Universidade Federal da Integração Latino-Americana

INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)

MATEMÁTICA – LICENCIATURA

EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU: HISTÓRIA E MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

SILVANA GARCIA ESPINOZA

Foz do Iguaçu
2024

INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS
DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)

MATEMÁTICA – LICENCIATURA

EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU: HISTÓRIA E METÓDOS DE RESOLUÇÃO

SILVANA GARCIA ESPINOZA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Victor Arturo Martinez Leon
Co-orientadora: Profa. Dra. Marieli Vanessa Rediske de Almeida

Foz do Iguaçu
2024

SILVANA GARCIA ESPINOZA

EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU: HISTÓRIA E MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León
(UNILA)

Co-orientadora: Profa. Dra. Marieli Vanessa Rediske de Almeida
(UNESPAR)

Prof. Dr. Rodrigo Bloot
(UNILA)

Foz do Iguaçu, 26 de abril de 2024.

TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor(a): Silvana Garcia Espinoza

Curso: Matemática – Licenciatura

	Tipo de Documento
(…..) graduação	(…..) artigo
(…..) especialização	(X) trabalho de conclusão de curso
(…..) mestrado	(…..) monografia
(…..) doutorado	(…..) dissertação
	(…..) tese
	(…..) CD/DVD – obras audiovisuais
	(…..) ________________________________

Título do trabalho acadêmico: Equação de segundo grau: História e métodos de resolução

Nome do orientador: Victor Arturo Martinez Leon

Nome da co-orientadora: Marieli Vanessa Rediske de Almeida

Data da Defesa: 26/04/2024

Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor(a):

a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons* **Licença 3.0 Unported.**

Foz do Iguaçu, 03 de maio de 2024.

Silvana Garcia Espinoza

____

Silvana Garcia Espinoza

Dedico este trabalho a minha mãe, meu esposo, meu filho e a todos os meus professores.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a Deus por me permitir viver esse momento, pensava que o dia da minha formatura nunca chegaria, Deus me sustentou até aqui e sou muito grata por isso.

Grata a minha mãe Agueda Garcia, minha maior incentivadora quando o assunto é estudar, acolheu todos os meus sonhos, apoiando e vibrando por cada realização minha.

Sou muito grata ao meu querido esposo João Chiodi, por todo apoio e compreensão, por me incentivar a estudar e por ser um esposo e pai incrível.

Grata ao meu filho, Miguel, que com o seu sorriso me dá combustível e energia para viver novos sonhos que só a maternidade proporciona.

Um agradecimento especial ao meu orientador, Victor Leon e a Marieli Almeida, pela orientação, apoio e amizade.

Agradeço a todos os meus professores que tive a oportunidade de partilhar conhecimento.

Agradecer a Universidade Federal da Integração Latino-Americana por todos esses anos de experiências únicas.

E por último e não menos importante agradecer a mim, por continuar, por sonhar e tornar realidade os sonhos da Silvana de dez anos, que sonhava em ser professora cientista, estamos orgulhosas de você.

A educação é um ato de amor, por isso, um ato de coragem. Não pode temer o debate. A análise da realidade. Não pode fugir à discussão criadora, sob pena de ser uma farsa.

Paulo Freire

RESUMO

O ensino de equações de segundo grau, muitas vezes, limita-se à mera apresentação da fórmula e suas relações com as raízes. No Ensino Fundamental, raramente encontramos materiais que aprofundem o tema para alunos, principalmente na parte histórica, em muitas situações é apresentada mais como curiosidade do que como uma ferramenta de aprendizagem. Este trabalho ir além, explorando as diversas estratégias de resolução ao longo da história, desvendando as civilizações e os matemáticos que, através de diferentes métodos, contribuíram para a solução desse tipo de equação. Através de uma pesquisa bibliográfica, embarcamos em um estudo histórico do desenvolvimento da equação do segundo grau, desde as civilizações antigas até as contribuições de matemáticos egípcios, babilônios, gregos, árabes e europeus. Acreditamos que usar a história da matemática como ferramenta de ensino pode despertar o interesse e o entusiasmo dos alunos e desmistificar nomes atribuídos a equação quadrática, em específico atribuída a Bhaskara II. Finalmente, apresentamos alguns métodos conhecidos de resolução e acrescentamos o método Po-Shen Loh, bastante simples em sua utilização.

Palavras-chave: Equação de segundo grau; História da Matemática, método de resolução; método Po-Shen Loh.

RESUMEN

La enseñanza de las ecuaciones de segundo grado, muchas veces, se limita a la mera presentación de la fórmula y sus relaciones con las raíces. En la Educación Primaria, raramente encontramos materiales que profundicen en el tema para los alumnos, principalmente en la parte histórica, en muchas situaciones se presenta más como curiosidad que como una herramienta de aprendizaje. Este trabajo va más allá, explorando las diversas estrategias de resolución a lo largo de la historia, desentrañando las civilizaciones y los matemáticos que, a través de diferentes métodos, contribuyeron a la solución de este tipo de ecuación. A través de una investigación bibliográfica, nos embarcamos en un estudio histórico del desarrollo de la ecuación de segundo grado, desde las civilizaciones antiguas hasta las contribuciones de matemáticos egipcios, babilonios, griegos, árabes y europeos. Creemos que utilizar la historia de las matemáticas como herramienta de enseñanza puede despertar el interés y entusiasmo de los alumnos y desmitificar nombres atribuidos a la ecuación cuadrática, en específico atribuida a Bhaskara II. Finalmente, presentamos algunos métodos conocidos de resolución y añadimos el método Po-Shen Loh, bastante simple en su utilización.

Palabras clave: Ecuación de segundo grado; historia de las matemáticas; método de resolución; método Po-Shen Loh.

ABSTRACT

The teaching of second-degree equations often limits itself to the mere presentation of the formula and its relationships with the roots. In elementary education, it's rare to find materials that delve deeper into the subject for students, particularly in its historical aspect; in many situations, it's presented more as a curiosity than as a learning tool. This work goes beyond, exploring the various resolution strategies throughout history, unraveling the civilizations and mathematicians who, through different methods, contributed to solving this type of equation. Through bibliographic research, we embark on a historical study of the development of the second-degree equation, from ancient civilizations to the contributions of Egyptian, Babylonian, Greek, Arab, and European mathematicians. We believe that using the history of mathematics as a teaching tool can awaken students' interest and enthusiasm and demystify names attributed to the quadratic equation, specifically attributed to Bhaskara II. Finally, we present some well-known resolution methods and add the Po-Shen Loh method, which is quite simple in its application.

Key words: Second-degree equation; history of mathematics; resolution method; Po-Shen Loh method.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O problema de pesquisa consistiu em de responder a seguinte questão: Quais foram os principais métodos historicamente elaborados para a resolução de equações quadráticas?

Tivemos como objetivo geral compreender os principais métodos de resolução das equações quadráticas ao longo da história da Matemática, para mostrar outras formas que vão além daquela conhecida erroneamente no Brasil com o nome de “fórmula de Bhaskara’’, segundo Costa (2023) a fórmula de resolução da equação quadrática passou a ser associada ao matemático indiano em 1960 no Brasil, provavelmente pela utilização de um livro indiano no sistema de ensino.

Os objetivos específicos da pesquisa foram:

- Elaborar um mapeamento de quais foram os principais métodos e fórmulas de resolução de equações quadráticas ao longo da história da Matemática.
- Estudar e descrever as fórmulas e procedimentos desenvolvidos por diferentes povos para resolução da equação de 2º grau.
- Compreender possíveis contribuições dos diferentes métodos de resolução de equações quadráticas para o ensino deste conteúdo na educação básica.

O trabalho consiste em uma pesquisa qualitativa, que segundo Creswell (2010) é um tipo de pesquisa interpretativa, na qual o pesquisador interpreta os dados e chega a conclusões embasadas teoricamente, descrevendo pessoas ou cenários e criando perguntas, a partir de um olhar pessoal, que se dá em determinado momento sóciopolítico e histórico. Para este autor, o pesquisador qualitativo utiliza uma ampla visão, podendo contar com mais de um método para sua pesquisa.

Após esta introdução, no capítulo 2, apresentamos um apanhado histórico e citamos alguns métodos de resolução da equação quadrática, aprofundando na cultura dos povos antigos o surgimento da matemática e da evolução algébrica até os dias modernos.

No capítulo 3, explicamos alguns métodos de resolução da equação quadrática, de forma detalhada e de acordo com a notação atual e formas de uso em sala de aula, dando ênfase ao método Po-Shen Loh, um método pouco divulgado, embora bastante simples.

Finalmente, no capítulo 4, apresentamos as considerações finais do trabalho.

2 HISTÓRIA

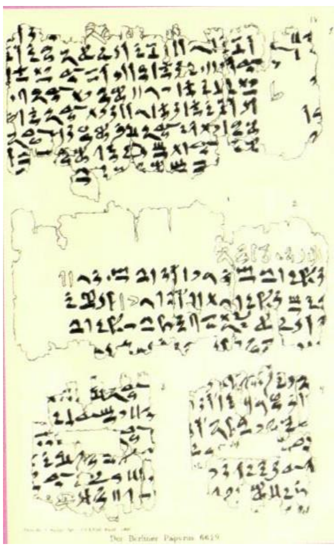
CONTEXTO HISTÓRICO SOBRE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Antes de relatar as técnicas de resolução de equações quadráticas, faremos um compilado histórico. A civilização humana, desde os primórdios, com seus desenhos nas paredes das cavernas, registra a história. Essas formas de registro foram evoluindo, e neste capítulo abordaremos um pouco da história das equações quadráticas a partir de seus registros.

EGITO

Acredita-se que os primeiros problemas relacionados a equações quadráticas tenham surgido no Egito, a partir da necessidade da divisão de terras e outros bens, isso porque um dos primeiros relatos de equações do segundo grau foi encontrado no Papiro de Berlim (Figura 1) (c.2000 a.C). O problema nele dizia: a área de um dos quadrados de 100 côvados é igual à de dois quadrados menores. O lado de um dos quadrados menores é igual à metade mais um quarto do lado do outro, que atualmente pode ser descrito como o seguinte sistema: $x^2 + y^2 = 100$; $x = (1/2 + 1/4)y = 3/4y$ (WARSI *et al.*, 2020). Não existia ainda um formalismo algébrico da forma como conhecemos hoje e a escrita de problemas era feita em forma de textos, quase na forma de poemas.

Figura 1 - Papiro de Berlim



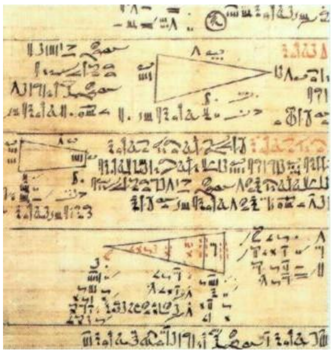
Fonte: (WARSI *et al.*, 2020, p.29).

No artigo de Miatello (2012), o autor apresenta os demais problemas matemáticos do papiro de Berlim, na íntegra e traduzido.

Além do Papiro de Berlim, existe outra fonte de informações sobre a álgebra egípcia e que resistiu ao tempo: trata-se do Papiro de Rhind ou também chamado de Papiro de Ahmes, que data de 2000 a.C. a 1800 a.C. Há também o Papiro de Moscou (c.1800 a.C), ambos contém problemas voltados a aritmética, geometria e álgebra, e uma curiosidade sobre esses papiros é que se tratavam de um tipo de manual para a sociedade da época, que servia tanta para o comércio, construção e até mesmo para contabilidade (WARSI *et al.*, 2020).

Para Eves (2004), o papiro de Rhind (Figura 2) é uma das primeiras fontes que relata a matemática egípcia antiga, na qual estão métodos de multiplicação e divisão do povo egípcio, frações unitárias, regra da falsa posição, problemas envolvendo área de círculo e outras aplicações da matemática.

Figura 2 - Papiro de Rhind



Fonte: (WARSI *et al.,* 2020, p.33).

Boa parte dos problemas dos papiros de Rhind e Moscou são simples, podiam ser resolvidos como uma equação linear simples e para resolver os egípcios utilizavam o método da posição falsa (EVES, 2004).

> Um papiro que data por volta de 1950 a.C., encontrado em Kahun, contém o seguinte problema: “Uma dada superfície de 100 unidades de área devem ser representada como soma de dois quadrados cujos lados estão entre si com 1: ¾”. Nesse caso temos $x^2 + y^2 = 100$ e $x = \frac{3y}{4}$. A eliminação de x fornece uma equação quadrática y. Podemos, porém, resolver o problema por falsa posição. Para isso tomemos $y = 4$. Então $x = 3$ e $x^2 + y^2 = 25$ em vez de 100. Por conseguinte, devemos fazer a correção de x e y dobrando os valores iniciais, o que dá $x = 6\ e\ y = 8$ (EVES, 2004, p. 74).

Com a invenção dos papiros, os escribas podiam registrar e quantificar bens, permitindo o desenvolvimento da matemática egípcia, aperfeiçoavam os seus métodos matemáticos e treinavam novos escribas através de problemas e soluções. Os papiros fazem parte de uma tradição pedagógica, na qual eles previam situações futuras que os novos escribas encontrariam (ROQUE, 2012).

> Os tabletes e papiros indicam que o modo como os cálculos eram realizados em cada cultura dependia intimamente da natureza dos sistemas de numeração utilizados. Por isso, cálculos considerados difíceis em um sistema podem ser considerados mais fáceis em outro. Isso mostra que as noções de "fácil" e de "difícil" não são absolutas e dependem das técnicas empregadas. Logo, a referência às necessidades práticas de cada um desses povos não basta para explicar a criação de diferentes sistemas de numeração, com regras próprias. É preciso relativizar, portanto, a interpretação frequente de que a matemática nessa época se constituía somente de procedimentos de cálculos voltados para a resolução de problemas cotidianos. (ROQUE, 2010, p.38-39).

Os egípcios empregavam o chamado "método da posição falsa" para resolver equações quadráticas. Nesse método, o solucionador escolhe arbitrariamente um valor para a incógnita, denominada "aha" pelos egípcios, e substitui esse valor na equação quadrática. Se o resultado obtido coincidia com o esperado, consideravam o problema como solucionado. Caso contrário, era necessário escolher um novo valor e repetir o processo. Em essência, o método da posição falsa era baseado em tentativa e erro, exigindo iterações até alcançar uma solução satisfatória. Apesar de sua abordagem intuitiva, esse método evidencia a habilidade matemática dos antigos egípcios na resolução de problemas algébricos (BOYER, 1996).

Um exemplo desse processo pode ser visto no papiro de ''Ahmes'' (Rhind), que no problema 24 descreve

> [...] No problema 24, por exemplo, pede o valor de aha sabendo que aha mais um sétimo de aha dá 19. No problema 24 o valor tentado para a incógnita é 7, de modo que $x + 1/2x$ é 8, em vez de 19, como se queria. Como $8(2 + 1/4 + 1/8) = 19$ deve-se multiplicar 7 por $2 + 1/4 + 1/8$ para obter a resposta: Ahmes achou $16 + 1/2 + 1/8$. Então conferiu sua resposta mostrando que se $16 + 1/2 + 1/8$ somarmos um sétimo disto (que é $2 + 1/4 + 1/8$), de fato obteremos 19 (BOYER, 1996, p. 11).

De acordo com Boyer (1996), muito da "matemática egípcia" foi perdido por conta da sua escrita, que era feita em papiros: boa parte do material dos papiros não resistiu ao tempo, e por isso não se tem mais informações da "matemática babilônica", pois as tábuas utilizadas pelos mesopotâmicos resistiram ao tempo.

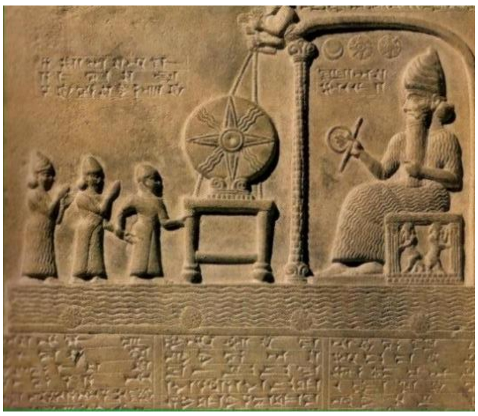
MESOPOTÂMICOS

Segundo Boyer (1996), durante o quarto milênio antes da nossa Era, período marcado por considerável progresso cultural, testemunhamos o surgimento de conquistas significativas, como a introdução da escrita, a invenção da roda e o domínio do trabalho com metais. Na mesma época, durante a primeira dinastia no Egito, que se iniciou ao final desse milênio, o Vale do Rio Nilo testemunhou o florescimento de uma civilização. Além disso, no Vale Mesopotâmico, os sumérios estabeleceram uma sociedade de elevado nível cultural, evidenciado na construção de casas e templos ornamentados com cerâmicas e mosaicos artísticos, admiráveis por seus desenhos geométricos. De acordo com Roque (2012):

> A palavra “Mesopotâmia”, que em grego quer dizer “entre rios”, designa mais uma extensão geográfica do que um povo ou uma unidade política. Entre os rios Tigre e Eufrates, destacavam-se várias cidades que se constituíam em pequenos centros de poder, mas também passavam por ali povos nômades, que, devido à proximidade dos rios, acabavam por se estabelecer. Dentre os que habitaram a Mesopotâmia estão os sumérios e os acadianos, hegemônicos até o segundo milênio antes da Era Comum. (ROQUE, 2012, p. 36).

A escrita do povo babilônico (Figura 3), chamada de cuneiforme, foi um sistema de escrita utilizado pelos sumérios, acádios e babilônios, ao longo de vários séculos. Esse sistema de escrita era caracterizado por inscrições em tabuletas de argila, utilizando instrumentos em formato de cunha, como pontas de cana ou estiletes, para criar marcas na argila úmida e depois colocadas para cozinhar em fornos (BOYER, 1996).

Figura 3 - O deus-sol babilônio Shamash



Fonte: (WARSI *et a.l*, 2020, p. 25).

Os mesopotâmicos eram excelentes matemáticos e tinham avançado um pouco em relação aos egípcios. Por exemplo, eles já sabiam extrair a raiz quadrada e estavam habituados a resolver equações lineares, por isso resolver equações quadráticas com três termos não era um problema (BOYER,1996).

> [...] Contrariamente à opinião popular, a matemática no Egito nunca alcançou o nível obtido pela matemática babilônica. Esse fato pode ser consequência do desenvolvimento econômico mais avançado da Babilônia. Não obstante, até que se decifrasse tantas tábuas matemáticas babilônicas, o Egito foi por muito o mais rico campo de pesquisas históricas sobre Antiguidade. (EVES, 2004, p. 67).

Um exemplo de problema proposto pelos babilônicos se encontra a seguir:

> Por exemplo, um problema pede o lado de um quadrado se a área menos o lado resulta em $14{,}30$. A solução desse problema é equivalente a resolver $x^2 - x = 870$ e pode ser expressa assim:
> Tome a metade de 1, que é $0;30$, e multiplique por $0;30$, o que dá $0;15$, some isto a $14{,}30$ o que dá $14;30;15$. Isto é o quadrado de $29;30$. Agora some $0;30$ a $29;30$ e o resultado é 30 ao lado do quadrado.
>
> Até os tempos modernos não havia ideia de resolver uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q = 0$, onde p e q são positivos, pois a equação não tem raiz positiva. Por isso as equações quadráticas na antiguidade e na Idade Média, mesmo no começo do período moderno, foram classificadas em três tipos:
> 1) $x^2 + px = q$,
> 2) $x^2 = px + q$,
> 3) $x^2 + q = px$.
>
> Todos esses tipos são encontrados em textos do período babilônio antigo de uns 4.000 anos atrás. (BOYER, 1996, p. 21-22).

Para solucionar o problema acima, Roque (2012) explica que os antigos babilônicos usavam a notação posicional de base 60 (Figura 4), ou seja, um sistema sexagesimal, sendo o número 60 representado pelo mesmo sinal usado para simbolizar o número 1, combinavam base 60 e base 10, pois os sinais até 59 mudam de 10 em 10. Por exemplo, para representar o valor decimal de 1h4min23, calcula-se o resultado (1 × 3.600 + 4 × 60 + 23 = 3,863s), o símbolo “;” serve como separador de algarismos dentro da parte inteira ou dentro da parte fracionária de um número e para separar a parte inteira da fracionária, utilizavam a vírgula (“,”).

Figura 4 - Tabela de conversão

TABELA 1

Cuneiforme	Leitura dos símbolos em nosso sistema	Valor decimal
	1;15 = 1 × 60 + 15	75
	1;40 = 1 × 60 + 40	100
	16;43 = 16 × 60 + 43	1.003
	44;26;40 = 44 × 3.600 + 26 × 60 + 40	160.000
	1;24;51;10 = 1 × 216.000 + 24 × 3.600 + 51 × 60 + 10	305.470

Fonte: Roque (2012).

GRÉCIA

A atividade intelectual nas civilizações egípcia e mesopotâmica já havia perdido sua vitalidade muito antes da era cristã. No entanto, à medida que a cultura nos vales dos rios declinava, e o bronze dava lugar ao ferro para a fabricação de armas, novas e vigorosas culturas emergiram ao longo do litoral do Mediterrâneo (BOYER, 1996).

> Para indicar essa mudança nos centros de civilização, o intervalo entre aproximadamente 800 a.C. e 800 d.C. é às vezes chamado Idade Talássica, (isto é, a "idade do mar"). (BOYER, 1996, p. 30).

De acordo com esse autor, não houve uma transição abrupta demarcando a transferência de uma liderança intelectual dos vales dos rios Nilo, Tigre e Eufrates para as margens do Mediterrâneo, pois o tempo e a história fluem continuamente, com condições variáveis associadas a causas anteriores. Apesar de seu declínio, os estudiosos egípcios e babilônios perseveraram na produção de textos em papiros e cuneiformes, por muitos séculos após 800 a.C. Contudo, durante esse período, uma nova civilização se desenvolvia rapidamente, preparando-se para assumir a hegemonia cultural, não apenas na região mediterrânea, mas, eventualmente, nos principais vales fluviais. Para indicar a fonte dessa nova inspiração, a primeira parte da Idade Talássica é denominada de Era Helênica, e consequentemente, as culturas mais antigas são conhecidas como pré-helênicas (BOYER, 1996).

Os grandes nomes da matemática grega são Tales de Mileto (624-548 a.C) e Pitágoras de Samos (580-600 a.C), os quais em contato com outras civilizações, conheceram tabelas e instrumentos astronômicos e deste modo adquiriram novos conhecimentos. Os gregos não só aprendiam com outros povos, como também possuíam o hábito de aprimorar aquilo que viam (BOYER, 1996).

Tales de Mileto

É provável que Tales de Mileto tenha iniciado sua jornada como mercador, acumulando riquezas suficientes para dedicar a última parte de sua vida ao estudo e a diversas viagens. Há relatos de que tenha passado algum tempo no Egito, onde despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide utilizando apenas a sombra dela. Ao retornar a Mileto, ele conquistou uma reputação notável, sendo reconhecido como estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo, graças ao seu genial e versátil talento. Tales é considerado o primeiro indivíduo historicamente associado a descobertas matemáticas significativas (EVES, 2004).

Tales é conhecido pelo teorema de Tales, que diz que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto, é provável que tenha aprendido o teorema com os Babilônios. Existem várias lendas sobre Tales a mais conhecida talvez seja a qual conta que ele mediu a altura das pirâmides do Egito observando os comprimentos das sombras no exato momento em que um bastão na posição vertical é igual à altura da pirâmide (BOYER, 1996).

> Sabemos agora que uma grande massa de material matemático era familiar aos babilônicos um milênio antes do tempo de Tales, no entanto entre os gregos era aceito que Tales tinha feito progressos definidos. Parece razoável supor, à luz das afirmações de Proclo, que Tales deu uma contribuição à organização racional do assunto. (BOYER,1996, p.32).

Pitágoras

Pitágoras, nascido por volta de 572 a.C. em Samos, possivelmente foi discípulo de Tales, dada a diferença de idade e a proximidade geográfica entre ambos. Após uma estadia no Egito e outras viagens, ele retornou brevemente a Samos antes de emigrar para Crotona, no sul da Itália, onde fundou a famosa escola pitagórica. Essa escola, renomada por seus estudos em filosofia, matemática e ciências naturais, também era uma irmandade com rituais secretos. Devido à tradição oral e à atribuição de todas as descobertas a Pitágoras, é desafiador determinar quais contribuições matemáticas são de fato suas e quais são de outros membros da escola. (EVES, 2004; ROQUE, 2012).

As contribuições dos pitagóricos vão desde saber que a soma dos três ângulos é 180° é igual dois ângulos retos, conheciam alguns poliedros regulares e o mestre Pitágoras é popularmente conhecido pela fórmula $a^2 + b^2 = c^2$ que mostra a relação entre os lados de um triângulo retângulo (WARSI *et al*., 2020).

> A tradição é unânime em atribuir a Pitágoras a descoberta independente do teorema sobre triângulos retângulos hoje universalmente conhecido pelo seu nome-que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. Já vimos que esse teorema era conhecido pelos babilônios dos tempos de Hamurabi, mais de um milênio antes, mas sua primeira demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras (EVES,2004, p. 103).

O teorema de Pitágoras (Figura 5) afirma que $a^2 + b^2 = c^2$, onde c é a hipotenusa, e a e b cateto adjacente e oposto. Para ilustrar, tem-se um triângulo retângulo de lados $3\,cm$ e $5\,cm$, e a hipotenusa será $3^2 + 4^2 = 5^2 = (9 + 16 = 25)$ (WARSI *et al*., 2020).

Figura 5 - Teorema de Pitágoras

Fonte: (WARSI *et al*,2020,.38).

Euclides

Outro grande nome da matemática grega é Euclides. Embora não se tenha dados sobre seu nascimento, acredita-se que viveu em Alexandria, no Egito, por volta de 300 a.C. É conhecido por sua obra “Os elementos’’, uma coleção de treze livros, com temas que tratam sobre geometria plana, razão, proporção entre outros. Euclides inspirou-se em matemáticos gregos influentes que vieram antes, como Tales de Mileto e Platão. Ele formalizou o mundo da demonstração, unindo todo o conhecimento matemático da época e organizando cuidadosamente as relações lógicas entre as várias proposições (WARSI *et al*., 2020).

Para Eves (2004), os Elementos de Euclides não tratam apenas de geometria, apresentam teoria dos números e álgebra geométrica. Acredita-se que os gregos faziam uso de dois métodos para resolver equações, um recebe o nome de método das proporções e o outro método da aplicação de áreas, e é provável que tais método tenham surgido com os pitagóricos.

Para o método de proporções eles usavam a geometria, especificamente semelhança de triângulos, tendo um segmento de reta x, dado por a/b e c/x ou $a/x = x/b$, onde a, b e c, são segmentos de reta dados e que permite ter soluções geométricas de equações (EVES, 2004).

> **Proposição 28- Livro VI:** Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento de reta dada. Em linguagem atual, $x^2 - px + q^2 = 0$, em que p e q são segmentos dados.

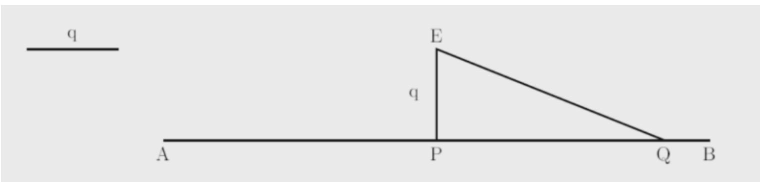
Para solucionar a proposição acima, Pedroso (2010) propõe:

Seja AB e PE dois segmentos de reta, em que $\overline{AB} = p$, $\overline{PE} = q$ e $q < \frac{p}{2}$. Dividindo AB com o ponto Q tal que $\overline{AQ} + \overline{QB} = p$ e $\overline{AQ} \cdot \overline{QB} = q^2$ tem-se a solução procurada. Para isso basta traçar uma circunferência de centro em E e raio $\frac{p}{2}$, que cortará segmento AB no ponto Q. Logo

$$q^2 = \overline{EQ}^2 - \overline{PQ}^2 = (\overline{EQ} - \overline{PQ}) \cdot (\overline{EQ} + \overline{PQ}) = \overline{QB} \cdot \overline{AQ}$$

Finalmente denotado por $r = \overline{AQ}$ e $s = \overline{QB}$ as raízes da equação dada, conclui-se que $p = r + s$ e $q^2 = r \cdot s$

Figura 6 - Representação gráfica da proposição:



Fonte: (PEDROSO, 2010, p.3)

Roque (2012) relata que os problemas e teoremas de Euclides são geométricos, mas o que ninguém pode garantir é que sejam também problemas algébricos representados através da geometria, ela cita que embora estudiosos como H. Zeuthen e B. L. van der Waerden acreditem que o livro II dos *Elementos* mostram uma álgebra geométrica, de forma contrária, em 1975 o romeno Sabetai Unguru, em seu artigo, afirma que tentar ler Euclides com a matemática moderna é um pouco injusto, com o que de fato os gregos pensavam. Assim, para Roque (2012), é precipitado concluir que a geometria Euclidiana também pode ser vista como uma geometria algébrica, mesmo podendo, sim, hoje em dia ter uma representação algébrica.

ÍNDIA

A maior parte da matemática indiana, escrita em sânscrito, tem origem na região do sul da Ásia (região atual do Paquistão, Nepal, Bangladesh e Sri Lanka). Os registros mais antigos remontam à primeira metade do primeiro milênio a.C., mas se tornaram mais comuns após a conquista de Alexandre, o Grande, no século IV a.C. Embora não se conheça completamente as interações entre a matemática indiana e as tradições antigas, alguns problemas parecem ter sido influenciados pelo contato com a astronomia babilônica e grega (ROQUE, 2012).

Uma contribuição importante vem do matemático indiano Brahmagupta, (c.598-668 d.C), é a utilização do zero, que se deu por volta de VII d.C.; ele também ensinou como calcular com o número zero, por exemplo $3 - 3 = 0$, quando somado zero a um número negativo, o resultado será um número negativo, multiplicar qualquer número por zero o resultado será zero, e tentou demonstrar que $n/0$ seria 0, porém, se isso não acontece, essa operação é ‘’indefinida’’. Outro destaque de suas contribuições são suas regras para o cálculo com números positivos e negativos que chamou de ‘’fortunas’’ e ‘’dívidas’’ (WARSI *et al*., 2020).

> Alguns textos astronômicos e astrológicos de século III E.C. já empregavam um sistema posicional decimal, incluindo um símbolo para zero. No entanto, as evidências sobre a astronomia escrita em sânscrito só se tornaram mais significativas a partir de meados do primeiro milênio. Elas mostram que havia, nesse período, uma intensa atividade matemática expressa sobretudo pela elaboração de tratados astronômico que também foram influenciados por obras gregas, devido ao contato com o império romano. (ROQUE, 2012, p. 237-238).

Um dos tratados mais antigos e importantes sobre a matemática indiana refere-se ao escrito de Aryabhata (476-), escrita em versos, sobre procedimentos matemáticos relacionados às regras de cálculo, aritmética, geometria, encontrar raízes quadradas e cúbicas, cálculo de áreas e regras trigonométricas para a astronomia. Por conta do estilo de escrita os trabalhos indianos, era de difícil a compreensão, por isso passaram a ser complementadas com comentários de outros matemáticos para facilitar a compreensão. (ROQUE, 2012).

Existem dois personagens da história da matemática indiana que por coincidência tinham o mesmo nome, Bhaskara I em 629 fez o comentário mais antigo sobre o livro de Aryabhata e existe Bhaskara II (1114), que viveu no século XII. Existe um tratado astronômico contemporâneo do comentário de Bhaskara I, que foi escrito por Brahmagupta em 628. Uma parte deste tratava do número zero, números negativos e positivos, quantidades desconhecidas, métodos de eliminação do termo médio, redução de uma variável e técnicas para resolver problemas com quantidades desconhecidas. Esses procedimentos foram citados tempos depois por Bhaskara II, em seus livros *Lilavati* e *Bija Ganita,* “semente do cálculo”, que descreve regras para resolver problemas envolvendo quantidades desconhecidas, que são expressas em versos, ilustradas com exemplos e com comentários do próprio autor (ROQUE, 2012).

> (I) “De uma quantidade retiramos ou adicionamos a sua raiz multiplicada por um coeficiente e a soma ou diferença é igual a número dado.’’
>
> A quantidade citada é um quadrado e a raiz desse quadrado é a incógnita. Esse é um enunciado retórico que, traduzido em nossa notação, seria uma equação geral como $x^2 \pm bx = c$. O método de resolução consistia em reduzir o problema a uma igualdade, o seja, sem o termo quadrado. Isso era feito por meio da técnica de “eliminação do termo médio’’ (ROQUE, 2012, p. 240).

ARÁBIA

A queda do Império Romano fez com que a matemática no Mediterrâneo declinasse, mas a difusão do islamismo a partir do século VII causou um grande avanço na álgebra. Em 762 d.C., o califa Al-Mansur fundou Bagdá para ser sua capital, e com isso a cidade tornou-se um importante centro cultural, de estudo, comércio, compra e tradução de manuscritos de outras culturas, como por exemplo, as obras dos matemáticos gregos Euclides, Apolônio e Diofanto, e de estudiosos indianos como Brahmagupta. As obras foram mantidas na grande biblioteca, denominada a Casa da Sabedoria, centro de pesquisa e divulgação do conhecimento da época (WARSI *et al*., 2020).

Al-Khwarizmi

Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi, (c.780-c.850), pesquisador da Casa da Sabedoria, exibiu sua obra “O Compêndio sobre o cálculo por balanceamento”. Ele revolucionou os modos de calcular problemas algébricos, apresentando os princípios que são a base da álgebra moderna. Ele é considerado o ‘’pai da álgebra’’ por desenvolver operações algébricas fundamentais, que denominou como redução, restauração e balanceamento, e reconhecido por apresentar o sistema de notação posicional decimal ao mundo islâmico, o que permitiu a adoção de um sistema numérico indo-árabe (WARSI *et al*., 2020).

Para Roque (2012), a emancipação dos árabes se deu através da álgebra, pois, permitiu ir além do conhecimento grego, ultrapassando a divisão entre número e grandeza. Indo além da teoria das equações, desenvolveram o cálculo algébrico sobre expressões polinomiais e consideraram os casos dos números irracionais ao contrário dos demais que negavam.

> O termo “álgebra” tem origem em um dos livros árabes mais importantes da Idade Média: *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala*, escrito por Al-Khwarismi. A palavra *al-jabr*, ou álgebra, em árabe, era utilizada para designar restauração, uma das operações usadas na resolução de equações. Já a *al-muqabala* queria dizer algo como “balanceamento" (ROQUE, 2012, p. 249).

A obra *Álgebra* de Al-Khowarismi é dividida em 6 capítulos. O primeiro capítulo trata de quadrados iguais a raízes, que na notação atual é expressa como $x^2 = 5x$, $\frac{x^2}{3} = 4x$ e $5x^2 = 10x$, tendo como resposta $x = 5$, $x = 12$ e $x = 2$; o capítulo 2 trata de quadrados iguais a números, e no capítulo 3 soluciona situações de raízes iguais a números, fornecendo três ilustrações por capítulo, em situações com o coeficiente da variável igual, maior ou menor que um. Nos capítulos 4, 5 e 6 apresenta três tipos de equações quadráticas com três termos, o primeiro é sobre quadrados e raízes iguais a números, o segundo é sobre quadrados e números iguais a raízes, e o terceiro é raízes e números iguais a quadrados. E as maneiras de resolver eram como receitas para completar quadrado, de acordo com o problema (BOYER, 1996).

> “Depois de mostrar como efetuar as quatro operações sobre expressões contendo quantidades desconhecidas e radicais, Al-Khwarizmi passa à enumeração de seis problemas possíveis,

> enunciados de modo retórico (com tradução em notação atual entre parênteses):
>
> quadrados iguais a raízes ($ax^2 = bx$)
> quadrados iguais a um número ($ax^2 = c$)
> raízes iguais a um número ($bx = c$)
> quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$)
> quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$)
> raízes e um número iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$) (ROQUE, 2012, p. 251).

Um exemplo citado por Roque (2012, p. 252) diz o seguinte: Para o quarto caso Al-Khwarismi considera o exemplo "um *Mal* e dez *Jidhr* igualaram 39 dinares", que em nossa notação algébrica seria representado como $x^2 + 10x = 39$. O algoritmo de resolução era descrito assim:

Tome a metade da quantidade de *Jidhr* (que neste exemplo é 5)

Multiplique essa quantidade por si mesma (obtendo 25)

Some no resultado os *Adad* (fazemos $39 + 25 = 64$)

Extraia a raiz quadrada do resultado (que dá 8)

Subtraia desse resultado a metade dos *Jidhr*, encontrando a solução (essa solução é $8 - 5 = 3$).

Roque (2012) afirma que ao traduzir esse caso para a notação atual seria obtido uma equação do tipo $x^2 + bx = c$ dada por $-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$.

Em sua obra, Eves (2004) relata que é inegável as contribuições dos árabes para a matemática, em especial para as áreas da álgebra e geometria, embora quando comparados aos gregos ficariam em segundo plano, suas contribuições podem ser pequenas, porém de grande importância, e foram eles que cuidaram boa parte do conhecimento da época através da Casa da Sabedoria.

China

Segundo Eves (2004) a história chinesa divide-se em quatro períodos gerais: China Antiga (c.2000-600 a.C), China Clássica (c 600 a.C.-221 d.C.), China Imperial (221 d.C- 1911) e China Moderna (de 1911 até agora). Acredita-se que a sociedade da China Antiga localizada ao longo dos rios Yang-Tze e Howang Ho tenha vindo depois do povo egípcio do Nilo e à babilônica, entre o Tigre e o Eufrates, existe poucos materiais dessa época, isso decorre por dois motivos, o primeiro seria o material usado por eles o bambu, um material que não resistiu ao tempo e a outra razão foi uma ordem dada pelo imperador Shï Huang-ti em 213 a.C. de queimar os livros. Muito do que se sabe sobre a matemática chinesa foi repassado via oral e interpretações de textos originais.

Uma das poucas fontes da matemática chinesa é o livro K'ui-cb'ang Suan-shu (Nove Capítulo sobre a Arte da Matemática do período Han) é uma síntese do conhecimento matemático daquele período, que no capítulo 7 aborda a regra de falsa posição (EVES, 2004).

Boyer (1996) cita o matemático o Ssu-yüan yü-chien (precioso espelho dos quatro elementos) de 1303, livro que desapareceu no século dezoito, e foi encontrado no século dezenove.

> Nele o autor descreve um método de transformação que chama *fan-fa*, cujos elementos parecem ter surgido muito antes na China, mas que tem geralmente o nome de Horner, que viveu meio milênio depois (BOYER, 1996, p. 139).

Um exemplo que Boyer aborda para explicar o método acima é a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$. O matemático Chu Shih-chieh descobria $x = 19$ uma aproximação da raiz que fica entre $x = 19 \ e \ x = 20$, e só então utilizava o fan-fa, transformando $y = x - 19$, obtendo $y^2 + 290y - 143 = 0$ com raiz entre $y = 0 \ e \ y = 1$. Encontra-se uma raiz aproximada $y = 143/(1 + 290);$ o que corresponde a x é $19 + 143/291$.

EUROPA OCIDENTAL

França

Foi no século XVIII que as equações polinomiais, de grau ($x, \ x^2 \ e \ x^3$), puderam ser resolvidas com o uso de fórmulas algébricas. Antes era possível conseguir resultados aproximados através de processos iterativos. Essa descoberta permitiu muitas inovações matemáticas, como números negativos e complexos, notação algébrica moderna e a teoria dos grupos. No período medieval (século XVI), os matemáticos já sabiam que o número do coeficiente de uma equação indicava o número de raízes dela (WARSI *et al*., 2020).

> No século XVII, ganhou forma uma teoria geral das equações polinomiais, hoje chamada teorema fundamental da álgebra. Segundo ela, uma equação de grau n (em que a potência mais alta de x é x^n) tem exatamente n raízes ou soluções, que podem ser números reais ou complexos (WARSI *et al.*, 2020, p. 201).

Joseph-Louis Lagrange

É impossível contar a história da matemática, em especial relacionada a álgebra, sem citar o francês Joseph-Louis Lagrange (Figura 7). Nascido Giuseppe Ludovico Langrangia, em Turim, 1736, suas principais obras são Reflexões sobre a solução algébrica de equações (1771), Mecânica analítica (1788) e Teoria das funções analíticas (1797). Em sua obra Reflexões sobre a solução de algébrica de equações (1771), buscou uma abordagem geral para resolver equações polinomiais. Com seu estudo notou que através de permutações havia relação de simetria, permitindo resolver equações de até quarto grau através de fórmulas (WARSI *et al.*, 2020).

Figura 7 - Joseph-Louis Lagrange

Fonte: (WARSI *et al*,2020,.p.201).

François Viète

François Viète (Figura 8), que viveu entre os anos de 1540 e 1603, introduziu uma representação padrão, onde as incógnitas são representadas pelas vogais e os coeficientes pelas consoantes do alfabeto, todas maiúsculas, onde incógnita é uma quantidade desconhecida e um coeficiente é uma quantidade conhecida genérica.

Figura 8 - François Viète

Fonte: (EVES, 2004, p. 309).

De modo distinto, no universo das equações, a escolha arbitrária de coeficientes determina uma equação. Por exemplo, na equação $ax^2 + bx + c = 0$ a escolha dos valores $a = 1$, $b = 3$ e $c = 100$ determina um caso: $x^2 + 3x + 100 = 0$. A notação de Viète possibilitou uma generalização dos métodos algébricos, que permitiu resolver equações usando coeficientes, e a partir desse momento classificar as equações e notar os exemplos particulares. Ao escrever uma fórmula geral, a resolução dos casos particulares passou a ser uma aplicação mecânica do procedimento (ROQUE, 2012).

> Sem dúvida foi à álgebra que Viète deu suas mais importantes contribuições, pois foi aqui que chegou mais perto das ideias modernas. A matemática é uma forma de raciocínio, e não uma coleção de truques, como Diofante possuíra; no entanto a álgebra durante o tempo dos árabes o começo do período moderno não tinha ido longe no processo de libertação do uso de casos particulares. (BOYER, 1996, p. 208).

Para Roque (2012), Viète não é o criador da fórmula de resolução de equações, pois ao olhar o período, a álgebra não era uma disciplina e os métodos que existiam resolviam vários problemas.

René Descartes

O francês René Descartes (Figura 9), filósofo e matemático, nasceu próximo a cidade de Tours em 1596, com oito anos de idade foi estudar em uma escola jesuíta em La Flèche. No ano de 1612 mudou-se para Paris, onde começou o estudo em matemática, já em 1617 entrou no exército e, ao deixar a carreira de militar, passou a se dedicar a filosofia e a matemática. Em 1649 foi viver na Suécia, a pedido da rainha Cristina. Um ano depois, em 1650, faleceu e dezessete anos após a sua morte seus restos mortais foram reenterrados em Paris (EVES,2004).

Figura 9 - René Descartes

Fonte: (EVES,2004,.p.384).

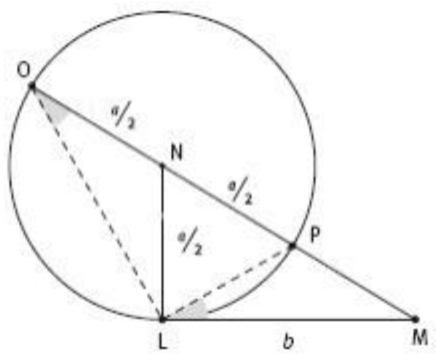
> Em seu mais célebre tratado, o *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências) de 1637, ele anunciou seu programa de pesquisa filosófica. Ele esperava, por dúvida sistemática, chegar a ideias claras e precisas, a partir das quais seria possível deduzir inúmeras conclusões válidas. Essa visão da ciência levou-o a admitir que tudo era explicável em termos de matéria (ou extensão) e movimento (BOYER, 1996, p. 230).

Em seu livro do *Discours* no apêndice *La géométrie* (A geometria), apresenta instruções para resolver equações quadráticas, geometricamente inspirado pelos gregos antigos (BOYER, 1996).

Descartes tentava resolver equações e em alguns casos equações do segundo grau como um problema geométrico, ele também tentava descrever curvas difíceis por meio de outras mais simples (ROQUE, 2012).

Roque, em seu livro, mostra um exemplo, uma equação $z^2 = az + b^2$, na qual a incógnita z é construída como na figura 10:

Figura 10



Fonte: (ROQUE, 2012, p. 323).

Descartes desenhava um triângulo retângulo NLM com $LM = b$ e $NL = \frac{a}{2}$. Para encontrar um z que satisfaça à equação, ele prolonga MN até o ponto O, tal que $NO = NL$, que resulta em $OM = z$. Obtendo $z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$ e ignorando a raiz negativa.

3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Neste capítulo, abordaremos todos os métodos já citados durante o trabalho, traduzindo para a notação moderna. Os seguintes métodos podem ser encontrados em Vale (2013).

3.1 Método de resolução convencional

Este método é erroneamente chamado de fórmula de Bhaskara (ver, por exemplo, Roque (2012)). Consiste em completar quadrados. Considere a equação geral

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

Multiplique a ambos os lados da equação por $4a$ obtemos

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

completando quadrados tem-se

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2,$$

equivalentemente,

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Assim,

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Deixando em evidência a incógnita temos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3.2 Método da semissoma e do produto

Considere a equação quadrática geral

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

O método consiste em primeiro dividir a equação por a, assim obtendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Agora, consideremos

$$s = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad p = \frac{c}{a}.$$

Daí, obtemos

$$x^2 - 2sx + p = 0.$$

A solução pelo método tradicional é dada por

$$x = s \pm \sqrt{s^2 - p}.$$

Por exemplo, vamos resolver a equação $2x^2 - 7x + 5 = 0$ por esse método. Primeiro, dividindo a equação por 2, temos

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2} = 0,$$

equivalentemente,

$$x^2 - 2\frac{7}{4}x + \frac{5}{2} = 0.$$

Assim, obtemos $s = \frac{7}{4}$ e $p = \frac{5}{2}$. Daí, usando a fórmula de cima temos

$$x = -\frac{7}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}} = -\frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{5}{2}} = -\frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{7}{4} \pm \frac{3}{4}.$$

Portanto, as raízes são $-\frac{5}{2}$ e -1.

3.3 Método alternativo

Trata também em completar quadrados, mas em sentido inverso. Considere a equação geral

$$ax^2 + bx + c = 0, a, c \neq 0.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $4c$ tem-se

$$4acx^2 + 4cbx + 4c^2 = 0,$$

completando quadrados tem-se

$$4acx^2 + b^2x^2 + 4cbx + 4c^2 = b^2x^2,$$

equivalentemente,

$$(bx + 2c)^2 = b^2x^2 - 4acx^2 = x^2(b^2 - 4ac).$$

Assim,

$$bx + 2c = \pm x\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Isolando a incógnita obtemos

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

3.4 Método do quadrado e da diferença

Vamos utilizar as fórmulas conhecidas da binômio ao quadrado:

$$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

e,

$$(m-n)^2 = m^2 - 2mn + n^2.$$

Das igualdades acima obtemos

$$(m+n)^2 - 4mn = (m-n)^2.$$

Agora, o método consiste em fazer

$$m+n = -\frac{b}{a} \text{ e } mn = \frac{c}{a}.$$

Assim, note que se fazemos

$$m+n = s, mn = p \text{ e } m-n = \mathrm{d}.$$

Pelo, visto anteriormente, temos $s^2 - 4p = d^2$. Equivalentemente,

$$d^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \Rightarrow d = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}.$$

Por outro lado, também temos que $2m = s + d$ e $2n = s - d$.

Portanto,

$$m = \frac{s+d}{2} \text{ e } n = \frac{s-d}{2}.$$

Daí, as soluções da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ são

$$m = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ e } n = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

3.5 Método de Viéte

Esse método de Viéte consiste em supor que a solução de uma equação de segundo grau se decompõe como soma de duas incógnitas auxiliares. Mais especificamente, considere a equação

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

Suponha agora que $x = m + n$ e substituindo na equação obtemos

$$a(m+n)^2 + b(m+n) + c = 0.$$

Desenvolvendo o quadrado e organizando tem-se

$$an^2 + (2am + b)n + am^2 + bm + c = 0.$$

Agora, a ideia é transformar a equação de segundo grau acima numa mais simples, para isto, devemos fazer $2am + b = 0$, daí $m = -\frac{b}{2a}$. Assim, a equação de acima se transforma

$$an^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

$$an^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Rightarrow an^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow n^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Logo,

$$n = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Portanto, como $x = m + n$, tem-se

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3.6 Método de Euler

O método de Euler consiste em usar substituição de variável e ter conhecimentos do uso do determinante em sistemas lineares. Mais precisamente, consideremos a equação de segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0, a, c \neq 0.$$

Fazemos agora $x = u + v$. Assim, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{gathered} ax^2 + bx + c = 0 \\ 0x^2 + x - (u + v) = 0 \\ x^2 + 0x - (u + v)^2 = 0. \end{gathered}$$

Como nossa equação tem soluções não nulas, temos que $x \neq 0$. Agora, multiplicando por x nas três equações de acima obtemos

$$\begin{gathered} ax^3 + bx^2 + cx = 0 \\ 0x^3 + x^2 - (u + v)x = 0 \\ x^3 + 0x^2 - (u + v)^2 x = 0. \end{gathered}$$

Pela teoria de sistemas lineares por meio dos determinantes, tem-se que o sistema possui determinante nulo. Daí,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -(u + v) \\ 1 & 0 & -(u + v)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Pelo cálculo de determinantes tem-se

$$a[-(u + v)^2] - b(u + v) - c = 0.$$

Equivalentemente,

$$au^2 + (2a + b)u + av^2 + bv + c = 0.$$

A seguir a estratégia é anular o coeficiente do termo u, assim temos $2av + b = 0$. Daí, $v = -\frac{b}{2a}$. Logo, substituindo na equação de acima temos

$$au^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

$$au^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$au^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow u^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

assim,

$$u = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Portanto, substituindo u e v em x obtemos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3.7 Método da transformação

O método a seguir consiste em mudar a variável incógnita convenientemente. Mais precisamente, considere a equação

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

Multiplicando a ambos os lados por a obtemos

$$a^2x^2 + abx + ca = 0.$$

Agora, fazemos a mudança $y = ax$ e $m = ca$ temos a seguinte equação

$$y^2 + by + m = 0.$$

Agora, somando a ambos os lados por by tem-se

$$y^2 + 2by + m = by$$

em seguida, completando o quadrado temos

$$y^2 + 2by + b^2 + m = by + b^2$$

equivalentemente,

$$(y + b)^2 = b(y + b) - m.$$

Considere, w um parâmetro qualquer, daí como

$$(y + b + w)^2 = (y + b)^2 + 2(y + b)w + w^2$$

logo tem-se

$$(y + b + w)^2 = b(y + b) - m + 2(y + b)w + w^2 = (b + 2w)(y + b) + w^2 - m.$$

Daí, fazendo $w = -\frac{b}{2}$ temos

$$\left(y + b - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - m \Rightarrow y + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - m} \Rightarrow y = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - m}$$

Portanto, voltando às variáveis originais $y = ax$ e $m = ca$ tem-se

$$ax = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ca} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3.8 Método Po-Shen Loh

Loh (2019) apresenta um método alternativo para resolver equações quadráticas, evitando a adivinhação e verificação tradicional. O autor apresenta o método como uma descoberta original, mas reconhece que outros matemáticos, possivelmente de forma fragmentada, já utilizavam técnicas semelhantes. O método se baseia em encontrar dois números que somados resultem no oposto do coeficiente linear da equação e multiplicados resultem no coeficiente constante da equação. Por exemplo, considere a equação quadrática

$$x^2 + 10x + 16 = 0,$$

a ideia é decompor $x^2 + 10 + 16$ na forma $(x - m)(x - n)$ onde $m = -5 - p$ e $m = -5 + p$ sendo p um número a determinar. Daí, temos que $m + n = -10$ e $mn = 16$. Segue-se que

$$(-5 - p)(-5 + p) = 16$$

$$(-5)^2 - p^2 = 16$$

$$25 - p^2 = 16$$

$$p^2 = 25 - 16 = 9.$$

Portanto, $p = 3$ ou $p = -3$. Assim, $m = -8$ e $n = -2$ ou $m = -2$ e $n = -8$. Em qualquer caso, temos que as raízes são -2 e -8.

Através de manipulações algébricas, o autor demonstra como chegar a esses dois números e assim resolver a equação quadrática. De fato, considere a equação quadrática geral

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

O primeiro a ser feito é dividir a equação por a assim obtemos

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Daí, supomos que $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ tem a forma $(x-m)(x-n)$ onde $m = -\frac{b}{2a} - p$ e $n = -\frac{b}{2a} + p$ sendo p um número a determinar. Daí,

$$m + n = -\frac{b}{a} \text{ e } mn = \frac{c}{a}.$$

Assim, obtemos

$$\left(-\frac{b}{2a} - p\right)\left(-\frac{b}{2a} + p\right) = \frac{c}{a}$$

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - p^2 = \frac{c}{a}$$

$$\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - p^2 = \frac{c}{a}$$

$$p^2 = \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{c}{a}$$

$$p^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$p = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Portanto, $p = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ou $p = -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Assim, $m = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $n = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ou $m = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $n = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Em qualquer caso, temos que as raízes são dadas por $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Por fim, o autor apresenta um resumo do método da seguinte maneira: Este método consiste em três etapas principais, começando com uma equação quadrática geral $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

1. Dividir por a a todos os coeficientes da equação, obtendo a equação padrão $x^2 + Bx + C = 0,$ onde $B = \frac{b}{a}$ e $C = \frac{c}{a}$.
2. Por causa da fatoração polinomial, se pudermos encontrar dois números com soma $-B$ e produto C, então esses são o conjunto completo de soluções.
3. Use o antigo truque babilônico/grego (estendido a números complexos) para encontrar esses dois números em todas as circunstâncias.

Exemplo 1. Resolver $x^2 - 8x + 13 = 0$.

Resolução: Devemos supor a fatoração de $x^2 - 8x + 13 = (x-m)(x-n)$ onde m e n devem satisfazer $m + n = 8$ e $mn = 13$. Daí, fazer $m = 4 - p$ e $n = 4 + p$. Assim, obtemos

$$(4-p)(4+p) = 13$$
$$4^2 - p^2 = 13$$
$$16 - p^2 = 13$$
$$p^2 = 16 - 13 = 3.$$

Logo, podemos escolher $p = \sqrt{3}$ e, portanto, as soluções são $4 - \sqrt{3}$ e $4 + \sqrt{3}$.

Exemplo 2. Resolver $x^2 - 8x + 18 = 0$.

Resolução: Como antes supomos a fatoração $x^2 - 8x + 13 = (x-m)(x-n)$ onde m e n devem satisfazer $m + n = 8$ e $mn = 18$. Daí, fazer $m = 4 - p$ e $n = 4 + p$. Assim, obtemos

$$(4-p)(4+p) = 18$$
$$4^2 - p^2 = 18$$
$$16 - p^2 = 18$$
$$p^2 = 16 - 18 = -2.$$

Logo, podemos escolher $p = \sqrt{2}i$ onde $i^2 = -1$, e, portanto, as soluções são $4 - \sqrt{2}i$ e $4 + \sqrt{2}i$.

Exemplo 3. Resolver $2x^2 - 4x - 5 = 0$.

Resolução: Aqui devemos seguir o passo 1 devido a ter coeficiente líder 2. Daí, dividindo todos os coeficientes obtemos $x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 0$. Agora, suponhamos a fatoração de $x^2 - 2x - \frac{5}{2} = (x-m)(x-n)$ onde m e n devem satisfazer $m + n = 1$ e $mn = -\frac{5}{2}$. Daí, fazer $m = 1 - p$ e $n = 1 + p$. Assim, obtemos

$$(1-p)(1+p) = -\frac{5}{2}$$
$$1^2 - p^2 = -\frac{5}{2}$$
$$1 - p^2 = -\frac{5}{2}$$
$$p^2 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}.$$

Logo, podemos escolher $p = \sqrt{\frac{7}{2}}$ e, portanto, as soluções são $1 - \sqrt{\frac{7}{2}}$ e $1 + \sqrt{\frac{7}{2}}$.

Utilizar a história como ferramenta de ensino:

Para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a história é o conhecimento sobre o passado e que implica sobre o conhecimento do presente.
Maneiras possíveis de apresentar a história da matemática:
1. Mencionar episodicamente os matemáticos antigos;
2. Fazer introduções históricas aos conceitos que são novos para os alunos;
3. Encorajar os alunos a compreenderem os problemas históricos dos quais os conceitos que estão a aprender são resposta;
4. Dar aulas de “História da Matemática”;
5. Apresentar exercícios na aula ou como trabalho para casa baseados em textos matemáticos antigos;
6. Dirigir atividades teatrais que reflitam interação matemática;
7. Encorajar a criação de cartazes ou outros projetos com temas históricos;
8. Realizar projetos sobre a atividade matemática local no passado;
9. Usar exemplos críticos do passado para ilustrar técnicas e métodos;
10. Explorar mal-entendidos/erros/visões alternativas do passado para ajudar na compreensão e na resolução de dificuldades dos alunos atuais;
11. Optar por uma abordagem pedagógica de um tópico em sintonia com o seu desenvolvimento histórico;
12. Ordenar e estruturar os temas do programa tendo em consideração o seu enquadramento histórico (FAUVEL; MAANEM, 2002, p. 17, *apud* Júnior, 2022 p. 27).

Um exemplo de como apresentar a história e matemática para os alunos e com a seguinte atividade:
1) Resolva a equação $10x^2 + 3x - 1 = 0$ utilizando a receita matemática dos babilônios.
2) Resolver a equação $2x^2 - 7x = 4$ utilizando-se o método de completar quadrados.
3) Resolver a equação $x^2 - 10x = -9$ utilizando-se o método de completar quadrados.
4) Resolva a equação $x^2 - x = 870$ utilizando a receita matemática dos babilônios (SANTANA, 2013, p. 36).

Outras formas de apresentar o conteúdo de equação de segundo grau é utilizando o *YOUTUBE*, mostrando vídeos e é possível também construir material concreto como uso do papel Eva no método de completar quadrados para que os alunos tenham a experiência de construir e explorar o saber matemático.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a pesquisa, foi possível notar que a evolução da álgebra teve como passo inicial situações do cotidiano, como contabilizar e dividir bens, a princípio no Egito, depois na Mesopotâmia e assim por diante, ocorrendo intercâmbios culturais que permitiram o avanço da matemática, uma álgebra que antes era relatada através de versos até a abstração a qual a notação moderna carrega.

Reconhecendo a relevância histórica dos diversos métodos de resolução matemática, como os métodos algébricos e geométricos, é crucial não limitar o ensino a apenas um método para cada conceito. Apresentar os conteúdos matemáticos de maneiras diversas estimula os alunos a compreenderem a aplicabilidade dos conceitos, percebendo as conexões entre aritmética, álgebra e geometria.

No contexto específico da equação de segundo grau, é essencial introduzir os diferentes métodos de resolução, oferecendo aos alunos a flexibilidade de escolherem a abordagem mais adequada para cada situação, e a terem a liberdade de escolher qual método gostariam de utilizar. Além disso, contextualizar historicamente e tornar as atividades atrativas enriquece as discussões em sala de aula. Neste estudo sobre a equação do segundo grau, apresentamos métodos em detalhes que dão alternativas para os estudantes. O método Po-Shen Loh permite resolver as equações de segundo grau de uma maneira mais simples.

O estudo permitiu perceber que não é correto afirmar que um determinado matemático criou a fórmula de resolução da equação quadrática, mas que na verdade foram contribuições de vários povos, desde a “álgebra geométrica”, a notação de François Viète, que culminaram na álgebra apresentada nos livros didáticos e que a história é uma rica ferramenta de aprendizagem para mostrar uma matemática viva e não apenas como uma curiosidade sem grande relevância.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 1.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. trad. Luciana de Oliveira da Rocha. 2ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

LOH, P. S. A Simple Proof of the Quadratic Formula. **Arxiv Preprint** ArXiv:1910.06709, 2019.

MIATELLO, L. A Debated but Little Examined Mathematical Text: Papyrus Berlin 6619. **Zeitschrift für Ägyptische Sprache und Altertumskunde**. vol.139 n. 2, p. 158-170, 2012.

PEDROSO, H. A. Uma história da equação do 2º grau. **Revista Eletrônica de Matemática**, Jataí, n. 2, p. 1-13, 2010.

ROQUE, T. M. **História da matemática**: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

VALE, A. **As diferentes estratégias de resolução da equação do segundo grau**. Tese (Mestrado em matemática) – Universidade Federal Rural do Semiárido. Mossoró, 2013.

WARSI, K. et. al. **O livro da matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Globo livros, 2020.

COSTA, L. **Quem é o Bhaskara da fórmula matemática?. Super Interessante.** Disponível em:< https://super.abril.com.br/coluna/oraculo/quem-e-o-bhaskara-da-formula-matematica/mobile>. Acessado em: 3 mai. 2024.

SANTANA, L. **A inserção da história da matemática no ensino da equação do 2 grau**. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática- Centro de Ciências e Tecnologias, da Universidade Estadual da Paraíba.p.36. 2013.

JÚNIOR, A. **Um estudo sobre livros de história da matemática para professores organizados pela SBHMAT para os seminários nacionais de história da matemática**. 2022. 137 f. Dissertação Programa de Pós-Graduação em Ensino) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu-PR.

Memorial do aluno

É com muita alegria que gostaria de registrar em meu trabalho de conclusão de curso, O porquê escolhi ser professora?

Desde que entrei na escola com 6 anos, admirava minhas professoras e ali a semente da docência crescia em meu coração, com 10 anos depois de várias notas boas cheguei em casa e comentei com minha mãe que gostaria de ser uma professora cientista, ela ficou surpresa e preocupada, pois já conhecia os desafios que tal profissão me traria, mas não deixou de me apoiar.

Aos meus 11 anos ingressei na escola do ensino fundamental e médio Tarquínio Santos e lá comecei a me decepcionar com a disciplina de matemática e por muitos anos ficava tirando notas ruins e comecei a pensar que a odiava a disciplina, que não era para mim, isso tudo mudou quando comecei a ter aulas com a professora Patrícia, sentia que podia ser inteligente em matemática.

Aos meus 16 anos já no primeiro ano do ensino médio eu conheci o professor Lincon, a quem eu posso dizer que devo a confiança de saber que matemática é para mim e para quem quiser aprender, infelizmente ele já faleceu e nunca vai saber a gratidão e importância que ele tem e sempre terá na minha vida, um dia ele disse para nossa turma depois de uma prova “O que falta em vocês é confiança!’’, e é essa frase sempre lembrar quando penso em desistir.

E aos meus 18 anos eu tive que ir ao velório desse meu querido professor, e consolar sua mãe, foi lá que entre abraços e palavras de conforto junto de minha professora de português Juliana, ela me disse a seguinte frase: “Temos que continuar o que ele começou…’’, eu encontrava-me em momento pessoal muito difícil da minha vida e com essas palavras eu ganhei de novo um norte para minha vida e a semente da docência renasceu em mim. Escolhi ser professora, pois acredito que ensinar é um ato de amor, que ensinar é luta e resistência e que não tem nada mais gratificante que ver outras pessoas voarem por meiode nós, de ver nossos sonhos em outros sonhos.

Meu muito obrigada a todos os meus professores e em especial ao meu eterno professor Lincon.