



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE
TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA E TERRITÓRIO
(ILATIT)**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO Em
ENGENHARIA CIVIL (PPG ECI)**

**FORMULAÇÃO POSICIONAL DE UM ELEMENTO AXIAL CURVILÍNEO COM
REGULARIZAÇÃO ESPECTRAL DA HESSIANA EM ANÁLISE NÃO LINEAR
GEOMÉTRICA**

JEDSON CORREA LEITE

Foz do Iguaçu
2026

**FORMULAÇÃO POSICIONAL DE UM ELEMENTO AXIAL CURVILÍNEO COM
REGULARIZAÇÃO ESPECTRAL DA HESSIANA EM ANÁLISE NÃO LINEAR
GEOMÉTRICA**

JEDSON CORREA LEITE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Aref Kalilo Lima Kzam

JEDSON CORREA LEITE

**FORMULAÇÃO POSICIONAL DE UM ELEMENTO AXIAL CURVILÍNEO COM
REGULARIZAÇÃO ESPECTRAL DA HESSIANA EM ANÁLISE NÃO LINEAR
GEOMÉTRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Aref Kalilo Lima Kzam
UNILA

Prof. Dr. Ulises Bobadilla Guadalupe
UNILA

Prof. Dr. Ivan Dario Gomez Araujo
UNILA

Prof. Dr. Wilson Wesley Wutzow
UEM

Foz do Iguaçu, 20 de agosto de 2026.

Catálogo elaborado pelo Setor de Tratamento da Informação
Catálogo de Publicação na Fonte. UNILA - BIBLIOTECA LATINO-AMERICANA - CENTRAL

L533

Leite, Jedson Correa.

Formulação posicional de um elemento axial curvilíneo com regularização espectral da Hessiana em análise não linear geométrica / Jedson Correa Leite. - Foz do Iguaçu, 2026.

151 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Foz do Iguaçu - PR, 2026.

Orientador: Aref Kalilo Lima Kzam.

1. Análise estrutural (Engenharia) - Formulação posicional. 2. Análise estrutural (Engenharia) - Elemento axial curvilíneo. 3. Teorias não-lineares - Não linearidade geométrica. 4. Engenharia de estruturas - Hessiana. 5. Modelos matemáticos - Regularização espectral. 6. Engenharia de estruturas - Análise estática não-linear. I. Kzam, Aref Kalilo Lima. II. Título.

CDU 624

Dedico este trabalho a toda minha
família, minha base em todos os
momentos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, Dono de toda sabedoria e conhecimento, é Ele quem tem disposto ao homem a possibilidade de desvendar os mistérios presentes na natureza visível. Ao seu cuidado paternal e refúgio nas horas impossíveis. A Ele o devido louvor.

Ao professor Doutor Aref Kalilo Lima Kzam, que originou a pesquisa científica aqui desenvolvida, que me influenciou a buscar o conhecimento tão específico de MEF, e ainda, quem me acompanhou do início ao fim desta dissertação, o meu muito obrigado!

A minha família, pelo amor e pela compreensão de sempre, por entenderem os momentos de ausência durante esses dois anos de pesquisa, também pelo incentivo na continuidade dos meus estudos, desde os anos iniciais.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal da Integração Latino-Americana – UNILA, pelos conhecimentos transmitidos, pelas contribuições acadêmicas e pelo incentivo à pesquisa e ao desenvolvimento científico.

Aos meus colegas da Prefeitura Universitária, amigos em comum da área técnica desta Universidade, por todo o incentivo para iniciar e continuar a pesquisa de mestrado até aqui desenvolvida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Soli Deo Gloria

*'De tudo o que se ouviu, a conclusão é esta: tema
a Deus e guarde os seus mandamentos, porque
isto é o dever de cada pessoa. '*

Eclesiastes 12:13

RESUMO

Esta dissertação desenvolve uma formulação posicional parametrizada para um elemento axial curvilíneo bidimensional aplicado à análise estática não linear geométrica. A proposta parte da descrição da linha média do elemento no domínio adimensional $\xi \in [-1,1]$, por meio de funções de forma de Lagrange de ordem arbitrária, permitindo interpolar de modo isoparamétrico as configurações inicial e atual. A partir dessa cinemática são definidos os vetores tangentes, as métricas locais de comprimento, os jacobianos geométricos inicial e atual, o alongamento local e a deformação de Green–Lagrange uniaxial. A energia de deformação é formulada no comprimento inicial, conduzindo, por diferenciação energética, à força interna nodal consistente e à Hessiana material–geométrica do elemento. Mostra-se que o elemento reto de dois nós é recuperado como caso particular da formulação, preservando a estrutura clássica do elemento posicional de treliça, enquanto aproximações de ordem superior fornecem uma base cinemática adequada para elementos axiais curvilíneos compatíveis com a modelagem de cabos sem rigidez flexional. Além da construção cinemática e energética do elemento, esta dissertação propõe uma estratégia de regularização espectral mínima da Hessiana para o tratamento do mau condicionamento que pode surgir em problemas estáticos envolvendo elementos axiais curvilíneos sem energia de flexão. A ausência de rigidez flexional, embora coerente com a idealização mecânica de cabos, pode produzir modos quase nulos na matriz tangente, dificultando a solução incremental por métodos de Newton–Raphson, controle de deslocamento ou comprimento de arco. A estratégia proposta atua no sistema incremental, elevando seletivamente apenas os autovalores positivos abaixo de um limite mínimo admissível, definido a partir de um número de condição prescrito. Dessa forma, a regularização controla o condicionamento numérico da Hessiana sem alterar a equação de equilíbrio original, nem introduzir forças estabilizantes permanentes no resíduo físico. A formulação também incorpora cargas nodais e distribuídas conservativas, permitindo tratar carregamentos aplicados ao longo da configuração inicial do elemento. Como resultado, estabelece-se um fundamento teórico unificado para a análise estática de barras axiais retas e cabos flexíveis, com potencial para implementação computacional em códigos de Método dos Elementos Finitos Posicional e para estudos posteriores de validação, refinamento e estabilidade numérica.

Palavras-chave: formulação posicional; elemento axial curvilíneo; cabos; não linearidade geométrica; energia de deformação; Hessiana; regularização espectral; análise estática não linear.

ABSTRACT

This dissertation develops a parametrized positional formulation for a two-dimensional curvilinear axial element applied to geometrically nonlinear static analysis. The proposed formulation describes the element centerline in the dimensionless domain $\xi \in [-1,1]$ by means of Lagrange shape functions of arbitrary order, allowing the initial and current configurations to be interpolated in an isoparametric manner. From this kinematic description, tangent vectors, local length metrics, the initial and current geometric Jacobians, the local stretch, and the uniaxial Green–Lagrange strain are defined. The strain energy is formulated with respect to the initial length, leading, through energetic differentiation, to the consistent nodal internal force and to the material–geometric Hessian of the element. It is shown that the straight two-node element is recovered as a particular case of the formulation, preserving the classical structure of the positional truss element, whereas higher-order approximations provide a suitable kinematic basis for curvilinear axial elements compatible with the modeling of cables without bending stiffness. In addition to the kinematic and energetic construction of the element, this dissertation proposes a minimum spectral regularization strategy for the Hessian in order to address the ill-conditioning that may arise in static problems involving curvilinear axial elements without bending energy. Although the absence of bending stiffness is mechanically consistent with the idealization of cables, it may generate nearly zero modes in the tangent matrix, making the incremental solution by Newton–Raphson, displacement control, or arc-length methods more difficult. The proposed strategy acts on the incremental system by selectively raising only the positive eigenvalues below a minimum admissible bound, defined from a prescribed condition number. In this way, the regularization controls the numerical conditioning of the Hessian without modifying the original equilibrium equation or introducing permanent stabilizing forces into the physical residual. The formulation also incorporates conservative nodal and distributed loads, allowing loads applied along the initial configuration of the element to be treated consistently. As a result, a unified theoretical framework is established for the static analysis of straight axial bars and flexible cables, with potential for computational implementation in positional finite element codes and for subsequent studies involving validation, refinement, and numerical stability.

Keywords: positional formulation; curvilinear axial element; cables; geometrical nonlinearity; strain energy; Hessian; spectral regularization; nonlinear static analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01 – Estruturas de cabos	17
Figura 02 – Ponte suspensa	17
Figura 03 – Estádio Moses Mabhida	18
Figura 04 – Relação entre cabos e arcos catenários	19
Figura 05 – Snap-through nas configurações inicial e deformada	120
Figura 06 – Distribuição dos esforços internos no modelo de snap-through	120
Figura 07 – Trajetória de equilíbrio pelo método de Newton–Raphson com controle de força	121
Figura 08 – Exemplo de snap-back: configuração inicial e configuração deformada do cabo	124
Figura 09 – Exemplo de snap-back: distribuição dos esforços internos no estado analisado	124
Figura 10 – Exemplo de snap-back: trajetória de equilíbrio pelo método de comprimento de arco	125
Figura 11 – Domo tridimensional: configuração deformada em comparação com geometria inicial	127
Figura 12 – Domo tridimensional: distribuição dos esforços internos	127
Figura 13 – Domo tridimensional: trajetória de equilíbrio pelo método de comprimento de arco	128
Figura 14 – Comparação das configurações deformadas dos cabos A, B e C	129
Figura 15 – Distribuições de esforços internos dos cabos A, B e C	130
Figura 16 – Comparação das trajetórias de equilíbrio dos cabos A, B e C	131

LISTA DE FLUXOGRAMAS

Fluxograma 01 – Definição da densidade métrica	113
Fluxograma 02 – Procedimento de regularização espectral da Hessiana com pré-tensão inicial	119
Fluxograma 03 – Fluxo computacional de implementação do método proposto ..	126

LISTA DE SÍMBOLOS

ξ	Coordenada adimensional do domínio paramétrico
n	Número de nós do elemento axial parametrizado
p	Grau polinomial da interpolação de Lagrange
α, β	Índices nodais do elemento
i, k	Índices espaciais no plano bidimensional
$\phi_\alpha(\xi)$	Função de forma de Lagrange associada ao nó α
X_i^α	Coordenada inicial do nó α na direção i
Y_i^α	Posição atual do nó α na direção i
$X_i(\xi)$	Configuração inicial interpolada da linha média do elemento
$Y_i(\xi)$	Configuração atual interpolada da linha média do elemento
$A_i(\xi)$	Vetor tangente à configuração inicial
$a_i(\xi)$	Vetor tangente à configuração atual
$G(\xi)$	Métrica local de comprimento na configuração inicial
$g(\xi)$	Métrica local de comprimento na configuração atual
$J_0(\xi)$	Jacobiano geométrico inicial
$J(\xi)$	Jacobiano geométrico atual
$d\ell_0$	Diferencial de comprimento inicial
$d\ell$	Diferencial de comprimento atual
$\lambda(\xi)$	Alongamento local
$E(\xi)$	Deformação de Green–Lagrange uniaxial local
$u_e(E)$	Energia específica de deformação
$S(E)$	Tensão conjugada energeticamente à deformação de Green–Lagrange
$K_t(E)$	Módulo tangente material
A_0	Área inicial da seção transversal
U	Energia de deformação do elemento
$\mathbf{F}_{\text{int}}$	Vetor global de força interna
$\mathbf{F}_{\text{ext}}$	Vetor global de força externa
$\mathbf{H}$	Hessiana ou matriz tangente do problema
$\mathbf{H}_{\text{reg}}$	Hessiana regularizada
$\mathbf{H}_{\text{stab}}$	Matriz estabilizante associada à regularização espectral
κ_{adm}	Número de condição admissível

λ_{adm}	Autovalor mínimo admissível
λ_j	Autovalor associado ao modo espectral j
v_j	Autovetor associado ao modo espectral j
$\mathcal{B}$	Conjunto dos modos positivos mal condicionados

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 OBJETIVOS	22
1.2 CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO.....	23
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	24
2 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	26
2.1 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA E FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MEF	26
2.2 MODELAGEM COMPUTACIONAL DE CABOS E ESTRUTURAS AXIAIS FLEXÍVEIS	28
2.3 ELEMENTOS CURVILÍNEOS E DISTINÇÃO ENTRE VIGAS E ARCOS	30
2.4 ESTABILIZAÇÃO ESPECTRAL E CONTROLE DO NÚMERO DE CONDIÇÃO	34
2.5 MÉTODOS INCREMENTAIS, CONTROLE DE TRAJETÓRIA E REGULARIZAÇÃO.....	36
2.6 SÍNTESE DO CAPÍTULO	37
3 ELEMENTO FINITO POSICIONAL DE BARRA RETA	39
3.1 DESCRIÇÃO CINEMÁTICA DO ELEMENTO RETO	39
3.2 FORÇA INTERNA NODAL CONSISTENTE	43
3.3 HESSIANA CONSISTENTE DO ELEMENTO RETO	44
3.4 EQUILÍBRIO, RESÍDUO E LINEARIZAÇÃO INCREMENTAL.....	46
3.5 SÍNTESE DO CAPÍTULO	47
4ELEMENTO AXIAL POSICIONAL PARAMETRIZADO: CINEMÁTICA CURVILÍNEA	49
4.1 DOMÍNIO PARAMÉTRICO, ÍNDICES E VARIÁVEIS NODAIS.....	50
4.2 DEFORMAÇÃO DE GREEN-LAGRANGE LOCAL.....	55
4.3 SÍNTESE DO CAPÍTULO	56
5 FORMULAÇÃO ENERGÉTICA, FORÇA INTERNA E HESSIANA.....	57
5.1 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DO ELEMENTO	57
5.2 VARIAÇÃO DA DEFORMAÇÃO DE GREEN-LAGRANGE	58
5.3 SEGUNDA DERIVADA DA DEFORMAÇÃO	59
5.4 PRIMEIRA VARIAÇÃO DA ENERGIA E FORÇA INTERNA	60

5.5 SEGUNDA VARIAÇÃO DA ENERGIA E HESSIANA CONSISTENTE	61
5.6 DECOMPOSIÇÃO MATERIAL E GEOMÉTRICA DA HESSIANA	62
5.7 PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DA FORÇA INTERNA E DA HESSIANA	63
5.8 SÍNTESE DO CAPÍTULO	65
6 RECUPERAÇÃO DO ELEMENTO POSICIONAL RETO DE DOIS NÓS - TRELIÇA	66
6.1 CASO PARTICULAR LINEAR NO DOMÍNIO PARAMÉTRICO	66
6.2 RECUPERAÇÃO DA DEFORMAÇÃO DE GREEN-LAGRANGE	70
6.3 RECUPERAÇÃO DAS DERIVADAS DA DEFORMAÇÃO	70
6.4 RECUPERAÇÃO DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO	71
6.5 RECUPERAÇÃO DA FORÇA INTERNA	72
6.6 RECUPERAÇÃO DA HESSIANA MATERIAL-GEOMÉTRICA	73
6.7 RECUPERAÇÃO DA FORÇA NODAL EQUIVALENTE DE CARGA DISTRIBUÍDA	74
6.8 SÍNTESE DO CAPÍTULO	75
7 ESPECIALIZAÇÃO CONSTITUTIVA: BARRA AXIAL E CABO	77
7.1 LEI BILATERAL PARA BARRA AXIAL	77
7.2 LEI UNILATERAL À TRAÇÃO PARA CABOS	80
7.3 HESSIANA CONSISTENTE PARA A LEI UNILATERAL	82
7.4 PRÉ-TRAÇÃO E DEFORMAÇÃO INICIAL EM CABOS	84
7.5 SÍNTESE DO CAPÍTULO	86
8 REGULARIZAÇÃO ESPECTRAL MÍNIMA DA HESSIANA	88
8.1 SISTEMA INCREMENTAL REDUZIDO EM NOTAÇÃO INDICIAL	89
8.2 ORIGEM MECÂNICA DO MAU CONDICIONAMENTO	90
8.3 PROBLEMA ESPECTRAL DA HESSIANA REDUZIDA	91
8.4 CRITÉRIO DE CONDICIONAMENTO ADMISSÍVEL	93
8.5 CONSTRUÇÃO INDICIAL DA HESSIANA REGULARIZADA	94
8.6 PROPRIEDADE DE MINIMALIDADE ESPECTRAL	95
8.7 INTERPRETAÇÃO ENERGÉTICA INCREMENTAL	96
8.8 ATUALIZAÇÃO ADAPTATIVA AO LONGO DAS ITERAÇÕES	98
8.9 AUTOVALORES NEGATIVOS E INTERPRETAÇÃO DE ESTABILIDADE	99
8.10 INDICADORES DE INTENSIDADE DA REGULARIZAÇÃO	100
8.11 PROCEDIMENTO ALGORÍTMICO	101

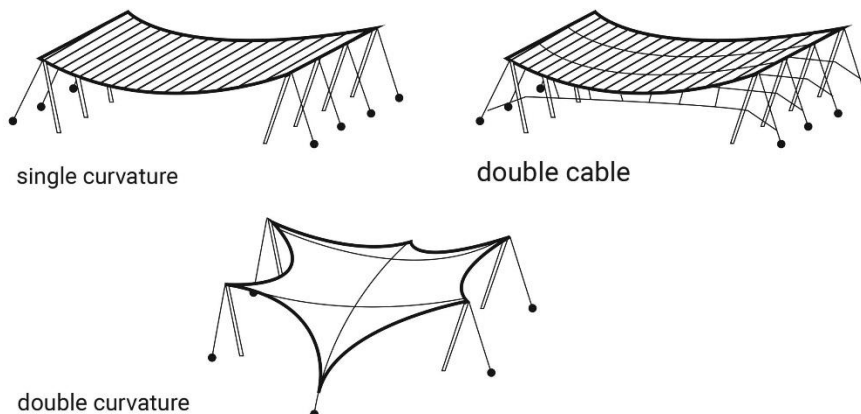
8.12 COMPATIBILIDADE COM MÉTODOS INCREMENTAIS DE SOLUÇÃO	102
8.13 LIMITES DA REGULARIZAÇÃO PROPOSTA.....	103
8.14 SÍNTESE DO CAPÍTULO	104
9 FORM-FINDING POSICIONAL POR PRÉ-TENSÃO INVERSA EM CABOS FLEXÍVEIS	106
9.1 FORÇA INTERNA INICIAL COM PRÉ-TENSÃO.....	107
9.2 CASO I: FORÇA AXIAL INICIAL CONSTANTE POR ELEMENTO	108
9.3 MONTAGEM GLOBAL DO PROBLEMA INVERSO COM GEOMETRIA FIXA	110
9.4 CASO II: CAMPO DE DENSIDADE MÉTRICA PARA ELEMENTOS DE ORDEM SUPERIOR	111
9.5 CARGAS EXTERNAS EQUIVALENTES NA ETAPA DE FORM-FINDING	114
9.6 INCORPORAÇÃO DE S_0 NA ESTRATÉGIA CONSTITUTIVA.....	115
9.7 REGULARIZAÇÃO ESPECTRAL INICIAL APÓS A DETERMINAÇÃO DA PRÉ-TENSÃO	116
9.8 DIAGNÓSTICO DE ADMISSIBILIDADE ANTES DA ANÁLISE NÃO LINEAR	122
9.9 RELAÇÃO COM O MÉTODO DA DENSIDADE DE FORÇA CLÁSSICO	122
9.10 FLUXO COMPUTACIONAL RECOMENDADO	126
9.11 EXEMPLO COMPLEMENTAR: DOMO TRIDIMENSIONAL	126
9.12 COMPARAÇÃO ENTRE CABOS	129
9.13 SÍNTESE DO CAPÍTULO	132
10 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	133
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	135
APÊNDICE A - MÉTODOS INCREMENTAIS DE SOLUÇÃO.....	137
A.1 RESÍDUO GLOBAL E HESSIANA TANGENTE REDUZIDA	138
A.2 TRATAMENTO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS	139
A.3 LINEARIZAÇÃO DE NEWTON-RAPHSON	140
A.4 CONTROLE DE FORÇA.....	141
A.5 CONTROLE DE DESLOCAMENTO PRESCRITO	142
A.6 CONTROLE DE DESLOCAMENTO GENERALIZADO COM FATOR DE CARGA.....	143
A.7 MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO	144

A.8 PREDITOR TANGENTE E ESCOLHA DO SINAL.....	145
A.9 INCORPORAÇÃO DA REGULARIZAÇÃO ESPECTRAL	146
A.10 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA.....	147
A.11 CONTROLE ADAPTATIVO DO PASSO INCREMENTAL.....	148
A.12 ALGORITMO INCREMENTAL-ITERATIVO.....	149
A.13 CONSIDERAÇÕES SOBRE ESTABILIDADE E PONTOS CRÍTICOS ..	149
A.14 SÍNTESE DO CAPÍTULO	150

1 INTRODUÇÃO

Elementos estruturais esbeltos submetidos a grandes deslocamentos ocupam posição central na mecânica computacional de estruturas. Cabos, tirantes, linhas suspensas, redes flexíveis, sistemas cabo-barra e estruturas de grande vão, exemplificados pelas Figuras 1 e 2 a seguir apresentam uma combinação particular de não linearidade geométrica, resposta predominantemente axial, forte dependência da configuração de equilíbrio e, em muitos casos, ausência de rigidez à flexão. Nesses sistemas, a configuração deformada não pode ser tratada como pequena perturbação da geometria inicial. A própria geometria passa a participar da rigidez tangente do problema, da redistribuição de esforços e da trajetória de equilíbrio.

Figura 1 – Estruturas de cabos



Fonte: Khodadadi (2025)

Figura 2 – Ponte suspensa



Fonte: Khodadadi (2025)

A formulação numérica de estruturas desse tipo exige uma descrição cinemática capaz de representar grandes mudanças de forma e, ao mesmo tempo, uma formulação mecânica que preserve a natureza física do elemento modelado. Uma barra de treliça reta possui rigidez axial à tração e à compressão, mas não possui rigidez flexional. Um cabo ideal, por sua vez, deve ser interpretado como elemento

axial flexível, usualmente resistente apenas à tração e incapaz de sustentar compressão ou momento fletor. Portanto, a mera presença de uma geometria curvilínea não caracteriza uma viga ou um arco. Para que uma formulação represente flexão, é necessário introduzir uma medida de curvatura resistente e uma energia associada à flexão. Quando a energia depende apenas do alongamento axial, a interpretação física mais adequada para uma geometria curvilínea é a de cabo. O Estádio Moses Mabhida possui estrutura mista, que une em sua cobertura um arco sustentado por cabos de aço em sua extensão, como mostra a Figura 03 abaixo:

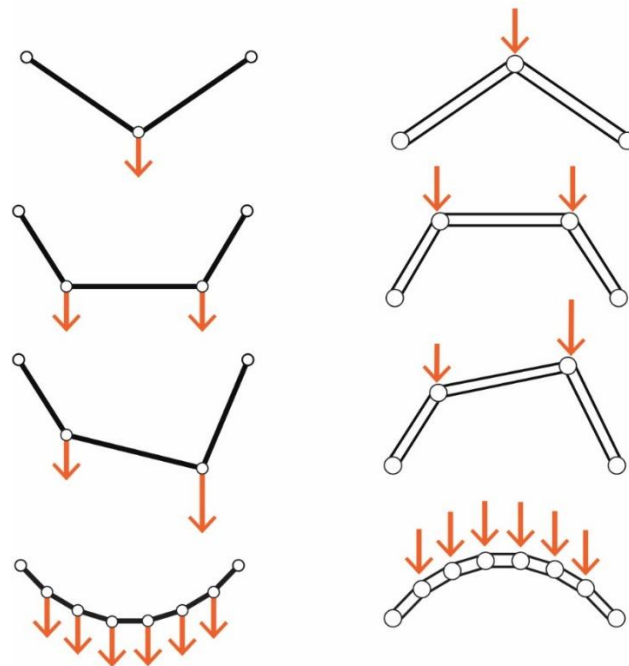
Figura 03 – Estádio Moses Mabhida



Fonte: Pauletti (2019)

A análise computacional de cabos permanece um tema ativo na literatura técnica. Li, Huang e Chen (2024) propuseram uma formulação de elemento finito de cabo baseada em campo exato de tração para análise estática não linear, destacando a importância de representar adequadamente a distribuição de força interna e a configuração deformada. Huang et al. (2023) desenvolveram uma formulação baseada em teoria discreta da catenária, incluindo energia e Hessiana associadas ao problema de cabos elásticos. Bendalla e Morgenthal (2023) apresentaram uma estrutura de elementos finitos para análise estática e dinâmica de cabos estruturais com apoios desviadores, evidenciando que grandes flechas, variações de geometria e condições de contorno complexas continuam exigindo modelos não lineares específicos. A Figura 04 apresenta o comportamento de cabos flexíveis sendo deformados pela ação de cargas concentradas e distribuída (último esquema), pelo esforço de tração, e ainda, à direita ocorre a exemplificação de estruturas rígidas, sendo comprimidas e distribuindo suas cargas aos apoios.

Figura 04 – Relação entre cabos e arcos catenários



Fonte: Khodadadi (2025)

Embora o uso de múltiplos elementos retos de treliça seja uma alternativa usual para aproximar a geometria de cabos, tal estratégia pode demandar refinamento significativo para representar adequadamente formas curvilíneas. Por outro lado, formulações baseadas em soluções analíticas ou quase analíticas da catenária podem apresentar elevada precisão em classes particulares de problemas, mas tendem a depender de hipóteses específicas sobre carregamento, rigidez, geometria ou distribuição da força axial. Entre essas abordagens, há espaço para uma formulação variacional e parametrizada que mantenha a estrutura do método dos elementos finitos, mas permita representar a linha média do elemento por interpolação de ordem arbitrária.

A presente dissertação desenvolve essa proposta no contexto da formulação posicional. Em vez de tomar os deslocamentos como incógnitas fundamentais, adota-se a posição atual dos nós como variável primária. Essa escolha é coerente com formulações posicionais aplicadas a estruturas com não linearidade geométrica, como discutido em trabalhos associados ao método dos elementos finitos posicional e à análise de treliças e pórticos em grandes deslocamentos (Coda e Greco, 2004; Greco et al., 2006). A contribuição deste trabalho consiste em estender essa lógica para um elemento axial parametrizado, no qual as configurações inicial e atual

da linha média são interpoladas em um domínio adimensional por funções de forma de Lagrange de ordem arbitrária.

A motivação central deste trabalho decorre da necessidade de construir um elemento axial capaz de representar, em um mesmo parâmetro matemático, dois comportamentos distintos. O primeiro é o comportamento de uma barra reta de treliça, recuperado quando a interpolação é linear e o elemento possui apenas dois nós. O segundo é o comportamento de um cabo flexível, obtido quando se utilizam aproximações de ordem superior ou nós intermediários para descrever a geometria da linha média.

Para isso, considera-se um domínio paramétrico adimensional $\xi \in [-1,1]$, no qual as configurações inicial X_i e atual Y_i são descritas por:

$$X_i(\xi) = \phi_\alpha(\xi)X_i^\alpha \quad (1.1)$$

$$Y_i(\xi) = \phi_\alpha(\xi)Y_i^\alpha. \quad (1.2)$$

Os índices nodais são indicados por $\alpha, \beta = 1, \dots, n$, enquanto os índices espaciais são indicados por $i, j, k = 1, 2, 3$. O grau polinomial da interpolação é $p = n-1$. Assim, para $n = 2$ obtém-se a barra reta clássica; para $n > 2$, a linha média pode ser curvilínea.

A partir dessa interpolação, são definidos os vetores tangentes às configurações inicial e atual, respectivamente:

$$A_i(\xi) = \frac{dX_i}{d\xi}, \quad a_i(\xi) = \frac{dY_i}{d\xi} \quad (1.3)$$

e as métricas escalares induzidas por esses vetores,

$$G(\xi) = A_i(\xi)A_i(\xi), \quad g(\xi) = a_i(\xi)a_i(\xi) \quad (1.4)$$

Essas métricas permitem escrever os diferenciais de comprimento inicial e atual e, conseqüentemente, definir a deformação de Green–Lagrange uniaxial local. A formulação energética é construída no comprimento inicial, de modo que a força interna e a Hessiana sejam obtidas por derivação consistente da energia de deformação, caracterizando a formulação Lagrangiana Total.

A segunda motivação do trabalho está associada ao mau condicionamento da Hessiana. Elementos axiais curvilíneos sem energia de flexão podem apresentar modos incrementais que modificam a forma da curva com pequena

variação de alongamento axial. Esses modos tendem a aparecer como autovalores positivos muito pequenos da Hessiana reduzida, especialmente em análises estáticas. Em consequência, o sistema incremental pode tornar-se mal condicionado ou quase singular, dificultando a convergência do método de Newton–Raphson e de técnicas de continuação.

Essa dificuldade não foi tratada por meio da introdução direta de uma rigidez flexional física, pois isso modificaria o modelo mecânico do cabo. A alternativa investigada nesta dissertação é uma regularização espectral mínima da Hessiana, atuando apenas no sistema incremental. A ideia é identificar, por decomposição espectral, os modos positivos mal condicionados e elevar seus autovalores até um limite mínimo definido por um número de condição admissível. Técnicas de estabilização baseadas em autovalores e em controle de condicionamento têm sido exploradas em outros contextos de mecânica computacional (Garhum, Usman, Düster, 2022); (Eisenträger et al., 2024); (Scherz; Kriegesmann; Pedersen, 2024) e (Hart; Van Bloemen Waanders, 2023). Aqui, essa ideia é adaptada ao caso específico de um elemento axial posicional parametrizado sem rigidez flexional.

O problema da pesquisa pode ser formulado da seguinte maneira: como construir uma formulação posicional parametrizada para um elemento axial curvilíneo bidimensional, capaz de recuperar a barra reta de treliça como caso particular e, simultaneamente fornecer uma base cinemática consistente para cabos sem rigidez flexional, preservando a estabilidade numérica do sistema incremental em análise estática não linear?

Essa questão envolve dois desafios acoplados. O primeiro é cinemático e variacional: definir uma interpolação curvilínea de ordem arbitrária, uma medida de deformação axial local, uma energia de deformação, uma força interna consistente e uma Hessiana tangente compatíveis com a formulação posicional. O segundo é numérico: controlar o mau condicionamento da Hessiana sem alterar a equação física de equilíbrio e sem introduzir rigidez flexional artificial permanente.

A dificuldade numérica é particularmente relevante porque a ausência de rigidez à flexão não é um defeito do modelo de cabo; ao contrário, é uma característica física desejável. O problema surge quando essa característica física conduz a direções quase nulas no sistema incremental estático. Portanto, a estratégia de estabilização deve ser interpretada como ferramenta algorítmica, não como modificação constitutiva do elemento.

A hipótese adotada nesta dissertação é que a formulação posicional parametrizada, baseada em métricas locais de comprimento e deformação de Green–Lagrange uniaxial, permite construir um elemento axial de ordem arbitrária capaz de representar barras retas e cabos flexíveis dentro de um mesmo escopo variacional. Além disso, assume-se que o mau condicionamento associado a modos positivos quase nulos da Hessiana pode ser controlado por uma regularização espectral mínima, aplicada apenas ao sistema incremental, sem modificar o resíduo físico de equilíbrio.

Em termos algébricos, seja a equação incremental reduzida escrita como:

$$\mathbf{H}\Delta\mathbf{Y} = -\mathbf{g} \quad (1.5)$$

em que $\mathbf{H}$ é a Hessiana reduzida nos graus de liberdade livres, $\Delta\mathbf{Y}$ é a correção incremental e $\mathbf{g}$ é o resíduo físico. A proposta consiste em substituir, no processo iterativo, $\mathbf{H}$ por uma Hessiana regularizada:

$$\mathbf{H}_{\text{reg}} = \mathbf{H} + \mathbf{H}_{\text{stab}} \quad (1.6)$$

sem alterar a equação de equilíbrio original. A convergência continua sendo avaliada por:

$$\mathbf{g}(\mathbf{Y}) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

Desse modo, a regularização melhora o condicionamento do passo de Newton, mas não redefine o problema mecânico a ser resolvido.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral desta dissertação é desenvolver a base teórica de uma formulação posicional parametrizada para um elemento axial curvilíneo, incorporando uma estratégia de regularização espectral mínima da Hessiana para análise estática não linear geométrica.

Os objetivos específicos são:

- a) Formular a cinemática de um elemento axial parametrizado por funções de forma de Lagrange de ordem arbitrária no domínio $\xi \in [-1,1]$;
- b) Definir as métricas locais de comprimento, os jacobianos geométricos, o alongamento local e a deformação de Green–Lagrange uniaxial;
- c) Construir a energia de deformação no comprimento inicial e obter, por derivação consistente, a força interna e a Hessiana do elemento, considerando a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff;
- d) Demonstrar que o elemento reto de dois nós é recuperado como caso particular da formulação parametrizada;
- e) Discutir a especialização constitutiva do elemento para barra axial bilateral e cabo unilateral;
- f) Incorporar cargas distribuídas conservativas ao potencial das forças externas e às forças nodais equivalentes;
- g) Formular a regularização espectral mínima da Hessiana, baseada no controle do número de condição;
- h) Compatibilizar a formulação com Newton–Raphson, controle de deslocamento e comprimento de arco;
- i) Propor aplicações de validação para verificar a recuperação da barra reta, a representação de cabos flexíveis, a influência da quadratura e o efeito da regularização espectral.

1.2 CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO

As contribuições principais desta dissertação podem ser organizadas em quatro grupos.

A primeira contribuição é a formulação cinemática de um elemento axial posicional parametrizado de ordem arbitrária. A descrição usa posições nodais atuais como incógnitas fundamentais e introduz métricas locais de comprimento para construir a deformação axial de Green–Lagrange. Essa construção permite interpretar a barra reta de dois nós como caso particular de uma família mais ampla de elementos axiais parametrizados.

A segunda contribuição é a formulação energética consistente do elemento, com base na lei de Saint-Venant-Kirchhoff. A energia de deformação é

integrada no comprimento inicial da linha média, e a força interna e a Hessiana são obtidas por derivação em relação às posições nodais atuais. A Hessiana resultante apresenta uma decomposição material–geométrica compatível com a não linearidade geométrica da formulação.

A terceira contribuição é a separação entre cinemática e especialização constitutiva. A mesma formulação pode ser usada para representar uma barra axial com rigidez à tração e à compressão ou um cabo com resposta unilateral à tração. Essa separação evita a interpretação inadequada de um elemento curvilíneo puramente axial como viga ou arco, uma vez que a formulação não introduz energia de flexão.

A quarta contribuição é a regularização espectral mínima da Hessiana. A técnica proposta atua apenas sobre modos positivos mal condicionados, elevando seus autovalores até um limite inferior definido por um número de condição admissível. Ao contrário de uma penalização diagonal global, como por exemplo a introdução de molas, a regularização é seletiva, modal e adaptativa. Além disso, ela modifica apenas o sistema incremental, mantendo inalterados a equação de equilíbrio e o resíduo físico.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta dissertação está organizada em capítulos. O Capítulo 1 apresenta a contextualização, o problema de pesquisa, a hipótese de trabalho, os objetivos e as contribuições da proposta. O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica, com ênfase em formulações posicionais, elementos de cabo, catenária, unilateralidade e estratégias de estabilização espectral. O Capítulo 3 relembra a formulação posicional reta de referência, usada como caso base para a generalização.

No Capítulo 4, especifica-se a metodologia de desenvolvimento do elemento que exemplifica a pesquisa abordada nesta dissertação. O Capítulo 5 tem como objetivo demonstrar a formulação energética para o elemento axial. O Capítulo 6 apresenta recuperação do estado inicial do elemento reto. O Capítulo 7 descreve a estrutura constitutiva na forma de notação indicial, aplicação da lei de Saint-Venant-Kirchhoff em barras bilaterais e introdução de uma lei unilateral para tração em cabos. O Capítulo 8 aplica uma regularização espectral mínima que busca controlar o mau

condicionamento da Hessiana. O Capítulo 9 apresenta um método de *form-finding* por pré-tensão inversa para a inicialização do elemento.

2 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta a revisão bibliográfica que fundamenta a formulação posicional parametrizada proposta nesta dissertação. O objetivo não é esgotar a literatura sobre elementos finitos não lineares, cabos, catenárias ou estabilização numérica, mas organizar criticamente os principais conceitos necessários para compreender a lacuna explorada neste trabalho. A proposta está situada na interseção entre quatro temas: formulações Lagrangianas posicionais para análise não linear geométrica, modelagem computacional de cabos e estruturas axiais flexíveis, distinção mecânica entre elementos axiais curvilíneos e elementos de viga ou arco, e técnicas de estabilização espectral ou controle de condicionamento de sistemas algébricos associados à matriz tangente.

A revisão é construída com uma preocupação metodológica central. A formulação desenvolvida nesta dissertação não reivindica a criação do primeiro elemento de cabo flexível, nem a primeira técnica de regularização espectral de matrizes mal condicionadas. A contribuição aqui pretendida está na combinação entre uma cinemática posicional parametrizada de ordem arbitrária para um elemento axial, uma derivação energética consistente da força interna e da Hessiana, a recuperação explícita do elemento finito posicional reto de dois nós e a introdução de uma regularização espectral mínima aplicada à Hessiana do problema estático. Assim, a revisão bibliográfica tem também a função de delimitar o escopo da proposta e evitar interpretações excessivas sobre sua abrangência.

2.1 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA E FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MEF

A análise não linear geométrica de estruturas é necessária quando a mudança de configuração do sistema altera de forma significativa as relações de equilíbrio, compatibilidade e rigidez tangente. Nessa classe de problemas, a configuração deformada participa diretamente da avaliação das forças internas e da matriz tangente. Formulações clássicas de elementos finitos não lineares, como as discutidas por De Borst et al. (2012), Belytschko et al. (2014) e Wriggers (2008), mostram que a consistência entre energia, forças internas e matriz tangente é decisiva

para a robustez de métodos incrementais-iterativos. Essa observação é particularmente importante em estruturas com grandes deslocamentos, nas quais a distinção entre rigidez material e rigidez geométrica torna-se parte essencial da interpretação mecânica.

Entre as diferentes formas de descrever a cinemática não linear, as formulações Lagrangianas totais são especialmente convenientes quando se deseja medir deformações em relação a uma configuração de referência fixa. Nesse contexto, a deformação de Green–Lagrange e tensões energeticamente conjugadas, como a tensão de Piola–Kirchhoff de segunda espécie, permitem construir uma energia de deformação objetiva e compatível com grandes deslocamentos e rotações, denominada de modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff. A formulação adotada nesta dissertação segue essa lógica: a energia é integrada no comprimento inicial do elemento e as grandezas cinemáticas locais são obtidas a partir do mapeamento entre o domínio paramétrico e as configurações inicial e atual.

A formulação posicional pode ser vista como uma abordagem particular dentro desse contexto, na qual as incógnitas fundamentais não são os deslocamentos, mas as posições nodais atuais. Em vez de escrever a configuração deformada como uma perturbação incremental em relação à posição inicial, a descrição posicional trata diretamente as coordenadas atuais dos nós como variáveis primárias. Essa abordagem foi explorada por Coda e Greco (2004) em formulações para pórticos bidimensionais com grandes deslocamentos, e por Greco et al. (2006) em uma formulação posicional não linear para análise de treliças espaciais. Nesses trabalhos, a força interna decorre da diferenciação da energia em relação às posições atuais, e a matriz tangente é obtida como derivada consistente da força interna.

A relevância dessa abordagem para a presente dissertação é direta. O elemento axial parametrizado aqui proposto mantém as posições nodais atuais como incógnitas fundamentais, mas substitui a cinemática reta do elemento de dois nós por uma cinemática de linha média interpolada por funções de forma de Lagrange no domínio adimensional $\xi \in [-1,1]$. Com isso, a descrição posicional é preservada, enquanto a geometria do elemento passa a admitir nós intermediários e aproximações de ordem superior. Essa generalização exige uma reconstrução cuidadosa das medidas de comprimento, da deformação axial local, da força interna e da Hessiana.

A vantagem conceitual da formulação posicional, neste trabalho, é permitir que a configuração atual seja tratada diretamente no espaço físico, sem

introduzir rotações nodais independentes ou graus de liberdade adicionais associados à orientação de seções. Essa escolha é coerente com o objetivo de formular um elemento axial, não um elemento de viga. A curvatura da linha média é admitida como geometria da curva material, mas não como mecanismo resistente de flexão. Essa distinção será retomada nas seções seguintes, pois constitui um dos pontos centrais para interpretar corretamente elementos de ordem superior como elementos compatíveis com cabos, e não como barras curvas com rigidez flexional.

2.2 MODELAGEM COMPUTACIONAL DE CABOS E ESTRUTURAS AXIAIS FLEXÍVEIS

Cabos estruturais aparecem em pontes suspensas, pontes estaiadas, linhas de transmissão, sistemas de içamento, redes de cabos, sistemas de tensegridade e estruturas tensionadas. A principal dificuldade de sua modelagem decorre da combinação entre grandes deslocamentos, grandes rotações da linha média, ausência ou insignificância de rigidez à flexão e resposta mecânica essencialmente axial.

Uma estratégia simples e amplamente utilizada consiste em representar cabos por uma malha de elementos de treliça ou barras axiais lineares. Essa abordagem é computacionalmente direta, pois aproveita formulações já conhecidas e permite aproximar geometrias curvas por refinamento da malha. Entretanto, sua eficiência depende fortemente do refinamento espacial: quanto maior a flecha, a variação de curvatura ou a variação da tração, maior tende a ser o número de elementos necessário para obter uma boa representação geométrica e mecânica. Li, Huang e Chen (2024) observam que modelos baseados em múltiplos elementos de treliça podem aproximar o comportamento não linear de cabos, mas o aumento da quantidade de elementos eleva o custo computacional e pode limitar a eficiência em aplicações de maior escala.

Outra linha de desenvolvimento utiliza relações analíticas ou semi-analíticas baseadas na teoria da catenária. Sob peso próprio e condições específicas de carregamento, a curva de equilíbrio de um cabo pode ser descrita por funções hiperbólicas, e a tração pode ser relacionada à geometria da curva. Huang et al. (2023) desenvolvem uma formulação para análise estática de estruturas elásticas de cabos

sob carregamento mecânico utilizando teoria discreta da catenária. O trabalho é relevante para esta dissertação por explicitar a ligação entre geometria do cabo, energia elástica e Hessiana, mostrando que a matriz tangente de sistemas de cabos deve ser tratada como parte essencial do problema mecânico, e não apenas como um artefato algébrico do método de solução.

Formulações especializadas de elementos de cabo também têm sido propostas para melhorar a precisão da representação interna do esforço axial. Li, Huang e Chen (2024) apresentam uma formulação de elemento finito de cabo baseada em campo exato de tração para análise estática não linear. Essa abordagem busca descrever com maior precisão a distribuição de tração e o estado deformado do cabo. A presente dissertação segue um caminho diferente. Em vez de construir um campo exato de tração, propõe-se uma interpolação posicional de ordem arbitrária para a linha média, preservando uma formulação energética axial e deixando a especialização física barra/cabo para a lei constitutiva. A ênfase, portanto, não está em obter um elemento catenário analítico fechado, mas em construir uma estrutura posicional geral, compatível com refinamento em ordem polinomial e com regularização espectral da Hessiana.

Cabos reais também podem interagir com apoios desviadores, roldanas, selas, guias ou regiões de contato. Bendalla e Morgenthal (2023) propõem uma estrutura de elementos finitos não linear para análise estática e dinâmica de cabos estruturais com apoios desviadores. Esse tipo de aplicação mostra que a modelagem de cabos frequentemente exige atenção a condições de apoio, mudanças de direção, grandes flechas e efeitos geométricos locais. Embora a presente dissertação não trate contato ou apoios desviadores, essa literatura reforça a necessidade de formulações capazes de representar adequadamente a geometria da linha do cabo e sua contribuição para o equilíbrio.

Além das aplicações de projeto e simulação, a geometria dos cabos tem sido usada em problemas de identificação estrutural. Suchocki et al. (2024) estimam a tração em cabos por meio da teoria da catenária e de nuvens de pontos obtidas por varredura laser terrestre (scanner). O interesse desse tipo de trabalho para a presente dissertação é indicar que a forma espacial do cabo contém informação mecânica relevante. Uma formulação capaz de representar curvas com poucos parâmetros nodais, ou de comparar aproximações por refinamento em malha e por

aumento da ordem polinomial, pode ser útil não apenas em análise direta, mas também em calibração, identificação e monitoramento estrutural.

2.3 ELEMENTOS CURVILÍNEOS E DISTINÇÃO ENTRE VIGAS E ARCOS

A presença de uma geometria curva não define, por si só, a natureza mecânica do elemento. Um elemento pode possuir uma linha média curvilínea e, ainda assim, armazenar apenas energia axial. Por outro lado, vigas e arcos curvos armazenam energia associada ao alongamento, à flexão, à rotação das seções e, em problemas espaciais, eventualmente à torção. A distinção fundamental não está apenas na forma geométrica, mas nas medidas de deformação incluídas na energia.

Essa diferença é crucial para a formulação proposta nesta dissertação. A cinemática posicional parametrizada permite escrever tanto a configuração inicial quanto a configuração atual como curvas interpoladas por funções de forma. Entretanto, a energia inicialmente adotada depende apenas da deformação axial local de Green–Lagrange,

$$E(\xi) = \frac{g(\xi) - G(\xi)}{2G(\xi)} \quad (2.1)$$

Não se introduz uma medida resistente de curvatura, nem uma energia flexional do tipo:

$$U_{\text{flex}} = \frac{1}{2} \int EI \kappa^2 d\ell_0 \quad (2.2)$$

Dessa forma, elementos de ordem superior não devem ser interpretados como vigas curvas ou arcos, mas como elementos axiais curvilíneos. Quando associados a leis constitutivas unilaterais, esses elementos tornam-se particularmente compatíveis com a modelagem de cabos ideais.

A literatura de vigas geometricamente exatas ilustra bem a diferença entre esses modelos. Formulações de viga precisam representar, explícita ou implicitamente, a orientação das seções transversais e a evolução das medidas de curvatura. Borković, Gfrerer e Marussig (2023), por exemplo, desenvolvem uma formulação isogeométrica geometricamente exata para vigas de Bernoulli–Euler baseada no triedro de Frenet–Serret. A presença desse tipo de estrutura cinemática

evidencia que a modelagem de vigas curvas demanda mais do que a interpolação geométrica da linha média. Exige também uma descrição da rotação da seção e da energia associada à flexão.

A proposta desta dissertação situa-se, portanto, em outro nível de modelagem. O elemento axial posicional parametrizado possui geometria curvilínea, mas sua resistência decorre exclusivamente da energia axial. Essa escolha não deve ser entendida como limitação acidental, mas como decisão constitutiva coerente com a modelagem de cabos. Ela também impede que o elemento seja denominado, de forma rigorosa, como uma “treliça curva”. A treliça clássica é composta por barras retas articuladas, com esforço axial e sem momento fletor. Quando se introduz uma linha média curva sem rigidez à flexão, a interpretação mais consistente passa a ser a de cabo ou elemento axial flexível.

Desse ponto de vista, a mesma cinemática parametrizada admite dois usos distintos. Para $n = 2$, a interpolação linear recupera o elemento reto de barra ou treliça, que pode resistir à tração e à compressão quando se adota uma lei constitutiva bilateral. Para $n > 2$, a interpolação representa uma curva material. Nesse caso, a interpretação física mais adequada é a de cabo, especialmente quando se emprega uma lei constitutiva unilateral. Essa separação entre cinemática e especialização constitutiva é uma das bases da formulação proposta.

Cabos ideais não resistem fisicamente à compressão axial. Quando a deformação axial tende a um estado de encurtamento ou quando a tração se anula, o cabo pode tornar-se frouxo e perder rigidez efetiva. Em formulações discretas, essa característica conduz a uma resposta unilateral, que pode ser representada, em sua forma mais simples, por uma relação constitutiva do tipo:

$$S(E) = K\langle E \rangle_+, \quad \langle E \rangle_+ = \max(E, 0) \quad (2.3)$$

onde S é a tensão conjugada energeticamente à deformação de Green–Lagrange e K é o módulo axial de referência. O módulo tangente correspondente pode ser escrito como:

$$K_t(E) = \begin{cases} K, & E > 0, \\ 0, & E \leq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Essa lei é conceitualmente adequada para um cabo ideal tracionado, mas introduz dificuldades numéricas relevantes. A função $\langle E \rangle_+$ não é diferenciável em

$E = 0$, e a transição entre estados ativos e inativos pode provocar mudanças abruptas na matriz tangente. Em estruturas compostas por muitos cabos, esse comportamento pode gerar perda de posto, descontinuidade da rigidez global e dificuldades de convergência em métodos de Newton.

A literatura recente sobre tensegridades com cabos frouxos evidencia essa dificuldade. Liu, Geng e Luo (2017) tratam a estática de estruturas de tensegridade com cabos frouxos por meio de uma formulação não suave, reformulando o problema de equilíbrio como um problema de complementaridade linear. A relevância dessa abordagem para a presente dissertação está em mostrar que a frouxidão do cabo não é apenas uma questão numérica: ela representa uma mudança física no conjunto de elementos ativos. Embora este trabalho não adote uma formulação de complementaridade, ele reconhece explicitamente que a especialização para cabo deve ser feita com uma lei constitutiva capaz de eliminar a resistência à compressão.

A decisão metodológica adotada nesta dissertação é separar a formulação cinemática da formulação constitutiva. A cinemática posicional parametrizada é desenvolvida de forma geral, dependendo apenas das configurações inicial e atual, das métricas locais e da deformação axial. A especialização física é introduzida posteriormente por meio de $u_e(E)$, $S(E)$ e $K_t(E)$. Com isso, a mesma estrutura matemática pode representar uma barra axial bilateral, com $S = KE$, ou um cabo unilateral, com resposta apenas tracionada. Essa separação evita que a definição do elemento seja confundida com uma lei material específica e permite que diferentes estratégias constitutivas sejam testadas na implementação computacional.

A catenária é a curva de equilíbrio de um cabo ideal submetido ao peso próprio uniforme, sob hipóteses clássicas de flexibilidade e tração axial. Sua importância na literatura de cabos decorre do fato de que a geometria de equilíbrio e o campo de tração são fortemente acoplados. Modelos baseados em catenária procuram explorar esse acoplamento para obter soluções mais precisas ou formulações computacionais mais eficientes.

Na perspectiva desta dissertação, a catenária tem duas funções conceituais. A primeira é servir como solução de referência para validação. Um elemento axial curvilíneo parametrizado por polinômios de Lagrange não representa exatamente uma catenária em um único elemento, pois a catenária não é, em geral, uma curva polinomial. Entretanto, a curva pode ser aproximada por refinamento em

malha, por aumento da ordem polinomial, ou por uma combinação entre ambos. Essa observação justifica o estudo posterior de estratégias de refinamento h e p .

A segunda função da catenária é reforçar a importância da geometria como portadora de informação mecânica. Conforme encontrado no trabalho de Suchocki et al. (2024), ao estimar a tração de cabos a partir de nuvens de pontos e teoria da catenária, mostra que a forma observada da linha do cabo pode ser usada para inferir grandezas internas. Isso sugere que formulações baseadas em curvas parametrizadas têm potencial tanto para análise direta quanto para problemas inversos e de identificação, desde que a relação entre geometria e esforço axial seja tratada de maneira consistente.

No presente trabalho, não se pretende substituir formulações catenárias exatas. A proposta é mais geral e menos restritiva: construir um elemento axial parametrizado cuja geometria inicial e atual sejam descritas por interpolação de Lagrange de ordem arbitrária. A catenária aparece, então, como um caso de validação e como uma referência física, não como hipótese embutida na formulação. Essa escolha preserva a flexibilidade do método para representar geometrias iniciais arbitrárias, cabos com diferentes condições de apoio e configurações obtidas por solução incremental.

Em formulações não lineares baseadas em energia, a força interna é obtida pela primeira variação da energia de deformação, e a matriz tangente resulta da segunda variação, ou da derivada da força interna em relação às incógnitas nodais. Essa estrutura garante consistência entre a energia potencial, o resíduo de equilíbrio e o sistema linear resolvido em cada iteração de Newton. Nas formulações posicionais, essa diferenciação é realizada em relação às posições atuais dos nós.

Para o elemento axial parametrizado proposto, a Hessiana possui uma parcela material e uma parcela geométrica. A parcela material depende do módulo tangente $K_t(E)$ e está associada à variação da tensão com a deformação. A parcela geométrica depende do estado de tensão $S(E)$ e decorre da própria não linearidade da relação entre posições atuais e deformação. Essa decomposição é análoga à separação clássica entre rigidez material e rigidez geométrica em análise não linear, mas é escrita aqui em termos das métricas locais induzidas pela interpolação paramétrica.

O problema central surge quando determinados modos de alteração da configuração atual produzem pequena variação axial. Em elementos curvilíneos

sem energia de flexão, a linha média pode admitir modos quase isométricos, nos quais há mudança de forma com baixa variação de comprimento local. Esses modos não são necessariamente espúrios do ponto de vista físico, pois refletem a flexibilidade do cabo ideal. Contudo, no sistema incremental estático,

$$H\Delta Y = -g \quad (2.5)$$

eles podem gerar autovalores muito pequenos da Hessiana reduzida, aumentando o número de condição e tornando a correção incremental sensível a perturbações numéricas.

Se a Hessiana reduzida H é simétrica e positiva definida, sua decomposição espectral pode ser escrita como:

$$H = V\Lambda V^T \quad (2.6)$$

com autovalores positivos ordenados $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$. O número de condição espectral é:

$$\kappa(H) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (2.7)$$

Quando $\lambda_{\min}$ se aproxima de zero, $\kappa(H)$ cresce e o sistema torna-se mal condicionado. Esse comportamento é particularmente relevante em análise estática, pois não há matriz de massa ou amortecimento atuando como mecanismos adicionais de regularização algébrica. Assim, a robustez do método depende diretamente da qualidade espectral da Hessiana utilizada no passo incremental.

A ausência de rigidez à flexão deve ser preservada na física do modelo de cabo. Portanto, uma solução puramente física baseada na adição permanente de energia flexional fictícia alteraria a natureza do problema. A alternativa explorada nesta dissertação é formular uma regularização algorítmica da Hessiana, atuando apenas no sistema incremental de Newton e preservando o resíduo físico original. Essa distinção entre regularização numérica e rigidez física é essencial para o posicionamento da proposta.

2.4 ESTABILIZAÇÃO ESPECTRAL E CONTROLE DO NÚMERO DE CONDIÇÃO

O controle do condicionamento de matrizes de rigidez ou Hessianas aparece em diferentes contextos da mecânica computacional. Em métodos de elementos finitos com fronteiras imersas, por exemplo, regiões de interseção geométrica desfavorável podem gerar matrizes elementares ou globais mal condicionadas. Garhuom, Usman e Düster (2022) propõem uma técnica de estabilização por autovalores para aumentar a robustez do método das células finitas em problemas de grandes deformações. A ideia central é identificar modos associados a autovalores pequenos e introduzir rigidez estabilizante de forma seletiva.

Eisenräger et al. (2024) estendem o uso de estabilização por autovalores para métodos de elementos finitos com fronteira imersa em dinâmica explícita. Embora o contexto seja distinto do problema estático tratado nesta dissertação, o trabalho reforça a interpretação de que autovalores pequenos podem estar associados a modos de deformação mal controlados pela discretização. Scherz, Kriegesmann e Pedersen (2024), por sua vez, propõem um método de estabilização baseado no número de condição para otimização topológica geometricamente não linear, relacionando explicitamente a estabilidade numérica ao condicionamento do sistema.

Em problemas inversos governados por equações diferenciais parciais, Hart e Van Bloemen Waanders (2023) discutem regularização espectral de Hessianas para tratar direções pouco informadas. Embora esse contexto seja diferente da análise estrutural de cabos, a interpretação espectral é conceitualmente próxima: determinadas direções do espaço de busca possuem curvatura insuficiente, e a regularização atua para tornar o problema incremental mais bem condicionado.

A regularização proposta nesta dissertação é inspirada nesse conjunto de ideias, mas é formulada especificamente para a Hessiana reduzida do problema estático associado ao elemento axial posicional parametrizado. Para um número de condição admissível κ_{adm} , define-se o menor autovalor admissível como:

$$\lambda_{\text{adm}} = \frac{\lambda_{\text{max}}}{\kappa_{\text{adm}}} \quad (2.8)$$

Apenas os modos positivos abaixo desse limite são regularizados:

$$\mathcal{B} = \{j \mid 0 < \lambda_j < \lambda_{\text{adm}}\} \quad (2.9)$$

A matriz estabilizante é:

$$H_{\text{stab}} = \sum_{j \in \mathcal{B}} (\lambda_{\text{adm}} - \lambda_j) v_j v_j^T \quad (2.10)$$

e a Hessiana regularizada é:

$$H_{\text{reg}} = H + H_{\text{stab}} \quad (2.11)$$

A característica distintiva dessa regularização é sua minimalidade em relação ao critério espectral adotado. Cada autovalor positivo mal condicionado é elevado exatamente até o limite admissível; os demais autovalores positivos, já suficientemente grandes, permanecem inalterados. A técnica difere, portanto, de uma penalização diagonal simples do tipo $H + kI$, que aumentaria todos os autovalores indiscriminadamente. Além disso, na versão conservadora proposta, autovalores negativos não são regularizados automaticamente, pois podem indicar perda de estabilidade, ramo pós-crítico ou bifurcação.

Essa escolha é importante para preservar a interpretação física do problema. A regularização atua no sistema incremental, mas a convergência continua sendo verificada pelo resíduo de equilíbrio original. Assim, não se adiciona uma força estabilizante permanente ao modelo estrutural. A estratégia deve ser entendida como uma ferramenta algorítmica de controle de condicionamento, especialmente útil em elementos axiais curvilíneos sem rigidez flexional.

2.5 MÉTODOS INCREMENTAIS, CONTROLE DE TRAJETÓRIA E REGULARIZAÇÃO

A solução de problemas não lineares em estruturas é usualmente conduzida por métodos incrementais-iterativos. Em sua forma mais simples, o método de Newton–Raphson lineariza o resíduo de equilíbrio em torno da configuração corrente e resolve um sistema tangente para obter a correção incremental. Quando o carregamento é controlado diretamente, a força externa é prescrita por incrementos. Quando deslocamentos são prescritos, o sistema é reduzido aos graus de liberdade livres e as reações são recuperadas posteriormente.

Entretanto, em problemas com pontos limites, perda de estabilidade ou trajetórias pós-críticas, o controle de força ou de deslocamento pode ser insuficiente. O método de comprimento de arco, introduzido em formulações clássicas

por Riks (1979) e amplamente discutido em textos de análise não linear como De Borst et al. (2012) amplia o sistema de equações ao tratar o fator de carga como incógnita adicional e impor uma restrição geométrica sobre o incremento combinado de deslocamentos e carga. Essa estratégia permite seguir trajetórias de equilíbrio que apresentam snap-through, snap-back ou mudanças de estabilidade.

Na presente dissertação, a regularização espectral mínima não substitui métodos de continuação. Ela atua sobre o bloco estrutural da Hessiana utilizado no sistema incremental, enquanto a restrição de comprimento de arco permanece inalterada. Assim, em um sistema aumentado, a substituição proposta é:

$$H \rightarrow H_{\text{reg}} \quad (2.12)$$

apenas no bloco mecânico associado à linearização do resíduo de equilíbrio. O resíduo e a restrição de arco continuam sendo avaliados com as grandezas físicas originais. Essa relação é importante para evitar a interpretação equivocada de que a regularização espectral resolve, por si só, problemas de instabilidade estrutural. Sua função é melhorar o condicionamento do sistema linear resolvido em cada iteração.

2.6 SÍNTESE DO CAPÍTULO

A literatura revisada mostra avanços relevantes em formulações posicionais, elementos de cabo, teoria discreta da catenária, identificação de tração a partir da geometria, tratamento de cabos frouxos e técnicas de estabilização espectral. Esses trabalhos fornecem o contexto necessário para delimitar a contribuição desta dissertação. Não se trata de propor o primeiro modelo computacional para cabos, nem a primeira aplicação de autovalores em estabilização numérica. A lacuna explorada é mais específica e está na combinação entre esses temas dentro de uma formulação posicional parametrizada de ordem arbitrária.

A contribuição proposta consiste em desenvolver um elemento axial curvilíneo cuja linha média é interpolada por funções de forma de Lagrange no domínio $\xi \in [-1, 1]$, mantendo as posições nodais atuais como incógnitas fundamentais. A formulação introduz métricas locais de comprimento, deformação de Green–Lagrange uniaxial, energia integrada no comprimento inicial, força interna consistente e

Hessiana material– geométrica. O elemento reto de dois nós é recuperado como caso particular, enquanto elementos de ordem superior fornecem uma base cinemática para cabos sem rigidez flexional.

Além disso, a dissertação propõe uma regularização espectral mínima da Hessiana para controlar o mau condicionamento associado a modos positivos quase nulos. A técnica atua apenas no sistema incremental, eleva seletivamente autovalores problemáticos até um limite definido por um número de condição admissível e preserva o resíduo físico de equilíbrio. Essa combinação fornece uma estrutura teórica adequada para implementação computacional posterior, comparação entre refinamento h e p , análise de cabos sob peso próprio, avaliação do número de condição e estudo da robustez de métodos estáticos não lineares.

3 ELEMENTO FINITO POSICIONAL DE BARRA RETA

Este capítulo apresenta a formulação posicional de referência para um elemento de treliça de dois nós. O objetivo é estabelecer, em notação indicial, a base cinemática, energética e incremental que será posteriormente generalizada para o elemento posicional parametrizado. A formulação aqui discutida é particularmente importante por dois motivos. Primeiro, ela fixa a notação utilizada ao longo da dissertação para posições nodais, deformação, força interna e Hessiana. Segundo, ela fornece o caso limite que deve ser recuperado quando a interpolação parametrizada de Lagrange for linear, isto é, quando o elemento curvilíneo proposto se reduz a uma barra reta de dois nós.

A formulação posicional diferencia-se das descrições clássicas baseadas exclusivamente em deslocamentos incrementais porque adota as posições nodais atuais como incógnitas fundamentais. Essa escolha é adequada para problemas geometricamente não lineares, nos quais a configuração deformada participa diretamente das medidas de deformação, das forças internas e da matriz tangente. Essa abordagem está alinhada à formulação posicional aplicada a estruturas reticuladas e treliças com grandes deslocamentos, conforme discutido nos trabalhos de Coda e Greco (2004) e Greco et al. (2006).

3.1 DESCRIÇÃO CINEMÁTICA DO ELEMENTO RETO

Considere um elemento axial reto bidimensional, composto por dois nós, ou seja, $\alpha, \beta = 1, 2$ a os índices espaciais, $i, j, k = 1, 2, 3$.

Adota-se a convenção de soma para índices repetidos, salvo indicação explícita em contrário. As coordenadas nodais da configuração inicial são denotadas por X_i^α , enquanto as posições nodais da configuração atual são denotadas por Y_i^α .

Na formulação posicional, as variáveis primárias do problema são as posições atuais Y_i^α . Os deslocamentos nodais não são utilizados como incógnitas principais, mas podem ser recuperados a partir da diferença entre posição atual e coordenada inicial:

$$u_i^\alpha = Y_i^\alpha - X_i^\alpha \quad (3.1)$$

Define-se o vetor inicial do elemento por:

$$D_i = X_i^2 - X_i^1 \quad (3.2)$$

e o vetor atual por:

$$d_i = Y_i^2 - Y_i^1 \quad (3.3)$$

Os comprimentos inicial e atual são obtidos pelos produtos internos desses vetores:

$$L_0 = \sqrt{D_i D_i}, \quad (3.4)$$

e:

$$L = \sqrt{d_i d_i} \quad (3.5)$$

Equivalentemente:

$$L_0^2 = D_i D_i, \quad L^2 = d_i d_i \quad (3.6)$$

Para tornar compacta a escrita das derivadas em relação às posições nodais, introduz-se o sinal nodal:

$$s^1 = -1, \quad s^2 = +1 \quad (3.7)$$

Com essa definição, o vetor atual pode ser escrito na forma:

$$d_i = s^\alpha Y_i^\alpha \quad (3.8)$$

em que a soma em α é realizada sobre os dois nós do elemento. De fato:

$$s^\alpha Y_i^\alpha = s^1 Y_i^1 + s^2 Y_i^2 = -Y_i^1 + Y_i^2 = Y_i^2 - Y_i^1 \quad (3.9)$$

A derivada do vetor atual em relação às posições nodais é, portanto:

$$\frac{\partial d_j}{\partial Y_i^\alpha} = s^\alpha \delta_{ij} \quad (3.10)$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker. Essa relação será utilizada de forma recorrente no cálculo da força interna e da Hessiana.

Em uma descrição Lagrangiana total, a deformação axial do elemento é medida em relação à configuração inicial. Para o elemento reto, a deformação de Green–Lagrange uniaxial é definida por:

$$E = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} \quad (3.11)$$

Substituindo $L^2 = d_i d_i$, obtém-se:

$$E = \frac{d_i d_i - L_0^2}{2L_0^2} \quad (3.12)$$

A escolha dessa medida de deformação é consistente com grandes deslocamentos e rotações finitas do elemento, pois a deformação depende do comprimento atual ao quadrado e não de uma aproximação linearizada do alongamento. Ao mesmo tempo, por ser referida ao comprimento inicial L_0 , a expressão preserva a estrutura de uma formulação Lagrangiana total.

A primeira derivada da deformação em relação às posições nodais atuais é:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{1}{2L_0^2} \frac{\partial(d_j d_j)}{\partial Y_i^\alpha} \quad (3.13)$$

Como:

$$\frac{\partial(d_j d_j)}{\partial Y_i^\alpha} = 2d_j \frac{\partial d_j}{\partial Y_i^\alpha} = 2d_j s^\alpha \delta_{ij} = 2s^\alpha d_i \quad (3.14)$$

segue que:

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{s^\alpha d_i}{L_0^2}} \quad (3.15)$$

A segunda derivada da deformação é obtida derivando novamente a Eq. (3.15) em relação a Y_k^β :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{s^\alpha}{L_0^2} \frac{\partial d_i}{\partial Y_k^\beta} \quad (3.16)$$

Usando:

$$\frac{\partial d_i}{\partial Y_k^\beta} = s^\beta \delta_{ik} \quad (3.17)$$

obtém-se:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{s^\alpha s^\beta}{L_0^2} \delta_{ik}} \quad (3.18)$$

As equações (3.15) e (3.18) são os blocos fundamentais para a obtenção da força interna e da matriz tangente consistente.

Adota-se uma energia específica de deformação uniaxial escrita como função da deformação de Green–Lagrange:

$$u_e = u_e(E) \quad (3.19)$$

A tensão conjugada energeticamente à deformação E é a tensão de Piola–Kirchhoff de segunda espécie, aqui considerada em sua forma uniaxial:

$$S(E) = \frac{du_e}{dE} \quad (3.20)$$

O módulo tangente material é definido por:

$$K_t(E) = \frac{dS}{dE} = \frac{d^2 u_e}{dE^2} \quad (3.21)$$

No caso particular do material de Saint-Venant–Kirchhoff uniaxial:

$$u_e(E) = \frac{1}{2} K E^2 \quad (3.22)$$

de modo que:

$$S = KE, \quad K_t = K \quad (3.23)$$

Nesta dissertação, entretanto, é conveniente manter a formulação em termos de $u_e(E)$, $S(E)$ e $K_t(E)$. Essa escrita permite que o mesmo desenvolvimento seja posteriormente particularizado tanto para uma barra axial, que está sendo denominada bilateral, com resposta à tração e à compressão, quanto para um cabo, denominado unilateral, com resposta apenas à tração.

Para o elemento axial reto de dois nós, a deformação é constante ao longo do comprimento. Assim, considerando área inicial constante A_0 , a energia de deformação é dada por:

$$U(Y) = A_0 L_0 u_e(E) \quad (3.24)$$

Nessa expressão, a dependência de U em relação às posições atuais ocorre por meio da deformação $E(Y)$. Portanto, ainda que o comprimento inicial L_0 e a área A_0 sejam constantes, a energia é uma função não linear das posições nodais atuais Y_i^α .

A primeira variação da energia é:

$$\delta U = A_0 L_0 \frac{du_e}{dE} \delta E \quad (3.25)$$

Como:

$$\delta E = \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} \delta Y_i^\alpha \quad (3.26)$$

tem-se:

$$\delta U = A_0 L_0 S \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} \delta Y_i^\alpha \quad (3.27)$$

Desse modo, a força interna nodal é identificada como o conjugado energético das posições nodais atuais:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = \frac{\partial U}{\partial Y_i^\alpha} \quad (3.28)$$

3.2 FORÇA INTERNA NODAL CONSISTENTE

Aplicando a regra da cadeia à Eq. (3.24), obtém-se:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = A_0 L_0 \frac{du_e}{dE} \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} \quad (3.29)$$

Como $S = \frac{du_e}{dE}$:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = A_0 L_0 S \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} \quad (3.30)$$

Substituindo a primeira derivada da deformação, dada pela Eq. (3.15), resulta:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = A_0 L_0 S \frac{s^\alpha d_i}{L_0^2} \quad (3.31)$$

Logo,

$$\boxed{F_i^{\text{int},\alpha} = s^\alpha \frac{A_0 S}{L_0} d_i} \quad (3.32)$$

Para o nó $\alpha = 1$,

$$F_i^{\text{int},1} = -\frac{A_0 S}{L_0} d_i \quad (3.33)$$

e, para o nó $\alpha = 2$,

$$F_i^{\text{int},2} = +\frac{A_0 S}{L_0} d_i \quad (3.34)$$

Portanto,

$$F_i^{\text{int},1} + F_i^{\text{int},2} = 0 \quad (3.35)$$

O que expressa o equilíbrio interno do elemento isolado. O par de forças nodais internas possui mesma direção, sentidos opostos e intensidade determinada pela tensão conjugada S , pela área inicial A_0 e pela orientação atual do elemento representada por d_i .

3.3 HESSIANA CONSISTENTE DO ELEMENTO RETO

A Hessiana, ou matriz tangente consistente, é definida pela derivada da força interna em relação às posições nodais atuais:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{\partial F_i^{\text{int},\alpha}}{\partial Y_k^\beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \quad (3.36)$$

A partir da forma energética da força interna:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = A_0 L_0 S \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} \quad (3.37)$$

obtém-se, por derivação em relação a Y_k^β :

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = A_0 L_0 \left[\frac{\partial S}{\partial Y_k^\beta} \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} + S \frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right] \quad (3.38)$$

Como:

$$\frac{\partial S}{\partial Y_k^\beta} = \frac{dS}{dE} \frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta} = K_t \frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta} \quad (3.39)$$

a Eq. (3.38) pode ser escrita como:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = A_0 L_0 \left[K_t \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta} + S \frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right] \quad (3.40)$$

Substituindo as equações (3.15) e (3.18), tem-se:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = A_0 L_0 \left[K_t \left(\frac{s^\alpha d_i}{L_0^2} \right) \left(\frac{s^\beta d_k}{L_0^2} \right) + S \left(\frac{s^\alpha s^\beta}{L_0^2} \delta_{ik} \right) \right] \quad (3.41)$$

Logo:

$$\boxed{H_{ik}^{\alpha\beta} = A_0 s^\alpha s^\beta \left[K_t \frac{d_i d_k}{L_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{L_0} \right]} \quad (3.42)$$

A primeira parcela da Eq. (3.42) é associada à rigidez material,

$$H_{ik}^{\text{mat},\alpha\beta} = A_0 s^\alpha s^\beta K_t \frac{d_i d_k}{L_0^3} \quad (3.43)$$

enquanto a segunda é associada à rigidez geométrica:

$$H_{ik}^{\text{geo},\alpha\beta} = A_0 s^\alpha s^\beta S \frac{\delta_{ik}}{L_0} \quad (3.44)$$

Assim:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = H_{ik}^{\text{mat},\alpha\beta} + H_{ik}^{\text{geo},\alpha\beta} \quad (3.45)$$

Essa decomposição será preservada no elemento axial posicional parametrizado. A diferença é que, na formulação curvilínea, a deformação, a força interna e a Hessiana deixam de ser constantes ao longo do elemento e passam a ser integradas no domínio paramétrico.

3.4 EQUILÍBRIO, RESÍDUO E LINEARIZAÇÃO INCREMENTAL

Considerando forças externas nodais conservativas $F_i^{\text{ext},\alpha}$, a energia potencial total do elemento pode ser escrita como:

$$\Pi(Y) = U(Y) - F_i^{\text{ext},\alpha} Y_i^\alpha \quad (3.46)$$

A condição de equilíbrio é obtida pela estacionariedade da energia potencial total:

$$\delta\Pi = 0 \quad (3.47)$$

Como as posições nodais atuais são as variáveis fundamentais, tem-se:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial U}{\partial Y_i^\alpha} - F_i^{\text{ext},\alpha} = 0 \quad (3.48)$$

Portanto:

$$F_i^{\text{int},\alpha}(Y) - F_i^{\text{ext},\alpha} = 0 \quad (3.49)$$

Define-se o resíduo mecânico por:

$$g_i^\alpha(Y) = F_i^{\text{int},\alpha}(Y) - F_i^{\text{ext},\alpha} \quad (3.50)$$

No equilíbrio:

$$g_i^\alpha(Y) = 0 \quad (3.51)$$

Em uma iteração de Newton–Raphson, no passo iterativo r , a linearização do resíduo em torno da configuração atual estimada fornece:

$$g_i^{\alpha(r)} + H_{ik}^{\alpha\beta(r)} \Delta Y_k^{\beta(r)} = 0 \quad (3.52)$$

Assim, o sistema incremental é:

$$H_{ik}^{\alpha\beta(r)} \Delta Y_k^{\beta(r)} = -g_i^{\alpha(r)} \quad (3.53)$$

Após a solução do sistema linear nos graus de liberdade livres, as posições nodais são atualizadas por:

$$Y_i^{\alpha(r+1)} = Y_i^{\alpha(r)} + \Delta Y_i^{\alpha(r)} \quad (3.54)$$

Na estrutura global, as contribuições elementares de força interna e Hessiana são montadas de acordo com a conectividade dos elementos. As condições de contorno essenciais são impostas sobre os graus de liberdade prescritos, e o sistema incremental é resolvido no subconjunto dos graus livres. As reações são recuperadas posteriormente a partir do resíduo nos graus prescritos.

3.5 SÍNTESE DO CAPÍTULO

A formulação desenvolvida neste capítulo será usada como referência para a generalização proposta nos capítulos seguintes. No elemento reto de dois nós, a cinemática é completamente descrita pelo vetor atual constante d_i , e a deformação E é uniforme ao longo do elemento. Consequentemente, a energia, a força interna e a Hessiana podem ser escritas sem integração numérica ao longo do domínio local.

Na formulação axial posicional parametrizada, essa estrutura será generalizada por meio da introdução de uma coordenada adimensional $\xi \in [-1, 1]$ e de funções de forma de Lagrange de ordem arbitrária. O vetor atual constante d_i será substituído pelo vetor tangente atual $a_i(\xi)$; o comprimento inicial constante L_0 será substituído pelo jacobiano geométrico inicial $J_0(\xi)$; e a deformação constante E será substituída por uma deformação local $E(\xi)$.

Essa correspondência é essencial para a consistência da proposta. Quando a interpolação parametrizada for linear, a formulação curvilínea deverá recuperar exatamente as equações (3.32) e (3.42). Por outro lado, quando forem empregadas aproximações de ordem superior, a mesma estrutura posicional permitirá

representar geometrias curvilíneas compatíveis com a modelagem de cabos sem a introdução de uma parcela de rigidez flexional. Desse modo, a formulação reta apresentada neste capítulo não é apenas uma revisão preliminar, mas o limite fundamental que sustenta a validação teórica do elemento axial posicional parametrizado.

4 ELEMENTO AXIAL POSICIONAL PARAMETRIZADO: CINEMÁTICA CURVILÍNEA

Este capítulo desenvolve a cinemática do elemento axial posicional parametrizado que constitui a principal generalização geométrica da formulação de referência apresentada no Capítulo 3. O objetivo é substituir a descrição exclusivamente reta do elemento de dois nós por uma representação unidimensional parametrizada, capaz de descrever uma linha material inicialmente reta ou curvilínea. Essa generalização é feita sem introduzir rotações nodais independentes, sem graus de liberdade adicionais associados à orientação de seções transversais e sem inserir, neste estágio, qualquer energia associada à flexão.

A proposta mantém o caráter posicional da formulação. As incógnitas fundamentais continuam sendo as posições nodais atuais, e não deslocamentos incrementais ou rotações. A diferença em relação ao elemento reto clássico está na forma como a geometria da linha material é interpolada. Em vez de representar o elemento apenas pelo segmento que une dois nós extremos, a geometria inicial e a configuração atual passam a ser interpoladas por funções de forma de Lagrange no domínio adimensional $\xi \in [-1, 1]$. Com isso, a ordem da interpolação passa a controlar a capacidade cinemática do elemento: para dois nós, recupera-se uma linha reta; para três nós, obtém-se uma descrição quadrática; para quatro nós, uma descrição cúbica; e assim sucessivamente.

Essa distinção é relevante do ponto de vista mecânico. A presença de uma geometria curvilínea não é suficiente para caracterizar um elemento como viga ou arco. Formulações geometricamente exatas de vigas e arcos incluem, além da curva média, variáveis associadas à orientação das seções, medidas de rotação, curvatura e parcelas energéticas relacionadas à flexão e eventualmente à torção (Borković, Gfrerer, Marussig, 2023). No presente trabalho, a geometria curvilínea é utilizada apenas para descrever a linha média de um elemento axial. A energia mecânica posteriormente associada ao elemento dependerá do alongamento local dessa linha. Por essa razão, o mesmo delineamento cinemático pode representar uma barra axial reta quando a interpolação é linear e pode representar um cabo flexível quando a interpolação é de ordem superior e a lei constitutiva é especializada para resposta predominantemente tracionada.

A descrição geométrica precisa da linha média também tem importância prática em estruturas de cabos. Trabalhos recentes de monitoramento estrutural mostram que a forma observada de um cabo pode ser usada para estimar tração a partir de modelos de catenária e nuvens de pontos obtidas por varredura laser terrestre (Suchocki et al., 2024). Esse tipo de aplicação reforça que a geometria da linha do cabo não é apenas uma representação gráfica, mas uma grandeza mecânica relevante. Na formulação proposta, essa geometria é incorporada diretamente por meio das posições nodais e das funções de interpolação no domínio paramétrico.

4.1 DOMÍNIO PARAMÉTRICO, ÍNDICES E VARIÁVEIS NODAIS

Considere um elemento unidimensional imerso no plano bidimensional. O domínio paramétrico do elemento é definido por $\xi \in [-1,1]$. O elemento possui n nós, associados a uma interpolação polinomial de grau $p = n - 1$.

Ao longo deste capítulo, adota-se a convenção de soma para índices repetidos, salvo indicação explícita em contrário. Assim, expressões como $\phi_\alpha X_i^\alpha$ indicam soma sobre o índice nodal α , e expressões como $A_i A_i$ indicam soma sobre o índice espacial i .

Sejam ξ_α os pontos nodais no domínio paramétrico $[-1,1]$. As funções de forma de Lagrange associadas a esses pontos são definidas por:

$$\phi_\alpha(\xi) = \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^n \frac{\xi - \xi_\beta}{\xi_\alpha - \xi_\beta} \quad (4.1)$$

A propriedade interpoladora fundamental é:

$$\phi_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (4.2)$$

em que $\delta_{\alpha\beta}$ é o delta de Kronecker associado aos índices nodais. Essa propriedade garante que, no ponto paramétrico $\xi = \xi_\beta$, a interpolação recupera exatamente a grandeza nodal associada ao nó β .

A derivada da função de forma em relação à coordenada paramétrica é indicada por:

$$\phi_{\alpha,\xi}(\xi) = \frac{d\phi_\alpha}{d\xi} \quad (4.3)$$

Como as funções de forma dependem apenas da coordenada paramétrica e da escolha dos pontos nodais, elas são conhecidas previamente para cada ordem de interpolação. Na implementação computacional, é conveniente calcular e armazenar $\phi_\alpha(\xi_m)$ e $\phi_{\alpha,\xi}(\xi_m)$ nos pontos de integração ξ_m utilizados pela quadratura de Gauss.

Para $n = 2$, as funções de forma são lineares:

$$\phi_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad \phi_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (4.4)$$

e suas derivadas são constantes. Para $n > 2$, as funções de forma permitem representar variações geométricas ao longo do elemento. Nesse caso, os vetores tangentes e as métricas locais podem variar com ξ .

A configuração inicial da linha material é interpolada:

$$X_i(\xi) = \phi_\alpha(\xi)X_i^\alpha \quad (4.5)$$

Essa expressão define uma curva inicial no plano. Para $n = 2$, essa curva é o segmento reto que une os dois nós do elemento. Para $n > 2$, a curva inicial pode possuir geometria curvilínea, controlada pelas posições nodais iniciais intermediárias e pela ordem da interpolação.

A configuração atual é interpolada de modo análogo:

$$Y_i(\xi) = \phi_\alpha(\xi)Y_i^\alpha \quad (4.6)$$

A mudança de configuração do elemento é, portanto, representada pela passagem da curva inicial $X_i(\xi)$ para a curva atual $Y_i(\xi)$, ambas descritas no mesmo domínio paramétrico. Essa escolha caracteriza uma descrição Lagrangiana total: as medidas de deformação serão construídas comparando grandezas associadas à configuração atual com grandezas associadas à configuração inicial.

A interpolação é isoparamétrica no sentido de que a mesma família de funções de forma é usada para descrever tanto a configuração inicial quanto a configuração atual. Essa escolha facilita a construção das derivadas cinemáticas e

permite que a formulação seja expressa de maneira compacta em notação indicial. Além disso, a posição atual interpolada depende linearmente das posições nodais atuais Y_i^α , embora as medidas de deformação resultantes sejam não lineares em relação a essas posições.

O vetor tangente à configuração inicial é definido por:

$$A_i(\xi) = \frac{dX_i}{d\xi} \quad (4.7)$$

Substituindo a interpolação (4.5), obtém-se:

$$A_i(\xi) = \phi_{\alpha,\xi}(\xi) X_i^\alpha \quad (4.8)$$

Analogamente, o vetor tangente à configuração atual é definido por:

$$a_i(\xi) = \frac{dY_i}{d\xi} \quad (4.9)$$

o que fornece:

$$a_i(\xi) = \phi_{\alpha,\xi}(\xi) Y_i^\alpha \quad (4.10)$$

Os vetores A_i e a_i não são vetores unitários. Eles representam a variação das posições física inicial e atual em relação à coordenada paramétrica ξ . Portanto, incorporam simultaneamente informação de direção e informação de escala. A norma desses vetores fornece o fator de conversão entre o comprimento diferencial no domínio paramétrico e o comprimento diferencial no espaço físico.

Como o elemento é unidimensional, a métrica induzida pela parametrização é uma grandeza escalar. Na configuração inicial, define-se:

$$G(\xi) = A_i(\xi) A_i(\xi) \quad (4.11)$$

Substituindo (4.8), obtém-se:

$$G(\xi) = [\phi_{\alpha,\xi}(\xi) X_i^\alpha] [\phi_{\beta,\xi}(\xi) X_i^\beta] \quad (4.12)$$

Na configuração atual, define-se:

$$g(\xi) = a_i(\xi) a_i(\xi) \quad (4.13)$$

ou, explicitamente:

$$g(\xi) = [\phi_{\alpha,\xi}(\xi)Y_i^\alpha][\phi_{\beta,\xi}(\xi)Y_i^\beta] \quad (4.14)$$

As grandezas G e g correspondem ao quadrado da norma dos vetores tangentes inicial e atual. Em uma formulação contínua multidimensional, métricas associadas ao mapeamento aparecem por meio de produtos internos entre vetores de base convectivos. Neste caso unidimensional, há apenas uma coordenada paramétrica e, por isso, a métrica reduz-se ao produto interno do vetor tangente consigo mesmo.

A condição de admissibilidade geométrica exige:

$$G(\xi) > 0 \quad \text{para todo } \xi \in [-1,1] \quad (4.15)$$

Essa condição impede que a configuração inicial interpolada apresente trechos degenerados com comprimento diferencial nulo. Na prática computacional, essa exigência deve ser verificada nos pontos de integração. Se G for muito pequeno ou nulo, a deformação de Green–Lagrange local torna-se mal definida, pois G aparece no denominador da medida de deformação.

A métrica atual g pode variar durante a solução não linear. Para configurações admissíveis, deve-se ter:

$$g(\xi) > 0 \quad \text{nos pontos materiais regulares da configuração atual} \quad (4.16)$$

Valores muito pequenos de g indicam colapso local da parametrização atual ou configurações numericamente degeneradas.

A partir da métrica inicial, define-se o Jacobiano geométrico inicial como:

$$J_0(\xi) = \sqrt{G(\xi)} \quad (4.17)$$

O comprimento diferencial inicial é, então:

$$d\ell_0 = J_0(\xi) d\xi \quad (4.18)$$

Analogamente, o Jacobiano geométrico atual é:

$$J(\xi) = \sqrt{g(\xi)} \quad (4.19)$$

e o comprimento diferencial atual é:

$$d\ell = J(\xi) d\xi \quad (4.20)$$

Os comprimentos totais inicial e atual do elemento são obtidos por integração no domínio paramétrico:

$$L_0 = \int_{-1}^1 J_0(\xi) d\xi \quad (4.21)$$

e

$$L = \int_{-1}^1 J(\xi) d\xi \quad (4.22)$$

Para o elemento linear de dois nós, J_0 e J são constantes. Para elementos de ordem superior, esses jacobianos podem variar ao longo de ξ , exigindo integração numérica adequada.

O alongamento local da linha material é definido pela razão entre os diferenciais de comprimento atual e inicial:

$$\lambda(\xi) = \frac{d\ell}{d\ell_0} \quad (4.23)$$

Usando (4.18) e (4.20), obtém-se:

$$\lambda(\xi) = \frac{J(\xi)}{J_0(\xi)} \quad (4.24)$$

Como $J_0 = \sqrt{G}$ e $J = \sqrt{g}$, segue que:

$$\lambda(\xi) = \sqrt{\frac{g(\xi)}{G(\xi)}} \quad (4.25)$$

Essa é uma medida local de alongamento axial. Para o elemento reto de dois nós, G e g são constantes, e λ é uniforme ao longo do elemento. Para elementos curvilíneos de ordem superior, a variação de G e g permite que o alongamento local varie ao longo da linha material.

4.2 DEFORMAÇÃO DE GREEN–LAGRANGE LOCAL

A deformação de Green–Lagrange uniaxial local é definida por:

$$E(\xi) = \frac{1}{2}[\lambda^2(\xi) - 1] \quad (4.26)$$

Substituindo (4.25), obtém-se:

$$E(\xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{g(\xi)}{G(\xi)} - 1 \right] \quad (4.27)$$

Portanto,

$$E(\xi) = \frac{g(\xi) - G(\xi)}{2G(\xi)} \quad (4.28)$$

Em termos dos vetores tangentes inicial e atual, a mesma expressão pode ser escrita como:

$$E(\xi) = \frac{a_i(\xi)a_i(\xi) - A_i(\xi)A_i(\xi)}{2A_j(\xi)A_j(\xi)} \quad (4.29)$$

A deformação (4.28) é uma medida Lagrangiana total, pois compara a métrica atual com a métrica inicial no mesmo ponto material parametrizado por ξ . O numerador mede a variação entre as métricas atual e inicial, enquanto o denominador normaliza essa variação pela métrica inicial. Essa estrutura é a generalização local da deformação de Green–Lagrange usada no elemento reto de treliça.

A deformação definida em (4.28) deve ser invariante a movimentos rígidos da configuração atual. Considere agora uma rotação rígida descrita por uma matriz ortogonal Q_{ij} , tal que:

$$Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij} \quad (4.30)$$

Se a configuração atual for transformada por:

$$\tilde{Y}_i^\alpha = Q_{ij}Y_j^\alpha + c_i \quad (4.31)$$

então o vetor tangente atual transformado será:

$$\tilde{a}_i = \phi_{\alpha,\xi} \tilde{Y}_i^\alpha = Q_{ij} \phi_{\alpha,\xi} Y_j^\alpha + c_i \phi_{\alpha,\xi} = Q_{ij} a_j \quad (4.32)$$

A métrica atual transformada é:

$$\tilde{g} = \tilde{a}_i \tilde{a}_i = Q_{ij} a_j Q_{ik} a_k \quad (4.33)$$

Usando a ortogonalidade de Q_{ij} :

$$\tilde{g} = \delta_{jk} a_j a_k = a_j a_j = g \quad (4.34)$$

Como G não é alterado por movimento rígido aplicado à configuração atual, conclui-se que:

$$\tilde{E}(\xi) = E(\xi) \quad (4.35)$$

Portanto, a medida de deformação adotada é objetiva em relação a movimentos rígidos da configuração atual.

4.3 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo foi desenvolvida a cinemática do elemento axial posicional parametrizado. A configuração inicial e a configuração atual foram interpoladas no domínio $\xi \in [-1,1]$ por funções de forma de Lagrange de ordem arbitrária. A partir dessas interpolações, foram definidos os vetores tangentes A_i e a_i , as métricas escalares G e g , os jacobianos geométricos J_0 e J , os diferenciais de comprimento $d\ell_0$ e $d\ell$, o alongamento local λ e a deformação de Green–Lagrange local E .

A formulação foi escrita em notação indicial e mostrou-se objetiva em relação a movimentos rígidos da configuração atual. Também foi demonstrado que interpolações de ordem superior fornecem uma descrição curvilínea compatível com cabos, desde que não se atribua ao elemento uma rigidez flexional. No próximo capítulo, essa cinemática será usada para construir a energia de deformação, a força interna e a Hessiana consistente do elemento.

5 FORMULAÇÃO ENERGÉTICA, FORÇA INTERNA E HESSIANA

A cinemática posicional parametrizada desenvolvida no capítulo anterior define o elemento axial curvilíneo a partir da interpolação das configurações inicial e atual no domínio adimensional. Essa descrição fornece uma medida local de deformação axial baseada nas métricas da configuração inicial e da configuração atual. O objetivo deste capítulo é construir a formulação energética associada a essa cinemática, obtendo a força interna nodal consistente e a Hessiana do elemento por derivação da energia de deformação em relação às posições nodais atuais.

Essa escolha é coerente com a formulação posicional de estruturas reticuladas apresentada por Coda e Greco (2004) e Greco et al., (2006), mas é aqui estendida para um elemento axial parametrizado de ordem arbitrária.

5.1 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DO ELEMENTO

A formulação será escrita inicialmente para uma energia específica uniaxial genérica:

$$u_e = u_e(E) \quad (5.1)$$

onde u_e representa a energia de deformação por unidade de volume inicial. A tensão energeticamente conjugada à deformação de Green–Lagrange é definida por:

$$S(E) = \frac{du_e}{dE} \quad (5.2)$$

No contexto Lagrangiano, S é a tensão axial conjugada à deformação de Green–Lagrange.

O módulo tangente material é:

$$K_t(E) = \frac{dS}{dE} = \frac{d^2u_e}{dE^2} \quad (5.3)$$

Para o modelo uniaxial de Saint-Venant–Kirchhoff, adotado como referência material simples, tem-se

$$u_e(E) = \frac{1}{2}KE^2, \quad S(E) = KE, \quad K_t(E) = K \quad (5.4)$$

Entretanto, as expressões subsequentes dependem apenas de $u_e(E)$, $S(E)$ e $K_t(E)$. Essa forma é útil porque permite substituir o modelo material sem modificar a cinemática nem a estrutura variacional do elemento.

A energia total de deformação do elemento deve ser integrada no comprimento inicial. Para uma área inicial A_0 constante, escreve-se:

$$U(Y_i^\alpha) = \int_{-1}^1 A_0 u_e(E(\xi)) J_0(\xi) d\xi \quad (5.5)$$

Caso a seção transversal varie ao longo da linha média inicial, pode-se substituir A_0 por $A_0(\xi)$, resultando em:

$$U(Y_i^\alpha) = \int_{-1}^1 A_0(\xi) u_e(E(\xi)) J_0(\xi) d\xi \quad (5.6)$$

Neste desenvolvimento, mantém-se A_0 constante para preservar a clareza da dedução.

A dependência de U em relação às incógnitas nodais atuais ocorre exclusivamente por meio da deformação $E(\xi)$. Como $J_0(\xi)$ é definido pela configuração inicial, sua derivada em relação às posições atuais é nula:

$$\frac{\partial J_0}{\partial Y_i^\alpha} = 0 \quad (5.7)$$

Essa observação simplifica a dedução da força interna e da Hessiana, pois a linearização da energia envolve apenas as derivadas de E em relação a Y_i^α .

5.2 VARIAÇÃO DA DEFORMAÇÃO DE GREEN-LAGRANGE

A deformação local é:

$$E = \frac{g-G}{2G} \quad (5.8)$$

Como G é função apenas da configuração inicial,

$$\frac{\partial G}{\partial Y_i^\alpha} = 0 \quad (5.9)$$

A métrica atual é:

$$g = a_j a_j \quad (5.10)$$

com:

$$a_j = \varphi_{\beta,\xi} Y_j^\beta \quad (5.11)$$

Derivando a_j em relação à posição nodal atual Y_i^α , obtém-se:

$$\frac{\partial a_j}{\partial Y_i^\alpha} = \varphi_{\alpha,\xi} \delta_{ij} \quad (5.12)$$

Logo:

$$\frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} = 2a_j \frac{\partial a_j}{\partial Y_i^\alpha} = 2a_j \varphi_{\alpha,\xi} \delta_{ij} = 2a_i \varphi_{\alpha,\xi} \quad (5.13)$$

Consequentemente:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{1}{2G} \frac{\partial g}{\partial Y_i^\alpha} \quad (5.14)$$

e, portanto:

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{a_i \varphi_{\alpha,\xi}}{G}} \quad (5.15)$$

ou, usando:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{a_i \varphi_{\alpha,\xi}}{J_0^2} \quad (5.16)$$

A variação virtual da deformação pode ser escrita como:

$$\delta E = \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} \delta Y_i^\alpha = \frac{a_i \varphi_{\alpha,\xi}}{G} \delta Y_i^\alpha \quad (5.17)$$

Essa expressão mostra que a deformação axial local é sensível apenas à projeção da variação posicional nodal na direção tangente atual ponderada pela derivada da função de forma.

5.3 SEGUNDA DERIVADA DA DEFORMAÇÃO

A Hessiana da energia exige a segunda derivada da deformação em relação às posições nodais atuais. A partir de (5.15), tem-se:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{\varphi_{\alpha,\xi}}{G} \frac{\partial a_i}{\partial Y_k^\beta} \quad (5.18)$$

Como:

$$\frac{\partial a_i}{\partial Y_k^\beta} = \varphi_{\beta,\xi} \delta_{ik} \quad (5.19)$$

resulta:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{\varphi_{\alpha,\xi} \varphi_{\beta,\xi}}{G} \delta_{ik}} \quad (5.20)$$

ou:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{\varphi_{\alpha,\xi} \varphi_{\beta,\xi}}{J_0^2} \delta_{ik} \quad (5.21)$$

Observa-se que a segunda derivada da deformação independe diretamente das posições atuais, embora a primeira derivada dependa do vetor tangente atual a_i . A dependência não linear da Hessiana em relação à configuração atual aparecerá, portanto, pela combinação entre a_i , $S(E)$ e $K_t(E)$.

5.4 PRIMEIRA VARIAÇÃO DA ENERGIA E FORÇA INTERNA

A força interna nodal é definida como o conjugado energético das posições nodais atuais:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = \frac{\partial U}{\partial Y_i^\alpha} \quad (5.22)$$

A primeira variação da energia (5.5) é:

$$U = \int_{-1}^1 A_0 \frac{du_e}{dE} \delta E J_0 d\xi \quad (5.23)$$

Usando $S = \frac{du_e}{dE}$ e (5.17), obtém-se:

$$\delta U = \int_{-1}^1 A_0 S \frac{a_i \varphi_{\alpha, \xi}}{G} J_0 d\xi \delta Y_i^\alpha \quad (5.24)$$

Como $G = J_0^2$, tem-se:

$$\delta U = \left[\int_{-1}^1 A_0 S \frac{a_i \varphi_{\alpha, \xi}}{J_0} d\xi \right] \delta Y_i^\alpha \quad (5.25)$$

Comparando com:

$$\delta U = F_i^{\text{int}, \alpha} \delta Y_i^\alpha \quad (5.26)$$

obtem-se:

$$\boxed{F_i^{\text{int}, \alpha} = \int_{-1}^1 A_0 S \frac{a_i \varphi_{\alpha, \xi}}{J_0} d\xi} \quad (5.27)$$

Essa é a força interna nodal consistente do elemento axial posicional parametrizado.

A expressão (5.27) possui uma interpretação mecânica direta. O termo $A_0 S$ representa a resultante axial conjugada à deformação de Green–Lagrange, enquanto $\frac{a_i \varphi_{\alpha, \xi}}{J_0}$ distribui essa contribuição axial para os graus de liberdade nodais atuais. Assim, a força interna é obtida como resultado da projeção energética da tensão axial ao longo da cinemática interpolada do elemento.

5.5 SEGUNDA VARIAÇÃO DA ENERGIA E HESSIANA CONSISTENTE

A matriz Hessiana do elemento é definida por:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{\partial F_i^{\text{int}, \alpha}}{\partial Y_k^\beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \quad (5.28)$$

Partindo da forma variacional da força interna:

$$F_i^{\text{int}, \alpha} = \int_{-1}^1 A_0 S \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} J_0 d\xi \quad (5.29)$$

deriva-se:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 J_0 \left[\frac{\partial S}{\partial Y_k^\beta} \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} + S \frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right] d\xi \quad (5.30)$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial S}{\partial Y_k^\beta} = \frac{dS}{dE} \frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta} = K_t \frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta} \quad (5.31)$$

Logo:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 J_0 \left[K_t \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta} + S \frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right] d\xi \quad (5.32)$$

Substituindo (5.15) e (5.20), obtém-se:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 J_0 \left[K_t \frac{a_i a_k \varphi_{\alpha,\xi} \varphi_{\beta,\xi}}{G^2} + S \frac{\varphi_{\alpha,\xi} \varphi_{\beta,\xi}}{G} \delta_{ik} \right] d\xi \quad (5.33)$$

Como $G = J_0^2$, chega-se à expressão compacta:

$$\boxed{H_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 \varphi_{\alpha,\xi} \varphi_{\beta,\xi} \left[K_t \frac{a_i a_k}{J_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{J_0} \right] d\xi} \quad (5.34)$$

Essa matriz é a tangente consistente associada à força interna (5.27). Como ela é obtida pela segunda derivada da energia de deformação, sua simetria é preservada quando o modelo constitutivo deriva de um potencial $u_e(E)$ suficientemente regular.

5.6 DECOMPOSIÇÃO MATERIAL E GEOMÉTRICA DA HESSIANA

A Hessiana (5.34) pode ser decomposta em uma parcela material e uma parcela geométrica:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = H_{ik}^{\text{mat},\alpha\beta} + H_{ik}^{\text{geo},\alpha\beta} \quad (5.35)$$

A parcela material é:

$$\boxed{H_{ik}^{\text{mat},\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 K_t \frac{\varphi_{\alpha,\xi} \varphi_{\beta,\xi} a_i a_k}{J_0^3} d\xi} \quad (5.36)$$

e a parcela geométrica é:

$$H_{ik}^{\text{geo},\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 S \frac{\varphi_{\alpha,\xi} \varphi_{\beta,\xi}}{J_0} \delta_{ik} d\xi \quad (5.37)$$

A parcela material depende do módulo tangente K_t e está associada à variação da tensão conjugada com a deformação. A parcela geométrica depende do estado de tensão S e resulta da segunda derivada da deformação em relação às posições nodais atuais. Essa segunda parcela é uma manifestação da não linearidade geométrica da formulação posicional.

A decomposição (5.35) será essencial para interpretar o comportamento espectral da matriz tangente. Em elementos axiais curvilíneos sem energia de flexão, determinados modos podem apresentar baixa rigidez associada ao alongamento axial, contribuindo para autovalores pequenos da Hessiana. Essa questão será retomada no capítulo dedicado à regularização espectral mínima.

5.7 PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DA FORÇA INTERNA E DA HESSIANA

A formulação obtida possui algumas propriedades importantes. Primeiro, a energia depende da configuração atual apenas por meio da métrica $g = a_i a_i$. Portanto, movimentos rígidos preservam a energia de deformação, desde que preservem os produtos internos dos vetores tangentes atuais. Essa propriedade é compatível com a objetividade da medida de deformação utilizada.

Segundo, a força interna é energeticamente consistente: ela é derivada diretamente de U em relação às posições nodais atuais. Essa consistência é importante porque garante que o equilíbrio estático possa ser obtido pela estacionariedade da energia potencial total quando as cargas externas forem conservativas.

Terceiro, a Hessiana é a linearização consistente da força interna. Em notação indicial, sua simetria energética é expressa por:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = H_{ki}^{\beta\alpha} \quad (5.38)$$

Desde que a energia específica $u_e(E)$ seja regular e que a mesma configuração seja usada para avaliar as derivadas de primeira e segunda ordem. Essa

simetria é relevante para a eficiência numérica e para a análise espectral da matriz tangente.

Por fim, a formulação conserva a estrutura do elemento posicional reto como caso particular, mas substitui o vetor diferença constante da barra por um campo tangente $a_i(\xi)$ definido ao longo do elemento. Essa substituição é o ponto que permite representar geometrias curvilíneas sem introduzir energia de flexão.

As integrais do elemento são avaliadas no domínio padrão $[-1,1]$. Para pontos de integração ξ_m e pesos w_m , a quadratura de Gauss fornece:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{m=1}^{n_g} w_m f(\xi_m) \quad (5.39)$$

Assim, a energia de deformação é aproximada por:

$$U \approx \sum_{m=1}^{n_g} w_m A_0 u_e(E_m) J_{0m} \quad (5.40)$$

em que:

$$E_m = E(\xi_m), \quad J_{0m} = J_0(\xi_m) \quad (5.41)$$

A força interna torna-se:

$$F_i^{\text{int},\alpha} \approx \sum_{m=1}^{n_g} w_m A_0 S_m \frac{a_{im} \varphi_{\alpha,\xi}(\xi_m)}{J_{0m}} \quad (5.42)$$

e a Hessiana é aproximada por:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} \approx \sum_{m=1}^{n_g} w_m A_0 \varphi_{\alpha,\xi}(\xi_m) \varphi_{\beta,\xi}(\xi_m) \left[K_{tm} \frac{a_{im} a_{km}}{J_{0m}^3} + S_m \frac{\delta_{ik}}{J_{0m}} \right] \quad (5.43)$$

com:

$$S_m = S(E_m), \quad K_{tm} = K_t(E_m) \quad (5.44)$$

Em cada ponto de integração devem ser avaliados, nessa ordem, as funções de forma, suas derivadas, os vetores tangentes A_i e a_i , as métricas G e g , o jacobiano J_0 , a deformação E , a tensão conjugada S e o módulo tangente K_t . Essa sequência será retomada quando forem discutidos os aspectos computacionais da implementação.

5.8 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Este capítulo estabeleceu a formulação energética do elemento axial posicional parametrizado. A partir da energia de deformação integrada no comprimento inicial, foram obtidas a força interna nodal consistente e a Hessiana material-geométrica. A dedução foi mantida em forma constitutiva geral, dependendo apenas de $u_e(E)$, $S(E)$ e $K_t(E)$. A força interna foi escrita como:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = \int_{-1}^1 A_0 S \frac{a_i \varphi_{\alpha,\xi}}{J_0} d\xi \quad (5.45)$$

e a Hessiana como:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 \varphi_{\alpha,\xi} \varphi_{\beta,\xi} \left[K_t \frac{a_i a_k}{J_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{J_0} \right] d\xi \quad (5.46)$$

Essas expressões constituem o núcleo mecânico do elemento. Os próximos capítulos da dissertação utilizam essa estrutura para recuperar o elemento reto de dois nós, incorporar cargas distribuídas, formular métodos incrementais de solução e desenvolver a regularização espectral mínima da Hessiana.

6 RECUPERAÇÃO DO ELEMENTO POSICIONAL RETO DE DOIS NÓS - TRELIÇA

A formulação posicional parametrizada desenvolvida nos capítulos anteriores foi construída para um elemento axial de ordem arbitrária, definido no domínio adimensional $\xi \in [-1,1]$ e interpolado por funções de forma de Lagrange. Antes de utilizar essa formulação em elementos curvilíneos de ordem superior, é necessário demonstrar que ela contém, como caso particular, o elemento posicional reto de dois nós. Essa verificação cumpre papel duplo. Em primeiro lugar, confirma que a parametrização adotada não altera a formulação clássica quando a aproximação é linear. Em segundo lugar, mostra que os fatores métricos, os jacobianos geométricos e as integrais no domínio paramétrico foram introduzidos de forma compatível com a cinemática axial original da formulação posicional.

Neste capítulo, a recuperação do elemento reto é demonstrada de modo explícito. O objetivo não é apresentar uma nova formulação, mas provar que, para $n = 2$, a cinemática parametrizada conduz exatamente às expressões usuais da deformação de Green–Lagrange, da energia de deformação, da força interna, da Hessiana material– geométrica e da força nodal equivalente associada a carregamentos distribuídos conservativos. A demonstração é feita em notação indicial, mantendo a mesma convenção adotada nos capítulos anteriores.

6.1 CASO PARTICULAR LINEAR NO DOMÍNIO PARAMÉTRICO

Considere o elemento axial parametrizado com dois nós. Os pontos nodais no domínio adimensional são escolhidos como:

$$\xi_1 = -1, \quad \xi_2 = +1 \quad (6.1)$$

As funções de forma de Lagrange associadas a esses pontos são:

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (6.2)$$

As derivadas dessas funções em relação à coordenada paramétrica são constantes:

$$\varphi_{1,\xi} = -\frac{1}{2}, \quad \varphi_{2,\xi} = +\frac{1}{2} \quad (6.3)$$

Define-se o sinal nodal:

$$s^1 = -1, \quad s^2 = +1 \quad (6.4)$$

de modo que:

$$\varphi_{\alpha,\xi} = \frac{s^\alpha}{2}, \quad \alpha = 1,2 \quad (6.5)$$

Neste capítulo, os índices nodais assumem os valores:

$$\alpha, \beta = 1,2 \quad (6.6)$$

Adota-se a convenção de soma para índices repetidos. Quando for necessário explicitar o somatório em α ou β , isso será indicado no texto.

A configuração inicial do elemento parametrizado é dada por:

$$X_i(\xi) = \varphi_\alpha(\xi) X_i^\alpha \quad (6.7)$$

Para $n = 2$, essa interpolação representa uma reta entre os nós iniciais X_i^1 e X_i^2 . O vetor tangente inicial é:

$$A_i = \frac{\partial X_i}{\partial \xi} = \varphi_{\alpha,\xi} X_i^\alpha \quad (6.8)$$

Substituindo as derivadas das funções lineares,

$$A_i = -\frac{1}{2} X_i^1 + \frac{1}{2} X_i^2 \quad (6.9)$$

Logo:

$$A_i = \frac{X_i^2 - X_i^1}{2} \quad (6.10)$$

Define-se o vetor diferença inicial por:

$$D_i = X_i^2 - X_i^1 \quad (6.11)$$

Assim:

$$A_i = \frac{D_i}{2} \quad (6.12)$$

De forma análoga, a configuração atual é:

$$Y_i(\xi) = \varphi_\alpha(\xi) Y_i^\alpha \quad (6.13)$$

e o vetor tangente atual é:

$$a_i = \frac{\partial Y_i}{\partial \xi} = \varphi_{\alpha,\xi} Y_i^\alpha \quad (6.14)$$

Para o elemento linear:

$$a_i = -\frac{1}{2} Y_i^1 + \frac{1}{2} Y_i^2 \quad (6.15)$$

Definindo o vetor diferença atual por:

$$d_i = Y_i^2 - Y_i^1 \quad (6.16)$$

obtém-se:

$$a_i = \frac{d_i}{2} \quad (6.17)$$

As expressões (6.12) e (6.17) mostram que, no caso de dois nós, os vetores tangentes inicial e atual são constantes ao longo de todo o domínio $\xi \in [-1,1]$. Portanto, a geometria inicial e a geometria atual do elemento são retas, e todas as grandezas métricas derivadas desses tangentes também são constantes.

A métrica inicial da formulação parametrizada é:

$$G = A_i A_i \quad (6.18)$$

Usando $A_i = \frac{D_i}{2}$, tem-se:

$$G = \frac{D_i D_i}{4} \quad (6.19)$$

O comprimento inicial do elemento reto é definido por:

$$L_0 = \sqrt{D_i D_i} \quad (6.20)$$

Consequentemente:

$$G = \frac{L_0^2}{4} \quad (6.21)$$

O jacobiano geométrico inicial é:

$$J_0 = \sqrt{G} = \frac{L_0}{2} \quad (6.22)$$

A métrica atual é:

$$g = a_i a_i \quad (6.23)$$

Como $a_i = \frac{d_i}{2}$, segue que:

$$g = \frac{d_i d_i}{4} \quad (6.24)$$

O comprimento atual do elemento é:

$$L = \sqrt{d_i d_i} \quad (6.25)$$

e, portanto:

$$g = \frac{L^2}{4}, \quad J = \sqrt{g} = \frac{L}{2} \quad (6.26)$$

O comprimento diferencial inicial é:

$$d\ell_0 = J_0 d\xi \quad (6.27)$$

Como $J_0 = \frac{L_0}{2}$ é constante no caso linear:

$$\int_{-1}^1 J_0 d\xi = \int_{-1}^1 \frac{L_0}{2} d\xi = L_0 \quad (6.28)$$

Analogamente:

$$\int_{-1}^1 J d\xi = L \quad (6.29)$$

Essas identidades confirmam que o mapeamento paramétrico linear recupera exatamente os comprimentos físicos inicial e atual do elemento reto.

6.2 RECUPERAÇÃO DA DEFORMAÇÃO DE GREEN-LAGRANGE

A deformação local do elemento axial parametrizado é:

$$E(\xi) = \frac{g(\xi) - G(\xi)}{2G(\xi)} \quad (6.30)$$

No caso de dois nós, G e g são constantes. Substituindo:

$$G = \frac{L_0^2}{4}, \quad g = \frac{d_i d_i}{4} \quad (6.31)$$

obtém-se:

$$E = \frac{\frac{d_i d_i}{4} - \frac{L_0^2}{4}}{\frac{L_0^2}{4}} \quad (6.32)$$

Logo,

$$E = \frac{d_i d_i - L_0^2}{2L_0^2} \quad (6.33)$$

A expressão (6.33) é exatamente a deformação de Green-Lagrange uniaxial do elemento posicional reto de treliça. Portanto, para $n = 2$, a formulação parametrizada não introduz uma medida de deformação distinta; ela apenas reescreve a cinemática reta no domínio adimensional $\xi \in [-1, 1]$.

6.3 RECUPERAÇÃO DAS DERIVADAS DA DEFORMAÇÃO

A primeira derivada da deformação na formulação parametrizada é

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma_i^\alpha} = \frac{a_i \varphi_{\alpha, \xi}}{G} \quad (6.34)$$

Para o elemento de dois nós,

$$a_i = \frac{d_i}{2}, \quad \varphi_{\alpha, \xi} = \frac{s^\alpha}{2}, \quad G = \frac{L_0^2}{4} \quad (6.35)$$

Assim:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{(d_i/2)(s^\alpha/2)}{L_0^2/4} \quad (6.36)$$

Portanto:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} = s^\alpha \frac{d_i}{L_0^2} \quad (6.37)$$

Explicitamente:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_i^1} = -\frac{d_i}{L_0^2}, \quad \frac{\partial E}{\partial Y_i^2} = +\frac{d_i}{L_0^2} \quad (6.38)$$

A segunda derivada da deformação na formulação parametrizada é:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{\varphi_{\alpha\xi} \varphi_{\beta\xi}}{G} \delta_{ik} \quad (6.39)$$

Substituindo as expressões do elemento linear,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{(s^\alpha/2)(s^\beta/2)}{L_0^2/4} \delta_{ik} \quad (6.40)$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = s^\alpha s^\beta \frac{\delta_{ik}}{L_0^2} \quad (6.41)$$

As expressões (6.37) e (6.41) coincidem com as derivadas obtidas diretamente a partir da deformação (6.33), confirmando a consistência diferencial da formulação parametrizada.

6.4 RECUPERAÇÃO DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

A energia de deformação do elemento parametrizado é

$$U = \int_{-1}^1 A_0 u_e(E) J_0 d\xi \quad (6.42)$$

No elemento de dois nós, E e J_0 são constantes ao longo de ξ . Assim,

$$U = A_0 u_e(E) J_0 \int_{-1}^1 d\xi \quad (6.43)$$

Como:

$$\int_{-1}^1 d\xi = 2, \quad J_0 = \frac{L_0}{2} \quad (6.44)$$

segue que:

$$U = A_0 L_0 u_e(E) \quad (6.45)$$

Para o modelo uniaxial de Saint-Venant–Kirchhoff:

$$u_e(E) = \frac{1}{2} K E^2 \quad (6.46)$$

resulta:

$$U = \frac{1}{2} A_0 L_0 K E^2 \quad (6.47)$$

Portanto, a energia da formulação parametrizada reduz-se exatamente à energia de deformação axial do elemento posicional reto. A equivalência energética é essencial porque a força interna e a Hessiana são obtidas por diferenciação de U em relação às posições nodais atuais.

6.5 RECUPERAÇÃO DA FORÇA INTERNA

A força interna do elemento parametrizado é:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = \int_{-1}^1 A_0 S \frac{a_i \varphi_{\alpha,\xi}}{J_0} d\xi \quad (6.48)$$

No elemento de dois nós, o integrando é constante. Logo:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = 2A_0 S \frac{a_i \varphi_{\alpha,\xi}}{J_0} \quad (6.49)$$

Substituindo:

$$a_i = \frac{d_i}{2}, \quad \varphi_{\alpha,\xi} = \frac{s^\alpha}{2}, \quad J_0 = \frac{L_0}{2} \quad (6.50)$$

tem-se:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = 2A_0 S \frac{(d_i/2)(s^\alpha/2)}{L_0/2} \quad (6.51)$$

Assim:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = s^\alpha \frac{A_0 S}{L_0} d_i \quad (6.52)$$

Explicitamente:

$$F_i^{\text{int},1} = -\frac{A_0 S}{L_0} d_i, \quad F_i^{\text{int},2} = +\frac{A_0 S}{L_0} d_i \quad (6.53)$$

A soma das forças internas nodais é nula:

$$F_i^{\text{int},1} + F_i^{\text{int},2} = 0 \quad (6.54)$$

Essa propriedade expressa o equilíbrio interno do elemento isolado. Além disso, a forma (6.52) coincide com a força interna do elemento posicional reto obtida a partir da derivada energética da barra axial.

6.6 RECUPERAÇÃO DA HESSIANA MATERIAL-GEOMÉTRICA

A Hessiana do elemento parametrizado é:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 \varphi_{\alpha,\xi} \varphi_{\beta,\xi} \left[K_t \frac{a_i a_k}{J_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{J_0} \right] d\xi \quad (6.55)$$

Para o elemento de dois nós, todos os termos do integrando são constantes. Portanto:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = 2A_0 \varphi_{\alpha,\xi} \varphi_{\beta,\xi} \left[K_t \frac{a_i a_k}{J_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{J_0} \right] \quad (6.56)$$

Usando:

$$\varphi_{\alpha,\xi} = \frac{s^\alpha}{2}, \quad \varphi_{\beta,\xi} = \frac{s^\beta}{2}, \quad a_i = \frac{d_i}{2}, \quad J_0 = \frac{L_0}{2} \quad (6.57)$$

obtém-se:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = 2A_0 \frac{s^\alpha s^\beta}{4} \left[K_t \frac{(d_i/2)(d_k/2)}{(L_0/2)^3} + S \frac{\delta_{ik}}{L_0/2} \right] \quad (6.58)$$

Como:

$$\frac{(d_i/2)(d_k/2)}{(L_0/2)^3} = 2 \frac{d_i d_k}{L_0^3} \quad (6.59)$$

e:

$$\frac{1}{L_0/2} = \frac{2}{L_0} \quad (6.60)$$

segue que:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = A_0 s^\alpha s^\beta \left[K_t \frac{d_i d_k}{L_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{L_0} \right] \quad (6.61)$$

A expressão (6.61) é a Hessiana material–geométrica do elemento posicional reto de dois nós. A primeira parcela, proporcional a K_t , corresponde à contribuição material, enquanto a segunda, proporcional a S , corresponde à contribuição geométrica associada ao estado de tensão axial. Para o material de Saint-Venant–Kirchhoff, tem-se $K_t = K$.

Os blocos nodais da Hessiana são:

$$H_{ik}^{11} = A_0 \left[K_t \frac{d_i d_k}{L_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{L_0} \right] \quad (6.62)$$

$$H_{ik}^{12} = -A_0 \left[K_t \frac{d_i d_k}{L_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{L_0} \right] \quad (6.63)$$

$$H_{ik}^{21} = -A_0 \left[K_t \frac{d_i d_k}{L_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{L_0} \right] \quad (6.64)$$

$$H_{ik}^{22} = A_0 \left[K_t \frac{d_i d_k}{L_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{L_0} \right] \quad (6.65)$$

A simetria energética é preservada:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = H_{ki}^{\beta\alpha} \quad (6.66)$$

6.7 RECUPERAÇÃO DA FORÇA NODAL EQUIVALENTE DE CARGA DISTRIBUÍDA

A formulação parametrizada também deve recuperar a força nodal equivalente usual para cargas distribuídas conservativas. A força nodal equivalente associada a uma carga $q_i(\xi)$, definida por unidade de comprimento inicial, é

$$Q_i^\alpha = \int_{-1}^1 \varphi_\alpha(\xi) q_i(\xi) J_0 d\xi \quad (6.67)$$

Se a carga distribuída é constante ao longo do elemento:

$$q_i(\xi) = q_i \quad (6.68)$$

então:

$$Q_i^\alpha = q_i J_0 \int_{-1}^1 \varphi_\alpha(\xi) d\xi \quad (6.69)$$

Para as funções lineares:

$$\int_{-1}^1 \varphi_1(\xi) d\xi = 1, \quad \int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) d\xi = 1 \quad (6.70)$$

Como $J_0 = L_0/2$, obtém-se:

$$Q_i^1 = \frac{q_i L_0}{2}, \quad Q_i^2 = \frac{q_i L_0}{2} \quad (6.71)$$

Portanto, uma carga distribuída constante no comprimento inicial é convertida em forças nodais equivalentes iguais nos dois nós, como esperado para um elemento linear submetido a carga morta uniforme.

6.8 SÍNTESE DO CAPÍTULO

A análise do caso $n = 2$ mostra que a formulação posicional parametrizada recupera exatamente as principais grandezas do elemento axial reto. A deformação de Green–Lagrange é:

$$E = \frac{d_i d_i - L_0^2}{2L_0^2} \quad (6.72)$$

a força interna é:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = s^\alpha \frac{A_0 S}{L_0} d_i \quad (6.73)$$

e a Hessiana é:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = A_0 s^\alpha s^\beta \left[K_t \frac{d_i d_k}{L_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{L_0} \right] \quad (6.74)$$

Desse modo, o elemento parametrizado de ordem arbitrária não substitui a formulação posicional reta; ele a contém como caso particular. Essa propriedade é central para a proposta desta dissertação, pois permite tratar barras retas e elementos axiais curvilíneos dentro de uma mesma organização cinemática e energética. Para $n = 2$, a interpretação física natural é a de uma barra axial reta, compatível com a formulação posicional de treliças. Para $n > 2$, a mesma estrutura passa a descrever uma linha média curvilínea, cuja especialização física será discutida em termos de elementos de cabo e da ausência de rigidez flexional.

7 ESPECIALIZAÇÃO CONSTITUTIVA: BARRA AXIAL E CABO

A formulação posicional parametrizada desenvolvida nos capítulos anteriores foi construída de modo independente de uma lei constitutiva particular. A cinemática definiu a linha material no domínio adimensional $\xi \in [-1, 1]$, a métrica inicial G , a métrica atual g , o jacobiano geométrico inicial J_0 , o jacobiano geométrico atual J e a deformação de Green–Lagrange uniaxial E . Em seguida, a formulação energética conduziu à força interna nodal consistente e à Hessiana material–geométrica por derivação da energia de deformação em relação às posições nodais atuais Y_i^α . Nesse percurso, a lei material entrou apenas por meio da energia específica $u_e(E)$, da tensão conjugada $S(E)$ e do módulo tangente $K_t(E)$.

Essa separação entre cinemática, constituição e solução numérica é uma característica importante da formulação proposta. A mesma descrição geométrica pode recuperar a barra axial reta de dois nós, já utilizada na formulação posicional de treliças, e também pode representar uma linha axial curvilínea de ordem superior. Entretanto, a interpretação mecânica desses dois usos não é a mesma. Uma barra reta de treliça pode ser idealizada como elemento axial com resistência à tração e à compressão. Um cabo, por outro lado, é uma estrutura essencialmente tracionada, incapaz de transmitir compressão de forma efetiva e sem rigidez flexional própria. Portanto, a passagem da barra axial reta para o cabo flexível não é apenas uma mudança de interpolação geométrica; ela exige uma especialização constitutiva compatível com a natureza unilateral do cabo.

O objetivo deste capítulo é explicitar essa especialização. Primeiro, apresenta-se a estrutura constitutiva geral em notação indicial, mantendo a compatibilidade com a força interna e com a Hessiana já deduzidas. Em seguida, discute-se a lei bilateral de Saint-Venant–Kirchhoff para barras axiais, adequada ao elemento reto de dois nós quando interpretado como treliça. Posteriormente, introduz-se uma lei unilateral à tração para cabos, analisando suas consequências energéticas, tangentes e numéricas. Por fim, discute-se a interpretação mecânica de elementos de ordem superior, reforçando a distinção entre cabo flexível, barra curva, arco e viga.

7.1 LEI BILATERAL PARA BARRA AXIAL

A especialização mais direta da formulação geral é a barra axial elástica bilateral. Nessa idealização, o elemento resiste tanto à tração quanto à compressão. Essa hipótese é adequada para a formulação de uma barra de treliça quando se deseja representar apenas a rigidez axial, sem momento fletor e sem instabilidade local de barra comprimida. No contexto posicional, essa escolha é coerente com formulações de treliças em grandes deslocamentos nas quais as posições nodais atuais são as variáveis primárias e a não linearidade geométrica é introduzida pela medida de deformação finita (Coda e Greco, 2004; Greco et al., 2006).

Adota-se, inicialmente, a energia uniaxial de Saint-Venant–Kirchhoff,

$$u_e(E) = \frac{1}{2}KE^2 \quad (7.1)$$

em que K é o módulo constitutivo uniaxial associado à deformação de Green–Lagrange. Para uma barra elástica homogênea, K pode ser relacionado ao módulo de elasticidade longitudinal no regime uniaxial. A tensão conjugada e o módulo tangente são:

$$S(E) = KE, \quad K_t(E) = K \quad (7.2)$$

Como a relação é bilateral, a tensão S muda de sinal de acordo com o sinal de E . Quando $E > 0$, o ponto material está tracionado; quando $E < 0$, está comprimido. Em ambos os casos, a lei fornece rigidez axial tangente positiva.

Substituindo (7.2) em na Equação da força interna, obtém-se:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = \int_{-1}^1 A_0 KE \frac{a_i \varphi_{\alpha,\xi}}{J_0} d\xi \quad (7.3)$$

A Hessiana correspondente é:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 \varphi_{\alpha,\xi} \varphi_{\beta,\xi} \left[K \frac{a_i a_k}{J_0^3} + KE \frac{\delta_{ik}}{J_0} \right] d\xi \quad (7.4)$$

A parcela material é sempre controlada por K , enquanto a parcela geométrica muda de sinal conforme o estado axial. Em compressão, essa parcela pode reduzir a rigidez tangente efetiva e contribuir para perda de positividade da Hessiana, fenômeno compatível com a análise não linear geométrica de estruturas comprimidas. Em tração, a parcela geométrica tende a estabilizar modos transversais associados ao estado de força axial.

No caso particular de dois nós e interpolação linear, a formulação parametrizada recupera exatamente a barra posicional reta apresentada no capítulo anterior. Nesse caso, o uso da lei bilateral é natural, pois a cinemática do elemento representa uma barra retilínea articulada, com esforço axial constante ao longo do comprimento inicial. Para elementos de ordem superior, porém, o simples uso da lei bilateral não é suficiente para caracterizar uma barra curva ou um arco estrutural. A lei material pode resistir à compressão axial local, mas a energia do elemento continua dependendo apenas do alongamento da linha média. Não há energia de curvatura e, portanto, não há rigidez flexional.

A possibilidade de interpolar a linha média com funções de Lagrange de ordem superior permite representar geometrias curvilíneas. Contudo, a presença de uma curva geométrica não transforma automaticamente o elemento em uma viga ou em um arco. A distinção é mecânica, e não apenas geométrica. Uma viga ou um arco possui resistência associada à flexão, exigindo medidas de curvatura, rotação de seções ou variáveis equivalentes. Formulações geometricamente exatas de vigas, por exemplo, incorporam a cinemática da linha média em conjunto com descrições de orientação e curvatura, de modo que a energia interna possua parcelas axiais e flexionais (Borković; Gfrerer; Marussig, 2023).

No elemento axial posicional parametrizado, a energia interna adotada é

$$U(Y) = \int_{-1}^1 A_0 u_e(E) J_0 d\xi \quad (7.5)$$

Essa expressão não contém uma parcela do tipo:

$$U_{\text{flex}} = \frac{1}{2} \int EI \kappa^2 d\ell_0 \quad (7.6)$$

em que EI seria uma rigidez flexional e κ uma medida de curvatura. A equação (7.6) é apresentada apenas para evidenciar a natureza da parcela que não faz parte da formulação proposta. Portanto, uma geometria inicial curvilínea descrita por $X_i(\xi)$ e uma configuração atual curvilínea descrita por $Y_i(\xi)$ não implicam resistência à mudança de curvatura. A curvatura é descrita geometricamente, mas não penalizada energeticamente.

Essa observação impõe uma leitura cautelosa da formulação. Para $n = 2$, o elemento é uma barra axial reta. Para $n > 2$, o elemento representa uma linha

axial curvilínea sem rigidez flexional. Essa linha pode ser usada para modelar cabos, fios ou tirantes flexíveis, desde que a lei constitutiva seja compatível com a predominância de tração. A designação “barra curva” deve ser evitada quando puder sugerir a presença de rigidez à flexão. Do mesmo modo, a designação “arco” não é adequada, pois um arco estrutural resiste a esforços por meio de combinação entre ação axial, cisalhamento e flexão, dependendo do modelo adotado.

A interpretação adotada neste trabalho é resumida por:

$$\begin{aligned} n = 2: & \text{ barra axial reta, adequada à modelagem de treliças;} \\ n > 2: & \text{ linha axial curvilínea, adequada à modelagem de cabos.} \end{aligned} \quad (7.7)$$

A equação (7.7) não é uma restrição matemática absoluta, mas uma orientação física para o uso da formulação. Matematicamente, pode-se avaliar uma lei bilateral em um elemento curvilíneo de ordem superior. Fisicamente, entretanto, um elemento curvilíneo puramente axial com compressão bilateral não deve ser confundido com uma viga curva ou com um arco.

7.2 LEI UNILATERAL À TRAÇÃO PARA CABOS

Um cabo ideal transmite esforço axial de tração, mas não transmite compressão de forma efetiva. Quando a deformação axial tende a produzir encurtamento, o cabo pode perder tensão e tornar-se frouxo. Esse comportamento é essencialmente unilateral. A literatura recente sobre estruturas de cabos e tensegridades com cabos frouxos destaca que a passagem entre estados ativos e inativos pode gerar dificuldades de convergência e descontinuidades na rigidez tangente (Liu; Geng; Luo, 2017). Formulações específicas de cabos também tratam a distribuição de tração e a geometria de equilíbrio de modo próprio, considerando catenárias, campos de tração ou tratamentos não lineares dedicados (Li; Huang; Chen, 2024); (Huang et al., 2023); (Bendalla; Morgenthal, 2023).

No presente trabalho, a forma mais simples de introduzir a unilateralidade consiste em substituir a lei bilateral por uma lei de tração positiva. Define-se a parte positiva de E por:

$$\langle E \rangle_+ = \max(E, 0) \quad 7.8$$

A tensão conjugada do cabo é então escrita como:

$$S(E) = K\langle E \rangle_+ \quad (7.9)$$

ou, equivalentemente:

$$S(E) = \begin{cases} KE, & E > 0, \\ 0, & E \leq 0. \end{cases} \quad (7.10)$$

Essa lei elimina a resistência compressiva. Quando $E \leq 0$, o ponto de integração é considerado inativo e não contribui para a força interna axial. Quando $E > 0$, o ponto de integração está ativo e responde como uma lei axial elástica em tração.

Uma energia específica compatível com (7.9) é:

$$u_e(E) = \frac{1}{2}K\langle E \rangle_+^2 \quad (7.11)$$

De fato, para $E > 0$, tem-se $u_e(E) = KE^2/2$ e $S(E) = KE$; para $E \leq 0$, tem-se $u_e(E) = 0$ e $S(E) = 0$. Assim, a energia não penaliza estados de encurtamento axial. O módulo tangente material é:

$$K_t(E) = \begin{cases} K, & E > 0, \\ 0, & E < 0. \end{cases} \quad (7.12)$$

No ponto $E = 0$, a lei não é diferenciável no sentido clássico. A escolha de $K_t(0)$ deve ser entendida como parte da estratégia numérica. Em um algoritmo ativo–inativo, adota-se usualmente a classificação do ponto de integração conforme o sinal de E no estado corrente ou no estado de tentativa. Em um método semissuave, a descontinuidade pode ser tratada no próprio esquema de Newton. Em uma estratégia regularizada, a parte positiva pode ser suavizada para produzir uma transição diferenciável.

Com a lei unilateral, a força interna do cabo pode ser escrita como:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = \int_{-1}^1 A_0 K\langle E \rangle_+ \frac{a_i \varphi_{\alpha,\xi}}{J_0} d\xi \quad (7.13)$$

De modo equivalente, introduzindo o conjunto ativo:

$$\mathcal{A} = \{\xi \in [-1,1] \mid E(\xi) > 0\} \quad (7.14)$$

pode-se escrever formalmente:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = \int_{\mathcal{A}} A_0 KE \frac{a_i \varphi_{\alpha,\xi}}{J_0} d\xi \quad (7.15)$$

Na implementação por quadratura, a ativação ocorre ponto a ponto. Para pontos de Gauss ξ_m e pesos w_m , define-se:

$$\mathcal{A}_g = \{m \mid E_m > 0\} \quad 7.16$$

A força interna aproximada torna-se:

$$F_i^{\text{int},\alpha} \approx \sum_{m \in \mathcal{A}_g} w_m A_0 KE_m \frac{a_{im} \varphi_{\alpha,\xi}(\xi_m)}{J_{0m}} \quad (7.17)$$

Essa forma deixa claro que pontos inativos não contribuem para o resíduo interno.

7.3 HESSIANA CONSISTENTE PARA A LEI UNILATERAL

Quando todos os pontos de integração permanecem ativos ou inativos durante uma iteração, a Hessiana tangente pode ser obtida pela substituição direta de $S(E)$ e $K_t(E)$ na expressão geral. Para a lei unilateral sem suavização, nos pontos ativos tem-se $S = KE$ e $K_t = K$; nos pontos inativos, $S = 0$ e $K_t = 0$. Assim, a Hessiana aproximada por quadratura é:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} \approx \sum_{m \in \mathcal{A}_g} w_m A_0 \varphi_{\alpha,\xi}(\xi_m) \varphi_{\beta,\xi}(\xi_m) \left[K \frac{a_{im} a_{km}}{J_{0m}^3} + KE_m \frac{\delta_{ik}}{J_{0m}} \right] \quad (7.18)$$

A forma (7.18) é a tangente consistente dentro de um conjunto ativo fixo. Entretanto, se um ponto de integração muda de estado durante a iteração, a função constitutiva sofre uma mudança de ramo. Essa transição pode reduzir a regularidade da resposta global e prejudicar a convergência quadrática típica do método de Newton.

A contribuição de um ponto inativo para a Hessiana é nula. Isso tem uma consequência mecânica e numérica importante. Em uma região frouxa do cabo, a energia axial não fornece rigidez local. Se muitos pontos de integração estão

inativos, ou se os pontos ativos geram pouca variação de comprimento para certos modos de deslocamento, a Hessiana global pode apresentar autovalores muito pequenos. Essa situação não representa necessariamente um erro da formulação; ela pode refletir a própria natureza física de uma linha flexível sem rigidez à compressão e sem rigidez à flexão. Contudo, para a solução incremental, a presença de modos quase nulos pode causar mau condicionamento severo.

Essa observação antecipa a necessidade de distinguir duas questões. A primeira é física: o cabo ideal deve permanecer sem rigidez de flexão e sem resistência compressiva. A segunda é algorítmica: o sistema incremental precisa ser resolvido de forma robusta. A regularização espectral mínima da Hessiana, discutida em capítulo posterior, atua apenas sobre a segunda questão. Ela não deve ser interpretada como acréscimo de rigidez flexional física ao cabo.

A lei definida por (7.8) é simples e fisicamente transparente, mas apresenta uma não diferenciabilidade em $E = 0$. Em análises nas quais a alternância entre pontos ativos e inativos dificulte a convergência, pode-se adotar uma aproximação suavizada da parte positiva. Uma escolha possível é

$$\langle E \rangle_{+, \varepsilon} = \frac{1}{2} (E + \sqrt{E^2 + \varepsilon^2}), \quad \varepsilon > 0 \quad (7.19)$$

Nesse caso, a tensão regularizada é:

$$S_\varepsilon(E) = K \langle E \rangle_{+, \varepsilon} \quad (7.20)$$

e o módulo tangente correspondente é

$$K_{t, \varepsilon}(E) = \frac{dS_\varepsilon}{dE} = \frac{K}{2} \left(1 + \frac{E}{\sqrt{E^2 + \varepsilon^2}} \right) \quad (7.21)$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a função suavizada converge para a parte positiva clássica. Para ε finito, a transição entre o ramo inativo e o ramo ativo torna-se diferenciável, o que pode facilitar a solução por Newton. Contudo, essa suavização introduz uma pequena resposta residual mesmo em estados levemente compressivos, dependendo do valor de ε . Por esse motivo, ela deve ser interpretada como artifício numérico, não como alteração do modelo físico ideal.

Neste trabalho, a lei unilateral não suavizada é tomada como referência conceitual, por explicitar de forma direta a distinção entre barra e cabo. A

suavização (7.19) permanece como alternativa computacional para estudos posteriores ou para análises em que a troca de estado ativo–inativo se torne dominante.

7.4 PRÉ-TRAÇÃO E DEFORMAÇÃO INICIAL EM CABOS

Muitos sistemas estruturais de cabos trabalham com pré-tração. Em tais casos, o cabo não parte necessariamente de um estado sem tensão quando $E = 0$. A formulação energética pode acomodar essa situação por meio de uma deformação inicial, de uma tensão inicial ou de uma combinação entre ambas. Uma forma simples de representar uma resposta bilateral com deformação inicial E_0 seria:

$$S(E) = K(E - E_0) \quad (7.22)$$

com energia associada:

$$u_e(E) = \frac{1}{2}K(E - E_0)^2 \quad (7.23)$$

Para um cabo unilateral pré-tracionado, uma possibilidade é aplicar a condição de tração positiva sobre uma tensão tentativa:

$$S(E) = \langle S_0 + K(E - E_0) \rangle_+ \quad (7.24)$$

em que S_0 representa uma tensão axial inicial de referência. O correspondente módulo tangente, no caso não suavizado, é:

$$K_t(E) = \begin{cases} K, & S_0 + K(E - E_0) > 0, \\ 0, & S_0 + K(E - E_0) \leq 0. \end{cases} \quad (7.25)$$

Essa extensão não é necessária para a definição básica do elemento, mas é relevante para aplicações futuras em estruturas de cabos, tensegridades e sistemas protendidos. Ela mostra que a formulação posicional parametrizada não está restrita a cabos inicialmente sem tensão. O ponto essencial é que qualquer pré-tração incorporada ao modelo deve aparecer de modo consistente na energia, na força interna e na Hessiana tangente.

Nesta dissertação, a lei básica sem pré-tração será priorizada para isolar os efeitos da cinemática curvilínea, da unilateralidade à tração e do condicionamento da Hessiana. A inclusão de pré-tração deve ser entendida como uma extensão direta, mas não como requisito para a formulação fundamental.

A configuração de equilíbrio de um cabo submetido ao peso próprio e a determinadas condições de apoio é frequentemente associada à catenária. Formulações específicas exploram essa propriedade para construir elementos de cabo com representação precisa do campo de tração ou da geometria de equilíbrio, conforme Li, Huang e Chen (2024) e Huang et al. (2023). Essa abordagem é eficiente quando a classe de carregamento e as hipóteses do modelo permitem aproveitar a solução catenária como descrição interna do elemento.

A proposta desta dissertação segue uma direção diferente. A forma do cabo não é imposta previamente como catenária exata. Em vez disso, a linha média é interpolada por funções de Lagrange, e a configuração de equilíbrio resulta da solução não linear do problema. Assim, a catenária pode ser aproximada por refinamento da malha, por aumento da ordem de interpolação ou por uma combinação de ambos. Essa estratégia é menos especializada, mas oferece uma estrutura mais uniforme para tratar geometrias iniciais arbitrárias, carregamentos distribuídos conservativos e acoplamento com técnicas gerais de solução incremental.

A distinção entre catenária exata e aproximação polinomial deve ser mantida explícita. Um elemento de Lagrange de ordem superior não reproduz automaticamente uma catenária em um único elemento. Ele apenas amplia o espaço aproximativo da linha média. A qualidade da resposta depende da ordem de interpolação, da integração numérica, da distribuição de nós, da intensidade do carregamento e da capacidade do algoritmo não linear de encontrar a configuração equilibrada. Portanto, a proposta não substitui formulações catenárias especializadas; ela oferece um sistema posicional geral no qual o comportamento de cabos pode ser aproximado de maneira sistemática.

A ausência de rigidez flexional é uma característica física desejável quando se pretende modelar cabos ideais. No entanto, essa mesma característica produz consequências numéricas relevantes. Em elementos de ordem superior, os nós intermediários permitem variações de forma da linha média. Algumas dessas variações podem alterar significativamente a geometria visual do elemento, mas

produzir pequena variação do alongamento local. Como a energia interna depende apenas de E , esses modos podem receber pouca rigidez energética.

Considere uma perturbação incremental ΔY_i^α . A energia incremental associada à Hessiana pode ser escrita formalmente como:

$$\Delta U^{(2)} = \frac{1}{2} \Delta Y_i^\alpha H_{ik}^{\alpha\beta} \Delta Y_k^\beta \quad (7.26)$$

Se ΔY_i^α representa um modo que modifica a forma da linha com pequena alteração de comprimento, então $\Delta U^{(2)}$ pode ser muito pequeno. Em termos matriciais, isso se manifesta por autovalores positivos próximos de zero na Hessiana reduzida após a imposição das condições de contorno. O problema é intensificado quando a lei unilateral torna pontos de integração inativos, pois nesses pontos não há contribuição material nem geométrica para a rigidez tangente.

Essa dificuldade não deve ser resolvida introduzindo artificialmente uma energia de flexão física, pois isso mudaria o modelo estrutural. A alternativa adotada nesta dissertação é manter a energia do cabo puramente axial e tratar o mau condicionamento por meio de regularização algorítmica seletiva da Hessiana. A regularização espectral mínima, apresentada posteriormente, atua sobre modos positivos mal condicionados do sistema incremental, sem alterar o resíduo de equilíbrio original. Desse modo, preserva-se a interpretação mecânica do cabo e melhora-se a robustez do processo iterativo.

7.5 SÍNTESE DO CAPÍTULO

A formulação posicional parametrizada permite organizar a modelagem do elemento axial em três níveis distintos. O primeiro nível é cinemático e define a interpolação da linha média por meio das funções de forma $\varphi_\alpha(\xi)$. O segundo é constitutivo e define a relação entre E , $u_e(E)$, $S(E)$ e $K_t(E)$. O terceiro é algorítmico e define como o sistema não linear será resolvido e estabilizado quando necessário. Essa separação é essencial para evitar interpretações mecânicas ambíguas.

Para a barra axial reta de dois nós, adota-se a lei bilateral

$$u_e(E) = \frac{1}{2} K E^2, \quad S(E) = K E, \quad K_t(E) = K \quad (7.27)$$

Essa escolha é compatível com a formulação posicional de treliças e permite resistência axial à tração e à compressão. Para o cabo flexível, adota-se como modelo básico a lei unilateral:

$$u_e(E) = \frac{1}{2}K\langle E \rangle_+^2, \quad S(E) = K\langle E \rangle_+, \quad K_t(E) = \begin{cases} K, & E > 0, \\ 0, & E < 0. \end{cases} \quad (7.28)$$

Essa escolha impede resistência compressiva e torna a ativação da rigidez dependente do estado local de deformação. O quadro conceitual resultante pode ser resumido por:

$$\begin{array}{llll} \text{interpolação linear} & + & \text{lei bilateral} & \Rightarrow \text{ barra axial reta de treliça,} \\ \text{interpolação de ordem superior} & + & \text{lei unilateral à tração} & \Rightarrow \text{ cabo flexível puramente axial.} \end{array} \quad (7.29)$$

Essa síntese não elimina a possibilidade de outras combinações constitutivas, mas estabelece as escolhas mecanicamente coerentes adotadas nesta dissertação. A continuidade entre os dois casos é garantida pela mesma estrutura energética e pela mesma notação indicial. A diferença está na interpretação física e no comportamento da lei constitutiva diante de estados de compressão.

A partir dessa especialização, os capítulos seguintes tratam dos métodos incrementais e regularização espectral da Hessiana sem modificar o núcleo cinemático do elemento. A modelagem de barras e cabos passa, assim, a ser descrita em um método posicional comum, mas com hipóteses constitutivas explicitamente diferenciadas.

8 REGULARIZAÇÃO ESPECTRAL MÍNIMA DA HESSIANA

A formulação posicional parametrizada desenvolvida nos capítulos anteriores conduz a um sistema de equilíbrio não linear escrito em termos das posições nodais atuais. De maneira simplificada, a força interna e a Hessiana foram obtidas pela diferenciação da energia de deformação em relação às incógnitas posicionais Y_i^α . Após a montagem global, a imposição das condições de contorno essenciais e a restrição aos graus de liberdade livres, o problema incremental assume a forma de um sistema algébrico linearizado. Este capítulo introduz uma estratégia de regularização espectral mínima para esse sistema incremental, com o objetivo de controlar o mau condicionamento associado a modos positivos quase nulos da Hessiana.

A necessidade dessa regularização está diretamente relacionada à natureza mecânica do elemento axial curvilíneo quando especializado como cabo. A energia de deformação considerada, depende apenas da deformação axial local. Não há, nessa formulação, energia associada à curvatura da linha média. Essa decisão preserva a interpretação de cabo ideal sem rigidez flexional, mas permite a existência de modos quase inextensíveis, nos quais a geometria da curva se modifica com pequena variação da energia axial. Tais modos podem gerar autovalores positivos muito pequenos na Hessiana tangente, deteriorando o condicionamento do sistema incremental e tornando a iteração de Newton sensível a perturbações numéricas.

O ponto central deste capítulo é separar dois aspectos que, em problemas não lineares, podem aparecer simultaneamente. O primeiro é físico: a perda de estabilidade, a proximidade de pontos limites, a bifurcação ou a existência de ramos pós-críticos podem se manifestar por autovalores nulos ou negativos da Hessiana. O segundo é numérico: autovalores positivos muito pequenos podem tornar a resolução linear mal condicionada, mesmo quando se deseja apenas calcular uma correção incremental local. A regularização aqui proposta atua somente sobre o segundo aspecto. Ela não corrige autovalores negativos, não altera a equação de equilíbrio original e não introduz rigidez de flexão permanente ao elemento. A intervenção é restrita ao sistema linearizado usado para calcular a correção incremental.

Estratégias baseadas em autovalores têm sido empregadas em diferentes contextos de estabilização numérica de elementos finitos, especialmente em formulações imersas, problemas com matrizes tangentes mal condicionadas e procedimentos de otimização estrutural não linear (Garhuom, Usman, Düster, 2022); (Eisenträger et al., 2024); (Scherz, Kriegesmann, Pedersen, 2024). Regularizações espectrais também aparecem em problemas inversos mal postos, nos quais a informação espectral da Hessiana é usada para controlar direções de baixa curvatura (Hart; Van Bloemen Waanders, 2023). A proposta desenvolvida neste trabalho adapta esse princípio ao elemento axial posicional parametrizado, mantendo a coerência com a formulação energética e indicial empregada desde a construção da cinemática até a obtenção da Hessiana.

8.1 SISTEMA INCREMENTAL REDUZIDO EM NOTAÇÃO INDICIAL

No nível elementar, o resíduo de equilíbrio associado ao nó α e à direção espacial i pode ser escrito como:

$$g_i^\alpha(Y) = F_i^{\text{int},\alpha}(Y) - F_i^{\text{ext},\alpha}(Y) \quad (8.1)$$

em que $F_i^{\text{int},\alpha}$ é a força interna nodal consistente e $F_i^{\text{ext},\alpha}$ representa a força externa nodal, incluindo contribuições concentradas e distribuídas quando presentes. A Hessiana elementar é dada por:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{\partial g_i^\alpha}{\partial Y_k^\beta} \quad (8.2)$$

Para carregamentos conservativos independentes da configuração atual, a derivada da força externa em relação às posições nodais é nula, de modo que a Hessiana coincide com a derivada da força interna. Para as forças dependentes da configuração deformada, a contribuição tangente externa deve ser incorporada separadamente.

Após a montagem global e a imposição das condições de contorno essenciais, considera-se o conjunto dos graus de liberdade livres. Para escrever o sistema reduzido de forma compacta, introduz-se um índice global reduzido A , que representa o par formado por um nó global livre e uma direção espacial. Assim, cada

componente reduzida Y_A corresponde a uma incógnita posicional ativa. O índice B possui a mesma interpretação, e adota-se a convenção de soma para índices repetidos. Com essa notação, o resíduo reduzido é denotado por g_A , e a Hessiana reduzida por:

$$H_{AB} = \frac{\partial g_A}{\partial Y_B} \quad (8.3)$$

A linearização de Newton em uma iteração r fornece

$$g_A^{(r)} + H_{AB}^{(r)} \Delta Y_B^{(r)} \approx 0 \quad (8.4)$$

ou, equivalentemente:

$$H_{AB}^{(r)} \Delta Y_B^{(r)} = -g_A^{(r)} \quad (8.5)$$

Esse é o sistema sobre o qual a regularização espectral será aplicada. A notação com índices globais reduzidos não substitui a notação indicial elementar; ela apenas organiza, em um único índice ativo, as componentes nodais e espaciais que permanecem livres após as restrições cinemáticas.

A simetria de H_{AB} é uma propriedade esperada quando o problema é derivado de um potencial escalar e quando as condições de contorno são impostas de forma compatível. Como a energia interna do elemento foi construída por integração da densidade de energia no comprimento inicial, a Hessiana elementar obtida por segunda derivada da energia é simétrica nos pares de índices. Essa simetria é preservada pela montagem global e pela extração do sistema reduzido, desde que não sejam introduzidas contribuições externas não conservativas. A regularização espectral proposta neste capítulo pressupõe essa simetria.

8.2 ORIGEM MECÂNICA DO MAU CONDICIONAMENTO

A Hessiana do elemento axial parametrizado contém duas parcelas principais: uma parcela material, associada à variação da tensão axial em relação à deformação, e uma parcela geométrica, associada à presença da tensão axial na configuração atual.

No nível elementar, essa estrutura foi escrita na forma:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 \phi_{\alpha,\xi} \phi_{\beta,\xi} \left[K_t \frac{a_i a_k}{J_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{J_0} \right] d\xi \quad (8.6)$$

em que A_0 é a área inicial da seção transversal, ϕ_α são as funções de forma, a_i é o vetor tangente atual, J_0 é o Jacobiano geométrico inicial, S é a tensão de Saint-Venant uniaxial e K_t é o módulo tangente material. Essa expressão evidencia que a rigidez decorre da deformação axial e do estado de tensão axial. Não há termo associado à variação de uma curvatura, pois tal energia não foi introduzida na formulação.

Em um elemento reto de dois nós, essa ausência de energia de flexão é coerente com a hipótese de barra de treliça: o elemento transmite esforço axial entre seus nós, e os mecanismos estruturais são controlados pela conectividade da treliça. Em um elemento curvilíneo de ordem superior, entretanto, a interpolação admite graus de liberdade intermediários que podem alterar a forma da curva. Quando essas alterações produzem pequena variação do alongamento local, surgem direções incrementais com baixa rigidez axial efetiva. A Hessiana reduzida, portanto, pode apresentar autovalores positivos próximos de zero, ainda que a formulação esteja mecanicamente consistente.

Essa situação não deve ser corrigida pela introdução indiscriminada de rigidez de flexão física. Acrescentar uma energia de curvatura transformaria o elemento em outro modelo mecânico, mais próximo de uma viga ou arco. O objetivo da regularização proposta é diferente: estabilizar a resolução do sistema incremental, sem modificar o resíduo de equilíbrio e sem alterar a interpretação do elemento como barra axial ou cabo flexível. Por isso, a regularização é construída no espaço modal da Hessiana reduzida, de forma seletiva e com intensidade mínima controlada por um número de condição admissível.

8.3 PROBLEMA ESPECTRAL DA HESSIANA REDUZIDA

Considere a Hessiana reduzida H_{AB} avaliada em uma configuração tentativa. Para simplificar a notação desta seção, o índice de iteração é omitido, entendendo-se que todas as grandezas são avaliadas em uma iteração específica. O problema espectral associado é dado por:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 \phi_{\alpha,\xi} \phi_{\beta,\xi} \left[K_t \frac{a_i a_k}{J_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{J_0} \right] d\xi \quad (8.7)$$

em que m é o número de graus de liberdade livres do sistema reduzido, λ_j é o autovalor associado ao modo $v_A^{(j)}$ e os autovetores são escolhidos ortonormais, isto é:

$$v_A^{(j)} v_A^{(\ell)} = \delta_{j\ell} \quad (8.8)$$

Quando a Hessiana é simétrica, os autovalores são reais e os autovetores podem formar uma base ortonormal do espaço reduzido. A decomposição espectral pode então ser escrita, em notação indicial, como:

$$H_{AB} = \sum_{j=1}^m \lambda_j v_A^{(j)} v_B^{(j)} \quad (8.9)$$

Em regiões nas quais a Hessiana é positiva definida, os autovalores podem ser ordenados como:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \quad (8.10)$$

e o número de condição espectral é:

$$\kappa(H) = \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \quad (8.11)$$

Quando λ_1 se aproxima de zero, o número de condição cresce e o sistema incremental torna-se sensível a perturbações numéricas. Em termos práticos, a correção ΔY_A pode apresentar componentes exageradas na direção do modo de baixa rigidez, prejudicando a convergência do processo incremental.

Em análise não linear, entretanto, a Hessiana nem sempre é positiva definida. Em proximidade de pontos críticos ou em ramos instáveis, autovalores negativos podem aparecer. Por essa razão, a construção adotada neste capítulo utiliza o subconjunto dos autovalores positivos. Define-se:

$$\lambda_{\max}^+ = \max\{\lambda_j \mid \lambda_j > 0\} \quad (8.12)$$

quando esse conjunto é não vazio. A regularização proposta atua apenas sobre autovalores positivos pequenos. Autovalores negativos e autovalores nulos

associados a perda de estabilidade ou a mecanismos não removidos pelas condições de contorno não são convertidos automaticamente em valores positivos.

8.4 CRITÉRIO DE CONDICIONAMENTO ADMISSÍVEL

Seja κ_{adm} o número de condição máximo admitido para a parte positiva do espectro utilizada no cálculo incremental. A partir de λ_{max}^+ , define-se o autovalor mínimo admissível por:

$$\lambda_{\text{adm}} = \frac{\lambda_{\text{max}}^+}{\kappa_{\text{adm}}} \quad (8.13)$$

O parâmetro κ_{adm} deve ser escolhido como parâmetro numérico de controle. Valores excessivamente baixos produzem regularização forte e podem influenciar a trajetória incremental. Valores excessivamente altos reduzem a intervenção, mas podem não corrigir suficientemente o mau condicionamento.

O conjunto dos modos positivos mal condicionados é definido por:

$$\mathcal{B} = \{j \mid 0 < \lambda_j < \lambda_{\text{adm}}\} \quad (8.14)$$

Para cada modo $j \in \mathcal{B}$, introduz-se uma rigidez modal estabilizante:

$$\eta_j = \lambda_{\text{adm}} - \lambda_j \quad (8.15)$$

Como $\lambda_j < \lambda_{\text{adm}}$, tem-se $\eta_j > 0$. Essa escolha é mínima no sentido espectral: ela eleva cada autovalor problemático exatamente até o limite admissível, sem deslocar os demais modos.

Quando $\mathcal{B}$ é vazio, a Hessiana reduzida já satisfaz o critério adotado para os autovalores positivos e nenhuma estabilização é aplicada. Nesse caso, a formulação coincide com a solução incremental original. Essa propriedade é importante porque a regularização não deve atuar como componente permanente do modelo numérico, mas apenas como mecanismo adaptativo de controle do condicionamento.

8.5 CONSTRUÇÃO INDICIAL DA HESSIANA REGULARIZADA

A contribuição estabilizante associada aos modos em $\mathcal{B}$ é definida por:

$$H_{AB}^{\text{stab}} = \sum_{j \in \mathcal{B}} \eta_j v_A^{(j)} v_B^{(j)} \quad (8.16)$$

Substituindo a definição de η_j , obtém-se:

$$H_{AB}^{\text{stab}} = \sum_{j \in \mathcal{B}} (\lambda_{\text{adm}} - \lambda_j) v_A^{(j)} v_B^{(j)} \quad (8.17)$$

A Hessiana regularizada é então dada por:

$$H_{AB}^{\text{reg}} = H_{AB} + H_{AB}^{\text{stab}} \quad (8.18)$$

ou, explicitamente:

$$\boxed{H_{AB}^{\text{reg}} = H_{AB} + \sum_{j \in \mathcal{B}} (\lambda_{\text{adm}} - \lambda_j) v_A^{(j)} v_B^{(j)}} \quad (8.19)$$

Essa construção difere de uma penalização escalar do tipo $H_{AB} + k\delta_{AB}$. A penalização escalar desloca todos os autovalores de maneira uniforme, modificando também os modos bem condicionados e alterando a escala global da matriz tangente. Na regularização espectral mínima, a intervenção é restrita às direções modais efetivamente problemáticas. O termo H_{AB}^{stab} é simétrico e semi-definido positivo, desde que $\eta_j > 0$, e sua imagem está contida no subespaço gerado pelos autovetores selecionados.

A forma indicial também evidencia que a regularização é aplicada após a montagem e a redução do sistema, não no nível das integrais elementares. Portanto, ela não altera diretamente a expressão da energia interna do elemento, da

força interna elementar ou da Hessiana física elementar. A matriz estabilizante é uma correção algorítmica da matriz usada para calcular a correção incremental.

8.6 PROPRIEDADE DE MINIMALIDADE ESPECTRAL

A propriedade de minimalidade pode ser demonstrada pela ação de H_{AB}^{reg} sobre os autovetores da Hessiana física. Para um modo $\ell \in \mathcal{B}$, tem-se:

$$H_{AB} v_B^{(\ell)} = \lambda_\ell v_A^{(\ell)} \quad (8.20)$$

A ação da matriz estabilizante sobre esse mesmo modo é:

$$H_{AB}^{\text{stab}} v_B^{(\ell)} = \sum_{j \in \mathcal{B}} \eta_j v_A^{(j)} v_B^{(j)} v_B^{(\ell)} \quad (8.21)$$

Pela ortonormalidade dos autovetores:

$$v_B^{(j)} v_B^{(\ell)} = \delta_{j\ell} \quad (8.22)$$

resulta:

$$H_{AB}^{\text{stab}} v_B^{(\ell)} = \eta_\ell v_A^{(\ell)} \quad (8.23)$$

Logo:

$$H_{AB}^{\text{reg}} v_B^{(\ell)} = (\lambda_\ell + \eta_\ell) v_A^{(\ell)} \quad (8.24)$$

Substituindo $\eta_\ell = \lambda_{\text{adm}} - \lambda_\ell$, obtém-se:

$$H_{AB}^{\text{reg}} v_B^{(\ell)} = \lambda_{\text{adm}} v_A^{(\ell)} \quad (8.25)$$

Portanto, cada autovalor positivo mal condicionado é elevado exatamente ao menor valor permitido pelo critério adotado.

Para um modo $\ell \notin \mathcal{B}$, considerando a base ortonormal completa, tem-se:

$$H_{AB}^{\text{stab}} v_B^{(\ell)} = 0 \quad (8.26)$$

e, conseqüentemente:

$$H_{AB}^{\text{reg}} v_B^{(\ell)} = H_{AB} v_B^{(\ell)} = \lambda_\ell v_A^{(\ell)} \quad (8.27)$$

Assim, os modos não selecionados permanecem inalterados. Essa é a razão para denominar a estratégia como regularização espectral mínima: a correção modifica apenas o necessário para que o espectro positivo satisfaça o limite inferior imposto por λ_{adm} .

8.7 INTERPRETAÇÃO ENERGÉTICA INCREMENTAL

Embora a regularização seja algorítmica, ela admite uma interpretação energética no modelo quadrático incremental. Define-se a coordenada modal incremental associada ao modo j por:

$$q_j = v_A^{(j)} \Delta Y_A \quad (8.28)$$

A energia estabilizante incremental associada aos modos selecionados é:

$$U_{\text{stab}}^{(r)} = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{B}} \eta_j q_j^2 \quad (8.29)$$

Como:

$$q_j^2 = \Delta Y_A v_A^{(j)} v_B^{(j)} \Delta Y_B \quad (8.30)$$

segue que:

$$U_{\text{stab}}^{(r)} = \frac{1}{2} \Delta Y_A \left(\sum_{j \in \mathcal{B}} \eta_j v_A^{(j)} v_B^{(j)} \right) \Delta Y_B \quad (8.31)$$

Portanto:

$$U_{\text{stab}}^{(r)} = \frac{1}{2} \Delta Y_A H_{AB}^{\text{stab}} \Delta Y_B \quad (8.32)$$

A energia $U_{\text{stab}}^{(r)}$ não é adicionada à energia potencial total da estrutura. Ela pertence apenas ao modelo quadrático incremental da iteração r . Essa distinção é fundamental. Se a energia estabilizante fosse incorporada ao funcional físico, a força interna e a Hessiana física seriam alteradas, modificando a solução de equilíbrio. No procedimento proposto, o resíduo físico continua sendo:

$$g_A(Y) = F_A^{\text{int}}(Y) - F_A^{\text{ext}}(Y) \quad (8.33)$$

e a convergência é verificada em relação a esse resíduo, não em relação a uma força estabilizante artificial.

O modelo quadrático de Newton pode ser escrito como:

$$m(\Delta Y) = g_A \Delta Y_A + \frac{1}{2} \Delta Y_A H_{AB} \Delta Y_B \quad (8.34)$$

Com a regularização, utiliza-se:

$$m_{\text{reg}}(\Delta Y) = g_A \Delta Y_A + \frac{1}{2} \Delta Y_A H_{AB}^{\text{reg}} \Delta Y_B \quad (8.35)$$

A estacionariedade desse modelo em relação à correção incremental fornece:

$$\frac{\partial m_{\text{reg}}}{\partial \Delta Y_A} = g_A + H_{AB}^{\text{reg}} \Delta Y_B = 0 \quad (8.36)$$

de onde resulta o sistema incremental regularizado:

$$\boxed{H_{AB}^{\text{reg}} \Delta Y_B = -g_A} \quad (8.37)$$

Se o processo iterativo converge, a solução final deve satisfazer a equação de equilíbrio original:

$$g_A(Y) = 0 \quad (8.38)$$

A regularização altera a direção incremental calculada durante as iterações, mas não redefine o problema mecânico a ser resolvido.

8.8 ATUALIZAÇÃO ADAPTATIVA AO LONGO DAS ITERAÇÕES

Como a Hessiana depende da configuração atual, a regularização deve ser atualizada a cada iteração de Newton. Na iteração r , avalia-se o resíduo físico:

$$g_A^{(r)} = g_A(Y^{(r)}) \quad (8.39)$$

e monta-se a Hessiana reduzida física:

$$H_{AB}^{(r)} = \left. \frac{\partial g_A}{\partial Y_B} \right|_{Y=Y^{(r)}} \quad (8.40)$$

Resolve-se, então, o problema espectral:

$$H_{AB}^{(r)} v_B^{(j,r)} = \lambda_j^{(r)} v_A^{(j,r)} \quad (8.41)$$

A partir dos autovalores positivos, calcula-se:

$$\lambda_{\text{adm}}^{(r)} = \frac{\lambda_{\text{max}}^{+(r)}}{\kappa_{\text{adm}}} \quad (8.42)$$

e identifica-se o conjunto:

$$\mathcal{B}^{(r)} = \{j \mid 0 < \lambda_j^{(r)} < \lambda_{\text{adm}}^{(r)}\} \quad (8.43)$$

A matriz estabilizante da iteração é:

$$H_{AB}^{\text{stab},(r)} = \sum_{j \in \mathcal{B}^{(r)}} \left(\lambda_{\text{adm}}^{(r)} - \lambda_j^{(r)} \right) v_A^{(j,r)} v_B^{(j,r)} \quad (8.44)$$

e a Hessiana regularizada usada no cálculo incremental é:

$$H_{AB}^{\text{reg},(r)} = H_{AB}^{(r)} + H_{AB}^{\text{stab},(r)} \quad (8.45)$$

A correção incremental é obtida por:

$$H_{AB}^{\text{reg},(r)} \Delta Y_B^{(r)} = -g_A^{(r)} \quad (8.46)$$

e a atualização posicional é:

$$Y_A^{(r+1)} = Y_A^{(r)} + \Delta Y_A^{(r)} \quad (8.47)$$

Quando o conjunto $\mathcal{B}^{(r)}$ é vazio, tem-se:

$$H_{AB}^{\text{stab},(r)} = 0, \quad H_{AB}^{\text{reg},(r)} = H_{AB}^{(r)} \quad (8.48)$$

Assim, o método retorna automaticamente à iteração de Newton não regularizada sempre que o condicionamento da parte positiva do espectro for aceitável.

8.9 AUTOVALORES NEGATIVOS E INTERPRETAÇÃO DE ESTABILIDADE

A presença de autovalores negativos na Hessiana tangente tem interpretação distinta da presença de autovalores positivos pequenos. Um autovalor negativo pode indicar que o ponto corrente pertence a um ramo instável, que a estrutura atravessou um ponto limite ou que há uma direção de perda de estabilidade associada ao equilíbrio. Em problemas de instabilidade, tais informações são mecanicamente relevantes e não devem ser apagadas por uma estabilização automática.

Por essa razão, a regularização conservadora adotada neste trabalho atua apenas sobre autovalores que satisfazem:

$$0 < \lambda_j < \lambda_{\text{adm}} \quad (8.49)$$

Autovalores negativos devem ser reportados, armazenados e analisados como indicadores do estado tangente da estrutura. Essa decisão é especialmente importante quando a formulação for acoplada a métodos de continuação, pois a travessia de pontos limites e a identificação de mudanças de estabilidade dependem da informação espectral da Hessiana.

Também é necessário distinguir autovalores quase nulos associados a mau condicionamento de autovalores nulos decorrentes de restrições insuficientes.

Modos de corpo rígido ou mecanismos globais produzidos por condições de contorno inadequadas não devem ser tratados por regularização espectral. Nesses casos, a correção apropriada é revisar o modelo estrutural, as restrições essenciais e a conectividade da malha. A regularização proposta pressupõe que os movimentos de corpo rígido já foram removidos pelo processo de redução do sistema.

Em formulações com carregamentos não conservativos, forças seguidoras ou tangentes externas assimétricas, a matriz tangente pode perder simetria. Nesses casos, a decomposição espectral ortonormal empregada neste capítulo deixa de ser diretamente aplicável. Uma extensão possível exigiria trabalhar com a parte simétrica da tangente, com decomposição singular ou com estratégias específicas para operadores não simétricos. Essa extensão não é considerada nesta dissertação.

8.10 INDICADORES DE INTENSIDADE DA REGULARIZAÇÃO

Para que a regularização seja usada de forma controlada, recomenda-se monitorar indicadores capazes de quantificar sua influência no sistema incremental. O primeiro indicador é a razão entre a norma de Frobenius da matriz estabilizante e a norma de Frobenius da Hessiana física:

$$\rho_{\text{stab}} = \frac{(H_{AB}^{\text{stab}} H_{AB}^{\text{stab}})^{1/2}}{(H_{AB} H_{AB})^{1/2}} \quad (8.50)$$

Valores pequenos de ρ_{stab} indicam que a matriz estabilizante é pequena em relação à rigidez tangente física. Valores elevados indicam que a direção incremental está sendo fortemente influenciada pela regularização, o que deve ser analisado com cautela.

O segundo indicador é a participação energética incremental da estabilização:

$$r_{\text{stab}} = \frac{\Delta Y_A H_{AB}^{\text{stab}} \Delta Y_B}{\Delta Y_A H_{AB}^{\text{reg}} \Delta Y_B} \quad (8.51)$$

Esse indicador mede a fração da curvatura quadrática incremental atribuída à contribuição estabilizante ao longo da correção calculada. Se r_{stab} é

pequeno, a direção incremental permanece dominada pela Hessiana física. Se r_{stab} é grande, a regularização está desempenhando papel relevante na direção de Newton e deve ser registrada na análise dos resultados.

Também é útil monitorar o número de modos estabilizados:

$$n_{\mathcal{B}} = \text{card}(\mathcal{B}) \quad (8.52)$$

bem como os menores autovalores positivos antes e depois da regularização. Para os modos estabilizados, a relação:

$$\lambda_j^{\text{reg}} = \lambda_{\text{adm}}, \quad j \in \mathcal{B} \quad (8.53)$$

deve ser satisfeita. Para os demais modos:

$$\lambda_j^{\text{reg}} = \lambda_j, \quad j \notin \mathcal{B} \quad (8.54)$$

Essas verificações permitem confirmar que a implementação segue a definição teórica da regularização mínima.

A escolha de κ_{adm} deve ser submetida a estudo paramétrico. Em aplicações numéricas, podem ser testados valores como:

$$\kappa_{\text{adm}} = 10^6, 10^8, 10^{10}, 10^{12} \quad (8.55)$$

A formulação será considerada robusta quando a trajetória de equilíbrio, as reações e os deslocamentos de interesse permanecerem estáveis à medida que a regularização é enfraquecida, isto é, quando se aumenta κ_{adm} sem perda significativa de convergência.

8.11 PROCEDIMENTO ALGORÍTMICO

O procedimento de regularização espectral mínima em uma iteração de Newton pode ser sintetizado da seguinte forma. Primeiro, monta-se o resíduo físico original no sistema global e aplica-se a redução aos graus de liberdade livres:

$$g_A^{(r)} = F_A^{\text{int}}(Y^{(r)}) - F_A^{\text{ext}}(Y^{(r)}) \quad (8.56)$$

Em seguida, monta-se a Hessiana física reduzida:

$$H_{AB}^{(r)} = \left. \frac{\partial g_A}{\partial Y_B} \right|_{Y=Y^{(r)}} \quad (8.57)$$

Resolve-se o problema espectral simétrico associado a $H_{AB}^{(r)}$ e identificam-se os autovalores positivos relevantes. Com esses autovalores, calcula-se $\lambda_{\text{adm}}^{(r)}$ e determina-se $B^{(r)}$. A matriz estabilizante é então construída por:

$$H_{AB}^{\text{stab},(r)} = \sum_{j \in B^{(r)}} \left(\lambda_{\text{adm}}^{(r)} - \lambda_j^{(r)} \right) v_A^{(j,r)} v_B^{(j,r)} \quad (8.58)$$

A correção incremental é obtida resolvendo:

$$\left(H_{AB}^{(r)} + H_{AB}^{\text{stab},(r)} \right) \Delta Y_B^{(r)} = -g_A^{(r)} \quad (8.59)$$

Por fim, atualizam-se as posições nodais livres:

$$Y_A^{(r+1)} = Y_A^{(r)} + \Delta Y_A^{(r)} \quad (8.60)$$

e verifica-se a convergência com o resíduo físico original. O critério de convergência pode envolver, por exemplo, a norma do resíduo reduzido e a norma da correção incremental, mas a força estabilizante não deve ser incorporada à definição do equilíbrio final.

Do ponto de vista computacional, em sistemas pequenos pode-se calcular a decomposição espectral completa. Em sistemas maiores, basta estimar λ_{max}^+ e os autovalores positivos próximos de zero, pois somente eles entram na construção de B . A escolha entre decomposição completa, métodos iterativos ou estimativas parciais deve considerar o tamanho do sistema, a esparsidade da Hessiana e o custo relativo da montagem e solução linear.

8.12 COMPATIBILIDADE COM MÉTODOS INCREMENTAIS DE SOLUÇÃO

A regularização espectral mínima é compatível com o método de Newton–Raphson em controle de força ou em controle de deslocamento, desde que aplicada ao sistema reduzido correspondente aos graus de liberdade efetivamente

desconhecidos. Em controle de deslocamento, os graus prescritos são removidos do sistema incremental antes da análise espectral. Portanto, a decomposição deve ser realizada sobre a Hessiana reduzida aos graus livres, e não sobre a matriz global antes da imposição das restrições.

No método de comprimento de arco, que será tratado em capítulo específico de solução incremental, a regularização deve ser inserida apenas no bloco estrutural da matriz aumentada. Se o sistema aumentado for escrito esquematicamente em termos indicial reduzidos como:

$$H_{AB}\delta Y_B - \bar{F}_A\delta\lambda = -g_A \quad (8.62)$$

a substituição proposta é:

$$H_{AB} \rightarrow H_{AB}^{\text{reg}} \quad (8.62)$$

A equação de restrição de arco não deve ser modificada pela estabilização espectral, pois ela controla o tamanho do incremento no espaço ampliado de deslocamentos e fator de carga. Do mesmo modo, o resíduo de equilíbrio usado na verificação de convergência continua sendo g_A , calculado a partir das forças físicas.

Essa compatibilidade é relevante para problemas com snap-through, snap-back ou proximidade de bifurcações, nos quais a matriz tangente pode se tornar mal condicionada ou indefinida. A regularização proposta não substitui os procedimentos necessários para o acompanhamento da trajetória de equilíbrio; ela atua apenas como mecanismo de condicionamento do bloco estrutural em direções positivas quase singulares. A identificação de pontos críticos e de mudanças de estabilidade deve continuar baseada na análise do espectro físico da Hessiana não regularizada.

8.13 LIMITES DA REGULARIZAÇÃO PROPOSTA

A regularização espectral mínima não deve ser interpretada como solução universal para qualquer dificuldade de convergência. Se a malha possui mecanismos de corpo rígido, conectividade inadequada ou restrições insuficientes, o problema deve ser corrigido na modelagem. Se a trajetória de equilíbrio atravessa uma região fisicamente instável, autovalores negativos podem aparecer e devem ser

tratados por métodos de continuação ou análise de estabilidade, não por eliminação artificial da indefinição da Hessiana.

Também é necessário reconhecer que a regularização altera a direção incremental, embora não altere o resíduo físico final. Em problemas fortemente não lineares, uma alteração significativa da direção de Newton pode modificar o número de iterações, a necessidade de controle de passo e a forma como o algoritmo percorre a trajetória de equilíbrio. Por esse motivo, os indicadores ρ_{stab} , r_{stab} e n_B devem acompanhar os resultados numéricos.

A formulação proposta é mais adequada quando o mau condicionamento decorre de modos positivos quase nulos associados à ausência deliberada de rigidez flexional no elemento axial curvilíneo. Nessa situação, a regularização atua como estabilização modal controlada, preservando a natureza axial do elemento. Essa é precisamente a condição esperada em aplicações de cabos flexíveis modelados com aproximações de ordem superior.

8.14 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo foi desenvolvida uma regularização espectral mínima para a Hessiana reduzida do elemento axial posicional parametrizado. A construção foi apresentada em notação indicial, partindo do resíduo reduzido g_A , da Hessiana física H_{AB} e do problema espectral simétrico associado. A partir de um número de condição admissível κ_{adm} , definiu-se um limite inferior λ_{adm} para os autovalores positivos e construiu-se uma matriz estabilizante H_{AB}^{stab} restrita aos modos que satisfazem $0 < \lambda_j < \lambda_{\text{adm}}$.

A regularização resultante eleva cada autovalor positivo problemático exatamente até o limite admissível e preserva os demais modos. A interpretação energética mostrou que a correção equivale à introdução de uma energia quadrática modal apenas no modelo incremental, sem alteração da energia potencial física, da força interna ou do resíduo de equilíbrio. Autovalores negativos foram mantidos fora do procedimento de correção, pois carregam informação sobre estabilidade tangente e não devem ser mascarados.

Com isso, a formulação passa a dispor de um mecanismo controlado para lidar com o mau condicionamento típico de elementos axiais curvilíneos sem rigidez de flexão. O capítulo seguinte utiliza essa estrutura no contexto dos métodos

incrementais de solução, discutindo sua incorporação aos procedimentos de Newton–Raphson, controle de deslocamento e comprimento de arco.

9 FORM-FINDING POSICIONAL POR PRÉ-TENSÃO INVERSA EM CABOS FLEXÍVEIS

Este capítulo apresenta uma estratégia de *form-finding* compatível com a formulação posicional parametrizada desenvolvida nos capítulos anteriores. O objetivo é construir uma configuração inicial mecanicamente admissível para cabos antes da primeira iteração do processo incremental não linear. A dificuldade que motiva este capítulo decorre do fato de que, para cabos sem rigidez à flexão e com lei constitutiva unilateral, a escolha direta:

$$Y_i^{\alpha(0)} = X_i^{\alpha} \quad (9.1)$$

pode conduzir a uma deformação inicial nula, tensão inicial nula e, consequentemente, a uma Hessiana singular ou fortemente mal condicionada. Nessa situação, o método de Newton–Raphson, mesmo combinado com controle de deslocamento, comprimento de arco ou regularização espectral mínima da Hessiana, pode não produzir sequer a primeira correção incremental de forma robusta.

A estratégia proposta neste capítulo não substitui a formulação posicional não linear. Ela atua antes dela, como uma etapa de inicialização. A ideia central é preservar, sempre que possível, a geometria inicial já definida no modelo e calcular um campo inicial de pré-tensão capaz de equilibrar as cargas externas prescritas. Essa pré-tensão é então incorporada à lei constitutiva do cabo, de modo que a análise posicional comece em uma configuração com deformação inicial nula, mas com tensão inicial diferente de zero. Assim, a rigidez geométrica inicial passa a refletir a tração de equilíbrio do cabo, e não uma rigidez flexional artificial.

Ao contrário de uma aplicação clássica do Método da Densidade de Força, que usualmente procura coordenadas nodais de equilíbrio a partir de densidades de força prescritas (Schek, 1974), (Veenendaal; Block, 2012), a abordagem adotada neste capítulo é inversa: dada a geometria inicial do elemento posicional, busca-se o campo de densidade métrica de força ou de força axial inicial que equilibra essa geometria sob as cargas externas. Desse modo, o procedimento de *form-finding* deixa de ser uma etapa externa, baseada apenas em barras retas, e passa a ser derivado da própria força interna do elemento axial curvilíneo posicional.

9.1 FORÇA INTERNA INICIAL COM PRÉ-TENSÃO

A força interna do elemento axial posicional parametrizado foi obtida, nos capítulos anteriores, na forma:

$$F_i^{\text{int},\alpha} = \int_{-1}^1 A_0 S(E) \frac{a_i \phi_{\alpha,\xi}}{J_0} d\xi \quad (9.2)$$

Na configuração inicial da análise, tem-se $a_i = A_i$ e $E = 0$. Para introduzir uma tração inicial no cabo, define-se uma tensão inicial prescrita ou calculada:

$$S_0(\xi) \quad (9.3)$$

e uma força axial inicial por seção:

$$N_0(\xi) = A_0 S_0(\xi) \quad (9.4)$$

A força interna inicial associada à pré-tensão é então:

$$F_{0i}^{\text{int},\alpha} = \int_{-1}^1 N_0(\xi) \frac{A_i(\xi)}{J_0(\xi)} \phi_{\alpha,\xi}(\xi) d\xi \quad (9.5)$$

Define-se o vetor tangente unitário inicial por:

$$t_i(\xi) = \frac{A_i(\xi)}{J_0(\xi)} \quad (9.6)$$

Assim:

$$F_{0i}^{\text{int},\alpha} = \int_{-1}^1 N_0(\xi) t_i(\xi) \phi_{\alpha,\xi}(\xi) d\xi \quad (9.7)$$

A expressão (9.7) é a base do método proposto. Como a geometria inicial é conhecida, $t_i(\xi)$ e $\phi_{\alpha,\xi}(\xi)$ são conhecidos. Portanto, se $N_0(\xi)$ for parametrizado por um conjunto finito de incógnitas, a força interna inicial será linear nessas incógnitas. Isso permite construir um problema inverso linear para determinar a pré-tensão necessária ao equilíbrio inicial.

Também é útil introduzir a densidade métrica de força axial, aqui denotada por:

$$\omega(\xi) = \frac{N_0(\xi)}{J_0(\xi)} = \frac{A_0 S_0(\xi)}{J_0(\xi)} \quad (9.8)$$

Com essa definição, como $A_i = J_0 t_i$, a Eq. (9.5) pode ser escrita como:

$$\omega(\xi) = \int_{-1}^1 w(\xi) A_i(\xi) \phi_{\alpha,\xi} d\xi \quad (9.9)$$

Essa forma é particularmente adequada ao elemento posicional parametrizado, pois usa diretamente o vetor tangente inicial A_i já definido na cinemática do elemento.

9.2 CASO I: FORÇA AXIAL INICIAL CONSTANTE POR ELEMENTO

A primeira versão computacional recomendada é a de força axial inicial constante por elemento. Essa escolha é simples, fisicamente interpretável e suficiente para testar se a geometria inicial fornecida é equilibrável por um campo de pré-tensão positivo.

Considere um elemento e com n nós locais. Neste caso, assume-se:

$$N_0(\xi) = N_0^e \quad (9.10)$$

em que N_0^e é uma incógnita escalar associada ao elemento. A força interna inicial local torna-se:

$$F_{0i}^{\text{int},\alpha,e} = N_0^e \int_{-1}^1 t_i^e(\xi) \phi_{\alpha,\xi}^e(\xi) d\xi \quad (9.11)$$

Define-se o operador local de equilíbrio por força axial constante:

$$B_i^{\alpha e} = \int_{-1}^1 t_i^e(\xi) \phi_{\alpha,\xi}^e(\xi) d\xi \quad (9.12)$$

Assim:

$$F_{0i}^{\text{int},\alpha,e} = B_i^{\alpha e} N_0^e \quad (9.13)$$

A avaliação numérica por quadratura de Gauss é direta. Para pontos ξ_m e pesos w_m , com $m = 1, \dots, n_g$, tem-se:

$$B_i^{\alpha e} \approx \sum_{m=1}^{n_g} w_m t_{im}^e \phi_{\alpha,\xi}^e(\xi_m) \quad (9.14)$$

onde:

$$t_{im}^e = \frac{A_{im}^e}{J_{0m}^e} \quad (9.15)$$

Para o elemento de dois nós, com $n = 2$:

$$\phi_{1,\xi} = -\frac{1}{2}, \quad \phi_{2,\xi} = +\frac{1}{2} \quad (9.16)$$

O vetor tangente inicial é constante:

$$A_i = \frac{1}{2}(X_i^2 - X_i^1) \quad (9.17)$$

e:

$$J_0 = \frac{L_0}{2}, \quad t_i = \frac{X_i^2 - X_i^1}{L_0} \quad (9.18)$$

Logo:

$$B_i^{1e} = -t_i^e, \quad B_i^{2e} = +t_i^e \quad (9.19)$$

e a força interna inicial do elemento reduz-se a:

$$F_{0i}^{\text{int},1,e} = -N_0^e t_i^e, \quad F_{0i}^{\text{int},2,e} = +N_0^e t_i^e \quad (9.20)$$

Essa é a forma clássica de equilíbrio de um cabo ou barra axial submetida a força normal constante. A densidade de força clássica $q_e = N_0^e/L_0^e$ aparece como caso particular quando a contribuição axial é escrita como produto entre a densidade e o vetor diferença inicial do elemento. O ponto distintivo da formulação aqui proposta é que a grandeza primária para inicializar a lei constitutiva não é apenas q_e , mas a tensão inicial:

$$S_0^e = \frac{N_0^e}{A_0^e} \quad (9.21)$$

Para elementos curvilíneos de ordem superior, a hipótese $N_0(\xi) = N_0^e$ continua admissível. Nesse caso, a força axial inicial é constante ao longo da linha média, mas a direção tangente $t_i(\xi)$ varia ao longo do elemento. A integral (9.12) distribui essa força axial constante entre os nós do elemento de modo compatível com

a geometria curvilínea interpolada. Essa é uma primeira forma de justificar o uso do elemento parametrizado: mesmo com uma única força axial inicial por elemento, a curvatura geométrica produz forças nodais equivalentes distribuídas de forma não trivial nos nós intermediários.

9.3 MONTAGEM GLOBAL DO PROBLEMA INVERSO COM GEOMETRIA FIXA

Após a construção dos operadores elementares $B_i^{\alpha e}$, realiza-se a montagem global sobre os graus de liberdade livres. Seja $\mathcal{L}_I^{\alpha e}$ o operador de conectividade que associa o nó local α do elemento e ao nó global I . A contribuição do elemento e para o equilíbrio do nó global I na direção i é:

$$\mathcal{B}_{Ii}^e = \mathcal{L}_I^{\alpha e} B_i^{\alpha e} \quad (9.22)$$

A soma das contribuições elementares fornece a força interna inicial global:

$$F_{0,Ii}^{\text{int}} = \mathcal{B}_{Ii}^e N_0^e \quad (9.23)$$

com soma sobre o índice elementar e .

Seja P_{Ii} a força externa equivalente aplicada ao nó global livre I na direção i , incluindo cargas nodais e cargas distribuídas conservativas já convertidas em forças nodais equivalentes. A condição de equilíbrio inicial desejada é:

$$\mathcal{B}_{Ii}^e N_0^e = P_{Ii} \quad (9.24)$$

A Eq. (9.24) é um problema inverso: as coordenadas X_i^α são conhecidas e preservadas, enquanto as forças axiais iniciais N_0^e são desconhecidas.

Como cabos devem trabalhar em tração, impõe-se a restrição:

$$N_0^e \geq N_{\min}^e > 0 \quad (9.25)$$

Assim, a forma computacional recomendada é o problema de mínimos quadrados não negativos (Lawson; Hanson, 1995):

$$\min_{N_0^e} \frac{1}{2} (\mathcal{B}_{Ii}^e N_0^e - P_{Ii}) (\mathcal{B}_{Ii}^f N_0^f - P_{Ii}), \quad N_0^e \geq N_{\min}^e \quad (9.26)$$

A solução fornece o conjunto de forças axiais iniciais que melhor equilibra a geometria inicial preservada. O resíduo relativo de form-finding é definido por:

$$\varepsilon_{ff} = \frac{\sqrt{(B_{Ii}^e N_0^e - P_{Ii})(B_{Ii}^f N_0^f - P_{Ii})}}{\sqrt{P_{Ii} P_{Ii} + \varepsilon_0}} \quad (9.27)$$

em que ε_0 é um número pequeno usado apenas para evitar divisão por zero. A geometria inicial é considerada equilibrável por pré-tensão positiva quando:

$$\varepsilon_{ff} \leq \text{tol}_{ff} \quad (9.28)$$

Se essa condição for satisfeita, a geometria inicial do modelo é preservada:

$$X_i^\alpha \text{ permanece inalterado} \quad (9.29)$$

9.4 CASO II: CAMPO DE DENSIDADE MÉTRICA PARA ELEMENTOS DE ORDEM SUPERIOR

A formulação com força axial constante por elemento é a primeira implementação recomendada. Entretanto, elementos de ordem superior permitem uma representação mais rica do estado inicial de tração. Nesses elementos, a geometria pode possuir curvatura significativa no interior do elemento, e uma única força axial constante pode não ser suficiente para equilibrar cargas distribuídas ou geometrias mais complexas com a precisão desejada.

A generalização natural é aproximar a densidade métrica de força por uma expansão finita:

$$\omega(\xi) = \psi_r(\xi) \omega^r, \quad r = 1, \dots, n_\omega \quad (9.30)$$

em que $\psi_r(\xi)$ são funções de aproximação escolhidas para o campo de densidade métrica e ω^r são as incógnitas do problema inverso. Substituindo (9.30) em (9.9), obtém-se:

$$F_{0i}^{\text{int},\alpha} = \left[\int_{-1}^1 \psi_r(\xi) A_i(\xi) \phi_{\alpha,\xi}(\xi) d\xi \right] \omega^r \quad (9.31)$$

Define-se, então:

$$C_i^{\alpha r} = \int_{-1}^1 \psi_r(\xi) A_i(\xi) \phi_{\alpha, \xi}(\xi) d\xi \quad (9.32)$$

Logo:

$$F_{0i}^{\text{int}, \alpha} = C_i^{\alpha r} \omega^r \quad (9.33)$$

Por quadratura de Gauss:

$$C_i^{\alpha r} \approx \sum_{m=1}^{n_g} w_m \psi_r(\xi_m) A_{im} \phi_{\alpha, \xi}(\xi_m) \quad (9.34)$$

Essa forma é mais diretamente associada ao elemento curvilíneo posicional, pois utiliza o vetor tangente inicial A_i e o domínio paramétrico do próprio elemento. A força axial inicial nos pontos de Gauss é recuperada por:

$$N_{0m} = \omega_m J_{0m}, \quad \omega_m = \psi_r(\xi_m) \omega^r \quad (9.35)$$

e a tensão inicial correspondente é:

$$S_{0m} = \frac{N_{0m}}{A_0} = \frac{\omega_m J_{0m}}{A_0} \quad (9.36)$$

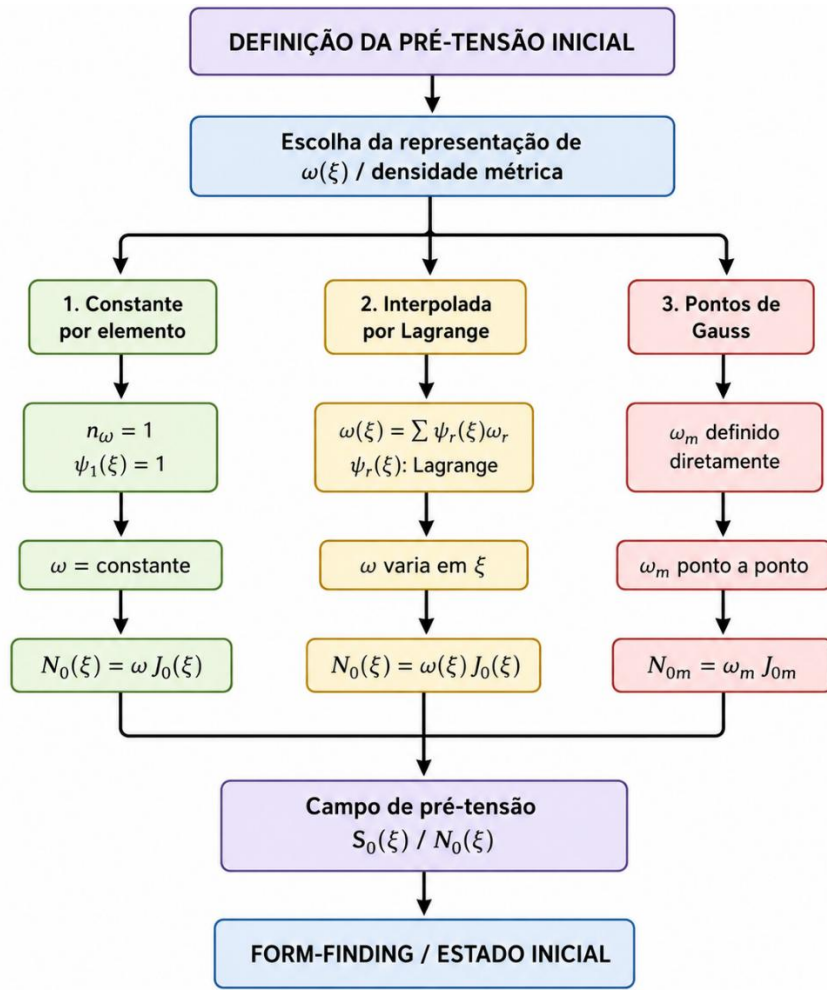
A escolha das funções ψ_r define diferentes níveis de aproximação:

1. **Densidade métrica constante por elemento:** $n_\omega = 1$ e $\psi_1(\xi) = 1$. Nesse caso, ω é constante, mas a força axial $N_0(\xi) = \omega J_0(\xi)$ pode variar se $J_0(\xi)$ variar. Para elementos lineares, como J_0 é constante, essa escolha é equivalente a uma força axial constante por elemento.

2. **Campo de densidade interpolado por Lagrange:** escolhe-se $\psi_r(\xi)$ como uma família de funções de Lagrange, eventualmente da mesma ordem da geometria. Essa opção permite que a densidade métrica varie suavemente ao longo do elemento.

3. **Parâmetros associados aos pontos de Gauss:** define-se diretamente ω_m nos pontos de integração. Essa alternativa é conveniente para implementação, pois a estratégia constitutiva já avalia S_0 ponto a ponto. Nesse caso, as restrições de positividade são impostas diretamente em ω_m ou em N_{0m} .

O Fluxograma 01 abaixo simplifica os conceitos aqui definidos:

Fluxograma 01 – Definição da densidade métrica

Fonte: Autor (2026)

A montagem global segue a mesma lógica da seção anterior. Para o campo de densidade métrica, escreve-se:

$$\mathcal{C}_{li}^R \omega^R = P_{li} \quad (9.37)$$

em que R enumera os parâmetros globais de densidade métrica após a montagem. A forma computacional com positividade é:

$$\min_{\omega^R} \frac{1}{2} (\mathcal{C}_{li}^R \omega^R - P_{li})(\mathcal{C}_{li}^S \omega^S - P_{li}), \quad \omega_m \geq \omega_{\min} > 0 \text{ nos pontos de controle adotados} \quad (9.38)$$

Quando a positividade for imposta sobre a força axial física, a restrição equivalente é:

$$N_{0m} = \omega_m J_{0m} \geq N_{\min} > 0 \quad (9.39)$$

Essa versão de ordem superior é uma das contribuições conceituais mais importantes desta proposta. O procedimento de form-finding deixa de tratar o cabo como uma coleção auxiliar de segmentos retos e passa a usar a cinemática curvilínea do próprio elemento posicional. Com isso, a mesma interpolação de Lagrange usada para a análise não linear é usada para construir o operador inverso de pré-tensão inicial.

9.5 CARGAS EXTERNAS EQUIVALENTES NA ETAPA DE FORM-FINDING

O vetor P_{li} usado nas Eqs. (9.24) e (9.37) deve conter apenas os graus de liberdade livres. Ele pode incluir forças nodais concentradas e cargas distribuídas conservativas convertidas em forças nodais equivalentes. Para um elemento, a contribuição de uma carga distribuída $q_i(\xi)$, definida por unidade de comprimento inicial, é:

$$Q_i^\alpha = \int_{-1}^1 \phi_\alpha(\xi) q_i(\xi) J_0(\xi) d\xi \quad (9.40)$$

Por quadratura:

$$Q_i^\alpha \approx \sum_{m=1}^{n_g} w_m \phi_\alpha(\xi_m) q_i(\xi_m) J_{0m} \quad (9.41)$$

Como a geometria inicial é preservada, J_{0m} é conhecido. Portanto, o vetor externo equivalente é montado antes da solução do problema inverso. Em problemas de peso próprio, pode-se adotar, no plano,

$$q_1(\xi) = 0, \quad q_2(\xi) = -\rho A_0 g_c \quad (9.42)$$

em que g_c denota a aceleração da gravidade. O uso de g_c evita conflito com a métrica atual $g(\xi)$ da formulação posicional.

A construção do vetor externo por Eq. (9.40) é fundamental para a coerência do método. A pré-tensão inversa não procura equilibrar uma carga abstrata; ela procura equilibrar exatamente o carregamento que será usado posteriormente na análise posicional não linear.

9.6 INCORPORAÇÃO DE S_0 NA ESTRATÉGIA CONSTITUTIVA

Após a solução do problema inverso, o resultado deve ser convertido em um campo de tensão inicial compatível com a lei constitutiva do cabo. Na formulação com força constante por elemento:

$$S_0^e = \frac{N_0^e}{A_0^e} \quad (9.43)$$

Na formulação por densidade métrica de força, a tensão inicial é avaliada nos pontos de Gauss:

$$S_{0m}^e = \frac{\omega_m^e J_{0m}^e}{A_0^e} \quad (9.44)$$

A estratégia constitutiva do cabo deve ser modificada para aceitar S_0 como variável interna de inicialização. Uma forma bilateral com pré-tensão é:

$$S(E, \xi_m) = S_{0m} + KE(\xi_m) \quad (9.45)$$

com módulo tangente:

$$K_t(E, \xi_m) = K \quad (9.46)$$

Para um cabo unilateral, adota-se:

$$S(E, \xi_m) = \langle S_{0m} + KE(\xi_m) \rangle_+ \quad (9.47)$$

em que:

$$\langle x \rangle_+ = \max(x, 0) \quad (9.48)$$

O módulo tangente correspondente, fora do ponto de troca de ramo, é:

$$K_t(E, \xi_m) = \begin{cases} K, & S_{0m} + KE(\xi_m) > 0, \\ 0, & S_{0m} + KE(\xi_m) < 0. \end{cases} \quad (9.49)$$

Na configuração inicial:

$$E(\xi_m) = 0 \quad (9.50)$$

Mas:

$$S(0, \xi_m) = S_{0m} \quad (9.51)$$

Desse modo, a força interna inicial do cabo não é nula, e a Hessiana inicial contém a parcela geométrica de tração. A Hessiana física inicial pode ser escrita como:

$$H_{0,ik}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 \phi_{\alpha,\xi} \phi_{\beta,\xi} \left[K_t(0, \xi) \frac{A_i A_k}{J_0^3} + S_0(\xi) \frac{\delta_{ik}}{J_0} \right] d\xi \quad (9.52)$$

A segunda parcela da Eq. (9.52) é a rigidez geométrica inicial de pré-tração. Ela é física, pois decorre do estado inicial de força axial, e não de uma penalização artificial de flexão.

9.7 REGULARIZAÇÃO ESPECTRAL INICIAL APÓS A DETERMINAÇÃO DA PRÉ-TENSÃO

Após a determinação do campo de pré-tensão inicial S_{0m} nos pontos de integração, a formulação posicional passa a dispor de uma configuração inicial geometricamente preservada e de um estado axial inicial compatível com o equilíbrio aproximado obtido pelo problema inverso de densidade métrica de força. Nessa etapa, adota-se:

$$Y_i^{\alpha(0)} = X_i^\alpha \quad (9.53)$$

de modo que a deformação inicial de Green–Lagrange é nula nos pontos de integração:

$$E_m^{(0)} = 0 \quad (9.54)$$

Entretanto, pela estratégia constitutiva com pré-tensão, a tensão axial inicial não é nula:

$$S_m^{(0)} = S(E_m^{(0)}, S_{0m}) = S_{0m} \quad (9.55)$$

Assim, a Hessiana inicial da análise posicional contém a contribuição geométrica associada ao estado de tração inicial do cabo. Para o elemento axial parametrizado, a Hessiana elementar inicial pode ser escrita como:

$$H_{ik}^{\alpha\beta(0)} = \int_{-1}^1 A_0 \phi_{\alpha,\xi} \phi_{\beta,\xi} \left[K_{tm}^{(0)} \frac{A_i A_k}{J_0^3} + S_0 \frac{\delta_{ik}}{J_0} \right] d\xi \quad (9.56)$$

em que, na configuração inicial, tem-se:

$$a_i(\xi) = A_i(\xi), \quad J(\xi) = J_0(\xi), \quad E(\xi) = 0 \quad (9.57)$$

Na forma discreta por quadratura de Gauss, essa expressão é avaliada por:

$$H_{ik}^{\alpha\beta(0)} \approx \sum_{m=1}^{n_g} w_m A_0 \phi_{\alpha,\xi}(\xi_m) \phi_{\beta,\xi}(\xi_m) \left[K_{tm}^{(0)} \frac{A_{im} A_{km}}{J_{0m}^3} + S_{0m} \frac{\delta_{ik}}{J_{0m}} \right] \quad (9.58)$$

A primeira parcela da Eq. (9.58) corresponde à rigidez material axial, enquanto a segunda corresponde à rigidez geométrica de pré-tração. Essa segunda parcela é essencial para a inicialização de cabos, pois fornece rigidez tangente associada ao estado axial tracionado sem introduzir energia de flexão artificial.

Após a montagem global e a imposição das condições de contorno essenciais, obtém-se o sistema incremental reduzido:

$$H_{AB}^{(0)} \Delta Y_B = -g_A^{(0)} \quad (9.59)$$

em que os índices globais reduzidos A e B representam os graus de liberdade livres do problema. O resíduo físico inicial é dado por:

$$g_A^{(0)} = F_A^{\text{int}}(Y^{(0)}; S_0) - F_A^{\text{ext}} \quad (9.60)$$

Mesmo após o form-finding por pré-tensão inversa, a Hessiana inicial pode apresentar mau condicionamento, especialmente em geometrias com trechos quase retilíneos, baixa curvatura, distribuição irregular de nós ou modos quase inextensíveis. Nesses casos, aplica-se a regularização espectral mínima já desenvolvida para a formulação posicional, agora como verificação final antes do início do processo incremental não linear.

Considere o problema espectral da Hessiana reduzida inicial:

$$H_{AB}^{(0)} v_B^{(j)} = \mu_j v_A^{(j)}, \quad j = 1, \dots, n_{gl} \quad (9.61)$$

com autovetores ortonormais:

$$v_A^{(j)} v_A^{(\ell)} = \delta_{j\ell} \quad (9.62)$$

Seja $\mu_{\max}^+$ o maior autovalor positivo da Hessiana reduzida inicial:

$$\mu_{\max}^+ = \max\{\mu_j \mid \mu_j > 0\} \quad (9.63)$$

Para um número de condição admissível κ_{adm} , define-se o autovalor mínimo admissível por:

$$\mu_{\text{adm}} = \frac{\mu_{\max}^+}{\kappa_{\text{adm}}} \quad (9.64)$$

O conjunto dos modos positivos mal condicionados é então:

$$\mathcal{B} = \{j \mid 0 < \mu_j < \mu_{\text{adm}}\} \quad (9.65)$$

A contribuição estabilizante inicial é construída por:

$$H_{AB}^{\text{stab},0} = \sum_{j \in \mathcal{B}} (\mu_{\text{adm}} - \mu_j) v_A^{(j)} v_B^{(j)} \quad (9.66)$$

Assim, a Hessiana regularizada inicial é:

$$H_{AB}^{\text{reg},0} = H_{AB}^{(0)} + H_{AB}^{\text{stab},0} \quad (9.67)$$

A regularização da Eq. (9.67) não altera o resíduo físico de equilíbrio. O problema mecânico continua definido por:

$$g_A(Y) = 0 \quad (9.68)$$

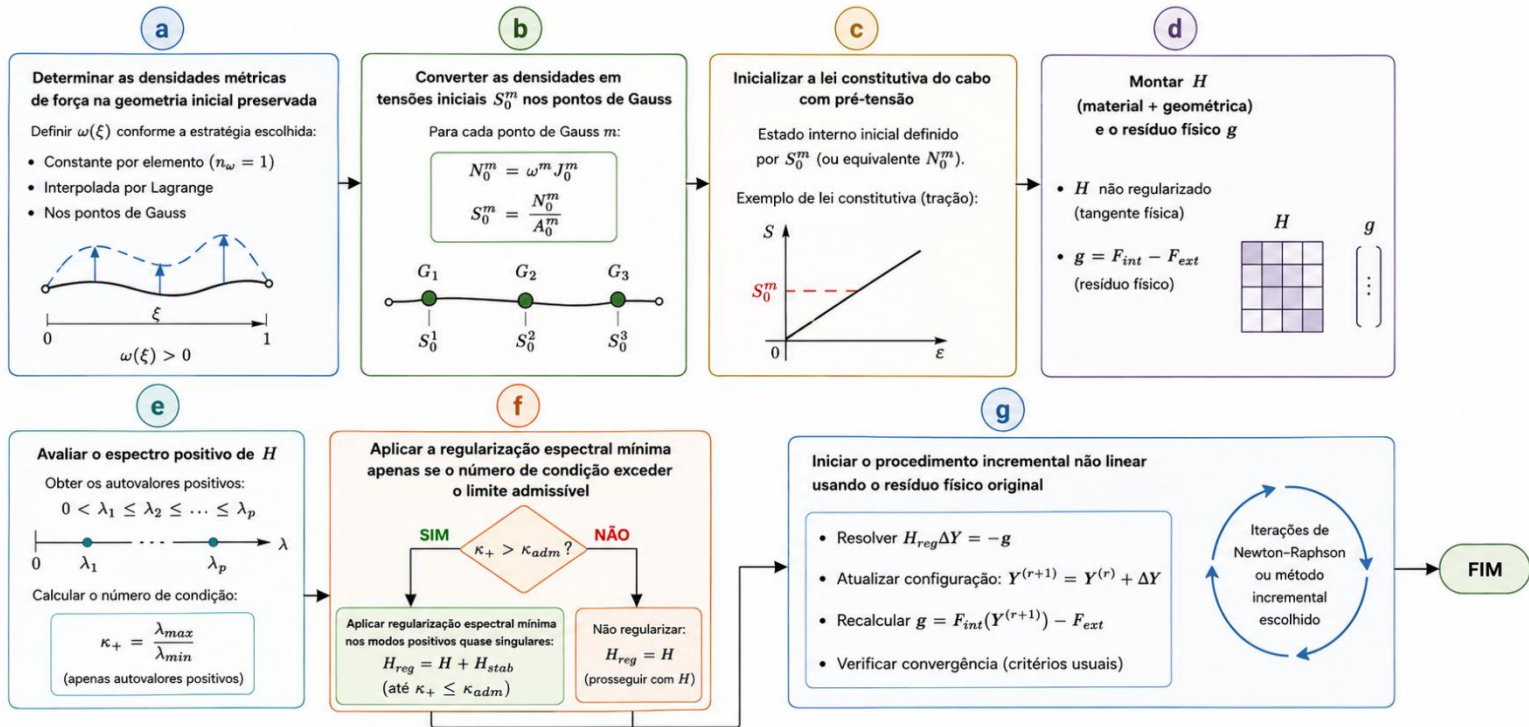
A modificação ocorre apenas no sistema linear usado para calcular a correção incremental:

$$H_{AB}^{\text{reg},0} \Delta Y_B = -g_A^{(0)} \quad (9.69)$$

Dessa forma, a regularização atua como uma estabilização algorítmica da primeira solução incremental, enquanto a convergência continua sendo avaliada com o resíduo físico original.

A sequência adotada após o form-finding pode ser resumida pelo Fluxograma 02 abaixo:

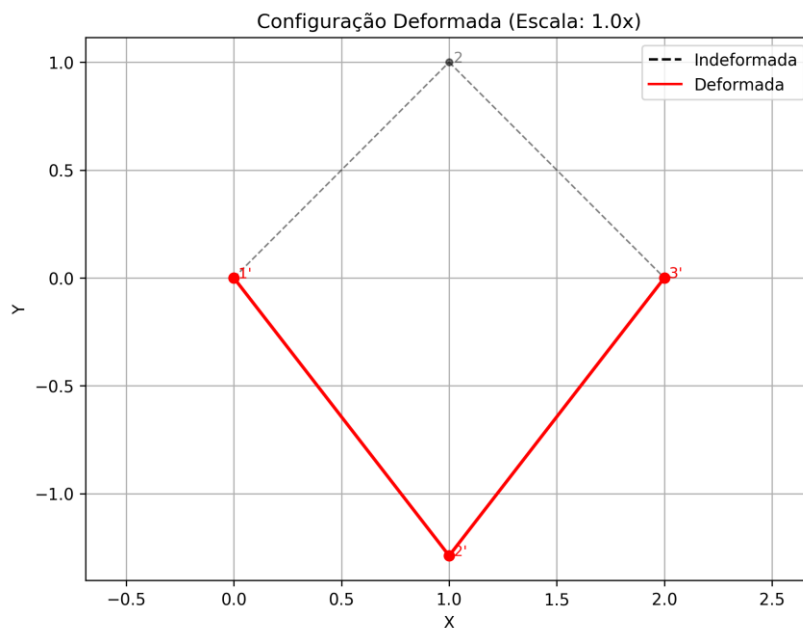
Fluxograma 02 – Procedimento de regularização espectral da Hessiana com pré-tensão inicial



Fonte: Autor (2026)

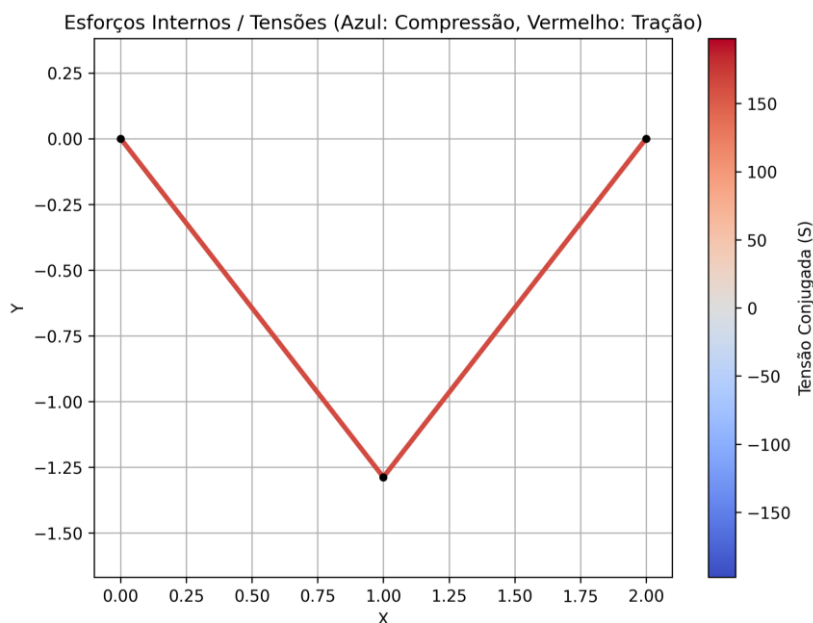
Essa estratégia preserva a interpretação mecânica da formulação. A pré-tensão S_0 fornece a rigidez geométrica física necessária para a primeira configuração do cabo, enquanto a regularização espectral atua apenas como controle numérico complementar quando a Hessiana inicial permanece mal condicionada.

A Figura 05 a seguir ilustra uma instabilidade do tipo snap-through, sendo esta composta pela comparação entre as configurações inicial e deformada.

Figura 05 – Snap-through nas configurações inicial e deformada

Fonte: Autor (2026)

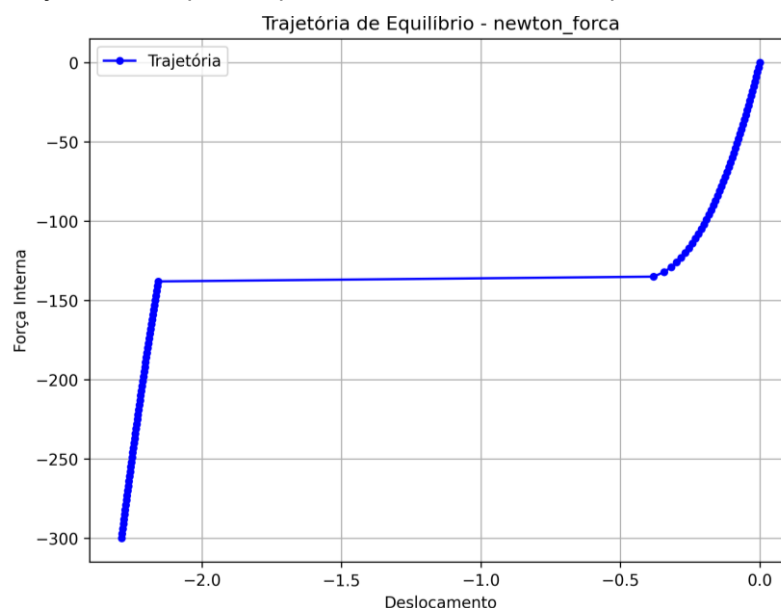
A inversão da posição do nó central demonstra a mudança abrupta de configuração característica do snap-through. A geometria de referência permanece indicada em cinza tracejado, enquanto a resposta deformada é apresentada em vermelho. A Figura 06 a seguir apresenta o modelo de distribuição dos esforços internos ocorrido durante a variação de configuração.

Figura 06 – Distribuição dos esforços internos no modelo de snap-through

Fonte: Autor (2026)

A distribuição dos esforços internos permite associar a alteração geométrica aos níveis de força axial mobilizados no cabo, apoiando a verificação da resposta mecânica no trecho crítico da trajetória, exemplificado pela figura 7 abaixo:

Figura 07 – Trajetória de equilíbrio pelo método de Newton–Raphson com controle de força



Fonte: Autor (2026)

O gráfico relaciona força interna e deslocamento ao longo da análise. A presença de trechos com resposta não monotônica reforça a importância de controles incrementais adequados na vizinhança da instabilidade.

O fenômeno de snap-through caracteriza-se no caso acima, pela perda progressiva de rigidez associada à alteração da geometria da estrutura, seguida pela transição para uma configuração de equilíbrio distinta. A configuração inicialmente arqueada, com o nó central acima dos apoios, evolui para uma configuração invertida, com o nó central abaixo dos apoios, enquanto os elementos permanecem submetidos à tração. Na trajetória força–deslocamento, observa-se uma região de baixa rigidez tangente, na qual grandes variações do deslocamento ocorrem com pequena variação da força interna, caracterizando a proximidade de uma condição limite e a subsequente mudança de ramo de equilíbrio.

9.8 DIAGNÓSTICO DE ADMISSIBILIDADE ANTES DA ANÁLISE NÃO LINEAR

A solução do problema inverso deve ser acompanhada por critérios objetivos de aceitação. O primeiro critério é o resíduo relativo de form-finding definido em (9.27). O segundo é a positividade da força axial inicial:

$$N_0^e > 0 \quad \text{ou} \quad N_{0m} > 0 \quad (9.70)$$

conforme a aproximação adotada.

O terceiro critério é a avaliação do resíduo físico da formulação posicional já com a estratégia inicializada por S_0 :

$$g_{0,li} = F_{0,li}^{\text{int}} - P_{li} \quad (9.71)$$

Esse resíduo deve coincidir, salvo diferenças de montagem e quadratura, com o resíduo do problema inverso. O quarto critério é espectral. Após montar a Hessiana inicial H_0 , avaliam-se:

$$\lambda_{\min}^+(H_0), \quad \kappa(H_0), \quad n_{\lambda < 0}, \quad n_{\lambda \approx 0} \quad (9.72)$$

A análise posicional não linear deve ser iniciada apenas se a Hessiana reduzida, após aplicação das condições de contorno essenciais, for suficientemente admissível para o método incremental escolhido.

Se o problema inverso com geometria fixa não satisfizer os critérios de aceitação, a conclusão não deve ser a alteração automática da geometria. A interpretação correta é que a geometria inicial fornecida não foi equilibrada, dentro das restrições impostas, por um campo positivo de pré-tensão. Nesse caso, a primeira versão do software deve reportar falha de admissibilidade e indicar a necessidade de uma estratégia posterior de ajuste geométrico controlado. Essa decisão preserva a geometria do modelo e evita que o pré-processador modifique a estrutura sem controle do usuário.

9.9 RELAÇÃO COM O MÉTODO DA DENSIDADE DE FORÇA CLÁSSICO

O Método da Densidade de Força clássico define, para cada barra ou cabo discreto, uma densidade:

$$q_e = \frac{N_e}{L_e} \quad (9.73)$$

e utiliza essas densidades como parâmetros para obter uma equação linear nas coordenadas nodais (Schek, 1974). Essa abordagem é extremamente eficiente para redes de cabos e tem sido discutida em diferentes formulações de *form-finding* (Veenendaal; Block, 2012).

A proposta deste capítulo pode ser vista como uma reformulação compatível com o elemento posicional parametrizado. No caso linear de dois nós, a força axial constante N_0^e pode ser escrita como:

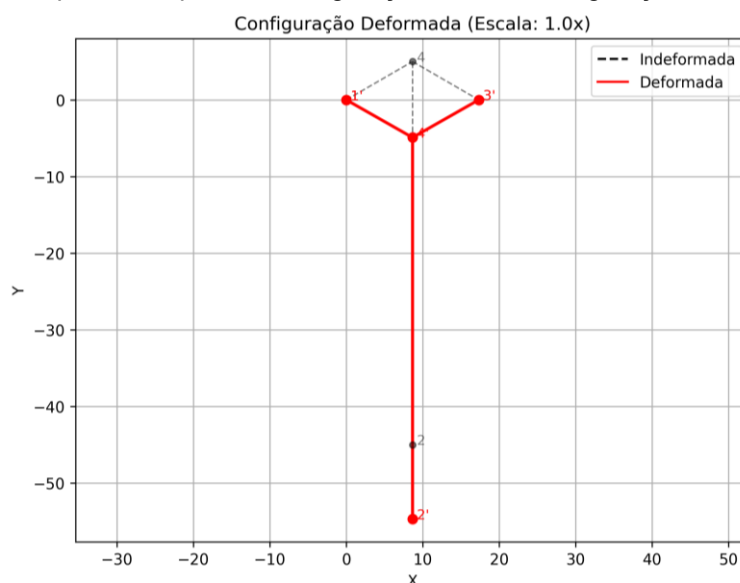
$$N_0^e = q_e L_0^e \quad (9.74)$$

Substituindo essa relação em (9.20), obtém-se a forma clássica de equilíbrio por densidades de força. Portanto, o MDF clássico é recuperado como caso particular da formulação aqui apresentada.

Entretanto, a formulação proposta possui dois aspectos adicionais. Primeiro, ela é construída a partir da força interna do elemento posicional, preservando a notação e as grandezas cinemáticas A_i , J_0 , $\phi_{\alpha\xi}$, S_0 e E . Segundo, ela admite elementos de ordem superior, nos quais o operador de equilíbrio inicial é avaliado por quadratura de Gauss no domínio paramétrico. Assim, a inicialização de cabos deixa de depender exclusivamente de uma malha auxiliar de segmentos retos e passa a utilizar a própria cinemática curvilínea do elemento desenvolvido nesta dissertação.

Em respostas com retorno de carga, o método de comprimento de arco permite continuar a trajetória de equilíbrio por trechos em que o controle de força isolado não é suficiente. As Figuras seguintes registram a configuração deformada, os esforços internos e o caminho de equilíbrio desse caso, a Figura 08 abaixo demonstra um cabo em seu estado inicial indeformado e após sofrer deformação.

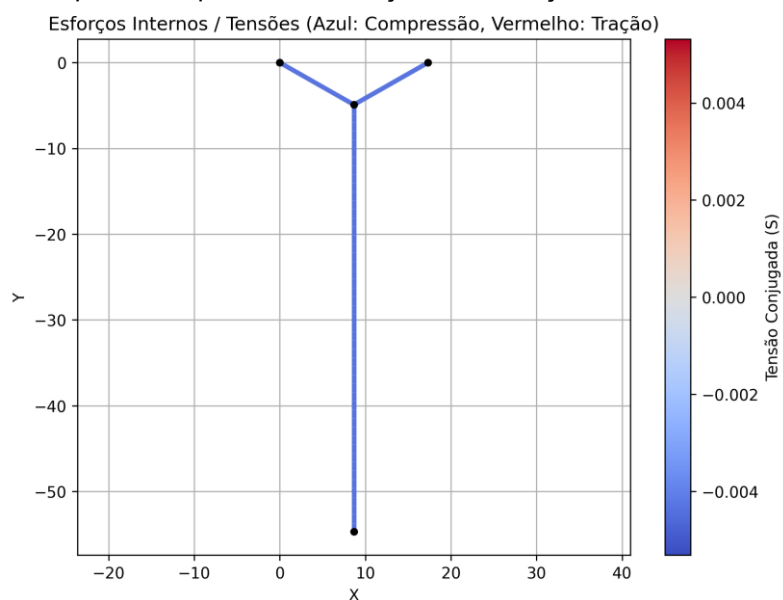
Figura 08 – Exemplo de snap-back: configuração inicial e configuração deformada do cabo



Fonte: Autor (2026)

A configuração deformada registra o estado alcançado após a evolução da trajetória. A comparação direta com a forma inicial destaca a grande mudança geométrica associada ao fenômeno de snap-back, a Figura 09 a seguir detalha a distribuição dos esforços internos após a deformação do cabo.

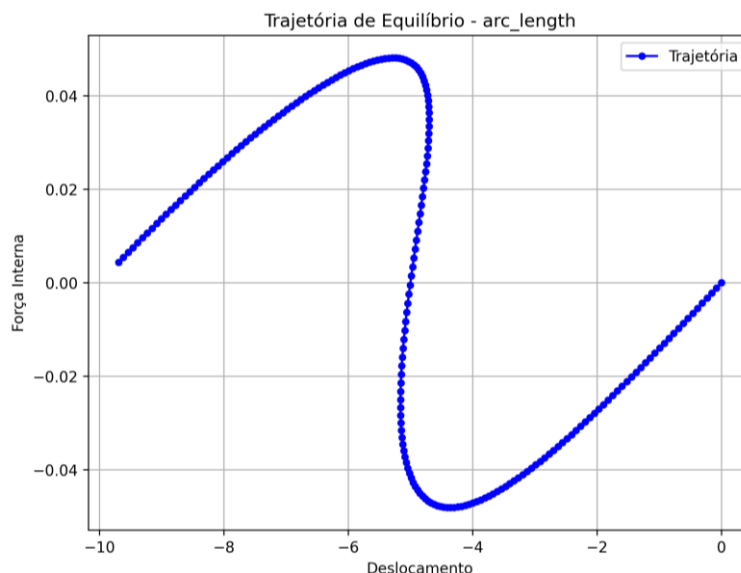
Figura 09 – Exemplo de snap-back: distribuição dos esforços internos no estado analisado



Fonte: Autor (2026)

Os esforços internos associados ao estado mostrado confirmam que a mudança de ramo de equilíbrio deve ser analisada conjuntamente com a resposta axial do cabo e suas condições de tração.

Figura 10 – Exemplo de snap-back: trajetória de equilíbrio pelo método de comprimento de arco



Fonte: Autor (2026)

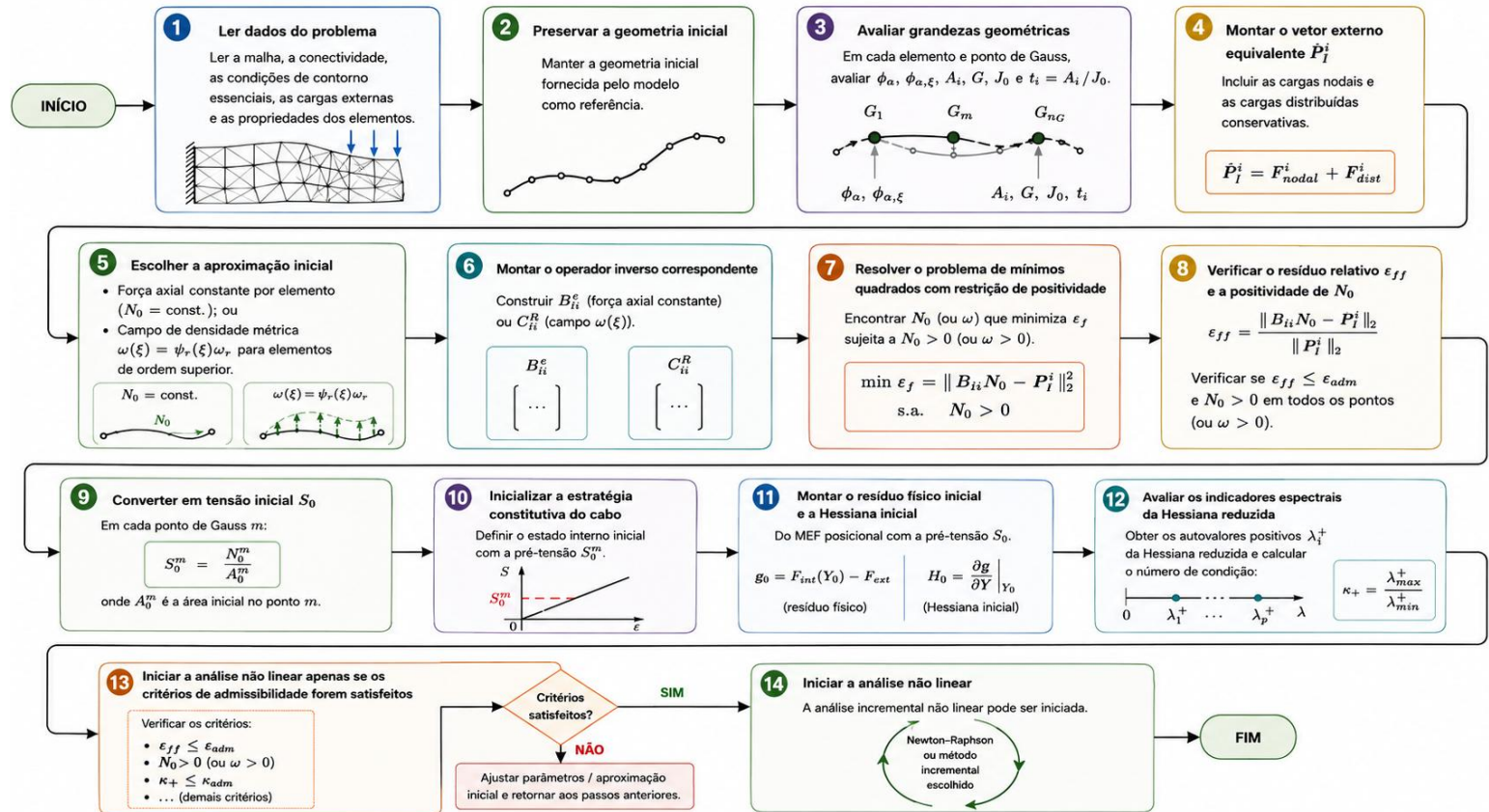
A trajetória apresenta o retorno de carga típico do snap-back. O método de comprimento de arco permite continuar a solução através desses trechos, sem depender de uma relação monotônica entre força e deslocamento.

A trajetória força–deslocamento obtida pelo método de comprimento de arco evidencia um comportamento de snap-back, caracterizado pela presença de dois pontos extremos entre os quais a relação entre força interna e deslocamento deixa de ser monotônica. Após o crescimento inicial da força, a trajetória atinge um primeiro estado limite, a partir do qual ocorre uma reversão no caminho de equilíbrio, acompanhada de significativa alteração da força interna com pequena variação do deslocamento. Posteriormente, a trajetória alcança um segundo extremo e retorna a um ramo de equilíbrio com comportamento novamente crescente. A capacidade do método de comprimento de arco em acompanhar esse percurso permite representar o trecho de retorno que não seria adequadamente capturado por estratégias convencionais de controle de força ou deslocamento.

9.10 FLUXO COMPUTACIONAL RECOMENDADO

A primeira implementação do método deve seguir uma sequência controlada, descrita através do Fluxograma 03 abaixo:

Fluxograma 03 – Fluxo computacional de implementação do método proposto



Fonte: Autor (2026)

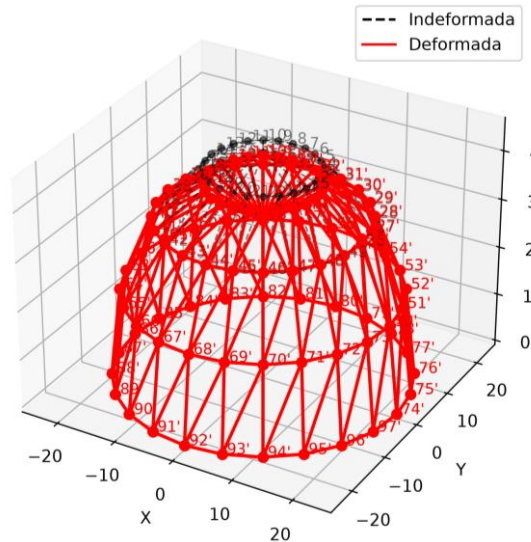
Esse fluxo mantém a separação entre pré-processamento e análise não linear. O problema inverso calcula apenas a pré-tensão inicial compatível com a geometria preservada. A trajetória de equilíbrio posterior continua sendo resolvida pelo motor posicional não linear, com Newton–Raphson, controle de deslocamento, comprimento de arco e regularização espectral mínima quando necessário.

9.11 EXEMPLO COMPLEMENTAR: DOMO TRIDIMENSIONAL

O domo tridimensional representa uma extensão natural da formulação para sistemas espaciais pré-tensionados. A Figura 11 a seguir permite

observar a mudança global de configuração para o estado deformado, sofrendo alteração de curvatura e da posição dos anéis e dos elementos radiais.

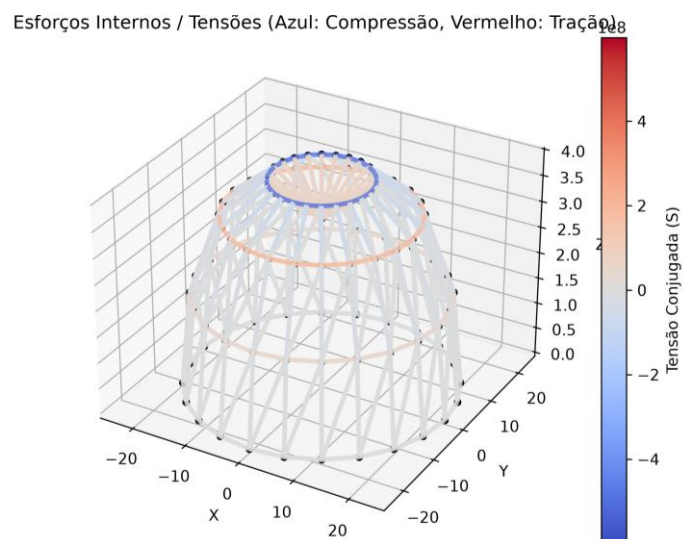
Figura 11 – Domo tridimensional: configuração deformada em comparação com geometria inicial



Fonte: Autor (2026)

A visualização espacial mostra como a pré-tensão e o carregamento conduzem a uma nova configuração do domo. A leitura conjunta das geometrias inicial e deformada facilita a identificação dos deslocamentos predominantes, isso é observado por meio da Figura 12 abaixo, em que ocorre a redistribuição das tensões, com regiões mais comprimidas e outras mais tracionadas.

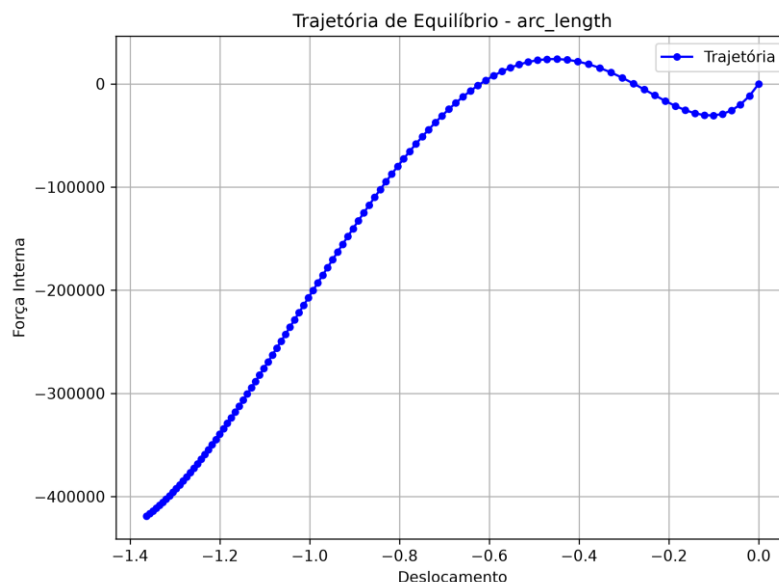
Figura 12 – Domo tridimensional: distribuição dos esforços internos



Fonte: Autor (2026)

A distribuição dos esforços internos explicita a participação dos elementos da malha espacial na sustentação do equilíbrio. Esse resultado é útil para verificar a coerência entre a forma final e o estado de tração desenvolvido.

Figura 13 – Domo tridimensional: trajetória de equilíbrio pelo método de comprimento de arco



Fonte: Autor (2026)

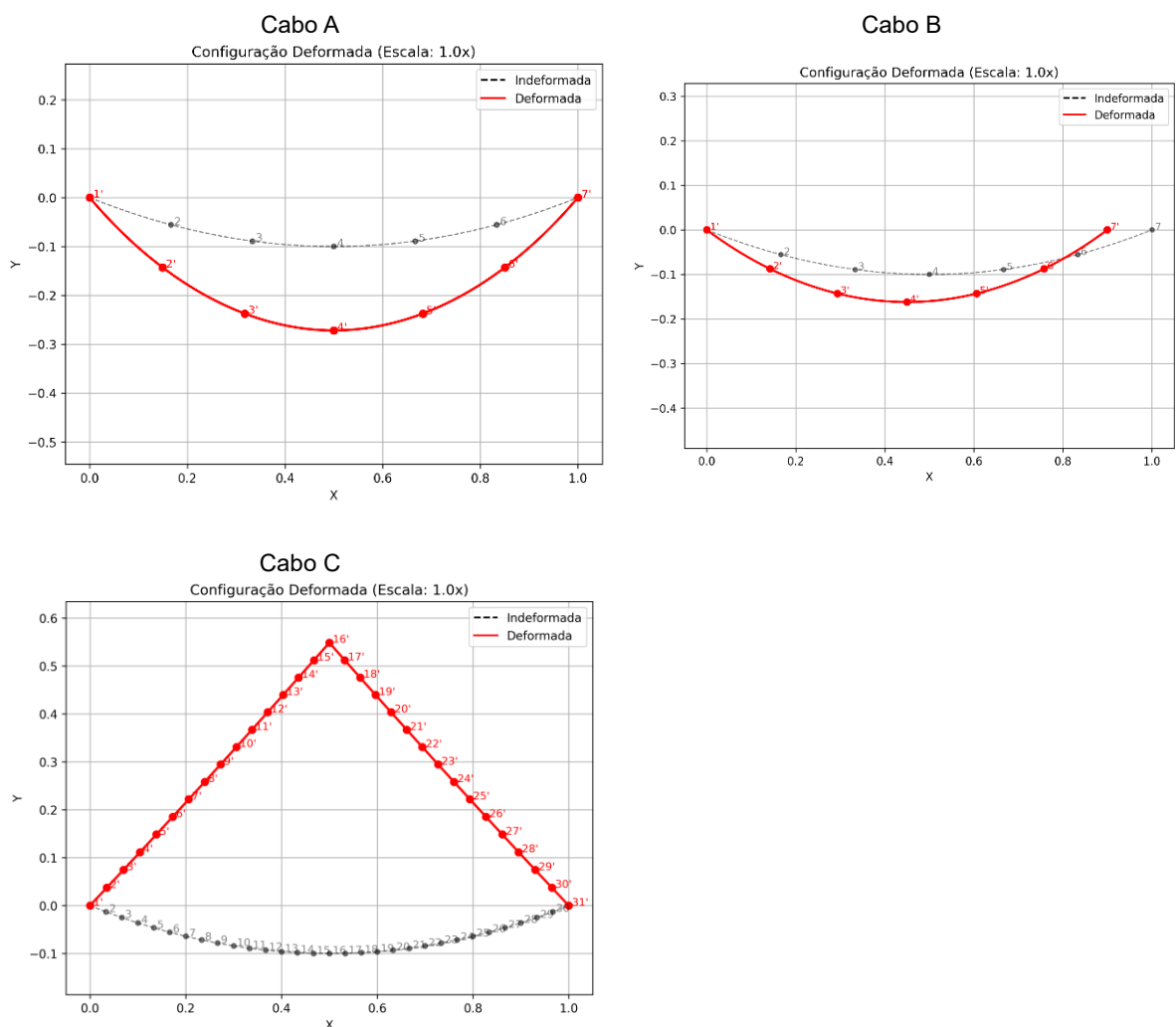
O caminho de equilíbrio do domo resume a evolução global da resposta não linear, conforme demonstra a Figura 13 acima. O uso do comprimento de arco é particularmente apropriado quando a trajetória apresenta mudanças de rigidez ou proximidade de pontos críticos.

A resposta do domo evidencia forte não linearidade geométrica, caracterizada pela alteração global da configuração e pela consequente redistribuição dos esforços internos. A evolução da geometria modifica a orientação dos elementos e, portanto, suas contribuições para a rigidez tangente, resultando em um estado misto de compressão e tração ao longo da estrutura. A trajetória de equilíbrio obtida pelo método de comprimento de arco apresenta comportamento não monotônico, com a presença de extremos da relação força–deslocamento e mudança de ramo de equilíbrio. Esse comportamento demonstra a capacidade do procedimento incremental de acompanhar a resposta estrutural através de regiões críticas, nas quais a rigidez tangente pode se tornar reduzida e a trajetória não pode ser descrita por uma relação unívoca entre força e deslocamento.

9.12 COMPARAÇÃO ENTRE CABOS

A comparação final reúne os resultados dos exemplos de cabos 'A', 'B' e 'C' durante aplicação dos mesmos estados: configuração deformada, esforços internos e caminho de equilíbrio. A apresentação lado a lado facilita a identificação das diferenças de resposta entre as geometrias e estratégias de acompanhamento adotadas. Conforme apresenta a Figura 14 abaixo, o cabo A apresenta configuração inicial de curva suave, com pequena flecha, enquanto a configuração deformada apresenta uma flecha significativamente maior. Da mesma forma, o cabo B apresenta configuração similar, mas com alteração geométrica moderada. A grande diferenciação está no comportamento do cabo C, onde a estrutura sofreu uma mudança completa de curvatura, ocorrendo inversão geométrica da linha média.

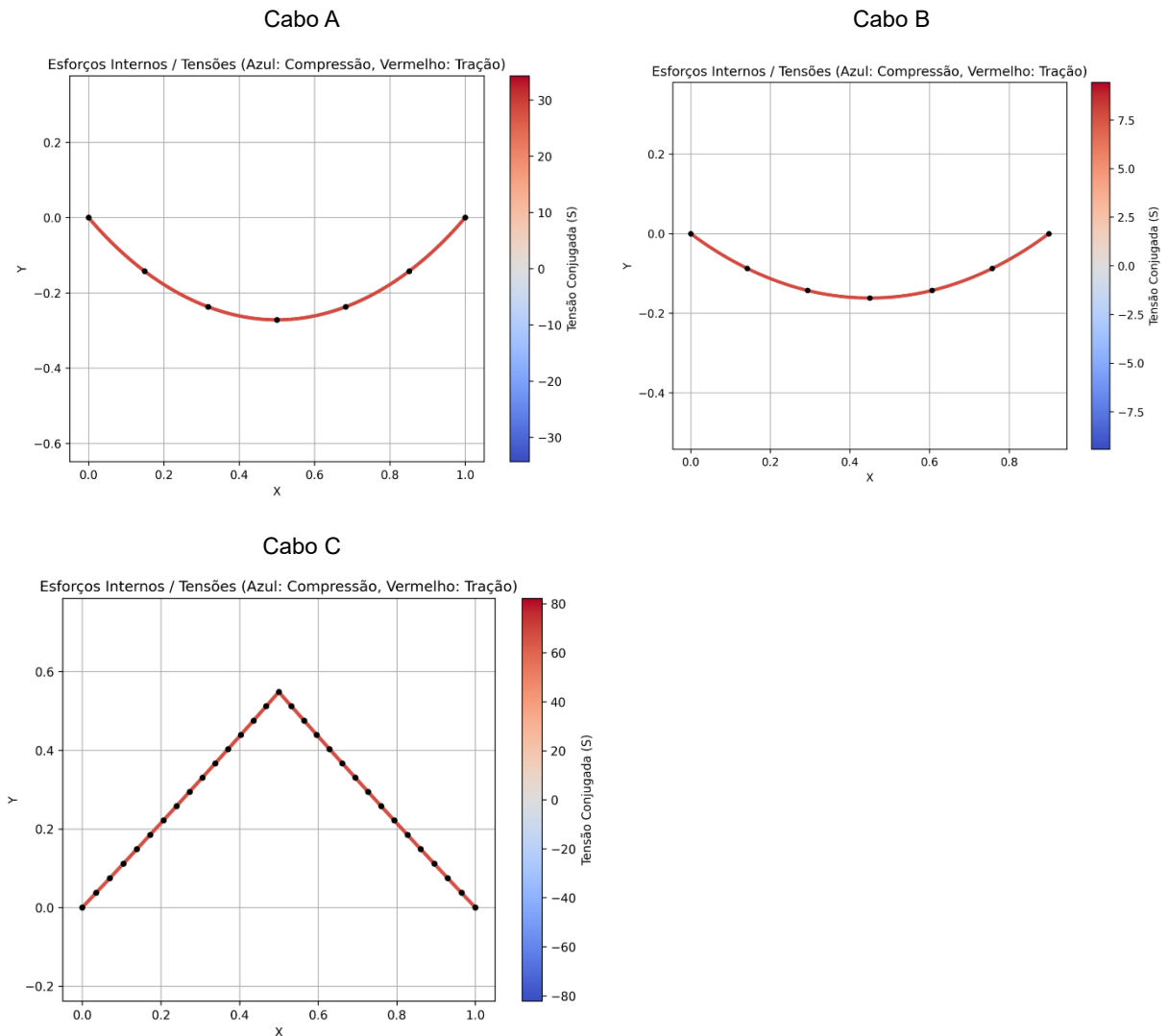
Figura 14 – Comparação das configurações deformadas dos cabos A, B e C



Fonte: Autor (2026)

A Figura 15 a seguir demonstra a distribuição dos esforços internos atuantes nos três cabos, com semelhança de comportamento entre os cabos A e B. Diferentemente do que ocorre no cabo C, onde há a formação de curva catenária que demonstra a inversão da geometria do elemento após a ocorrência de tensão máxima do cabo.

Figura 15 – Distribuições de esforços internos dos cabos A, B e C



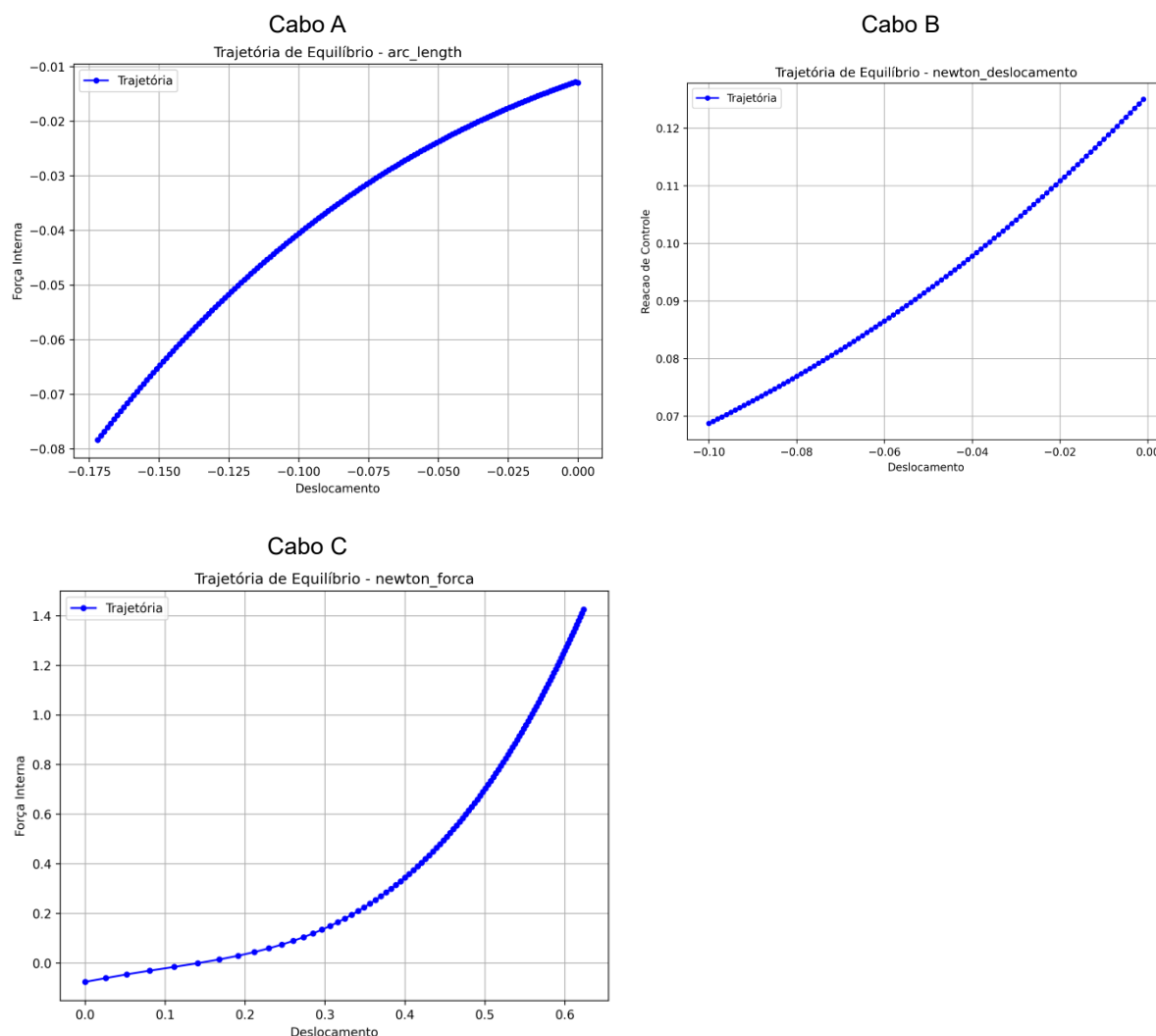
Fonte: Autor (2026)

Os três gráficos de esforços internos permitem verificar como as diferentes geometrias e condições de análise influenciam a intensidade e a distribuição da força axial em cada cabo.

A Figura 16 abaixo demonstra as trajetórias de equilíbrio dos três cabos. Apesar da adoção do comprimento de arco no cabo A, nota-se que não houve

grande diferença entre a análise dos três casos, permanecendo as trajetórias de equilíbrio estáveis e monotônicos.

Figura 16 – Comparação das trajetórias de equilíbrio dos cabos A, B e C



Fonte: Autor (2026)

Os três exemplos de cabos evidenciam a capacidade da formulação posicional parametrizada de representar diferentes níveis de não linearidade geométrica mantendo o comportamento essencialmente axial. No primeiro caso, observa-se aumento moderado da flecha, acompanhado por uma trajetória de equilíbrio suave obtida pelo método de comprimento de arco. No segundo, a aplicação de controle de deslocamento resulta em uma resposta monotônica e estável, com incremento progressivo da reação para a evolução do deslocamento. O terceiro caso apresenta a maior alteração geométrica, caracterizada pela inversão da curvatura da linha média e por deslocamentos significativamente superiores aos observados nos

demais exemplos; apesar da forte não linearidade, a trajetória força–deslocamento permanece monotônica no trecho apresentado. Em todos os casos, a distribuição das tensões indica predominância de tração, coerente com a especialização do elemento para o comportamento de cabo. Conjuntamente, os resultados demonstram que a formulação é capaz de acompanhar diferentes regimes de deformação e de ser combinada com distintas estratégias incrementais de solução sem alteração de sua estrutura cinemática e energética.

9.13 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Este capítulo apresentou uma formulação de *form-finding* posicional por pré-tensão inversa para inicialização de cabos flexíveis. A principal decisão metodológica foi preservar a geometria inicial do modelo, mantendo a notação já usada na formulação posicional: X_i^α para a configuração inicial, Y_i^α para as posições atuais, A_i para o vetor tangente inicial, J_0 para o jacobiano geométrico inicial e E para a deformação de Green–Lagrange local.

A estratégia foi desenvolvida em dois níveis. No primeiro, adotou-se força axial inicial constante por elemento, obtendo-se um problema inverso linear em N_0^e . Esse caso recupera a interpretação clássica de equilíbrio por força axial e, para elementos de dois nós, relaciona-se diretamente ao Método da Densidade de Força clássico. No segundo, propôs-se uma versão de ordem superior baseada em densidade métrica de força $\omega(\xi)$, compatível com a interpolação de Lagrange e com a quadratura de Gauss do elemento posicional curvilíneo.

A pré-tensão obtida é convertida em tensão inicial S_0 e incorporada à estratégia constitutiva do cabo. Assim, na configuração inicial $Y_i^{\alpha(0)} = X_i^\alpha$, a deformação é nula, mas a tensão inicial é diferente de zero. Esse procedimento fornece rigidez geométrica inicial física e permite iniciar a análise não linear de cabos sem recorrer a rigidez flexional artificial. Com isso, o elemento parametrizado curvilíneo passa a ter uma estratégia própria de inicialização estática, reforçando sua aplicação à modelagem de cabos em análise posicional não linear.

10 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Esta dissertação apresentou uma formulação posicional parametrizada para a análise não linear de cabos flexíveis, integrando a determinação inversa da pré-tensão, a estratégia constitutiva unilateral e a regularização espectral mínima da Hessiana. A proposta preserva a geometria inicial do modelo e estabelece um estado de tração inicial mecanicamente compatível, fornecendo rigidez geométrica física para o início do processo incremental.

A regularização espectral mínima mostrou-se compatível com essa formulação ao atuar exclusivamente no sistema incremental, controlando modos positivos mal condicionados sem alterar a equação de equilíbrio ou o resíduo físico. Dessa forma, a estabilização numérica permanece separada da descrição mecânica do elemento.

Os exemplos de *snap-through* e *snap-back* evidenciaram a importância de métodos de acompanhamento de trajetória diante de instabilidades geométricas. Enquanto o controle de força com Newton–Raphson descreve trechos regulares da resposta, o método de comprimento de arco mostrou-se essencial para continuar a solução em regiões com retorno de carga ou resposta não monotônica.

O exemplo do domo tridimensional confirmou a aplicabilidade da formulação a sistemas espaciais pré-tensionados, relacionando configuração deformada, esforços internos e trajetória de equilíbrio. Por sua vez, a comparação entre os cabos A, B e C mostrou como diferenças geométricas e estratégias de solução influenciam a distribuição de esforços e a evolução global da resposta não linear.

Conclui-se que a combinação entre form-finding por pré-tensão inversa, elemento curvilíneo posicional e controle incremental constitui uma base consistente para a análise não linear de cabos e outras estruturas axiais flexíveis. Como continuidade desta pesquisa, destacam-se:

- extensão da formulação para redes de cabos e sistemas estruturais mais complexos;
- análise de carregamentos variáveis e situações de contato e interação com outros elementos estruturais;
- estudos sistemáticos de refinamento de malha e de ordem de interpolação;
- aprofundamento da regularização espectral em problemas com diferentes condições de estabilidade e trajetórias pós-críticas;

- validação experimental e comparação quantitativa com soluções analíticas e outras formulações de elementos finitos;
- extensão da formulação para análise dinâmica e aplicações tridimensionais mais abrangentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BELYTSCHKO, T. *et al.* **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2014.

BENDALLA, A. S. Kh; MORGENTHAL, G. A nonlinear finite element framework for static and dynamic analysis of structural cables with deviating supports. **Engineering Structures**, v. 291, p. 116363, 15 set. 2023.

BORKOVIĆ, A.; GFRERER, M. H.; MARUSSIG, B. Geometrically exact isogeometric Bernoulli–Euler beam based on the Frenet–Serret frame. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 405, p. 115848, 15 fev. 2023.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33–35, p. 3541–3557, 20 ago. 2004.

DE BORST, R. *et al.* **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. 2. ed. London: John Wiley, 2012. v. 2

EISENTRÄGER, S. *et al.* An eigenvalue stabilization technique for immersed boundary finite element methods in explicit dynamics. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 166, p. 129–168, 15 jul. 2024.

GARHUOM, W.; USMAN, K.; DÜSTER, A. An eigenvalue stabilization technique to increase the robustness of the finite cell method for finite strain problems. **Computational Mechanics** 2022 **69:5**, v. 69, n. 5, p. 1225–1240, 30 jan. 2022.

GRECO, M. *et al.* Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 1 ago. 2006.

HART, J.; VAN BLOEMEN WAANDERS, B. Enabling hyper-differential sensitivity analysis for ill-posed inverse problems. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 45, n. 4, p. A1947–A1970, ago. 2023.

HUANG, W. *et al.* Static analysis of elastic cable structures under mechanical load using discrete catenary theory. **Fundamental Research**, v. 3, n. 6, p. 967–973, 1 nov. 2023.

KHODADADI, A. Chapter 4: Catenary Cables and Arches. In: KHODADADI, Anahita. **Basic Concepts of Structural Design for Architecture Students**. Long Beach: Long Beach City College (LBCC) Pressbooks, [s.d.]. Disponível em: <https://lbcc.pressbooks.pub/structuraldesign/chapter/chapter-4-catenary-cables-and-arches-2/>. Acesso em: 24 abr. 2026.

LAWSON, C. L.; HANSON, Richard J. **Solving Least Squares Problems**. Philadelphia: SIAM, jan. 1995.

LI, W.; HUANG, Q.; CHEN, S. A cable finite element formulation based on exact tension field for static nonlinear analysis of cable structures. **Thin-Walled Structures**, v. 205, p. 112371, 1 dez. 2024.

LIU, H.; GENG, J.; LUO, A. Tensegrity configuration method for connecting tensegrity units along their axes. **Composite Structures**, [s. l.], v. 162, p. 341-350, Feb. 2017.

PAULETTI, R. M. O. **Coberturas com tensoestruturas**. Portal Metálica, 3 set. 2019. Disponível em: <https://metalica.com.br/coberturas-com-tensoestruturas-2/>. Acesso em: 13 mai. 2026.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1 jan. 1979.

SCHEK, H. J. The force density method for form finding and computation of general networks. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 3, n. 1, p. 115–134, 1 jan. 1974.

SCHERZ, L.t; KRIEGESMANN, B.; PEDERSEN, C. B. W. A condition number-based numerical stabilization method for geometrically nonlinear topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 125, n. 23, p. e7574, 15 dez. 2024.

SUCHOCKI, C. *et al.* Remote estimation of cable tension using catenary theory and point clouds obtained by terrestrial laser scanning. **Measurement**, v. 236, p. 115147, 15 ago. 2024.

VEENENDAAL, D.; BLOCK, P. An overview and comparison of structural form finding methods for general networks. **International Journal of Solids and Structures**, v. 49, n. 26, p. 3741–3753, 15 dez. 2012.

WRIGGERS, P. **Nonlinear Finite Element Methods**. Berlin; Springer, p. 1–559, 2008.

APÊNDICE A - MÉTODOS INCREMENTAIS DE SOLUÇÃO

Os capítulos anteriores estabeleceram a cinemática, a energia de deformação, a força interna, a Hessiana tangente, a recuperação do elemento reto de dois nós, a especialização constitutiva barra–cabo, a incorporação de cargas distribuídas conservativas e a regularização espectral mínima da Hessiana. Essas formulações conduzem, após a montagem global e a imposição das condições de contorno essenciais, a um sistema algébrico não linear escrito em termos das posições nodais atuais. O presente capítulo organiza os métodos incrementais de solução utilizados para resolver esse sistema, mantendo a notação indicial adotada na dissertação e distinguindo explicitamente a formulação física do elemento, a estratégia de controle incremental e a regularização algorítmica.

Em problemas estruturalmente não lineares, a resposta de equilíbrio não é determinada apenas pela solução de uma equação em um único estado de carregamento. A trajetória pode apresentar regiões de forte variação de rigidez tangente, pontos limites de carga, pontos limites de deslocamento, mudanças de estabilidade e, em determinadas configurações, bifurcações. Por essa razão, a solução é usualmente construída por uma sequência de passos incrementais, cada um deles corrigido por iterações de Newton–Raphson ou por métodos de continuação. Essa organização é clássica na análise não linear por elementos finitos, de acordo com os escritos de De Borst et al. (2012); Belytschko et al. (2014) e Wriggers (2008), e é particularmente relevante em estruturas com cabos, treliças esbeltas e mecanismos geometricamente sensíveis, nas quais a matriz tangente pode se tornar mal condicionada ou singular ao longo da trajetória.

A abordagem adotada neste capítulo é compatível com a formulação posicional, na qual as incógnitas primárias são as posições atuais Y_i^α , e não deslocamentos adicionados a uma configuração de referência fixa. Ainda assim, no nível incremental, as correções calculadas em cada iteração podem ser interpretadas como incrementos posicionais. Essa distinção é importante: a descrição cinemática permanece posicional, enquanto o procedimento numérico utiliza incrementos apenas como mecanismo iterativo para aproximar uma configuração de equilíbrio.

A.1 RESÍDUO GLOBAL E HESSIANA TANGENTE REDUZIDA

No nível elementar, o resíduo de equilíbrio associado ao nó α e à direção espacial i é definido por:

$$g_i^\alpha(Y, \lambda) = F_i^{\text{int}, \alpha}(Y) - F_i^{\text{ext}, \alpha}(Y, \lambda) \quad (\text{A.1})$$

em que $F_i^{\text{int}, \alpha}$ é a força interna obtida da variação da energia de deformação e $F_i^{\text{ext}, \alpha}$ é a força externa nodal equivalente. Para carregamentos proporcionais a um fator escalar λ , escreve-se:

$$F_i^{\text{ext}, \alpha}(Y, \lambda) = \lambda \bar{F}_i^\alpha \quad (\text{A.2})$$

quando o carregamento é conservativo e independente da configuração atual. O vetor de referência $\bar{F}_i^\alpha$ pode reunir forças nodais concentradas e forças nodais equivalentes de carregamentos distribuídos definidos na configuração inicial. Nesse caso:

$$\bar{F}_i^\alpha = \bar{P}_i^\alpha + \bar{Q}_i^\alpha, \quad \bar{Q}_i^\alpha = \int_{-1}^1 \phi_\alpha(\xi) \bar{q}_i(\xi) J_0(\xi) d\xi \quad (\text{A.3})$$

A Hessiana elementar associada ao resíduo é:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{\partial g_i^\alpha}{\partial Y_k^\beta} \quad (\text{A.4})$$

Para forças externas conservativas independentes de Y_i^α , essa Hessiana coincide com a derivada da força interna em relação às posições atuais. Assim, no elemento axial parametrizado desenvolvido nesta dissertação:

$$H_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{-1}^1 A_0 \phi_{\alpha, \xi} \phi_{\beta, \xi} \left[K_t \frac{a_i a_k}{J_0^3} + S \frac{\delta_{ik}}{J_0} \right] d\xi \quad (\text{A.5})$$

Com a notação definida nos capítulos anteriores. Quando se introduzem cargas seguidoras, pressões normais à configuração deformada ou carregamentos dependentes do comprimento atual, a derivada da força externa em relação às posições deve ser incorporada à tangente. Essa generalização não é tratada neste trabalho, pois a formulação aqui desenvolvida restringe-se a carregamentos conservativos no referencial inicial.

Após a montagem global e a aplicação das condições de contorno essenciais, considera-se apenas o conjunto dos graus de liberdade ativos. Para simplificar a escrita dos métodos incrementais, introduz-se um índice global reduzido A , que representa o par entre um nó global livre e uma direção espacial. A correspondência entre a notação elementar e a notação global reduzida é puramente organizacional: o índice

A condensa pares do tipo (α, i) que permanecem livres após as restrições cinemáticas.

Com essa convenção, o sistema de equilíbrio reduzido é escrito como:

$$g_A(Y, \lambda) = F_A^{\text{int}}(Y) - \lambda \bar{F}_A = 0, \quad A = 1, \dots, m \quad (\text{A.6})$$

em que m é o número de graus de liberdade ativos. A Hessiana reduzida é:

$$H_{AB}(Y) = \frac{\partial g_A}{\partial Y_B} = \frac{\partial F_A^{\text{int}}}{\partial Y_B} \quad (\text{A.7})$$

para o caso conservativo considerado. A convenção de soma sobre índices repetidos será usada ao longo do capítulo.

A.2 TRATAMENTO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS

Seja P o conjunto dos graus de liberdade com posições prescritas e L o conjunto complementar de graus de liberdade livres. Para $A \in P$, impõe-se:

$$Y_A = Y_{A.} \quad (\text{A.8})$$

Durante as iterações de um passo incremental, as correções nesses graus de liberdade são nulas quando a posição prescrita já foi atualizada para o valor alvo do passo:

$$\delta Y_A = 0, \quad A \in P \quad (\text{A.9})$$

A imposição prática das condições essenciais pode ser realizada por eliminação direta das linhas e colunas associadas aos graus prescritos, por particionamento do sistema ou por técnicas equivalentes de restrição. Neste trabalho,

adota-se conceitualmente a eliminação direta, pois ela preserva de forma clara a interpretação da Hessiana reduzida H_{AB} como operador tangente restrito aos graus ativos.

Após a convergência, as reações nos graus prescritos devem ser calculadas com o resíduo físico completo, antes da eliminação das equações correspondentes.

Assim:

$$R_A = F_A^{\text{int}}(Y) - F_A^{\text{ext}}(Y, \lambda), \quad A \in \mathcal{P} \quad (\text{A.10})$$

A eventual regularização espectral não deve participar desse cálculo, pois ela atua apenas no sistema linear incremental. Consequentemente, a reação é uma grandeza física associada ao equilíbrio original, e não ao sistema estabilizado usado internamente pelo algoritmo.

A.3 LINEARIZAÇÃO DE NEWTON–RAPHSON

Considere uma iteração r dentro de um passo incremental. A configuração tentativa é indicada por $Y_A^{(r)}$ e o fator de carga por $\lambda^{(r)}$. A linearização do resíduo em torno desse estado fornece:

$$g_A(Y^{(r)} + \delta Y^{(r)}, \lambda^{(r)} + \delta \lambda^{(r)}) \approx g_A^{(r)} + H_{AB}^{(r)} \delta Y_B^{(r)} - \bar{F}_A \delta \lambda^{(r)} \quad (\text{A.11})$$

em que:

$$g_A^{(r)} = F_A^{\text{int}}(Y^{(r)}) - \lambda^{(r)} \bar{F}_A \quad (\text{A.12})$$

A equação linearizada de equilíbrio é, portanto:

$$H_{AB}^{(r)} \delta Y_B^{(r)} - \bar{F}_A \delta \lambda^{(r)} = -g_A^{(r)} \quad (\text{A.13})$$

A forma específica do sistema incremental depende da variável de controle escolhida. No controle de força, λ é prescrito e $\delta \lambda$ é nulo durante as correções de equilíbrio. No controle de deslocamento generalizado, λ pode ser tratado como incógnita e uma restrição cinemática adicional fecha o sistema. No comprimento de arco, λ também é incógnita, mas a equação adicional controla simultaneamente o

incremento posicional e o incremento de carga. Essa distinção é essencial porque a escolha da estratégia de controle determina a capacidade do método de atravessar pontos limites e de acompanhar ramos pós-críticos, segundo cita De Borst et al. (2012); Wriggers (2008) e Riks (1979).

A.4 CONTROLE DE FORÇA

No controle de força, define-se uma sequência de valores prescritos para o fator de carga:

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \Delta\lambda_n \quad (\text{A.14})$$

em que o índice n identifica o passo incremental. Durante as iterações corretoras do passo $n + 1$, o fator λ_{n+1} permanece fixo. Assim, $\delta\lambda^{(r)} = 0$, e a Equação (87) reduz-se a:

$$H_{AB}^{(r)} \delta Y_B^{(r)} = -g_A^{(r)}, \quad A, B \in \mathcal{L} \quad (\text{A.15})$$

Após a solução do sistema reduzido, atualizam-se as posições livres:

$$Y_A^{(r+1)} = Y_A^{(r)} + \delta Y_A^{(r)}, \quad A \in \mathcal{L} \quad (\text{A.16})$$

As posições prescritas permanecem fixas no valor imposto para o passo.

O controle de força é simples e eficiente quando a resposta estrutural é monotônica em relação ao parâmetro de carga. Entretanto, ele falha ou perde robustez nas proximidades de pontos limites de carga, nos quais a rigidez tangente associada à direção de carregamento se torna singular e um mesmo valor de carga pode corresponder a múltiplas configurações ou a nenhuma configuração estável acessível pelo incremento escolhido. Em problemas de snap-through, por exemplo, a continuidade da trajetória pode exigir redução severa do passo ou substituição do controle de força por uma estratégia de continuação.

Para o elemento axial parametrizado, a limitação do controle de força torna-se relevante em duas situações. A primeira ocorre em estruturas de treliça ou cabos com instabilidade geométrica global. A segunda ocorre em configurações curvilíneas de cabo nas quais a ausência de rigidez flexional física favorece modos de

baixa rigidez tangente. Nesses casos, o controle de força pode ser usado nas regiões iniciais da trajetória, mas não deve ser considerado método geral para todo o ramo de equilíbrio.

A.5 CONTROLE DE DESLOCAMENTO PRESCRITO

No controle de deslocamento prescrito, uma ou mais componentes posicionais são impostas ao longo do processo incremental. Seja C um grau de liberdade controlado. Em um passo genérico, define-se:

$$Y_C = \bar{Y}_C \quad (\text{A.17})$$

onde Y_C é o valor-alvo da posição controlada. Durante as iterações de correção, esse grau de liberdade é tratado como essencial e, portanto:

$$\delta Y_C^{(r)} = 0 \quad (\text{A.18})$$

O sistema de Newton é resolvido nos demais graus livres, de modo análogo à Equação (89), considerando o fator de carga ou as forças externas estabelecidas para o problema.

A força conjugada ao grau controlado é obtida como reação após a convergência:

$$R_C = F_C^{\text{int}}(Y) - F_C^{\text{ext}}(Y, \lambda) \quad (\text{A.19})$$

Esse procedimento é útil quando se deseja obter uma curva força–deslocamento por imposição de uma posição estrutural representativa, tal como o deslocamento vertical de um nó central em uma treliça de Von Mises ou o deslocamento de um ponto de aplicação de carga em uma estrutura de cabos.

O controle de deslocamento pode atravessar pontos limites de força, desde que a variável prescrita varie monotonicamente ao longo da trajetória. Contudo, se a trajetória apresentar retorno também na variável de deslocamento escolhida, o método deixa de ser adequado. Em outras palavras, a capacidade do controle de deslocamento depende da qualidade da coordenada escolhida para parametrizar o ramo de equilíbrio. Quando nenhuma componente posicional isolada é capaz de

descrever a trajetória de forma monotônica, métodos de comprimento de arco tornam-se mais apropriados.

A.6 CONTROLE DE DESLOCAMENTO GENERALIZADO COM FATOR DE CARGA

Uma alternativa ao deslocamento prescrito como condição essencial é introduzir uma restrição escalar de controle e manter o fator de carga como incógnita. Seja c_A um vetor seletor que define a combinação linear de posições a ser controlada. A restrição incremental pode ser escrita como

$$c_A(Y_A - \hat{Y}_A) - \Delta u = 0 \quad (\text{A.20})$$

em que $\hat{Y}_A$ é a configuração convergida no início do passo e Δu é o incremento prescrito da coordenada generalizada. A linearização da restrição é:

$$c_A \delta Y_A = -\Psi \quad (\text{A.21})$$

com:

$$\Psi = c_A(Y_A - \hat{Y}_A) - \Delta u \quad (\text{A.22})$$

Combinando a equação de equilíbrio linearizada e a restrição de deslocamento, obtém-se o sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} H_{AB}^{(r)} & -\bar{F}_A \\ c_B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Y_B^{(r)} \\ \delta \lambda^{(r)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g_A^{(r)} \\ \Psi^{(r)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Essa forma é particularmente útil quando se deseja controlar uma coordenada estrutural sem eliminá-la como grau essencial. O fator de carga ajusta-se para satisfazer simultaneamente o equilíbrio e a restrição imposta. A expressão também evidencia a proximidade conceitual entre controle de deslocamento generalizado e comprimento de arco: ambos acrescentam uma equação escalar ao equilíbrio e tratam λ como incógnita.

A.7 MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO

O método de comprimento de arco é uma estratégia de continuação destinada a acompanhar trajetórias de equilíbrio mesmo quando há pontos limites de carga ou deslocamento. Em vez de prescrever diretamente λ ou uma componente isolada de Y_A , o método controla o tamanho do incremento no espaço ampliado formado pelas posições e pelo fator de carga. Essa ideia está associada aos métodos incrementais para problemas de snapping e buckling, nos quais a trajetória pode apresentar trechos instáveis ou retornos em relação às variáveis usuais de controle, segundo os autores De Borst et al. (2012) e Riks (1979).

Sejam $\hat{Y}_A$ e $\hat{\lambda}$ a configuração e o fator de carga convergidos no início de um passo. Durante o passo corrente, definem-se os incrementos acumulados:

$$\Delta Y_A = Y_A - \hat{Y}_A, \quad \Delta \lambda = \lambda - \hat{\lambda} \quad (\text{A.24})$$

A restrição de comprimento de arco adotada neste trabalho é:

$$\Phi(Y, \lambda) = \Delta Y_A \Delta Y_A + \mu^2 \Delta \lambda^2 \bar{F}_A \bar{F}_A - \Delta l^2 = 0 \quad (\text{A.25})$$

em que Δl é o raio do arco e μ é um parâmetro de escala que pondera a contribuição do incremento de carga. A soma $\Delta Y_A \Delta Y_A$ deve ser tomada sobre os graus de liberdade ativos. O termo $\bar{F}_A \bar{F}_A$ introduz uma escala associada ao vetor de carregamento de referência. A variação da restrição é:

$$\delta \Phi = 2 \Delta Y_A \delta Y_A + 2 \mu^2 \Delta \lambda \bar{F}_A \bar{F}_A \delta \lambda \quad (\text{A.26})$$

Na iteração r , a correção de Newton para a restrição impõe:

$$2 \Delta Y_A^{(r)} \delta Y_A^{(r)} + 2 \mu^2 \Delta \lambda^{(r)} \bar{F}_A \bar{F}_A \delta \lambda^{(r)} = -\Phi^{(r)} \quad (\text{A.27})$$

Combinando as Equações (87) e (101), obtém-se o sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} H_{AB}^{(r)} & -\bar{F}_A \\ 2 \Delta Y_B^{(r)} & 2 \mu^2 \Delta \lambda^{(r)} \bar{F}_C \bar{F}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Y_B^{(r)} \\ \delta \lambda^{(r)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g_A^{(r)} \\ \Phi^{(r)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Na segunda linha, o índice B indica a contração com a correção posicional $\delta Y_B^{(r)}$, enquanto $\bar{F}_c \bar{F}_c$ representa a norma quadrática do vetor de referência. Após a solução do sistema, atualizam-se as incógnitas:

$$Y_A^{(r+1)} = Y_A^{(r)} + \delta Y_A^{(r)}, \quad \lambda^{(r+1)} = \lambda^{(r)} + \delta \lambda^{(r)} \quad (\text{A.29})$$

O processo iterativo continua até que o equilíbrio e a restrição de arco sejam satisfeitos simultaneamente.

A.8 PREDITOR TANGENTE E ESCOLHA DO SINAL

No início de cada passo de comprimento de arco, é necessário construir uma estimativa inicial para Y_A e λ . Uma escolha natural é usar a direção tangente à trajetória no ponto convergido anterior. Essa direção é obtida pela solução:

$$\hat{H}_{AB} \dot{Y}_B = \bar{F}_A \quad (\text{A.30})$$

em que $\hat{H}_{AB}$ é a Hessiana avaliada na configuração convergida anterior. Admitindo a previsão:

$$\Delta Y_A^{(0)} = \Delta \lambda^{(0)} \dot{Y}_A \quad (\text{A.31})$$

e substituindo essa expressão na restrição de arco, obtém-se:

$$(\Delta \lambda^{(0)})^2 (\dot{Y}_A \dot{Y}_A + \mu^2 \bar{F}_A \bar{F}_A) = \Delta l^2 \quad (\text{A.32})$$

Logo:

$$\Delta \lambda^{(0)} = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\dot{Y}_A \dot{Y}_A + \mu^2 \bar{F}_A \bar{F}_A}} \quad (\text{A.33})$$

O sinal de $\Delta \lambda^{(0)}$ deve preservar a continuidade da trajetória. Se ΔY_A^{ant} e $\Delta \lambda^{\text{ant}}$ são os incrementos convergidos no passo anterior, uma condição usual de continuidade é:

$$\Delta Y_A^{(0)} \Delta Y_A^{\text{ant}} + \mu^2 \Delta \lambda^{(0)} \Delta \lambda^{\text{ant}} \bar{F}_A \bar{F}_A > 0 \quad (\text{A.34})$$

Quando essa desigualdade não é satisfeita, troca-se o sinal da previsão. Em regiões próximas a pontos críticos, a escolha do sinal pode exigir monitoramento adicional da trajetória e do espectro da Hessiana física, especialmente quando há possibilidade de bifurcação.

A.9 INCORPORAÇÃO DA REGULARIZAÇÃO ESPECTRAL

A regularização espectral mínima desenvolvida no Capítulo 8 é incorporada aos métodos incrementais por substituição da Hessiana física H_{AB} pela Hessiana regularizada H_{AB}^{reg} apenas no sistema linear de correção. No controle de força, resolve-se:

$$H_{AB}^{\text{reg},(r)} \delta Y_B^{(r)} = -g_A^{(r)} \quad (\text{A.35})$$

No controle de deslocamento generalizado, a regularização atua no bloco estrutural:

$$\begin{bmatrix} H_{AB}^{\text{reg},(r)} & -\bar{F}_A \\ c_B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Y_B^{(r)} \\ \delta \lambda^{(r)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g_A^{(r)} \\ \Psi^{(r)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

No comprimento de arco, a forma correspondente é:

$$\begin{bmatrix} H_{AB}^{\text{reg},(r)} & -\bar{F}_A \\ 2\Delta Y_B^{(r)} & 2\mu^2 \Delta \lambda^{(r)} \bar{F}_c \bar{F}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta Y_B^{(r)} \\ \delta \lambda^{(r)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g_A^{(r)} \\ \Phi^{(r)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

A regularização não modifica a equação de equilíbrio original:

$$g_A(Y, \lambda) = 0 \quad (\text{A.38})$$

nem altera a restrição de controle.

Portanto, os critérios de convergência devem ser avaliados com o resíduo físico g_A , com a restrição Ψ ou Φ quando aplicável, e não com uma força estabilizante. Essa separação impede que a regularização seja confundida com rigidez física adicional. Ela é uma intervenção algorítmica no cálculo da correção incremental, semelhante em interior a técnicas espectrais de estabilização numérica usadas para controlar matrizes mal condicionadas, conforme os trabalhos de Garhuom, Usman e Düster (2022) e Scherz, Kriegesmann e Pedersen (2024).

Autovalores negativos da Hessiana física não devem ser automaticamente elevados por essa regularização. Eles podem indicar instabilidade tangente, proximidade de ponto limite, bifurcação ou inadequação do incremento adotado. A proposta desta dissertação restringe a estabilização a autovalores positivos abaixo do limite admissível definido no capítulo anterior. Assim, a regularização melhora o condicionamento em modos positivos quase singulares, mas preserva a informação física associada à perda de estabilidade.

A.10 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

A convergência de um procedimento incremental não linear deve ser avaliada por mais de um indicador. Um primeiro critério é baseado na norma do resíduo de equilíbrio reduzido:

$$\eta_g = \frac{\sqrt{g_A g_A}}{F_{\text{ref}}} < \text{tol}_g \quad (\text{A.39})$$

em que F_{ref} é uma escala de força. Quando o vetor de carregamento de referência é adequado, pode-se usar:

$$F_{\text{ref}} = \sqrt{\bar{F}_A \bar{F}_A} \quad (\text{A.40})$$

Quando esse vetor possui norma muito pequena, componentes nulas dominantes ou escala incompatível com as reações esperadas, deve-se adotar uma escala alternativa, como a norma da força externa aplicada no passo, a norma da força interna ou uma força característica do problema.

Um segundo critério avalia a magnitude da correção posicional:

$$\eta_Y = \frac{\sqrt{\delta Y_A \delta Y_A}}{Y_{\text{ref}}} < \text{tol}_Y \quad (\text{A.41})$$

A escala Y_{ref} pode ser escolhida como uma dimensão característica da estrutura, a norma das posições atuais ou a norma dos incrementos acumulados. Para evitar divisões por valores muito pequenos, é recomendável usar:

$$Y_{\text{ref}} = \max(1, \sqrt{Y_A Y_A}) \quad (\text{A.42})$$

em unidades compatíveis com o modelo.

No controle de deslocamento generalizado, acrescenta-se o critério:

$$|\Psi| < \text{tol}_\Psi \quad (\text{A.43})$$

e, no comprimento de arco:

$$|\Phi| < \text{tol}_\Phi \quad (\text{A.44})$$

Em todos os casos, os critérios devem ser aplicados ao problema físico não regularizado. Além disso, para avaliar a influência da regularização, recomenda-se monitorar os indicadores definidos no capítulo anterior, como a fração modal estabilizada, a razão entre a norma da matriz estabilizante e a norma da Hessiana física, e a participação energética da regularização na correção incremental.

A.11 CONTROLE ADAPTATIVO DO PASSO INCREMENTAL

A escolha do tamanho do incremento tem influência direta sobre a robustez e a eficiência da análise. Passos muito grandes podem conduzir a divergência, seleção incorreta de ramo ou correções excessivamente influenciadas pela regularização. Passos muito pequenos aumentam o custo computacional e podem tornar a análise desnecessariamente lenta. Por isso, é conveniente adotar uma regra adaptativa simples baseada no número de iterações e no comportamento do resíduo.

Se N_{it} é o número de iterações necessárias para convergir um passo e N_{ref} é um número de iterações desejado, uma atualização possível para o raio de arco é:

$$\Delta l_{n+1} = \Delta l_n \left(\frac{N_{ref}}{N_{it}} \right)^\gamma \quad (\text{A.45})$$

com $\gamma > 0$. Para evitar variações abruptas, impõem-se limites inferior e superior:

$$\Delta l_{min} \leq \Delta l_{n+1} \leq \Delta l_{max} \quad (\text{A.46})$$

Regra análoga pode ser usada para o incremento de carga no controle de força ou para o incremento de deslocamento no controle de deslocamento.

A adaptação do passo deve considerar também indicadores físicos e espectrais. Quando a Hessiana apresenta autovalores próximos de zero, quando a regularização passa a atuar sobre muitos modos ou quando a razão de participação da estabilização cresce, a redução do passo pode ser mais adequada do que o aumento da rigidez algorítmica. Essa recomendação é coerente com a interpretação da regularização como ferramenta de condicionamento local, e não como substituto para uma parametrização incremental adequada da trajetória.

A.12 ALGORITMO INCREMENTAL-ITERATIVO

A solução incremental do problema pode ser organizada em uma sequência operacional. Para cada passo $n + 1$, parte-se de uma configuração convergida $\hat{Y}_A$ e de um fator de carga convergido $\hat{\lambda}$. Em seguida, escolhe-se o tipo de controle: força, deslocamento prescrito, deslocamento generalizado ou comprimento de arco. A partir dessa escolha, constrói-se uma previsão inicial para $Y_A^{(0)}$ e, quando aplicável, para $\lambda^{(0)}$.

Em cada iteração corretora, avaliam-se as grandezas cinemáticas elementares, a deformação de Green–Lagrange local, a tensão S , o módulo tangente K_t , a força interna e a Hessiana elementar. Após a montagem global e a aplicação das condições de contorno essenciais, calcula-se o resíduo reduzido. Se a regularização espectral for necessária, constrói-se H_{AB}^{reg} a partir da Hessiana física reduzida, obedecendo aos critérios modais definidos no Capítulo 8. Resolve-se então o sistema linear associado ao controle escolhido e atualizam-se as incógnitas.

A iteração é aceita quando os critérios de convergência do resíduo físico e das restrições de controle são satisfeitos. Caso contrário, repete-se o processo. Se o número máximo de iterações for excedido, reduz-se o tamanho do passo e reinicia-se a tentativa a partir da última configuração convergida. Essa estratégia evita que uma falha local de convergência contamine a trajetória global.

A.13 CONSIDERAÇÕES SOBRE ESTABILIDADE E PONTOS CRÍTICOS

Embora este capítulo trate dos métodos de solução, a análise da Hessiana física ao longo da trajetória fornece informações importantes sobre estabilidade. Em um problema conservativo, a Hessiana reduzida é a segunda variação da energia potencial total restrita aos graus livres. A perda de positividade dessa matriz pode indicar a aproximação de um ponto crítico. Em controle de força, pontos limites estão associados à singularidade da tangente em relação ao parâmetro de carga; em problemas com bifurcação, pode surgir uma direção incremental não trivial que satisfaz o equilíbrio linearizado homogêneo.

A regularização espectral não deve ocultar essa informação. Por isso, o espectro usado para diagnóstico deve ser sempre o da Hessiana física H_{AB} , e não o da matriz regularizada. A matriz H_{AB}^{reg} é útil para calcular correções quando o mau condicionamento decorre de autovalores positivos muito pequenos, mas a avaliação de estabilidade, a identificação de perda de rigidez e a interpretação de pontos críticos devem permanecer vinculadas à Hessiana original.

Essa separação é especialmente importante para a formulação de cabos flexíveis. Modos quase inextensíveis podem produzir autovalores positivos pequenos sem que isso represente necessariamente uma instabilidade global. Por outro lado, a passagem de um autovalor por zero pode indicar mudança qualitativa da trajetória. Distinguir essas situações exige monitoramento espectral, análise da forma modal correspondente e interpretação mecânica do estado de equilíbrio.

A.14 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram organizados os métodos incrementais de solução compatíveis com o elemento axial posicional parametrizado. A formulação foi escrita a partir do resíduo global reduzido g_A , da Hessiana tangente H_{AB} e do fator de carga λ , preservando a correspondência com a notação indicial elementar Y_i^α , $F_i^{\text{int},\alpha}$ e $H_{ik}^{\alpha\beta}$.

Foram discutidos o tratamento das condições de contorno essenciais, o controle de força, o controle de deslocamento prescrito, o controle de deslocamento generalizado e o método de comprimento de arco.

O controle de força foi apresentado como estratégia simples, adequada a trechos monotônicos da resposta, mas limitada na presença de pontos

limites. O controle de deslocamento prescrito foi caracterizado como alternativa para obter curvas força–deslocamento quando a variável controlada é monotônica. O controle de deslocamento generalizado foi introduzido como forma aumentada que trata o fator de carga como incógnita. O comprimento de arco foi formulado como método de continuação capaz de acompanhar trajetórias com retorno em carga ou deslocamento, mediante uma restrição escalar no espaço ampliado das posições e do fator de carga.

Por fim, mostrou-se como a regularização espectral mínima pode ser incorporada aos sistemas lineares de correção sem alterar o resíduo físico nem as restrições de controle. Essa organização preserva a separação entre modelo mecânico, método incremental e estabilização numérica. O capítulo seguinte utiliza essa base algorítmica para discutir aspectos de integração numérica, montagem computacional e implementação prática do elemento axial parametrizado.