



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS
DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)**

ENGENHARIA FÍSICA

LUGARES GEOMÉTRICOS DE CURVAS NA MÉTRICA DA SOMA E DO MÁXIMO

JOHN ESTEBAN MOSQUERA MOSQUERA

Foz do Iguaçu
2024



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS
DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)**

ENGENHARIA FÍSICA

LUGARES GEOMÉTRICOS DE CURVAS NA MÉTRICA DA SOMA E DO MÁXIMO

JOHN ESTEBAN MOSQUERA MOSQUERA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Física

Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León


Foz do Iguaçu
2024

JOHN ESTEBAN MOSQUERA MOSQUERA

LUGARES GEOMÉTRICOS DE CURVAS NA MÉTRICA DA SOMA E DO MÁXIMO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Física.

BANCA EXAMINADORA



Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León
(UNILA)



Prof. Dr. Newton Mayer Solórzano Chávez
(UNILA)



Prof. Dr. Rodrigo Bloot
(UNILA)

Documento assinado digitalmente



JESIKA MAGANIN
Data: 26/04/2024 15:42:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Ma. Jesika Maganin
(UFPR)

Foz do Iguaçu, 26 de abril de 2024.

TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor: John Esteban Mosquera Mosquera

Curso: Engenharia Física

Tipo de Documento

- | | |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> graduação | <input type="checkbox"/> artigo |
| <input type="checkbox"/> especialização | <input checked="" type="checkbox"/> trabalho de conclusão de curso |
| <input type="checkbox"/> mestrado | <input type="checkbox"/> monografia |
| <input type="checkbox"/> doutorado | <input type="checkbox"/> dissertação |
| | <input type="checkbox"/> tese |
| | <input type="checkbox"/> CD/DVD – obras audiovisuais |
| | <input type="checkbox"/> |
-

Título do trabalho acadêmico: Lugares Geométricos de Curvas na Métrica da Soma e do Máximo

Nome do orientador: Víctor Arturo Martínez León

Data da Defesa: 26/04/2024

Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor:

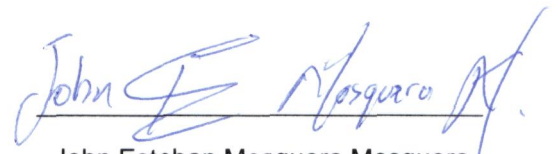
a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons Licença 3.0 Unported*.

Foz do Iguaçu, 26 de abril de 2024.


John Esteban Mosquera Mosquera

Dedico este trabalho à minha mãe, Rosaura, e aos meus tios, Laureano e Pedro Pablo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Víctor Arturo Martínez León, cuja orientação, paciência, experiência e apoio foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

À minha família: seu amor incondicional, encorajamento, incentivo e compreensão foram pilares essenciais ao longo deste caminho acadêmico, e por isso sou profundamente grato.

À UNILA e aos professores, que moldaram minha trajetória acadêmica. Seu compromisso com a excelência acadêmica proporcionou o ambiente propício para o crescimento e aprendizado que culminaram neste trabalho.

Obrigado a todos que contribuíram para este trabalho.

RESUMO

A geometria diferencial clássica de curvas estuda as propriedades locais dessas curvas, determinando como elas se comportam em torno de um ponto específico. Curvas podem ser visualizadas como o caminho de um objeto em movimento no espaço, por exemplo, um ciclista deixando um rastro em uma estrada lamacenta. O estudo clássico de curvas planas geralmente é realizado usando a métrica euclidiana, mas existem outras métricas interessantes no plano: a métrica do máximo e a métrica da soma. A geometria de bolas e esferas no plano varia de acordo com a métrica utilizada. Este trabalho investiga a geometria de curvas planas definidas por lugares geométricos usando as métricas do máximo e da soma. Especificamente, analisa cônicas e ovais de Cassini em casos canônicos e gerais. Além disso, apresenta fórmulas para calcular a distância entre um ponto e uma reta usando as métricas da soma e do máximo. Fórmulas explícitas para essa distância não foram encontradas na literatura para qualquer reta no plano.

Palavras-chaves: Lugar geométrico; métrica da soma; métrica do máximo; cônicas; ovais de Cassini.

RESUMEN

La geometría diferencial clásica de curvas estudia las propiedades locales de estas curvas, determinando cómo se comportan alrededor de un punto específico. Las curvas pueden ser visualizadas como el camino de un objeto en movimiento en el espacio, por ejemplo, un ciclista dejando un rastro en un camino embarrado. El estudio clásico de curvas planas generalmente se realiza utilizando la métrica euclidiana, pero existen otras métricas interesantes en el plano: la métrica del máximo y la métrica de la suma. La geometría de bolas y esferas en el plano varía según la métrica utilizada. Este trabajo investiga la geometría de curvas planas definidas por lugares geométricos usando las métricas del máximo y de la suma. Específicamente, analiza cónicas y óvalos de Cassini en casos canónicos y generales. Además, presenta fórmulas para calcular la distancia entre un punto y una recta utilizando las métricas de la suma y del máximo. No se encontraron fórmulas explícitas para esta distancia en la literatura para cualquier recta en el plano.

Palabras clave: Lugar geométrico; métrica de la suma; métrica del máximo; cónicas; ovals de Cassini.

ABSTRACT

Classical differential geometry of curves studies the local properties of these curves, determining how they behave around a specific point. Curves can be visualized as the path of an object in motion in space, for example, a cyclist leaving a trail on a muddy road. Classical study of flat curves is usually done using the Euclidean metric, but there are other interesting metrics in the plane: the maximum metric and the sum metric. The geometry of balls and spheres in the plane varies according to the metric used. This work investigates the geometry of flat curves defined by geometric places using the maximum and sum metrics. Specifically, it analyzes conics and Cassini ovals in canonical and general cases. Additionally, it presents formulas to calculate the distance between a point and a line using the sum and maximum metrics. Explicit formulas for this distance were not found in the literature for any line in the plane.

Keywords: Geometric locus; sum metric; maximum metric; conics; Cassini ovals.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Bolas nas diferentes normas	25
Figura 2 – Cônicas	26
Figura 3 – Ovais de Cassini	28
Figura 4 – Distância ponto a reta na métrica Euclidiana	32
Figura 5 – Gráfico de $h(x) = x + mx + n $, $-\frac{n}{m} > 0$ e $0 < m < 1$	35
Figura 6 – Gráfico de $h(x) = x + mx + n $, $-\frac{n}{m} > 0$ e $ m = 1$	36
Figura 7 – Gráfico de $h(x) = x + mx + n $, $-\frac{n}{m} > 0$ e $ m > 1$	36
Figura 8 – Gráfico de $h(x) = x + mx + n $, $-\frac{n}{m} < 0$ e $0 < m < 1$	37
Figura 9 – Gráfico de $h(x) = x + mx + n $, $-\frac{n}{m} < 0$ e $ m = 1$	38
Figura 10 – Gráfico de $h(x) = x + mx + n $, $-\frac{n}{m} < 0$ e $ m > 1$	38
Figura 11 – Gráfico de $f(x) = \max\{ x , \alpha\}$	41
Figura 12 – Gráfico de $g(y) = \max\{ y , \beta\}$	42
Figura 13 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n > 0$ e $m < -1$	44
Figura 14 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n > 0$ e $m = -1$	46
Figura 15 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n > 0$ e $-1 < m < 0$	48
Figura 16 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n > 0$ e $0 < m < 1$	50
Figura 17 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n > 0$ e $m = 1$	51
Figura 18 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n > 0$ e $m > 1$	53
Figura 19 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n < 0$ e $m < -1$	55
Figura 20 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n < 0$ e $m = -1$	56
Figura 21 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n < 0$ e $-1 < m < 0$	58
Figura 22 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n < 0$ e $0 < m < 1$	60
Figura 23 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n < 0$ e $m = 1$	61
Figura 24 – Gráfico de $h(x) = \max\{ x , mx + n \}$, $n < 0$ e $m > 1$	63
Figura 25 – Distância ponto $(-3, 2)$ na reta que passa pelos pontos $(-6, -2)$ e $(0, 0)$	64
Figura 26 – Distância ponto $(-3, 2)$ na reta que passa pelos pontos $(-2, -1)$ e $(2, 3)$	65
Figura 27 – Circunferências nas três métricas	67
Figura 28 – Parábola com foco $(x_0, 0)$ e diretriz $x = c$, $x_0 < 0$ e $c > 0$	68
Figura 29 – Parábola com foco $(x_0, 0)$ e diretriz $x = c$, $x_0 > 0$ e $c < 0$	69
Figura 30 – Parábola com foco (x_0, y_0) e diretriz $y = cx$, $x_0, y_0 > 0$ e $c < 0$	69

Figura 31 – Parábola com foco (x_0, y_0) e diretriz $y = cx$, $x_0 < 0, y_0 > 0$ e $c > 0$. . .	70
Figura 32 – Elipse com focos no eixo X	70
Figura 33 – Elipse com focos na reta $y = cx$ com $c > 0$	71
Figura 34 – Elipse com focos na reta $y = cx$ com $c < 0$	71
Figura 35 – Hipérbole com focos simétricos no eixo X	72
Figura 36 – Hipérbole com focos na reta $y = cx$ com $c > 0$	73
Figura 37 – Hipérbole com focos na reta $y = cx$ com $c < 0$	73
Figura 38 – Oval de Cassini com focos simétricos no eixo X	74
Figura 39 – Oval de Cassini com focos simétricos no eixo X contendo a origem	74
Figura 40 – Oval de Cassini com focos simétricos no eixo X contendo pontos simétricos no eixo Y	75

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRELIMINARES	16
2.1	NOÇÕES DE MÉTRICAS	16
2.2	BOLAS E ESFERAS	24
2.3	CÔNICAS EM \mathbb{R}^2 NA MÉTRICA EUCLIDIANA	25
2.4	OVAIS DE CASSINI EM \mathbb{R}^2 NA MÉTRICA EUCLIDIANA	27
3	PROPRIEDADES DA MÉTRICA DA SOMA E DO MÁXIMO	29
3.1	PROPRIEDADES DA MÉTRICA DA SOMA	29
3.2	PROPRIEDADES DA MÉTRICA DO MÁXIMO	30
4	DISTÂNCIA EM \mathbb{R}^2 DE UM PONTO A UMA RETA	31
4.1	DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA NA MÉTRICA EUCLIDIANA	31
4.2	DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA NA MÉTRICA DA SOMA	33
4.3	DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA NA MÉTRICA DO MÁXIMO	39
4.4	EXEMPLOS	64
5	COMPARAÇÃO DO GRÁFICOS DAS CÔNICAS E OVAIS DE CASSINI EM \mathbb{R}^2	68
5.1	PARÁBOLAS	68
5.2	ELIPSES	70
5.3	HIPÉRBOLES	72
5.4	OVAIS DE CASSINI	74
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
	REFERÊNCIAS	77

1 INTRODUÇÃO

Fundamentalmente, a geometria diferencial clássica de curvas trata do estudo das propriedades locais dessas curvas. Para ser mais preciso, essas propriedades locais determinam como a curva se comporta em torno de um ponto particular/específico. Podemos visualizar uma curva como o trajeto que um objeto percorre no espaço. Existem várias maneiras de estudar uma curva no espaço. Por exemplo, podemos pensar na trilha deixada por um ciclista em uma estrada lamacenta como uma curva em duas dimensões. Outra abordagem é considerar a trajetória de uma partícula em movimento, que pode ser parametrizada em função do tempo ou da distância percorrida. Embora inicialmente possamos imaginar uma curva como algo que desenhamos em uma folha de papel plana, é importante ressaltar que as curvas não estão restritas a superfícies planas. As partículas podem se mover e formar curvas em praticamente qualquer tipo de superfície. Por exemplo, se o ciclista percorrer uma distância significativa, a trilha deixada na lama se assemelhará mais a uma curva esférica, devido à curvatura da Terra. Curvas em superfícies variadas podem ser caracterizadas e seus comportamentos estudados.

O estudo clássico das curvas planas geralmente é realizado usando a métrica Euclidiana, porém na literatura existem outras duas métricas interessantes em \mathbb{R}^2 : a métrica do máximo e a métrica da soma. A geometria das bolas e esferas em \mathbb{R}^2 varia de acordo com a métrica utilizada. Por exemplo, na métrica do máximo, a “esfera unitária” é o contorno de um quadrado com centro na origem e lados de comprimento 2, paralelos aos eixos. Já na métrica da soma, o “disco unitário” é o quadrado com vértices nos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$ (ver Figura 1).

No trabalho de Hrycyk (HRYCYK, 2019), são analisadas as cônicas clássicas (elipse, hipérbole e parábola). O autor aborda essas curvas tanto geometricamente quanto analiticamente, utilizando as três métricas usuais em \mathbb{R}^2 : Euclidiana, do máximo e da soma. É importante ressaltar que o autor se concentra nas formas canônicas dessas curvas, que possuem simetria em relação aos eixos coordenados e à origem.

Neste trabalho, investigamos a geometria das curvas planas definidas por lugares geométricos, utilizando as métricas do máximo e da soma. Especificamente,

analisamos as cônicas e os ovais de Cassini nos casos canônicos e gerais.

Para isso, apresentamos fórmulas para calcular a distância entre um ponto e uma reta utilizando as métricas da soma e do máximo. Não encontramos na literatura uma fórmula explícita para essa distância em relação a qualquer reta no plano. Embora exista material sobre essas métricas, estudos analíticos sobre suas propriedades são geralmente escassos, nossa contribuição representa um avanço nesse sentido.

Em Krause (1987), o autor apresenta uma série de aplicações em um modelo de cidade, onde diferentes locais são representados por pontos no plano e as distâncias entre eles são calculadas utilizando a métrica da soma em vez da métrica Euclidiana. Argumenta-se que essa métrica é mais apropriada para representar os deslocamentos das pessoas nas ruas e avenidas durante seus trajetos. As análises são feitas de maneira geométrica, utilizando ferramentas de desenho como folhas milimetradas, compassos e régua, sem abordagem analítica.

Na engenharia, destacam-se estudos e aplicações relacionados aos conceitos abordados neste trabalho. Por exemplo, na ciência de dados, a análise por agrupamento é fundamental, e em Grabusts e Uzhga-Rebrov (2024), é apresentada uma abordagem alternativa para implementar o algoritmo K-means, utilizando a métrica Euclidiana para medir as distâncias entre os dados.

Quanto à apresentação de dados, a visualização por hierarquia é comumente utilizada. Em Wang, Xing e Zhang (2023), é proposta uma forma diferente de calcular os polígonos dos diagramas de Voronoi, substituindo a métrica Euclidiana pela métrica da soma e do máximo na definição das distâncias entre os centros e os pontos.

Em Vincze e Nagy (2022), é apresentada uma nova abordagem para a tomografia geométrica, baseada na mudança entre a métrica Euclidiana e a métrica da soma ao definir a função de distância média entre os pontos do conjunto.

Além disso, com base no Oval de Cassini e suas propriedades de simetria, Grabusts e Uzhga-Rebrov (2024) propõe um modelo para a detecção de aeronaves e projéteis por meio de radiolocalização com sistemas de radar biestáticos, onde o emissor e o receptor não estão no mesmo ponto, tornando importante o uso de métricas alternativas para calcular as distâncias.

O objetivo geral deste trabalho consiste em investigar a geometria das cônicas sob as métricas do máximo e da soma. Especificamente, buscamos analisar as propriedades distintas de cada tipo de cônica em cada uma das métricas, empregando abordagens analíticas e computacionais. Além disso, nosso objetivo foi explorar as limitações inerentes a essas análises e investigar os ovais de Cassini sob as mesmas métricas.

A metodologia adotada foi uma pesquisa bibliográfica, que incluiu análise de literatura especializada, como livros e dissertações sobre o tema. Realizamos reuniões semanais para discussão dos tópicos abordados e para avaliar o progresso da pesquisa. Inicialmente, revisitamos conceitos de espaços métricos com base em obras como Lima (2011), seguidos por uma revisão dos fundamentos da geometria analítica conforme abordado por Lehmann (1986), Lima (2015). Concluímos nossa revisão com uma análise das cônicas sob as métricas da soma e do máximo em \mathbb{R}^2 , utilizando como referência o estudo de Hrycyk (HRYCYK, 2019). Para complementar nossa investigação e validar os resultados obtidos, utilizamos a ferramenta de *software* livre *Geogebra*.

A seguir, apresentamos a estrutura dos capítulos:

No Capítulo 2, introduzimos os conceitos fundamentais necessários para compreender o trabalho. Inicialmente, exploramos as noções de métricas, fornecendo uma base sólida para o estudo das propriedades das curvas. Em seguida, discutimos bolas e esferas, essenciais para entender a geometria das curvas em diferentes métricas. Avançamos então para o estudo das cônicas em \mathbb{R}^2 na métrica Euclidiana, destacando resumidamente suas características e propriedades. Por fim, investigamos os ovais de Cassini em \mathbb{R}^2 na mesma métrica, ampliando nosso conhecimento sobre curvas e suas formas. Estas preliminares são cruciais para o desenvolvimento do estudo posterior sobre as métricas da soma e do máximo, e fornecem uma base sólida para a compreensão das análises que serão realizadas.

No Capítulo 3, é realizada a análise das propriedades das métricas da soma e do máximo. Basicamente, vemos que ambas métricas são invariantes por translações e não são invariantes por rotações.

No Capítulo 4, exploramos a distância entre um ponto e uma reta no plano \mathbb{R}^2 sob diferentes métricas. Começamos examinando a distância na métrica

Euclidiana, seguida pela análise da distância na métrica da soma e na métrica do máximo. Essa comparação nos permite entender como as diferentes métricas afetam a medida de distância entre um ponto e uma reta, proporcionando insights valiosos para a análise geométrica posterior.

No Capítulo 5, comparamos os gráficos das cônicas e ovais de Cassini em \mathbb{R}^2 . Exploramos graficamente as características distintas das parábolas, elipses, hipérbolas e ovais de Cassini sob diferentes métricas, destacando suas propriedades geométricas e comportamentais. Essa comparação nos permite entender como as diferentes métricas influenciam a forma e a disposição dessas curvas no plano, proporcionando uma visão mais completa da geometria das curvas em \mathbb{R}^2 .

No último capítulo, sintetizamos os principais resultados obtidos ao longo do trabalho. Discutimos as contribuições do estudo para a compreensão da geometria das curvas em diferentes métricas e destacamos possíveis direções para pesquisas futuras.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, introduzimos a noção de métrica em \mathbb{R}^n . Apresentamos as métricas Euclidiana, da soma e do máximo. Relembramos como estão definidas as cônicas e os ovais de Cassini na métrica Euclidiana. As principais referências utilizadas aqui são (LIMA, 2011; LEHMANN, 1986; MARTINS, 2019).

2.1 Noções de métricas

Definição 2.1. Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado *distância* de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

(d1) $d(x, x) = 0$;

(d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

(d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

(d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*desigualdade triangular*).

Um *espaço métrico* é um par (M, d) , onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M .

Daremos agora alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 2.1 (Exemplo 1 da Seção 1 do Capítulo 1 em (LIMA, 2011)). A métrica “zero-um”. Qualquer conjunto M não-vazio pode tornar-se um espaço métrico. Basta definir a métrica $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$.

Exemplo 2.2 (Exemplo 2 da Seção 1 do Capítulo 1 em (LIMA, 2011)). *Subespaço; métrica induzida*. Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado, de modo natural, como espaço métrico: basta considerar a restrição de d a $S \times S$. Quando isto é feito, S chama-se um *subespaço* de M e a métrica de S diz-se induzida pela de M .

Exemplo 2.3 (Exemplo 3 da Seção 1 do Capítulo 1 em (LIMA, 2011)). A *reta*, ou seja, o conjunto \mathbb{R} dos números reais, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A

distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$. Esta é a chamada “*métrica usual*” da reta.

Exemplo 2.4 (Exemplo 4 da Seção 1 do Capítulo 1 em (LIMA, 2011)). O *espaço euclidiano* \mathbb{R}^n . Este exemplo generaliza o anterior. Os pontos de \mathbb{R}^n são as listas $x = (x_1, \dots, x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Há três maneiras naturais de se definir a distância entre dois pontos em \mathbb{R}^n . Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, escrevemos:

$$d_E(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2},$$

$$d_S(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad \text{e}$$

$$d_M(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

As métricas d_E , d_S e d_M são as chamadas *métrica euclidiana*, *métrica da soma* e *métrica do máximo*, respectivamente. Vejamos a continuação que d_E , d_S e d_M são de fato métricas.

1. Métrica Euclidiana:

(d1) Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ temos

$$d_E(x, x) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i)^2 \right]^{1/2} = 0.$$

(d2) Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ distintos, temos, que $x_j - y_j \neq 0$ para algum $1 \leq j \leq n$. Daí, tem-se

$$d_E(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} > [(x_j - y_j)^2]^{1/2} = |x_j - y_j| > 0.$$

(d3) Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, temos

$$d_E(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 \right]^{1/2} = d_E(y, x)$$

(d4) A seguir mostraremos algumas afirmações úteis para nosso objetivo.

Afirmção 2.1. Dados $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ temos a *Desigualdade de Cauchy-Schwartz*:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^n b_i^2 \right]^{1/2}.$$

De fato, primeiramente note que se $a = (0, \dots, 0)$ ou $b = (0, \dots, 0)$ então a desigualdade é satisfeita. Portanto, consideremos a e b vetores não nulos. Logo, considerando

$$A = \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad C = \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad \text{e} \quad B = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

tem-se que $A, C > 0$. Definamos agora o polinômio $P(t) = At^2 + 2Bt + C$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\begin{aligned} P(t) &= At^2 + 2Bt + C = t^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (t^2 a_i^2 + 2t a_i b_i + b_i^2) = \sum_{i=1}^n (t a_i + b_i)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Daí,

$$P(t) = At^2 + 2Bt + C \geq 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Por outro lado, completando quadrados, obtemos

$$P(t) = A \left(t + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}. \quad (2.2)$$

Assim, tomando $t = -\frac{B}{A}$ em (2.1) e por (2.2), tem-se

$$\frac{AC - B^2}{A} \geq 0$$

e, como $A > 0$ temos $B^2 \leq AC$. O que mostra nossa afirmação.

Afirmção 2.2. Dados $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^2 \right]^{1/2}.$$

De fato, pela Afirmação 2.1, tem-se

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^n (a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2) \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^n b_i^2 \right]^{1/2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 \\
 &= \left(\left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^2 \right]^{1/2} \right)^2
 \end{aligned}$$

logo, tirando raiz quadrada a ambos os lados da desigualdade, obtemos nossa afirmação.

Agora, para demonstrar a desigualdade triangular, sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $z = (z_1, \dots, z_n)$, assim tomando $a_i = x_i - z_i$ e $b_i = z_i - y_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, pelo Afirmação 2.2, temos

$$\begin{aligned}
 d_E(x, y) &= \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^n [(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 \right]^{1/2} \\
 &\leq \left[\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \right]^{1/2} = d_E(x, z) + d_E(z, y).
 \end{aligned}$$

2. Métrica da soma:

(d1) Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tem-se

$$d_S(x, x) = \sum_{i=1}^n |x_i - x_i| = 0.$$

(d2) Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ distintos, temos, que $x_j - y_j \neq 0$ para algum $1 \leq j \leq n$. Daí, tem-se

$$d_S(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| > |x_j - y_j| > 0.$$

(d3) Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, temos

$$d_S(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d_S(y, x).$$

(d4) Para mostrar este item precisamos da seguinte afirmação:

Afirmção 2.3. Para quaisquer a, b e c números reais, temos

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|. \quad (2.3)$$

De fato, para qualquer a, b e c números reais, temos que

$$\begin{aligned} |a - c|^2 &= (a - c)^2 = (a - b + b - c)^2 \\ &= (a - b)^2 + 2(a - b)(b - c) + (b - c)^2 \\ &\leq (a - b)^2 + 2|a - b||b - c| + (b - c)^2 \\ &= (|a - b| + |b - c|)^2, \end{aligned}$$

o que implica em

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|.$$

Note que este resultado também pode ser obtido de (d4) da métrica Euclidiana considerando $n = 1$.

Utilizando (2.3) e a definição de d_S , temos

$$\begin{aligned} d_S(x, z) &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| = \sum_{i=1}^n |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\ &= d_S(y, x) + d_S(y, z). \end{aligned}$$

3. Métrica do máximo:

(d1) Seja $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tem-se

$$d_M(x, x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i| = 0.$$

(d2) Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ distintos, temos, que $x_j - y_j \neq 0$ para algum $1 \leq j \leq n$. Daí, tem-se

$$d_M(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \geq |x_j - y_j| > 0.$$

(d3) Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, temos

$$d_M(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| = d_M(y, x).$$

(d4) Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, temos

$$\begin{aligned} d_M(x, z) &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i| = d_M(x, y) + d_M(y, z). \end{aligned}$$

Proposição 2.1 (Proposição 1 da Seção 1 do Capítulo 1 em (LIMA, 2011)). Sejam d_E , d_S e d_M as métricas definidas no Exemplo 2.4. Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

$$d_M(x, y) \leq d_E(x, y) \leq d_S(x, y) \leq n \cdot d_M(x, y). \quad (2.4)$$

Demonstração.

($d_M \leq d_E$): Sejam $a = (a_1, \dots, a_n)$, temos

$$a_i^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n,$$

logo,

$$|a_i| = [a_i^2]^{1/2} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{1/2}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Assim, obtemos

$$\max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{1/2}.$$

Daí, tomando $a_i = x_i - y_i$, ara todo $1 \leq i \leq n$, podemos reescrever a ultima expressão como

$$d_M(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} = d_E(x, y).$$

($d_E(x, y) \leq d_S(x, y)$): Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ sabemos que

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|.$$

Esta desigualdade pode ser generaliza para n número reais, isto é, se $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ então

$$\left[\sum_{i=1}^n a_i^2 \right]^{1/2} \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Assim, tomando $a_i = x_i - y_i$, ara todo $1 \leq i \leq n$, podemos reescrever a ultima expressão como

$$d_E(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = d_S(x, y).$$

($d_S \leq n \cdot d_M$): Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tem-se

$$|a_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n$$

daí, obtemos

$$\sum_{i=1}^n |a_i| = |a_1| + \dots + |a_n| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| + \dots + \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| = n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|,$$

portanto,

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \leq n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Por fim, tomando $a_i = x_i - y_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, a última expressão pode ser reescrita como

$$d_S(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = n \cdot d_M(x, y).$$

Exemplo 2.5 (Exemplo 6 da Seção 1 do Capítulo 1 em (LIMA, 2011)). *Espaços vetoriais normados.* Seja E um espaço vetorial real. Uma *norma* em E é uma função real $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ o número real $\|x\|$, chamado a *norma de x* , de modo que são satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(N1) Se $x \neq 0$ então $\|x\| \neq 0$;

(N2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Um *espaço vetorial normado* é um par $(E, \| \cdot \|)$ onde E é um espaço vetorial real e $\| \cdot \|$ é uma norma em E . Usualmente denota-se o espaço vetorial normado com E , deixando a norma subentendida.

Exemplos de espaço vetorial normado são $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_E)$, $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_S)$ e $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_M)$, onde, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tem

$$\|x\|_E = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2},$$

$$\|x\|_S = |x_1| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ e}$$

$$\|x\|_M = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Todo espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ torna-se um espaço métrico por meio da definição $d(x, y) = \|x - y\|$. Esta métrica diz-se *proveniente da norma* $\|\cdot\|$. Por exemplo, as métricas d_E , d_S e d_M em \mathbb{R}^n são provenientes das normas $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_S$ e $\|\cdot\|_M$ respectivamente.

Exemplo 2.6 (Exemplo 7 da Seção 1 do Capítulo 1 em (LIMA, 2011)). *Espaços vetoriais com produto interno.* Seja E um espaço vetorial real. Um *produto interno* em E é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de vetores $x, y \in E$ um número real $\langle x, y \rangle$, chamado o produto interno de x por y , de modo a serem satisfeitas as seguintes condições, para $x, y, z \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários:

$$(P1) \quad \langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle;$$

$$(P2) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle;$$

$$(P3) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$$

$$(P4) \quad \text{Se } x \neq 0 \text{ então } \langle x, x \rangle > 0.$$

O exemplo mais natural de espaço vetorial com produto interno é \mathbb{R}^n , com $\langle x, y \rangle_E = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$. A norma $\|x\|_E$, introduzida no Exemplo 2.5, provém deste produto interno com $\|x\| = \langle x, x \rangle_E$.

Nem toda norma num espaço vetorial E provém de um produto interno. Quando, isto ocorre, vale a chamada *lei do paralelogramo*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

que decorre imediatamente da definição $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Assim, por exemplo, as normas $\|\cdot\|_S$ e $\|\cdot\|_M$ em \mathbb{R}^n não provém de um produto interno porque elas não cumprem a lei do paralelogramo. Basta considerar $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$ e $y = (0, 1, 0, \dots, 0)$ em \mathbb{R}^n . Note que $x + y = (1, 1, 0, \dots, 0)$ e $x - y = (1, -1, 0, \dots, 0)$, daí obtemos

$$\|x\|_M = \|x\|_S = \|y\|_M = \|y\|_S = 1,$$

$$\|x + y\|_M = 1, \quad \|x + y\|_S = 2, \quad \|x - y\|_M = 1 \quad \text{e} \quad \|x - y\|_S = 2.$$

Assim,

$$\|x + y\|_M^2 + \|x - y\|_M^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \neq 4 = 2(1^2 + 1^2) = 2(\|x\|_M^2 + \|y\|_M^2)$$

e

$$\|x + y\|_S^2 + \|x - y\|_S^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \neq 4 = 2(1^2 + 1^2) = 2(\|x\|_S^2 + \|y\|_S^2).$$

É conhecido, que a lei do paralelogramo também é condição suficiente para que uma norma seja proveniente de um produto interno.

2.2 Bolas e esferas

Definição 2.2. Seja a um ponto no espaço métrico M . Dado um número real $r > 0$, definimos:

1. A *bola aberta de centro a e raio r* é o conjunto

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

2. A *bola fechada de centro a e raio r* é o conjunto

$$B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq r\}.$$

3. A *esfera de centro a e raio r* é o conjunto

$$S[a; r] = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Evidentemente, $B[a; r] = B(a; r) \cup S[a; r]$, sendo esta reunião disjunta.

Quando a métrica d provém de uma norma $\|\cdot\|$ no espaço vetorial E , podemos escrever:

$$B(a; r) = \{x \in E; \|x - a\| < r\}, \quad B[a; r] = \{x \in E; \|x - a\| \leq r\}$$

$$S(a; r) = \{x \in E; \|x - a\| = r\}.$$

Consideremos em \mathbb{R}^n uma norma $\|\cdot\|$ qualquer. Em particular, o disco $B[0; 1]$ de centro 0 e raio 1 é chamado o *disco unitário* de \mathbb{R}^n . O conjunto

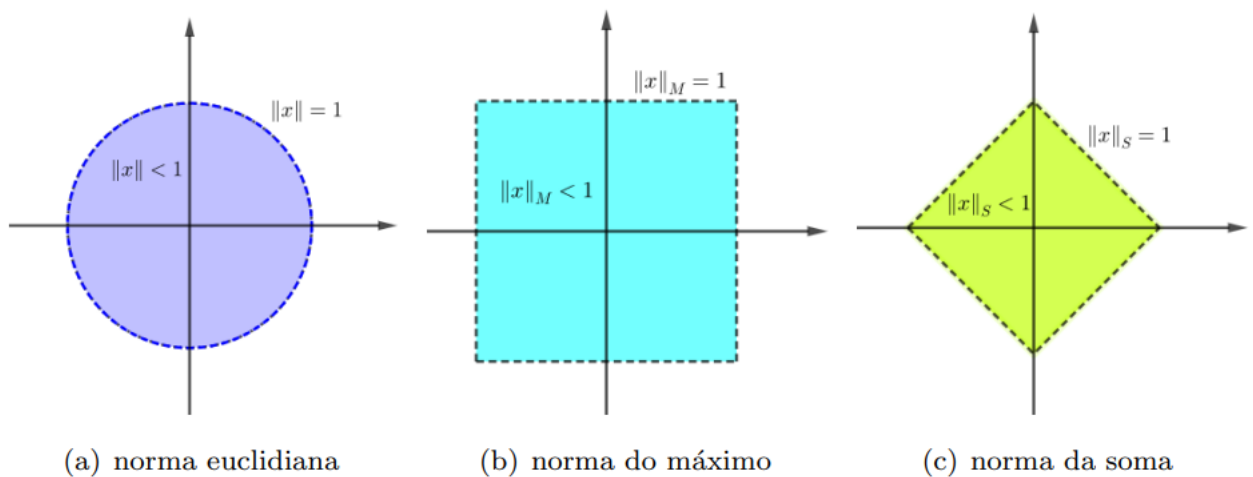
$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$$

é chamado *esfera unitária de dimensão $n - 1$* . Note que S^{n-1} é uma esfera de centro na origem e raio 1. Quando $n = 2$, S^1 é a circunferência de centro 0 e raio 1.

Convém, entretanto, observar que a forma geométrica das bolas e esferas em \mathbb{R}^n depende da norma que se considera. Por exemplo, se tomarmos em \mathbb{R}^2 a norma do máximo, a “esfera unitária” é o bordo do quadrado de centro 0 e lados de comprimento 2, paralelos aos eixos. Ainda em \mathbb{R}^2 , com a norma da soma, o “disco unitário” é o quadrado cujos vértices são os pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$.

Observação 2.1. Denotemos B , B_M e B_S respectivamente as bolas de centro a e raio r em \mathbb{R}^n , relativamente às normas euclidiana, do máximo e da soma. Seja ainda B'_M a bola de centro a e raio r/n na norma do máximo. As desigualdades (2.4) implicam que $B'_M \subset B_S \subset B \subset B_M$.

Figura 1 – Bolas nas diferentes normas



Fonte: Elaboração do autor

2.3 Cônicas em \mathbb{R}^2 na métrica euclidiana

As curvas chamadas de cônicas, a saber Elipse (\mathcal{E}), Hipérbole (\mathcal{H}) e Parábola (\mathcal{P}) em \mathbb{R}^2 estão definidas por uma condição específica chamada lugar geométrico. Assim temos as seguintes definições:

A elipse \mathcal{E} esta definida como o lugar geométrico dos pontos no plano cuja soma das distâncias aos pontos fixos F_1 e F_2 , chamados de *focos*, é uma constante $k > d_E(F_1, F_2)$, isto é, $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\mathcal{E} : d_E(P, F_1) + d_E(P, F_2) = k, \quad k > d_E(F_1, F_2).$$

A hipérbole \mathcal{H} é o lugar geométrico dos pontos no plano cujo módulo da diferença das distâncias aos pontos fixos F_1 e F_2 , é uma constante $0 < k < d_E(F_1, F_2)$, isto é, $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\mathcal{H} : |d_E(P, F_1) - d_E(P, F_2)| = k, \quad 0 < k < d_E(F_1, F_2).$$

A parábola \mathcal{P} é o lugar geométrico dos pontos do plano onde a distância a um ponto fixo F é igual à distância a uma reta fixa L chamada *diretriz* com $F \notin L$, isto é, $P \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\mathcal{P} : d_E(P, F) = d_E(P, L).$$

Estas cônicas podem ser escritas de forma geral por uma equação polinomial de segundo grau em duas variáveis:

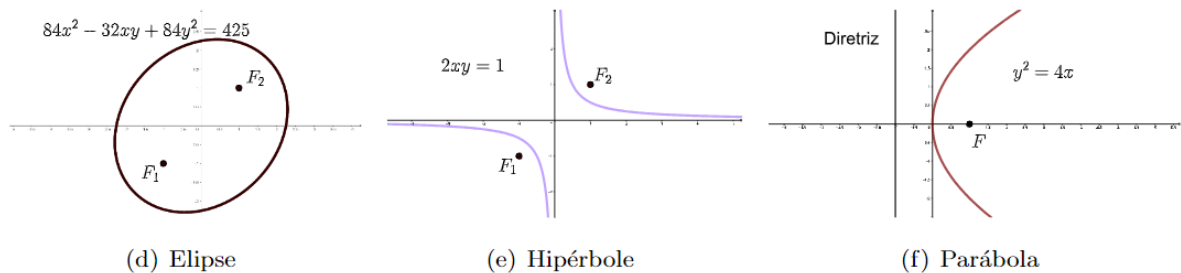
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Por outro lado, dada uma quadrática, podemos recuperar as cônicas não degeneradas por meio do um invariante $I = B^2 - 4AC$, chamado de *indicador* da quadrática. Mais especificamente:

- Se $I > 0$, então a cônica é do *tipo hiperbólico*.
- Se $I < 0$, então a cônica é do *tipo elíptico*.
- Se $I = 0$, então a cônica é do *tipo parabólico*.

A seguinte Figura 2 mostra alguns exemplos de cada uma das cônicas mencionadas anteriormente.

Figura 2 – Cônicas



Fonte: Elaboração do autor

Note que podemos definir de maneira análoga as cônicas em qualquer métrica de \mathbb{R}^2 . Basta trocar d_E nas igualdades anteriores por qualquer outra métrica d em \mathbb{R}^2 .

2.4 Ovais de Cassini em \mathbb{R}^2 na métrica euclidiana

Um oval de Cassini \mathcal{O} é o lugar geométrico dos pontos no plano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos $F_1 = (a, b)$ e $F_2 = (c, d)$ é uma constante $k > 0$, isto é, $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\mathcal{O} : d_E(P, F_1) \cdot d_E(P, F_2) = k.$$

Em coordenadas cartesianas, obtemos

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2} = k.$$

Elevando ambos os lados da expressão anterior ao quadrado, realizando a multiplicação de cada um dos produtos, expandindo os trinômios quadrados perfeitos, e por último, agrupando os fatores comuns com base nas potências, obtemos a expressão

$$\begin{aligned} & x^4 + y^4 + x^3(-2c - 2a) + y^3(-2d - 2b) + x^2(c^2 + 4ac + a^2 + d^2 + b^2) + \\ & y^2(a^2 + c^2 + d^2 + 4bd + b^2) + 2x^2y^2 + x^2y(-2d - 2b) + y^2x(-2a - 2c) + x(-2c^2a - 2ca^2 - 2d^2a - 2b^2c) + \\ & y(-2a^2d - 2c^2b - 2d^2b - 2b^2d) + xy(4ad + 4bc) + (a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2) = k^2. \end{aligned}$$

Comparando esta última expressão com a forma geral para equações de quarta ordem, a saber

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + Ax^3 + By^3 + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx + Gy + H = 0$$

podemos definir as igualdades

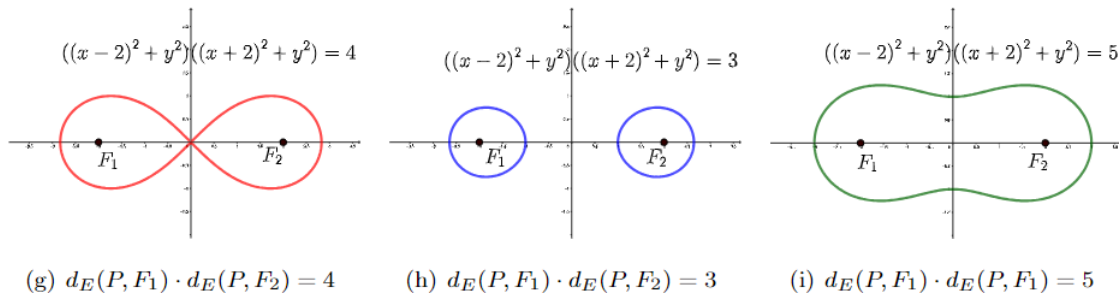
$$A = -2c - 2a, \quad B = -2d - 2b, \quad C = c^2 + 4ac + a^2 + d^2 + b^2, \quad D = 4ad + 4bc$$

$$E = a^2 + c^2 + d^2 + 4bd + b^2, \quad F = -2c^2a - 2ca^2 - 2d^2a - 2b^2c$$

$$G = -2a^2d - 2c^2b - 2d^2b - 2b^2d, \quad H = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - k^2.$$

Na Figura 3, apresentamos alguns exemplos de ovais de Cassini ao considerarmos os focos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$ e constantes $k = 4$, $k = 3$, e $k = 5$, respectivamente.

Figura 3 – Ovais de Cassini



Fonte: Elaboração do autor

Também podemos definir ovais de Cassini em qualquer métrica de \mathbb{R}^2 , como na seção anterior.

3 PROPRIEDADES DA MÉTRICA DA SOMA E DO MÁXIMO

Neste capítulo, apresenta-se duas propriedades que satisfazem as métricas da soma e do máximo.

3.1 Propriedades da métrica da soma

1. d_S é invariante por translações. De fato, seja $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e consideremos a translação $T_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_p(x, y) = (x, y) + p$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Agora vejamos que para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\begin{aligned} d_S(T_p(x_1, y_1), T_p(x_2, y_2)) &= d_S((x_1, y_1) + (p_1, p_2), (x_2, y_2) + (p_1, p_2)) \\ &= d_S((x_1 + p_1, y_1 + p_2), (x_2 + p_1, y_2 + p_2)) \\ &= |(x_1 + p_1) - (x_2 + p_1)| + |(y_1 + p_2) - (y_2 + p_2)| \\ &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = d_S((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

2. d_S não é invariante por rotações. Basta considerar $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

tal que

$$d_S(R_\theta(\bar{x}), R_\theta(\bar{y})) \neq d_S(\bar{x}, \bar{y})$$

para algum θ . Assim, para $\theta = \pi/4$ e considerando os pontos $(x_1, y_1) = (1, 1)$ e $(x_2, y_2) = (1, 2)$ obtemos a seguinte função

$$R_{\pi/4}(x, y) = \left(\frac{x\sqrt{2} - y\sqrt{2}}{2}, \frac{x\sqrt{2} + y\sqrt{2}}{2} \right).$$

Agora vejamos que não se verifica a invariância para $R_{\pi/4}$ nos pontos escolhidos:

$$d_S(R_{\pi/4}(1, 1), R_{\pi/4}(1, 2)) \neq d_S((1, 1), (1, 2)).$$

Fazendo ambos lados da igualdade anterior, temos

$$\begin{aligned} d_S(R_{\pi/4}(1, 1), R_{\pi/4}(1, 2)) &= d_S \left((0, \sqrt{2}), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\ &= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| -\frac{\sqrt{2}}{2} \right| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Mas, calculando d_S para os pontos dados temos

$$d_S((1, 1), (1, 2)) = |1 - 1| + |1 - 2| = 0 + 1 = 1.$$

Portanto, comprovamos que d_S não é invariante por rotações.

3.2 Propriedades da métrica do máximo

1. d_M é invariante por translações. De fato, seja $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e consideremos a translação $T_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T_p(x, y) = (x, y) + p$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Agora vejamos que para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\begin{aligned} d_M(T_p(x_1, y_1), T_p(x_2, y_2)) &= d_M((x_1, y_1) + (p_1, p_2), (x_2, y_2) + (p_1, p_2)) \\ &= d_M((x_1 + p_1, y_1 + p_2), (x_2 + p_1, y_2 + p_2)) \\ &= \max\{|x_1 + p_1 - (x_2 + p_1)|, |y_1 + p_2 - (y_2 + p_2)|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= d_M((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

2. d_M não é invariante por rotações. Isto é, dada a rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

então, existe θ tal que

$$d_M(R_\theta(\bar{x}), R_\theta(\bar{y})) \neq d_M(\bar{x}, \bar{y}).$$

De fato, basta considerar

$$R_{\pi/4}(x, y) = \left(\frac{x\sqrt{2} - y\sqrt{2}}{2}, \frac{x\sqrt{2} + y\sqrt{2}}{2} \right)$$

e os pontos $(x_1, y_1) = (0, 0)$ e $(x_2, y_2) = (1, 2)$. Assim temos,

$$d_M((0, 0), (1, 2)) = 2,$$

por outro lado

$$d_M(R_{\pi/4}(0, 0), R_{\pi/4}(1, 2)) = d_M\left((0, 0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = 3\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4 DISTÂNCIA EM \mathbb{R}^2 DE UM PONTO A UMA RETA

Neste capítulo, estudam-se as fórmulas das distâncias de um ponto a uma reta. Para a métrica Euclidiana, temos uma fórmula conhecida pela Geometria Analítica. Já no caso da métrica da soma e do máximo, não encontramos fórmulas conhecidas na literatura. Fruto de nosso estudo, encontramos fórmulas para essas métricas e apresentamos a demonstração em detalhes.

Definição 4.1. Seja d uma métrica qualquer em \mathbb{R}^2 . Definimos a distância de um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ a uma reta L em \mathbb{R}^2 da seguinte maneira:

$$d(P, L) = \min\{d(P, Q); Q \in L\}.$$

4.1 Distância de um ponto a uma reta na métrica euclidiana

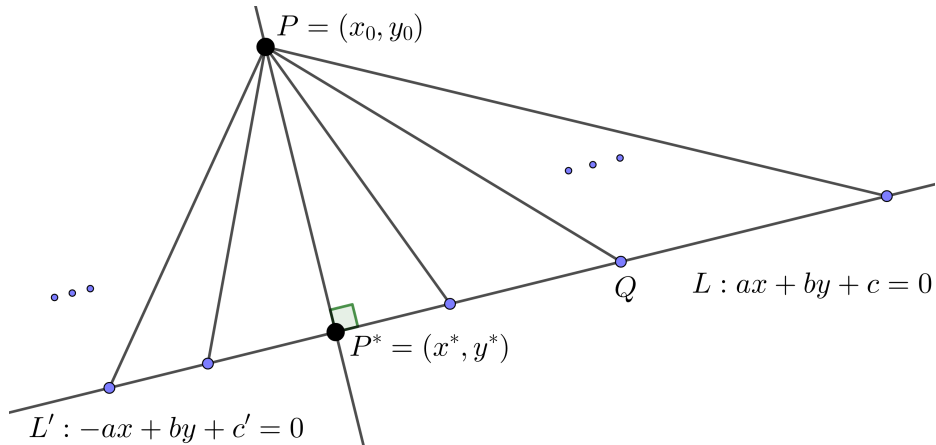
Teorema 4.1. Seja $L : ax + by + c = 0$ e $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ então

$$d_E(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstração. Note que, se P pertence a L , então $d_E(P, L) = 0$, o que claramente verifica a fórmula. Portanto, consideremos P fora de L . Como a reta $L : ax + by + c = 0$ tem coeficiente angular $-a/b$, logo a reta perpendicular a L tem coeficiente angular b/a portanto podemos considerar $L' : -bx + ay + c' = 0$ como a reta perpendicular que passa por P . Seja $P^* = (x^*, y^*)$ o ponto de interseção da reta L e L' . Note que dado qualquer ponto Q , diferente de P^* , na reta L determina um triângulo retângulo PP^*Q com ângulo reto em P^* . Observe na Figura 4, que todos os comprimentos dos segmentos PQ são hipotenusas dos triângulos retângulos determinados, portanto, pelo Teorema Pitágoras, sabemos que o comprimento de cada um dos catetos é sempre menor que o comprimento da hipotenusa, concluímos daí $d_E(P, L) = d_E(P, P^*)$. Agora, com P^* está nas retas L e L' tem-se

$$\begin{cases} ax^* + by^* = -c \\ -bx^* + ay^* = -c'. \end{cases}$$

Figura 4 – Distância ponto a reta na métrica Euclidiana



Fonte: Elaboração do autor

Resolvendo o sistema acima utilizando a regra de Cramer obtemos

$$x^* = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}} = \frac{bc' - ca}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad y^* = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ -b & -c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}} = -\frac{(ac' + bc)}{a^2 + b^2}.$$

Por outro lado, desde que P pertence a L' temos a seguinte relação

$$-bx_0 + ay_0 + c' = 0 \Rightarrow c' = bx_0 - ay_0.$$

Substituindo c' em x^* e y^* tem-se

$$x^* = \frac{b(bx_0 - ay_0) - ca}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad y^* = -\frac{a(bx_0 - ay_0) + bc}{a^2 + b^2}. \quad (4.1)$$

Daí, Eq.(4.1) temos

$$\begin{aligned} [d_E(P, P^*)]^2 &= (x^* - x_0)^2 + (y^* - y_0)^2 \\ &= \left(\frac{b(bx_0 - ay_0) - ca}{a^2 + b^2} - x_0 \right)^2 + \left(-\frac{a(bx_0 - ay_0) + bc}{a^2 + b^2} - y_0 \right)^2 \\ &= \left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ca - a^2x_0 - b^2x_0}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc - a^2y_0 - b^2y_0}{a^2 + b^2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{-bay_0 - ca - x_0a^2}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{-abx_0 - bc - b^2y_0}{a^2 + b^2} \right)^2 \\ &= \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2} (by_0 + c + x_0a)^2 + \frac{b^2}{(a^2 + b^2)^2} (by_0 + c + x_0a)^2 \\ &= \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} (a^2 + b^2) = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d_E(P, L) = d_E(P, P^*) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Observação 4.1. A demonstração apresentada acima só utiliza a Geometria Euclidiana plana. Uma outra demonstração usando Geometria Analítica pode ser encontrada na Seção 9 em (LIMA, 2015).

4.2 Distância de um ponto a uma reta na métrica da soma

Teorema 4.2. Seja $L : ax + by + c = 0$ e $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ então

$$d_S(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\max\{|a|, |b|\}}.$$

Demonstração. Novamente, se $P \in L$, então $d_S(P, L) = 0$, o que claramente verifica a fórmula. Assim, consideremos $P \notin L$. Suponhamos a seguintes possibilidades para a posição da reta L :

1. Se L é horizontal, isto é, $L : y = -\frac{c}{b}$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} d_S(P, L) &= \min\{d_S(P, Q); Q \in L\} \\ &= \min\left\{d_S\left((x_0, y_0), \left(x, -\frac{c}{b}\right)\right); x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \min\left\{|x_0 - x| + \left|y_0 + \frac{c}{b}\right|; x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \min\left\{|x| + \left|y_0 + \frac{c}{b}\right|; x \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Note que, a função $f(\bar{x}) = |x| + \left|y_0 + \frac{c}{b}\right|$ atinge seu mínimo valor quando $x = 0$.

Logo,

$$d_S(P, L) = \left|y_0 + \frac{c}{b}\right|.$$

2. Se L é vertical, isto é, $L : x = -\frac{c}{a}$. Agora, tem-se

$$\begin{aligned} d_S(P, L) &= \min\left\{d_S\left((x_0, y_0), \left(-\frac{c}{a}, y\right)\right); y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \min\left\{\left|x_0 + \frac{c}{a}\right| + |y_0 - y|; y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \min\left\{\left|x_0 + \frac{c}{a}\right| + |y|; y \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Note também, que a função $g(y) = \left|x_0 + \frac{c}{a}\right| + |y|$ atinge seu mínimo valor quando $y = 0$. Logo,

$$d_S(P, L) = \left|x_0 + \frac{c}{a}\right|.$$

3. Se L é oblíqua, isto é, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ com $a, b \neq 0$. Agora, tem-se

$$\begin{aligned} d_S(P, L) &= \min \left\{ d_S \left((x_0, y_0), \left(x, -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \right) \right); x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \min \left\{ |x_0 - x| + \left| y_0 + \frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \right|; x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \min \left\{ |x| + \left| \frac{a}{b}x - \frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0 \right|; x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Para facilitar a análise denotamos

$$m = \frac{a}{b} \text{ e } n = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0.$$

Assim, vamos minimizar a função

$$h(x) = |x| + |mx + n| = |x| + |m| \left| x + \frac{n}{m} \right|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Note também, que como $P \notin L$, $n \neq 0$. Para minimizar a função h , vamos considerar os seguintes casos:

Caso $-\frac{n}{m} > 0$: Neste caso,

$$h(0) = |n| \text{ e } h\left(-\frac{n}{m}\right) = \left| \frac{n}{m} \right| = -\frac{n}{m}.$$

Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{0, -\frac{n}{m}\right\}$, temos

• se $x < 0$, então

$$h(x) = -x + |m| \left(-x - \frac{n}{m} \right) = -(1 + |m|)x - |m| \frac{n}{m}.$$

• se $0 < x < -\frac{n}{m}$, então

$$h(x) = x + |m| \left(-x - \frac{n}{m} \right) = (1 - |m|)x - |m| \frac{n}{m}.$$

• se $-\frac{n}{m} < x$, então

$$h(x) = x + |m| \left(x + \frac{n}{m} \right) = (1 + |m|)x + |m| \frac{n}{m}.$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -(1 + |m|)x - |m| \frac{n}{m} & , x < 0 \\ |n| & , x = 0 \\ (1 - |m|)x - |m| \frac{n}{m} & , 0 < x < -\frac{n}{m} \\ -\frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ (1 + |m|)x + |m| \frac{n}{m} & , x > -\frac{n}{m}. \end{cases}$$

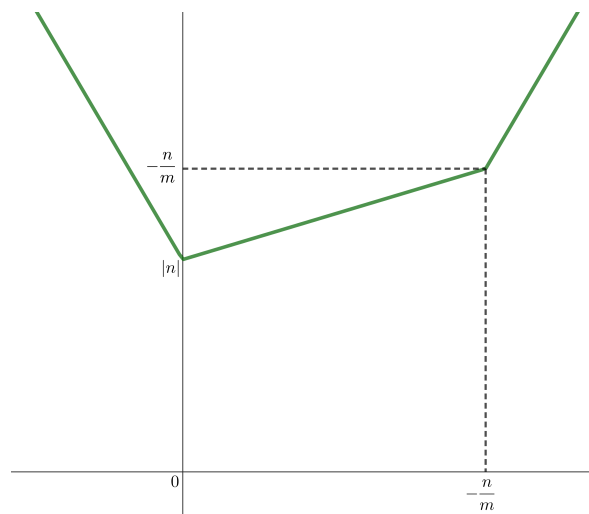
Note que, como $-\frac{n}{m} > 0$, obtemos

$$-|m|\frac{n}{m} = -\frac{|m|}{|n|}\frac{n}{m}|n| = -\left|\frac{m}{n}\right|\frac{n}{m}|n| = \frac{m}{n}\frac{n}{m}|n| = |n|. \quad (4.2)$$

Aqui agora, temos três possibilidades:

- Se $0 < |m| < 1$, como pode-se observar na Figura 5, o valor mínimo de h é $|n|$.

Figura 5 – Gráfico de $h(x) = |x| + |mx + n|$, $-\frac{n}{m} > 0$ e $0 < |m| < 1$



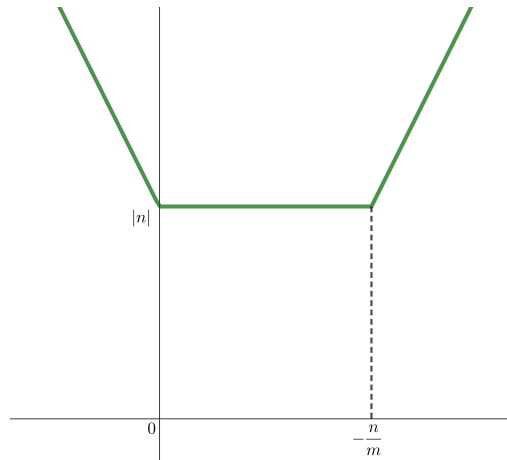
Fonte: Elaboração do autor

- Se $|m| = 1$, a função h é dada por:

$$h(x) = \begin{cases} -2x - \frac{n}{m} & , x < 0 \\ |n| & , x = 0 \\ -\frac{n}{m} & , 0 < x < -\frac{n}{m} \\ \frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ 2x + \frac{n}{m} & , x > -\frac{n}{m} \end{cases}$$

Note que, Eq. (4.2), $-\frac{n}{m} = |n|$. Neste caso, observa-se na Figura 6 que o valor mínimo de h também é $|n|$.

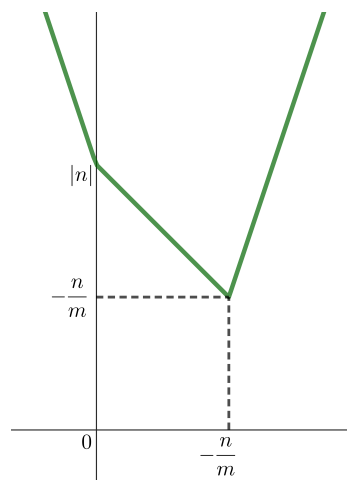
Figura 6 – Gráfico de $h(x) = |x| + |mx + n|$, $-\frac{n}{m} > 0$ e $|m| = 1$



Fonte: Elaboração do autor

- Se $|m| > 1$, como pode-se observar na Figura 7 o valor mínimo de h é $-\frac{n}{m}$.

Figura 7 – Gráfico de $h(x) = |x| + |mx + n|$, $-\frac{n}{m} > 0$ e $|m| > 1$



Fonte: Elaboração do autor

Caso $-\frac{n}{m} < 0$: Neste caso,

$$h\left(-\frac{n}{m}\right) = \left|\frac{n}{m}\right| = \frac{n}{m} \text{ e } h(0) = |n|.$$

Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{n}{m}, 0\right\}$, temos

- se $x < -\frac{n}{m}$, então

$$h(x) = -x + |m| \left(-x - \frac{n}{m}\right) = -(1 + |m|)x - |m| \frac{n}{m}.$$

- se $-\frac{n}{m} < x < 0$, então

$$h(x) = -x + |m| \left(x + \frac{n}{m} \right) = (|m| - 1)x + |m| \frac{n}{m}.$$

- se $0 < x$, então

$$h(x) = x + |m| \left(x + \frac{n}{m} \right) = (1 + |m|)x + |m| \frac{n}{m}.$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -(1 + |m|)x - |m| \frac{n}{m} & , x < -\frac{n}{m} \\ \frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ (|m| - 1)x + |m| \frac{n}{m} & , -\frac{n}{m} < x < 0 \\ |n| & , x = 0 \\ (1 + |m|)x + |m| \frac{n}{m} & , x > 0. \end{cases}$$

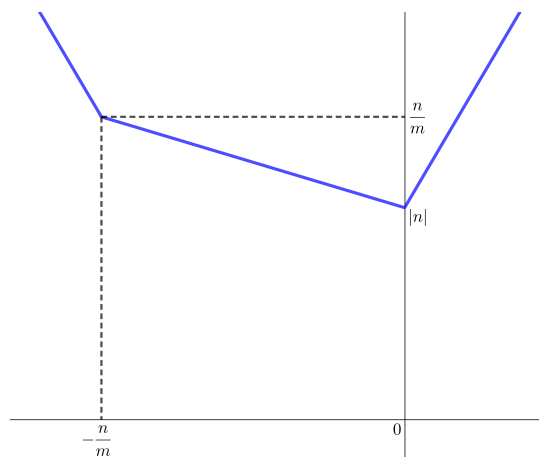
Note que, como $-\frac{n}{m} < 0$, obtemos

$$|m| \frac{n}{m} = \frac{|m|}{|n|} \frac{n}{m} |n| = \left| \frac{m}{n} \right| \frac{n}{m} |n| = \frac{m}{n} \frac{n}{m} |n| = |n|. \quad (4.3)$$

Novamente, temos três possibilidades:

- Se $0 < |m| < 1$, como observa-se na Figura 8 o valor mínimo de h é $|n|$.

Figura 8 – Gráfico de $h(x) = |x| + |mx + n|$, $-\frac{n}{m} < 0$ e $0 < |m| < 1$



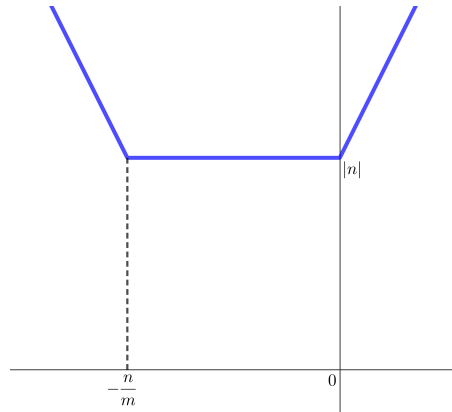
Fonte: Elaboração do autor

- Se $|m| = 1$, a função h é dada por:

$$h(x) = \begin{cases} -2x - \frac{n}{m} & , x < -\frac{n}{m} \\ \frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ \frac{n}{m} & , -\frac{n}{m} < x < 0 \\ |n| & , x = 0 \\ 2x + \frac{n}{m} & , x > 0. \end{cases}$$

Note que, pela Eq. (4.3), $\frac{n}{m} = |n|$. Assim, pela Figura 9, observa-se que o valor mínimo de h também é $|n|$.

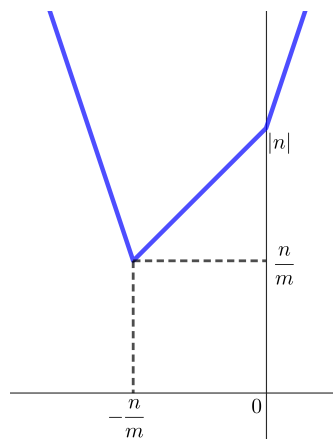
Figura 9 – Gráfico de $h(x) = |x| + |mx + n|$, $-\frac{n}{m} < 0$ e $|m| = 1$



Fonte: Elaboração do autor

- Se $|m| > 1$, como pode-se observar na Figura 10, o valor mínimo de h é $\frac{n}{m}$.

Figura 10 – Gráfico de $h(x) = |x| + |mx + n|$, $-\frac{n}{m} < 0$ e $|m| > 1$



Fonte: Elaboração do autor

Em resumo:

- Para $L : y = -\frac{c}{b}$, então

$$d_S(P, L) = \left| y_0 + \frac{c}{b} \right| = \frac{|by_0 + c|}{|b|}.$$

- Para $L : x = -\frac{c}{a}$, então

$$d_S(P, L) = \left| x_0 + \frac{c}{a} \right| = \frac{|ax_0 + c|}{|a|}.$$

- Para $L : y = mx + n$ com $m = \frac{a}{b}$ e $n = -\frac{a}{b}x_0 - y_0 - \frac{c}{b}$.

- Se $|m| \leq 1$, tem-se

$$d_S(P, L) = |n| = \left| -\frac{a}{b}x_0 - y_0 - \frac{c}{b} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}.$$

Note que $|m| \leq 1$ implica $|a| \leq |b|$, logo $|b| = \max\{|a|, |b|\}$.

- Se $|m| > 1$, tem-se

$$d_S(P, L) = \left| \frac{n}{m} \right| = \left| \frac{-\frac{a}{b}x_0 - y_0 - \frac{c}{b}}{\frac{a}{b}} \right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a|}.$$

Note também que $|m| > 1$ implica $|a| > |b|$, logo $|a| = \max\{|a|, |b|\}$.

4.3 Distância de um ponto a uma reta na métrica do máximo

Para o seguinte resultado que buscamos encontrar, vamos utilizar o lema a seguir:

Lema 4.1. Dado $a, b \in \mathbb{R}$ temos

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

Demonstração. Se $a \geq b$ então $\max\{a, b\} = a$, mas por outro lado tem-se

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + a - b}{2} = a = \max\{a, b\}.$$

Analogamente, se $a < b$ temos $\max\{a, b\} = b$, e, por outro lado obtemos

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + b - a}{2} = b = \max\{a, b\}.$$

Teorema 4.3. Seja $L : ax + by + c = 0$ e $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ então

$$d_M(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}.$$

Demonstração. Novamente, se $P \in L$, então $d_S(P, L) = 0$, o que claramente verifica a fórmula. Assim, consideremos $P \notin L$. Suponhamos as seguintes possibilidades para a posição da reta L :

1. Se L é horizontal, isto é, $L : y = -\frac{c}{b}$. Neste caso, pelo Lema 4.1, temos

$$\begin{aligned} d_M(P, L) &= \min\{d_M(P, Q); Q \in L\} \\ &= \min\left\{d_M\left((x_0, y_0), \left(x, -\frac{c}{b}\right)\right); x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \min\left\{\max\left\{|x_0 - x|, \left|y_0 + \frac{c}{b}\right|\right\}; x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \min\left\{\max\left\{|x|, \left|y_0 + \frac{c}{b}\right|\right\}; x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{|x| + \left|y_0 + \frac{c}{b}\right| + \left||x| - \left|y_0 + \frac{c}{b}\right|\right|}{2}; x \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Vamos denotar $\alpha = \left|y_0 + \frac{c}{b}\right|$. Note que, $\alpha > 0$ pois $P \notin L$. Devemos minimizar a função

$$f(x) = \frac{|x| + \alpha + \left||x| - \alpha\right|}{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Observe que

$$f(0) = \alpha, \quad f(\alpha) = \alpha \quad \text{e} \quad f(-\alpha) = \alpha.$$

Agora para todo $x \in \mathbb{R} - \{-\alpha, 0, \alpha\}$, obtemos:

- Se $x < -\alpha$, tem-se

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x + \alpha + \left|-x - \alpha\right|}{2} \\ &= \frac{-x + \alpha + |x + \alpha|}{2} \\ &= \frac{-x + \alpha - (x + \alpha)}{2} = -x. \end{aligned}$$

- Se $-\alpha < x < 0$, tem-se

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x + \alpha + \left|-x - \alpha\right|}{2} \\ &= \frac{-x + \alpha + |x + \alpha|}{2} \\ &= \frac{-x + \alpha + x + \alpha}{2} = \alpha. \end{aligned}$$

- Se $0 < x < \alpha$, tem-se

$$f(x) = \frac{x + \alpha + |x - \alpha|}{2} = \frac{x + \alpha - x + \alpha}{2} = \alpha.$$

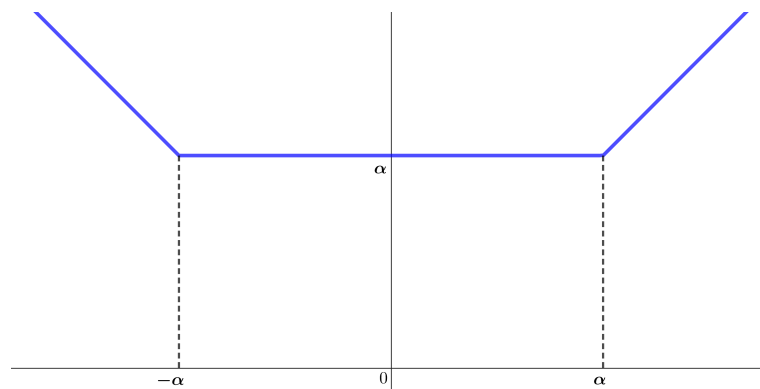
- Se $\alpha < x$, tem-se

$$f(x) = \frac{x + \alpha + |x - \alpha|}{2} = \frac{x + \alpha + x - \alpha}{2} = x.$$

Portanto,

$$f(x) = \begin{cases} -x & , x < -\alpha \\ \alpha & -\alpha \leq x \leq \alpha \\ x & , x > \alpha. \end{cases}$$

Figura 11 – Gráfico de $f(x) = \max\{|x|, \alpha\}$



Fonte: Elaboração do autor

Logo, pela Figura 11 observamos que

$$d_M(P, L) = \alpha = \left| y_0 + \frac{c}{b} \right|.$$

2. Se L é vertical, isto é, $L : x = -\frac{c}{a}$. Assim, pelo Lema 4.1, temos

$$\begin{aligned} d_M(P, L) &= \min\{d_M(P, Q); Q \in L\} \\ &= \min \left\{ d_M \left((x_0, y_0), \left(-\frac{c}{a}, y \right) \right); y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \min \left\{ \max \left\{ \left| x_0 + \frac{c}{a} \right|, |y_0 - y| \right\}; y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \min \left\{ \max \left\{ \left| x_0 + \frac{c}{a} \right|, |y| \right\}; y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{|y| + \left| x_0 + \frac{c}{a} \right| + \left| |y| - \left| x_0 + \frac{c}{a} \right| \right|}{2}; y \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

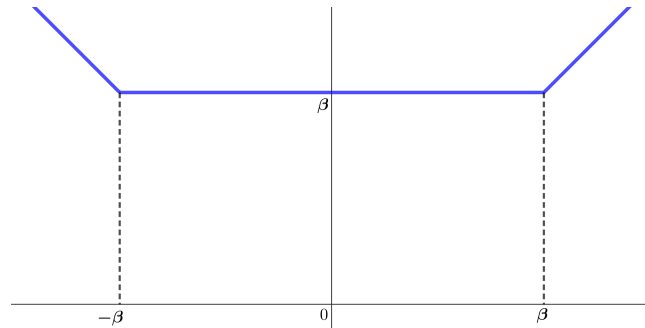
Vamos denotar $\beta = \left| x_0 + \frac{c}{a} \right|$. Note que, $\beta > 0$ pois $P \notin L$. Devemos minimizar a função

$$g(y) = \frac{|y| + \beta + ||y| - \beta|}{2}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Trabalhando como no item anterior, obtemos

$$g(y) = \begin{cases} -y & , y < -\beta \\ \beta & , -\beta \leq y \leq \beta \\ y & , y > \beta. \end{cases}$$

Figura 12 – Gráfico de $g(y) = \max\{|y|, \beta\}$



Fonte: Elaboração do autor

Logo, pela Figura 12 obtemos

$$d_M(P, L) = \beta = \left| x_0 + \frac{c}{a} \right|.$$

3. Se L é oblíqua, isto é, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ com $a, b \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} d_M(P, L) &= \min \left\{ d_M \left((x_0, y_0), \left(x, -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \right) \right); x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \min \left\{ \max \left\{ |x_0 - x|, \left| y_0 + \frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \right| \right\}; x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \min \left\{ \max \left\{ |x|, \left| \frac{a}{b}x - \frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0 \right| \right\}; x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Para facilitar a análise vamos denotar $m = \frac{a}{b}$ e $n = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b} - y_0$. Pelo Lema 4.1, a função

$$h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\} = \frac{|x| + |mx + n| + ||x| - |mx + n||}{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Note também, que como $P \notin L$, $n \neq 0$. Para minimizar a função h , vamos considerar os seguintes casos:

- Se $n > 0$ e $m < -1$. Então $\frac{n}{1-m} > 0$, $-\frac{n}{m} > 0$ e $-\frac{n}{1+m} > 0$. Note também que, $0 < -m < 1-m$ e $n > 0$, então $\frac{n}{1-m} < -\frac{n}{m}$ e, como $0 < -m-1 < -m$ e $n > 0$, então $-\frac{n}{m} < -\frac{n}{1+m}$. Observe que $h(0) = n$, $h\left(\frac{n}{1-m}\right) = \frac{n}{1-m}$, $h\left(-\frac{n}{m}\right) = -\frac{n}{m}$ e $h\left(-\frac{n}{1+m}\right) = -\frac{n}{1+m}$. Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{n}{1-m}, -\frac{n}{m}, -\frac{n}{1+m}\right\}$, temos

– se $x < 0$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x + (mx + n) + |-x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + |(m+1)x + n|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + (m+1)x + n}{2} = mx + n \end{aligned}$$

– se $0 < x < \frac{n}{1-m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x + (mx + n) + |x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m+1)x + n + |(1-m)x - n|}{2} \\ &= \frac{(m+1)x + n - (1-m)x + n}{2} = mx + n \end{aligned}$$

– se $\frac{n}{1-m} < x < -\frac{n}{m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x + (mx + n) + |x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m+1)x + n + |(1-m)x - n|}{2} \\ &= \frac{(m+1)x + n + (1-m)x - n}{2} = x \end{aligned}$$

– se $-\frac{n}{m} < x < -\frac{n}{1+m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x - (mx + n) + |x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + |(1+m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + (1+m)x + n}{2} = x \end{aligned}$$

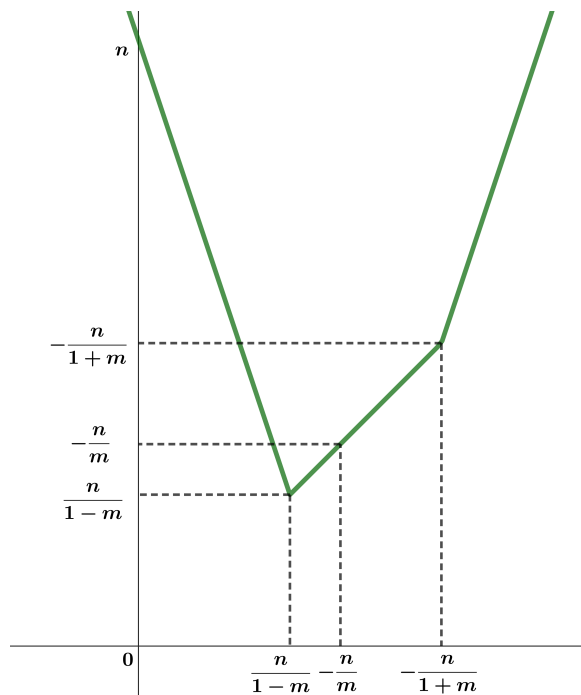
– se $-\frac{n}{1+m} < x$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x - (mx + n) + |x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1 - m)x - n + |(1 + m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(1 - m)x - n - (1 + m)x - n}{2} = -mx - n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} mx + n & , x < 0 \\ n & , x = 0 \\ mx + n & , 0 < x < \frac{n}{1-m} \\ \frac{n}{1-m} & , x = \frac{n}{1-m} \\ x & , \frac{n}{1-m} < x < -\frac{n}{m} \\ -\frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ x & , -\frac{n}{m} < x < -\frac{n}{1+m} \\ -\frac{n}{1+m} & , x = -\frac{n}{1+m} \\ -mx - n & , x > -\frac{n}{1+m}. \end{cases}$$

Figura 13 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n > 0$ e $m < -1$



Fonte: Elaboração do autor

Como observamos na Figura 13 o valor mínimo de h é $\frac{n}{1-m}$.

- Se $n > 0$ e $m = -1$. Neste caso,

$$h(x) = \max\{|x|, |-x + n|\}.$$

Observe que

$$h(0) = n, \quad h\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad h(n) = n.$$

Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{n}{2}, n\right\}$, temos

- se $x < 0$, então

$$h(x) = \max\{-x, -x + n\} = -x + n$$

- se $0 < x < \frac{n}{2}$, então

$$h(x) = \max\{x, -x + n\} = -x + n$$

- se $\frac{n}{2} < x < n$, então

$$h(x) = \max\{x, -x + n\} = x$$

- se $n < x$, então

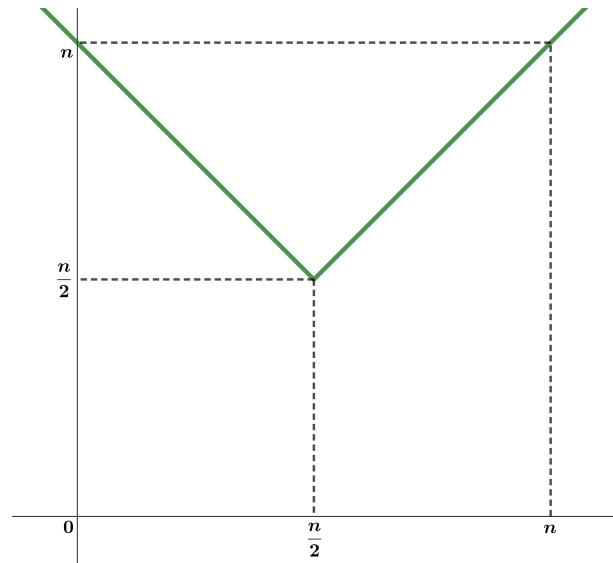
$$h(x) = \max\{x, x - n\} = x.$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -x + n & , x < 0 \\ n & , x = 0 \\ -x + n & , 0 < x < \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} & , x = \frac{n}{2} \\ x & , \frac{n}{2} < x < n \\ n & , x = n \\ x & , x > n. \end{cases}$$

Como pode-se observar na Figura 14 o valor mínimo de h é $\frac{n}{2}$.

Figura 14 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n > 0$ e $m = -1$



Fonte: Elaboração do autor

- Se $n > 0$ e $-1 < m < 0$. Então

$$-\frac{n}{m} > 0, \frac{n}{1-m} > 0 \text{ e } -\frac{n}{1+m} < 0.$$

Note também, como $0 < -m < 1 - m$ e $n > 0$, então $\frac{n}{1-m} < -\frac{n}{m}$. Observe que

$$h\left(-\frac{n}{1+m}\right) = \frac{n}{1+m}, h(0) = n, h\left(\frac{n}{1-m}\right) = \frac{n}{1-m} \text{ e } h\left(-\frac{n}{m}\right) = -\frac{n}{m}.$$

Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{n}{1+m}, 0, \frac{n}{1-m}, -\frac{n}{m}\right\}$, temos

– se $x < -\frac{n}{1+m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x + (mx + n) + |-x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + |(m+1)x + n|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n - (m+1)x - n}{2} = -x \end{aligned}$$

– se $-\frac{n}{1+m} < x < 0$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x + (mx + n) + |-x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + |(m+1)x + n|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + (m+1)x + n}{2} = mx + n \end{aligned}$$

– se $0 < x < \frac{n}{1-m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x + (mx + n) + |x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m+1)x + n + |(1-m)x - n|}{2} \\ &= \frac{(m+1)x + n - (1-m)x + n}{2} = mx + n \end{aligned}$$

– se $\frac{n}{1-m} < x < -\frac{n}{m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x + (mx + n) + |x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m+1)x + n + |(1-m)x - n|}{2} \\ &= \frac{(m+1)x + n + (1-m)x - n}{2} = x \end{aligned}$$

– se $-\frac{n}{m} < x$, então

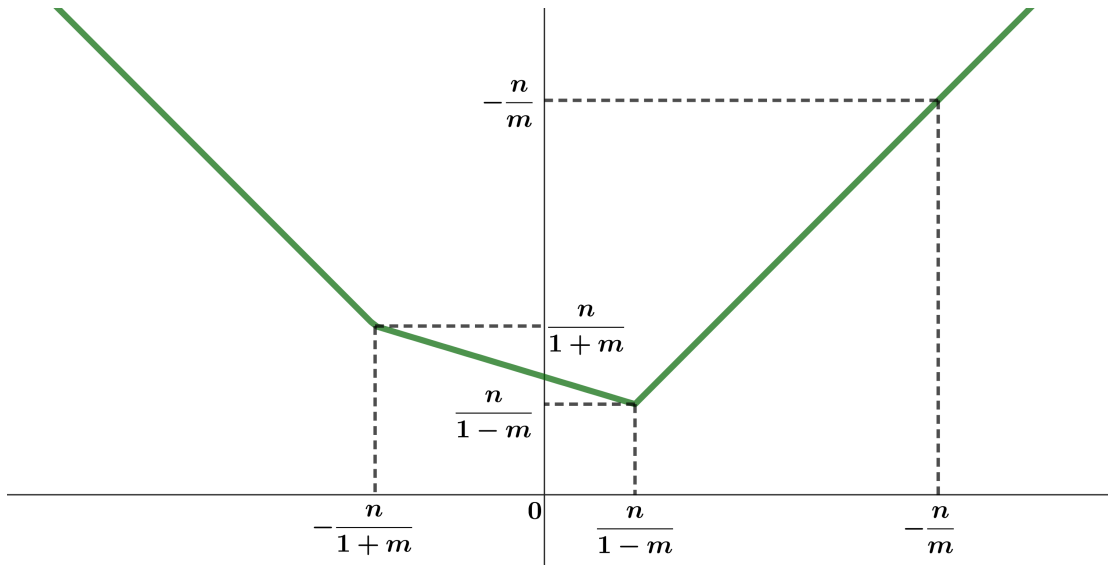
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x - (mx + n) + |x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + |(m+1)x + n|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + (m+1)x + n}{2} = x \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -x & , x < -\frac{n}{1+m} \\ \frac{n}{1+m} & , x = -\frac{n}{1+m} \\ mx + n & , -\frac{n}{1+m} < x < 0 \\ n & , x = 0 \\ mx + n & , 0 < x < \frac{n}{1-m} \\ \frac{n}{1-m} & , x = \frac{n}{1-m} \\ x & , \frac{n}{1-m} < x < -\frac{n}{m} \\ -\frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ x & , x > -\frac{n}{m} \end{cases}$$

Logo, pela Figura 15 observamos que o valor mínimo de h é $\frac{n}{1-m}$.

Figura 15 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n > 0$ e $-1 < m < 0$



Fonte: Elaboração do autor

- Se $n > 0$ e $0 < m < 1$. Então

$$-\frac{n}{m} < 0, \frac{n}{1-m} < 0 \text{ e } -\frac{n}{1+m} > 0.$$

Note também, como $0 < m < 1+m$ e $n > 0$, então $-\frac{n}{m} < -\frac{n}{1+m}$. Observe que

$$h\left(-\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}, h\left(-\frac{n}{1+m}\right) = \frac{n}{1+m}, h(0) = n \text{ e } h\left(\frac{n}{1-m}\right) = \frac{n}{1-m}.$$

Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{n}{m}, -\frac{n}{1+m}, 0, \frac{n}{1-m}\right\}$, temos

- se $x < -\frac{n}{m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x - (mx + n) + |-x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{-(m+1)x - n + |(m-1)x + n|}{2} \\ &= \frac{-(m+1)x - n + (m-1)x + n}{2} = -x \end{aligned}$$

- se $-\frac{n}{m} < x < -\frac{n}{1+m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x + (mx + n) + |-x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + |(m+1)x + n|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n - (m+1)x - n}{2} = -x \end{aligned}$$

– se $-\frac{n}{1+m} < x < 0$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x + (mx + n) + |-x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + |(1+m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + (1+m)x + n}{2} = mx + n \end{aligned}$$

– se $0 < x < \frac{n}{1-m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x + (mx + n) + |x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m+1)x + n + |(1-m)x - n|}{2} \\ &= \frac{(m+1)x + n - (1-m)x + n}{2} = mx + n \end{aligned}$$

– se $\frac{n}{1-m} < x$, então

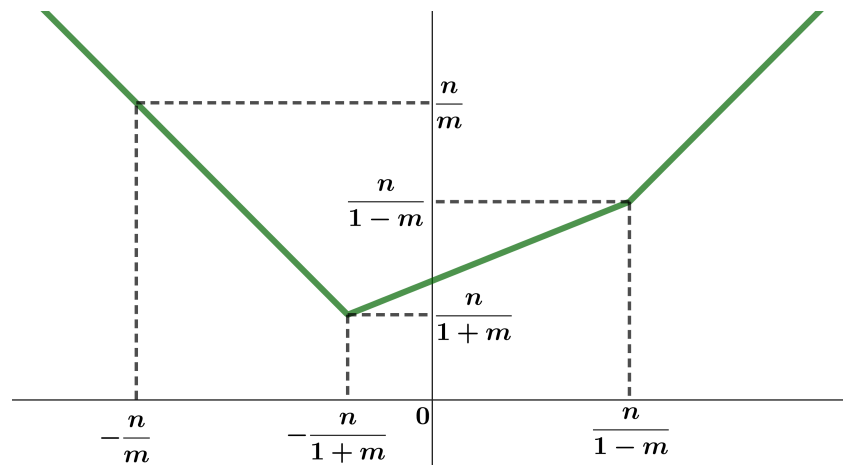
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x + (mx + n) + |x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1+m)x + n + |(1-m)x - n|}{2} \\ &= \frac{(1+m)x + n + (1-m)x - n}{2} = x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -x & , x < -\frac{n}{m} \\ \frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ -x & , -\frac{n}{m} < x < -\frac{n}{1+m} \\ \frac{n}{1+m} & , x = -\frac{n}{1+m} \\ mx + n & , -\frac{n}{1+m} < x < 0 \\ n & , x = 0 \\ mx + n & , 0 < x < \frac{n}{1-m} \\ \frac{n}{1-m} & , x = \frac{n}{1-m} \\ x & , x > \frac{n}{1-m}. \end{cases}$$

Logo, pela Figura 16 o valor mínimo de h é $\frac{n}{1+m}$.

Figura 16 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n > 0$ e $0 < m < 1$



Fonte: Elaboração do autor

- Se $n > 0$ e $m = 1$. Neste caso,

$$h(x) = \max\{|x|, |x + n|\}.$$

Observe que

$$h(-n) = n, \quad h\left(-\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} \quad \text{e} \quad h(0) = n.$$

Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{-n, -\frac{n}{2}, 0\right\}$, temos

- se $x < -n$, então

$$h(x) = \max\{-x, -x - n\} = -x$$

- se $-n < x < -\frac{n}{2}$, então

$$h(x) = \max\{-x, x + n\} = -x$$

- se $-\frac{n}{2} < x < 0$, então

$$h(x) = \max\{-x, x + n\} = x + n$$

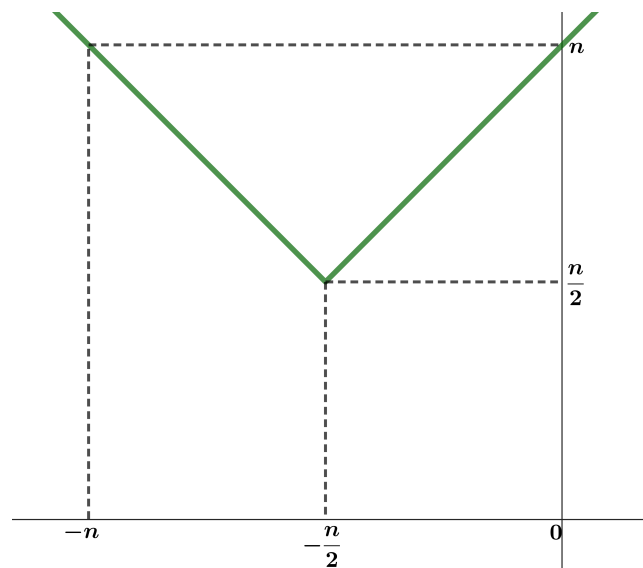
- se $0 < x$ então

$$h(x) = \max\{x, x + n\} = x + n.$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -x & , x < -n \\ n & , x = -n \\ -x & , -n < x < -\frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} & , x = -\frac{n}{2} \\ x + n & , -\frac{n}{2} < x < 0 \\ n & , x = 0 \\ x + n & , x > 0. \end{cases}$$

Figura 17 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n > 0$ e $m = 1$



Fonte: Elaboração do autor

Assim, pela Figura 17 o valor mínimo de h é $\frac{n}{2}$.

- Se $n > 0$ e $m > 1$. Então

$$\frac{n}{1-m} < 0, \quad -\frac{n}{m} < 0 \quad \text{e} \quad -\frac{n}{1+m} < 0.$$

Note também, como $0 < m - 1 < m$ e $n > 0$, então

$$\frac{n}{1-m} < -\frac{n}{m}$$

e, como $0 < m < m + 1$ e $n > 0$ então

$$-\frac{n}{m} < -\frac{n}{1+m}.$$

Observe que

$$h\left(\frac{n}{1-m}\right) = -\frac{n}{1-m}, \quad h\left(-\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}, \quad h\left(-\frac{n}{1+m}\right) = \frac{n}{1+m} \text{ e } h(0) = n.$$

Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{n}{1-m}, -\frac{n}{m}, -\frac{n}{1+m}, 0 \right\}$, temos

– se $x < \frac{n}{1-m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x - (mx + n) + |-x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n + |(m-1)x + n|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n - (m-1)x - n}{2} = -mx - n \end{aligned}$$

– se $\frac{n}{1-m} < x < -\frac{n}{m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x - (mx + n) + |-x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n + |(m-1)x + n|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n + (m-1)x + n}{2} = -x \end{aligned}$$

– se $-\frac{n}{m} < x < -\frac{n}{1+m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x + (mx + n) + |-x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + |(1+m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n - (1+m)x - n}{2} = -x \end{aligned}$$

– se $-\frac{n}{1+m} < x < 0$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x + (mx + n) + |-x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + |(1+m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + (1+m)x + n}{2} = mx + n \end{aligned}$$

– se $0 < x$, então

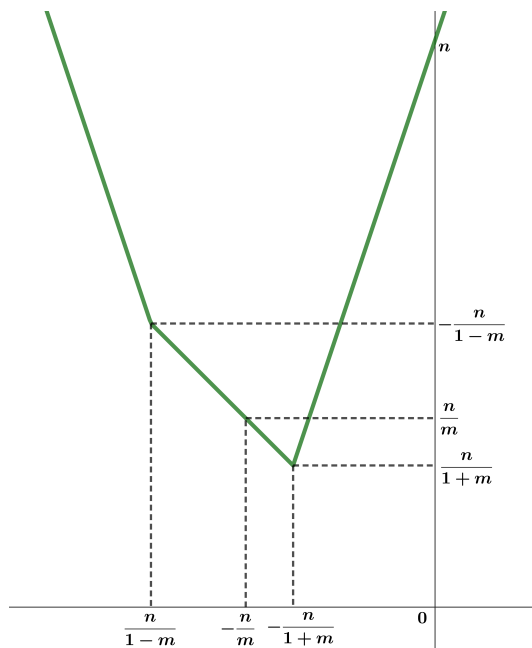
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x + (mx + n) + |x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1+m)x + n + |(1-m)x - n|}{2} \\ &= \frac{(1+m)x + n - (1-m)x + n}{2} = mx + n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -mx - n & , x < \frac{n}{1-m} \\ -\frac{n}{1-m} & , x = \frac{n}{1-m} \\ -x & , \frac{n}{1-m} < x < -\frac{n}{m} \\ \frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ -x & , -\frac{n}{m} < x < -\frac{n}{1+m} \\ \frac{n}{1+m} & , x = -\frac{n}{1+m} \\ mx + n & , -\frac{n}{1+m} < x < 0 \\ n & , x = 0 \\ mx + n & , x > 0. \end{cases}$$

Logo, pela Figura 18 o valor mínimo de h é $\frac{n}{1+m}$.

Figura 18 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n > 0$ e $m > 1$



Fonte: Elaboração do autor

• Se $n < 0$ e $m < -1$, então

$$-\frac{n}{1+m} < 0, \quad -\frac{n}{m} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{n}{1-m} < 0.$$

Note também, como $0 < -1 - m < -m$ e $n < 0$, então

$$-\frac{n}{1+m} < -\frac{n}{m}$$

e, como $0 < -m < 1 - m$ e $n < 0$ então

$$-\frac{n}{m} < \frac{n}{1-m}.$$

Observe que

$$h\left(-\frac{n}{1+m}\right) = \frac{n}{1+m}, \quad h\left(-\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}, \quad h\left(\frac{n}{1-m}\right) = -\frac{n}{1-m} \text{ e } h(0) = n.$$

Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{n}{1+m}, -\frac{n}{m}, \frac{n}{1-m}, 0\right\}$, temos

- se $x < -\frac{n}{1+m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x + (mx + n) + |-x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + |(m+1)x + n|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + (m+1)x + n}{2} = mx + n \end{aligned}$$

- se $-\frac{n}{1+m} < x < -\frac{n}{m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x + (mx + n) + |-x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + |(1+m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n - (1+m)x - n}{2} = -x \end{aligned}$$

- se $-\frac{n}{m} < x < \frac{n}{1-m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x - (mx + n) + |-x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n + |(m-1)x + n|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n + (m-1)x + n}{2} = -x \end{aligned}$$

- se $\frac{n}{1-m} < x < 0$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x - (mx + n) + |-x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n + |(m-1)x + n|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n - (m-1)x - n}{2} = -mx - n \end{aligned}$$

– se $0 < x$, então

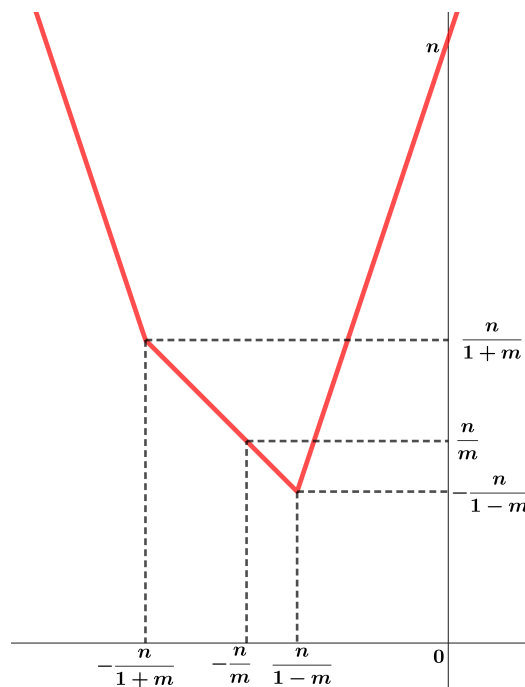
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x - (mx + n) + |x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1 - m)x - n + |(1 + m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(1 - m)x - n - (1 + m)x - n}{2} = -mx - n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} mx + n & , x < -\frac{n}{1+m} \\ \frac{n}{1+m} & , x = -\frac{n}{1+m} \\ -x & , -\frac{n}{1+m} < x < -\frac{n}{m} \\ \frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ -x & , -\frac{n}{m} < x < \frac{n}{1-m} \\ -\frac{n}{1-m} & , x = \frac{n}{1-m} \\ -mx - n & , \frac{n}{1-m} < x < 0 \\ n & , x = 0 \\ -mx - n & , x > 0. \end{cases}$$

Assim, como observamos na Figura 19 o valor mínimo de h é $-\frac{n}{1-m}$.

Figura 19 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n < 0$ e $m < -1$



Fonte: Elaboração do autor

- Se $n < 0$ e $m = -1$. Neste caso, $h(x) = \max\{|x|, |-x + n|\}$. Observe que $h(n) = -n$, $h\left(\frac{n}{2}\right) = -\frac{n}{2}$ e $h(0) = -n$. Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{n, \frac{n}{2}, 0\right\}$, temos

- se $x < n$, então

$$h(x) = \max\{-x, -x + n\} = -x$$

- se $n < x < \frac{n}{2}$, então

$$h(x) = \max\{-x, x - n\} = -x$$

- se $\frac{n}{2} < x < 0$, então

$$h(x) = \max\{-x, x - n\} = x - n$$

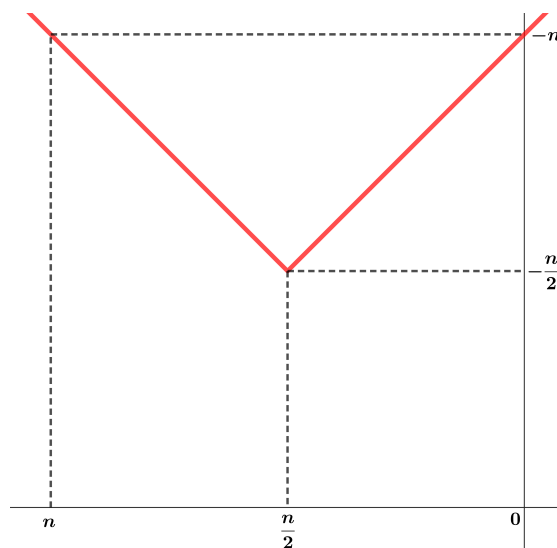
- se $0 < x$, então

$$h(x) = \max\{x, x - n\} = x - n.$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -x & , x < n \\ -n & , x = n \\ -x & , n < x < \frac{n}{2} \\ -\frac{n}{2} & , x = \frac{n}{2} \\ x - n & , \frac{n}{2} < x < 0 \\ -n & , x = 0 \\ x - n & , x > 0. \end{cases}$$

Figura 20 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n < 0$ e $m = -1$



Fonte: Elaboração do autor

Logo, pela Figura 20 o valor mínimo de h é $-\frac{n}{2}$.

- Se $n < 0$ e $-1 < m < 0$, então $-\frac{n}{m} < 0$, $\frac{n}{1-m} < 0$ e $-\frac{n}{1+m} > 0$. Note também, como $0 < -m < 1-m$ e $n < 0$, então $-\frac{n}{m} < \frac{n}{1-m}$. Observe que $h\left(-\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}$, $h\left(\frac{n}{1-m}\right) = -\frac{n}{1-m}$, $h(0) = -n$ e $h\left(-\frac{n}{1+m}\right) = -\frac{n}{1+m}$.

Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{n}{m}, \frac{n}{1-m}, 0, -\frac{n}{1+m}\right\}$, temos

- se $x < -\frac{n}{m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x + (mx + n) + |-x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n + |(m+1)x + n|}{2} \\ &= \frac{(m-1)x + n - (m+1)x - n}{2} = -x \end{aligned}$$

- se $-\frac{n}{m} < x < \frac{n}{1-m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x - (mx + n) + |-x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n + |(m-1)x + n|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n + (m-1)x + n}{2} = -x \end{aligned}$$

- se $\frac{n}{1-m} < x < 0$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x - (mx + n) + |-x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n + |(m-1)x + n|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n - (m-1)x - n}{2} = -mx - n \end{aligned}$$

- se $0 < x < -\frac{n}{1+m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x - (mx + n) + |x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + |(1+m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n - (1+m)x - n}{2} = -mx - n \end{aligned}$$

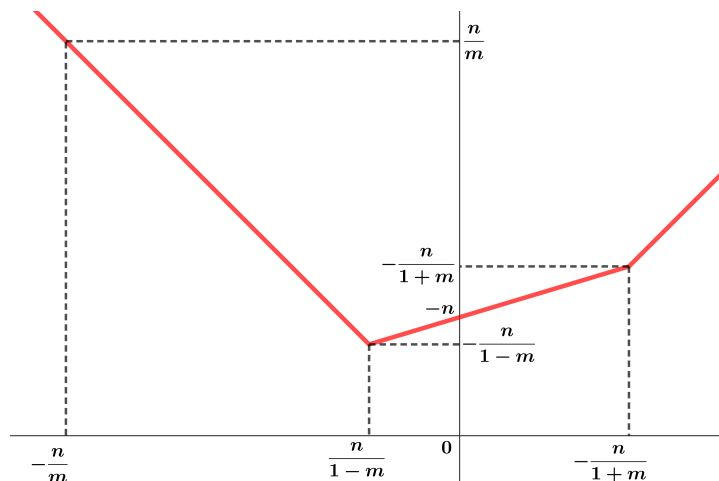
– se $-\frac{n}{1+m} < x$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x - (mx + n) + |x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + |(1+m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + (1+m)x + n}{2} = x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -x & , x < -\frac{n}{m} \\ \frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ -x & , -\frac{n}{m} < x < \frac{n}{1-m} \\ -\frac{n}{1-m} & , x = \frac{n}{1-m} \\ -mx - n & , \frac{n}{1-m} < x < 0 \\ -n & , x = 0 \\ -mx - n & , 0 < x < -\frac{n}{1+m} \\ -\frac{n}{1+m} & , x = -\frac{n}{1+m} \\ x & , x > -\frac{n}{1+m}. \end{cases}$$

Figura 21 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n < 0$ e $-1 < m < 0$



Fonte: Elaboração do autor

Daí, pela Figura 21 o valor mínimo de h é $-\frac{n}{1-m}$.

- Se $n < 0$ e $0 < m < 1$, então $\frac{n}{1-m} < 0$, $-\frac{n}{1+m} > 0$ e $-\frac{n}{m} > 0$. Note também, como $0 < m < 1+m$ e $n < 0$, então $-\frac{n}{1+m} < -\frac{n}{m}$. Observe que

$h\left(\frac{n}{1-m}\right) = -\frac{n}{1-m}$, $h(0) = -n$, $h\left(-\frac{n}{1+m}\right) = -\frac{n}{1+m}$ e $h\left(-\frac{n}{m}\right) = -\frac{n}{m}$. Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{n}{1-m}, 0, -\frac{n}{1+m}, -\frac{n}{m}\right\}$, temos

– se $x < \frac{n}{1-m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x - (mx+n) + |-x + (mx+n)|}{2} \\ &= \frac{-(m+1)x - n + |(m-1)x + n|}{2} \\ &= \frac{-(m+1)x - n + (m-1)x + n}{2} = -x \end{aligned}$$

– se $\frac{n}{1-m} < x < 0$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x - (mx+n) + |-x + (mx+n)|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n + |(m-1)x + n|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n - (m-1)x - n}{2} = -mx - n \end{aligned}$$

– se $0 < x < -\frac{n}{1+m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x - (mx+n) + |x + (mx+n)|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + |(1+m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n - (1+m)x - n}{2} = -mx - n \end{aligned}$$

– se $-\frac{n}{1+m} < x < -\frac{n}{m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x - (mx+n) + |x + (mx+n)|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + |(1+m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + (1+m)x + n}{2} = x \end{aligned}$$

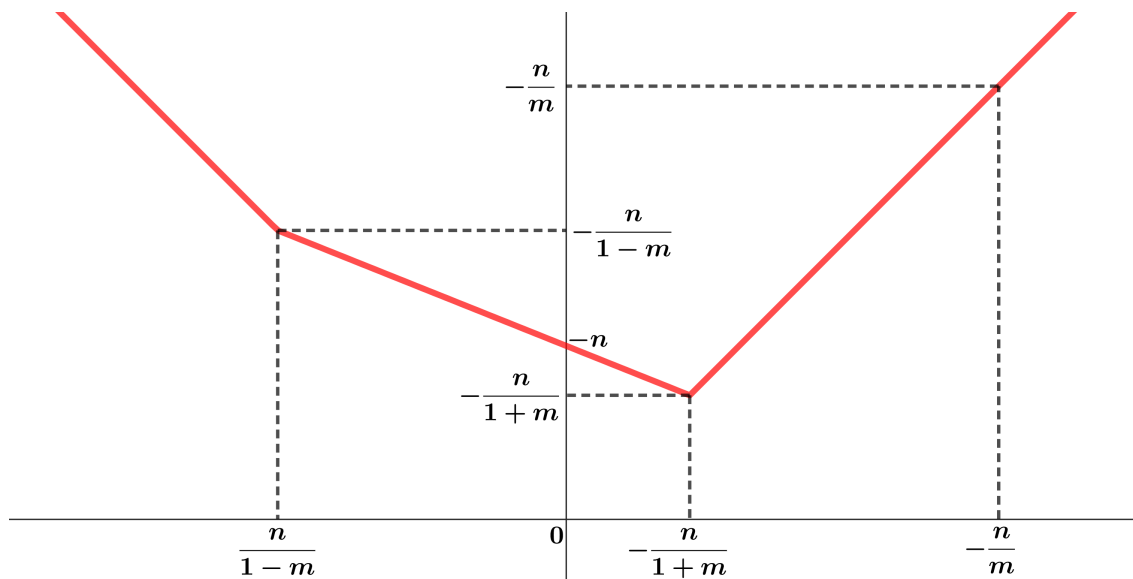
– se $-\frac{n}{m} < x$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x + (mx+n) + |x - (mx+n)|}{2} \\ &= \frac{(1+m)x + n + |(1-m)x - n|}{2} \\ &= \frac{(1+m)x + n + (1-m)x - n}{2} = x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -x & , x < \frac{n}{1-m} \\ -\frac{n}{1-m} & , x = \frac{n}{1-m} \\ -mx - n & , \frac{n}{1-m} < x < 0 \\ -n & , x = 0 \\ -mx - n & , 0 < x < -\frac{n}{1+m} \\ -\frac{n}{1+m} & , x = -\frac{n}{1+m} \\ x & , -\frac{n}{1+m} < x < -\frac{n}{m} \\ -\frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ x & , x > -\frac{n}{m} \end{cases}$$

Figura 22 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n < 0$ e $0 < m < 1$



Fonte: Elaboração do autor

Logo, pela Figura 22 o valor mínimo de h é $-\frac{n}{1+m}$.

- Se $n < 0$ e $m = 1$. Neste caso, $h(x) = \max\{|x|, |x + n|\}$. Observe que $h(0) = -n$, $h\left(-\frac{n}{2}\right) = -\frac{n}{2}$ e $h(-n) = -n$. Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{0, -\frac{n}{2}, -n\right\}$, temos

– se $x < 0$, então

$$h(x) = \max\{-x, -x - n\} = -x - n$$

– se $0 < x < -\frac{n}{2}$, então

$$h(x) = \max\{x, -x - n\} = -x - n$$

– se $-\frac{n}{2} < x < -n$, então

$$h(x) = \max\{x, -x - n\} = x$$

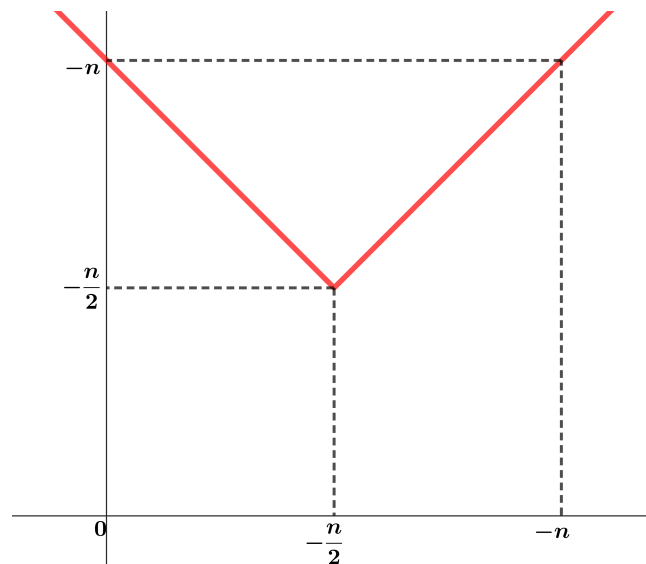
– se $-n < x$, então

$$h(x) = \max\{x, x + n\} = x.$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -x - n & , x < 0 \\ -n & , x = 0 \\ -x - n & , 0 < x < -\frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} & , x = -\frac{n}{2} \\ x & , -\frac{n}{2} < x < -n \\ -n & , x = -n \\ x & , x > -n. \end{cases}$$

Figura 23 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n < 0$ e $m = 1$



Fonte: Elaboração do autor

Assim, pela Figura 23 o valor mínimo de h é $-\frac{n}{2}$.

- Se $n < 0$ e $m > 1$, então $-\frac{n}{1+m} > 0$, $-\frac{n}{m} > 0$ e $\frac{n}{1-m} > 0$. Note também, como $0 < m < m+1$ e $n < 0$, então $-\frac{n}{1+m} < -\frac{n}{m}$ e, como $0 < m-1 < m$ e $n < 0$ então $-\frac{n}{m} < \frac{n}{1-m}$. Observe que $h(0) = -n$, $h\left(-\frac{n}{1+m}\right) = -\frac{n}{1+m}$, $h\left(-\frac{n}{m}\right) = -\frac{n}{m}$ e $h\left(\frac{n}{1-m}\right) = \frac{n}{1-m}$. Agora, para $x \in \mathbb{R} - \left\{0, -\frac{n}{1+m}, -\frac{n}{m}, \frac{n}{1-m}\right\}$, temos

– se $x < 0$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{-x - (mx + n) + |-x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n + |(m-1)x + n|}{2} \\ &= \frac{-(1+m)x - n - (m-1)x - n}{2} = -mx - n \end{aligned}$$

– se $0 < x < -\frac{n}{1+m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x - (mx + n) + |x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + |(m+1)x + n|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n - (m+1)x - n}{2} = -mx - n \end{aligned}$$

– se $-\frac{n}{1+m} < x < -\frac{n}{m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x - (mx + n) + |x + (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + |(1+m)x + n|}{2} \\ &= \frac{(1-m)x - n + (1+m)x + n}{2} = x \end{aligned}$$

– se $-\frac{n}{m} < x < \frac{n}{1-m}$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x + (mx + n) + |x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1+m)x + n + |(1-m)x - n|}{2} \\ &= \frac{(1+m)x + n + (1-m)x - n}{2} = x \end{aligned}$$

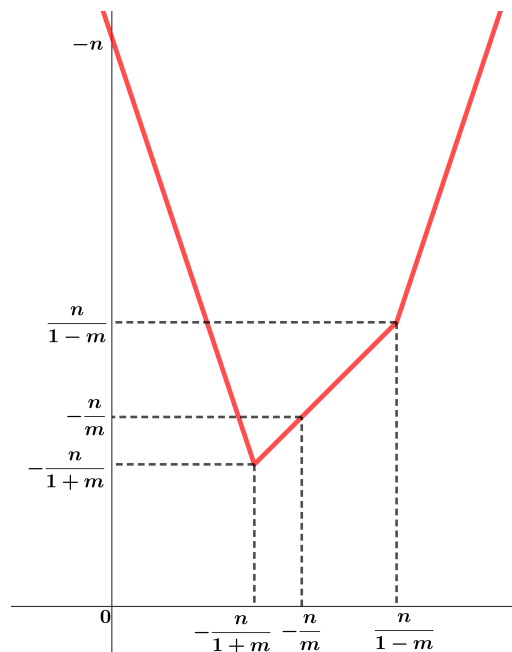
– se $\frac{n}{1-m} < x$, então

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x + (mx + n) + |x - (mx + n)|}{2} \\ &= \frac{(1+m)x + n + |(1-m)x - n|}{2} \\ &= \frac{(1+m)x + n - (1-m)x + n}{2} = mx + n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(x) = \begin{cases} -mx - n & , x < 0 \\ -n & , x = 0 \\ -mx - n & , 0 < x < -\frac{n}{1+m} \\ -\frac{n}{1+m} & , x = -\frac{n}{1+m} \\ x & , -\frac{n}{1+m} < x < -\frac{n}{m} \\ -\frac{n}{m} & , x = -\frac{n}{m} \\ x & , -\frac{n}{m} < x < \frac{n}{1-m} \\ \frac{n}{1-m} & , x = \frac{n}{1-m} \\ mx + n & , x > \frac{n}{1-m}. \end{cases}$$

Figura 24 – Gráfico de $h(x) = \max\{|x|, |mx + n|\}$, $n < 0$ e $m > 1$



Fonte: Elaboração do autor

Dai, pela Figura 24 o valor mínimo de h é $-\frac{n}{1+m}$.

Em resumo:

- Para $L : y = -\frac{c}{b}$, então

$$d_M(P, L) = \left| y_0 + \frac{c}{b} \right| = \frac{|by_0 + c|}{|b|}.$$

- Para $L : x = -\frac{c}{a}$, então

$$d_M(P, L) = \left| x_0 + \frac{c}{a} \right| = \frac{|ax_0 + c|}{|a|}.$$

- Para $L : y = mx + n$ com $m = \frac{a}{b}$ e $n = -\frac{a}{b}x_0 - y_0 - \frac{c}{b}$.

– Se $m < 0$, tem-se

$$d_M(P, L) = \frac{|n|}{1 - m} = \frac{|n|}{1 + |m|} = \frac{\left| -\frac{a}{b}x_0 - y_0 - \frac{c}{b} \right|}{1 + \left| \frac{a}{b} \right|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}.$$

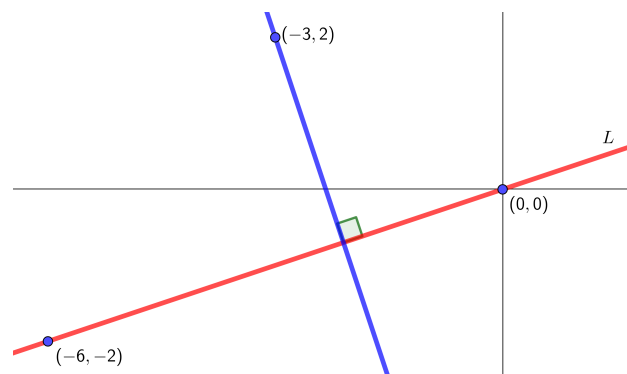
– Se $m > 0$, tem-se

$$d_M(P, L) = \frac{|n|}{1 + m} = \frac{|n|}{1 + |m|} = \frac{\left| -\frac{a}{b}x_0 - y_0 - \frac{c}{b} \right|}{1 + \left| \frac{a}{b} \right|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a| + |b|}.$$

4.4 Exemplos

Exemplo 4.1 (Exercício 4.2 em Krause (1987)). Considere $P = (-3, 2)$ e a reta L que passa pelos pontos $(-6, -2)$ e $(0, 0)$. Calcule as distâncias $d_E(P, L)$, $d_S(P, L)$ e $d_M(P, L)$.

Figura 25 – Distância ponto $(-3, 2)$ na reta que passa pelos pontos $(-6, -2)$ e $(0, 0)$



Fonte: Elaboração do autor

Usando Geometria Analítica sabemos que o coeficiente angular é determinado por

$$m_L = \frac{0 - (-2)}{0 - (-6)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

logo, L é dado por $y = \frac{1}{3}x + k$ onde k é uma constante a ser determinada. Mas como L passa pelo ponto $(0, 0)$ temos que $k = 0$. Daí, L é dado por $y = \frac{1}{3}x$, equivalentemente, $L : x - 3y = 0$ (ver Figura 25). Usando o Teorema 4.1, obtemos

$$d_E(P, L) = \frac{|(-3) - 3(2) + 0|}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{\sqrt{10}} \approx 2,85.$$

Por outro lado, pelo Teorema 4.2, tem-se

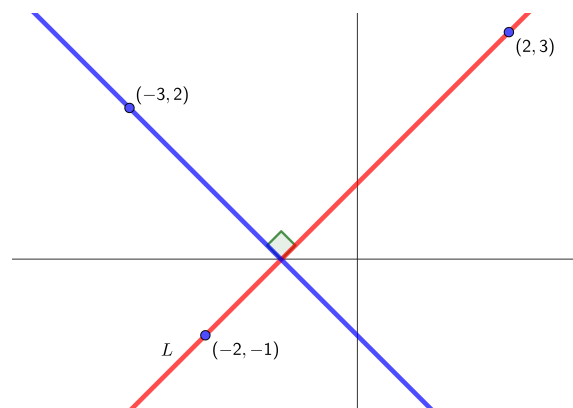
$$d_S(P, L) = \frac{|(-3) - 3(2) + 0|}{\max\{|1|, |-3|\}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Finalmente, pelo Teorema 4.3, temos

$$d_M(P, L) = \frac{|(-3) - 3(2) + 0|}{|1| + |-3|} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Exemplo 4.2 (Exercício 4.3 em Krause (1987)). Considere $P = (-3, 2)$ e a reta L que passa pelos pontos $(-2, -1)$ e $(2, 3)$. Calcule as distâncias $d_E(P, L)$, $d_S(P, L)$ e $d_M(P, L)$.

Figura 26 – Distância ponto $(-3, 2)$ na reta que passa pelos pontos $(-2, -1)$ e $(2, 3)$



Fonte: Elaboração do autor

Como no exemplo anterior, o coeficiente angular é determinado por

$$m_L = \frac{3 - (-1)}{2 - (-2)} = \frac{4}{4} = 1$$

daí, L é dado por $y = x + k$ onde k é uma constante. Mas, como L passa pelo ponto $(2, 3)$ temos que

$$3 = 2 + k \Rightarrow k = 1.$$

Assim, L é dado por $y = x + 1$, equivalentemente, $L : x - y + 1 = 0$ (ver Figura 26).

Usando o Teorema 4.1, obtemos

$$d_E(P, L) = \frac{|(-3) - (2) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \approx 2,83.$$

Por outro lado, pelo Teorema 4.2, tem-se

$$d_S(P, L) = \frac{|(-3) - (2) + 1|}{\max\{|1|, |-1|\}} = \frac{4}{1} = 4.$$

Finalmente, pelo Teorema 4.3, temos

$$d_M(P, L) = \frac{|(-3) - (2) + 1|}{|1| + |-1|} = \frac{4}{2} = 2.$$

Definição 4.2. Seja d uma métrica qualquer em \mathbb{R}^2 . Dados C um ponto em \mathbb{R}^2 e $r > 0$, definimos a *circunferência na métrica d de centro C e raio r* , como sendo o conjunto formado por todos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d((x, y), C) = r.$$

Exemplo 4.3 (Exercício 2 da Seção 9 em (LIMA, 2015)). Encontre a equação da circunferência, nas métricas Euclidiana, da soma e do máximo, que tem centro no ponto $P = (4, 1)$ e é tangente à reta $L : 3x + 7y - 2 = 0$.

Sabemos que o raio da circunferência na métrica Euclidiana é dado por $r_e = d_E(P, L)$, daí pelo Teorema 4.1, obtemos

$$r_e = \frac{|3(4) + 7(1) - 2|}{\sqrt{(3)^2 + (7)^2}} = \frac{17}{\sqrt{58}}.$$

Portanto, a equação da circunferência na métrica euclidiana é dado por $d_E((x, y), (4, 1)) = r_e = \frac{17}{\sqrt{58}}$, equivalentemente,

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = \frac{289}{58}.$$

No caso, da métrica da soma, pelo Teorema 4.2, tem-se

$$r_s = d_S(P, L) = \frac{|3(4) + 7(1) - 2|}{\max\{|3|, |7|\}} = \frac{17}{7}.$$

A equação circunferência na métrica da soma é dado por $d_S((x, y), (4, 1)) = r_s = \frac{17}{7}$, equivalentemente,

$$|x - 4| + |y - 1| = \frac{17}{7}.$$

Enquanto, no caso, da métrica do máximo, pelo Teorema 4.3, temos

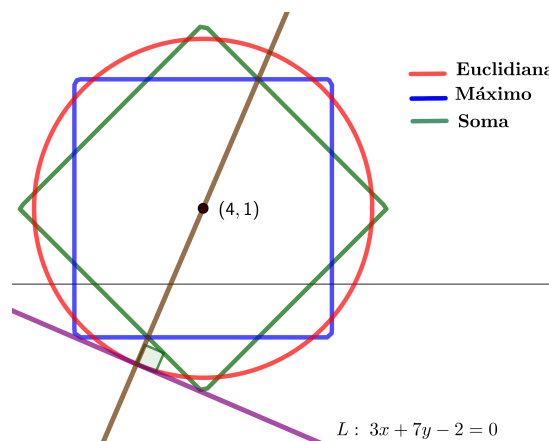
$$r_m = d_M(P, L) = \frac{|3(4) + 7(1) - 2|}{|3| + |7|} = \frac{17}{10}.$$

A equação circunferência na métrica da soma é dado por $d_M((x, y), (4, 1)) = r_m = \frac{17}{10}$, equivalentemente,

$$\max\{|x - 4|, |y - 1|\} = \frac{17}{10}.$$

A seguir, temos a Figura 27 que representa a circunferência nas três métricas, para a reta tangente L , centrada no ponto $(4, 1)$. Pode-se observar que na métrica da soma e do máximo o ponto que “tangência” a reta L encontram-se na diagonal dos quadrados determinados.

Figura 27 – Circunferências nas três métricas



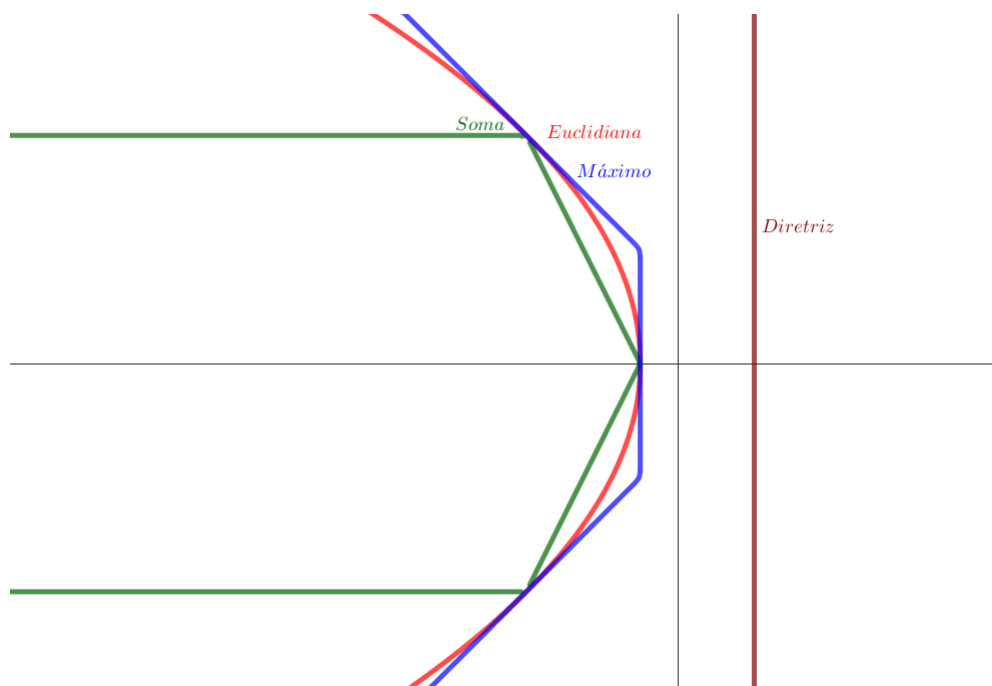
Fonte: Elaboração do autor

5 COMPARAÇÃO DO GRÁFICOS DAS CÔNICAS E OVAIS DE CASSINI EM \mathbb{R}^2

Neste capítulo, são exibidos os gráficos das cônicas e ovais de Cassini nas três métricas. Todos os gráficos foram gerados utilizando o *software* livre *Geogebra*. A seguir, a cor vermelha será utilizada no gráfico usando a métrica Euclidiana, a cor verde para a métrica da soma e a cor azul para a métrica do máximo. Após obtermos as fórmulas de distância de um ponto a uma reta utilizando as métricas da soma e do máximo, podemos estudar as parábolas sob essas métricas.

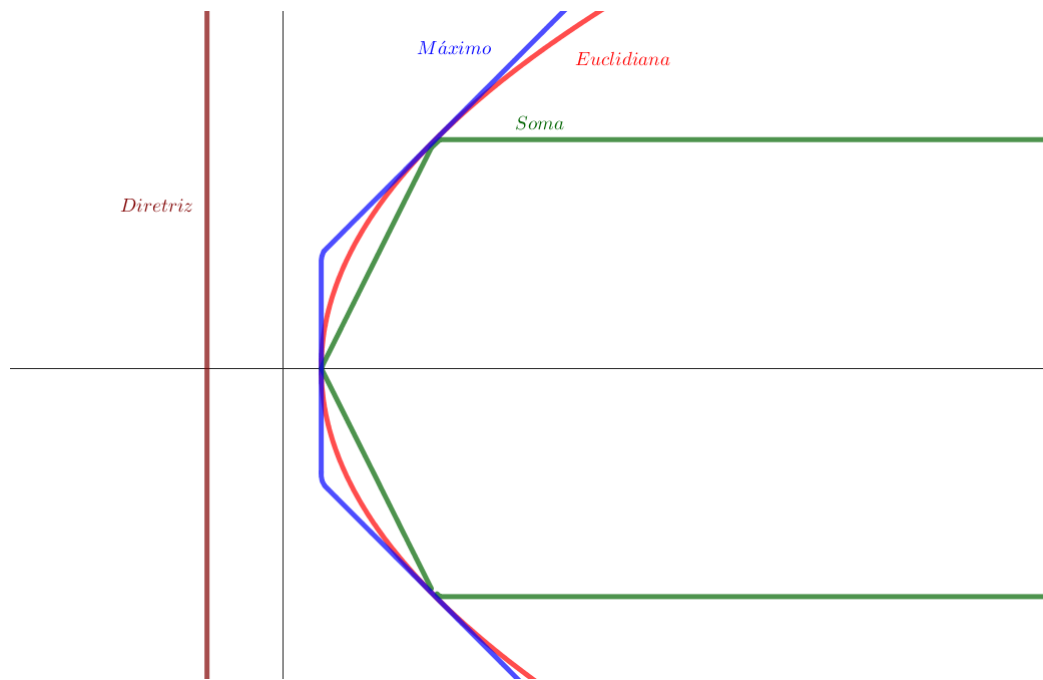
5.1 Parábolas

Figura 28 – Parábola com foco $(x_0, 0)$ e diretriz $x = c$, $x_0 < 0$ e $c > 0$



Fonte: Elaboração do autor

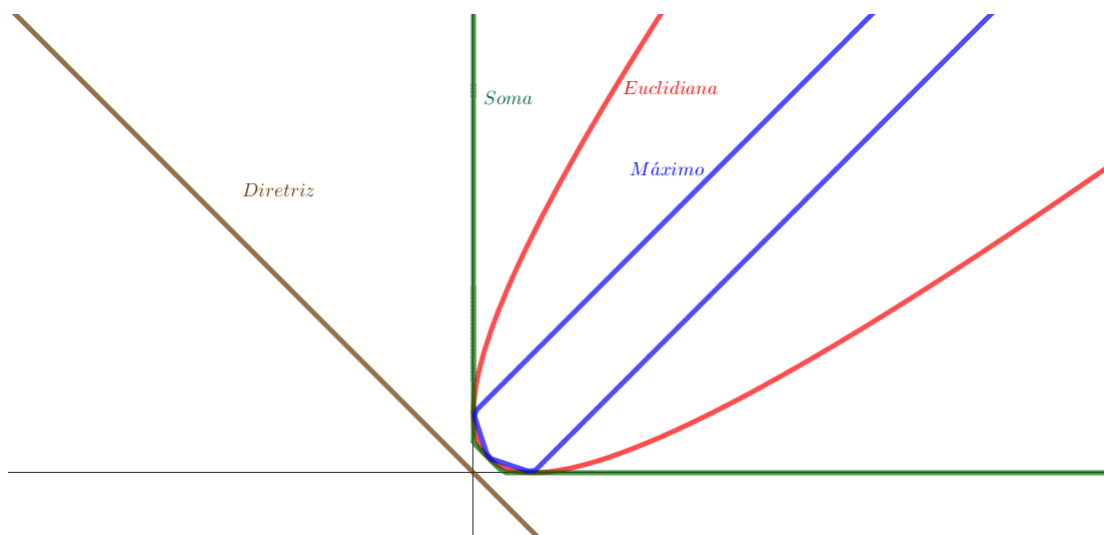
Figura 29 – Parábola com foco $(x_0, 0)$ e diretriz $x = c$, $x_0 > 0$ e $c < 0$



Fonte: Elaboração do autor

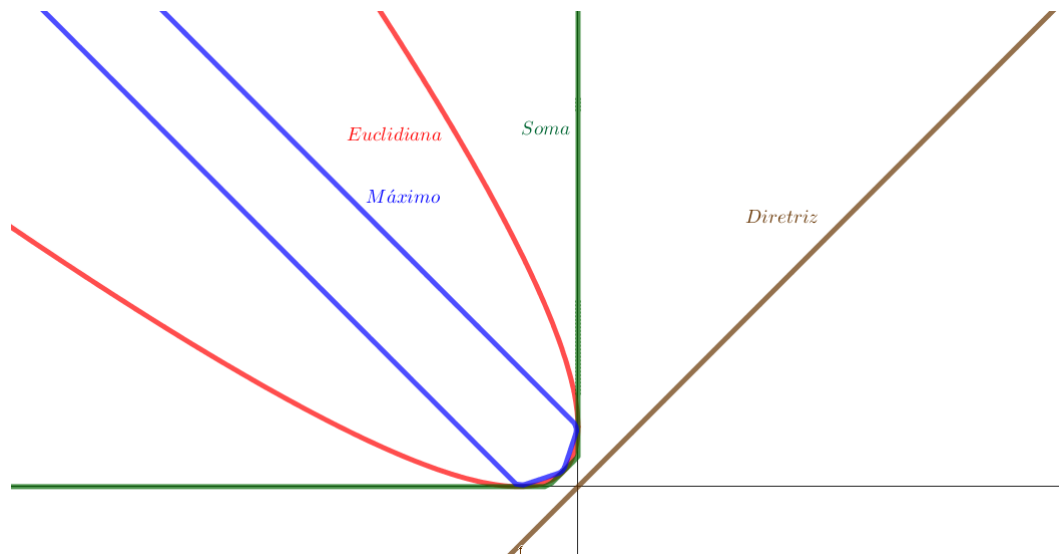
As Figuras 28 e 29 apresentam parábolas nas três métricas em suas formas canônicas, com a reta focal $y = 0$.

Figura 30 – Parábola com foco (x_0, y_0) e diretriz $y = cx$, $x_0, y_0 > 0$ e $c < 0$



Fonte: Elaboração do autor

Figura 31 – Parábola com foco (x_0, y_0) e diretriz $y = cx$, $x_0 < 0, y_0 > 0$ e $c > 0$

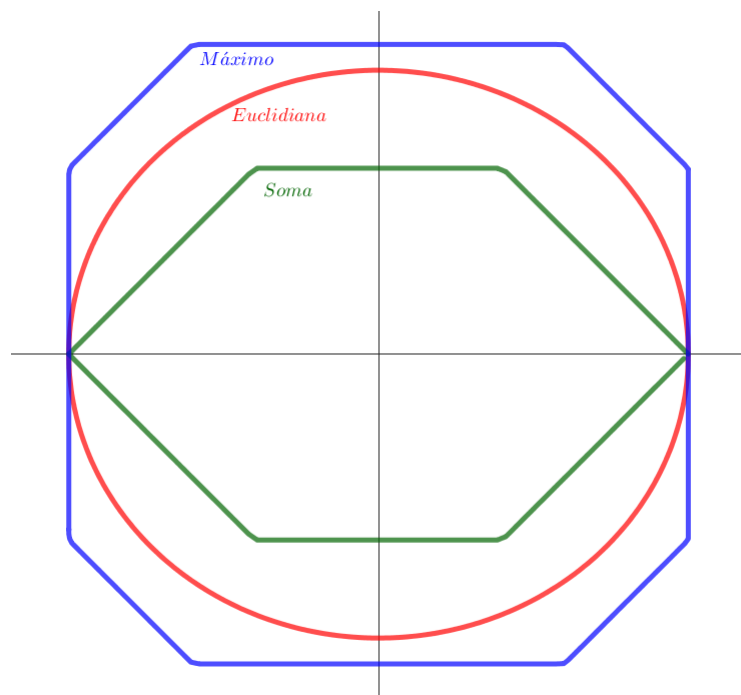


Fonte: Elaboração do autor

Para as Figuras 30 e 31, tem-se parábolas giradas com reta focal $y = x$ e $y = -x$, respectivamente.

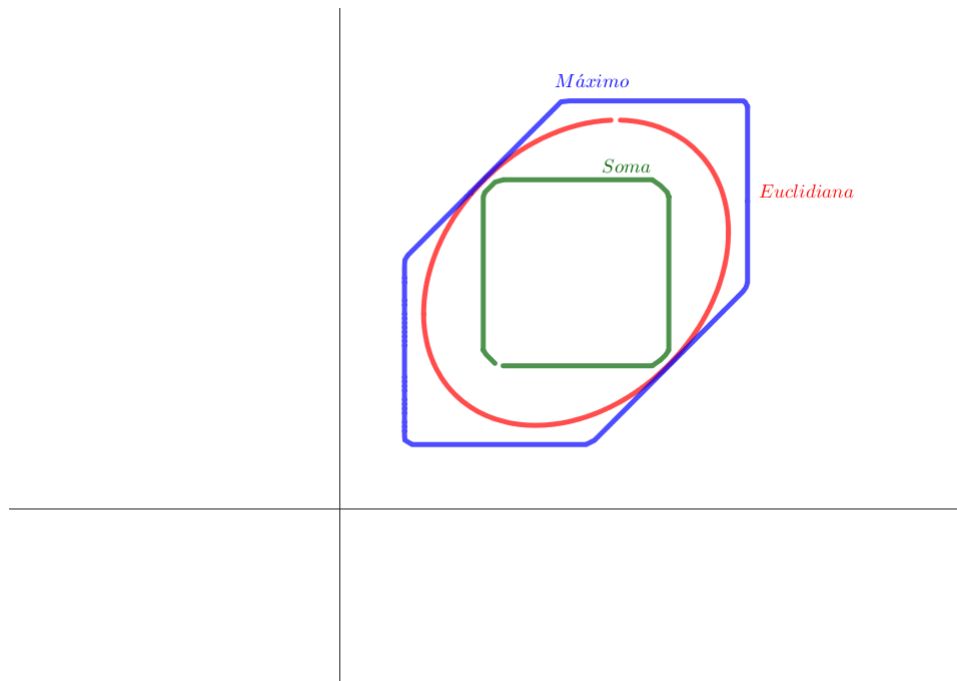
5.2 Elipses

Figura 32 – Elipse com focos no eixo X



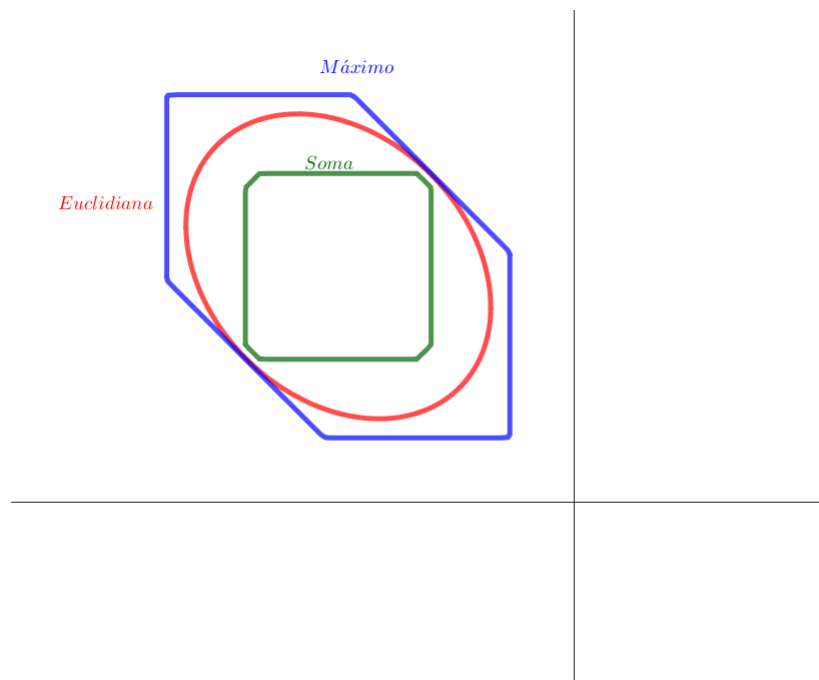
Fonte: Elaboração do autor

Figura 33 – Elipse com focos na reta $y = cx$ com $c > 0$



Fonte: Elaboração do autor

Figura 34 – Elipse com focos na reta $y = cx$ com $c < 0$



Fonte: Elaboração do autor

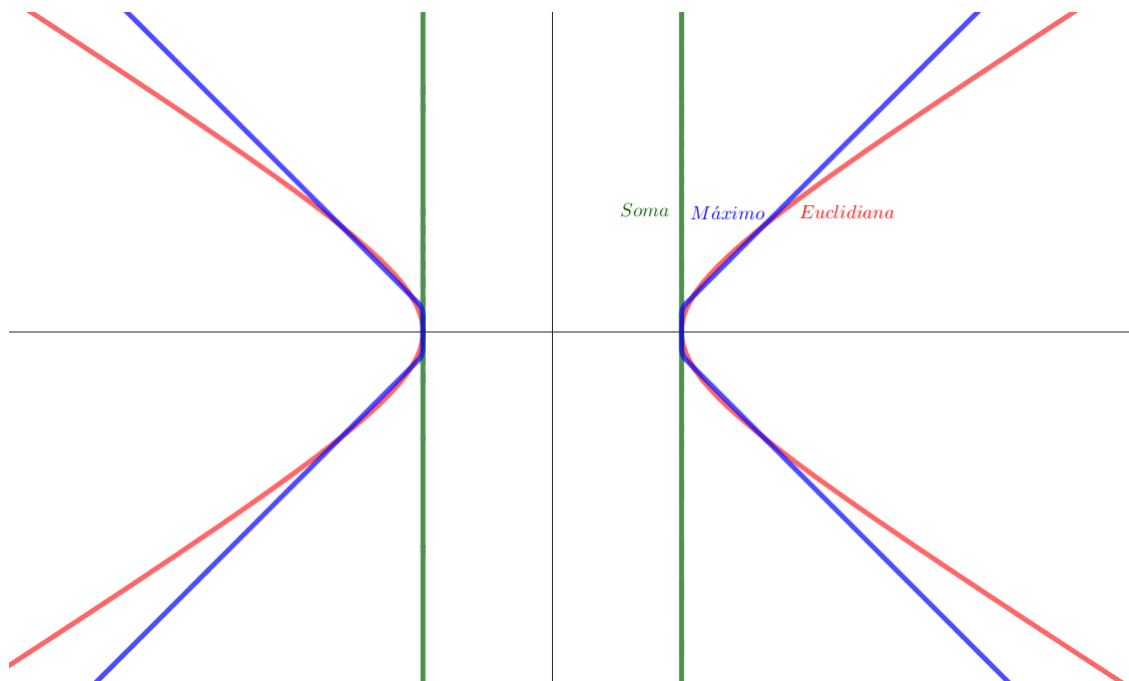
Na Figura 32, observam-se as elipses nas três métricas em sua forma canônica, com o eixo focal coincidindo com o eixo x e focos $F_1(-x_0, 0)$ e $F_2(x_0, 0)$, onde

$x_0 > 0$.

Nas Figuras 33 e 34, tem-se elipses giradas com eixo focal sobre as retas $y = x$ e $y = -x$, respectivamente.

5.3 Hipérboles

Figura 35 – Hipérbole com focos simétricos no eixo X

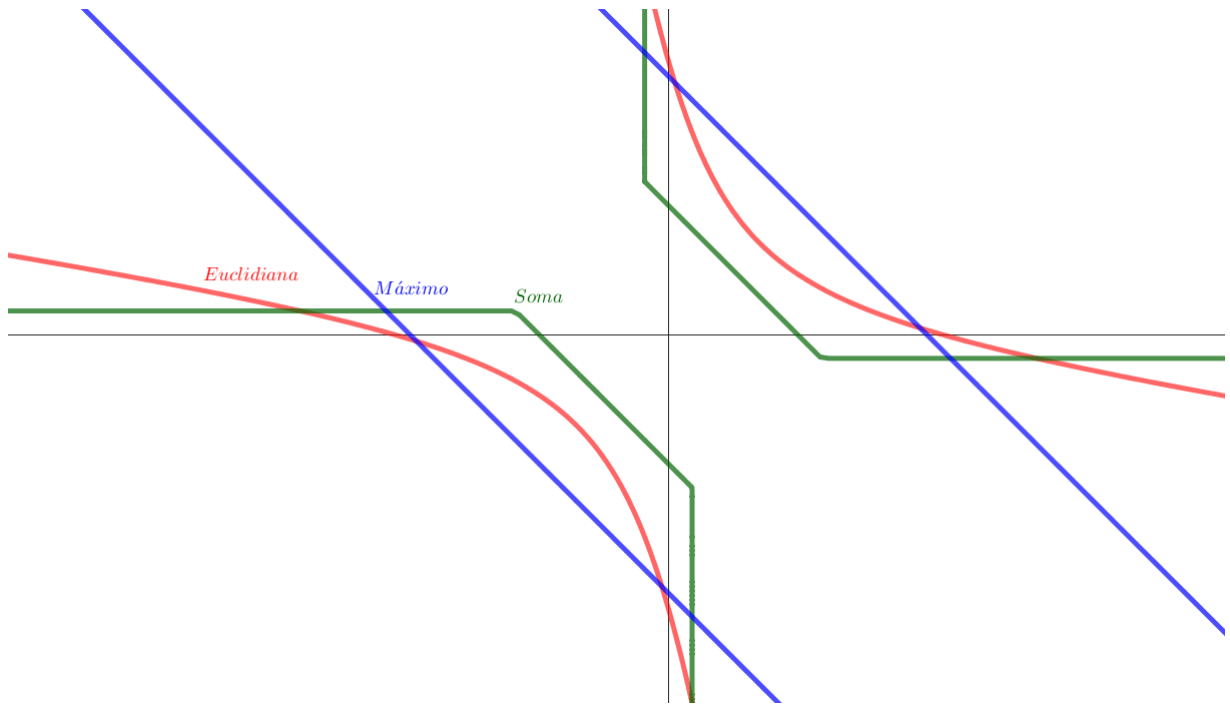


Fonte: Elaboração do autor

A Figura 35 apresenta as hipérboles nas três métricas em suas formas canônicas, com focos $F_1(-x_0, 0)$ e $F_2(x_0, 0)$ para $x_0 > 0$; pelo que o eixo focal coincide com o eixo x .

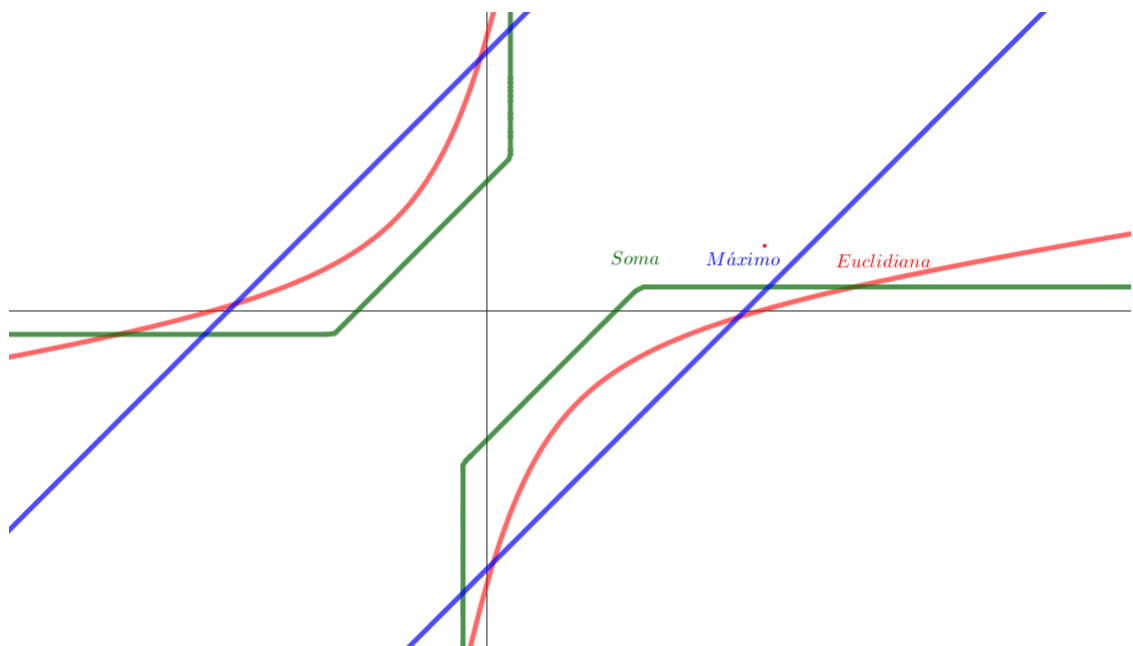
Nas Figuras 36 e 37, tem-se as hipérboles com o eixo focal sobre as retas $y = x$ e $y = -x$, respectivamente.

Figura 36 – Hipérbole com focos na reta $y = cx$ com $c > 0$



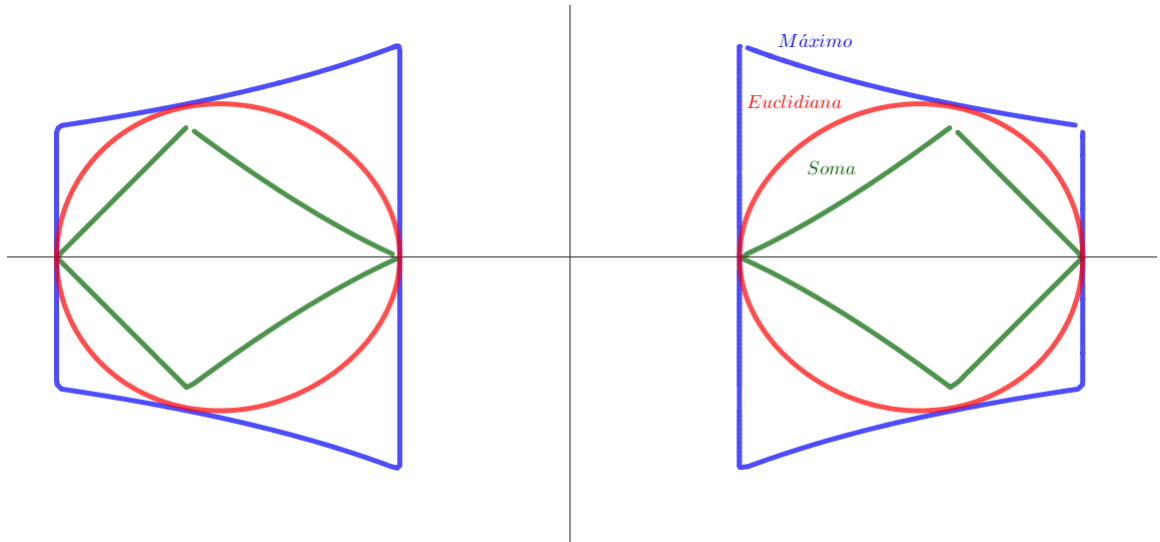
Fonte: Elaboração do autor

Figura 37 – Hipérbole com focos na reta $y = cx$ com $c < 0$

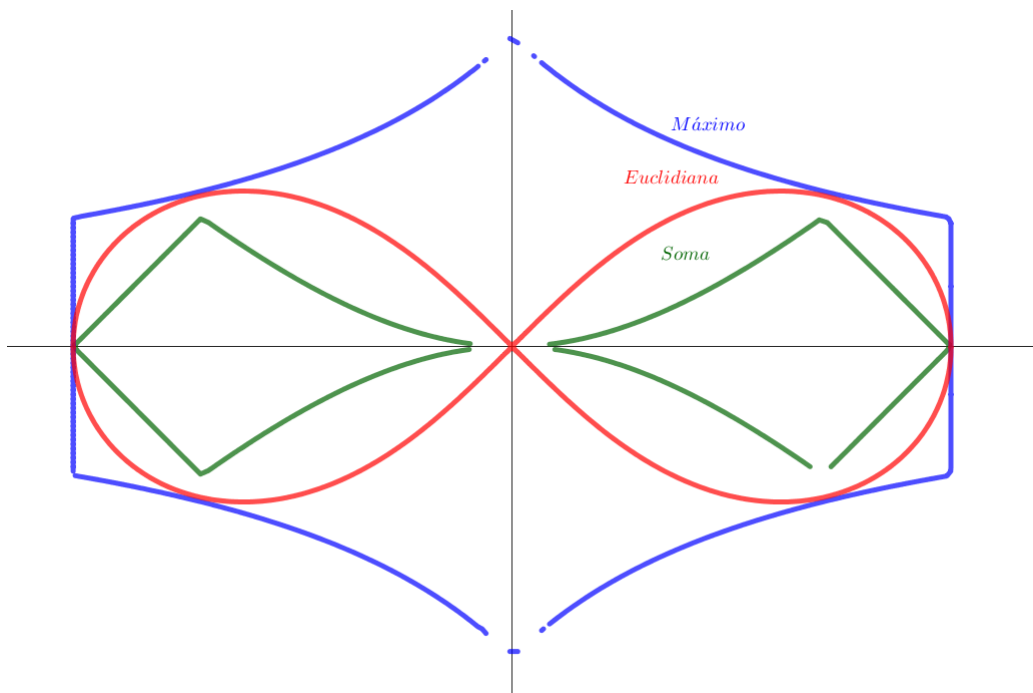


Fonte: Elaboração do autor

5.4 Ovais de Cassini

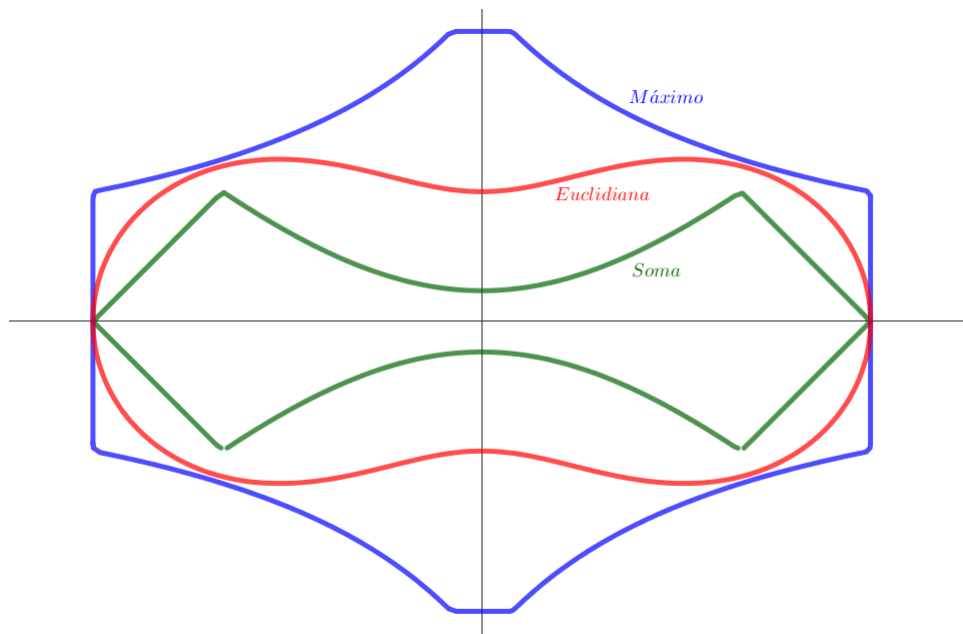
Figura 38 – Oval de Cassini com focos simétricos no eixo X 

Fonte: Elaboração do autor

Figura 39 – Oval de Cassini com focos simétricos no eixo X contendo a origem

Fonte: Elaboração do autor

Figura 40 – Oval de Cassini com focos simétricos no eixo X contendo pontos simétricos no eixo Y



Fonte: Elaboração do autor

Nas figuras 38, 39 e 40 apresentam-se as ovas de Cassini nas três métricas com focos em $F_1(-x_0, 0)$ e $F_2(x_0, 0)$ para $x_0 > 0$, onde a constante k satisfaz a relação $k < d_E(F_1, F_2)$, $k = d_E(F_1, F_2)$ e $k > d_E(F_1, F_2)$, respectivamente.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho investigou a geometria de curvas planas definidas por lugares geométricos utilizando as métricas do máximo e da soma. As métricas alternativas fornecem novas perspectivas para o estudo das propriedades geométricas dessas curvas, revelando comportamentos distintos em comparação com a métrica euclidiana tradicional.

As cônicas e os ovais de Cassini foram analisados sob as métricas do máximo e da soma em seus casos canônicos e gerais.

Fórmulas para calcular a distância entre um ponto e uma reta utilizando as métricas do máximo e da soma foram derivadas e apresentadas. Essas fórmulas preenchem uma lacuna na literatura e permitem calcular essa distância com precisão em diferentes cenários.

As métricas do máximo e da soma possuem potencial para diversas aplicações em áreas como ciência de dados, visualização de dados, tomografia geométrica e detecção de objetos.

O estudo abre caminho para novas pesquisas e aplicações interessantes na geometria de curvas planas utilizando métricas alternativas. As seguintes sugestões são apresentadas para pesquisas futuras:

- Explorar aplicações das métricas do máximo e da soma em outras áreas da matemática e da engenharia;
- Investigar propriedades geométricas de outras curvas utilizando as métricas do máximo e da soma;
- Desenvolver algoritmos computacionais eficientes para o cálculo de distâncias e outras medidas geométricas usando as métricas do máximo e da soma.

A exploração das propriedades geométricas e das aplicações práticas das métricas do máximo e da soma tem o potencial de gerar novos conhecimentos e inovações em diversos campos. Este trabalho contribui para o avanço da área da geometria diferencial e abre novas perspectivas para pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

- GRABUSTS, P.; UZHGA-REBROV, O. Applications of symmetry structures of cassini ovals. *Multidisciplinary Digital Publishing Institute, MDPI*, Basel, Suíza, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/sym16030334>>.
- HRYCYK, M. **Cônicas e métricas em \mathbb{R}^2** . Dissertação (Mestrado Profissional) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro, São Paulo, p. 97, 12 2019.
- KRAUSE, E. F. *Taxicab Geometry. An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. 1. ed. New York: Dover-Publications, 1987.
- LEHMANN, C. H. *Geometría analítica*. 1. ed. Distrito Federal-México: Limusa, 1986.
- LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 4. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2011.
- LIMA, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária-IMPA, 2015.
- MARTINS, F. A. **Explorando algumas curvas notáveis no ensino médio: história, propriedades e aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro, p. 120, 5 2019.
- VINCZE, C.; NAGY, A. On taxicab distance mean function and their geometric applications: Methods, implementations and examples. *Fundamenta Informaticae*, 2022.
- WANG, Y. C.; XING, Y.; ZHANG, J. Voronoi treemap in manhattan distance and chebyshev distance. *Sage Journals*, California, USA, 2023. Disponível em: <<https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/14738716231167181>>.