e só se, A é semelhante com B.

3. Pelo Teorema da Forma Canônica de Jordan sabemos que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é semelhante a sua forma canônica de Jordan $J_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Assim, cada classe de equivalência linear admite uma representação “simples”, desde o ponto de vista da EDO’s, a qual é J_A (Figura 8).

Figura 8 – Classe de equivalência “simples”



Fonte: Elaboração do autor

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

3.3 Sistemas lineares bidimensionais

Seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, pelo que já vimos, para conhecer o comportamento das soluções de $x' = Ax$ (i.e., o estudo das soluções de $\varphi_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) é suficiente estudar as soluções de $x' = J_A x$.

Se denotamos por λ_1, λ_2 os autovalores de A então temos as seguintes possibilidades:

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
2. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.
3. $\lambda_1 = a + ib$ e $\lambda_2 = a - ib$.

Vamos estudar estas possibilidades:

1. Neste caso, a forma canônica de Jordan é dada por $J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. O fluxo associado a J_A no ponto $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vem dado por

$$\varphi_{J_A}(t, p) = e^{tJ_A}p = (e^{t\lambda_1}x_0, e^{t\lambda_2}y_0), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como já sabemos $\mathcal{O}_{J_A}((0,0)) = \{(0,0)\}$. Para $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ temos três possibilidades:

- Se $y_0 = 0$ temos

$$\varphi_{J_A}(t, (x_0, 0)) = (e^{\lambda_1 t}x_0, 0) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Daí, tem-se

$$\mathcal{O}_{J_A}((x_0,0)) = \begin{cases}]0, +\infty[\times\{0\} & , \ x_0 > 0 \\ ]-\infty, 0[\times\{0\} & , \ x_0 < 0. \end{cases}$$

- Se $x_0 = 0$ temos

$$\varphi_{J_A}(t, (0, y_0)) = (0, e^{\lambda_2 t}y_0) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Daí, tem-se

$$\mathcal{O}_{J_A}((0,y_0)) = \begin{cases} \{0\}\times]0, +\infty[& , \ y_0 > 0 \\ \{0\}\times]-\infty, 0[& , \ y_0 < 0. \end{cases}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

- Se $x_0, y_0 \neq 0$. Fazendo

$$\begin{cases} x = e^{t\lambda_1}x_0 & , \ x_0 \neq 0 \\ y = e^{t\lambda_2}y_0 & , \ y_0 \neq 0. \end{cases}$$

Daí, obtemos a seguinte equação

$$y = y_0 \left|\frac{x}{x_0}\right|^{\lambda_2/\lambda_1}, \ \lambda_1 \neq 0 \quad \text{ou} \quad x = x_0 \left|\frac{y}{y_0}\right|^{\lambda_1/\lambda_2}, \ \lambda_2 \neq 0.$$

Logo, todas as órbitas estão contidas:

$$y = c|x|^{\alpha}, \ c \in \mathbb{R} - \{0\}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Aqui subdividimos em vários casos:

(a) Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ então

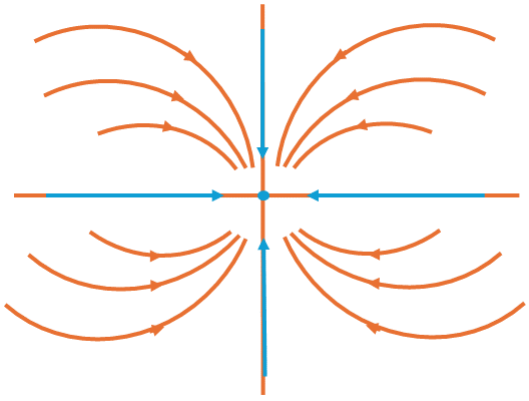
$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_{J_A}(t,p) = \lim_{t\to+\infty} (e^{\lambda_1 t}x_0, e^{\lambda_2 t}y_0) = (0,0).$$

Por outro lado,

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_{J_A}(t,p) = \lim_{t\to-\infty} (e^{\lambda_1 t}x_0, e^{\lambda_2 t}y_0) = \begin{cases} (+\infty,+\infty) & , \ x_0 > 0, y_0 > 0 \\ (+\infty,-\infty) & , \ x_0 > 0, y_0 < 0 \\ (-\infty,-\infty) & , \ x_0 < 0, y_0 < 0 \\ (-\infty,+\infty) & , \ x_0 < 0, y_0 > 0. \end{cases}$$

Assim, todas as trajetórias vêm do infinito e tendem à origem quando $t \to +\infty$, à exceção da origem que permanece fixa. Neste caso, dizemos que $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ é um *atrator* ou *poço* (Figura 9). Note também, que a solução está contida na curva $y = c|x|^{\lambda_2/\lambda_1}$ com $0 < \lambda_2/\lambda_1 < 1$. Logo, temos o seguinte comportamento geométrico:

Figura 9 – A origem é um atrator



Fonte: Elaboração do autor

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

(b) Se $\lambda_1 < \lambda_2 = 0$. Note que $\mathrm{Nu}(J_A) = \{(0, y);\ y \in \mathbb{R}\}$. Daí, pelo item 2 da Proposição 3.3, $\mathcal{O}_{J_A}((0, y_0)) = \{(0, y_0)\}$. Para encontrar as outras órbitas, consideremos $x_0 \neq 0$. Desde que

$$\varphi_{J_A}(t, (x_0, y_0)) = (e^{\lambda_1 t} x_0, y_0) \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

obtemos

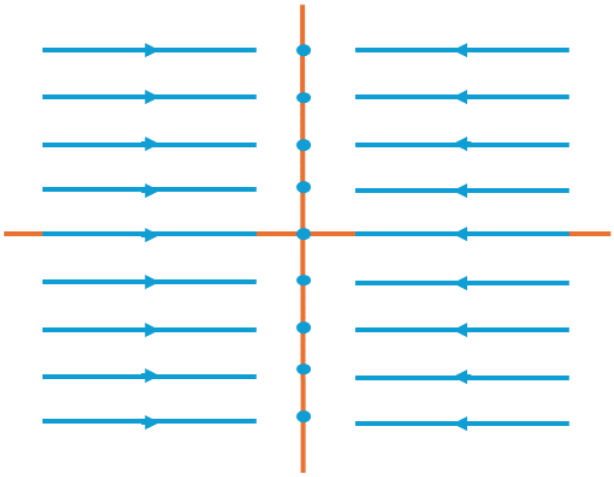
$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_{J_A}(t, p) = \lim_{t \to +\infty} (e^{\lambda_1 t} x_0, y_0) = (0, y_0).$$

Por outro lado,

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_{J_A}(t, p) = \lim_{t \to -\infty} (e^{\lambda_1 t} x_0, y_0) = \begin{cases} (+\infty, y_0) & ,\ x_0 > 0 \\ (-\infty, y_0) & ,\ x_0 < 0. \end{cases}$$

Desta maneira, temos que as órbitas estão contidas nas retas horizontais que se aproximam do eixo vertical e orientadas como na Figura 10.

Figura 10 – Órbitas horizontais



Fonte: Elaboração do autor

(c) Se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Neste caso, obtemos

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_{J_A}(t, p) = \lim_{t \to +\infty} (e^{\lambda_1 t} x_0, e^{\lambda_2 t} y_0) = \begin{cases} (0, +\infty) & ,\ y_0 > 0 \\ (0, -\infty) & ,\ y_0 < 0. \end{cases}$$

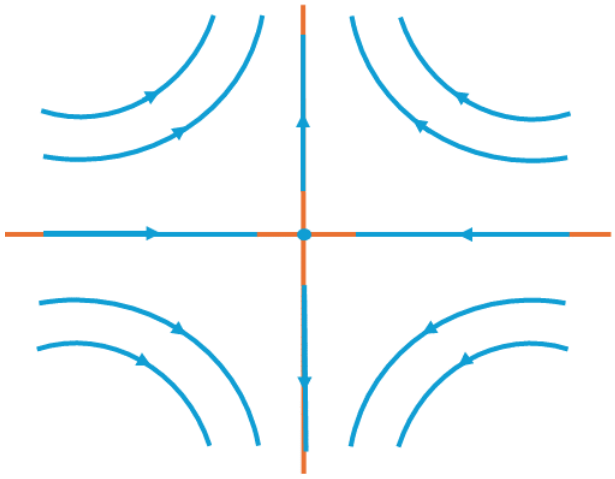
Por outro lado,

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_{J_A}(t, p) = \lim_{t \to -\infty} (e^{\lambda_1 t} x_0, e^{\lambda_2 t} y_0) = \begin{cases} (+\infty, 0) & ,\ x_0 > 0 \\ (-\infty, 0) & ,\ x_0 < 0. \end{cases}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Assim, as órbitas são curvas que tem um comportamento parecido com o das hipérboles e estão orientadas como na Figura 11:

Figura 11 – A origem é um ponto de sela



Fonte: Elaboração do autor

(d) Se $0 = \lambda_1 < \lambda_2$. Analogamente, como no item (b), tem-se que $\mathrm{Nu}(J_A) = \{(x, 0);\ x \in \mathbb{R}\}$. Daí, pelo item 2 da Proposição 3.3, $\mathcal{O}_{J_A}((x_0, 0)) = \{(x_0, 0)\}$. Para encontrar as outras órbitas, consideremos $y_0 \neq 0$. Desde que

$$\varphi_{J_A}(t, (x_0, y_0)) = (x_0, e^{\lambda_2 t} y_0) \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

obtemos

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_{J_A}(t, p) = \lim_{t\to+\infty} (x_0, e^{\lambda_2 t} y_0) = \begin{cases} (x_0, +\infty) & , \ y_0 > 0 \\ (x_0, -\infty) & , \ y_0 < 0. \end{cases}$$

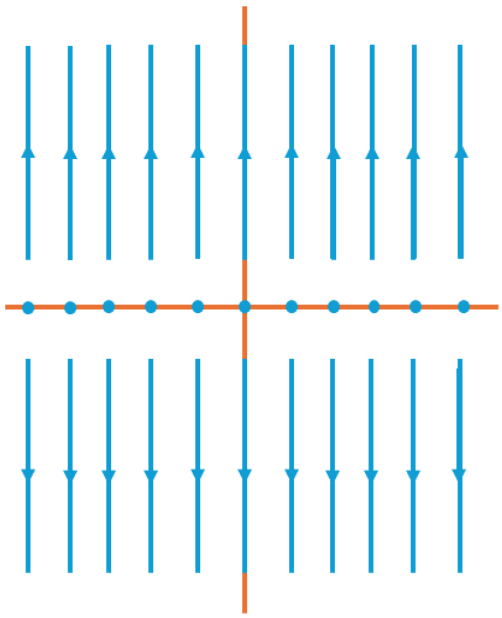
Por outro lado,

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_{J_A}(t, p) = \lim_{t\to-\infty} (x_0, e^{\lambda_2 t} y_0) = (x_0, 0).$$

Desta maneira, temos que as órbitas estão contidas em retas verticais que se afastam do eixo horizontal e orientadas como na Figura 12.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Figura 12 – Órbitas verticais



Fonte: Elaboração do autor

(e) Se $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ então

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_{J_A}(t,p) = \lim_{t\to+\infty} (e^{\lambda_1 t}x_0, e^{\lambda_2 t}y_0) = \begin{cases} (+\infty,+\infty) & , \ x_0 > 0, y_0 > 0 \\ (+\infty,-\infty) & , \ x_0 > 0, y_0 < 0 \\ (-\infty,-\infty) & , \ x_0 < 0, y_0 < 0 \\ (-\infty,+\infty) & , \ x_0 < 0, y_0 > 0. \end{cases}$$

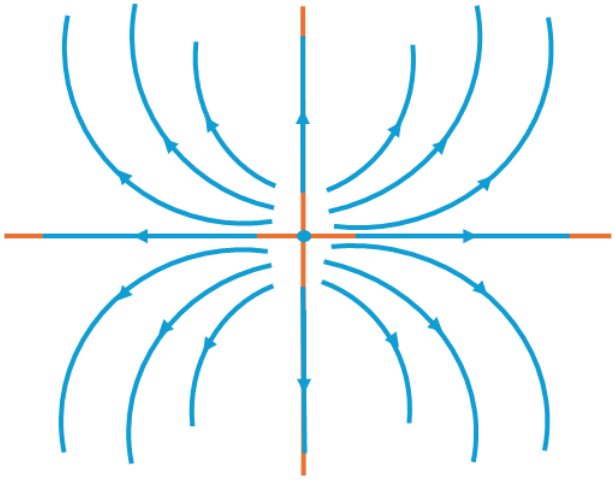
Por outro lado,

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_{J_A}(t,p) = \lim_{t\to-\infty} (e^{\lambda_1 t}x_0, e^{\lambda_2 t}y_0) = (0,0).$$

Assim, todas as trajetórias saem da origem e tendem para o infinito quando $t \to +\infty$, à exceção da origem que permanece fixa. Neste caso, dizemos que $O = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ é um *repulsor* ou *fonte* (Figura 13). Note também, que a solução está contida na curva $y = c|x|^{\lambda_2/\lambda_1}$ com $\lambda_2/\lambda_1 > 1$. Logo, temos o seguinte comportamento geométrico:

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Figura 13 – A origem é uma fonte



Fonte: Elaboração do autor

2. Neste caso, a forma canônica de Jordan tem duas possibilidades:

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Vamos estudar cada caso.

Se $J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. O fluxo associado a J_A no ponto $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vem dado por

$$\varphi_{J_A}(t, p) = e^{tJ_A}p = (e^{t\lambda}x_0, e^{t\lambda}y_0) = e^{\lambda t}(x_0, y_0), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como já sabemos $\mathcal{O}_{J_A}((0,0)) = \{(0,0)\}$. Para $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ temos três possibilidades:

- Se $y_0 = 0$ temos

$$\varphi_{J_A}(t, (x_0, 0)) = e^{\lambda t}(x_0, 0) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Daí, tem-se

$$\mathcal{O}_{J_A}((x_0, 0)) = \begin{cases}]0, +\infty[\times\{0\} & , \ x_0 > 0 \\ ]-\infty, 0[\times\{0\} & , \ x_0 < 0. \end{cases}$$

- Se $x_0 = 0$ temos

$$\varphi_{J_A}(t, (0, y_0)) = e^{\lambda t}(0, y_0) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Daí, tem-se

$$\mathcal{O}_{J_A}((0, y_0)) = \begin{cases} \{0\}\times]0, +\infty[& , \ y_0 > 0 \\ \{0\}\times]-\infty, 0[& , \ y_0 < 0. \end{cases}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

- Se $x_0, y_0 \neq 0$. Fazendo

$$\begin{cases} x = e^{t\lambda}x_0 & , \ x_0 \neq 0 \\ y = e^{t\lambda}y_0 & , \ y_0 \neq 0. \end{cases}$$

Daí, obtemos a seguinte equação

$$y = \frac{y_0}{x_0}x.$$

Logo, todas as órbitas estão contidas nas retas:

$$y = cx, \ c \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

(a) Se $\lambda < 0$ então

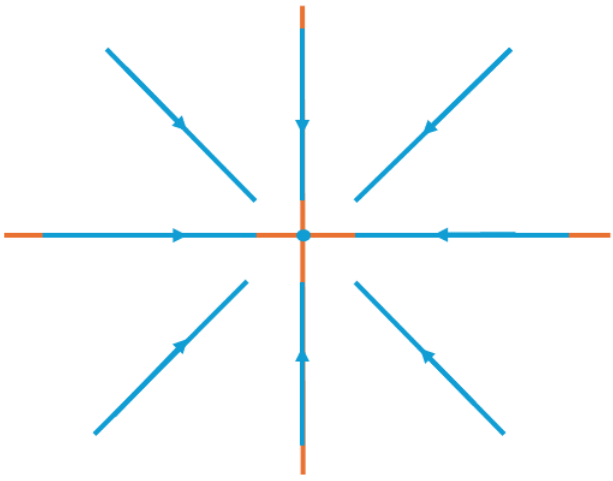
$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_{J_A}(t,p) = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}(x_0, y_0) = (0,0)$$

e

$$\lim_{t\to-\infty} |\varphi_{J_A}(t,p)| = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}|(x_0, y_0)| = +\infty.$$

Logo, tem comportamento geométrico como na Figura 14.

Figura 14 – A origem é um atrator



Fonte: Elaboração do autor

(b) Se $\lambda > 0$

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi_{J_A}(t,p)| = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}|(x_0, y_0)| = +\infty$$

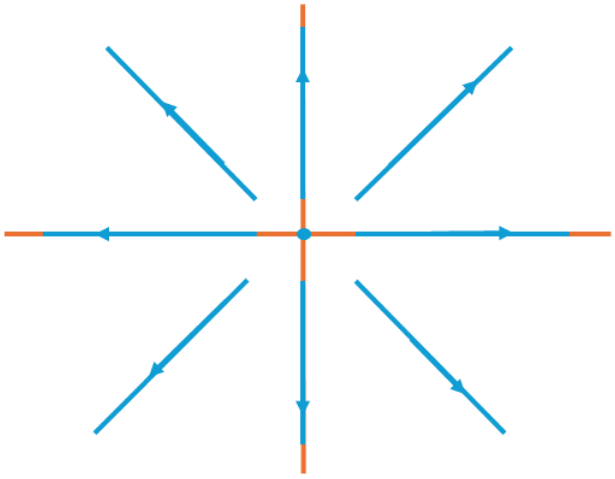
e

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_{J_A}(t,p) = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}(x_0, y_0) = (0,0).$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Daí, tem comportamento geométrico como na Figura 15.

Figura 15 – A origem é uma fonte



Fonte: Elaboração do autor

Se $J_A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. O fluxo associado a J_A no ponto $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vem dado por

$$\varphi_{J_A}(t, p) = e^{tJ_A}p = (e^{t\lambda}x_0 + te^{t\lambda}y_0, e^{t\lambda}y_0) = e^{\lambda t}(x_0 + ty_0, y_0), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Como já sabemos $\mathcal{O}_{J_A}((0,0)) = \{(0,0)\}$. Para $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ temos aqui duas possibilidades:

- Se $y_0 = 0$ temos $\varphi_{J_A}(t, (x_0, 0)) = e^{\lambda t}(x_0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí, tem-se

$$\mathcal{O}_{J_A}((x_0, 0)) = \begin{cases}]0, +\infty[\times\{0\} & , \ x_0 > 0 \\ ]-\infty, 0[\times\{0\} & , \ x_0 < 0. \end{cases}$$

- Se $y_0 \neq 0$. Fazendo

$$\begin{cases} x = e^{t\lambda}(x_0 + ty_0) \\ y = e^{t\lambda}y_0. \end{cases}$$

  Daí, se $\lambda \neq 0$, obtemos a seguinte equação

$$x = \frac{x_0}{y_0}y + \frac{y}{\lambda}\ln\left|\frac{y}{y_0}\right|.$$

  Logo, todas as órbitas estão contidas nas curvas:

$$x = cy + dy\ln|y|, \ c \in \mathbb{R}, \ d \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

(a) Se $\lambda < 0$ então

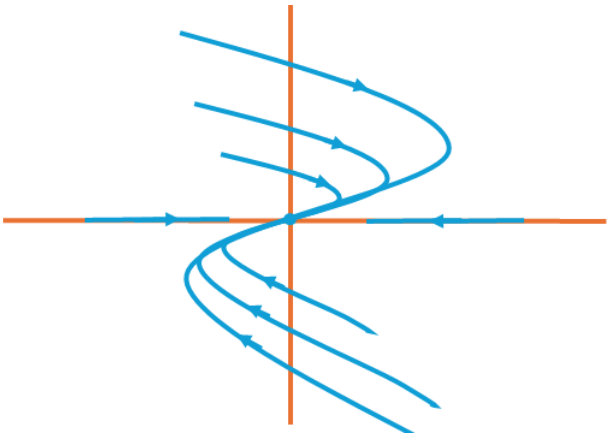
$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_{J_A}(t,p) = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}(x_0 + ty_0, y_0) = (0,0)$$

e

$$\lim_{t\to-\infty} |\varphi_{J_A}(t,p)| = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}|(x_0 + ty_0, y_0)| = +\infty.$$

Logo, tem comportamento geométrico como na Figura 16.

Figura 16 – A origem é uma atrator



Fonte: Elaboração do autor

(b) Se $\lambda > 0$

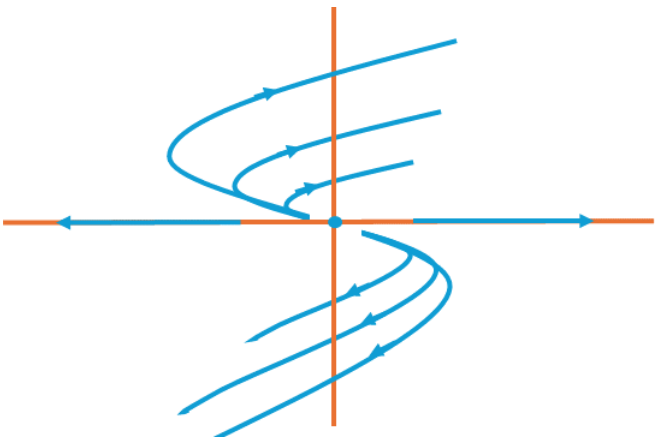
$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi_{J_A}(t,p)| = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}|(x_0 + ty_0, y_0)| = +\infty$$

e

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_{J_A}(t,p) = \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}(x_0 + ty_0, y_0) = (0,0).$$

Daí, tem comportamento geométrico como na Figura 17.

Figura 17 – A origem é uma fonte



Fonte: Elaboração do autor

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Se $\lambda = 0$ temos $J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Note que $\mathrm{Nu}(J_A) = \{(x, 0);\ x \in \mathbb{R}\}$, logo pelo item 2 da Proposição 3.3, $\mathcal{O}_{J_A}((x_0, 0)) = \{(x_0, 0)\}$. Para encontrar as outras órbitas, consideremos $y_0 \neq 0$. Desde que,

$$\varphi_{J_A}(t, (x_0, y_0)) = (x_0 + ty_0, y_0) \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

obtemos

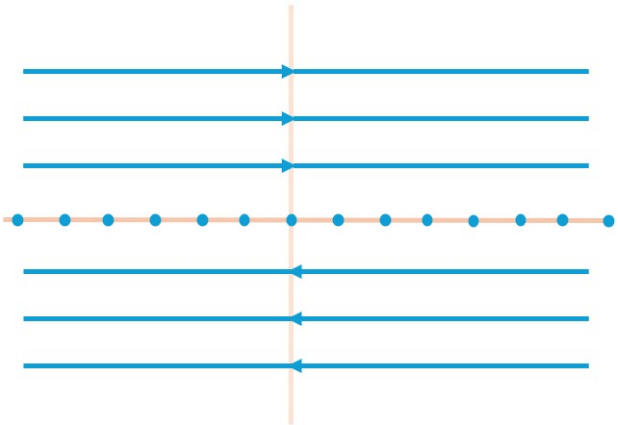
$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_{J_A}(t, p) = \lim_{t\to+\infty} (x_0 + ty_0, y_0) = \begin{cases} (+\infty, y_0) & ,\ y_0 > 0 \\ (-\infty, y_0) & ,\ y_0 < 0 \end{cases}$$

e,

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_{J_A}(t, p) = \lim_{t\to-\infty} (x_0 + ty_0, y_0) = \begin{cases} (-\infty, y_0) & ,\ y_0 > 0 \\ (+\infty, y_0) & ,\ y_0 < 0. \end{cases}$$

Portanto, as órbitas são retas horizontais, com exceção do eixo X, orientadas como na Figura 18.

Figura 18 – Órbitas horizontais paralelas ao eixo X



Fonte: Elaboração do autor

3. Neste caso, as raízes são complexas conjugadas $a + bi$ e $a - ib$ ($b \neq 0$), então sua forma canônica de Jordan é dado por $J_A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, não existe autoespaço no plano real e seu fluxo associado a J_A no ponto $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vem dado por

$$\varphi_{J_A}(t, p) = e^{tJ_A}p = e^{at}(x_0\cos(bt) - y_0\,\mathrm{sen}(bt), x_0\,\mathrm{sen}(bt) + y_0\cos(bt)),\ \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Aqui, temos as seguintes possibilidades:

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

(a) Se $a = 0$ (raízes imaginárias puras) então fazendo

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(bt) - y_0 \operatorname{sen}(bt) \\ y = x_0 \operatorname{sen}(bt) + y_0 \cos(bt) \end{cases}$$

obtemos a seguinte equação

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

Daí, a órbita $\mathcal{O}_{J_A}(p)$ é uma circunferência centrada na origem e raio $|p| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, orientada conforme o sinal de b na Figura 19 e Figura 20.

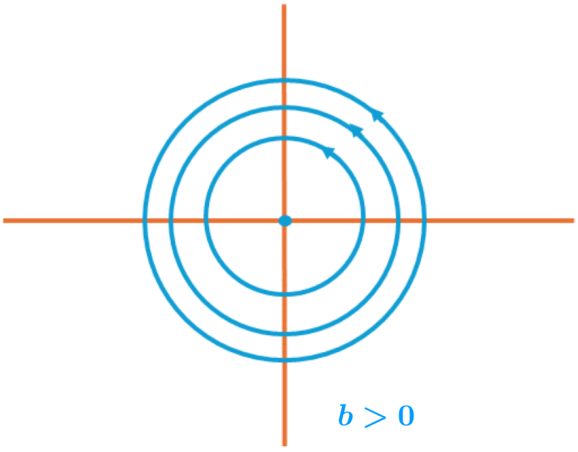


Figura 19 – Centro com $b > 0$

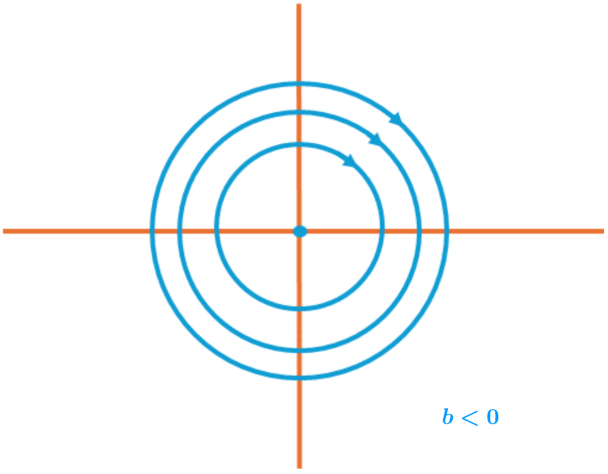


Figura 20 – Centro com $b < 0$

Nesse caso, dizemos que a origem é um *centro*.

(b) Se $a < 0$ então

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_{J_A}(t, p) = e^{at}(x_0 \cos(bt) - y_0 \operatorname{sen}(bt), x_0 \operatorname{sen}(bt) + y_0 \cos(bt)) = (0, 0)$$

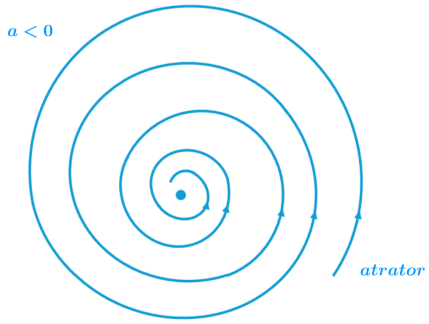
e,

$$\lim_{t \to -\infty} |\varphi_{J_A}(t, p)| = e^{at}|p|^2 = +\infty.$$

Logo, as órbitas são espirais que vêm do infinito e que tendem para a origem quando $t \to +\infty$ (Figura 21).

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Figura 21 – Espirais com $a < 0$



Fonte: Elaboração do autor

(c) Se $a > 0$ então

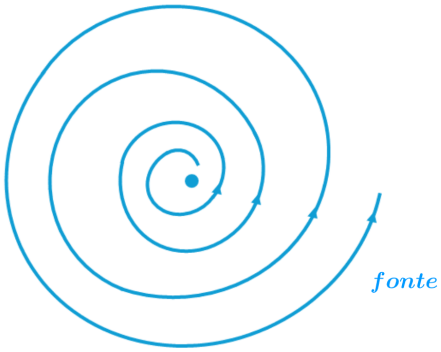
$$\lim_{t \to +\infty} |\varphi_{J_A}(t, p)| = e^{at}|p|^2 = +\infty$$

e,

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_{J_A}(t, p) = e^{at}(x_0 \cos(bt) - y_0 \operatorname{sen}(bt), x_0 \operatorname{sen}(bt) + y_0 \cos(bt)) = (0, 0).$$

Daí, as órbitas são espirais saem da origem e tendem para o infinito quando $t \to -\infty$ (Figura 22).

Figura 22 – Espirais com $a > 0$



Fonte: Elaboração do autor

3.4 Atratores e fontes

Definição 3.5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\varphi_A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seu fluxo associado.

1. Dizemos que $O \in \mathbb{R}^n$ é um *atrator* de A se, e só se, $\lim_{t \to +\infty} \varphi_A(t, x) = O$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

2. Dizemos que $O \in \mathbb{R}^n$ é uma *fonte* de A se, e só se, $\lim_{t\to+\infty} |\varphi_A(t,x)| = +\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$.

Observação 3.6. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ então O é um atrator de A se, e só se, O é uma fonte de $-A$.

Lema 3.1 (Lema 3.4.1 em (BENAZIC, 2007))**.** Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de A. Então, para todo $v \in \mathbb{K}^n - \{O\}$ autovetor associado a λ, tem-se $e^{tA}v = e^{\lambda t}v$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Definimos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ dada por $\psi(t) = e^{\lambda t}v$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora, note que ψ é diferenciável e

$$\psi'(t) = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}(\lambda v) = e^{\lambda t}(Av) = A(e^{\lambda t}v) = A\psi(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Também, $\psi(0) = v$. Logo ψ é solução do PVI

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = v. \end{cases}$$

Daí, pelo Teorema de existência e unicidade, temos $\psi(t) = e^{tA}v$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.6 (Proposição 3.4.1 em (BENAZIC, 2007))**.** Se $O \in \mathbb{R}^n$ é um atrator de A, então todos os autovalores de A tem parte real negativa.

Demonstração. Suponhamos que existe $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de A tal que $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Dado $v \in \mathbb{K}^n - \{O\}$ autovetor associado a λ, pelo Lema 3.1, obtemos

$$|\varphi_A(t,v)| = |e^{tA}v| = |e^{\lambda t}v| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}|v|.$$

Assim, temos que

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi_A(t,v)| = \begin{cases} |v| & \text{se } \mathrm{Re}(\lambda) = 0 \\ +\infty & \text{se } \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \end{cases}$$

o que contradiz o fato de O ser atrator de A.

Lema 3.2 (Lema 3.4.2 em (BENAZIC, 2007))**.** Se J é uma matriz do tipo $J = \lambda I_n + N_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $J = J_{2n}(a;b) + N_{2n}^2 \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$. Então, existem constantes positivas $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ tal que

$$\|e^{tJ}\| \leq e^{\mathrm{Re}(\Lambda)t}[a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1}].$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Demonstração.

Caso 1: $J = \lambda I_n + N_n$. Como $(\lambda I_n)N_n = N_n(\lambda I_n)$ e N_n é nilpotente de ordem n tem-se

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{t(\lambda I_n + N_n)} = e^{t\lambda I_n} e^{tN_n} \\ &= e^{t\lambda} I_n \left[I_n + tN_n + \frac{t^2}{2!}N_n^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N_n^{n-1} \right] \end{aligned}$$

daí,

$$\|e^{tJ}\| \leq e^{\lambda t} \left[\|I_n\| + t\|N_n\| + t^2 \frac{\|N_n\|^2}{2!} + \cdots + t^{n-1} \frac{\|N_n\|^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

assim, tomando $a_0 = \|I_n\|$ e $a_k = \dfrac{\|N_n\|^k}{k!}$ para $k = 1, \cdots, n-1$, obtemos o desejado.

Caso 2: $J = J_{2n}(a;b) + N_{2n}^2$. Como $J_{2n}(a;b)N_{2n}^2 = N_{2n}^2 J_{2n}(a;b)$ e N_{2n}^2 é nilpotente de ordem n temos tem-se

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= e^{t(J_{2n}(a;b) + N_{2n}^2)} = e^{tJ_{2n}(a;b)} e^{N_{2n}^2} \\ &= e^{at} \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\operatorname{sen}(bt) \\ \operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} I_n \left[I_n + tN_{2n}^2 + \frac{t^2}{2!}N_{2n}^4 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N_{2n}^{2n-2} \right] \end{aligned}$$

daí,

$$\|e^{tJ}\| \leq e^{at} \left[\|I_n\| + t\|N_{2n}\|^2 + t^2 \frac{\|N_{2n}\|^4}{2!} + \cdots + t^{n-1} \frac{\|N_{2n}\|^{2n-2}}{(n-1)!} \right]$$

assim, tomando neste caso $a_0 = \|I_n\|$ e $a_k = \dfrac{\|N_{2n}\|^{2k}}{k!}$ para $k = 1, \cdots, n-1$, temos o que queríamos.

Proposição 3.7 (Proposição 3.4.2 em (BENAZIC, 2007))**.** Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tem todos seus autovalores com parte real negativa então existem constantes $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que

$$|\varphi_A(t,x)| \leq ke^{-\mu t}|x|, \text{ para todo } (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n. \tag{3.14}$$

Demonstração.

Afirmação 3.5. (3.14) não depende da norma em $\mathbb{R}^n$.

De fato, suponhamos que (3.14) é válida para uma norma $|\cdot|$ em $\mathbb{R}^n$. Seja $\|\cdot\|$ outra norma em $\mathbb{R}^n$, como duas normas quaisquer são equivalentes em $\mathbb{R}^n$ (Teorema 8 do Capítulo 1 em (LIMA, 2015)), isto é, existem constantes α e β positivos tais que

$$\alpha|x| \leq \|x\| \leq \beta|x|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.15}$$

Daí, para $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, por (3.15) e (3.14) temos

$$\|\varphi_A(t,x)\| \leq \beta|\varphi_A(t,x)| \leq k\beta e^{-\mu t}|x| \leq \left(\frac{k\beta}{\alpha}\right) e^{-\mu t}\|x\|$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

como $\alpha \leq \beta$ e $k \geq 1$ temos que $\dfrac{k\beta}{\alpha} \geq 1$. O que prova a afirmação.

Afirmação 3.6. Basta prova (3.14) para J_A.

De fato, suponhamos que existam constantes $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que

$$|\varphi_{J_A}(t,x)| \leq ke^{-\mu t}|x|, \text{ para todo } (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n. \tag{3.16}$$

Lembre que existe $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ tal que $J_A = PAP^{-1}$. Assim, para $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, por (3.16) obtemos

$$\begin{aligned}
|\varphi_A(t,x)| &= |e^{tA}x| = |e^{t(P^{-1}J_AP)}x| = |P^{-1}e^{tJ_A}Px| \\
&\leq \|P^{-1}\| \cdot |e^{tJ_A}Px| = \|P^{-1}\| \cdot |\varphi_{J_A}(t,Px)| \\
&\leq \|P^{-1}\|ke^{-\mu t}|Px| \leq \|P^{-1}\|ke^{-\mu t}\|P\| \cdot |x| \\
&\leq (\|P^{-1}\| \cdot \|P\|k)e^{-\mu t}|x|
\end{aligned}$$

como $k \geq 1$ e $\|P^{-1}\| \cdot \|P\| \geq 1$ tem-se que $\|P^{-1}\| \cdot \|P\|k \geq 1$. O que acaba a demonstração da afirmação.

Agora vamos mostrar (3.14) para J_A e consideraremos a norma do máximo em $\mathbb{R}^n$, isto é, $|x| = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$. Sabemos que $J_A = \mathrm{diag}[J_1, \cdots, J_m]$ onde $J_i = \lambda_i I_{n_i} + N_{n_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ com $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ou $J_j = J_{2n_j}(a;b) + N_{2n_j}^2 \in \mathbb{R}^{2n_j \times 2n_j}$ com $\lambda_j = a + ib \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{J_A}(t,x) &= e^{tJ_A}x = \mathrm{diag}[e^{tJ_1}, \cdots, e^{tJ_m}] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{bmatrix} \\
&= (e^{tJ_1}\bar{x}_1, e^{tJ_2}\bar{x}_2, \cdots, e^{tJ_m}\bar{x}_m)
\end{aligned}$$

Escolhamos $\mu > 0$ tal que $\mathrm{Re}(\lambda_i) < -\mu < 0$ para todo $i = 1, \cdots, m$ e seja

$$\varepsilon_i = -\mu - \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0. \tag{3.17}$$

Pelo Lema 3.2, para $i = 1, \cdots, m$, existem constantes positivas $a_{i,0}, a_{i,1}, \cdots, a_{i,n_i-1}$ tais que

$$|e^{tJ_i}\bar{x}_i| \leq \|e^{tJ_i}\| \cdot |\bar{x}_i| \leq e^{\mathrm{Re}(\lambda_i)t}[a_{i,0} + a_{i,1}t + \cdots + a_{i,n_i-1}t^{n_i-1}]|\bar{x}_i|.$$

Daí, por (3.17) tem-se

$$|e^{tJ_i}\bar{x}_i| \leq e^{-\mu t}[e^{-\varepsilon_i t}p_i(t)]|\bar{x}_i|, \tag{3.18}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

onde $p_i(t) = a_{i,0} + a_{i,1}t + \cdots + a_{i,n_i-1}t^{n_i-1}$. Agora, como $\lim_{t\to+\infty} e^{-\varepsilon_i t}p_i(t) = 0$ (Lema 9 da seção 4 do Capítulo III em (SOTOMAYOR, 1979)) então existe $t_0 > 0$ tal que

$$t \geq t_0 \to |e^{-\varepsilon_i t}p_i(t)| < 1. \tag{3.19}$$

Também, para cada $i = 1, \cdots, m$, como $e^{-\varepsilon_i t}p_i(t)$ é contínua em $[0, t_0]$ existe

$$M_i = \max\{e^{-\varepsilon_i t}p_i(t);\ t \in [0, t_0]\}. \tag{3.20}$$

Seja $k_i = \max\{1, M_i\} \geq 1$ para cada $i = 1, \cdots, m$. Assim, para cada $i = 1, \cdots, m$, por (3.19) e (3.20), obtemos

$$e^{-\varepsilon_i t}p_i(t) \leq k_i, \text{ para todo } t \geq 0. \tag{3.21}$$

Finalmente, seja $k = \max\{k_1, k_2, \cdots, k_m\} \geq 1$. Para $(t, x) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R}^n$, de (3.18) e (3.21), tem-se

$$\begin{aligned} |\varphi_{J_A}(t, x)| &= \max\{|e^{tJ_1}\bar{x}_1|, |e^{tJ_2}\bar{x}_2|, \cdots, |e^{tJ_m}\bar{x}_m|\} \\ &\leq \max\{e^{-\mu t}k_1|\bar{x}_1|, e^{-\mu t}k_2|\bar{x}_2|, \cdots, e^{-\mu t}k_m|\bar{x}_m|\} \\ &\leq ke^{-\mu t}\max\{|\bar{x}_1|, |\bar{x}_2|, \cdots, |\bar{x}_m|\} = ke^{-\mu t}|x|. \end{aligned}$$

Lema 3.3 (Lema 3.4.3 em (BENAZIC, 2007))**.** Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se $O \in \mathbb{R}^n$ é um atrator de A e $A \equiv_{\text{top}} B$ então O é atrator de B.

Demonstração. Como $A \equiv_{\text{top}} B$ existe $h \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x) \text{ para todo } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{3.22}$$

Afirmação 3.7. $h(O) = O$.

De fato, como O é atrator de A então $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$. Assim, seja $z \in \text{Nu}(B)$, pelo item 2 da Proposição 3.3, $\mathcal{O}_B(z) = \{z\}$, daí temos

$$\{h^{-1}(z)\} = h^{-1}(\{z\}) = h^{-1}(\mathcal{O}_B(z)) = \mathcal{O}_A(h^{-1}(z))$$

e, novamente pelo item 2 da Proposição 3.3, $h^{-1}(z) \in \text{Nu}(A) = \{O\}$, assim $z = h(O)$. Em particular, como $z = O \in \text{Nu}(B)$ temos que $h(O) = O$ e, além disso $B \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Afirmação 3.8. O é atrator de B.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

De fato, seja $y \in \mathbb{R}^n$, como h é uma bijeção, existe um único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = h(x)$. Logo, como h é contínua e conjuga topologicamente A e B, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \varphi_B(t,y) &= \lim_{t\to+\infty} \varphi_B(t,h(x)) = \lim_{t\to+\infty} h(\varphi_A(t,x)) \\ &= h\left(\lim_{t\to+\infty} \varphi_A(t,x)\right) = h(O) = O.\end{aligned}$$

Proposição 3.8 (Proposição 3.4.3 em (BENAZIC, 2007))**.** Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A \equiv_{\text{top}} -I_n$ então $O \in \mathbb{R}^n$ é atrator de A.

Demonstração. Primeiro observe que,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \varphi_{-I_n}(t,x) &= \lim_{t\to+\infty} e^{-tI_n}x = \lim_{t\to+\infty} e^{-t}I_n x \\ &= \lim_{t\to+\infty} e^{-t}x = O,\end{aligned}$$

isto é, O é atrator de $-I_n$. Logo, pelo Lema 3.3, O é um atrator de A.

Proposição 3.9 (Proposição 3.4.4 em (BENAZIC, 2007))**.** Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e suponha que existem $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que

$$|\varphi_A(t,x)| \leq ke^{-\mu t}|x|, \text{ para todo } (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n. \tag{3.23}$$

Então existe um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{O}_A(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$) intercepta em um único ponto a cada uma das esferas da família $\{S_A(r)\}_{r>0}$ onde

$$S_A(r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x,x\rangle_A = r^2\}.$$

Demonstração. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\langle x,y\rangle_A = \int_0^{+\infty} \langle\varphi_A(s,x), \varphi_A(s,y)\rangle ds$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno euclidiano.

Afirmação 3.9. $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ é bem definido.

De fato, para $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $s \geq 0$, pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz e por (3.23), temos

$$\begin{aligned}|\langle\varphi_A(s,x), \varphi_A(s,y)\rangle| &\leq |\varphi_A(s,x)| \cdot |\varphi_A(s,y)| \\ &\leq (ke^{-\mu s}|x|)(ke^{-\mu s}|y|)\end{aligned}$$

daí,

$$|\langle\varphi_A(s,x), \varphi_A(s,y)\rangle| \leq k^2e^{-2\mu s}|x| \cdot |y|. \tag{3.24}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Agora, como

$$\int_0^{+\infty} k^2 e^{-2\mu s}|x|\cdot|y|ds = \left[\frac{k^2 e^{-2\mu s}|x|\cdot|y|}{-2\mu}\right]_0^{+\infty} = \frac{k^2|x|\cdot|y|}{2\mu}. \tag{3.25}$$

Assim, como (3.25) converge e por (3.24), logo existe $\int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s,x),\varphi_A(s,y)\rangle ds$.

Afirmação 3.10. $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ é um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

De fato, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\langle x, y+z\rangle_A &= \int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s,x),\varphi_A(s,y+z)\rangle ds\\ &= \int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s,x),\varphi(s,y)+\varphi_A(s,z)\rangle ds\\ &= \int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s,x),\varphi(s,y)\rangle ds + \int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s,x),\varphi_A(s,z)\rangle ds\\ &= \langle x,y\rangle_A + \langle x,z\rangle_A.\end{aligned}$$

$$\langle x,y\rangle_A = \int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s,x),\varphi_A(s,y)\rangle ds = \int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s,y),\varphi(s,x)\rangle ds = \langle y,x\rangle_A.$$

$$\begin{aligned}\langle\alpha x, y\rangle_A &= \int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s,\alpha x),\varphi_A(s,y)\rangle ds = \int_0^{+\infty}\alpha\langle\varphi_A(s,x),\varphi(s,y)\rangle ds\\ &= \alpha\int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s,x),\varphi(s,y)\rangle ds = \alpha\langle x,y\rangle_A.\end{aligned}$$

Para $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$, desde que $|\varphi_A(\cdot,x)|$ é contínua e $|\varphi_A(s,x)| > 0$ para todo $s \geq 0$, tem-se

$$\langle x,x\rangle_A = \int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s,x),\varphi_A(s,x)\rangle ds = \int_0^{+\infty}|\varphi_A(s,x)|^2 ds > 0.$$

Isto completa da demonstração da afirmação.

Denotemos por $|\cdot|_A$ à norma induzida por $\langle\cdot,\cdot,\rangle_A$ (isto é, $|x|_A^2 = \langle x,x\rangle_A$). Consideremos a função

$$\begin{aligned}F:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ (t,x) &\mapsto F(t,x) = |\varphi_A(t,x)|_A^2.\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}F(t,x) &= \langle\varphi_A(t,x),\varphi_A(t,x)\rangle_A = \int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s,\varphi_A(t,x)),\varphi_A(s,\varphi_A(t,x))\rangle ds\\ &= \int_0^{+\infty}\langle\varphi_A(s+t,x),\varphi_A(s+t,x)\rangle ds = \int_0^{+\infty}|\varphi_A(s+t,x)|^2 ds\end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $\theta = s+t$ obtemos

$$F(t,x) = \int_t^{+\infty}|\varphi_A(\theta,x)|^2 d\theta$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

daí,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -|\varphi_A(t,x)|^2. \tag{3.26}$$

Como $|\cdot|_A$ é equivalente à norma euclidiana $|\cdot|$, logo existem constantes positivas α e β tais que

$$\alpha|x|^2 \leq |x|_A^2 \leq \beta|x|^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.27}$$

Dado $r > 0$, definimos a "esfera" por

$$S_A(r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x|_A = r\}.$$

Afirmação 3.11. Se $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$ então $\mathcal{O}_A(x)$ intercepta à $S_A(r)$ num único ponto.

De fato, para $t \leq 0$, por (3.27) e(3.26), obtemos

$$\alpha|\varphi_A(t,x)|^2 \leq |\varphi_A(t,x)|_A^2 \leq \beta|\varphi_A(t,x)|^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\alpha} \leq -\frac{|\varphi_A(t,x)|^2}{|\varphi_A(t,x)|_A^2} \leq -\frac{1}{\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\alpha} \leq \frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)}{F(t,x)} \leq -\frac{1}{\beta}$$

integrando de t a 0, obtemos

$$-\int_t^0 \frac{1}{\alpha}ds \leq \int_t^0 \frac{\frac{\partial F}{\partial t}(s,x)}{F(s,x)}ds \leq -\int_t^0 \frac{1}{\beta}ds$$

$$\Rightarrow \frac{t}{\alpha} \leq \ln F(0,x) - \ln F(t,x) \leq \frac{t}{\beta}$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{\beta} \leq \ln F(t,x) - \ln F(0,x) \leq -\frac{t}{\alpha}$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{\beta} \leq \ln \frac{F(t,x)}{|x|_A^2} \leq -\frac{t}{\alpha}$$

agora desde que a função exponencial é crescente temos

$$e^{-t/\beta}|x|_A^2 \leq F(t,x) \leq e^{-t/\alpha}|x|_A^2, \text{ para todo } t \leq 0. \tag{3.28}$$

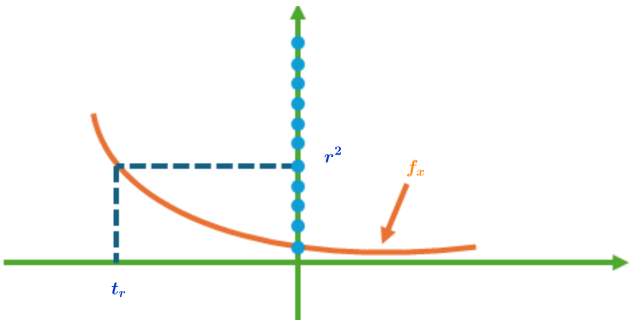
Fixado $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$, definamos

$$\begin{array}{rccl} f_x: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f_x(t) = F(t,x). \end{array}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Claramente f_x é contínua em $\mathbb{R}$, além disso, por (3.23), $\lim_{t\to+\infty} f_x(t) = 0$ e, por (3.28), $\lim_{t\to-\infty} f_x(t) = +\infty$. Também, tem-se que f_x é diferenciável e $f_x'(t) = -|\varphi_A(t,x)|^2 < 0$. Logo, f_x é decrescente conforme a Figura 23 e, portanto $f_x(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Figura 23 – A função f_x



Fonte: Elaboração do autor

Para $r > 0$, temos que $r^2 \in f_x(\mathbb{R})$ daí, existe um único $t_r \in \mathbb{R}$ tal que,

$$r^2 = f_x(t_r) = F(t_r, x) = |\varphi_A(t_r, x)|_A^2 \Rightarrow |\varphi_A(t_r, x)|_A = r.$$

Assim, concluímos $\varphi_A(t_r, x) \in S_A(r) \cap \mathcal{O}_A(x)$.

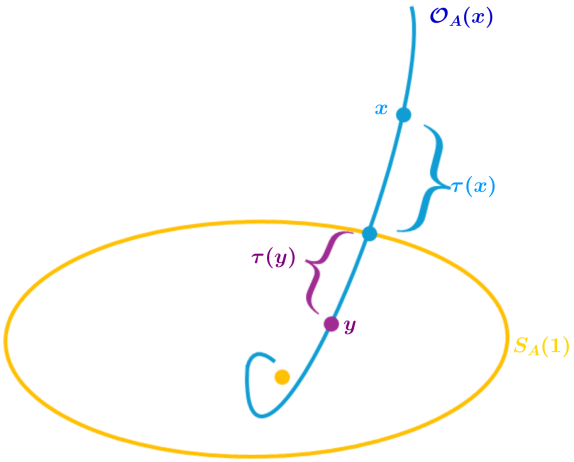
Observação 3.7.

1. Na demonstração da Proposição 3.9 mostramos que para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$ existe um único $t_x \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t_x, x) \in S_A(1)$, isto é, $|\varphi_A(t_x, x)|_A = 1$. Definamos

$$\begin{aligned} \tau : \ \mathbb{R}^n - \{O\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tau(x) = t_x. \end{aligned}$$

   Logo, temos que $|\varphi_A(\tau(x), x)|_A = 1$.

Figura 24 – A função τ



Fonte: Elaboração do autor

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Uma interpretação física para a função τ é que ela representa o tempo necessário para que uma partícula, que se encontra na posição x, intercepte a esfera $S_A(1)$ (Figura 24).

2. τ é contínua em $\mathbb{R}^n - \{O\}$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$ temos que

$$|\varphi_A(\tau(x), x)|_A = 1. \tag{3.29}$$

Seja $(x_n) \subset \mathbb{R}^n - \{O\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Para cada, $n \in \mathbb{N}$, temos que $|\varphi_A(\tau(x_n), x_n)|_A = 1$. Daí,

$$\langle \varphi_A(\tau(x_n), x_n), \varphi_A(\tau(x_n), x_n)\rangle_A = 1$$

assim, tomando limite quando n tende a ∞ obtemos

$$\langle \varphi_A(\lim_{n\to\infty} \tau(x_n), x), \varphi_A(\lim_{n\to\infty} \tau(x_n), x)\rangle_A = 1$$

equivalentemente,

$$|\varphi_A(\lim_{n\to\infty} \tau(x_n), x)|_A = 1. \tag{3.30}$$

Agora, por unicidade, de (3.29) e (3.30), temos que $\lim_{n\to\infty} \tau(x_n) = \tau(x)$.

3. Mais ainda, como $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^\times\mathbb{R}^n)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial t}(t, x) < 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, τ é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n - \{O\})$.

Teorema 3.1 (Teorema 10 da seção 5 do Capítulo III em (SOTOMAYOR, 1979) e Teorema 3.4.5 em (BENAZIC, 2007))**.** Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, são equivalentes:

1. $A \equiv_{\text{top}} -I_n$.
2. $O \in \mathbb{R}^n$ é um atrator de A.
3. Todos os autovalores de A tem parte real negativa,
4. Existem constantes $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que

$$|\varphi_A(t, x)| \leq ke^{-\mu t}|x|, \text{ para todo } (t, x) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R}^n.$$

Demonstração.

$(1) \Rightarrow (2)$: Proposição 3.8.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

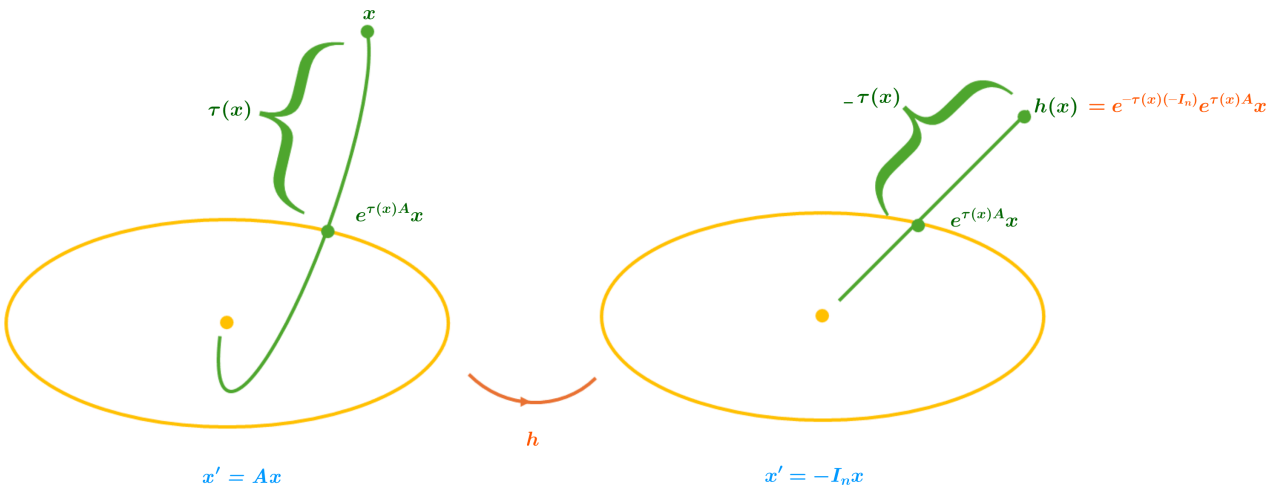
$(2) \Rightarrow (3)$: Proposição 3.6.

$(3) \Rightarrow (4)$: Proposição 3.7.

$(4) \Rightarrow (1)$: Pela Proposição 3.9 existe $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ um produto interno de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathcal{O}_A(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$) intercepta em um único ponto a $S_A(1) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x|_A = 1\}$. Consideremos a função $\tau : \mathbb{R}^n - \{O\} \to \mathbb{R}$ que verifica $|\varphi_A(\tau(x), x)|_A = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$. Construiremos agora a conjugação topológica entre A e $-I_n$ (Figura 25). Definamos

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & h(x) = \begin{cases} e^{\tau(x)} e^{\tau(x)A} x & \text{se } x \neq O \\ O & \text{se } x = O. \end{cases} \end{array}$$

Figura 25 – Construção da conjugação h



Fonte: Elaboração do autor

Note que h é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n - \{O\}$.

Afirmação 3.12. h é uma bijeção.

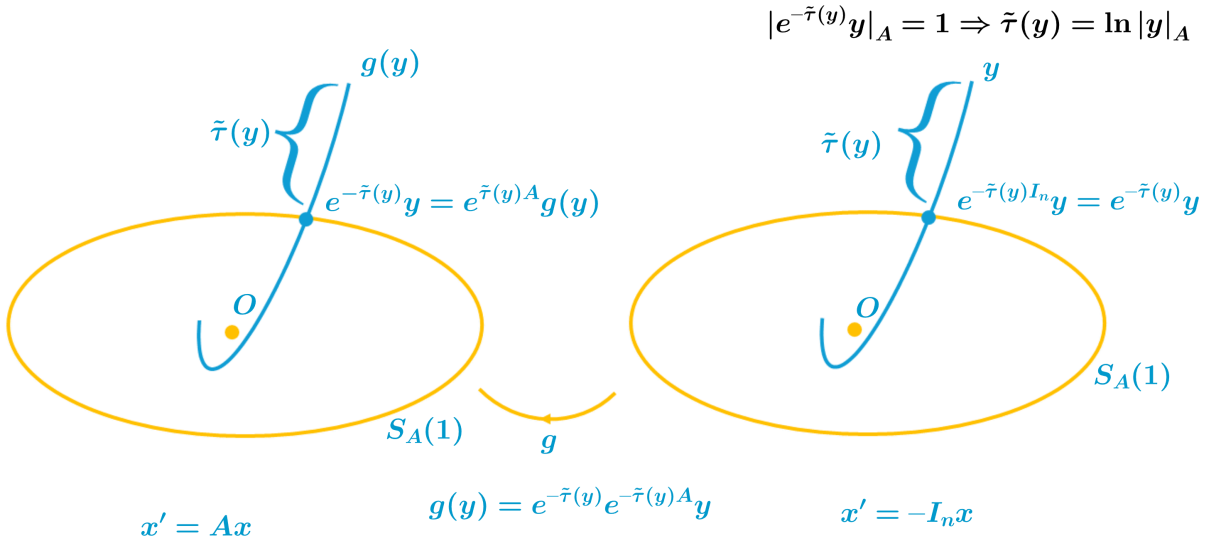
De fato, veja a Figura 26 e considere a função definida por

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & g(y) = \begin{cases} e^{-\overline{\tau}(y)} e^{-\overline{\tau}(y)A} y & \text{se } y \neq O \\ O & \text{se } y = O. \end{cases} \end{array}$$

onde $\overline{\tau}(y) = \ln |y|_A$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Figura 26 – Construção da conjugação inversa g



Fonte: Elaboração do autor

Claramente $h \circ g(O) = O$ e $g \circ h(O) = O$. Seja $y \in \mathbb{R}^n - \{O\}$ tem-se

$$(h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(e^{-\overline{\tau}(y)}e^{-\overline{\tau}(y)A}y),$$

denotemos $x = e^{-\overline{\tau}(y)}e^{-\overline{\tau}(y)A}y$ logo $e^{\overline{\tau}(y)A}x = e^{-\overline{\tau}(y)}y$. Agora, note que

$$|\varphi_A(\overline{\tau}(y), x)|_A = |e^{\overline{\tau}(y)A}x|_A = |e^{-\overline{\tau}(y)}y|_A = e^{-\overline{\tau}(y)}|y|_A = 1,$$

daí, por unicidade, temos que $\tau(x) = \overline{\tau}(y)$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}(h \circ g)(y) &= h(x) = e^{\tau(x)}e^{\tau(x)A}x \\ &= e^{\overline{\tau}(y)}e^{\overline{\tau}(y)A}e^{-\overline{\tau}(y)}e^{-\overline{\tau}(y)A}y \\ &= y = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})(y).\end{aligned}$$

Por outro lado, dado $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(e^{\tau(x)}e^{\tau(x)A}x)$$

denotemos $y = e^{\tau(x)}e^{\tau(x)A}x$ logo $e^{-\tau(x)}y = e^{\tau(x)A}x$. Agora, como

$$1 = |\varphi_A(\tau(x), x)|_A = |e^{\tau(x)A}x|_A = |e^{-\tau(x)}y|_A = e^{-\tau(x)}|y|_A$$

daí, $|y|_A = e^{\tau(x)}$ então $\tau(x) = \ln|y|_A = \overline{\tau}(y)$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}(g \circ h)(x) &= g(y) = e^{-\overline{\tau}(y)}e^{-\overline{\tau}(y)A}y \\ &= e^{-\tau(x)}e^{-\tau(x)A}e^{\tau(x)}e^{\tau(x)A}x \\ &= x = (\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})(x).\end{aligned}$$

Concluímos que, h é uma bijeção e $g = h^{-1}$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Afirmação 3.13. h é contínua em O.

De fato, para $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$, por (3.27), temos

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} |h(x)|_A = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} |e^{\tau(x)} e^{\tau(x)A} x|_A \\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} e^{\tau(x)} |\varphi_A(\tau(x), x)|_A = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} e^{\tau(x)} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Se $\tau(x) \geq 0$ então por (3.23) e (3.27) temos

$$1 = |\varphi_A(\tau(x), x)|_A \leq k e^{-\mu\tau(x)} |x| \leq k \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\mu\tau(x)} |x|_A$$

daí,

$$e^{\tau(x)} \leq k^{1/\mu} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2\mu} |x|_A^{1/\mu}.$$

Se $\tau(x) < 0$ então por (3.28) e (3.27) obtemos

$$1 = |\varphi_A(\tau(x), x)|_A^2 = F(\tau(x), x) \leq e^{-\tau(x)/\alpha} |x|_A^2$$

assim,

$$e^{\tau(x)} \leq |x|_A^{2\alpha}.$$

Em qualquer caso, existem constantes positivas ℓ e γ (que não dependem de x) tais que

$$e^{\tau(x)} \leq \ell |x|_A^{\gamma}. \tag{3.32}$$

Portanto, de (3.31) e (3.32), obtemos

$$0 \leq |h(x)| \leq \ell \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} |x|_A^{\gamma}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$$

daí concluímos que $\lim_{x \to O} h(x) = O = h(O)$.

Por outro lado, por definição, h^{-1} é claramente de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n - \{O\}$.

Afirmação 3.14. h^{-1} é contínua O.

De fato, para $y \in \mathbb{R}^n - \{O\}$, por (3.27), temos

$$\begin{aligned} |h^{-1}(y)| &\leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} |h^{-1}(y)|_A = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} |e^{-\overline{\tau}(y)} e^{-\overline{\tau}(y)A} y|_A \\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} \frac{|\varphi_A(-\overline{\tau}(y), y)|_A}{|y|_A}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Agora, como $-\overline{\tau}(y) < 0$ então por (3.28) obtemos

$$|\varphi_A(-\overline{\tau}(y), y)|_A^2 = F(-\overline{\tau}(y), y) \leq e^{\overline{\tau}(y)/\alpha}|y|_A^2$$

assim,

$$|\varphi_A(-\overline{\tau}(y), y)|_A \leq e^{\overline{\tau}(y)/2\alpha}|y|_A = |y|_A^{1+\frac{1}{2\alpha}}. \tag{3.34}$$

Portanto, por (3.33) e (3.34), temos

$$0 \leq |h^{-1}(y)| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} |y|_A^{1/2\alpha}, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n - \{O\}$$

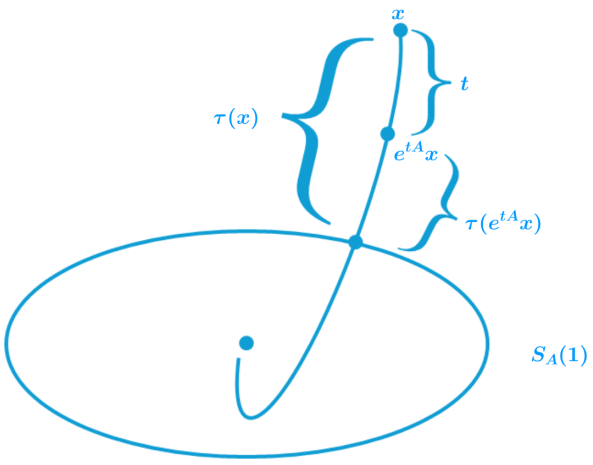
daí concluímos que $\lim_{y\to O} h^{-1}(y) = O = h^{-1}(O)$.

Das afirmações anteriores temos que h é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Agora, vejamos que h conjuga os fluxos φ_A e φ_{-I_n}.

Afirmação 3.15. Veja a figura abaixo que dado qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n - \{O\}$ tem-se

$$\tau(x) = t + \tau(e^{tA}x) \text{ (Figura 27).} \tag{3.35}$$

Figura 27 – Propriedade de τ



Fonte: Elaboração do autor

De fato,

$$\begin{aligned} |\varphi_A(t + \tau(e^{tA}x), x)|_A &= |e^{(t+\tau(e^{tA}x))A}x|_A \\ &= |e^{\tau(e^{tA}x)A}e^{tA}x|_A \\ &= |\varphi_A(\tau(e^{tA}x), e^{tA}x)|_A = 1 \end{aligned}$$

daí, por unicidade, tem-se $\tau(x) = t + \tau(e^{tA}x)$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Finalmente, por (3.35), para cada $(t,x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n - \{O\})$ obtemos

$$\begin{aligned} h(\varphi_A(t,x)) &= h(e^{tA}x) = e^{\tau(e^{tA}x)}e^{\tau(e^{tA}x)A}e^{tA}x \\ &= e^{\tau(x)-t}e^{(\tau(x)-t)A}e^{tA}x \\ &= e^{-t}e^{\tau(x)}e^{\tau(x)A}x \\ &= e^{-t}h(x) = e^{-t}I_n h(x) \\ &= e^{-tI_n}h(x) \\ &= \varphi_{-I_n}(t,h(x)). \end{aligned}$$

O que acaba com a demonstração do Teorema.

Lema 3.4 (Lema 3.4.4 em (BENAZIC, 2007))**.** Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Então, $A \equiv_{\text{top}} B$ se, e só se, $-A \equiv_{\text{top}} -B$.

Demonstração. Suponha que $A \equiv_{\text{top}} B$ então existe $h \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$h(\varphi_A(t,x)) = \varphi_B(t,h(x)), \text{ para todo } (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n. \tag{3.36}$$

Para $(s,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, por (3.36), obtemos

$$\begin{aligned} h(\varphi_{-A}(s,x)) &= h(e^{-sA}x) = h(\varphi_A(-s,x)) \\ &= \varphi_B(-s,h(x)) = e^{-sB}h(x) \\ &= \varphi_{-B}(s,h(x)). \end{aligned}$$

Portanto, $-A \equiv_{\text{top}} -B$. Reciprocamente, se $-A \equiv_{\text{top}} -B$ então existe $g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$g(\varphi_{-A}(s,x)) = \varphi_{-B}(s,g(x)), \text{ para todo } (s,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n. \tag{3.37}$$

Para $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, por (3.37), tem-se

$$\begin{aligned} g(\varphi_A(t,x)) &= g(e^{tA}x) = g(\varphi_{-A}(-t,x)) \\ &= \varphi_{-B}(-t,g(x)) = e^{tB}g(x) \\ &= \varphi_B(t,g(x)). \end{aligned}$$

Daí, $A \equiv_{\text{top}} B$.

Teorema 3.2 (Teorema 12 da seção 5 do Capítulo III em (SOTOMAYOR, 1979) e Teorema 3.4.6 em (BENAZIC, 2007))**.** Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, são equivalentes:

1. $A \equiv_{\text{top}} I_n$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

2. $O \in \mathbb{R}^n$ é uma fonte de A.

3. Todos os autovalores de A tem parte real positiva,

4. Existem constantes $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que

$$|\varphi_A(t,x)| \geq k^{-1}e^{\mu t}|x|, \text{ para todo } (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n.$$

Demonstração.
$(1) \Rightarrow (2)$: Se $A \equiv_{\text{top}} I_n$ pelo Lema 3.4, $-A \equiv_{\text{top}} -I_n$. Agora, pelo Teorema 3.1, $O \in \mathbb{R}^n$ é um atrator de $-A$ assim O é uma fonte de A.
$(2) \Rightarrow (3)$: Se $O \in \mathbb{R}^n$ é uma fonte de A daí O é um atrator de $-A$. Assim, pelo Teorema 3.1, todos os autovalores de $-A$ tem parte real negativa. Portanto, todos os autovalores de A tem parte real positiva.
$(3) \Rightarrow (4)$: Se todos os autovalores de A tem parte real positiva, então todos os autovalores de $-A$ tem parte real negativa. Logo, pelo Teorema 3.1, existem constantes $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que

$$|\varphi_{-A}(s,y)| \leq ke^{-\mu s}|y|, \text{ para todo } (s,y) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n. \tag{3.38}$$

Para $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, por (3.38),

$$\begin{aligned} |x| = |I_n x| = |e^{-tA}e^{tA}x| = |\varphi_{-A}(t,e^{tA}x)| \leq ke^{-\mu t}|e^{tA}x| \\ \Rightarrow |\varphi_A(t,x)| = |e^{tA}x| \geq k^{-1}e^{\mu t}|x|. \end{aligned}$$

$(4) \Rightarrow (1)$: Suponhamos que existem constantes $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que

$$|\varphi_A(s,y)| \geq k^{-1}e^{\mu t}|y|, \text{ para todo } (s,y) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n. \tag{3.39}$$

Para $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$, por (3.39),

$$\begin{aligned} k^{-1}e^{\mu t}|e^{-tA}x| \leq |\varphi_A(t,e^{-tA}x)| = |e^{tA}e^{-tA}x| = |I_n x| = |x| \\ \Rightarrow |\varphi_{-A}(t,x)| = |e^{-tA}x| \leq ke^{-\mu t}|x|. \end{aligned}$$

Daí, pelo Teorema 3.1, $-A \equiv_{\text{top}} -I_n$. Finalmente, pelo Lema 3.4, $A \equiv_{\text{top}} I_n$.

3.5 Sistemas lineares hiperbólicos

Definição 3.6. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

1. Dizemos que A é *hiperbólico* se, e só se, todos os autovalores de A tem parte real não nula.

2. O *índice de estabilidade* de A (ou simplesmente *índice* de A) é o número de autovalores de A com parte real negativa (contando multiplicidade). Este índice é denotado por $i(A)$.

Exemplo 3.3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Se O é um atrator de A, pelo Teorema 3.1, todos os autovalores de A tem parte real negativa. Logo, A é hiperbólica e $i(A) = n$.

2. Se O é uma fonte de A, pelo Teorema 3.2, todos os autovalores de A tem parte real positiva. Assim, A é hiperbólica e $i(A) = 0$.

Exemplo 3.4. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -5 & -4 & -5 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

cujo polinômio característico é dado por $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda + 3)^2(\lambda - 6)$. Logo, $\lambda_1 = -3$ é autovalor de multiplicidade dois e $\lambda_2 = 6$ é autovalor de multiplicidade um. Portanto, A é hiperbólica com $i(A) = 2$.

Vamos denotar por $\mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ ao conjunto de todas as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hiperbólicas. Claramente, $\mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. A inclusão é estrita. De fato, basta considerar uma matriz com autovalores imaginários puros.

Definição 3.7. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. O *subespaço estável* de A, denotado por $E_s(A)$, é o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos autovetores correspondentes aos autovalores com parte real negativa.

2. O *subespaço instável* de A, denotado por $E_u(A)$, é o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos autovetores correspondentes aos autovalores com parte real positiva.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Exemplo 3.5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Se O é um atrator de A então $E_s(A) = \mathbb{R}^n$.
2. Se O é uma fonte de A então $E_u(A) = \{O\}$.

Exemplo 3.6. Considere a matriz A do Exemplo 3.4. Os autovetores associados a $\lambda_1 = -3$ são $v_1 = (-1, 5, 0)$ e $v_2 = (-1, 0, 1)$, enquanto, o autovetor associado a $\lambda_2 = 6$ é $v_3 = (1, -1, 1)$. Logo,

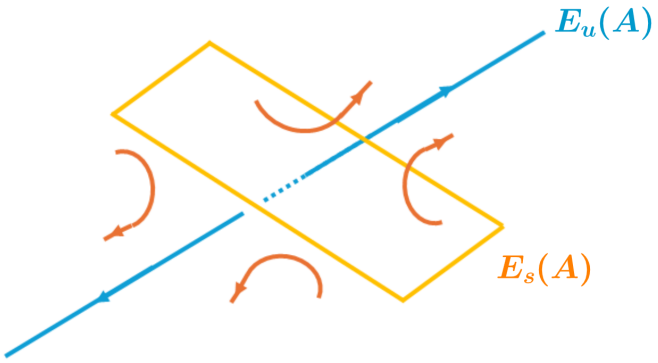
$$E_s(A) = S(\{v_1, v_2\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 5x + y + 5z = 0\}$$

e

$$E_u(A) = S(\{v_3\}) = \{(x, -x, x);\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Aqui $S(X)$ denota o subespaço vetorial gerado por X. Note que $E_s(A) \oplus E_u(A) = \mathbb{R}^3$ (Figura 28).

Figura 28 – Decomposição do ambiente



Fonte: Elaboração do autor

Lema 3.5 (Lema 3.5.1 em (BENAZIC, 2007))**.** Sejam $A, B \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$. Se h é uma conjugação linear entre A e B então $i(A) = i(B)$, $h(E_s(A)) = E_s(B)$ e $h(E_u(A)) = E_u(B)$.

Demonstração. Como $A \equiv_{\mathrm{lin}} B$, pela Proposição 3.5, existe $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ tal que $PA = BP$. Logo, $A = P^{-1}BP$. Daí, A e B são matrizes semelhantes, o que implica que A e B tem os mesmos autovalores, em particular, $i(A) = i(B)$.

Afirmação 3.16. Se v é um autovetor de A associado ao autovalor λ, então $h(v)$ é um autovetor de B associado a λ.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

De fato, como $h(x) = Px$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e como v é não nulo, tem-se que $h(v)$ não nulo e

$$B(h(v)) = B(Pv) = (BP)(v) = (PA)v = P(Av) = P(\lambda v) = \lambda Pv = \lambda h(v)$$

daí, $h(v)$ é autovetor de B associado a λ.

Finalmente, seja $m = i(A) = i(B)$. Se $v_1, \cdots, v_m$ geram $E_s(A)$ então, como h é um isomorfismo linear, $h(v_1), \cdots, h(v_m)$ geram $E_s(B)$. Portanto, $h(E_s(A)) = E_s(B)$. Analogamente, se $w_1, \cdots, w_{n-m}$ geram $E_u(A)$, então $h(w_1), \cdots, h(w_m)$ geram $E_u(B)$. Concluímos, $h(E_u(A)) = E_u(b)$.

Lema 3.6 (Lema 3.5.2 em (BENAZIC, 2007))**.** Seja $A \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ com $i(A) = m$, $(0 \leq m \leq n)$. Então $A \equiv_{\mathrm{lin}} \mathrm{diag}[A_1, A_2]$ onde $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tem todos seus autovalores com parte real negativa e $A_2 \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ tem todos seus autovalores com parte real positiva.

Demonstração. Como $i(A) = m$, podemos organizar a matriz $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ obtida na Forma Canônica de Jordan, $PAP^{-1} = J_A$, de modo que

$$J_A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}[A_1, A_2],$$

onde $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tem todos seus autovalores com parte real negativa e $A \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ tem todos seus autovalores com parte real positiva. Definamos, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado por $h(x) = Px$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então h é um isomorfismo linear e, para $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tem-se

$$\begin{aligned} h(\varphi_A(t, x)) &= h(e^{tA}x) = Pe^{tA}x \\ &= (Pe^{tA}P^{-1})(Px) \\ &= e^{t(PAP^{-1})}h(x) = e^{tJ_A}h(x) \\ &= \varphi_{J_A}(t, h(x)) \end{aligned}$$

daí, h conjuga A e J_A.

Proposição 3.10 (Proposição 4 da seção 6 do Capítulo III em (SOTOMAYOR, 1979) e Proposição 3.5.1 em (BENAZIC, 2007))**.** Seja $A \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ com $i(A) = m$ $(0 \leq m \leq n)$. Então:

1. $\mathbb{R}^n = E_s(A) \oplus E_u(A)$ com $\dim E_s(A) = m$ e $\dim E_u(A) = n - m$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

2. Existem $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que

   (a) $|\varphi_A(t,x)| \leq ke^{-\mu t}|x|$, para todo $(t,x) \in [0,+\infty[\times E_s(A)$.

   (b) $|\varphi_A(t,x)| \geq k^{-1}e^{\mu t}|x|$, para todo $(t,x) \in [0,+\infty[\times E_u(A)$.

Demonstração.

1. Pelo Lema 3.6, $A \equiv_{\text{lin}} J_A = \text{diag}[A_1, A_2]$ onde $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tem todos os autovalores com parte real negativa e $A_2 \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ tem todos os autovalores com parte real positiva. Então, $E_s(J_A) = \mathbb{R}^m \times \{O\}$ e $E_u(J_A) = \{O\} \times \mathbb{R}^{n-m}$. Agora, como $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^m \times \{O\}) \oplus (\{O\} \times \mathbb{R}^{n-m})$ obtemos

$$\mathbb{R}^n = E_s(J_A) \oplus E_u(J_A). \tag{3.40}$$

   Seja h a conjugação linear de A e J_A, daí pela Proposição 3.4, h^{-1} conjuga J_A e A. Agora, pelo Lema 3.5, tem-se

$$h^{-1}(E_s(J_A)) = E_s(A) \text{ e } h^{-1}(E_u(J_A)) = E_u(A). \tag{3.41}$$

   Assim, por (3.40) e (3.41), obtemos

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= h^{-1}(\mathbb{R}^n) = h^{-1}(E_s(J_A) \oplus E_u(J_A))\\ &= h^{-1}(E_s(J_A)) \oplus h^{-1}(E_u(J_A))\\ &= E_s(A) \oplus E_u(A).\end{aligned}$$

   Agora, pelo Lema 3.5 e o fato de $h^{-1} \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$\dim E_s(A) = \dim h^{-1}(E_s(J_A)) = \dim E_s(J_A) = m$$

   e

$$\dim E_u(A) = \dim h^{-1}(E_u(J_A)) = \dim E_u(J_A) = n - m.$$

2. Pelo item anterior, vimos que, $A \equiv_{\text{lin}} J_A = \text{diag}[A_1, A_2]$ onde $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ com todos os autovalores com parte real negativa e $A_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ com todos os autovalores com parte real positiva. Daí, pelo Teorema 3.1, existem constantes $\mu_1 > 0$ e $k_1 \geq 1$ tais que

$$|e^{tA_1}x_1| \leq k_1e^{-\mu_1 t}|x_1|, \text{ para todo } (t,x_1) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^m, \tag{3.42}$$

   e, pelo Teorema 3.2, existem constantes $\mu_2 > 0$ e $k_2 \geq 1$ tais que

$$|e^{tA_2}x_2| \geq k_2^{-1}e^{\mu_2 t}|x_2|, \text{ para todo } (t,x_2) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^{n-m}. \tag{3.43}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Seja h a conjugação linear de A em J_A dada por $h(x) = Px$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$. Para $(t, x) \in [0, +\infty[\times E_s(A)$ daí, pelo visto no item anterior, $x \in E_s(A) = h^{-1}(E_s(J_A))$, assim $h(x) \in E_s(J_A) = \mathbb{R}^m \times \{O\}$. Logo, existe $x_1 \in \mathbb{R}^m$ tal que $h(x) = (x_1, O)$. Agora, como h conjuga A e J_A e por (3.42), obtemos

$$\begin{aligned} |\varphi_A(t,x)| &= |h^{-1}(\varphi_{J_A}(t, h(x)))| = |P^{-1}(\varphi_{J_A}(t, h(x)))| \\ &\leq \|P^{-1}\| \cdot |e^{tA_1}x_1| \leq \|P^{-1}\| k_1 e^{-\mu_1 t}|x_1| \\ &= \|P^{-1}\| k_1 e^{-\mu_1 t}|h(x)| = \|P^{-1}\| k_1 e^{-\mu_1 t}|Px| \\ &\leq \|P^{-1}\| k_1 e^{-\mu_1 t}\|P\| \cdot |x| \end{aligned}$$

daí,

$$|\varphi_A(t,x)| \leq (\|P^{-1}\| \cdot \|P\| k_1) e^{-\mu_1 t}|x|. \tag{3.44}$$

Analogamente, para $(t, x) \in [0, +\infty[\times E_u(A)$ daí, pelo visto no item anterior, $x \in E_u(A) = h^{-1}(E_u(J_A))$, assim $h(x) \in E_u(J_A) = \{O\} \times \mathbb{R}^{n-m}$. Logo, existe $x_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $h(x) = (O, x_2)$. Agora, como h conjuga A e J_A e por (3.43), temos

$$\begin{aligned} \|P\| \cdot |\varphi_A(t,x)| &\geq |P\varphi_A(t,x)| = |h(\varphi_A(t,x))| \\ &= |\varphi_{J_A}(t, h(x))| = |e^{tA_2}x_2| \\ &\geq k_2^{-1} e^{\mu_2 t}|x_2| = k_2^{-1} e^{\mu_2 t}|h(x)| \\ &= k_2^{-1} e^{\mu_2 t}|Px|, \end{aligned}$$

multiplicando a ambos os lados da última desigualdade por $\|P^{-1}\|$ temos

$$\begin{aligned} \|P^{-1}\| \cdot \|P\| \cdot |\varphi_A(t,x)| &\geq k_2^{-1} e^{\mu_2 t}(\|P^{-1}\| \cdot |Px|) \\ &\geq k_2^{-1} e^{\mu_2 t}|P^{-1}Px| = k_2^{-1} e^{\mu_2 t}|x|, \end{aligned}$$

assim,

$$|\varphi_A(t,x)| \geq (\|P^{-1}\| \cdot \|P\| k_2)^{-1} e^{\mu_2 t}|x|. \tag{3.45}$$

Tomando $k = \max\{k_1, k_2\} \cdot \|P^{-1}\| \cdot \|P\|$ e $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\} > 0$. Como $k_1, k_2, \|P^{-1}\| \cdot \|P\| \geq 1$ então $k \geq 1$. Também, para $t \geq 0$, desde que

$$\mu \leq \mu_1 \Rightarrow e^{-\mu_1 t} \leq e^{-\mu t}, \;\; \mu \leq \mu_2 \Rightarrow e^{\mu_2 t} \geq e^{\mu t},$$

$$\|P^{-1}\| \cdot \|P\| k_1 \leq k \;\text{ e }\; k \geq \|P^{-1}\| \cdot \|P\| k_2 \Rightarrow (\|P^{-1}\| \cdot \|P\| k_2)^{-1} \geq k^{-1},$$

de (3.44) e (3.45), segue o resultado.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Observação 3.8. Se $A \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ então a origem comporta-se como um atrator de A em $E_s(A)$ e como uma fonte. Nos pontos $x \in \mathbb{R}^2 - (E_s(A) \cup E_s(A))$ as órbitas têm comportamento geométrico similar às hipérboles.

Corolário 3.1 (Corolário 5 da seção 6 do Capítulo III em (SOTOMAYOR, 1979) e Corolário 3.5.1 em (BENAZIC, 2007))**.** Com as mesmas hipóteses da Proposição 3.10, existem $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que

(i) $|\varphi_A(t,x)| \geq k^{-1}e^{-\mu t}|x|$, para todo $(t,x) \in]-\infty, 0] \times E_s(A)$.

(ii) $|\varphi_A(t,x)| \leq ke^{\mu t}|x|$, para todo $(t,x) \in]-\infty, 0] \times E_u(A)$.

Demonstração.

(i) Para $(t,x) \in]-\infty, 0] \times E_s(A)$, consideremos $r = -t \geq 0$ e $y = e^{tA}x = \varphi_A(t,x)$. Logo, pelo item 2(a) da Proposição 3.10, temos que

$$\begin{aligned} |x| &= |\varphi_A(r+t,x)| = |\varphi_A(r,\varphi_A(t,x))| = |\varphi_A(r,y)| \\ &\leq ke^{-\mu r}|y| = ke^{\mu t}|\varphi_A(t,x)| \end{aligned}$$

daí,

$$|\varphi_A(t,x)| \geq k^{-1}e^{-\mu t}|x|.$$

(ii) Para $(t,x) \in]-\infty, 0] \times E_u(A)$, consideremos $r = -t \geq 0$ e $y = e^{tA}x = \varphi_A(t,x)$. Assim, pelo item 2(b) da Proposição 3.10, tem-se

$$\begin{aligned} |x| &= |\varphi_A(r+t,x)| = |\varphi_A(r,\varphi_A(t,x))| = |\varphi_A(r,y)| \\ &\geq k^{-1}e^{\mu r}|y| = k^{-1}e^{-\mu t}|\varphi_A(t,x)| \end{aligned}$$

segue-se,

$$|\varphi_A(t,x)| \leq ke^{\mu t}|x|.$$

Lema 3.7 (Lema 3.5.3 em (BENAZIC, 2007))**.** Sejam $A, B \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$. Se $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ é uma conjugação topológica entre A e B então $h(E_s(A)) = E_s(B)$ e $h(E_u(A)) = E_u(B)$.

Demonstração. Por hipótese, temos

$$h(\varphi_A(t,x)) = \varphi_B(t,h(x)), \text{ para todo } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{3.46}$$

Afirmação 3.17. $h(O) = O$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

De fato, como $\mathcal{O}_A(O) = \{O\}$, tem-se

$$\{h(O)\} = h(\{\mathcal{O}_A(O)\}) = \mathcal{O}_B(h(O))$$

daí, pelo item 2 da Proposição 3.3, obtemos $h(O) \in \mathrm{Nu}(B)$ e como $B \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, temos $h(O) = O$.

Por outro lado, pelo item 2 da Proposição 3.10, existem $\mu_1 > 0$ e $k_1 \geq 1$ tais que

$$|\varphi_A(t,x)| \leq k_1 e^{-\mu_1 t}|x|, \text{ para todo } (t,x) \in [0,+\infty[\times E_s(A). \tag{3.47}$$

e

$$|\varphi_A(t,x)| \geq k_1^{-1} e^{\mu_1 t}|x|, \text{ para todo } (t,x) \in [0,+\infty[\times E_u(A). \tag{3.48}$$

Também, existem $\mu_2 > 0$ e $k_2 \geq 1$ tais que

$$|\varphi_B(s,y)| \leq k_2 e^{-\mu_2 s}|y|, \text{ para todo } (s,y) \in [0,+\infty[\times E_s(B). \tag{3.49}$$

e

$$|\varphi_B(s,y)| \geq k_2^{-1} e^{\mu_2 s}|y|, \text{ para todo } (s,y) \in [0,+\infty[\times E_u(B). \tag{3.50}$$

Afirmação 3.18. $h(E_s(A)) = E_s(B)$.

De fato, seja $y \in h(E_s(A))$ então existe $x \in E_s(A)$ tal que $y = h(x)$. Agora, por (3.47), temos que $\lim_{t\to+\infty} \varphi_A(t,x) = O$. Daí, por (3.46), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \varphi_B(t,y) &= \lim_{t\to+\infty} \varphi_B(t,h(x)) = \lim_{t\to+\infty} h(\varphi_A(t,x)) \\ &= h\left(\lim_{t\to+\infty} \varphi_A(t,x)\right) = h(O) = O. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Agora, como $y \in \mathbb{R}^n$, pelo item 1 da Proposição 3.10, existem $y_1 \in E_s(B)$ e $y_2 \in E_u(B)$ tal que $y = y_1 + y_2$. Como $y_1 \in E_s(B)$, por (3.49), tem-se

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_B(t,y_1) = O. \tag{3.52}$$

Note que,

$$\varphi_B(t,y_2) = \varphi_B(t,y-y_1) = \varphi_B(t,y) - \varphi_B(t,y_1)$$

daí, por (3.51) e (3.52), obtemos

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_B(t,y_2) = O. \tag{3.53}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Se $y_2 \neq O$, como $y_2 \in E_u(B)$, por (3.50), tem-se $\lim_{t\to+\infty} |\varphi_B(t, y_2)| = +\infty$ o que contradiz (3.53). Logo, $y_2 = O$ e, portanto, $y = y_1 \in E_s(B)$. Desta maneira, $h(E_s(A)) \subseteq E_s(B)$. Consideremos, $y \in E_s(B)$, daí por (3.49), tem-se

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_B(t, y) = O. \tag{3.54}$$

Como h é sobrejetiva, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = h(x)$. Como $x \in \mathbb{R}^n$, pelo item 1 da Proposição 3.10, existem $x_1 \in E_s(A)$ e $x_2 \in E_u(A)$ tal que $x = x_1 + x_2$. Note também que, por (3.46) e (3.54), temos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \varphi_A(t, x) &= \lim_{t\to+\infty} h^{-1}(\varphi_B(t, h(x))) = \lim_{t\to+\infty} h^{-1}(\varphi_B(t, y)) \\ &= h^{-1}\left(\lim_{t\to+\infty} \varphi_B(t, y))\right) = h^{-1}(O) = O. \end{aligned} \tag{3.55}$$

E, como $x_1 \in E_s(A)$, por (3.47),

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_A(t, x_1) = O. \tag{3.56}$$

Desde que,

$$\varphi_A(t, x_2) = \varphi_A(t, x - x_1) = \varphi_A(t, x) - \varphi_A(t, x_1)$$

daí, por (3.55) e (3.56), obtemos

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_A(t, x_2) = O. \tag{3.57}$$

Se $x_2 \neq O$, como $x_2 \in E_u(A)$, por (3.48), tem-se $\lim_{t\to+\infty} |\varphi_A(t, x_2)| = +\infty$ o que contradiz (3.57). Logo, $x_2 = O$ e, portanto, $x = x_1 \in E_s(A)$. Assim, $E_s(B) \subseteq h(E_s(A))$.

Finalmente, pelo Corolário 3.1, existem $\mu_3 > 0$ e $k_3 \geq 1$ tais que

$$|\varphi_A(t, x)| \geq k_3^{-1} e^{-\mu_3 t}|x|, \text{ para todo } (t, x) \in]-\infty, 0] \times E_s(A). \tag{3.58}$$

e

$$|\varphi_A(t, x)| \leq k_3 e^{\mu_3 t}|x|, \text{ para todo } (t, x) \in]-\infty, 0] \times E_u(A). \tag{3.59}$$

Também, existem $\mu_4 > 0$ e $k_4 \geq 1$ tais que

$$|\varphi_B(s, y)| \geq k_4^{-1} e^{-\mu_4 s}|y|, \text{ para todo } (s, y) \in]-\infty, 0] \times E_s(B) \tag{3.60}$$

e

$$|\varphi_B(s, y)| \leq k_4 e^{\mu_4 s}|y|, \text{ para todo } (s, y) \in]-\infty.0] \times E_u(B). \tag{3.61}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Afirmação 3.19. $h(E_u(A)) = E_u(B)$.

De fato, seja $y \in h(E_u(A))$ então existe $x \in E_u(A)$ tal que $y = h(x)$. Agora, por (3.59), temos que $\lim_{t\to-\infty} \varphi_A(t,x) = O$. Daí, por (3.46), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} \varphi_B(t,y) &= \lim_{t\to-\infty} \varphi_B(t,h(x)) = \lim_{t\to-\infty} h(\varphi_A(t,x)) \\ &= h\left(\lim_{t\to-\infty} \varphi_A(t,x)\right) = h(O) = O. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Agora, como $y \in \mathbb{R}^n$, pelo item 1 da Proposição 3.10, existem $y_1 \in E_s(B)$ e $y_2 \in E_u(B)$ tal que $y = y_1 + y_2$. Como $y_2 \in E_u(B)$, por (3.61), tem-se

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_B(t,y_2) = O. \tag{3.63}$$

Note que,

$$\varphi_B(t,y_1) = \varphi_B(t,y-y_2) = \varphi_B(t,y) - \varphi_B(t,y_2),$$

daí, por (3.62) e (3.63), obtemos

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_B(t,y_1) = O. \tag{3.64}$$

Se $y_1 \neq O$, como $y_1 \in E_s(B)$, por (3.60), tem-se $\lim_{t\to-\infty} |\varphi_B(t,y_1)| = +\infty$ o que contradiz (3.64). Logo, $y_1 = O$ e, portanto, $y = y_2 \in E_u(B)$. Desta maneira, $h(E_u(A)) \subseteq E_u(B)$. Consideremos, $y \in E_u(B)$, daí por (3.61), tem-se

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_B(t,y) = O. \tag{3.65}$$

Como h é sobrejetiva, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = h(x)$. Como $x \in \mathbb{R}^n$, pelo item 1 da Proposição 3.10, existem $x_1 \in E_s(A)$ e $x_2 \in E_u(A)$ tal que $x = x_1 + x_2$. Note também que, por (3.46) e (3.65), temos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} \varphi_A(t,x) &= \lim_{t\to-\infty} h^{-1}(\varphi_B(t,h(x))) = \lim_{t\to-\infty} h^{-1}(\varphi_B(t,y)) \\ &= h^{-1}\left(\lim_{t\to-\infty} \varphi_B(t,y))\right) = h^{-1}(O) = O. \end{aligned} \tag{3.66}$$

E, como $x_2 \in E_u(A)$, por (3.59),

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi_A(t,x_2) = O. \tag{3.67}$$

Desde que,

$$\varphi_A(t,x_1) = \varphi_A(t,x-x_2) = \varphi_A(t,x) - \varphi_A(t,x_2),$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

daí, por (3.66) e (3.67), obtemos

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi_A(t,x_1)=O. \tag{3.68}$$

Se $x_1\neq O$, como $x_1\in E_s(A)$, por (3.58), tem-se $\lim_{t\to-\infty}|\varphi_A(t,x_1)|=+\infty$ o que contradiz (3.68). Logo, $x_1=O$ e, portanto, $x=x_2\in E_u(A)$. Assim, $E_u(B)\subseteq h(E_u(A))$.

Lema 3.8 (Lema 7 da seção 6 do Capítulo III em (SOTOMAYOR, 1979) e Lema 3.5.4 em (BENAZIC, 2007))**.** Sejam $A_1,B_1\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$ e $A_2,B_2\in\mathbb{R}^{n_2\times n_2}$. Se $A_1\equiv_{\text{top}}B_1$ e $A_2\equiv_{\text{top}}B_2$ então

$$A:=\operatorname{diag}[A_1,A_2]\equiv_{\text{top}}\operatorname{diag}[B_1,B_2]:=B.$$

Demonstração. Como $A_1\equiv_{\text{top}}B_1$ existe $h_1\in\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$h_1(\varphi_{A_1}(t,x_1))=\varphi_{B_1}(t,h_1(x_1)),\text{ para todo }(t,x_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n_1}. \tag{3.69}$$

Também, como $A_2\equiv_{\text{top}}B_2$ existe $h_2\in\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$h_2(\varphi_{A_2}(t,x_2))=\varphi_{B_2}(t,h_2(x_2)),\text{ para todo }(t,x_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n_2}. \tag{3.70}$$

Definamos

$$\begin{aligned} h:\quad \mathbb{R}^{n_1+n_2} &\to \mathbb{R}^{n_1+n_2}\\ (x_1,x_2) &\mapsto h(x_1,x_2)=(h_1(x_1),h_2(x_2)).\end{aligned}$$

Afirmação 3.20. $h\in\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$.

De fato, primeiro vejamos que h é inversível. Basta definir

$$\begin{aligned} g:\quad \mathbb{R}^{n_1+n_2} &\to \mathbb{R}^{n_1+n_2}\\ (y_1,y_2) &\mapsto g(y_1,y_2)=(h_1^{-1}(y_1),h_2^{-1}(y_2)).\end{aligned}$$

Agora, note que, para $(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ tem-se

$$\begin{aligned}(h\circ g)(y_1,y_2) &= h(g(y_1,y_2))=h(h_1^{-1}(y_1),h_2^{-1}(y_2))\\ &=(h_1(h_1^{-1}(y_1)),h_2(h_2^{-1}(y_2)))=(y_1,y_2)\\ &=(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}})(y_1,y_2).\end{aligned}$$

Assim, $h\circ g=\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}$. Analogamente, para $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ temos

$$\begin{aligned}(g\circ h)(x_1,x_2) &= g(h(x_1,x_2))=g(h_1(x_1),h_2(x_2))\\ &=(h_1^{-1}(h_1(x_1)),h_2^{-1}(h_2(x_2)))=(x_1,x_2)\\ &=(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}})(x_1,x_2).\end{aligned}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Daí, $g \circ h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}$. Portanto, h inversível e $g = h^{-1}$. Também, é claro que h e g são contínuas em $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ desde que h_1, h_1^{-1} são contínuas em $\mathbb{R}^{n_1}$ e h_2, h_2^{-1} são contínuas em $\mathbb{R}^{n_2}$.

Finalmente, vejamos que h conjuga A e B. Para $(t,(x_1,x_2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, como h_i conjuga A_i e B_i ($i = 1, 2$), temos

$$\begin{aligned} h(\varphi_A(t,(x_1,x_2))) &= h(e^{tA}(x_1,x_2)) = h(\mathrm{diag}[e^{tA_1}, e^{tA_2}](x_1,x_2)) \\ &= h(e^{tA_1}x_1, e^{tA_2}x_2) \\ &= (h_1(e^{tA_1}x_1), h_2(e^{tA_2}x_2)) \\ &= (e^{tB_1}h_1(x_1), e^{tB_2}h_2(x_2)) = \mathrm{diag}[e^{tB_1}, e^{tB_2}](h_1(x_1), h_2(x_2)) \\ &= e^{tB}h(x_1,x_2) = \varphi_B(t, h(x_1,x_2)). \end{aligned}$$

Teorema 3.3 (Teorema 8 da seção 6 do Capítulo III em (SOTOMAYOR, 1979) e Teorema 3.5.2 em (BENAZIC, 2007))**.** Sejam $A, B \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$. Então, $A \equiv_{\mathrm{top}} B$ se, e só se, $i(A) = i(B)$.

Demonstração. Suponhamos que $i(A) = i(B) = m$ ($0 \leq m \leq n$). Pelo Lema 3.6, $A \equiv_{\mathrm{top}} \mathrm{diag}[A_1, A_2]$ e $B \equiv_{\mathrm{top}} \mathrm{diag}[B_1, B_2]$, onde $A_1, B_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tem todos seus autovalores com parte real negativa e $A_2, B_2 \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ tem todos seus autovalores com parte real positiva. Agora, pelo Teorema 3.1 e Teorema 3.2, $A_1 \equiv_{\mathrm{top}} -I_m$, $B_1 \equiv_{\mathrm{top}} -I_m$, $A_2 \equiv_{\mathrm{top}} I_{n-m}$ e $B_2 \equiv_{\mathrm{top}} I_{n-m}$. Daí, pela Proposição 3.4, $A_1 \equiv_{\mathrm{top}} B_1$ e $A_2 \equiv_{\mathrm{top}} B_2$. Logo, pelo Lema 3.8, tem-se $A = \mathrm{diag}[A_1, A_2] \equiv_{\mathrm{top}} \mathrm{diag}[B_1, B_2] = B$.

Reciprocamente, se $A \equiv_{\mathrm{top}} B$, existe $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ conjugação topológica entre A e B. Daí, pelo Lema 3.3, obtemos $h(E_s(A)) = E_s(B)$ e $h(E_u(A)) = E_u(B)$. Agora, precisamos usar o **Teorema da Invariância da Dimensão** (de Brouwer) que afirma que "um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^s$ e $\mathbb{R}^l$ pode existir se, e só se, $s = l$" ((BROUWER, 1911) e Teorema 3.3 do Capítulo XVII em (DUGUNDJI, 1966)). Portanto,

$$i(A) = \dim E_s(A) = \dim h(E_s(A)) = \dim E_s(B) = i(B).$$

Corolário 3.2. Seja $A \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ com $i(A) = m$ ($0 \leq m \leq n$). Então

$$A \equiv_{\mathrm{top}} \mathrm{diag}[-I_m, I_{n-m}]$$

onde $I_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $I_{n-m} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ são as matrizes identidades.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Demonstração. Como $i(\mathrm{diag}[-I_m, I_{n-m}]) = m = i(A)$, pelo Teorema 3.3, temos o desejado.

Em resumo, abordamos conceitos importantes, tais como o fluxo associado a um sistema linear, a órbita de um ponto definida por esse fluxo e a conjugação entre sistemas lineares. Além disso, realizamos uma análise dos diagramas de fase de sistemas lineares bidimensionais, compreendendo os conceitos de atratores e fontes, os quais foram caracterizados detalhadamente (Teorema 3.1 e Teorema 3.2). Estudamos também o conceito fundamental de sistema linear hiperbólico, ou equivalentemente, de matriz hiperbólica, e definimos o índice de estabilidade de uma matriz. Discutimos a definição dos espaços estáveis e instáveis associados a uma matriz, e como eles descompõem o ambiente. Por fim, demonstramos a equivalência entre sistemas lineares hiperbólicos, estabelecendo que eles são topologicamente conjugados se, e só se, possuem o mesmo índice de estabilidade (Teorema 3.3).

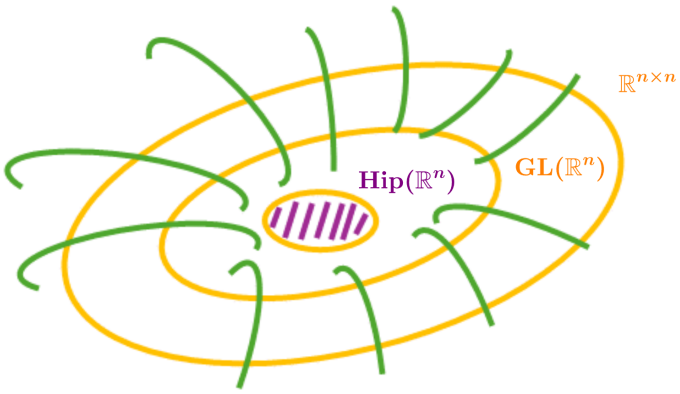
Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

4 ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE CAMPOS LINEARES

Neste capítulo, definiremos o importante conceito de estabilidade estrutural e apresentaremos a equivalência proposta neste trabalho, que muitas vezes é relegada ao exercício por diversos autores ou simplesmente não é mencionada. A principal referência deste capítulo é (BENAZIC, 2007).

Na seção final do capítulo anterior, realizamos uma classificação das matrizes hiperbólicas em $\mathbb{R}^{n\times n}$. Até o momento, não há uma classificação topológica das matrizes com parte real nula. Portanto, surge a questão: Qual é a "magnitude" do conjunto que falta classificar? Em outras palavras, qual é o "tamanho" de $\mathbb{R}^{n\times n} - \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ (Figura 29)?

Figura 29 – $\mathbb{R}^{n\times n} - \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$



Fonte: Elaboração do autor

No que segue, denotaremos por $D_r(z_0) \subseteq \mathbb{C}$ (respectivamente, $D_r[z_0] \subseteq \mathbb{C}$) ao *disco aberto* (respectivamente, *fechado*) centrado em $z_0 \in \mathbb{C}$ e de raio $r > 0$, isto é,

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < r\} \text{ e } D_r[z_0] = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| \leq r\}$$

onde $|\cdot|$ é a norma usual complexa em $\mathbb{C}$. Também, denotaremos por $\sigma(A)$ ao conjunto de todos os autovalores da matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o qual é chamado de *espectro de* A.

Lema 4.1 (Lema 3.6.1 em (BENAZIC, 2007))**.** Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\|B - A\| < \delta$ então

$$\sigma(B) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\sigma(A)} D_\varepsilon(\lambda) \text{ (Figura 30).}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Figura 30 – $\sigma(B)$ contido em discos abertos centrados em $\lambda \in \sigma(A)$

Fonte: Elaboração do autor

Demonstração.

Afirmação 4.1. Dado $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se $\lambda \in \sigma(B)$ então $|\lambda| \leq \|B\|$.

De fato, se $\lambda \in \sigma(B)$ então existe $v \neq O$ tal que $Bv = \lambda v$. Daí,

$$|\lambda| \cdot |v| = |\lambda v| = |Bv| \leq \|B\| \cdot |v|| \Rightarrow |\lambda| \leq \|B\|.$$

Afirmação 4.2. Se $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|B - A\| < 1$ então

$$\sigma(B) \subseteq D_{\|A\|+1}[0] =: D.$$

De fato, seja $\lambda \in \sigma(B)$, pela Afirmação 4.1 então

$$|\lambda| \leq \|B\| = \|(B - A) + A\| \leq \|B - A\| + \|A\| < 1 + \|A\|$$

daí, $\lambda \in D$.

Dado $\varepsilon > 0$, denotemos

$$V_\varepsilon = \bigcup_{\lambda\in\sigma(A)} D_\varepsilon(\lambda).$$

Agora, note que se $\mu \in D - V_\varepsilon$ então $\mu \in \sigma(A)$ daí, $\det(A - \mu I_n) \neq 0$. Isto motiva definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} \Phi: \quad \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n\times n} &\to \mathbb{C} \\ (\mu, B) &\mapsto \Phi(\mu, B) = \det(B - \mu I_n). \end{aligned}$$

Consideremos agora em $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n\times n}$ a norma do máximo (ver Exemplo 8 em (LIMA, 2011))

$$\|(\mu, B)\| = \max\{|\mu|, \|B\|\}.$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Afirmação 4.3. Φ é contínua em $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n\times n}$.

De fato, como a função determinante $\det : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$ é contínua (ver Exemplo 27 do Capítulo em (LIMA, 2011)) segue-se a afirmação.

Já vimos que se $\mu \in D - V_\varepsilon$ temos que $\Phi(\mu, A) \neq 0$. Logo, por continuidade de Φ, existe $\delta_\mu > 0$ tal que se $\|(\eta, B) - (\mu, A)\| < \delta_\mu$ então $\Phi(\eta, B) \neq 0$, o que implica, $\eta \notin \sigma(B)$. Por outro lado, como claramente

$$D - V_\varepsilon \subseteq \bigcup_{\mu\in D-V_\varepsilon} D_{\delta_\mu}(\mu)$$

e como $D - V_\varepsilon$ é compacto existem $\mu_1, \ldots, \mu_r \in D - V_\varepsilon$ tal que

$$D - V_\varepsilon \subseteq D_{\delta_{\mu_1}}(\mu_1) \cup \cdots \cup D_{\delta_{\mu_r}}(\mu_r). \tag{4.1}$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_{\mu_1}, \ldots, \delta_{\mu_r}, 1\} > 0$. Dado $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|B - A\| < \delta$. Se $\mu \in D - V_\varepsilon$, por (4.1), existe $j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $\mu \in D_{\mu_j}(\mu_j)$ e como $\|B - A\| < \delta_{\mu_j}$, por construção, tem-se $\mu \notin \sigma(B)$. Portanto,

$$D - V_\varepsilon \subseteq D - \sigma(B),$$

equivalentemente, $\sigma(B) \subseteq V_\varepsilon$.

Teorema 4.1 (Teorema 3.6.1 em (BENAZIC, 2007))**.** $\mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto aberto e denso de $\mathbb{R}^{n\times n}$ ($\mathbb{R}^{n\times n}$ com a topologia induzida pela norma uniforme).

Demonstração.

Afirmação 4.4. $\mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ é aberto em $\mathbb{R}^{n\times n}$.

De fato, seja $A \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$, tomemos $0 < \varepsilon < \min\{|\operatorname{Re}(\lambda)|;\ \lambda \in \sigma(A)\}$. Pelo Lema 4.1, existe $\delta > 0$ tal que se $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\|B - A\| < \delta$ então

$$\sigma(B) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\sigma(A)} D_{\varepsilon/2}(\lambda). \tag{4.2}$$

Se $\mu \in \sigma(B)$, por (4.2), existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $\mu \in D_{\varepsilon/2}(\lambda)$. Agora, como

$$|\operatorname{Re}(\lambda)| = |\operatorname{Re}(\lambda - \mu) + \operatorname{Re}(\mu)| \leq |\operatorname{Re}(\lambda - \mu)| + |\operatorname{Re}(\mu)| = |\operatorname{Re}(\mu - \lambda)| + |\operatorname{Re}(\mu)|$$

daí, tem-se

$$|\operatorname{Re}(\mu)| \geq |\operatorname{Re}(\lambda)| - |\operatorname{Re}(\mu - \lambda)| \geq |\operatorname{Re}(\lambda)| - |\mu - \lambda| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

logo, $\mathrm{Re}(\mu) \neq 0$. Portanto, $B \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$. Assim, mostramos que existe $\delta > 0$ tal que se $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\|B - A\| < \delta$ então $B \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$. O que conclui a afirmação.

Afirmação 4.5. $\mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Sejam $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\varepsilon > 0$ por demonstrar que existe $A \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|B - A\| < \varepsilon$. Definimos

$$\sigma_1 = \{\lambda \in \sigma(B);\ \mathrm{Re}(\lambda) = 0\} \ \text{ e } \ \sigma_2 = \{\lambda \in \sigma(B);\ \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0\}.$$

Claramente, $\sigma(B) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, onde a união é disjunta. Se $\sigma_1 = \emptyset$ então $\sigma(B) = \sigma_2$ daí, $B \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$. Assim, podemos supor sem perda de generalidade que $\sigma_1 \neq \emptyset$. Seja

$$\delta = \min\{|\,\mathrm{Re}(\lambda)|;\ \lambda \in \sigma_2\} > 0, \tag{4.3}$$

consideremos $0 < r < \min\{\varepsilon, \delta\}$ e $A = B + rI_n$. Se $\lambda \in \sigma(A)$ então existe $v \neq O$ tal que $Av = \lambda v$ logo $(B + rI_n)v = \lambda v$, daí, $Bv = (\lambda - r)v$, assim $\lambda - r \in \sigma(B) = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Agora, temos duas possibilidades:

- Se $\lambda - r \in \sigma_1$ então $\mathrm{Re}(\lambda - r) = 0$ daí $\mathrm{Re}(\lambda) = r > 0$.
- Se $\lambda - r \in \sigma_2$ então $\mathrm{Re}(\lambda - r) \neq 0$ assim por (4.3) temos $|\,\mathrm{Re}(\lambda - r)| \geq \delta$. Segue-se

$$|\,\mathrm{Re}(\lambda)| = |\,\mathrm{Re}(\lambda - r) + r| \geq |\,\mathrm{Re}(\lambda - r)| - r \geq \delta - r > 0.$$

Em qualquer caso, temos que $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ daí $\|B - A\| = r < \varepsilon$ e $A \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 4.1. Dizemos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é *estruturalmente estável* se, e só se, existe $\delta > 0$ tal que $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\|B - A\| < \delta$ então $B \equiv_{\mathrm{top}} A$.

Intuitivamente, uma matriz é estruturalmente estável se, ao “perturbar um pouco” a configuração de suas órbitas, ela não se altera, exceto por homeomorfismos.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\lambda \in \sigma(A)$, denotaremos por $m = m(\lambda)$ à multiplicidade algébrica de λ (i.e., $m(\lambda)$ é o número de vezes que λ é raiz do polinômio característico de A). Pelo **Teorema de Decomposição Primaria** é satisfeito que $\dim E_m(A;\lambda) = \dim \mathrm{Nu}((A - \lambda I_n)^m) = m$ (ver Teorema 12 do Capítulo 6 em (HOFFMAN; R., 1971) e Teorema 4.2 do Capítulo XI em (LANG, 1987)).

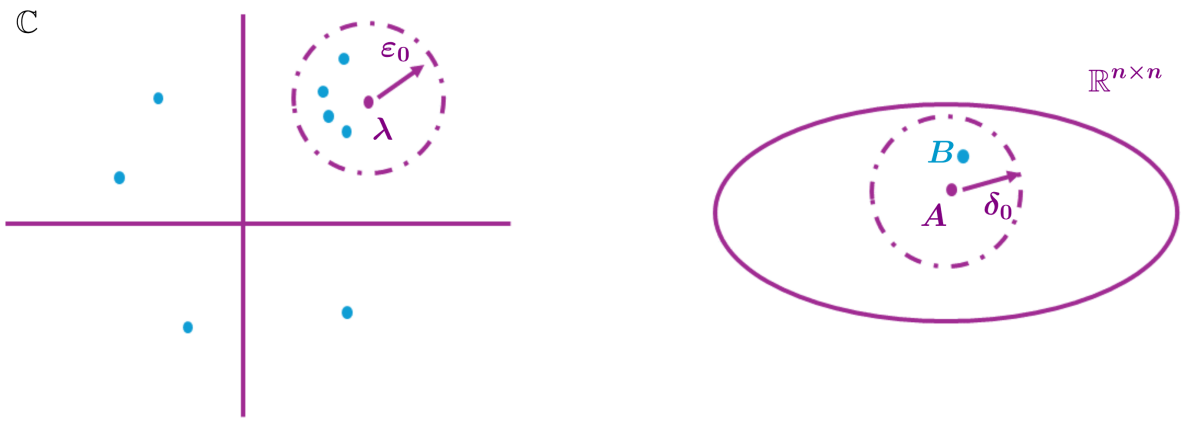
Não difícil verificar que $\mathrm{Nu}((A - \lambda I_n)^k) = \mathrm{Nu}((A - \lambda I_n)^m)$ para todo $k \geq m$.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Lema 4.2 (Lema 3.6.2 em (BENAZIC, 2007))**.** Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\lambda \in \sigma(A)$ com $m(\lambda) = m$. Então existem constantes $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que se $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\|B - A\| < \delta_0$ então

$$\sum_{\mu\in\sigma(B)\cap D_{\varepsilon_0}(\lambda)} m(\mu) \leq m \text{ (Figura 31).}$$

Figura 31 – Desigualdade de multiplicidades



Fonte: Elaboração do autor

Demonstração. Suponhamos por absurdo, que para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $\delta > 0$, existe $B_\delta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\|B - A\| < \delta$ e

$$\sum_{\mu\in\sigma(B_\delta)\cap D_\varepsilon(\lambda)} m(\mu) > m.$$

Para, $\varepsilon = \delta = \dfrac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$ existe $B_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\|B_k - A\| < \dfrac{1}{k}$ e

$$\sum_{\mu\in\sigma(B_k)\cap D_{1/k}(\lambda)} m(\mu) > m.$$

Desta maneira, construímos $(B_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que

$$\lim_{k\to\infty} B_k = A \tag{4.4}$$

e $\mu_{k,1}, \mu_{k,2}, \ldots, \mu_{k,m_k} \in \sigma(B_k)$ (repetidos de acordo com sua multiplicidade) com

$$|\mu_{k,j} - \lambda| < \frac{1}{k},\ (1 \leq j \leq m_k), \tag{4.5}$$

então temos

$$m(\mu_{k,1}) + m(\mu_{k,2}) + \ldots + m(\mu_{k,m_k}) > m,$$

daí, segue-se

$$m_k > m \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Pelo Princípio da Boa Ordenação (Teorema 1 do Capítulo 2 em (LIMA, 2009)), existe $m' = \min\{m_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ e, por (4.6), temos

$$m' > m. \tag{4.7}$$

Por outro lado, para $k \in \mathbb{N}$, denotemos

$$C_k = (B_k - \mu_{k,1} I_n)(B_k - \mu_{k,2} I_n) \dots (B_k - \mu_{k,m'} I_n), \tag{4.8}$$

daí, pelo Teorema 4.1 do Capítulo XI em (LANG, 1987), $\dim \mathrm{Nu}(C_k) = m'$. Consideremos agora $\{e_{k,1}, \dots, e_{k,m'}\}$ base ortonormal de $\mathrm{Nu}(C_k)$. Desde que $(e_{k,1}), \dots, (e_{k,m'}) \subseteq S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| = 1\}$ (a esfera n-dimensional unitária centrada na origem de $\mathbb{R}^n$). Como S^{n-1} é compacto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 5 do Capítulo 1 em (LIMA, 2015)), tomando subsequências se necessário, podemos supor que existam $e_1, \dots, e_{m'} \in S^{n-1}$, tais que

$$\lim_{k\to\infty} e_{k,j} = e_j \ \ (1 \leq j \leq m'). \tag{4.9}$$

Seja $N = S(\{e_1, \dots, e_{m'}\})$. Por, (4.4) e (4.5) em (4.8), obtemos

$$\lim_{k\to\infty} C_k = (A - \lambda I_n)^{m'} =: C. \tag{4.10}$$

Afirmação 4.6. $N \subseteq \mathrm{Nu}(C)$.

De fato, para $1 \leq j \leq m'$ e $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} 0 \leq |Ce_j| &= |(Ce_j - C_k e_j) + (C_k e_j - C_k e_{k,j}) + C_k e_{k,j}| \\ &\leq |Ce_j - C_k e_j| + |C_k e_j - C_k e_{k,j}| + |C_k e_{k,j}| \\ &\leq \|C - C_k\| \cdot |e_j| + \|C_k\| \cdot |e_j - e_{k,j}|. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Tomando limite quando $k \to \infty$, na última desigualdade de (4.11), por (4.9) e (4.10), obtemos $|Ce_j| = 0$ para todo $1 \leq j \leq m'$, daí, $Ce_j = O$ para todo $1 \leq j \leq m'$. Assim, $e_j \in \mathrm{Nu}(C)$ para todo $1 \leq j \leq m'$. O que mostra a afirmação.

Finalmente, como $N = S(\{e_1, \dots, e_{m'}\})$, por (4.7) e pela Afirmação 4.6, obtemos

$$m' = \dim N \leq \dim \mathrm{Nu}(C) = \dim \mathrm{Nu}((A - \lambda)^{m'}) = \dim \mathrm{Nu}((A - \lambda)^m) = m.$$

O que contradiz (4.7).

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Teorema 4.2 (Teorema 3.6.2 em (BENAZIC, 2007))**.** Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ com $m(\lambda_j) = m_j$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\|B - A\| < \delta$ então

$$\sum_{\mu\in\sigma(B)\cap D_\varepsilon(\lambda_j)} m(\mu) = m_j, \text{ para todo } 1 \leq j \leq k.$$

Demonstração. Suponhamos por absurdo, que existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$\begin{gathered}\text{para todo } \delta > 0 \text{ existe } B_\delta \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ com } \|B_\delta - A\| < \delta \\ \text{e existe } j_0 \in \{1, \ldots, k\} \text{ tal que } \sum_{\mu\in\sigma(B_\delta)\cap D_{\varepsilon_1}(\lambda_{j_0})} m(\mu) \neq m_{j_0}.\end{gathered} \tag{4.12}$$

Pelo Lema 4.2, existe $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tal que

$$\text{se } B \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ e } \|B - A\| < \delta_0 \text{ então } \sum_{\mu\in\sigma(B)\cap D_{\varepsilon_0}(\lambda)} m(\mu) \leq m_j \text{ para } j = 1, \ldots, k. \tag{4.13}$$

Consideremos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\} > 0$, assim, pelo Lema 4.1, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } B \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ com } \|B - A\| < \delta_1 \text{ então } \sigma(B) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} D_\varepsilon(\lambda_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} D_{\varepsilon_1}(\lambda_j). \tag{4.14}$$

Agora, seja $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0$. Para $B_\delta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ em (4.12), por (4.13), tem-se

$$\sum_{\mu\in\sigma(B_\delta)\cap D_\varepsilon(\lambda_{j_0})} m(\mu) < m_{j_0}. \tag{4.15}$$

Dai, para o $B_\delta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ em (4.12), por (4.13), (4.14) e (4.15), obtemos

$$\begin{aligned} n = \sum_{\mu\in\sigma(B_\delta)} m(\mu) &= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{\mu\in\sigma(B_\delta)\cap D_\varepsilon(\lambda_j} m(\mu) \right) \\ &< m_{j_0} + \sum_{1\leq j\neq j_0\leq k} \left(\sum_{\mu\in\sigma(B_\delta)\cap D_\varepsilon(\lambda_j} m(\mu) \right) \\ &\leq m_{j_0} + \sum_{1\leq j\neq j_0\leq k} m_j = \sum_{j=1}^{k} m_j = n \end{aligned}$$

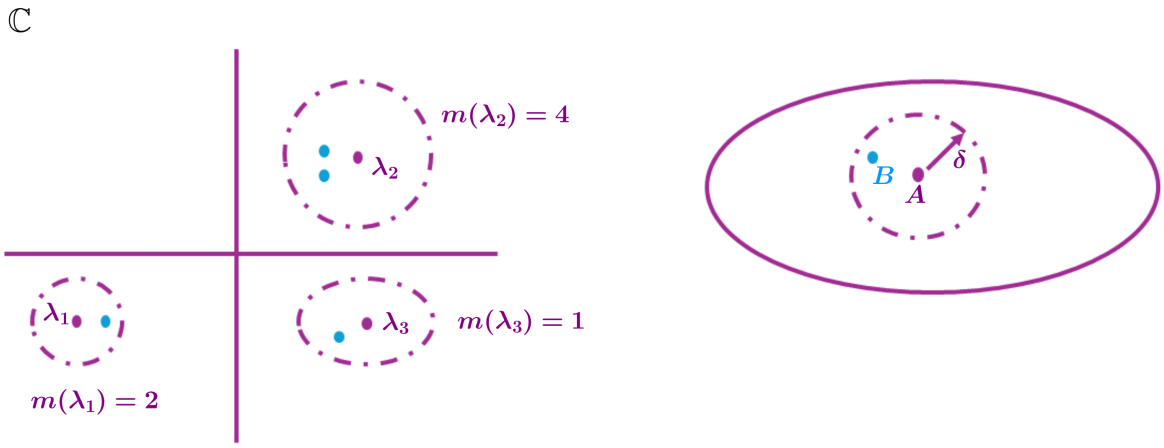
o que é uma contradição.

Corolário 4.1. Se $A \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ então existe $\delta > 0$ tal que se $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\|B - A\| < \delta$ então $i(A) = i(B)$ (Figura 32).

Demonstração. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \sigma(A)$ com $m(\lambda_j) = m_j$, ordenados de tal maneira que os r-primeiros tem parte real negativa ($0 \leq r \leq k$).

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Figura 32 – Autovalores com parte real negativa



Fonte: Elaboração do autor

Tomando $0 < \varepsilon < \min\{|\operatorname{Re}(\lambda_j)|;\ 1 \leq j \leq k\}$. Note que com a escolha de ε temos o seguinte:

- Se $\mu \in \bigcup_{j=1}^{r} D_\varepsilon(\lambda_j)$ então existe $j_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $\mu \in D_\varepsilon(\lambda_{j_0})$, daí tem-se

$$\operatorname{Re}(\mu) = \operatorname{Re}(\mu - \lambda_{j_0}) + \operatorname{Re}(\lambda_{j_0}) \leq |\mu - \lambda_{j_0}| + \operatorname{Re}(\lambda_{j_0}) < \varepsilon + \operatorname{Re}(\lambda_{j_0}) < 0. \quad (4.16)$$

- Se $\mu \in \bigcup_{j=r+1}^{k} D_\varepsilon(\lambda_j)$ então existe $j_0 \in \{r+1, \ldots, k\}$ tal que $\mu \in D_\varepsilon(\lambda_{j_0})$, daí tem-se

$$\operatorname{Re}(\mu) = \operatorname{Re}(\mu - \lambda_{j_0}) + \operatorname{Re}(\lambda_{j_0}) > -|\mu - \lambda_{j_0}| + \operatorname{Re}(\lambda_{j_0}) > \operatorname{Re}(\lambda_{j_0}) - \varepsilon > 0. \quad (4.17)$$

Agora, pelo Teorema 4.2, existe $\delta > 0$ tal que se $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\|B - A\| < \delta$ então

$$\sum_{\mu \in \sigma(B) \cap D_\varepsilon(\lambda_j)} m(\mu) = m_j, \text{ para todo } 1 \leq j \leq k. \quad (4.18)$$

Segue de (4.16), (4.17) e (4.18) que $i(B) = i(A)$.

Finalmente, mostraremos a seguir o resultado principal deste trabalho.

Teorema 4.3 (Exercício 31 do Capítulo III em (SOTOMAYOR, 1979) e Teorema 3.6.3 em (BENAZIC, 2007))**.** $A \in \operatorname{Hip}(\mathbb{R}^n)$ se, e só se, A é estruturalmente estável.

Demonstração. Suponhamos que $A \in \operatorname{Hip}(\mathbb{R}^n)$, pelo Corolário 4.1, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } B \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ com } \|B - A\| < \delta_1 \text{ então } i(A) = i(B). \quad (4.19)$$

Por outro lado, pelo Teorema 4.1, $\operatorname{Hip}(\mathbb{R}^n)$ é aberto, logo existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } B \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ com } \|B - A\| < \delta_2 \text{ então } B \in \operatorname{Hip}(\mathbb{R}^n). \quad (4.20)$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ temos que se $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com $\|B - A\| < \delta$, por (4.19) e (4.20), obtemos $B \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ e $i(A) = i(B)$. Segue-se do Teorema 3.3, $A \equiv_{\mathrm{top}} B$.

Reciprocamente, suponhamos que A é estruturalmente estável. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } B \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ com } \|B - A\| < \delta \text{ então } A \equiv_{\mathrm{top}} B. \tag{4.21}$$

Vamos supor por absurdo que $A \notin \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$. Consideremos os conjuntos

$$\sigma_1 = \{\lambda \in \sigma(A);\ \mathrm{Re}(\lambda) = 0\} \ \text{ e } \ \sigma_2 = \{\lambda \in \sigma(A);\ \mathrm{Re}(\lambda) \neq 0\}.$$

Claramente, $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, onde a união é disjunta. Como $A \notin \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ temos que $\sigma_1 \neq \emptyset$. Assim, temos duas possibilidades:

- Se $\sigma_2 = \emptyset$ então todos os autovalores de A tem parte real nula. Para $0 < r < \delta$, tem-se $A + rI_n$ tem todos os autovalores com parte real positiva e $A - rI_n$ tem todos os autovalores com parte real negativa. Logo, $A + rI_n,\ A - rI_n \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$ com $i(A + rI_n) = 0$ e $i(A - rI_n) = n$. Mas, por (4.21), tem-se que $A \equiv_{\mathrm{top}} (A + rI_n)$ e $A \equiv_{\mathrm{top}} (A - rI_n)$. Logo, pela Proposição 3.4, $(A + rI_n) \equiv_{\mathrm{top}} (A - rI_n)$ e pelo Teorema 3.3, $i(A + rI_n) = i(A - rI_n)$ o que é absurdo.

- Se $\sigma_2 \neq \emptyset$, consideremos $\delta_0 = \min\{|\,\mathrm{Re}(\lambda)|; \lambda \in \sigma_2\} > 0$. Seja $0 < r < \min\{\delta, \delta_0\}$.

  Afirmação 4.7. $A + rI_n,\ A - rI_n \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$.

  De fato, suponha que exista $\mu \in \sigma(A + rI_n)$ tal que $\mathrm{Re}(\mu) = 0$. Logo, $\mu - r \in \sigma(A)$ e assim temos

  $$\mathrm{Re}(\mu - r) = \mathrm{Re}(\mu) - r = -r < 0$$

  daí, $\mu - r \in \sigma_2(A)$ o que implica

  $$\delta_0 \leq |\,\mathrm{Re}(\mu - r)| = |-r| = r$$

  o que é absurdo. Analogamente, se existe $\mu \in \sigma(A - rI_n)$ tal que $\mathrm{Re}(\mu) = 0$. Logo, $\mu + r \in \sigma(A)$ e assim tem-se

  $$\mathrm{Re}(\mu + r) = \mathrm{Re}(\mu) + r = r > 0$$

  daí, $\mu + r \in \sigma_2(A)$ o que implica

  $$\delta_0 \leq |\,\mathrm{Re}(\mu + r)| = |r| = r$$

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

o que é absurdo. O que prova a afirmação.

Agora, como $r < \delta$, por (4.21), tem-se que $A \equiv_{\text{top}} (A + rI_n)$ e $A \equiv_{\text{top}} (A - rI_n)$. Logo, novamente pela Proposição 3.4, $(A + rI_n) \equiv_{\text{top}} (A - rI_n)$ e pelo Teorema 3.3, $i(A + rI_n) = i(A - rI_n)$. Por outro lado, como $\sigma_1 \neq \emptyset$ existe $\lambda_0 \in \sigma_1$, isto é, $\lambda_0 \in \sigma(A)$ e $\mathrm{Re}(\lambda_0) = 0$. Logo,

$$\lambda_0 + r \in \sigma(A + rI_n) \text{ com } \mathrm{Re}(\lambda_0 + r) = \mathrm{Re}(\lambda_0) + r = r > 0 \tag{4.22}$$

e,

$$\lambda_0 - r \in \sigma(A - rI_n) \text{ com } \mathrm{Re}(\lambda_0 - r) = \mathrm{Re}(\lambda_0) - r = -r < 0. \tag{4.23}$$

Afirmação 4.8. Se $i(A + rI_n) = m$, $0 \leq m \leq k$ então $i(A - rI_n) \geq m + 1$.

De fato, seja $\mu \in \sigma(A + rI_n)$ com $\mathrm{Re}(\mu) < 0$. Logo, $\mu - 2r \in \sigma(A - rI_n)$ e

$$\mathrm{Re}(\mu - 2) = \mathrm{Re}(\mu) - 2r < 0.$$

Dai, temos que $i(A - rI_n) \geq m$, mas por (4.22) e(4.23), temos que $i(A - rI_n) \geq m + 1$. O que prova a afirmação.

Finalmente, da última afirmação temos que $i(A + rI_n) \neq i(A - rI_n)$ o que é um absurdo.

Em qualquer caso, obtemos um absurdo. Portanto, $A \in \mathrm{Hip}(\mathbb{R}^n)$.

Em resumo, para demonstrar a equivalência proposta neste trabalho, foi necessário provar vários outros resultados importantes. Entre eles, destaca-se a demonstração de que o conjunto das matrizes hiperbólicas é aberto e denso no espaço das matrizes, com a topologia induzida pela norma uniforme. Além disso, foi crucial compreender como aproximar uma matriz hiperbólica por outra matriz com o mesmo índice de estabilidade.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, buscamos explorar a equivalência entre sistemas lineares hiperbólicos e sistemas lineares estruturalmente estáveis, partindo da motivação histórica que impulsionou o estudo das equações diferenciais ordinárias desde os tempos de Newton e Leibniz. Nosso objetivo foi compreender como as soluções de tais sistemas se comportam diante de pequenas perturbações e como isso se relaciona com a estabilidade estrutural, uma questão fundamental em diversas áreas da matemática aplicada, engenharia e física.

Iniciamos nossa jornada revisando os fundamentos teóricos necessários para abordar essa problemática, explorando conceitos como espaços vetoriais, transformações lineares, autovalores e autovetores, além de técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias. Aprofundamos nossa análise na teoria qualitativa de sistemas lineares, introduzindo a noção de matriz hiperbólica e estabilidade estrutural, essenciais para entender o comportamento dinâmico desses sistemas.

Durante nossa investigação, estudamos sistemas lineares com coeficientes constantes, tanto homogêneos quanto não homogêneos, e apresentamos uma análise detalhada da Forma Canônica de Jordan, uma ferramenta poderosa para compreender a evolução temporal dos sistemas lineares. Além disso, dedicamos esforços para demonstrar a equivalência entre sistemas lineares hiperbólicos e sistemas lineares estruturalmente estáveis.

É importante ressaltar que a compreensão da estabilidade estrutural não apenas enriquece o conhecimento teórico, mas também tem implicações significativas, na prática. A capacidade de prever o comportamento de sistemas dinâmicos, projetar sistemas robustos e eficientes, e controlar processos industriais complexos é essencial em diversos contextos, desde a engenharia até a física aplicada.

Portanto, concluímos que o estudo da equivalência entre sistemas lineares hiperbólicos e sistemas lineares estruturalmente estáveis não apenas contribui para o avanço do conhecimento científico, mas também oferece ferramentas valiosas para enfrentar desafios complexos em diversas áreas de aplicação.

Um possível estudo futuro seria estudar os chamados campos de Morse-Smale em variedades diferenciáveis compactas. Palis e Smale, mostram que campos de

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

Morse-Smale definidos numa variedade diferenciável compacta são estruturalmente estáveis (Teorema 5.2 em (PALIS; SMALE, 1970)).

Outro estudo interessante seria o artigo de Guckenheimer, no qual ele mostra que se uma matriz A está no domínio de Poincaré hiperbólico, seu sistema linear complexo associado tem uma vizinhança no espaço dos campos vetoriais lineares complexos tal que se um campo está nessa vizinhança, então seus fluxos se comportam da mesma maneira que o campo associado a A, do ponto de vista topológico (Teorema principal em (GUCKENHEIMER, 1972)).

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16

REFERÊNCIAS

BENAZIC, R. ***Tópicos de ecuaciones diferenciales ordinarias.*** 1. ed. Lima: UNI, 2007.

BROUWER, L. E. J. Beweis der invarianz des n-dimensionalen Gebiets. ***Mathematische Annalen***, v. 71, n. 3, p. 305–313, 1911.

DUGUNDJI, J. ***Topology***. 1. ed. Boston: Allyn and Bacon, 1966.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. ***Elementos de álgebra***. 5. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides-IMPA, 2010.

GUCKENHEIMER, J. Hartman's theorem for complex flows in the Poincaré domain. ***Compositio Mathematica***, v. 24, n. 1, p. 75–82, 1972.

HIRSCH, M.; SMALE, S. ***Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.*** 1. ed. New York: Academic Press, 1974.

HOFFMAN, K.; R., K. ***Linear Algebra.*** 2. ed. New Jersey: Prenti-ce-Hall, 1971.

LANG, S. ***Linear Algebra***. 3. ed. New York: Graduate Texts in Mathematics-Springer, 1987.

LEÓN, V.; SCÁRDUA, B. ***Equações Diferencias: Um Curso Universitário - Parte I: Equações Ordinárias***. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2022.

LIMA, E. L. ***Curso de Análise*** *vol.1*. 12. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2009.

LIMA, E. L. ***Espaços Métricos***. 4. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2011.

LIMA, E. L. ***Curso de Análise*** *vol.2*. 11. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2015.

PALIS, J.; SMALE, S. Structural Stability Theorems. ***AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics***, v. 14, p. 223–232, 1970.

PERKO, L. ***Differential Equations and Dynamical Systems***. 3. ed. New York: Texts in Applied Mathematics 7-Springer, 2001.

SOTOMAYOR, J. ***Lições de Equações Diferenciais Ordinárias***. 1. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides-IMPA, 1979.

Versão Final Homologada
27/04/2024 20:16