

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité : MECANIQUE

Présentée

à l'Université Pierre et Marie Curie  
- PARIS 6 -

Par: **Julio FLOREZ**

En vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE PARIS 6  
(nouveau régime)

Sujet de la thèse:

**ELASTICITE COUPLEE A L'ENDOMMAGEMENT:  
FORMULATION, ANALYSE THEORIQUE ET  
APPROXIMATION NUMERIQUE**

Thèse soutenue le 21 avril devant le jury composé de:

|                                     |            |
|-------------------------------------|------------|
| Monsieur <b>Jean LEMAITRE</b>       | Président  |
| Monsieur <b>Giuseppe GEYMONAT</b>   | Rapporteur |
| Monsieur <b>Jean Jacques MARIGO</b> | Rapporteur |
| Monsieur <b>Ahmed BENALLAL</b>      | Examineur  |
| Monsieur <b>Alain EHRLACHER</b>     | Examineur  |
| Monsieur <b>Nguyen Quoc SON</b>     | Examineur  |

LABORATOIRE DE MECANIQUE ET TECHNOLOGIE  
E.N.S. CACHAN - Université Pierre et Marie Curie -C.N.R.S.  
61, Avenue du Président Wilson 94230 CACHAN FRANCE

Je tiens à remercier le professeur Jean LEMAITRE d'avoir bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont ensuite à Monsieur Nguyen Quoc SON et Monsieur Alain EHRLACHER qui ont accepté d'y participer.

Mais c'est incontestablement à Ahmed BENALLAL, qui a dirigé cette thèse, et à Giuseppe GEYMONAT que je dois aujourd'hui de pouvoir présenter ce mémoire. Je les remercie sincèrement pour leur amitié et pour leur patience.

Cette thèse doit aussi beaucoup aux idées de René BILLARDON, aux discussions avec Didier MARQUIS, responsable du groupe Matériaux du L.M.T., et avec mon collègue Issam DOGHRI.

Qu'il me soit permis également de remercier Monsieur Jean Jacques MARIGO, rapporteur de cette thèse pour la lecture attentive et pour ses remarques qui ont été prises en compte lors de la version définitive de cette thèse.

Je remercie aussi tous les membres du groupe Matériaux et du L.M.T. qui m'ont soutenu et encouragé à un titre ou un autre pour mener ce travail jusqu'à son terme. Je ne les mentionnerai pas, ils comprendront, ce sont mes amis.

Enfin, mon séjour en FRANCE n'aurait pas été possible sans les démarches entreprises par l'ambassade de FRANCE au VENEZUELA et par le L.M.T. et sans l'appui financier de la Universidad de los Andes au VENEZUELA et du gouvernement Français.

---

## Sommaire

---

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction.</b>                                                                 | <b>1</b>  |
| <br><b>I Quelques rappels et notations.</b>                                          |           |
| <b>1. Rappels de mécanique et thermodynamique des milieux continus.</b>              | <b>4</b>  |
| 1.1. Déformation, hypothèse des petites perturbations.                               |           |
| 1.2. Contraintes, efforts, principe des puissances virtuelles.                       |           |
| 1.3. Lois de comportement et thermodynamique des milieux continus.                   |           |
| 1.4. Méthode de l'état local.                                                        |           |
| <b>2. Rappels d'analyse convexe et théorie d'optimisation.</b>                       | <b>12</b> |
| 2.1. Opérateurs non-linéaires, fonctionnelles, produit scalaire.                     |           |
| 2.2. Différentiation d'opérateurs non-linéaires                                      |           |
| 2.3. Ensembles et fonctionnelles convexes, opérateurs monotones, sous-différentiels. |           |
| 2.4. Minimisation de fonctionnelles convexes                                         |           |
| 2.5. Equations généralisées.                                                         |           |
| <br><b>II Modélisation de l'élasticité couplée à l'endommagement.</b>                |           |
| <b>1. Potentiel thermodynamique. Lois d'état.</b>                                    | <b>22</b> |

**2. Potentiel de dissipation. Lois complémentaires. 25**

2.1 Formulation incrémentale des modèles indépendants du temps.

2.2 Formulation fonctionnelle des modèles indépendants du temps.

2.2.1 Introduction.

2.2.2 Formulation de la loi d'endommagement

2.2.3. Exemples.

2.2.4. Etude de la dissipation.

2.3. Relation entre la formulation incrémentale et la formulation fonctionnelle.

**III Formulations variationnelles.****1. Introduction. 42****2. Formulation variationnelles pour le problème en vitesses. 43**

2.1. Problème de référence.

2.2. Formulation variationnelle en vitesse de déplacement.

2.2.1. Exemples

2.3. Formulation variationnelle en vitesse de déplacement et vitesse d'endommagement.

2.3.1. Points d'équilibre non-coopératifs.

2.3.2. Exemples.

2.4. Formulation à deux champs sans contrainte.

**3. Formulation à deux champs pour le problème d'évolution. 55**

3.1. Problème de référence.

3.2. Formulation variationnelle à deux champs

3.3. Approximation numérique.

3.4. Exemples.

**IV Existence et unicité de la solution.****1. Introduction. 62**

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2. Existence et unicité de la solution pour le problème en vitesses.                  | 66  |
| 3. Unicité de la solution pour le problème d'évolution.                               | 70  |
| 3.1. Position du problème.                                                            |     |
| 3.2. Unicité de la solution lorsque il n'y a pas de décharge élastique.               |     |
| 3.3. Etude de la décharge élastique.                                                  |     |
| 3.4. Critère d'unicité.                                                               |     |
| 4. Exemple élémentaire.                                                               | 80  |
| <b>V Etude de la stabilité de la solution et de la sensibilité aux imperfections.</b> |     |
| 1. Introduction.                                                                      | 86  |
| 2. Etude de la stabilité au sens de Hill.                                             | 92  |
| 2.1 Position du problème                                                              |     |
| 2.2 Définition du travail des efforts de perturbation                                 |     |
| 2.3 Critère de stabilité                                                              |     |
| 3. Etude de la sensibilité des solutions aux imperfections.                           | 97  |
| <b>VI Etude de la localisation et de la régularité de la solution.</b>                |     |
| 1. Introduction.                                                                      | 100 |
| 2. Etude de la régularité de la solution dans le cas élastique non-linéaire.          | 105 |
| 2.1. Position du problème.                                                            |     |
| 2.2. Critère local de régularité.                                                     |     |
| 2.3. Critère global de régularité.                                                    |     |

|                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3. Etude de la régularité de la solution pour le problème en vitesses avec endommagement.        | 109 |
| 3.1. Position du problème.                                                                       |     |
| 3.2. Critère global de régularité.                                                               |     |
| 3.3. Exemple élémentaire.                                                                        |     |
| <br><b>VII Approximation numérique de l'élasticité couplée à l'endommagement.</b>                |     |
| 1. introduction.                                                                                 | 113 |
| 2. Approximation numérique à deux champs pour le problème d'évolution.                           | 113 |
| 2.1. Position du problème.                                                                       |     |
| 2.2. Discrétisation du problème.                                                                 |     |
| 2.2.1. Discrétisation en temps.                                                                  |     |
| 2.2.2. Discrétisation en espace.                                                                 |     |
| 2.2.3. Le problème discrétisé.                                                                   |     |
| 2.3. Algorithme de décomposition.                                                                |     |
| 2.4. Minimisation de la fonction $J_h^u$                                                         |     |
| 2.5. Minimisation de la fonction $J_h^d$                                                         |     |
| 2.5.1. Méthodes de pénalisation.                                                                 |     |
| 2.5.2. Méthodes de projection.                                                                   |     |
| 2.6. Critère de convergence de l'algorithme de décomposition.                                    |     |
| 3. Exemples                                                                                      | 132 |
| 3.1. Structure à deux barres soumise à un cisaillement pur.                                      |     |
| 3.2. Cylindre infini à paroi épaisse soumis à des déplacements imposés sur la surface extérieure |     |
| 3.3. Eprouvette entaillée à grande concentration de contraintes.                                 |     |
| 3.4. Eprouvette entaillée à faible concentration de contraintes                                  |     |
| <br><b>Bilan, conclusions et perspectives</b>                                                    | 146 |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| <b>Annexes.</b>                    | 149 |
| <b>Références bibliographiques</b> | 156 |

---

## Introduction

---

La nécessité d'une modélisation fine du processus de détérioration des structures est désormais un lieu commun et nous ne nous attarderons pas sur ce fait. Il est aussi généralement accepté que l'outil le mieux adapté pour cette modélisation est la mécanique de l'endommagement. Nous ne ferons pas non plus l'historique de celle-ci, nous nous limiterons à mentionner qu'elle est de formulation relativement récente (cela a commencé avec l'article de Kachanov de 1958) et que l'école française (initiée avec les travaux de Lemaitre et Chaboche) a joué un rôle considérable. Par contre il est peut être utile, afin de préciser la motivation de cette thèse, de décrire brièvement les particularités et les problèmes spécifiques à la mécanique de l'endommagement.

Très schématiquement, l'idée consiste à caractériser, à l'aide d'une variable interne, l'état de détérioration du matériau dans le cadre de la mécanique des milieux continus. A première vue l'introduction d'une variable additionnelle ne devrait pas poser de difficultés particulières au delà de l'étape de la modélisation et l'identification. Cela n'est cependant pas le cas pour la variable endommagement. Le fait de décrire une dégradation lui confère un caractère particulier. Par exemple, à la différence d'autres paramètres, l'endommagement vient nécessairement se coupler aux autres variables internes. Ce caractère "parasite" de l'endommagement n'est pas sans conséquences dans l'étape de la résolution numérique du problème d'endommagement. En effet les modèles d'endommagement ne vérifient pas le critère de stabilité de Drucker (c'est à dire  $\Delta \varepsilon : \Delta \sigma$  n'est pas nécessairement positif) et au delà d'un certain seuil d'utilisation, le problème de mécanique associé à ces modèles devient mal posé. La non-objectivité (non-convergence par rapport à la discrétisation) des solutions peut être expliquée par ce fait.

L'étude et la description fine des processus de détérioration requièrent donc, non seulement des travaux de modélisation et de nature expérimentale, mais aussi des études à caractère théorique et numérique qui prennent dans le cas de la mécanique de l'endommagement une importance particulière par rapport à d'autres branches de la mécanique de solides. Cette thèse s'inscrit dans ce cadre. Il s'agit donc d'une tentative de compréhension des problèmes

mathématiques et de l'étude des méthodes numériques pour l'obtention de solutions approchées au problème d'endommagement, tout en restant dans le domaine de la mécanique puisque l'auteur n'a pas de connaissances particulières en mathématiques.

Pour mener cette étude, nous nous sommes placés dans un cadre qui, étant le plus simple possible, conserve toutes les caractéristiques essentielles du problème en question. Il s'agit de l'élasticité couplée à l'endommagement, en petites perturbations, en quasi-statique et en isotherme. Même dans ce cadre restreint les difficultés sont considérables et heureusement les applications industrielles aussi, notamment en génie civil (béton, mécanique de roches,...), quelques composites, céramiques, etc.

Nous donnerons par la suite un aperçu général du contenu de chacun des sept chapitres qui composent ce texte.

Nous commençons au chapitre I par quelques rappels de mécanique et thermodynamique des milieux continus, ainsi que quelques éléments de théorie d'optimisation. Ces rappels ne contiennent pas de résultats originaux.

La modélisation de l'élasticité couplée à l'endommagement est décrite au chapitre II. Nous nous limitons aux modèles indépendants du temps. Nous décrivons en premier lieu la formulation incrémentale classique qui est inspirée directement de la plasticité. Nous décrivons par la suite une autre formulation où la valeur de l'endommagement est une fonction de l'histoire de déformations, c'est pourquoi nous avons appelé cette modélisation, formulation fonctionnelle. Dans le troisième chapitre, nous considérons les formulations variationnelles du problème en question. Nous commençons par la formulation du problème en vitesses. Nous décrivons d'abord la formulation classique en vitesse de déplacement et nous précisons ses inconvénients. Nous proposons par la suite une formulation à deux champs qui définit la solution du problème en vitesses comme un point d'équilibre non-coopératif. Nous proposons enfin une autre formulation, à deux champs également, pour le problème d'évolution.

Dans les chapitres IV, V et VI nous étudions quelques propriétés mathématiques de la solution. Au chapitre IV nous proposons des critères assurant l'unicité de la solution pour le problème en vitesses et pour le problème d'évolution. L'étude de la stabilité de la solution est réalisée au chapitre V. Nous considérons d'abord la stabilité "au sens de Hill" (c'est à dire en suivant la même démarche de l'étude menée par Hill et généralisée par Nguyen). Nous proposons ensuite une justification mathématique du critère de stabilité au sens de Hill. Au chapitre VI nous discutons la régularité de la solution et nous proposons un critère global de régularité pour la solution au problème en vitesses.

Enfin au chapitre VII, nous décrivons une méthode numérique basée sur la formulation variationnelle à deux champs pour le problème d'évolution décrite lors du chapitre III et qui est valable pour les modèles d'endommagement en formulation fonctionnelle. Finalement nous présentons quelques résultats numériques obtenus par la méthode proposée.

---

## I Quelques rappels et notations.

---

Ce premier chapitre est constitué de rappels qui ne contiennent pas de résultats originaux. Il présentera aussi le cadre de l'étude qui sera réalisée par la suite et introduira certaines notations.

### 1. Rappels de mécanique et thermodynamique des milieux continus.

#### 1.1 Déformation - hypothèse de petites perturbations.

On considère un milieu continu qui occupe le volume  $V$ , ce milieu subit des changements de géométrie et de déplacements par rapport à un certain référentiel. Pour décrire ce mouvement, on établit un système de référence dans l'espace tridimensionnel  $R^3$ . Les points dans cet espace seront notés par  $X$ .

Dans la description Lagrangienne du mouvement des milieux continus, on décrit le déplacement de chaque point matériel au cours du temps. Ces points seront notés  $X$  et ils peuvent être identifiés par la position qu'ils occupaient à un instant particulier. Cette configuration privilégiée est usuellement choisie pour correspondre à la configuration initiale "non-déformée" du milieu. On introduit maintenant une chronologie, et on caractérise l'instant où le milieu occupait la configuration privilégiée par  $t = 0$ . Le mouvement est donc donné décrit par la donnée des fonctions:

$$(1) \quad x = x(X,t)$$

Les équations (1) doivent se lire comme suit: Le point matériel qui à l'instant  $\tau = 0$  occupait la position  $X$  dans le système de référence choisi, occupe à l'instant  $\tau = t$  la position  $x$ .

Le déplacement de chaque particule sera noté  $U(X,t)$  (déplacement du point matériel  $X$  à l'instant  $t$ ) et il est donné par:

$$(2) \quad U(X,t) = x(X,t) - X$$

On souhaite maintenant caractériser les changements de géométrie (c'est à dire la déformation) du milieu. On considère alors un vecteur  $dX$  de longueur  $dS$ , dans la configuration de référence et on suit les variations de longueur de ce vecteur au cours du temps. Ces variations sont données par:

$$(3) \quad (ds)^2 - (dS)^2 = dx \cdot dx - dX \cdot dX$$

A l'aide des relations (1) et (2), l'expression (3) devient:

$$(4) \quad (ds)^2 - (dS)^2 = L : dX : dX$$

Où  $L$  est un opérateur dénommé "tenseur de déformation de Green" dont l'expression en notation matricielle est la suivante:

$$(5) \quad L_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \frac{\partial U_k}{\partial X_j} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \frac{\partial U_j}{\partial X_k} \right)$$

Le tenseur de Green permet alors de caractériser la déformation "localement", c'est à dire autour du point  $X$ , à chaque instant  $t$ .

Dans les cas où le gradient du déplacement est très petit, le terme quadratique dans (5) peut être négligé et la déformation est alors caractérisée par le tenseur de déformation linéarisé ou tenseur de déformation de Cauchy. C'est à dire:

$$(6) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right)$$

Par la suite, on supposera que tel est le cas et en conséquence on utilisera le tenseur de Cauchy pour caractériser les déformations. On supposera également que les déplacements sont aussi très

petits, c'est à dire que la différence entre la configuration déformée du milieu et la configuration de référence est, au premier ordre, négligeable. Autrement dit que les variables  $x$  et  $X$  peuvent être confondues. Lorsque ces deux hypothèses sont vérifiées simultanément on dit que l'on se place dans le cadre de l'hypothèse de petites perturbations.

## 1.2 Contraintes, efforts, principe de puissances virtuelles.

On considère un milieu continu solide qui occupe le volume  $V$ . Sur le solide agissent des "actions extérieures", les sollicitations et des "actions intérieures" qui représentent les efforts de cohésion du solide. On suppose que l'hypothèse de petites perturbations est suffisante pour décrire le mouvement du solide. On souhaite schématiser les actions qui agissent sur le solide, pour cela, on introduira les concepts de champs de déplacement virtuels, de contrainte et de puissance.

On choisit un espace  $\mathcal{V}$  de vitesses de déplacement que l'on juge suffisant pour décrire le mouvement du solide en question. On suppose que cet ensemble est constitué par les champs de vitesse de déplacements, définis sur  $V$ , continus et différentiables par morceaux. Les éléments de cet espace sont dénommés champs de vitesses virtuelles et seront notés par  $\dot{U}^*$ .

On postule que les "efforts intérieurs de cohésion" sont la conséquence de la modification de la géométrie, c'est à dire de la déformation du solide, et non de son déplacement par rapport au système de référence choisi. On introduit alors l'espace  $\chi$  de vitesses de déformation virtuelles. Cet ensemble est donc constitué par des champs de vitesses de déformation continus par morceaux et définis presque partout dans le volume  $V$ . L'espace  $\chi$  est mis en dualité (voir N° 2 de ce chapitre) avec l'espace  $\chi^0$  par le produit scalaire suivant:

$$(7) \quad P_i = - \int_V \sigma : \epsilon(\dot{U}^*) dV$$

Les éléments  $\sigma$  de l'espace  $\chi^0$  sont donc, opérateurs linéaires et symétriques sur l'espace  $\chi$  et à valeurs sur  $R$ .  $\sigma$  est dénommé "tenseur de contraintes" et le produit de dualité  $P_i$ , "puissance des efforts intérieurs".

Pour caractériser les actions extérieures et afin d'avoir une définition cohérente avec le choix précédent de  $P_i$ , on considère l'espace  $\mathcal{V}^0$  dual de  $\mathcal{V}$  pour le produit suivant:

$$(8) \quad P_e = \int_V \dot{U}^* f dV + \int_{\partial V} \dot{U}^* F dS$$

où  $\partial V$  désigne la frontière de l'ensemble  $V$ . L'ensemble  $v^\circ$  est donc constitué par des couples  $(f, F)$ . L'élément  $f$  du couple est appelé "effort volumique" et  $F$  "effort surfacique". Le produit  $P_e$  est dénommé "puissance des efforts extérieurs".

Les actions de l'extérieur sur le solide sont alors schématisées par la donnée de la puissance des efforts extérieurs comme une fonction des vitesses de déplacement (on dit alors que le solide est soumis à des efforts imposés) ou des efforts  $f$  et  $F$  (solide soumis à des déplacements imposés) ou encore comme une fonction des vitesses dans une partie de  $\partial V$ , notée  $\partial_u V$ , et fonction des efforts dans la partie complémentaire à  $\partial_u V$ , et le volume  $V$ . On peut alors postuler le principe de puissances virtuelles:

On dit qu'un champ de contraintes  $\sigma$  est en équilibre dynamique avec les sollicitations extérieures si:

$$(9) \quad P_i + P_e = P_a \quad \forall \dot{U}^* \in v$$

où  $P_a$  est la puissance des quantités d'accélération, définie par:

$$(10) \quad P_a = \int_V \ddot{U} \dot{U}^* \rho dV$$

$\ddot{U}$  est le vecteur accélération en chaque point  $x$  et  $\rho$  est la masse volumique.

Un cas particulier très important dans les applications est celui de "l'équilibre quasistatique", il correspond au cas où la puissance des quantités d'accélération est négligeable par rapport aux autres termes de (9) et alors on peut poser  $P_a = 0$ . Dans ce texte on considérera exclusivement ce cas particulier.

### 1.3. Lois de comportement et thermodynamique des milieux continus.

Dans le paragraphe précédent on a supposé que les efforts intérieurs, caractérisés par la contrainte, étaient associées aux modifications de la géométrie, caractérisées par le tenseur de déformation de Cauchy. L'objet des lois de comportement, dans le contexte présent, est de

formuler cette dépendance. Dans un premier temps, on peut définir une loi de comportement comme une fonctionnelle qui lie la contrainte à l'instant  $t$  avec l'histoire de déformations jusqu'à cet instant, c'est à dire:

$$(11) \quad \mathbb{E}(t) = \mathcal{F} (\mathbb{E}(\tau)) \quad -\infty < \tau \leq t$$

L'expérience quotidienne montre que la relation entre les efforts de cohésion et la déformation est différente selon le type de milieu que l'on considère. Une loi de comportement caractérise un milieu en particulier et elle ne peut être déterminée que par des expériences sur le milieu en question. Cependant l'expérience montre également que ces lois ne sont pas complètement arbitraires, en effet quelque soit le milieu considéré on doit choisir des lois de comportement qui vérifient deux relations qui ont un caractère universel. Ces relations sont le premier et deuxième principe de la thermodynamique.

Premier principe de la thermodynamique.

Le premier principe est un bilan d'énergie qui exprime la possibilité de transformation de chaleur en énergie mécanique et vice-versa.

Considérons encore le solide  $V$  de frontière  $\partial V$ . Soit  $E$  l'énergie interne du système,  $K$  l'énergie cinétique,  $Q$  la puissance calorifique reçue et  $P_e$  la puissance des efforts extérieurs pour les déplacements et les efforts réels. Le premier principe de la thermodynamique est alors exprimé par:

$$(12) \quad \dot{E} + \dot{K} = P_e + Q$$

Le premier principe peut aussi s'exprimer par de relations locales, c'est à dire définies en chaque point matériel du solide. Etant donné qu'on se place dans le cadre de petites perturbations on peut décrire les termes introduits dans (12) par:

$$(13) \quad \begin{aligned} E &= \int_V \rho e \, dV \\ K &= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{U}} \cdot \dot{\mathbf{U}} \, dV \\ Q &= \int_V \mathbf{r} \, dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dV \end{aligned}$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $e$  la densité d'énergie interne,  $r$  la densité volumique de taux de chaleur reçu,  $\mathbf{q}$  est le vecteur courant de chaleur et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à  $\partial V$ .

Alors à l'aide du principe de puissances virtuelles et compte tenu du fait que le premier principe est vérifié quelque soit le volume  $V$  considéré, on obtient:

$$(14) \quad \rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + r - \text{div } \mathbf{q}.$$

Deuxième principe de la thermodynamique

On introduit deux nouvelles variables, la température  $T$  et l'entropie  $S$ . L'entropie exprime la variation d'énergie associée à une variation de température. Le seconde principe postule alors:

$$(15) \quad \dot{S} \geq \int_V \frac{r}{T} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dV$$

Si l'on exprime le seconde principe sous sa forme locale et à l'aide du premier principe on obtient l'inégalité dite "de Clausius-Duhem" qui s'écrit de la façon suivante:

$$(16) \quad \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{W} + S \dot{T}) - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad } T}{T} \geq 0$$

où  $S$  est la densité volumique d'entropie et  $W$  est une nouvelle variable appelé énergie libre et définie par:

$$(17) \quad W = e - T S$$

Le seconde principe permet d'introduire la différence entre transformations réversibles (lorsque (16) est une égalité stricte) et irréversibles ((16) est une inégalité).

On a jusqu'à maintenant introduit les variables suivantes:  $U, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, T, \mathbf{q}, S, W$ , on a introduit aussi 3 équations (le principe de puissances virtuelles, la relation déplacements-déformations, et le premier principe) et une inégalité (le seconde principe). A ces relations il faut donc ajouter le nombre nécessaire de lois de comportement, dont (11) devient alors un cas particulier, pour définir complètement le milieu considéré. Ces lois doivent vérifier le second principe. Dans le paragraphe suivant on décrira une méthode systématique pour formuler des

lois de comportement et on précisera les conditions pour que ces lois vérifient a priori le second principe.

#### 1.4 Méthode de l'état local.

La relation (11) constitue une représentation fonctionnelle de la loi de comportement puisque elle lie la contrainte à l'instant  $t$  à l'histoire de déformations jusqu'à l'instant  $t$ . Une autre représentation possible consiste à substituer la dépendance de la contrainte par rapport à l'histoire de déformations par la dépendance par rapport aux "conséquences" à l'instant  $t$  de cette histoire, (par exemple, le glissement de dislocations, la modification de la configuration de microvides et microfissures, etc). Cela conduit, moyennant une représentation macroscopique homogénéisée de ces "conséquences", à la formulation avec variables internes ou "formulation thermodynamique" des lois de comportement. Cette deuxième voie présente souvent des avantages du point de vue des applications.

On postule alors l'existence d'un nombre  $n$  de paramètres  $V_i$   $i = 1, n$  appelés variables internes, tel que ces variables, avec la déformation  $\epsilon$  et la température  $T$ , définissent l'état du solide considéré à chaque instant  $t$ . Autrement dit on postule que les grandeurs définies précédemment,  $\sigma, T, q, S, W$ , sont fonctions connues de  $V_i, \epsilon$  et  $T$ . Ces dernières sont dénommées variables d'état. Les variables internes doivent donc posséder un sens physique bien précis puisque elles sont censées caractériser, avec la température et la déformation, les "conséquences" de la histoire de déformation sur la microstructure du matériau.

Une des manières de décrire les propriétés du milieu consiste à donner un potentiel thermodynamique. On choisie alors comme potentiel l'énergie libre  $W$  (on pourrait prendre d'autres grandeurs scalaires) et on postule l'existence d'une fonction connue et différentiable des variables d'état qui donne les valeurs de l'énergie libre lorsque les valeurs des variables d'état sont connues:

$$(18) \quad W = W(\epsilon, T, V_i)$$

La fonction  $W$  est par hypothèse concave par rapport à  $T$  et convexe par rapport aux autres variables d'état.

Si on introduit la définition (18) du potentiel énergie libre dans l'inégalité (16), on obtient l'expression suivante:

$$(19) \quad \left( \sigma - \rho \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \right) : \dot{\epsilon} - \rho \left( S + \frac{\partial W}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial W}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{q \operatorname{grad} T}{T} \geq 0$$

On suppose maintenant que les processus de déformation géométrique du solide sont complètement découplés des transformations thermiques. Cela implique que des processus de déformation à température constante et uniforme sont possibles. Par la suite on s'intéressera exclusivement à ces processus et par conséquent dans le reste de ce texte, on supposera  $\dot{T} = 0$  et  $\operatorname{grad} T = 0$ .

On supposera également qu'il est possible d'imaginer de transformations géométriques particulières complètement découplées des mécanismes décrits par les variables internes. C'est à dire qu'il existe de processus de déformation sans modification des variables internes. On doit alors avoir, pour que l'inégalité (19) soit vérifiée pour tous les processus possibles, les relations suivantes:

$$(20) \quad \sigma = \rho \frac{\partial W}{\partial \epsilon}$$

$$(21) \quad \dot{\Phi} = - \rho \frac{\partial W}{\partial V_k} \dot{V}_k \geq 0$$

On introduit la notation suivante:

$$(22) \quad A_k = - \rho \frac{\partial W}{\partial V_k}$$

Et on dit, par analogie avec l'équation (20) que  $A_k$  est la "force thermodynamique" associée à la variable interne  $V_k$ . Les équations (20) et (22) sont appelées "lois d'état". La quantité  $\dot{\Phi}$  définie dans (21) est dénommée "dissipation intrinsèque".

L'état étant défini à l'instant  $t$  par  $\epsilon$  et les variables internes, il faut maintenant caractériser "la vitesse d'évolution" de l'état au même instant de telle façon que la dissipation intrinsèque soit positive. Cela peut être réalisé à l'aide d'un autre potentiel. On postule donc l'existence d'un potentiel, fonction des forces thermodynamiques, les variables d'état pouvant éventuellement intervenir comme paramètres:

$$(23) \quad \vartheta^\circ = \vartheta^\circ(A_k)$$

Ce potentiel est une fonction convexe, positive, semi-continue inférieurement et nulle pour  $A_k = 0$

L'évolution des variables internes est alors définie par:

$$(24) \quad \dot{V}_k \in \partial_k \vartheta^\circ$$

Où le symbole  $\partial_k \vartheta^\circ$  indique le sousdifférentiel (voir le N° 2.3 de ce chapitre) du potentiel  $\vartheta^\circ$  par rapport à la variable  $V_k$ . Les expressions (24) sont appelées "lois complémentaires".

On peut alors prouver, à partir de la convexité du potentiel (inégalité (18b) du N°2.3 de ce chapitre) et compte tenu du fait que  $\vartheta^\circ(0) = 0$ , que l'inégalité (21) est automatiquement satisfaite.

## 2. Rappels d'analyse convexe et de théorie d'optimisation.

### 2.1 Opérateurs non-linéaires, fonctionnelles, produit scalaire.

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces vectoriels topologiques et  $f$  une application dont le domaine est  $X$  et à valeurs dans  $Y$ . On appelle  $f$  un opérateur de  $X$  en  $Y$  et on écrit  $f: X \rightarrow Y$ . Un cas particulier très important est celui où les valeurs de  $f$  sont de nombres réels ( $Y = \mathbb{R}$ ),  $f$  est alors dénommé fonctionnelle.

Un opérateur est dit linéaire si:

$$(1) \quad \begin{aligned} f(\alpha x) &= \alpha f(x) & \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad x \in X \\ f(x_1 + x_2) &= f(x_1) + f(x_2) & \forall x_1, x_2 \in X \end{aligned}$$

Si l'une de ces propriétés n'est pas vérifiée alors l'opérateur est dit non-linéaire. ■

L'espace vectoriel de toutes les fonctionnelles linéaires continues définies sur  $X$ , est appelé ensemble dual de  $X$  et sera noté  $X^\circ$ . Soit  $l \in X^\circ$  on utilise alors la notation suivante:

$$(2) \quad l(x) = (l, x)$$

En fait, la forme  $(l, x)$  peut être vue comme une forme bilinéaire de  $X^0 \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , cette forme bilinéaire est dénommée produit scalaire de dualité de  $l$  et  $x$

## 2.2 Différentiation d'opérateurs non-linéaires.

Soit  $f$  un opérateur non-linéaire défini sur un espace de Banach  $X$ , à valeurs dans un espace de Banach  $Y$ . Supposons  $f$  défini dans un voisinage  $S$  d'un point  $x_0$ . On dit que l'opérateur  $f$  est différentiable au point  $x_0$  au sens de Fréchet, s'il existe un opérateur linéaire borné  $A : X \rightarrow Y$  tel que pour tout  $x \in S$  on ait:

$$(3) \quad f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x - x_0)$$

où

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\omega(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} = 0$$

et  $\|y\|_Y$  indique la norme de  $y$  en  $Y$  et  $\|x\|_X$  la norme de  $x$  en  $X$ .

L'opérateur  $A$  en (3) s'appelle dérivée de Fréchet de  $f$  au point  $x_0$  et sera noté  $f_{,x}(x_0)$ . Si on introduit la notation  $x - x_0 = \Delta x$ , l'expression (3) devient:

$$(4) \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f_{,x}(x_0) \Delta x + \omega(\Delta x).$$

La quantité  $f_{,x}(x_0) \Delta x$  s'appelle différentielle de Fréchet en  $x_0$  pour l'accroissement  $\Delta x$ . On peut remarquer que la différentielle est un opérateur linéaire et continu en  $\Delta x$ .

Dans les cas où l'opérateur  $f$  est une fonctionnelle, on utilisera alternativement la notation suivante:

$$(5) \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (f_{,x}(x_0), \Delta x) + \omega(\Delta x).$$

où  $(\cdot, \cdot)$  indique le produit scalaire sur  $X^0 \times X$  ■

D'autres définitions de la différentielle d'un opérateur non-linéaire sont aussi possibles, par exemple: Soit  $f$  un opérateur de  $X$  en  $Y$ . La quantité:

$$(6) \quad f_{,x}(x_0) \Delta x = \frac{\partial}{\partial t} [f(x_0 + t \Delta x)]_{t=0}$$

où  $|t|$  est suffisamment petit pour que  $x_0 + t \Delta x \in S$

est appelée différentielle au sens de Gâteaux au point  $x_0$ , dans la direction  $\Delta x$  et l'opérateur  $f_{,x}(x_0)$  dérivée de Gâteaux de  $f$  au point  $x_0$ .

Il peut être prouvé (Trénoguine [TRE85]) que tout opérateur différentiable au sens de Fréchet est différentiable au sens de Gâteaux et que les deux différentielles coïncident. La réciproque n'est pas vérifiée, il peut seulement être prouvé (Vainberg [VAI64]) que lorsque la dérivée au sens de Gâteaux est, au point  $x_0$ , un opérateur linéaire de  $X \rightarrow Y$ , la dérivée de Fréchet existe et coïncide avec la dérivée de Gâteaux. ■

On peut aussi définir des dérivées et différentielles successives et différentier des opérateurs non-linéaires dépendant de deux variables: Soit l'opérateur  $f_{,x}(x) : X \rightarrow X^0$  différentiable en  $x_0$ , la quantité:

$$(7) \quad f_{,xx}(x_0) \Delta x \Delta x = \frac{\partial}{\partial t} [f_{,x}(x_0 + t \Delta x) \Delta x]_{t=0}$$

s'appelle alors différentielle seconde (au sens de Gâteaux) de  $f$  en  $x_0$  et l'opérateur  $f_{,xx}$  dérivée seconde (de Gâteaux). Les dérivées et différentielles au sens de Fréchet sont définies d'une manière analogue.

Lorsque  $f$  est une fonctionnelle, on utilisera alternativement la notation suivante:

$$(8) \quad f_{,xx}(x_0) \Delta x \Delta x = (f_{,xx}(x_0) \Delta x, \Delta x) \quad \blacksquare$$

Soient  $X, Y$  et  $Z$  trois espaces de Banach. Considérons un opérateur  $f$  dépendant de deux variables  $x \in X$  et  $y \in Y$  et à valeurs dans  $Z$ . On dit que l'opérateur  $f$  est différentiable au point  $(x_0, y_0)$ , au sens de Fréchet, s'il existe deux opérateurs linéaires bornées  $A: X \rightarrow Z$  et  $B: Y \rightarrow Z$  tels que pour tout  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in S$  on ait:

$$(9) \quad f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A \Delta x + B \Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y).$$

Les opérateurs A et B seront notés:  $f_{,x}(x_0, y_0)$  et  $f_{,y}(x_0, y_0)$  et ils sont appelés dérivées partielles de Fréchet. Les dérivées partielles de Gâteaux sont définies d'une manière analogue.

La définition de la différentielle seconde de f en  $(x_0, y_0)$  s'ensuit des définitions précédentes. On se limitera alors à noter que l'on utilisera pour exprimer la différentielle seconde, la notation suivante:

soit  $U = X \times Y$  alors:

$$(10) \quad f_{,uu}(u_0) \Delta u \Delta u = [\Delta x, \Delta y] \begin{bmatrix} f_{,xx} & f_{,xy} \\ f_{,yx} & f_{,yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

### 2.3 Ensembles et fonctionnelles convexes, opérateurs monotones, sousdifférentiels.

Un ensemble C dans un espace vectoriel X est dit convexe si pour deux éléments quelconques  $x_1, x_2 \in C$  et pour tout  $t \in [0, 1]$  on a:

$$(11) \quad t x_1 + (1-t) x_2 \in C$$

■

Soit X un espace vectoriel réel et f une fonctionnelle défini sur un ensemble convexe C de X et à valeurs sur  $\bar{\mathbb{R}}$ . C'est à dire une application pouvant prendre les valeurs  $+\infty$  et  $-\infty$ . La fonctionnelle f est dite convexe, si pour deux éléments quelconques  $x_1, x_2 \in C$  et pour tout  $t \in [0, 1]$  on a:

$$(12) \quad f(t x_1 + (1-t) x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

chaque fois que le second membre est défini. Si l'égalité dans (12) a lieu uniquement pour  $x_1 = x_2$ , alors la fonctionnelle f est dite strictement convexe.

On peut déduire par récurrence que si f est convexe alors:

$$(13) \quad f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) \quad \forall x_i \in C, \quad t_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n t_i = 1 \quad \blacksquare$$

Lorsque la fonctionnelle  $f$  est différentiable au sens de Gâteaux on peut définir alternativement les fonctionnelles convexes grâce au résultat suivant: Soit  $f$  une fonctionnelle différentiable au sens de Gâteaux et définie sur un ensemble convexe  $C$ . On peut alors montrer (Ekeland et Temam [EKE74]) que les propositions suivantes sont équivalentes:

$$(14) \quad \begin{aligned} & (a) \text{ } f \text{ est convexe} \\ & (b) f(x^*) - f(x) - (f'_x(x), x^* - x) \geq 0 \quad \forall x, x^* \in C \end{aligned}$$

Si l'égalité dans (b) est vérifiée uniquement pour  $x = x^*$ , alors on peut substituer (a) par "f est strictement convexe"  $\blacksquare$

On peut remarquer que  $f$  peut prendre les valeurs  $+\infty$  et  $-\infty$ , cela permet de définir la fonction indicatrice d'un ensemble  $C$ . Soit  $C$  un sous-ensemble de l'espace vectoriel  $X$ , alors la fonction indicatrice de  $C$ , notée  $\Psi_C$ , est définie par:

$$(15) \quad \Psi_C = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble  $C$  est convexe si et seulement si la fonction indicatrice correspondante est une fonction convexe. Les fonctions indicatrices sont utilisées en théorie d'optimisation, pour substituer les problèmes de minimisation sur un sous ensemble par une minimisation sur tout l'espace vectoriel. Elles sont utilisées en mécanique, pour formuler les lois de comportement dites "indépendantes du temps".  $\blacksquare$

La notion de fonctionnelle convexe est étroitement liée à celle d'opérateur monotone: l'opérateur  $A: X \rightarrow X^*$  est appelé "opérateur monotone" si pour tous  $x_1, x_2 \in X$  on a:

$$(16) \quad (A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2) \geq 0$$

L'opérateur  $A(x)$  est dit "strictement monotone" si l'égalité dans (16) ne peut avoir lieu que pour  $x_1 = x_2$ .

La relation entre fonctionnelle convexe et opérateur monotone est montrée par le résultat suivant: Soit  $f$  une fonctionnelle différentiable au sens de Gâteaux dans un ensemble convexe  $C$ . On peut alors montrer (Ekeland et Temam [EKE74]) que les propositions suivantes sont équivalentes:

- (17) (a) La fonctionnelle  $f$  est (strictement) convexe sur  $C$   
 (b) L'opérateur  $f_{,x}(x)$  est (strictement) monotone sur  $C$  ■

Une extension de la notion de différentielle pour les fonctionnelles convexes, est le concept de sous-différentiel. Soit  $f$  une fonctionnelle définie sur un sous-ensemble  $C$  d'un espace vectoriel  $X$ . On dit que l'élément  $z \in X^0$  appartient au sous-différentiel de  $f$  en  $x_1$  si :

- (18) (a)  $f(x_1)$  est fini  
 (b)  $f(x^*) - f(x_1) - (z, x^* - x_1) \geq 0 \quad \forall x^* \in C$

et on note:  $z \in \partial f(x_1)$ . Si  $\partial f(x_1) \neq \emptyset$ , on dit que la fonction  $f$  est sous-différentiable en  $x_1$ . ■

On peut remarquer la "ressemblance" des inégalités (14b) et (18b). En fait la notion de sous-différentiel est plus générale que celle de différentielle comme le montre l'exemple de la figure 1.

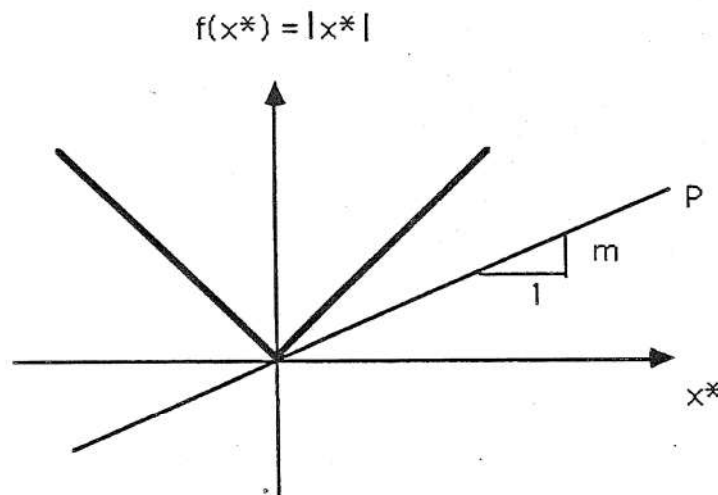


figure 1

graphe de la fonction  $f(x) = |x|$ .

La fonction  $f(x) = |x|$  indiquée en figure 1 n'est pas dérivable au point  $x = 0$ , cependant elle est sous-différentiable. En effet, la droite P de pente m de la figure 1 est la représentation graphique du terme  $f(x_1) + (m, x^* - x_1)$  dans l'inégalité (18b). Si maintenant on choisit  $m \in M = \{ m \in \mathbb{R} / -1 \leq m \leq 1 \}$  on constate que la droite p passe toujours "en dessous" du graphe de  $f(x^*)$  et que par conséquent l'inégalité (18b) est vérifiée. On a donc que  $f(x) = |x|$  est sous-différentiable en  $x=0$  et que le sous-différentiel est représenté par l'ensemble M.

Le résultat de cet exemple est généralisé par la proposition suivante: Soit f une fonctionnelle convexe, finie et continue au point  $x_0$ , alors  $\partial f(x_0) \neq \emptyset$  (voir Ekeland et Temam [EKE74]) . ■

L'inégalité (14b) et l'unicité de la dérivée de Gâteaux (voir Trénogine[TRE85]) permettent de prouver le résultat suivant: Soit f une fonction convexe et définie sur un sous-ensemble C d'un espace de Banach X. si f est différentiable au sens de Gâteaux en  $x_1 \in C$ , alors f est sous-différentiable en  $x_1$  et

$$(19) \quad \partial f(x_1) = \{ f_{,x}(x_1) \}$$

Réciproquement si au point  $x_1 \in C$ , f est finie, continue et le sous-différentiel est constitué d'un seul élément  $\{z\}$ , alors on peut prouver (voir Ekeland et Temam [EKE74]) que f est différentiable au sens de Gâteaux au point  $x_1$  et que:

$$(20) \quad z = f_{,x}(x_1) \quad \blacksquare$$

## 2.4 Minimisation de fonctionnelles convexes.

Soit f une fonctionnelle défini sur un espace vectoriel X. On considère le problème suivant:

$$(21) \quad \text{Trouver } x \in X / \quad f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x^* \in X.$$

Le problème (21) est dit "problème de minimisation sans contrainte" et l'inégalité qui intervient dans (21) "inégalité variationnelle".

La notion de sous-différentiel trouve alors tout son sens grâce au résultat suivant: L'élément  $x_0 \in X$  est une solution à (21) si et seulement si:

$$(22) \quad 0 \in \partial f(x_0)$$

ce résultat est une conséquence directe de la définition (18) du sous-différentiel. L'expression (22) est appelée "condition de minimisation de  $f$ ". ■

Soit  $f$  une fonctionnelle convexe et continue définie sur un espace vectoriel  $X$  et  $C$  un sous-ensemble de  $X$ . On considère le problème suivant:

$$(23) \quad \text{Trouver } x \in C / \quad f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x^* \in C$$

Le problème (23) est dit "problème de minimisation avec contrainte". On peut dans ce cas substituer le problème (23) par un problème de minimisation sans contrainte grâce à la fonction indicatrice de  $C$ . En effet, on introduit la fonction suivante:

$$(24) \quad F(x) = f(x) + \Psi_C(x)$$

et on considère maintenant le problème suivant:

$$(25) \quad \text{Trouver } x \in X / \quad F(x) \leq F(x^*) \quad \forall x^* \in X$$

Il est clair que (23) et (24) sont équivalentes. La condition de minimisation est alors (la linéarité de l'opérateur sous-différentiel est vérifié dans ce cas particulier, voir Ekeland et Temam [EKE74]):

$$(26) \quad 0 \in f_{,x}(x_0) + \partial \Psi_C(x_0)$$

La condition (26) peut être écrite autrement si l'on tient compte de la définition (14b) de fonctionnelle convexe. Il est alors évident qu'une condition de minimisation est:

$$(27) \quad \begin{aligned} &x_0 \in C \\ &(f_{,x}(x_0), x^* - x_0) \geq 0 \quad \forall x^* \in C \end{aligned}$$

(26) et (27) sont, bien entendu, équivalentes ■

Si l'ensemble  $C$  dans (27) est un sous-espace vectoriel, alors  $x^* - x_0 = \hat{x} \in C$   
 $\forall x^*, x_0 \in C$  alors (27) devient:

$$(28) \quad \begin{array}{l} x_0 \in C \\ (f_{,x}(x_0), \hat{x}) \geq 0 \end{array} \quad \forall x^* \in C$$

or si  $\hat{x} \in C$  alors  $-\hat{x} \in C$  également et par conséquent la condition de minimisation dans ce cas particulier est la suivante:

$$(29) \quad \begin{array}{l} x_0 \in C \\ (f_{,x}(x_0), \hat{x}) = 0 \end{array} \quad \forall \hat{x} \in C$$

## 2.5 Equations généralisées.

Une équation généralisée est une expression du type:

$$(30) \quad 0 \in A(x) + T(x)$$

où  $A(x)$  est une fonction de  $R^K$  sur  $R^K$  et  $T(x)$  est une multifonction c'est à dire une application qui à chaque élément  $x \in R^K$  associe un ensemble dans l'espace  $R^K$ . Par exemple, la condition de minimisation avec contrainte d'une fonction convexe (26) est une équation généralisée avec:

$$(31) \quad \begin{array}{l} A(x) = f_{,x}(x) \\ T(x) = \partial \Psi_c(x) \end{array}$$

Si la fonction  $A(x)$  est linéaire, on dit que (30) est une "équation généralisée linéaire" ■

On s'intéresse au comportement de l'ensemble de solutions de l'expression (30) lorsque  $T(x)$  est une fonction indicatrice d'un convexe  $C$  et l'on introduit des petites perturbations dans la fonction  $A(x)$ . Pour schématiser ces perturbations on écrira l'équation (30) de la façon suivante:

$$(32) \quad 0 \in A(x,p) + \partial \Psi_c(x)$$

où  $A(x,p): R^K \times P \longrightarrow R^K$

$p$  est donc une variable caractérisant les paramètres de la fonction  $A(x)$  et appartenant à un certain espace topologique  $P$ . Si la fonction  $A(x,p)$  est deux fois différentiable par rapport à  $x$  dans un ensemble  $\Omega$ , on peut introduire les notations suivantes:

- On dit que l'équation (32) vérifie "la condition suffisante de second ordre" au point  $(x_0, p_0)$  avec module  $\nu$  si:

$$(33) \quad A_{xx}(x_0, p_0) h h \geq \nu \|h\|^2 \quad \forall h \in \beta(x_0)$$

où  $\beta(x_0)$  est le cône tangent à  $C$  (C'est à dire le cône polaire au cône normal  $\partial\Psi_c(x_0)$ ).

- On appelle  $S(p)$  l'ensemble de solutions de l'équation (32) à  $p$  fixe, c'est à dire:

$$(34) \quad S(p) = \{ x / 0 \in A(x,p) + \partial\Psi_c(x) \}$$

Si la condition de second ordre pour  $p = p_0$  et  $x = x_0$  est vérifiée, on peut alors prouver (Robinson [ROB79],[ROB82]):

- a) Un théorème d'existence de la solution pour le problème perturbé:

Pour chaque voisinage  $M$  de  $x_0$  dans  $\Omega$ , il y a un voisinage  $N$  de  $p_0$ , tel que si  $p \in N$ , alors l'ensemble  $S(p)$  n'est pas vide.

- b) Si  $A(x)$  est le gradient d'une fonction  $f$  alors  $S(p_0)$  est un ensemble de minima locaux de la fonction  $f$  avec la contrainte  $x \in C$ .

$$S(p_0) = ML(p_0)$$

où

$$ML(p) = \{ x \in C / f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x^* \in C \cap \xi \} \quad (\xi \text{ étant un voisinage de } x_0)$$

- c) Un théorème de stabilité.

Il existe un voisinage  $M_1$  de  $x_0$  et  $N_1$  de  $P_0$ , tel que l'application  $S(p) \cap ML(p)$  est continue.

---

## II Modélisation de l'élasticité couplée à l'endommagement

---

### 1. Potentiel thermodynamique. Lois d'état.

Du point de vue phénoménologique, l'endommagement est le vocable utilisé pour définir le processus de détérioration des propriétés mécaniques du matériau sous l'action de sollicitations mécaniques ou à cause d'un environnement défavorable. Dans les expériences, on constate en effet (Lemaitre et Chaboche [LEM85]), une chute de la raideur élastique, des variations des caractéristiques de l'écrouissage monotone et cyclique en plasticité, le fluage dit "tertiaire" dans les métaux sollicités à hautes températures, etc. Du point de vue micromécanique ces phénomènes sont supposés être la conséquence de l'apparition et développement de microvides et microfissures.

La modélisation de l'endommagement à l'aide des variables internes a été proposée pour la première fois par Kachanov dans le cadre de la rupture par fluage des métaux. Cette idée a été reprise par Lemaitre-Chaboche, Leckie, Murakami et d'autres pour modéliser le processus de détérioration d'autres propriétés mécaniques dans différents matériaux. Dans ces modèles, l'endommagement est caractérisé par une variable interne que l'on notera  $D$  et qui peut être représentée par un ensemble de paramètres scalaires, un tenseur symétrique de second ordre, un tenseur de quatrième ordre, etc. Dans le cas général  $D$  appartient à un ensemble convexe qui sera noté  $\Omega$ . Cette variable interne est couplée, dans le potentiel thermodynamique, à la variable ou les variables internes qui décrivent le mécanisme dont on souhaite caractériser la détérioration.

Dans le cas de l'élasticité couplée à l'endommagement, il s'agit de caractériser la chute de la raideur élastique sous sollicitations mécaniques. Le potentiel thermodynamique dépend alors de deux variables d'état, le tenseur de déformation de Cauchy  $\mathcal{E}$  et la variable d'endommagement  $D$ . Par la suite on supposera que l'endommagement est caractérisé par un ensemble de paramètres scalaires, on a donc  $D = (D_1, D_2, D_3, \dots, D_n)$ . La valeur  $D = 0$  représente l'état du matériau "vierge" ou non sollicité. L'ensemble  $\Omega$  de valeurs d'endommagement admissibles est donc un sous ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n$ . Le potentiel thermodynamique  $W$  est alors le suivant:

$$(1) \quad W = W(\mathcal{E}, D)$$

Ce potentiel est une fonction convexe par rapport à chaque variable (lorsque l'autre reste constante), et continûment dérivable.

Le potentiel thermodynamique étant donné, on peut en déduire les lois d'état, c'est à dire, la loi d'élasticité et la définition de la force thermodynamique associée à l'endommagement qui sera notée  $Y$ :

$$(2) \quad \sigma = \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}}$$

$$(3) \quad Y = - \frac{\partial W}{\partial D} \quad \blacksquare$$

Exemple:

Un cas particulièrement important dans les applications est celui où l'énergie libre  $W$  est donnée par:

$$(4) \quad W = \frac{1}{2} \mathbb{K}(D) : \mathcal{E} : \mathcal{E}$$

où  $\mathbb{K}$  est un opérateur de quatrième ordre défini positif, fonction différentiable de l'endommagement, appelé opérateur d'Hooke. Cet opérateur présente les symétries suivantes:

$$(5) \quad K_{ijkl} = K_{klij} = K_{lkij} = K_{lkji}$$

L'expression de l'opérateur d'Hooke en fonction de  $D$  est usuellement obtenue à partir de considérations micromécaniques dont l'exemple le plus simple est l'hypothèse "d'équivalence en déformation" (Lemaitre et Chaboche [LEM85]):

Soit  $S$  l'aire d'une section d'un élément de volume repérée par sa normale  $\mathbf{n}$  et  $S_d$  l'aire effective tenant compte de l'aire de microfissures et des concentrations de contraintes respectives. Alors on introduit la définition suivante:

$$(6) \quad D_n = \frac{S - S_d}{S}$$

On constate que  $D_n$  ne peut prendre que des valeurs comprises entre 0 et 1 et qui dépende de la direction  $\mathbf{n}$  choisie. Dans beaucoup d'applications on suppose que les cavités et microfissures sont distribuées de façon uniforme dans toutes les directions alors on peut utiliser un scalaire pour caractériser l'endommagement.

$$(7) \quad D_n = D \quad \forall \mathbf{n}$$

Soit  $\sigma_n$  la contrainte dans la direction  $\mathbf{n}$ , définie classiquement par :

$$(8) \quad \sigma_n = \frac{f}{S}$$

où  $f$  est la force surfaciques applique sur la face  $\mathbf{n}$  de l'élément de volume. On introduit alors la contrainte effective  $\bar{\sigma}_n$ , dans la direction  $\mathbf{n}$ , définie par:

$$(9) \quad \bar{\sigma}_n = \sigma_n \frac{S}{S_d} = \frac{\sigma_n}{(1-D)}$$

Alors l'hypothèse d'équivalence en déformation, établit que:

"Tout comportement à la déformation, unidimensionnel ou tridimensionnel d'un matériau endommagé est traduit par les lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective" (Lemaitre et Chaboche [LEM85]).

Cela implique dans le cas de l'élasticité linéaire unidimensionnelle la loi suivante:

$$(10) \quad \epsilon = \frac{\sigma}{(1-D)E}$$

Par conséquent, l'opérateur d'Hooke dans le cas tridimensionnel est donné par:

$$(8) \quad \mathbb{K}(D) = (1-D) \mathbb{K}_0$$

où  $\mathbb{K}_0$  est une constante du matériau.

D'autres méthodes pour l'obtention de  $\mathbb{K}(D)$  sont, bien entendu, possibles: hypothèse d'équivalence en énergie (Cordebois et Sidoroff [COR82]), utilisation de techniques d'homogénéisation (Marigo [MAR85], Suquet [SUQ82]), etc.

## 2. Potentiel de dissipation - lois complémentaires.

L'objet de ce paragraphe est de présenter les différents lois d'endommagement qui seront considérés par la suite. Il s'agit exclusivement des modèles dits "indépendants du temps". D'autres classes de modèles, notamment les modèles d'endommagement de fatigue ou les modèles de "viscoendommagement" n'ont pas été considérés. Le lecteur intéressé pourra consulter, par exemple Marigo [MAR85] pour un modèle de fatigue en élasticité couplée à l'endommagement et Simo et Ju [SIM87] et leurs références pour la description des modèles d'endommagement dépendant du temps.

### 2.1 Formulation incrémentale des modèles indépendants du temps.

Nous décrirons assez brièvement cette formulation qui a été largement étudiée dans la littérature (Cordebois [COR82], Marigo [MAR81]). La présentation ici donnée n'est guère différente de celle de [MAR81].

Le potentiel dual est dans ce cas la fonction indicatrice du convexe d'élasticité  $\underline{C}(D)$ .

$$(12) \quad \Psi_{\underline{C}(D)}(\mathbf{Y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{Y} \in \underline{C}(D) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le convexe d'élasticité est défini par:

$$(13) \quad \underline{C}(D) = \{ \mathbf{Y} / g(\mathbf{Y}) \leq R(D) \}$$

où  $g$  et  $R$  sont deux fonctions scalaires tels que  $0 \in C(D)$  et on suppose que le produit  $\frac{\partial g}{\partial Y} \cdot \frac{\partial R}{\partial D}$  est strictement positif.

La loi d'évolution de l'endommagement est donnée par la loi complémentaire (14) et par la condition de consistance (15)

$$(14) \quad -\dot{D} \in \partial \Psi_{c(D)}(Y)$$

$$(15) \quad \dot{g}(Y) - \dot{R}(D) = 0$$

Lorsque  $g$  et  $R$  sont différentiables les relations (14) et (15) sont équivalentes à:

$$(16) \quad \dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial Y}$$

où  $\dot{\lambda}$  est un scalaire d'expression:

$$(17) \quad \dot{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } g(Y) - R(D) < 0 \text{ ou } \dot{g}(Y) - \dot{R}(D) < 0 \\ \frac{\frac{\partial g}{\partial Y} \cdot \dot{Y}}{\frac{\partial g}{\partial Y} \cdot \frac{\partial R}{\partial D}} & \text{si } g(Y) - R(D) = 0 \text{ et } \dot{g}(Y) - \dot{R}(D) = 0 \end{cases}$$

Le symbole  $\cdot$  indique un produit contracté sur le même nombre d'indices de  $D$ .

L'analogie avec les modèles de plasticité associée est évidente: L'évolution de l'endommagement est possible seulement si le point  $Y$  se trouve sur la frontière du convexe, le comportement à l'intérieur, étant purement élastique.

A la différence des modèles de plasticité il faut ajouter ici un critère de rupture locale:

$$(18) \quad D \in D_c$$

Où  $D_c$  est l'ensemble de valeurs d'endommagement tels que  $D \in D_c$  implique:

$$(19) \quad W(\varepsilon, D) = 0 \quad \forall \varepsilon$$

Le comportement du matériau est dans ces conditions:

$$(20) \quad \text{si } \mathbf{D} \in D_c \quad \text{alors} \quad \dot{\mathbf{D}} = 0$$

Remarques:

i) Si le convexe d'élasticité (13) ne dépend pas de  $\mathbf{D}$  alors la condition de consistance (15) est une conséquence de la loi complémentaire (14).

ii) Il est possible d'obtenir les lois d'évolution (16) et (20) à partir d'un seul potentiel en modifiant le convexe d'élasticité par:

$$(21) \quad \underline{C}(\mathbf{D}) = \begin{cases} \{ \mathbf{Y} / g(\mathbf{Y}) \leq R(\mathbf{D}) \} & \text{si } \mathbf{D} \notin D_c \\ \mathbb{R}^n & \text{si } \mathbf{D} \in D_c \end{cases}$$

Les lois (16) et (20) sont maintenant exprimées par la relation unique:

$$(22) \quad -\dot{\mathbf{D}} \in \partial \Psi_{\underline{C}(\mathbf{D})}(\mathbf{Y})$$

iii) L'existence du potentiel de dissipation (12) est suffisante pour vérifier à priori le second principe de la thermodynamique (voir chapitre 1).

## 2.2 Formulation fonctionnelle des modèles indépendantes du temps.

### 2.2.1 Introduction

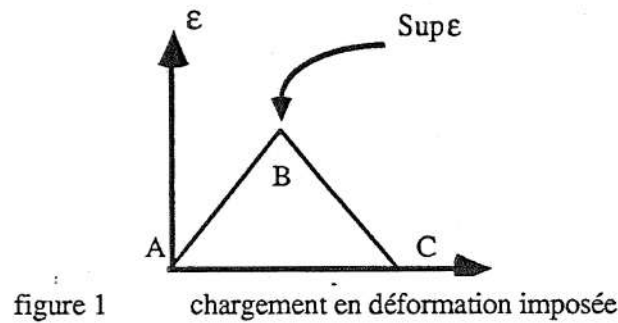
Dans cette formulation, la loi d'évolution de l'endommagement est substituée par une fonctionnelle qui lie la valeur de l'endommagement à l'instant considéré à l'histoire de déformations. Dans les modèles utilisés dans les applications, cette fonctionnelle possède une forme remarquablement simple. Par exemple dans le cas où  $\mathbf{D}$  est un scalaire:

$$(23) \quad D(t) = f\left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)\| \right)$$

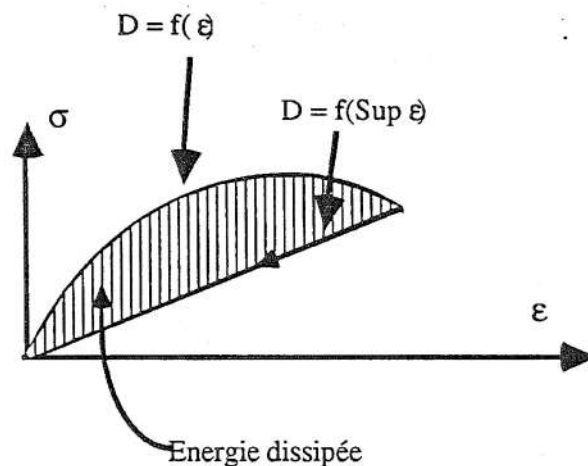
où  $f$  est une fonction à valeurs positives et le symbol  $||\mathbf{X}||$  indique la norme de  $\mathbf{X}$ .

Nous décrirons les lois d'endommagement du type (23), en utilisant un formalisme similaire à celui de la méthode de l'état local présenté lors du chapitre I, c'est à dire à l'aide d'un "potentiel de dissipation" auquel on donnera une interprétation mécanique. Cela permettra de dégager les caractéristiques essentielles de ce type de modèles sans avoir besoin de considérer chaque modèle particulier.

Avant de formuler la loi complémentaire dans le cas général, considérons d'abord le cas d'un élément de volume unidimensionnel ( $\epsilon$  et  $D$  scalaires) soumis au cycle du chargement en déplacement indiqué en figure 1



Le chargement indiqué donne lieu à la courbe d'écrouissage, indiquée en figure 2



Le potentiel qui sera utilisé pour décrire la loi complémentaire en formulation fonctionnelle est l'énergie dissipée. Cette énergie est donnée par la zone hachurée indiquée en figure 2. Alors l'énergie dissipée pendant le cycle ABC peut s'exprimer comme:

$$(24) \quad \Phi = \int_0^{\text{Sup } \varepsilon} \sigma_{ch} d\varepsilon - \int_0^{\text{Sup } \varepsilon} \sigma_{dc} d\varepsilon$$

Où  $\sigma_{ch}$  est la contrainte en chargement croissant et  $\sigma_{dc}$  la contrainte durant la décharge. La première intégrale correspond donc au travail reçu pendant le processus de chargement et la seconde à l'énergie réversible rendue durant la décharge.

L'énergie libre de l'élément de volume, tel qu'elle à été postulée dans le paragraphe 1, est de la forme  $W = W(\varepsilon, D)$ . La contrainte  $\sigma$  est donc définie par:

$$(25) \quad \sigma = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, D)$$

D'autre part, l'endommagement est gouverné, pendant la partie du chargement en déformation croissante, par l'expression:

$$(26) \quad D = f(\varepsilon)$$

Puisque pendant la montée en charge  $\varepsilon$  et le  $\text{Sup } \varepsilon$  coïncident, par contre durant la décharge l'endommagement reste constant et égale à la valeur atteinte au point B.

$$(27) \quad D = f(\text{Sup } \varepsilon)$$

Les relations (24) (25) (26) et (27) montrent que l'énergie dissipée peut être définie comme une fonction de l'endommagement à l'instant considéré:

$$(28) \quad \Phi = \Phi(D) = \int_0^{f^{-1}(D)} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, f(\varepsilon)) d\varepsilon - W(f^{-1}(D), D)$$

Comme on pourra le constater par la suite, ce résultat est, sous certaines hypothèses, également valable dans le cas général tridimensionnelle. Les modèles en formulation fonctionnelle donnés par des relations du type de (23) appartiennent donc à la famille de modèles dits à "dissipation simple" étudiés dans un contexte différent par Fedelich et Ehrlacher [EHR88], [FED88] et [FED89].

On peut alors définir une "force associée" à l'endommagement à l'aide du potentiel énergie dissipée. On notera cette force  $Z$ , elle est donc obtenue par dérivation de la fonction  $\Phi$ .

$$(29) \quad Z = \Phi'(D) = \lim_{\Delta D \rightarrow 0} \frac{\Phi(D+\Delta D) - \Phi(D)}{\Delta D}$$

Après développement de  $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$  et passage à la limite on obtient:

$$(30) \quad \frac{d\Phi}{dD} = Z = - \frac{\partial W}{\partial D}(\text{Sup } \varepsilon, D)$$

On peut prouver que cette dernière relation est tout à fait équivalente à la fonctionnelle (23). La loi d'endommagement peut donc être formulée à partir d'un potentiel qui est dans le cas scalaire considéré, l'énergie dissipée. Dans le paragraphe suivant on considérera la loi d'endommagement dans le cas général que l'on formulera à l'aide du potentiel "énergie dissipée".

### 2.2.2 Formulation de la loi d'endommagement.

On définit le potentiel énergie dissipée  $\Phi$  comme une fonction de l'endommagement à valeurs scalaires. Dans ce qui suit on considérera de fonctions  $\Phi$  de la forme suivante:

$$(35) \quad \Phi(D) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(D_i)$$

Le potentiel choisi est une fonction, convexe, positive, coercive sur  $\Omega$ , semi-continue inférieurement, avec:

$$(36) \quad \Phi(0) = 0$$

Alors la loi d'endommagement est définie par:

$$(37) \quad Z_i(t) \in \partial_i \Phi(D(t))$$

Cette relation généralise l'expression (29) de l'exemple unidimensionnel à l'aide de la notion de sousdifférentiel (voir chapitre I). L'expression (30) sera généralisée par:

$$(38) \quad Z_i(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y_i(\epsilon(\tau); D(t))]$$

$Y_i$  étant la composante  $i$  de la force thermodynamique associée à l'endommagement. On peut remarquer que le Sup dans l'expression (38) est uniquement considéré sur l'histoire de déformations. ■

La loi d'endommagement définie par les relations (37) et (38) doit être interprétée comme suit: La valeur de  $D$  à l'instant  $t$  qui est associée à l'histoire de déformations  $\epsilon(\tau)$   $0 \leq \tau \leq t$  est celle qui correspond à la solution du système d'équations généralisées (37).

Lorsque  $\Phi$  possède les propriétés citées, on montre (voir annexe 1) qu'il existe un  $D(t)$  solution au problème (37) et que la relation (37) représente une application univoque et continue entre l'histoire de déformations  $\epsilon(\tau)$   $0 \leq \tau \leq t$  et la valeur de l'endommagement à l'instant  $t$ .

Remarque: Il y a bien entendu d'autres façons de décrire des relations telles que (23). Avec le choix retenu ici, il est possible de donner au potentiel  $\Phi$  une interprétation mécanique, c'est à dire, on montre que  $\Phi$  est effectivement l'énergie dissipée (voir annexe 2).

### 2.2.3 Exemples

#### a) Modèle d'élasticité couplée à l'endommagement pour composites 2D (Ladevèze [LAD86])

Le matériau est constitué de couches de deux constituants différents, fibres de haut module d'élasticité et résine (voir figure 3). L'endommagement est dû à une microfissuration de la résine dans la direction de fibres.

Les variables d'état sont:  $\epsilon$ , déformation totale et  $d$  paramètre scalaire qui représente la variation de module d'élasticité macroscopique.

L'énergie de déformation macroscopique est obtenue par homogénéisation et elle a, après élimination des termes petits, l'expression suivante [LAD87]:

$$(39) \quad W(\epsilon, d) = \frac{1}{2} [ E_1 \epsilon_{11}^2 + E_2 (1-d) \epsilon_{22}^2 ] + (1-d) E_2 \nu_{12} \epsilon_{22} \epsilon_{11} + G(1-d) \epsilon_{12}^2$$

où  $E_1, E_2, \nu_{12}$  et  $G$  sont des coefficients du matériau. L'endommagement  $d$  prend ses valeurs dans l'intervalle:  $\Omega = [0, 1]$ .

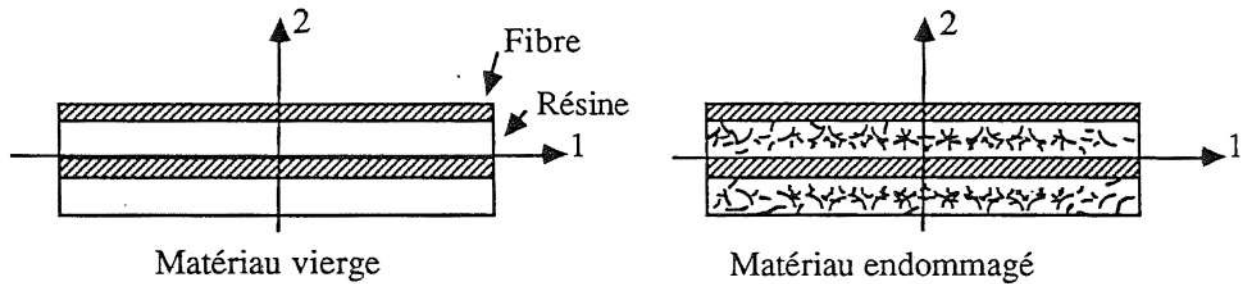


figure 3 composite 2D

Et le potentiel généralisé de dissipation est donné par l'expression suivante:

$$(40) \quad \Phi(d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d < 0 \\ \frac{1}{3M} (Md + Y_0^{1/2})^3 & \text{si } 0 \leq d \leq 1 \\ +\infty & \text{si } d > 1 \end{cases}$$

Les lois d'élasticité et la variable associée à l'endommagement sont respectivement:

$$(41) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= E_1 \epsilon_{11} + (1-d) E_2 \nu_{12} \epsilon_{22} \\ \sigma_{22} &= (1-d) E_2 (\epsilon_{22} + \nu_{12} \epsilon_{11}) \\ \sigma_{12} &= 2G(1-d) \epsilon_{12} \end{aligned}$$

$$(42) \quad Y = \frac{1}{2} E_2 \epsilon_{22}^2 + E_2 \nu_{12} \epsilon_{22} \epsilon_{11} + G \epsilon_{12}^2$$

$Z$  la variable duale à l'endommagement est définie par:

$$(43) \quad Z(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y(\tau)]$$

La loi d'endommagement est donnée par:

$$(44) \quad Z(t) \in \partial\Phi(d(t))$$

et elle est représentée par le graphe de la figure 4.

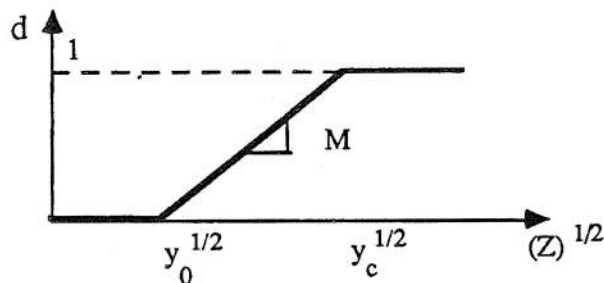


figure 4 loi d'endommagement pour le composite 2D

Le potentiel de dissipation (40) est une fonction dérivable dans l'intervalle  $(0,1)$ . Dans chacun de ces points  $d$  est associé à une seule valeur de  $Z$ . Au point  $d = 0$  le sous-différentiel est constitué par l'ensemble  $[0, Y_0]$ , cela indique l'existence d'un seuil d'endommagement  $Y_0$ , en dessous duquel le matériau n'est pas endommagé et l'énergie dissipée est nulle. Au point  $d = 1$  le sous-différentiel est constitué par l'intervalle  $[Y_c, +\infty)$  ce qui indique l'existence d'un seuil de rupture  $Y_c$  au delà duquel pour une déformation quelconque les contraintes dans la direction 2 et de cisaillement restent nulles. Dans ce point la fonction n'est plus dérivable et au delà le potentiel perd son sens physique.

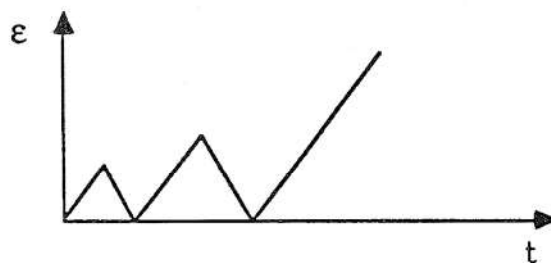


figure 5 sollicitation en déformation imposée

L'allure du graphe représentant  $\sigma$  en fonction de  $\varepsilon$  sous la sollicitation en déformation indiquée en figure 5 (traction simple dans la direction perpendiculaire aux fibres) est indiqué en figure 6.

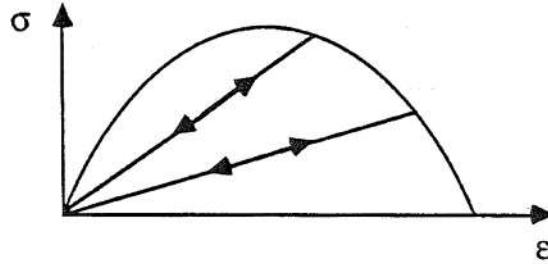


figure 6 courbe contrainte-déformation pour un composite 2D (sollicitation perpendiculaire à la direction des fibres)

b) Modèle d'endommagement progressif de type fragile (Nguyen [NGU84])

Variables d'état :  $\varepsilon, D \in \mathbb{R}$

L'énergie libre est de la forme:

$$(45) \quad W(\varepsilon, D) = \frac{1}{2} e^{-D} \mathbb{K}_0 : \varepsilon : \varepsilon$$

où  $\mathbb{K}_0$  est un tenseur de quatrième ordre dont les coefficients sont des paramètres du matériau.

L'ensemble  $D_c$  est donc vide et  $\Omega = [0, +\infty)$ .

Le potentiel de dissipation est donné par:

$$(46) \quad \Phi(D) = \begin{cases} 0 & \text{si } D \leq 0 \\ K_C & \text{sinon} \end{cases}$$

Les courbes contrainte-déformation et endommagement-déformation correspondantes à la sollicitation indiquée en figure 7 sont indiquées en figures 8 et 9 respectivement. Les numéros dans chaque figure indiquent les valeurs de  $\sigma$  et  $d$  correspondant aux valeurs de  $\varepsilon$  indiquées en figure 7.

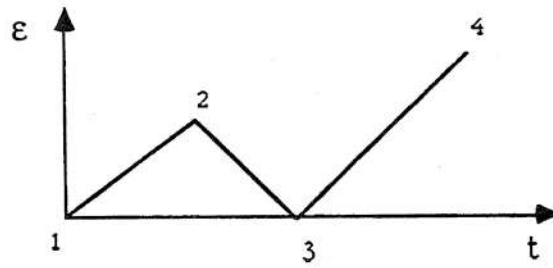


figure 7 sollicitation en déformation imposée.

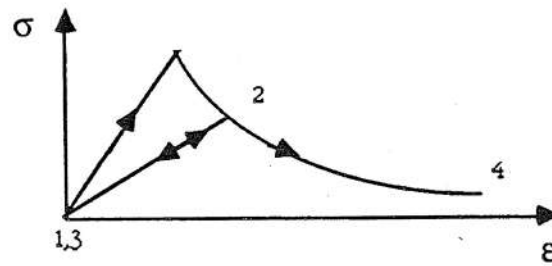


figure 8 courbe contrainte-déformation pour un modèle progressif de type fragile.

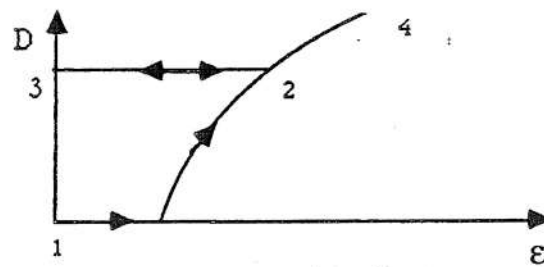


figure 9 courbe endommagement-déformation pour un modèle progressif de type fragile.

### c) Modèle d'endommagement total (Bui et Ehrlacher [BUI81])

Ce modèle décrit le comportement élastique-fragile.  $D$  est un scalaire prenant la valeur  $D = 0$  si  $Y < Y_c$  ou  $D = 1$  si  $Y = Y_c$ . Dans le cadre défini dans ce chapitre un modèle similaire peut être obtenu à partir des potentiels suivants.

$$(47) \quad W(\epsilon, D) = \frac{1}{2} (1-D) K_0 : \epsilon : \epsilon$$

avec:  $\Omega = [0, 1]$

$$(48) \quad \Phi(D) = \begin{cases} 0 & \text{si } D \leq 0 \\ K_C D & \text{si } 0 \leq D \leq 1 \\ +\infty & \text{si } D > 1 \end{cases}$$

où  $K_0$  et  $K_C$  sont des coefficients du matériau

La loi d'endommagement est alors:

$$(49) \quad \begin{aligned} D &= 0 & \text{si } Z \in [0, K_C) \\ D &\in [0, 1] & \text{si } Z = K_C \\ D &= 1 & \text{si } Z \in (K_C, +\infty) \end{aligned}$$

Remarque:

Dans ce modèle l'application  $Z \rightarrow D$  n'est pas univoque, cela est dû au fait que la fonction  $W + \Phi$  n'est pas une fonction strictement convexe par rapport à  $D$ .

d) modèles unilatéraux (Ladevèze [LAD83], Mazars [MAZ86], Papa[PAP88]).

Dans beaucoup de matériaux et en particulier les matériaux de génie civil le comportement est unilatéral. Dans la famille de modèles ici décrite le caractère unilatéral est caractérisé par deux paramètres (ou deux ensembles de paramètres) qui évoluent de façon complètement indépendante et qui caractérisent respectivement la perte de rigidité en traction et en compression.

Par exemple dans [PAP88] l'état est défini par  $\mathcal{E}$ , la déformation totale et  $D = (d_t, d_c) \in \mathbb{R}^2$ . L'énergie libre est de la forme:

$$(50) \quad W(\mathcal{E}; d_t; d_c) = \frac{1}{2} (1-d_t) K_0 : \mathcal{E}^+ : \mathcal{E}^+ + \frac{1}{2} (1-d_c) K_0 : \mathcal{E}^- : \mathcal{E}^-$$

où

$$(51) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}^+ &= K_0^{-1} : [K_0 : \mathcal{E}]_+ \\ \mathcal{E}^- &= K_0^{-1} : [K_0 : \mathcal{E}]_- \end{aligned}$$

$\mathbb{K}_0$  étant un tenseur de quatrième ordre dont les coefficients dans une base particulière sont des paramètres du matériau.

Le symbole  $[X]_+$  représente la projection du tenseur  $X$  sur le cône  $P$  des matrices symétriques définies positives. Autrement dit: soit  $X$  représenté dans une base quelconque  $n$  par une matrice symétrique de coefficients  $X_{ij}$ . Alors l'expression de  $[X]_+$  dans la même base est la suivante:

$$(52) \quad [X_{ij}]_+ = O \begin{pmatrix} \langle X_1 \rangle_+ & 0 & 0 \\ 0 & \langle X_2 \rangle_+ & 0 \\ 0 & 0 & \langle X_3 \rangle_+ \end{pmatrix} O^{-1}$$

où  $O$  est la matrice de passage de la base principale à la base  $n$  et  $\langle X_i \rangle_+$  la partie positive des valeurs principales de  $X_{ij}$ .

Le symbole  $[X]_-$  représente la projection du tenseur  $X$  sur le cône polaire  $P^\circ$ . C'est à dire:

$$(53) \quad [X_{ij}]_- = O \begin{pmatrix} \langle X_1 \rangle_- & 0 & 0 \\ 0 & \langle X_2 \rangle_- & 0 \\ 0 & 0 & \langle X_3 \rangle_- \end{pmatrix} O^{-1}$$

L'ensemble de valeurs d'endommagement admissible est donc:  $[0,1] \times [0,1]$ .

L'énergie dissipée est de la forme:

$$(54) \quad \Phi(D) = \Phi_t(d_t) + \Phi_c(d_c)$$

où les fonctions  $\Phi_t$  et  $\Phi_c$  sont similaires à celles de l'exemple précédent.

La variable  $Z = (Z_t, Z_c)$  est définie par:

$$(55) \quad Z(t) = \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y_t(\mathcal{E}(\tau))] , \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y_c(\mathcal{E}(\tau))] \right)$$

La courbe contrainte-déformation correspondante à la sollicitation indiquée en figure 10 est indiquée en figure 11.

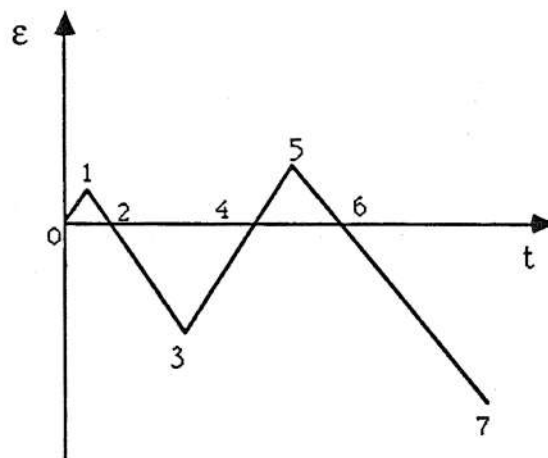


figure 10 sollicitation en déformation imposée

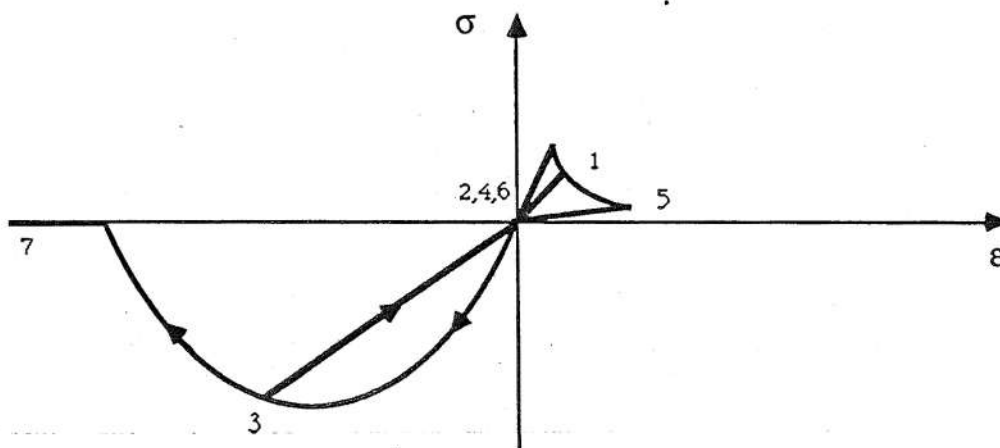


figure 11 courbe contrainte-déformation pour le modèle unilatéral.

#### 2.2.4 Etude de la dissipation.

La dissipation intrinsèque est donnée par l'expression suivante (voir chapitre 1):

$$(56) \quad \Phi = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{D} \geq 0$$

Afin de calculer la dissipation, il faut donc, différentier la loi d'endommagement.

Si on suppose le potentiel  $\Phi$  deux fois différentiable et strictement convexe, la loi d'endommagement (37) peut s'exprimer par:

$$(57) \quad Z = \frac{\partial \Phi}{\partial D}$$

et la vitesse d'endommagement par:

$$(58) \quad \dot{D} = \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} \right]^{-1} \cdot \dot{Z}$$

L'hypothèse de différentiabilité de  $\Phi$  à l'intérieur de  $\Omega$  est généralement bien vérifiée dans les applications, comme on peut le constater dans les exemples du paragraphe précédent.

La fonction  $Z(t)$ , exprimée en fonction du Sup de  $Y$  par l'expression (38), est différentiable par morceaux. On peut définir sa dérivée en notation indicielle, de la façon suivante (voir la figure 12):

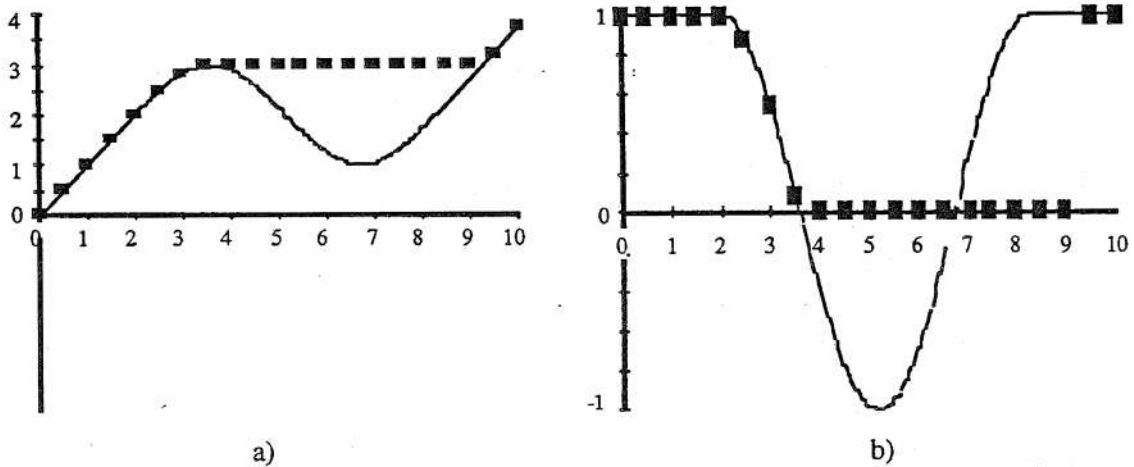


figure 12 Définition de la dérivée de la fonction  $Z_i(t)$ . a)  $Y_i$  (—) et  $Z_i$  (◆◆◆) en fonction du temps. b)  $\dot{Y}_i$  (—) et  $\dot{Z}_i$  (◆◆◆) en fonction du temps.

$$(59) \quad (\dot{Z})_i = \begin{cases} (\dot{Y})_i & \text{si } (Z)_i = (Y)_i \text{ et } 0 \leq (\dot{Y})_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'expression de la dissipation intrinsèque est alors:

$$(60) \quad \dot{\Phi} = \sum_{i,j=1}^n \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} \right]^{-1}_{ij} \dot{Y}_i \dot{Y}_j \quad \text{si } \dot{Y}_i \geq 0 \quad \text{et } Y_i = Z_i$$

L'inégalité (56) est donc vérifiée puisque  $\Phi$  est strictement convexe. ■

On peut aussi constater, à partir de (58), que  $\dot{D}_i$  est toujours positif ou nul puisque la fonction  $\Phi$  est convexe, la matrice  $\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} \right]^{-1}_{ij}$  est diagonale et  $\dot{Z}_i$  est positif ou nul ( $Z_i$  est un Sup)

#### 2.4. Relation entre la formulation incrémentale et la formulation fonctionnelle.

Dans sa formulation originale (Nguyen[NGU84]), le modèle donné en exemple b, était une loi incrémentale. Il est donc possible de passer de l'une à l'autre, au moins dans certains cas particuliers. Dans ce paragraphe nous nous proposons de montrer la relation et de souligner les différences entre les deux formulations.

La première définissant l'endommagement par sa vitesse alors que l'autre le donnant de façon entière, il faut différencier la dernière pour pouvoir les comparer.

A l'aide des relations (58) et (59) on obtient la loi d'évolution de l'endommagement suivante:

$$(61) \quad (\dot{D})_i = \begin{cases} \left( \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} \right] \cdot \dot{Y} \right)_i & \text{si } \left( Y - \frac{\partial \Phi}{\partial D} \right)_i = 0 \text{ et } 0 \leq (\dot{Y})_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par comparaison de l'expression (61) et de la loi d'évolution de l'endommagement donné dans le paragraphe 2.1 on peut constater que dans le cas où  $D$  est caractérisé par un scalaire les deux modèles sont identiques si l'on définit le convexe d'élasticité par:

$$\underline{Q}(D) = \{ Y / g(Y) \leq R(D) \}$$

$$(62) \quad g(Y) = Y$$
$$R(D) = \frac{d\Phi}{dD}$$

Les exemples a,b et c du paragraphe 2.2.3 appartiennent donc, aux deux classes de modèles. Dans les applications la deuxième version peut être préférable. L'un de ses avantages, La possibilité de utiliser dans les calculs un schéma d'intégration implicite, sera soulignée dans le chapitre III.

Lorsque  $D$  n'est pas scalaire (exemple d du N° 2.2.3) les deux modèles en général différent: La formulation incrémentale est une modélisation toute à fait analogue à celle de la plasticité associée, c'est à dire l'évolution de  $D$  est gouvernée par une seul fonction seuil. Dans la seconde formulation il y a autant de fonctions seuil que de composantes de  $D$ .

---

### III Formulations variationnelles

---

#### 1. Introduction

La loi de comportement du matériau combinée aux équations générales de la mécanique des milieux continus constituent les équations du problème à résoudre. Comme dans les autres problèmes de mécanique il est souhaitable d'écrire le problème à l'aide d'un principe variationnel exprimé en termes de grandeurs globales (c'est à dire définies sur l'ensemble de la structure). Il y a, bien entendu, une grande diversité de formulations possibles, parmi elles nous prêterons une attention particulière aux formulations à deux champs, le déplacement et l'endommagement (ou leur vitesses respectives), pour des raisons qui seront précisées dans les paragraphes suivants. L'utilisation de l'endommagement comme l'une des variables principales du problème n'est pas originale. On doit citer en particulier, Billardon et Moret-Bailly [BIL87], où il a été proposé la prise en compte de l'endommagement comme un degré de liberté supplémentaire dans le calcul numérique des problèmes d'élasto-plasticité couplée à l'endommagement. Voir aussi Nguyen [NGU87], Nguyen et Triantafillidis[NGU89], Stolz[STO87].

Pour les lois de comportement incrémentales, la prise en compte du problème en vitesses est "la voie naturelle" pour l'obtention d'un principe variationnel (Dans certains cas la seule possible). Nous décrirons d'abord la formulation "classique" à un champ (vitesse de déplacement) et nous préciserons ses limitations du point de vue numérique et pour l'étude mathématique de la solution. Nous proposerons par la suite une formulation à deux champs.

Dans le dernier paragraphe nous étudierons une formulation à deux champs pour le problème d'évolution, qui est une généralisation de celle proposée par Benallal, Florez et Geymonat [BEN87a]. Une telle formulation est possible grâce à l'utilisation des lois

d'endommagement entières. On précisera les avantages de cette formulation par rapport aux formulations du problème en vitesses. Ces avantages justifient l'utilisation des lois en formulation fonctionnelle décrites lors du chapitre précédent.

## 2. Formulations variationnelles pour le problème en vitesses.

### 2.1 Problème de référence

Soit  $V$  le volume occupé par un solide constitué d'un matériau élastique endommageable. Le solide est soumis dans l'intervalle de temps  $[0, T]$ , à des déplacements donnés  $U_d(t)$  sur la partie de la frontière de  $V$  notée  $\partial_u V(t)$ . On impose aussi des efforts  $F_d(t)$  sur la partie complémentaire  $\partial_\sigma V(t)$  et éventuellement de forces volumiques  $f_d(t)$ . Lorsque l'état à un instant donné  $t$  est connu, le problème en vitesses consiste à trouver:

Des champs de vitesses de déplacement  $\dot{U}$ , d'endommagement  $\dot{D}$  et des variables duales  $\dot{\sigma}$  et  $\dot{Y}$  à l'instant  $t$ , vérifiant:

- i)  $\dot{U}$  est cinématiquement admissible à  $\dot{U}_d(t)$  (noté  $\dot{U} \in \dot{K}_t$ )

c'est à dire:

$$\dot{U} = \dot{U}_d(t) \quad \text{sur } \partial_u V(t)$$

$\dot{U}$  est suffisamment régulier.

- ii)  $\dot{\sigma}$  est statiquement admissible à  $\dot{F}_d(t)$  et  $\dot{f}_d(t)$

c'est à dire:

$$\int_V \dot{\sigma} : \epsilon(U^*) \, dv = \int_V \dot{f}_d U^* \, dv + \int_{\partial_\sigma V} \dot{F}_d U^* \, ds$$

$$\forall U^* \text{ C.A. à zéro (noté } U^* \in \dot{K}_0)$$

$\epsilon$  est l'opérateur de déformation linéarisé.

iii) La loi de comportement en vitesses. C'est à dire, des relations locales entre les grandeurs  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{D}$ ,  $\dot{Y}$  à l'instant  $t$ .

Ces relations sont obtenues par simple dérivation par rapport au temps des lois d'état et des lois complémentaires données dans le chapitre 2. En effet si l'énergie libre est deux fois différentiable par rapport à chaque variable d'état (ce qui est généralement vrai dans les applications), il est possible d'exprimer les lois d'état de la façon suivante:

$$(1) \quad \dot{\sigma} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} \cdot \dot{D}$$

$$(2) \quad \dot{Y} = - \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} - \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D} \cdot \dot{D}$$

où le symbole  $\cdot$  indique un produit contracté sur le même nombre d'indices de  $D$ .

Pour la loi complémentaire on a deux cas:

a) Dans le cas de la formulation incrémentale la loi complémentaire est déjà exprimée comme une relation entre les vitesses. Etant donné que l'énergie libre  $W$  est une fonction convexe par rapport à  $D$  et du fait que le produit  $\frac{\partial g}{\partial Y} \cdot \frac{\partial R}{\partial D}$  est par hypothèse strictement positif, la loi complémentaire peut être exprimée par:

$$(3) \quad \dot{D} = \begin{cases} \frac{1}{H} < - \frac{\partial g}{\partial Y} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} > & \text{si } G(\epsilon; D) = g(\|Y\|_Y) - R(\|D\|_D) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{où } H = \frac{\partial g}{\partial Y} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D} \cdot \frac{\partial g}{\partial Y} + \frac{\partial g}{\partial Y} \cdot \frac{\partial R}{\partial D} > 0$$

b) Dans le cas de la formulation fonctionnelle la loi complémentaire est une loi entière, mais qui peut aussi s'exprimer comme une relation entre les vitesses  $\dot{D}$  et  $\dot{Y}$  (voir le N° 2.4. du chapitre 2).

$$< \dot{Y}_i > = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} \cdot \dot{D} \right)_i \quad \text{si} \quad G_1(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y_1(\epsilon(\tau); D(\tau))] - Y_1(t) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{Y}_i \rangle &= \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} \cdot \dot{D} \right)_i \quad \text{si} \quad G_i(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y_i(\epsilon(\tau); D(\tau))] - Y_i(t) = 0 \\
 0 &= \dot{D}_i \quad \text{sinon}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Comme l'on a pu constater dans les exemples du N° 2.2.3 du chapitre précédent, l'hypothèse de différentiabilité de  $\Phi$  est bien vérifiée dans les applications, à l'intérieur de  $\Omega$  ( $\Omega$  est l'ensemble des valeurs d'endommagement admissibles).

Remarque: L'expression (4a) formule une relation implicite entre la vitesse d'endommagement à l'instant  $t$  et la vitesse de déformation au même instant. Cependant on montre (voir l'annexe III) que dans le contexte présent, cette relation peut être exprimée explicitement.

## 2.2 Formulation variationnelle en vitesse de déplacement.

La loi de comportement en vitesses peut souvent s'exprimer à l'aide d'un potentiel, fonction différentiable de  $\dot{\epsilon}$ , l'état intervenant comme paramètre, de la forme:

$$(5) \quad T(\dot{\epsilon}) = T^e(\dot{\epsilon}) + T^d(\dot{\epsilon})$$

La loi de comportement est alors:

$$(6) \quad \dot{\sigma} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\epsilon}} \quad \blacksquare$$

On précisera par la suite l'expression de ces potentiels dans le cas des formulations incrémentale et fonctionnelle considérées lors du chapitre 2.

a) Dans le cas des lois incrémentales on a les potentiels suivants:

$$(7) \quad T^e(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}$$

$$(8) \quad T^d(\dot{\epsilon}) = \begin{cases} -\frac{1}{2H} \left\langle -\frac{\partial g}{\partial Y} \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} \right\rangle^2 & \text{si } G(\epsilon; D) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Dans le cas de la formulation fonctionnelle (voir annexe 3 pour la démonstration) on trouve les potentiels suivants:

$$(9) \quad T^e(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}$$

$$(10) \quad T^d(\dot{\epsilon}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D}\right)_{ii} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D}\right)_{ii}} \left\langle \left(-\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} : \dot{\epsilon}\right)_i \right\rangle^2 \quad \text{si } G_i(t) = 0$$

$$T^d(\dot{\epsilon}) = 0 \quad \text{sinon}$$

■

On introduit alors les notations suivantes:

$$(11) \quad \begin{aligned} V_e &= \{ x \in V / G(x) < 0 \text{ et } D \notin D_c \} \\ V_d &= \{ x \in V / G(x) = 0 \text{ et } D \notin D_c \} \\ V_c &= \{ x \in V / D \in D_c \} \\ \bar{V} &= V_e \cup V_d \end{aligned}$$

■

Le problème de référence peut alors s'écrire comme suit:

Trouver  $\dot{U} \in \dot{K}_t$  qui rend stationnaire la fonctionnelle:

$$(12) \quad T(\dot{U}) = \int_{\bar{V}} T^e(\dot{\epsilon}) dv + \int_{V_d} T^d(\dot{\epsilon}) dv - \int_{\partial_{\sigma} V} \dot{F}_d \dot{U} ds$$

Remarques:

i) Le potentiel  $T(\dot{U})$  est une fonctionnelle non quadratique, du fait de la présence de l'opérateur partie positive dans l'expression de  $T^d$ . Cela est du au fait que la loi de comportement en vitesses est non-linéaire et non-différentiable, ces particularités compliquent l'étude des propriétés de la solution.

ii) Certaines propriétés de la solution peuvent être exhibées en considérant dans un premier temps l'hypothèse dite "du solide équivalent de Hill". Cette hypothèse consiste à éliminer l'opérateur partie positive, du potentiel. C'est à dire à étudier le problème d'élasticité non-linéaire (problème linéaire en vitesses) qui "ressemble le plus" au problème d'endommagement. On obtient alors, par fois d'une manière remarquablement simple, des résultats concernant les propriétés de la solution. L'étude de la régularité de la solution (critères de localisation) a été réalisé de cette façon (voir par exemple Rice [RIC76], Rice et Rudnicki [RIC80], Benallal, Billardon et Geymonat [BEN88]).

iii) Une autre alternative consisté à formuler le problème en gardant le déplacement et l'endommagement comme variables principales du problème, ce qui permet d'éliminer l'opérateur partie positive de la formulation avec l'introduction d'une contrainte additionnelle dans la formulation. Le problème peut alors s'exprimer à l'aide de deux fonctionnelles (dans certains cas particuliers une seule fonctionnelle) quadratiques. La formulation ainsi obtenue dite "formulation point de Nash" permet d'appliquer au problème d'endommagement certains résultats que l'on trouve dans la littérature. Cette formulation fera l'objet du paragraphe 2.3.

iv) Du point de vue de l'approximation numérique du problème d'endommagement, la formulation (12) présente aussi des inconvénients, ceux-ci seront précisés lors du N° 3 de ce chapitre. Dans le même paragraphe on proposera aussi une autre formulation variationnelle qui permet de remédier à ces inconvénients.

### 2.2.1 Exemples:

Dans cette section on donnera l'expression des potentiels  $T^e(\dot{\epsilon})$  et  $T^d(\dot{\epsilon})$  pour les modèles cités en exemples lors du chapitre 2.

a) Modèle d'élasticité couplée à l'endommagement pour composites 2D. (Suite de l'exemple (a) du chapitre 2):

$$(13) \quad T^e(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} [ E_1 \dot{\epsilon}_{11}^2 + E_2(1-d)\dot{\epsilon}_{22}^2 ] + (1-d)E_2 \nu_{12} \dot{\epsilon}_{22} \dot{\epsilon}_{11} + G(1-d)\dot{\epsilon}_{12}^2$$

$$(14) \quad T^d(\dot{\epsilon}) = \frac{-M}{4(Md+Y_0^{1/2})} \langle E_2 \epsilon_{22} \dot{\epsilon}_{22} + \frac{1}{2} E_2 \nu_{12} \dot{\epsilon}_{22} \epsilon_{11} + \frac{1}{2} E_2 \nu_{12} \epsilon_{22} \dot{\epsilon}_{11} + G \epsilon_{12} \dot{\epsilon}_{12} \rangle^2$$

b) Modèle d'endommagement progressif de type fragile. (Suite de l'exemple (b) du chapitre 2):

$$(15) \quad T^e(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} e^{-D} \mathbb{K}_0 : \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}$$

$$(16) \quad T^d(\dot{\epsilon}) = \frac{-1}{2 e^{-D} \mathbb{K}_0 : \epsilon : \epsilon} \langle -e^{-D} \mathbb{K}_0 : \epsilon : \dot{\epsilon} \rangle$$

d) Modèle unilatéral ( Suite de l'exemple (d) du chapitre 2)

$$(17) \quad T^e(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} (1-d_t) \mathbb{K}_0 : \dot{\epsilon}^+ : \dot{\epsilon}^+ + \frac{1}{2} (1-d_c) \mathbb{K}_0 : \dot{\epsilon}^- : \dot{\epsilon}^-$$

où

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}^+ &= \mathbb{K}_0^{-1} : [ \mathbb{K}_0 : \dot{\epsilon} ]_+ \\ \dot{\epsilon}^- &= \mathbb{K}_0^{-1} : [ \mathbb{K}_0 : \dot{\epsilon} ]_- \end{aligned}$$

$$(19) \quad T^d(\dot{\epsilon}) = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial d_t \partial d_t} \right)^{-1} \langle \mathbb{K}_0 : \epsilon^+ : \dot{\epsilon}^+ \rangle^2 + \left( \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial d_c \partial d_c} \right)^{-1} \langle \mathbb{K}_0 : \epsilon^- : \dot{\epsilon}^- \rangle^2 \right]$$

### 2.3 Formulation variationnelle en vitesse de déplacement et vitesse d'endommagement.

La loi de comportement en vitesses introduite dans le N° 2.1 de ce chapitre, peut aussi s'écrire à l'aide de deux potentiels  $E$  et  $\Pi$  et d'une "force thermodynamique"  $A$ . Ces potentiels sont fonctions convexes de  $\dot{\epsilon}$  et  $\dot{\lambda}$ , dans le cas de la formulation incrémentale et de  $\dot{\epsilon}$  et  $\dot{D}$  dans le cas de la formulation fonctionnelle. Plus précisément:

$$i) \quad E(\dot{\epsilon}, \dot{D}) = E^e(\dot{\epsilon}, \dot{D}) + E^d(\dot{\epsilon}, \dot{D})$$

$E$  est une fonction convexe, différentiable par rapport à  $\dot{\epsilon}$  l'état intervenant comme paramètre. ( $E = E(\dot{\epsilon}, \dot{\lambda})$  dans le cas de la formulation incrémentale).

$$ii) \quad \Pi(\dot{D})$$

$\Pi$  est une fonction convexe, semi-continue inférieurement, de la vitesse d'endommagement  $\dot{D}$  (fonction de  $\dot{\lambda}$  dans le cas de la formulation incrémentale), l'état intervenant comme paramètre.

iii)  $A(\dot{\epsilon}, \dot{D})$

La force  $A$  est une fonction des vitesses  $\dot{\epsilon}, \dot{D}$  (fonction de  $\epsilon$  et  $\lambda$  dans le cas de la formulation incrémentale)

Alors la loi de comportement en vitesses est exprimée par:

$$(20) \quad \dot{\sigma} = \frac{\partial E}{\partial \dot{\epsilon}}$$

$$(21) \quad A \in \partial \Pi(\dot{D}) \quad \blacksquare$$

On précisera par la suite l'expression de ces potentiels dans le cas des formulations incrémentale et fonctionnelle considérées lors du chapitre 2.

a) Pour les modèles incrémentaux les potentiels ont l'expression suivante:

$$(22) \quad E^e(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}$$

$$(23) \quad E^d(\dot{\epsilon}; \dot{\lambda}) = \begin{cases} \dot{\lambda} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} \cdot \frac{\partial g}{\partial Y} : \dot{\epsilon} & \text{si } G(\epsilon; D) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(24) \quad \Pi(\dot{\lambda}) = \begin{cases} \frac{1}{2} h \dot{\lambda} \dot{\lambda} & \text{si } \dot{\lambda} \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{où } h = \frac{\partial g}{\partial Y} \cdot \frac{\partial R}{\partial D}$$

$$(25) \quad A(\dot{\epsilon}; \dot{\lambda}) = \frac{\partial g}{\partial Y} \cdot \dot{Y}$$

b) Pour les modèles en formulation fonctionnelle:

$$(26) \quad E^e(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}$$

$$(27) \quad E^d(\dot{\epsilon}; \dot{D}) = \begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} : \dot{\epsilon} \cdot \dot{D} & \text{si } G(t)=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(28) \quad \Pi(\dot{D}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} \cdot \dot{D} \cdot \dot{D} & \text{si } \dot{D}_i \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, n \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(29) \quad A(\dot{\epsilon}; \dot{D}) = \dot{Y}$$

L'expression (20) est donc la loi d'état  $\sigma = \frac{\partial W}{\partial \epsilon}$  exprimée en vitesses. L'expression (21) correspond à la loi d'évolution d'évolution de l'endommagement. On peut remarquer que le potentiel  $\Pi$  est quadratique pour  $\dot{D}_i \geq 0$  (ou  $\dot{\lambda} \geq 0$ ). ■

On introduit alors la notation suivante: On appelle  $\alpha$ , ensemble de champs de vitesse d'endommagement admissibles, l'ensemble de champs suffisamment réguliers tels que:

$$(30) \quad \dot{D}_i(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in V$$

$$(\dot{\lambda} \geq 0 \quad \forall \quad x \in V, \text{ dans le cas de la formulation incrémentale})$$

### Proposition:

Les champs  $\dot{U}$ ,  $\dot{D}$  solution du problème en vitesses à l'instant  $t$  vérifient le principe variationnel suivant:

$$(31) \quad \begin{aligned} V^u(\dot{U}, \dot{D}) &\leq V^u(U^*, \dot{D}) & \forall U^* \in \dot{K}_t \\ V^d(\dot{U}, \dot{D}) &\leq V^d(\dot{U}, D^*) & \forall D^* \in \alpha \end{aligned}$$

où

$$V^u(\dot{U}, \dot{D}) = \int_{\bar{V}} E^e(\dot{\epsilon}) dv + \int_{V_d} E^d(\dot{\epsilon}; \dot{D}) dv - \int_{\partial_{\sigma} V} \dot{F}_d \dot{U} ds$$

$$V^d(\dot{U}, \dot{D}) = \int_{V_d} \Pi(\dot{D}) dv + \int_{V_d} \vartheta(\dot{\epsilon}, \dot{D}) dv$$

avec  $\vartheta(\dot{\epsilon}, \dot{D})$  ( $\vartheta = \vartheta(\dot{\epsilon}, \dot{\lambda})$  dans le cas de la formulation incrémentale) une fonction différentiable de l'endommagement, telle que:  $A = - \frac{\partial \vartheta}{\partial \dot{D}}$  ( $A = - \frac{\partial \vartheta}{\partial \dot{\lambda}}$  dans le cas de la formulation incrémentale)

a) Dans le cas des modèles incrémentaux l'expression de  $\vartheta$  est la suivante:

$$(32) \quad \vartheta(\dot{\epsilon}, \dot{\lambda}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g}{\partial Y} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D} \cdot \frac{\partial g}{\partial Y} \right] \dot{\lambda} \dot{\lambda} + \left[ \frac{\partial g}{\partial Y} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} \right] \dot{\lambda}$$

b) Dans le cas des lois entières:

$$(33) \quad \vartheta(\dot{\epsilon}, \dot{D}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D} \cdot \dot{D} \cdot \dot{D} \right] + \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \epsilon} \cdot \dot{D} : \dot{\epsilon} \right]$$

**Preuve:**

Le potentiel  $E(\dot{\epsilon}, \dot{D})$  est une fonction convexe par rapport à  $\dot{\epsilon}$ , les fonctions  $\Pi(\dot{D})$  et  $\vartheta(\dot{\epsilon}, \dot{D})$  sont convexes par rapport à  $\dot{D}$ . Il en résulte les mêmes propriétés pour les surpotentiels:

$$(34) \quad \begin{aligned} E &= \int_{\bar{V}} E(\dot{\epsilon}, \dot{D}) dv \\ \Pi &= \int_{V_d} \Pi(\dot{D}) dv \end{aligned}$$

$$\vartheta = \int_V \vartheta(\dot{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{D}}) dv$$

La convexité du surpotentiel  $E$  par rapport à  $\dot{\mathbf{e}}(x)$  et la loi de comportement (20) entraînent (voir chapitre 1):

$$(35) \quad \int_V E(\mathbf{e}(U^*), \dot{\mathbf{D}}) dv - \int_V E(\dot{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{D}}) dv - \int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} : [\mathbf{e}(U^*) - \dot{\mathbf{e}}] dv \geq 0$$

Si l'on prend pour  $U$  une solution du problème et pour  $U^*$  un champ appartenant à  $\dot{K}_t$ , on obtient, en utilisant le principe de puissances virtuelles:

$$(36) \quad \int_V E(U^*, \dot{\mathbf{D}}) dv - \int_V E(\dot{U}, \dot{\mathbf{D}}) dv - \int_{\partial \sigma V} \dot{\mathbf{F}}_d [U^* - \dot{U}] ds \geq 0 \quad \forall U^* \in \dot{K}_t$$

D'autre part la convexité des surpotentiels  $\Pi$  et  $\vartheta$  par rapport à  $\dot{\mathbf{D}}(x)$  et les relations  $A = -\frac{\partial \vartheta}{\partial \dot{\mathbf{D}}}$  et  $A \in \partial \Pi(\dot{\mathbf{D}})$  entraînent:

$$(37) \quad \int_V [\Pi(\mathbf{D}^*) + \vartheta(\dot{\mathbf{e}}; \mathbf{D}^*)] dv - \int_V [\Pi(\dot{\mathbf{D}}) + \vartheta(\dot{\mathbf{e}}; \dot{\mathbf{D}})] dv \geq 0 \quad \forall \mathbf{D}^* \in \alpha$$

Lorsque l'on prend pour  $\dot{\mathbf{e}}$  et  $\dot{\mathbf{D}}$  les solutions du problème. Les inégalités (36) et (37) conduisent donc au principe variationnel (31). D'autre part la minimisation de la fonctionnelle  $V^u$  par rapport à  $\dot{U}$  et de la fonctionnelle  $V^d$  par rapport à  $\dot{\mathbf{D}}$  sur leurs ensembles admissibles respectifs entraînent, à l'évidence, les équations du problème en vitesses. ■

La formulation d'un problème en termes de la résolution d'un système d'inéquations variationnelles est un procédé standard en économie mathématique. En économie mathématique une formulation telle que (31) est dénommée, "problème de recherche d'un point de Nash ou point d'équilibre non-coopératif".

### 2.3.1. Points d'équilibre non-coopératifs.

En économie mathématique un point  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  appartenant à un certain espace  $P$  et vérifiant le système de  $n$  inéquations:

$$(38) \quad i=1,2, \dots, n \quad f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \leq f_i(x_1, x_2, \dots, x_i^*, \dots, x_n) \quad \forall x_i^* \text{ adm.}$$

est appelé: "point d'équilibre non-coopératif" ou "point de Nash".

L'interprétation économique des  $f_i$  est la suivante: Soit  $n$  le nombre de centres de décision ou centres économiques, dont l'objectif est d'optimiser un certain critère économique  $f_i$  ( $f_i$  pourrait être par exemple, le profit de l'entreprise  $i$ ). Chaque centre prend des décisions de façon autonome (non-coopérative) par rapport aux autres centres, il peut s'agir de centres concurrentes, ou simplement de centres indépendants. Chaque centre ne possède pas le contrôle de tous les paramètres qui ont une influence sur  $f_i$  mais seulement du paramètre (ou ensemble de paramètres)  $x_i$ . Le centre en question fera, donc, évoluer le paramètre  $x_i$  jusque ce que la fonction  $f_i$  soit optimisée, mais en faisant varier  $x_i$  il va aussi altérer la valeur des autres  $n-1$  critères correspondants aux  $n-1$  centres économiques restants qui à leur tour feront varier la valeur de leurs paramètres respectifs. Le point d'équilibre, s'il existe, sera atteint lorsque les  $n$  inégalités (38) seront vérifiées simultanément.

La formulation variationnelle (31) peut donc être considérée comme un problème de recherche d'un point de Nash à deux critères et la solution  $(\dot{U}, \dot{D})$  comme un point d'équilibre non-coopératif.

### 2.3.2 Exemples:

Dans cette section on donnera l'expression des potentiels  $E^e(\dot{\epsilon})$ ,  $E^d(\dot{\epsilon}, \dot{D})$ ,  $\Pi(\dot{D})$  et  $\vartheta(\dot{\epsilon}, \dot{D})$  pour les modèles cités en exemples lors du chapitre 2.

a) Modèle d'élasticité couplée à l'endommagement pour composites 2D. (Suite de l'exemple (a) du chapitre 2):

$$(39) \quad E^e(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} [E_1 \dot{\epsilon}_{11}^2 + E_2(1-d) \dot{\epsilon}_{22}^2] + (1-d)E_2 \nu_{12} \dot{\epsilon}_{22} \dot{\epsilon}_{11} + G(1-d) \dot{\epsilon}_{12}^2$$

$$(40) \quad E^d(\dot{\epsilon}) = -d [E_2 d \dot{\epsilon}_{22}^2 + E_2 \nu_{12} \dot{\epsilon}_{22} \dot{\epsilon}_{11} + E_2 \nu_{12} \dot{\epsilon}_{22} \dot{\epsilon}_{11} + G \dot{\epsilon}_{12}^2]$$

$$(41) \quad \Pi(\dot{D}) = \frac{1}{M} (M d + Y_0^{1/2}) d^2 \quad \text{si} \quad d \geq 0$$

$$(42) \quad \vartheta(\dot{\epsilon}, \dot{D}) = E^d(\dot{\epsilon})$$

b) Modèle d'endommagement progressif de type fragile. (Suite de l'exemple (b) du chapitre 2):

$$(43) \quad E^e(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} e^{-D} \mathbb{K}_0 : \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}$$

$$(44) \quad E^d(\dot{\epsilon}, \dot{D}) = -e^{-D} \dot{D} \mathbb{K}_0 : \epsilon : \dot{\epsilon}$$

$$(45) \quad \Pi(\dot{D}) = 0$$

$$(46) \quad \vartheta(\dot{\epsilon}, \dot{D}) = \frac{1}{4} e^{-D} \dot{D}^2 \mathbb{K}_0 : \epsilon : \epsilon - e^{-D} \dot{D} \mathbb{K}_0 : \epsilon : \dot{\epsilon}$$

d) Modèle unilatéral ( Suite de l'exemple (d) du chapitre 2)

$$(47) \quad E^e(\dot{\epsilon}) = \frac{1}{2} (1-d_t) \mathbb{K}_0 : \dot{\epsilon}^+ : \dot{\epsilon}^+ + \frac{1}{2} (1-d_c) \mathbb{K}_0 : \dot{\epsilon}^- : \dot{\epsilon}^-$$

où

$$(48) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}^+ &= \mathbb{K}_0^{-1} : [\mathbb{K}_0 : \dot{\epsilon}]_+ \\ \dot{\epsilon}^- &= \mathbb{K}_0^{-1} : [\mathbb{K}_0 : \dot{\epsilon}]_- \end{aligned}$$

$$(49) \quad E^d(\dot{\epsilon}) = -\dot{d}_t \mathbb{K}_0 : \epsilon^+ : \dot{\epsilon}^+ + \dot{d}_c \mathbb{K}_0 : \epsilon^- : \dot{\epsilon}^-$$

$$(50) \quad \Pi(\dot{D}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial d_t \partial d_t} \dot{d}_t^2 + \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial d_c \partial d_c} \dot{d}_c^2 \right]$$

$$(51) \quad \vartheta(\dot{\epsilon}, \dot{D}) = E^d(\dot{\epsilon})$$

## 2.4 Formulation variationnelle à deux champs sans contrainte

Dans la formulation variationnelle décrite lors du N° 2.3, on a défini l'ensemble de champs d'endommagement admissibles à l'aide de l'inégalité  $\dot{D}_i(x) \geq 0$ . Cela fait que la seconde des inégalités (31) soit équivalente à une minimisation avec contrainte. Il est possible de reformuler le problème en utilisant comme ensemble de champs d'endommagement admissibles

un sous-espace vectoriel. Pour cela, il suffit de prendre comme potentiels pour la loi de comportement les expressions suivantes :

$$(52) \quad \begin{aligned} \Pi(\dot{\mathbf{D}}) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} \right] \cdot \dot{\mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}} \\ (A(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{D}}))_i &= \left\langle - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} \right)_i \right\rangle \end{aligned}$$

$\langle x \rangle$  = partie positive de  $x$ .

Et les mêmes potentiels  $E^c$  et  $E^d$  définis lors du N° 2.3 (cas de la formulation fonctionnelle) ■

On appelle maintenant  $\beta$  l'ensemble de champs de vitesse d'endommagement suffisamment réguliers.  $\beta$  est donc un sous-espace vectoriel.

**Proposition:**

Les champs  $\dot{\mathbf{U}}(x)$  et  $\dot{\mathbf{D}}(x)$  solution du problème vérifient le principe variationnel suivant:

$$(53) \quad \begin{aligned} T^u(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{D}}) &\leq T^u(\mathbf{U}^*, \dot{\mathbf{D}}) & \forall \quad \mathbf{U}^* \in \dot{\mathbf{K}}_t \\ T^d(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{D}}) &\leq T^d(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{D}^*) & \forall \quad \mathbf{D}^* \in \beta \end{aligned}$$

où

$$T^u(\dot{\mathbf{U}}; \dot{\mathbf{D}}) = \int_V E^c(\dot{\mathbf{E}}) dv + \int_{V_d} E^d(\dot{\mathbf{E}}; \dot{\mathbf{D}}) dv - \int_{\partial \sigma^v} \dot{\mathbf{F}}_d \dot{\mathbf{U}} ds$$

$$T^d(\dot{\mathbf{U}}; \dot{\mathbf{D}}) = \int_{V_d} \Pi(\dot{\mathbf{D}}) dv + \int_{V_d} \vartheta(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{D}}) dv$$

$$\text{avec: } \vartheta(\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{D}}) = \sum_{i=1}^n \left\langle - \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{E}} \right\rangle_i \dot{\mathbf{D}}_i \quad \blacksquare$$

La preuve de la proposition précédente est similaire à celle de la formulation (31) du N° 2.3.

Remarque: Les inégalités (53) sont donc équivalentes à la minimisation sans contrainte de deux fonctionnelles, mais la fonctionnelle  $T^d$  est non-différentiable à cause de la présence de l'opérateur partie positive. Cette formulation présente donc les mêmes inconvénients de la formulation classique en vitesse de déplacement. Elle sera tout de même utilisée lors du chapitre 4.

### 3. Formulation à deux champs pour le problème d'évolution

La formulation à deux champs du problème en vitesses (N° 2.3), simplifie l'étude des propriétés de la solution puisque on a à traiter des fonctionnelles qui sont quadratiques et différentiables. Cependant du point de vue numérique les formulations en vitesse décrites dans les paragraphes précédents présentent quelques inconvénients qui ont été précisés dans Marigo [MAR82]. En effet dans ces formulations les zones  $V_d$  et  $V_c$  sont considérées comme données du problème puisque elles ne dépendent que de l'état, cependant ces zones peuvent évoluer pendant le processus de chargement. Cette évolution n'est pas prise en compte explicitement et la recherche du point de Nash (point stationnaire dans la formulation en déplacements) ne donne aucune information directe sur son évolution. Le schéma numérique proposé en [MAR82] consiste alors en une méthode pas à pas avec un schéma d'intégration explicite dont les vitesses seraient calculées par l'une des trois formulations précédentes. Il a été remarqué dans [MAR82] que ce type de formulations est inadaptée à la construction d'un schéma implicite puisque s'il était le cas les domaines  $V_d$  et  $V_c$  à l'instant  $t+\Delta t$  seraient aussi des inconnues du problème ce qui compliquerait la méthode de résolution. D'autre part la méthode explicite exige un choix d'intervalle de temps adapté à la finesse du maillage et en général très petit afin d'assurer la stabilité numérique.

Plusieurs approches ont été proposées pour éliminer cet inconvénient (Par exemple, l'utilisation d'une formulation en vitesses avec prise en compte de l'évolution du front d'endommagement, voir Bui, Dang Van et Stolz [BUI81b]). Parmi elles nous présenterons dans ce paragraphe l'utilisation d'une loi entière dans une formulation "point de Nash".

#### 3.1 Problème de référence.

Dans cette formulation l'inconnue du problème est l'histoire du champ des variables d'état ( $U(x,t)$ ,  $D(x,t)$ ). L'écriture d'une telle formulation est possible si on utilise des lois entières.

Le problème de référence est alors le suivant: Trouver le champ de déplacements  $U(x,t)$ , d'endommagement  $D(x,t)$  et des variables duales  $\sigma(x,t)$  et  $Y(x,t)$  vérifiant:

i)  $U$  est cinématiquement admissible à  $U_d$  (noté  $U \in K$ )

ii)  $\sigma$  est statiquement admissible à  $F_d$  et  $f_d$

iii) La loi de comportement en formulation fonctionnelle. C'est à dire:

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \quad Y = - \frac{\partial W}{\partial D}$$

$$Z_i(t) \in \partial_i \Phi(D(t)) \quad Z_i(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y_i(\epsilon(\tau), D(\tau))]$$

iv) Les conditions initiales:

$$Z(x,0) = Z_0(x)$$

### 3.2 Formulation variationnelle à deux champs.

On introduit les notations suivantes:

On appelle  $\Delta$ , ensemble de champs d'endommagement admissibles, l'ensemble de champs d'endommagement suffisamment réguliers tels que:

$$(56) \quad D(x,t) \in \Omega \quad \forall x \in V, t \in [0, T]$$

Soit  $t \in [0, T]$ , on appelle  $U(t)$  le champ de déplacement à l'instant  $t$  et  $U^t$  l'histoire du champ de déplacement jusqu'à l'instant  $t$ . Autrement dit:

$$\begin{aligned} U(t) : V &\longrightarrow \mathbb{R}^3, x \longmapsto U(x,t) \\ U^t : V \times [0,t] &\longrightarrow \mathbb{R}^3, (x,\tau) \longmapsto U(x,\tau) \end{aligned}$$

**Proposition**

Les champs  $U(x,t)$  et  $D(x,t)$  solution du problème vérifient, à chaque instant  $t$ , le principe variationnel suivant:

$$(57) \quad \begin{aligned} J^u(U(t), D(t)) &\leq J^u(U^*, D(t)) & \forall U^* \in K \\ J^d(U(t), D(t)) &\leq J^d(U(t), D^*) & \forall D^* \in \Delta \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} J^u(U(t), D(t)) &= \int_V W(\epsilon(U); D) dv - \int_{\partial_\sigma V} F_d U ds \\ J^d(U(t), D(t)) &= \int_V \Phi(D) dv + \int_V \Psi(\epsilon^t, D) dv \end{aligned}$$

$\Psi$  est une fonctionnelle qui dépend de l'histoire de déformations  $\epsilon(\tau)$   $0 \leq \tau \leq t$  de chaque point  $x$  et dont l'expression est:

$$(58) \quad \Psi = - \int_0^D \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y(\epsilon(\tau), X)] dX$$

La formulation (57) est donc, une formulation "point de Nash". ■

La démonstration de la proposition précédente est identique à celle de la formulation en vitesses (31). On a, en effet, dans les deux cas une loi de comportement exprimée en termes de deux potentiels  $W$  et  $\Phi$ , convexes.

Remarques:

i) La convexité de la fonction  $\Psi$  est montrée pour le cas d'intérêt pratique (voir annexe I)

ii) L'interprétation mécanique des inégalités (57) est la suivante:

La première inégalité est équivalente au théorème de l'énergie potentielle lorsque l'opérateur d'Hooke dépend du champ d'endommagement. C'est à dire:

"A champ d'endommagement donné, le champ déplacement qui vérifie les équations d'équilibre est celui qui minimise la fonctionnelle  $U^* \rightarrow J^u(U^*, D(t))$  sur l'ensemble admissible  $K$  et à chaque instant  $t$ ."

La deuxième inégalité variationnelle peut être interprétée comme une formulation globale de la loi d'endommagement (voir annexe I). C'est à dire:

"Parmi les champs d'endommagement admissibles celui qui est associé à l'histoire de déformations  $\mathcal{E}^t$  par la loi d'endommagement est celui qui minimise la fonctionnelle  $D^* \rightarrow J^d(U(t), D^*)$  à chaque instant  $t$ ".

### 3.3 Approximation numérique

La formulation (57) donne lieu à une méthode numérique qui a été discutée dans, Benallal, Florez et Geymonat [BEN86], Benallal, Florez et Geymonat [BEN87b] et qui fera l'objet du chapitre 7. Nous nous limiterons dans ce paragraphe à en indiquer les principales caractéristiques. La discrétisation en espace, des champs de déplacement et d'endommagement admissibles est faite par la méthode des éléments finis. La discrétisation en temps par la méthode de différences finies. On utilise alors une méthode pas à pas. L'état étant connu à l'instant  $t_i$  on cherche la solution à l'instant  $t_{i+1}$ . La recherche du point d'équilibre se fait alors grâce à un algorithme de décomposition: Les fonctionnelles  $J^u$  et  $J^d$  sont minimisées de façon successive et séparée jusqu'à la détermination de la solution. L'ensemble  $\Delta$  des champs d'endommagement admissibles n'est pas un sous-espace vectoriel. La minimisation de  $J^d$  sur  $\Delta$  se fait alors par une méthode de relaxation avec projection sur l'ensemble  $\Delta$  ou bien par une méthode de pénalisation.

L'endommagement est calculé partout dans le volume  $V$  et non comme un sous-produit du champ de déplacement comme dans la méthode classique.

A différence des formulations en vitesses, les inconnues sont les variables d'état et on n'a pas besoin de fixer à priori la partition du volume  $V$  en zones  $V_c, V_d, V_e$ . Cette distribution de zones à l'instant  $t_{i+1}$  est le résultat du calcul. Il s'agit donc d'un schéma implicite.

### 3.4 Exemples

Dans cette section on donnera l'expression de la fonctionnelle  $J^d$  pour les lois de comportement citées en exemples lors du chapitre 2.

a) Modèle d'élasticité couplée à l'endommagement pour composites 2D (Suite de l'exemple (a) du chapitre 2)

$$(59) \quad Y = -\frac{\partial W}{\partial D} = \frac{1}{2} E_2 \epsilon_{22}^2 + E_2 \nu_{12} \epsilon_{22} \epsilon_{11} + G \epsilon_{12}^2$$

$$(60) \quad \Psi = \int_0^D - \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left[ \frac{1}{2} E_2 \epsilon_{22}^2 + E_2 \nu_{12} \epsilon_{22} \epsilon_{11} + G \epsilon_{12}^2 \right] dX = - Z D$$

$$(61) \quad J^d(U, D) = \int_V \Phi(D) dv - \int_V Z D dv$$

b) Modèle d'endommagement progressif de type fragile (Suite de l'exemple (b) du chapitre 2)

$$(62) \quad Y = -\frac{\partial W}{\partial D} = \frac{1}{2} e^{-D} C_0 : \epsilon : \epsilon$$

$$(63) \quad \Psi = \int_0^D -\frac{1}{2} e^{-X} \sup_{0 \leq \tau \leq t} [C_0 : \epsilon : \epsilon] dX = W(\epsilon, D)$$

$$(64) \quad J^d(U; D) = \int_V W(\epsilon, D) dv$$

d) modèles unilatéraux (Suite de l'exemple (d) du chapitre 2)

$$(65) \quad Y = (Y_t; Y_c) = \left( \frac{1}{2} K_0 : \epsilon^+ : \epsilon^+, \frac{1}{2} K_0 : \epsilon^- : \epsilon^- \right)$$

$$\begin{aligned}
 (66) \quad \Psi = & \int_0^{d_t} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left[ \frac{1}{2} \mathbb{K}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \boldsymbol{\varepsilon}^+ \right] dx_t + \\
 & + \int_0^{d_c} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left[ \frac{1}{2} \mathbb{K}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^- : \boldsymbol{\varepsilon}^- \right] dx_c = Z_t d_t + Z_c d_c
 \end{aligned}$$

$$(67) \quad J^d(U, D) = \int_V [\Phi_t(d_t) + \Phi_c(d_c)] dv - \int_V [Z_t d_t + Z_c d_c] dv$$

---

## IV Existence et unicité de la solution

---

### 1. Introduction

Dans les problèmes d'élasticité couplée à l'endommagement, la solution n'existe pas toujours, parfois on en trouve plusieurs. Telle est la conclusion que l'on tire de l'analyse du système élémentaire de la figure 1 proposé dans Billardon [BIL87b].

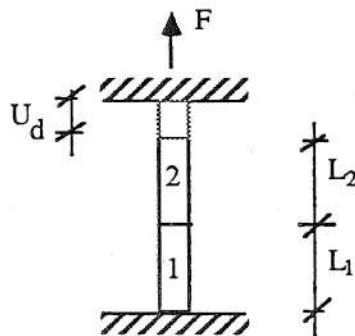
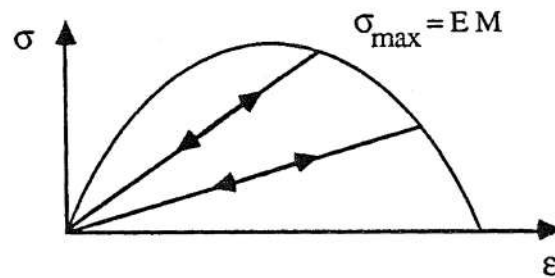


figure 1      Modèle à deux barres

Le système consiste en deux barres de longueurs  $L_1$  et  $L_2$  et de section  $A$ . Les barres sont faites d'un matériau élastique-endommageable dont la loi de comportement en conditions uniaxiales est la suivante:

$$\begin{aligned} \sigma &= E(1-D)\varepsilon \\ (1) \quad D &= \frac{1}{M} \sup_{0 \leq \tau \leq t} [\varepsilon(\tau)] \quad D \leq 1 \end{aligned}$$

Le graphe représentatif de  $\sigma$  en fonction de  $\varepsilon$  est indiqué en figure 2.

figure 2  $\sigma$  en fonction de  $\epsilon$ 

Le système est soumis à une sollicitation extérieure  $\delta = \delta(t)$  qui est fonction croissante du temps  $t$ . On considère deux cas:

a)  $\delta$  caractérise l'évolution d'une force appliquée à l'extrémité de la barre 2.

$$(2) \quad F_d = \delta(t)$$

L'équilibre quasistatique impose alors:

$$(3) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\delta(t)}{A}$$

Où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  designent les contraintes dans la barre supérieure et inférieure respectivement.

Or la loi de comportement ne permet pas d'avoir:

$$(4) \quad \sigma > \sigma_{\max}$$

Par conséquent si  $\delta > A E M$  le problème d'équilibre quasistatique du système de la figure 1 n'a pas de solution. Ceci est à rapprocher de la notion de charge limite en plasticité.

b)  $\delta$  est le déplacement de l'extrémité supérieure de la barre 2:

$$(5) \quad U_d = \delta(t)$$

La contrainte n'est pas, dans ce cas, fixée par la sollicitation extérieure. Le problème est donc hyperstatique. L'équilibre quasistatique impose:

$$(6) \quad \sigma_1(t) = \sigma_2(t) \quad \forall t$$

L'expression (6) est représentée graphiquement dans la figure 3 par une ligne horizontale. L'équilibre impose alors que les points  $\sigma_1(t)$  et  $\sigma_2(t)$  se trouvent sur une même ligne horizontale.

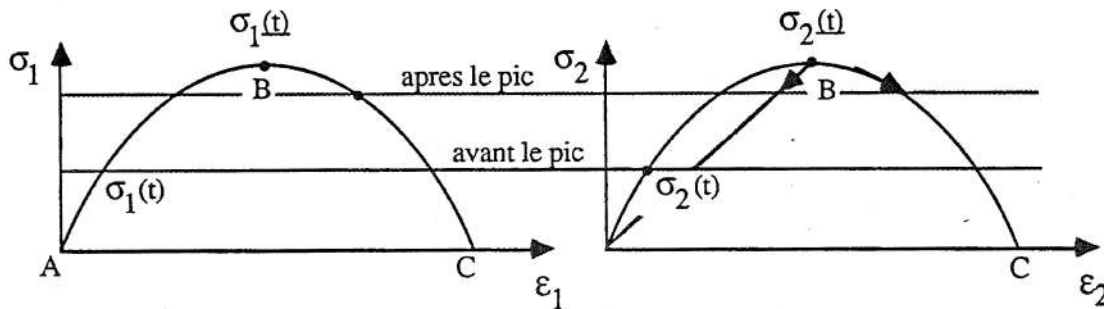


figure 3 Représentation graphique de l'équation d'équilibre et des lois de comportement des barres 1 et 2.

Avant que le point représentatif de  $\sigma_1(t)$  n'atteigne le sommet du graphe ( $\sigma_1, \epsilon_1$ ), il y a une seule solution ( $\sigma_1(t), \sigma_2(t)$ ) qui vérifie l'équation d'équilibre et la loi de comportement simultanément (les conditions de régularité interdisent de "sauter" à la branche descendante). Par contre au delà du sommet, il y a plusieurs solutions possibles. En effet considérons l'instant  $t$  tel que les deux points se trouvent sur le sommet, tel qu'il est indiqué en figure 3. Supposons maintenant qu'à la suite d'un incrément de la sollicitation extérieure  $\Delta\delta$ , Le point  $\sigma_1(t)$  se déplace sur la courbe BC jusqu'au point  $\sigma_1(t + \Delta t)$ . Alors le point  $\sigma_2(t)$  peut choisir entre deux chemins différents: Suivre le même chemin du point  $\sigma_1$ , à savoir la courbe BC, où redescendre élastiquement sur la droite BA. En effet chacune de ces possibilités représente une solution puisque les points  $\sigma_1(t)$  et  $\sigma_2(t)$  se trouvent sur la même ligne horizontale tout en respectant la loi de comportement. Finalement, la condition de compatibilité:

$$(7) \quad \delta(t) = \epsilon_1(t) L_1 + \epsilon_2(t) L_2$$

et la condition au limite:

$$(8) \quad F(t) = \sigma_1(t) A$$

donnent les valeurs du graphe ( $\delta(t), F(t)$ ) qui correspondent à chaque solution. On a donc le

graphe  $F$  vs  $\delta$  de la figure 4.

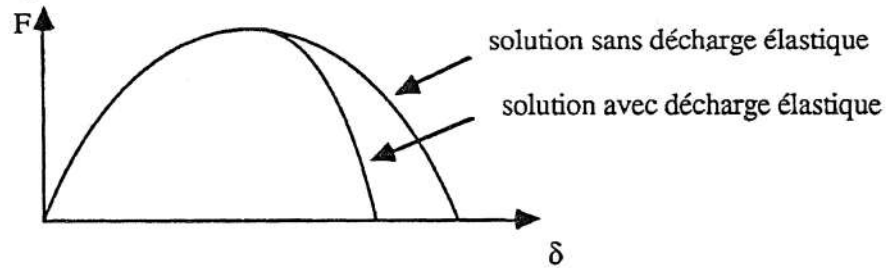


figure 4 force vs déplacement pour le modèle à deux barres.

Il se trouve donc que pour  $\lambda > \frac{M}{L_1 + L_2}$  on a au moins deux "branches" différents (en fait une infinité).

Il n'est donc pas possible de montrer l'existence ou l'unicité de la solution dans le cas général et l'on doit se limiter à énoncer plutôt des critères d'existence et d'unicité. Ces critères doivent permettre de déterminer à partir de quel moment, en termes de l'évolution d'un paramètre, on n'est plus certain de l'unicité de la solution ou même de son existence.

Cela est bien connu et n'est pas particulier à l'élasticité couplée à l'endommagement. On trouve les mêmes phénomènes de perte d'unicité ou d'existence dans les problèmes d'élasticité non-linéaire, plasticité, frottement et mécanique de la rupture.

Le théorème des opérateurs implicites (voir par exemple Trénoigne [TRE85]) permet d'avoir des résultats sur l'existence et l'unicité de la solution dans certains cas. En mécanique de solides, son emploi est limité aux cas où la loi de comportement est une loi entière qui vérifie certaines hypothèses de différentiabilité (par exemple l'élasticité non-linéaire). En plasticité, un critère de non-bifurcation pour le problème en vitesses a été énoncé par Hill [HIL58], cette étude a été étendue au problème en accélérations Petrik et Thermann [PET84] ou encore au cas général du problème d'ordre  $n$  par Nguyen [NGU87], Nguyen et Triantafyllidis [NGU89] pour les matériaux standards généralisés.

Dans ces derniers travaux, il a été prouvé que le critère de non-bifurcation du problème en vitesses de Hill est en fait une condition suffisante de non-bifurcation pour le problème d'ordre quelconque  $n$  (c'est à dire en vitesse, en accélérations, vitesses d'accélérations, ...) et par conséquent du problème de évolution si l'on suppose que les champs  $U$  et  $D$  sont analytiques.

Ces études peuvent être appliquées directement à l'élasticité couplée à l'endommagement pour certains modèles indépendants du temps en formulation incrémentale. Plus précisément pour les modèles dont le convexe d'élasticité ne dépend pas de l'état. Comme on peut le constater dans les exemples du chapitre 2 cette hypothèse est très restrictive et elle exclut une bonne partie des modèles utilisées dans les applications.

Dans le chapitre 3 le problème d'évolution et le problème en vitesses ont été formulés sous forme de recherche d'un point de Nash. L'unicité et l'existence des points de Nash ont déjà été étudiées dans la littérature (voir par exemple Bensoussan, Lions, et Temam [BEN74]). Les résultats disponibles sont valables pour le problème en vitesses mais non pour le problème d'évolution. En effet, tel qu'il a été formulé, le problème d'évolution correspond à la recherche d'un point de Nash qui dépend du temps (à travers la fonctionnelle  $\psi$ ) et qui par conséquent n'entre pas dans le cadre indiqué dans [BEN74].

Le plan du chapitre 4 sera alors le suivant: Nous établirons d'abord un critère d'existence et d'unicité de la solution pour le problème en vitesses en utilisant les résultats de [BEN74]. nous étudierons par la suite le problème d'évolution correspondant aux modèles indépendants du temps en formulation fonctionnelle dans le cadre général indiqué dans le chapitre 2. Dans cette étude nous ne suivrons pas la méthode utilisée dans [NGU87], à savoir l'étude des problèmes d'ordre  $n$  successifs. Nous utiliserons la voie ouverte par Rice et Rudnicki [RIC80] dans l'étude de la régularité de la solution. On acceptera dans un premier temps l'hypothèse du solide équivalent de Hill et l'on étudiera l'unicité de la solution correspondante. Cela revient dans le cas qui nous occupe, à trouver un critère d'unicité pour un problème d'élasticité non-linéaire (avec une contrainte supplémentaire par rapport à l'élasticité, à savoir  $\mathbf{D} \in \Delta$ ). On étudiera par la suite dans quelles conditions cette hypothèse est valable pour le problème d'endommagement.

## 2. Existence et unicité de la solution pour le problème en vitesses.

### Proposition:

Le problème d'endommagement en vitesses admet une solution unique si la forme quadratique (9) est positive:

$$(9) \quad [\Delta U, \Delta D] \begin{bmatrix} V_{,uu}^u & V_{,ud}^u \\ V_{,du}^d & V_{,dd}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D \end{bmatrix} > 0 \quad \forall [\Delta U, \Delta D] \in \rho$$

$$\rho = \{ (\Delta U, \Delta D) / \Delta U, \Delta D \text{ suffisamment réguliers, } (\Delta U, \Delta D) \neq 0, \Delta U \in \dot{K}_0 \}$$

**Preuve:**

La formulation "point de Nash" du problème en vitesses explicitée dans le chapitre 3, s'écrit:

$$(10) \quad \begin{aligned} V^u(\dot{U}, \dot{D}) &\leq V^u(U^*, \dot{D}) & \forall U^* \in \dot{K}_t \\ V^d(\dot{U}, \dot{D}) &\leq V^d(\dot{U}, D^*) & \forall D^* \in \alpha \end{aligned}$$

où les fonctionnelles  $V^u$  et  $V^d$  et les espaces  $\dot{K}_t$  et  $\alpha$  ont été définies lors du même chapitre.

Les conditions de minimisation des fonctionnelles  $V^u$  et  $V^d$  sont (voir le N°2.4 du chapitre 1):

$$(11) \quad \begin{aligned} (V_{,u}^u(\dot{U}, \dot{D}), U^* - \dot{U}) &\geq 0 & \forall U^* \in \dot{K}_t \\ (V_{,d}^d(\dot{U}, \dot{D}), D^* - \dot{D}) &\geq 0 & \forall D^* \in \alpha \end{aligned}$$

Les expressions (10) et (11) sont donc équivalentes du fait de la convexité des fonctionnelles  $V^u$  et  $V^d$  par rapport à  $\dot{U}$  et  $\dot{D}$  respectivement (voir le N°2.4 du chapitre 1). Les inégalités (10) peuvent être exprimées de façon équivalente par:

$$(12) \quad (V_{,u}^u(\dot{U}, \dot{D}), U^* - \dot{U}) + (V_{,d}^d(\dot{U}, \dot{D}), D^* - \dot{D}) \geq 0 \quad \forall U^* \in \dot{K}_t, D^* \in \alpha$$

où ce qui revient au même:

$$(13) \quad (C(X), X^* - X) \geq 0 \quad \forall X^* \in \chi = \dot{K}_t \times \alpha$$

où

$$C(X) = \begin{bmatrix} V_{,u}^u \\ V_{,d}^d \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{D} \end{bmatrix}$$

Alors l'unicité est assurée dès que l'opérateur  $C(X)$  est strictement monotone. En effet supposons qu'il existe deux solutions  $X_1$  et  $X_2$  au problème (12). Cela implique:

$$(14) \quad (C(X_1), X^* - X_1) \geq 0 \quad \forall X^* \in \chi$$

$$(15) \quad (C(X_2), X^* - X_2) \geq 0 \quad \forall X^* \in \chi$$

Si l'on prend pour  $X^*$ ,  $X_2$  dans la première inégalité et  $X_1$  dans la seconde, on obtient après sommation des inégalités (13) et (14):

$$(16) \quad (C(X_2) - C(X_1), X_2 - X_1) \leq 0$$

Comme la stricte monotonie de  $C(X)$  impose que:

$$(17) \quad (C(X_2) - C(X_1), X_2 - X_1) > 0 \quad \forall X_2, X_1 \in \chi$$

l'inégalité (16) ne peut être vérifiée que si  $X_2 = X_1$ , d'où l'unicité de la solution. Pour la seule existence, il suffit que  $C(X)$  soit monotone (voir Bensoussan, Lions, et Temam [BEN74])

Etant donné que les fonctionnelles  $V^u$  et  $V^d$  sont quadratiques, l'opérateur  $C(X)$  est strictement monotone si et seulement si:

$$(18) \quad \begin{bmatrix} \Delta U & \Delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{,uu}^u & V_{,ud}^u \\ V_{,du}^d & V_{,dd}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D \end{bmatrix} > 0 \quad \forall [\Delta U, \Delta D] \in \rho$$

$$\rho = \{ (\Delta U, \Delta D) / \Delta U, \Delta D \text{ suffisamment réguliers, } (\Delta U, \Delta D) \neq 0, \Delta U \in \dot{K}_0 \}$$

Pour la monotonie il suffit que:

$$(19) \quad \begin{bmatrix} \Delta U & \Delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{,uu}^u & V_{,ud}^u \\ V_{,du}^d & V_{,dd}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall [\Delta U, \Delta D] \in \rho \quad \blacksquare$$

Les termes indiqués dans les inégalités (17) et (18) correspondent dans chaque formulation à:

a) Dans le cas de la formulation incrémentale:

$$V_{,uu}^u \Delta U \Delta U = \int_{\bar{V}} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \epsilon(\Delta U) : \epsilon(\Delta U) dv$$

$$V_{,u\lambda}^u \Delta U \Delta \lambda = \int_{V_d} \Delta \lambda \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} \cdot \frac{\partial g}{\partial Y} : \dot{\epsilon} dv$$

$$V_{,\lambda u}^d \Delta \lambda \Delta U = \int_{V_d} \Delta \lambda \frac{\partial g}{\partial Y} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} dv$$

$$V_{,\lambda\lambda}^d \Delta \lambda \Delta \lambda = \int_{V_d} h \Delta \lambda \Delta \lambda dv$$

b) Dans le cas de la formulation fonctionnelle.

$$V_{,uu}^u \Delta U \Delta U = \int_{\bar{V}} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \epsilon(\Delta U) : \epsilon(\Delta U) dv$$

$$V_{,ud}^u \Delta U \Delta D = \int_{V_d} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} : \epsilon(\Delta U) \cdot \Delta D \, dv$$

$$V_{,du}^d \Delta D \Delta U = \int_{V_d} \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \epsilon} \cdot \Delta D : \epsilon(\Delta U) \, dv$$

$$V_{,dd}^d \Delta D \Delta D = \int_{V_d} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} \right] \cdot \Delta D \cdot \Delta D \, dv$$

### 3. Unicité de la solution pour le problème d'évolution.

#### 3.1 Position du problème.

On se place dans le cadre suivant:

i) On considère un solide dont le matériau suit la loi de comportement écrite sous formulation fonctionnelle et décrite lors du chapitre 2.

ii) Le système est soumis à une sollicitation extérieure caractérisée par un paramètre scalaire  $\delta(t)$  qui est une fonction croissante du temps  $t$ .

Dans les paragraphes qui suivent l'étude de l'unicité de la solution sera réalisé en deux étapes. On supposera dans un premier temps qu'il n'existe pas dans le solide, des zones en décharge élastique. On déterminera ensuite sous quelles conditions une décharge élastique est elle possible.

Afin d'éclaircir le sens de la démarche, considérons le graphe de la figure 5 qui représente la courbe  $\sigma$  en fonction de  $\epsilon$  dans un essai de traction simple pour un élément de volume constitué du matériau en question.

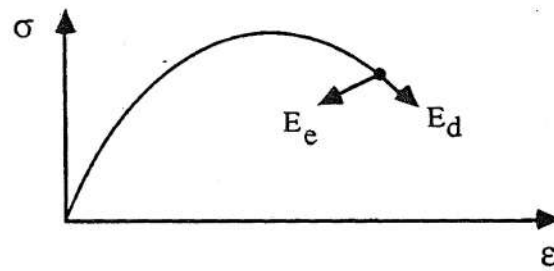


figure 5  $\sigma$  en fonction de  $\varepsilon$  dans un essai de traction simple.

On constate alors que l'expression du module tangent  $E_t$  dépend de la vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$ .

$$\begin{aligned} E_t &= E_d & \text{si} & \quad \dot{\varepsilon} > 0 \\ E_t &= E_e & \text{si} & \quad \dot{\varepsilon} < 0 \end{aligned}$$

puisque tel qu'il a été indiqué lors du chapitre 3, la loi de comportement est non-linéaire. A la suite de cette remarque on étudiera l'unicité de la solution en deux temps, on supposera d'abord que le matériau suit la branche à module tangent  $E_d$  partout dans la structure (ou son "équivalent dans le cas tridimensionnel"). On étudiera ensuite la validité de cette hypothèse. Dans le premier cas, il s'agit d'étudier, tel qu'il a été indiqué lors de la introduction, un problème d'élasticité non-linéaire, avec une contrainte supplémentaire, à savoir  $D \in \Delta$ . Dans le second, il s'agit d'étudier la possibilité d'apparition d'une discontinuité dans les fonctions  $\dot{U}(t)$  et  $\dot{D}(t)$ , ce qui peut être réalisé en considérant le problème en vitesses. Si la bifurcation du problème d'élasticité non-linéaire et la décharge élastique ne sont pas possibles, on admettra que la solution du problème d'évolution est unique.

### 3.2 Unicité de la solution lorsque il n'y a pas de décharge élastique.

#### 3.2.1 Caractérisation de la décharge élastique:

La loi d'évolution de l'endommagement dans le cas considéré implique:

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{D}_i(t) &> 0 & \text{si} & \quad \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y_i(\varepsilon(\tau); D(\tau))] = Y_i & \text{et} & \quad \dot{Y}_i(t) > 0 \\ \dot{D}_i(t) &= 0 & \text{sinon} & \end{aligned}$$

Alors l'absence de décharge élastique peut être caractérisée par:

$$(19) \quad \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y_i(\varepsilon(\tau), D(t))] = Y_i(t) \quad \forall x \in V, \quad t \in [0, T]$$

### 3.2.2 Formulation du problème d'évolution sans décharge élastique.

On désignera  $U(\delta)$  et  $D(\delta)$  le champ de déplacement et d'endommagement correspondant à l'histoire  $\delta(t)$ . On suppose alors que ces champs vérifient la condition (19). Dans ces conditions la formulation à deux champs pour le problème d'évolution, décrite dans le chapitre 3, s'écrit:

$$(20) \quad \begin{aligned} J^u(U(\delta), D(\delta), \delta) &\leq J^u(U^*, D(\delta), \delta) & \forall U^* \in K_\delta \\ J^d(U(\delta), D(\delta), \delta) &\leq J^d(U(\delta), D^*, \delta) & \forall D^* \in \Delta \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} J^u(U, D, \delta) &= \int_V W^d(\varepsilon(U); D) dv - \int_{\partial_\sigma V} \delta F^\circ U ds \\ J^d(U, D, \delta) &= \int_V \Phi(D) dv + \int_V \Psi(\varepsilon(t), D) dv \\ \Psi &= \int_0^D \frac{\partial W}{\partial D}(\varepsilon)(\tau), X dX \end{aligned}$$

$K_\delta$  est l'ensemble de champs de déplacement cinématiquement admissibles qui peuvent dépendre du paramètre  $\delta$  lorsque la structure est soumise à un chargement en déplacement imposé. ■

On constate alors, qu'il n'y a pas de dépendance des fonctionnelles par rapport à l'histoire de déformations. On a donc à étudier un problème d'élasticité non-linéaire. ■

La dépendance de  $K_\delta$  par rapport au paramètre  $\delta$  peut être éliminée en faisant le changement de variables suivant:

$$(21) \quad \hat{U} = U - \bar{U}$$

où  $\bar{U}$  est un champ cinématiquement admissible quelconque que l'on fixe arbitrairement.  
L'inconnue  $\hat{U}$  est par conséquent un champ cinématiquement admissible à zéro ( $\hat{U} \in K_0$ ).

On peut maintenant reformuler le problème (20) à l'aide des fonctionnelles:

$$(22) \quad \begin{aligned} \hat{J}^u(\hat{U}, D, \delta) &= J^u(\hat{U} + \bar{U}, D, \delta) \\ \hat{J}^d(\hat{U}, D, \delta) &= J^d(\hat{U} + \bar{U}, D, \delta) \end{aligned}$$

cela donne:

$$(23) \quad \begin{aligned} \hat{J}^u(\hat{U}(\delta), D(\delta), \delta) &\leq \hat{J}^u(U^*, D(\delta), \delta) \quad \forall U^* \in K_0 \\ \hat{J}^d(\hat{U}(\delta), D(\delta), \delta) &\leq \hat{J}^d(\hat{U}(\delta), D^*, \delta) \quad \forall D^* \in \Delta \end{aligned}$$

Tel qu'il a été indiqué lors du N° 4.2 de ce chapitre une formulation tel que (23) est équivalente à:

$$(24) \quad (F(x, \delta), x^* - x) \geq 0 \quad \forall \quad x^* \in \chi = K_0 \times \Delta$$

où

$$F(x, \delta) = \begin{bmatrix} \hat{J}^u_{,u} \\ \hat{J}^d_{,d} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} \hat{U}(\delta) \\ D(\delta) \end{bmatrix}$$

### 3.2.3 Critère d'unicité

#### Proposition:

Supposons qu'il existe une solution, appelée solution fondamentale  $(\hat{U}_0(\delta), D_0(\delta))$ . Cette

solution est supposée unique du moins jusqu'à  $\delta = \delta_0 > 0$ ; Supposons aussi que l'opérateur  $F(X, \delta)$  défini lors du paragraphe précédent soit dérivable par rapport à  $\delta$  et que cette dérivée:

$$F_{,\delta} : (X, \delta) \longrightarrow F_{,\delta}(X, \delta)$$

soit bornée et continue. Alors on peut montrer qu'il existe un  $r \in \mathbb{R}^+$  tel que pour  $\delta / |\delta - \delta_0| < r$  la solution du problème (24) est unique à condition que:

$$F : X \longrightarrow F(X, \delta)$$

soit strictement monotone.

**Preuve:**

En effet supposons qu'il existe deux solutions  $X_1$  et  $X_2$  au problème (24). Cela implique:

$$(25) \quad (F(X_1, \delta), X^* - X_1) \geq 0 \quad \forall X^* \in \chi$$

$$(26) \quad (F(X_2, \delta), X^* - X_2) \geq 0 \quad \forall X^* \in \chi$$

Alors, puisque  $F$  est dérivable par rapport à  $\delta$  on a:

$$(27) \quad (F(X_1, \delta_0) + F_{,\delta}(X_1, \delta_0)(\delta - \delta_0) + \omega(X_1, \delta - \delta_0), X^* - X_1) \geq 0$$

$$(28) \quad (F(X_2, \delta_0) + F_{,\delta}(X_2, \delta_0)(\delta - \delta_0) + \omega(X_2, \delta - \delta_0), X^* - X_2) \geq 0$$

où

$$|\omega(\delta - \delta_0)| = o(|\delta - \delta_0|) \text{ pour } \delta \longrightarrow \delta_0$$

Si l'on prend pour  $X^*$ ,  $X_2$  dans la inégalité (27) et  $X_1$  dans la (28), on obtient après sommation :

$$(29) \quad \begin{aligned} & (F(X_1, \delta_0) - F(X_2, \delta_0), X_1 - X_2) + \\ & + (\delta - \delta_0)(F_{,\delta}(X_1, \delta_0) - F_{,\delta}(X_2, \delta_0), X_1 - X_2) + \\ & + (\Delta\omega(\delta - \delta_0), X_1 - X_2) \leq 0 \end{aligned}$$

Si on fait tendre  $\delta \rightarrow \delta_0$ , le seconde et troisième termes de l'inégalité (29) tendent vers zéro et le premier est positif puisque par hypothèse  $F(X, \delta)$  est strictement monotone; par conséquent la solution est unique.

**Proposition:**

La solution  $X_0(\delta)$  au problème (24) est continue en  $\delta_0$ .

**preuve:**

La solution  $X_0(\delta)$  est caractérisée par:

$$(30) \quad (F(X_0(\delta), \delta), X^* - X_0(\delta)) \geq 0 \quad \forall X^* \in \chi$$

et  $X_0(\delta_0)$  par:

$$(31) \quad (F(X_0(\delta_0), \delta_0), X^* - X_0(\delta_0)) \geq 0 \quad \forall X^* \in \chi$$

Alors après sommation de (30) et (31):

$$(32) \quad (F(X_0(\delta), d) - F(X_0(d_0), d_0), X_0(d) - X_0(d_0)) \leq 0$$

Supposons maintenant que lorsque l'on fait tendre  $d \rightarrow d_0$ ,  $X_0(d) \rightarrow \bar{X} \neq X_0(d_0)$ . Alors à cause de la continuité de  $F(X, d)$  par rapport à  $d$  et d'après (32).

$$(33) \quad (F(\bar{X}, \delta) - F(X_0(\delta_0), \delta_0), \bar{X} - X_0(\delta_0)) \leq 0$$

Cela est impossible, à cause de la stricte monotonie de  $F : X \rightarrow F(X, \delta)$ . D'où la continuité de  $X_0(\delta)$  dans  $\delta_0$ .

### 3.3 Etude de la décharge élastique.

Avant de discuter l'unicité de la solution dans le cas général, considérons d'abord sous

quelles conditions une décharge élastique est elle possible.

Pour cela introduisons les notations suivantes. On considère une solution  $(U(\delta), D(\delta))$  du problème en question pour  $0 \leq \delta \leq \delta_f$ . On suppose que pour  $0 \leq \delta \leq \delta_1$ , la solution ne présente pas de décharge élastique et l'on notera:

$$(34) \quad \begin{aligned} U(\delta) &= U_0(\delta) \\ D(\delta) &= D_0(\delta) \end{aligned} \quad \text{si } \delta \leq \delta_1$$

On suppose aussi que pour  $\delta > \delta_1$  la décharge élastique a lieu. On peut alors diviser la structure en deux zones  $V_e$  et  $V_d$  telles que  $V_e$  soit la zone en décharge élastique,  $V_d$  celle en charge et  $V_e \cup V_d = V$ .

Pour  $\delta > \delta_1$  on notera la solution comme suit:

$$(35) \quad \begin{aligned} U(\delta) &= U_1(\delta) \\ D(\delta) &= D_1(\delta) \end{aligned} \quad \text{si } \delta > \delta_1$$

On suppose également, et cela constitue une hypothèse essentielle de cette étude, que la décharge élastique apparaît comme une discontinuité dans le temps des champs  $\dot{U}(t)$  et  $\dot{D}(t)$  pour  $\delta = \delta_1$ . Cette hypothèse semble naturelle du fait que l'on ne considère que des chargements monotones croissants et si l'on tient compte du graphe de la figure 5.

**Proposition:**

L'apparition d'une zone en décharge élastique sous chargement croissant est impossible si la forme quadratique (36) est strictement positive. C'est à dire:

$$(36) \quad \begin{bmatrix} \Delta \dot{U} & \Delta \dot{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{,uu}^u & J_{,ud}^u \\ J_{,du}^d & J_{,dd}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{U} \\ \Delta \dot{D} \end{bmatrix} > 0 \quad \forall [\Delta U, \Delta D] \in \rho$$

$$\rho = \{ (\Delta U, \Delta D) / \Delta U, \Delta D \text{ suffisamment réguliers, } (\Delta U, \Delta D) \neq 0, \Delta U \in \dot{K}_0 \}$$

**Preuve:**

La solution du problème en vitesses vérifie les inégalités suivantes (voir chapitre 3 N° 2.4):

$$(37) \quad \begin{aligned} T^u(\dot{U}(\delta), \dot{D}(\delta), \delta) &\leq T^u(U^*, \dot{D}(\delta), \delta) & \forall U^* \in \dot{K}_t \\ T^d(\dot{U}(\delta), \dot{D}(\delta), \delta) &\leq T^d(\dot{U}(\delta), D^*, \delta) & \forall D^* \in \beta \end{aligned}$$

où les fonctionnelles  $T^u, T^d$  et les espaces  $\dot{K}_t$  et  $\beta$  ont été définis lors du N°2.4 du chapitre 3.

Alors puisque  $\dot{K}_t$  est un espace affine et  $\beta$  un sous-espace vectorielle, les inégalités (37) sont équivalentes à (voir le chapitre 1):

$$(38) \quad \begin{aligned} (T^u_{,u}(\dot{U}, \dot{D}), U^*) &= 0 & \forall U^* \in \dot{K}_0 \\ (T^d_{,d}(\dot{U}, \dot{D}), D^*) &= 0 & \forall D^* \in \beta \end{aligned}$$

où  $\dot{K}_0$  désigne le sous-espace vectoriel de champs cinématiquement admissibles à zéro.

Pour  $\delta = \delta_1$  les équations (38) seront notées:

$$(39) \quad \begin{aligned} ((T^u_{,u})_0, U^*) &= 0 & \forall U^* \in \dot{K}_0 \\ ((T^d_{,d})_0, D^*) &= 0 & \forall D^* \in \beta \end{aligned}$$

avec

$$(40) \quad \int_V \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} : \dot{\epsilon} \cdot D^* dv \leq 0 \quad \forall D^* \in \beta / D^* < 0$$

L'inégalité (40) indique que  $\dot{Y}_1(\delta_1) > 0 \quad \forall x \in V$  puisque la décharge élastique n'a pas encore eu lieu.

Pour  $\delta = \delta_1^+$ , on a:

$$(41) \quad \begin{aligned} ((T^u)_{,u})_1, U^* &= 0 & \forall U^* \in \dot{K}_0 \\ ((T^d)_{,d})_1, D^* &= 0 & \forall D^* \in \beta \end{aligned}$$

avec

$$(42) \quad \begin{aligned} \int_{V_e} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} : \dot{\epsilon} \cdot D^* \, dv &\leq 0 \\ \int_{V_d} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} : \dot{\epsilon} \cdot D^* \, dv &> 0 \end{aligned} \quad \forall D^* \in \beta / D^* < 0$$

puisque dans la zone en décharge élastique  $V_e$  on a:  $\dot{Y}_i(\delta_1^+) < 0$  et dans la zone "en charge"  $V_d$ ,

on a:  $\dot{Y}_i(\delta_1^+) > 0$

Après avoir retranché (39) de (41) il vient:

$$(43) \quad \begin{aligned} \int_V \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \Delta \epsilon : \epsilon(U^*) + \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} : \epsilon(U^*) \cdot \dot{D} \right] dv &= 0 \\ \int_V \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} + \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D} \right] \cdot \Delta \dot{D} \cdot D^* \, dv + \int_{V_d} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \epsilon} \cdot D^* : \Delta \dot{\epsilon} \right] dv &= \\ &= \int_{V_e} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \epsilon} \cdot D^* : \epsilon(\dot{U}_0) \right] dv \end{aligned}$$

où

$$\Delta \epsilon = \epsilon(\dot{U}_1) - \epsilon(\dot{U}_0)$$

$$\Delta \dot{D} = \Delta \dot{D}_0 - \Delta \dot{D}_1$$

si l'on tient compte des inégalités (42) et des équations (43), il vient:

$$\begin{aligned}
 (44) \quad & \int_V \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \Delta \epsilon : \epsilon(U^*) + \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} : \epsilon(U^*) \cdot \dot{D} \right] dv = 0 \\
 & \int_V \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} + \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D} \right] \cdot \Delta \dot{D} \cdot D^* dv + \int_V \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \epsilon} \cdot D^* : \Delta \dot{\epsilon} \right] dv \leq 0 \\
 & \forall U^* \in K_0 \quad ; \quad D^* \in \beta / D^* < 0 \quad \forall x \in V_e
 \end{aligned}$$

On utilisera la notation suivante pour exprimer (44):

$$\begin{aligned}
 (45) \quad & ((J_{,uu}^u)_0 \Delta \dot{U} + (J_{,ud}^u)_0 \Delta \dot{D}, U^*) = 0 \quad \forall U^* \in K_0 \\
 & ((J_{,du}^d)_0 \Delta \dot{U} + (J_{,dd}^d)_0 \Delta \dot{D}, D^*) \leq 0 \quad \forall D^* \in \beta / D^* < 0 \quad \forall x \in V_e
 \end{aligned}$$

Si l'on prend pour  $U^*$ ,  $U_1(\delta_1) - U_0(\delta_1)$  (qui appartient à  $K_0$ ) et pour  $D^*$ ,  $\dot{D}_1(\delta_1) - \dot{D}_0(\delta_1)$  (ce qui est aussi possible puisque  $\dot{D}_1(\delta_1) - \dot{D}_0(\delta_1) = -\dot{D}_0(\delta_1) < 0 \quad \forall x \in V_e$ ); on obtient l'inégalité (46) qui est vérifiée dès qu'il apparaît une zone en décharge élastique:

$$(46) \quad \begin{bmatrix} \Delta \dot{U} & \Delta \dot{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{,uu}^u & J_{,ud}^u \\ J_{,du}^d & J_{,dd}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{U} \\ \Delta \dot{D} \end{bmatrix} \leq 0$$

Par conséquent l'apparition d'une zone en décharge élastique sous chargement croissant est impossible si la forme quadratique (46) est strictement positive. On peut vérifier que cette condition coïncide avec la condition de non-bifurcation obtenue lors du N° 2 de ce chapitre.

### 3.4 Critère d'unicité.

Il s'ensuit des N° 3.2 et 3.3 de ce chapitre que si la condition de non-bifurcation du problème en vitesses:

$$(47) \quad [\Delta \hat{U}, \Delta \hat{D}] \begin{bmatrix} J_{,uu}^u & J_{,ud}^u \\ J_{,du}^d & J_{,dd}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{U} \\ \Delta \hat{D} \end{bmatrix} > 0 \quad \forall [\Delta \hat{U}, \Delta \hat{D}] \in \rho$$

et la condition de non-bifurcation du problème d'évolution sans décharge élastique:

$$(48) \quad ( (\hat{J}_{,u}^u)_1 - (\hat{J}_{,u}^u)_2, \hat{U}_1 - \hat{U}_2 ) + ( (\hat{J}_{,d}^d)_1 - (\hat{J}_{,d}^d)_2, D_1 - D_2 ) > 0 \\ \forall \hat{U}_1, \hat{U}_2 \in K_0 \quad D_1, D_2 \in \Delta$$

sont vérifiées simultanément, la bifurcation de la solution du problème d'évolution est impossible.

#### 4 Exemple élémentaire

Dans ce paragraphe on analysera, à l'aide des critères développés dans les paragraphes précédents, le modèle à deux barres de la figure 1, cité en exemple lors de l'introduction à ce chapitre.

##### i) Formulation point de Nash pour le modèle à deux barres.

La loi de comportement (1) admet les potentiels suivants:

$$(49) \quad W(\varepsilon, D) = \frac{1}{2}(1-D) E \varepsilon \varepsilon$$

avec:  $\Omega = [0, 1]$

$$(50) \quad \Phi(D) = \begin{cases} 0 & \text{si } D \leq 0 \\ ND^3 & \text{si } 0 \leq D \leq 1 \\ +\infty & \text{si } D > 1 \end{cases}$$

où  $N = \frac{E}{6M^2}$

La formulation point de Nash de ce problème est alors la suivante:

Trouver  $(U(\delta), D_1(\delta), D_2(\delta)) \in H^1(0, \delta_f) \times H^1(0, \delta_f) \cap \Delta \times H^1(0, \delta_f) \cap \Delta$  tel que:

$$(51) \quad \begin{aligned} \hat{J}^u(U(\delta), D_1(\delta), D_2(\delta), \delta) &\leq \hat{J}^u(U^*, D_1(\delta), D_2(\delta), \delta) \quad \forall U^* \in H^1(0, \delta_f) \\ \hat{J}^d(U(\delta), D_1(\delta), D_2(\delta), \delta) &\leq \hat{J}^d(U(\delta), D^*, D_2(\delta), \delta) \quad \forall D^* \in H^1(0, \delta_f) \cap \Delta \\ \hat{J}^d(U(\delta), D_1(\delta), D_2(\delta), \delta) &\leq \hat{J}^d(U(\delta), D_1(\delta), D^*, \delta) \quad \forall D^* \in H^1(0, \delta_f) \cap \Delta \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \hat{J}^u &= \frac{1}{2}(1-D_1) E U^2 + \frac{1}{4}(1-D_2) E (\delta-U)^2 \\ \hat{J}^d &= N D_1^3 - N D_2^3 - \frac{E}{2} D_1 [\text{Sup}(U)]^2 - \frac{E}{2} D_2 [\text{Sup}(\delta-U)]^2 \end{aligned}$$

$U$  est le déplacement de l'extrémité supérieure de la première barre,  $D_1$  l'endommagement dans la même barre,  $D_2$  l'endommagement dans la seconde.

ii) Solution homogène du problème à deux barres.

On peut aisément prouver qu'une solution au problème (48) est constituée par les fonctions:

$$(52) \quad \begin{aligned} U(\delta) &= \frac{1}{3} \delta \\ D_1(\delta) &= D_2(\delta) = \frac{1}{3} M \delta \end{aligned} \quad 0 \leq \delta \leq \frac{3}{M}$$

On introduit l'opérateur  $F$  qui est défini comme suit:

$$(53) \quad F(U(\delta), D_1(\delta), D_2(\delta), \delta) = \begin{bmatrix} \hat{J}^u_{,u} \\ \hat{J}^d_{,1} \\ \hat{J}^d_{,2} \end{bmatrix}$$

où  $\hat{J}^d_{,i}$  désigne la dérivée de  $\hat{J}^d$  par rapport à  $D_i$

On peut alors prouver que l'opérateur  $F$  est strictement monotone si la forme quadratique:

$$(54) \quad \begin{bmatrix} \Delta U & \Delta D_1 & \Delta D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{,uu}^u & J_{,u1}^u & J_{,u2}^u \\ J_{,1u}^d & J_{,11}^d & J_{,12}^d \\ J_{,2u}^d & J_{,21}^d & J_{,22}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D_1 \\ \Delta D_2 \end{bmatrix}$$

est positive quelque soit  $\Delta U, \Delta D_1, \Delta D_2 \neq 0$ .

Alors d'après le N° 3 de ce chapitre si (54) est positive la bifurcation de la solution considéré est impossible.

Si on appelle  $H$  la matrice intervenant en (54) on peut déterminer l'unicité de la solution on considérant le signe du déterminant de  $H$ . En effet tant que  $\det H$  est positif la forme quadratique (54) est défini positive et par conséquent la solution est unique.

Le signe de  $\det H$  en fonction de  $\delta$  est indiqué en figure 6. Cette figure montre l'allure du graphe de  $F$  en fonction de  $\delta$  pour la solution considérée. Le point  $c$  indiqué dans la même figure est donc le point de perte de d'unicité de la solution homogène.

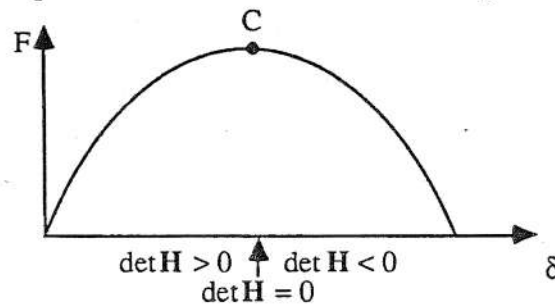


figure 6 Graphe force en fonction du déplacement pour la solution fondamentale au problème à deux barres.

### iii) Solutions bifurquées

On peut prouver qu'au point  $c$ , il y a deux autres branches en plus de la solution homogène. Ces solutions sont caractérisées par:

a) Solution à déformation localisée sur la barre 1.

$$\begin{aligned}
 \delta(U) &= 5U - 4MU^2 \\
 (52) \quad D_1(U) &= MU \\
 D_2(U) &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}
 \quad \frac{1}{2M} \leq U \leq \frac{1}{M}$$

L'allure des graphes force en fonction de  $\delta$  et sigma en fonction d'epsilon correspondant à chacune des barres sont indiquées en figures 7a et 7b respectivement.

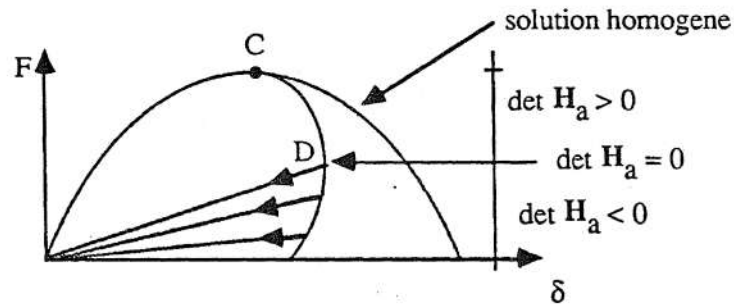


figure 7a Force en fonction du déplacement pour la solution à déformation localisée sur la barre 1.

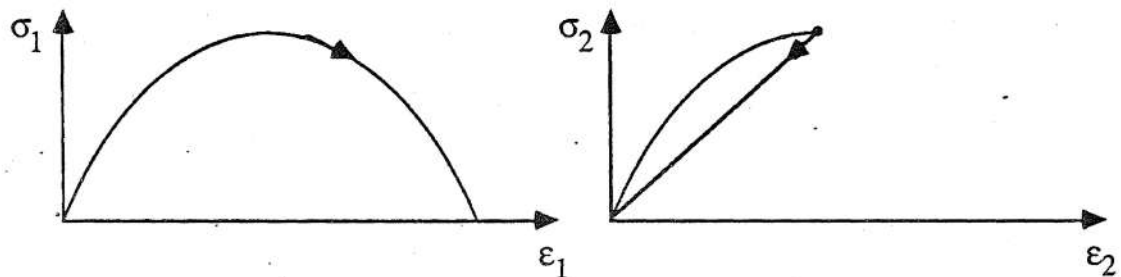


figure 7b Contrainte en fonction de la déformation dans les barres 1 et 2

L'unicité de la solution au problème en vitesses peut alors être déterminée, d'après le critère proposé dans le N° 2, en étudiant la forme quadratique suivante:

$$(56) \quad \begin{bmatrix} \Delta U & \Delta D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{,uu}^u & J_{,u1}^u \\ J_{,1u}^d & J_{,11}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D_1 \end{bmatrix}$$

On appelle  $H_a$  la matrice de la forme quadratique (56). Alors si  $\det H_a$  est positif la solution en vitesses de chacun des points de la branche bifurquée sera unique.

On peut remarquer que les dérivées par rapport à  $D_2$  n'intervient pas dans (56), cela est du au fait que la barre 2 est en décharge élastique ( $\text{Sup } \varepsilon_2(\delta) \neq \varepsilon_2(\delta)$ ) et par conséquent, elle ne fait pas partie de "Vd".

Le signe de  $\det \mathbf{H}_a$  en fonction de  $\delta$  est indique en figure 7a. On constate alors que pour:

$$\delta_c < \delta < \delta_D$$

le problème possède une solution unique (en vitesses). Au delà du point D, il y a d'autres solutions bifurquées qui sont caractérisées par de décharges élastiques sur les deux barres.

#### b) Solution à déformation localisée sur la barre 2

Une solution à déformation localisée sur la barre 2 est également possible. Dans ce cas on obtient une courbe force en fonction du déplacement dont l'allure est indiquée en figure 8.

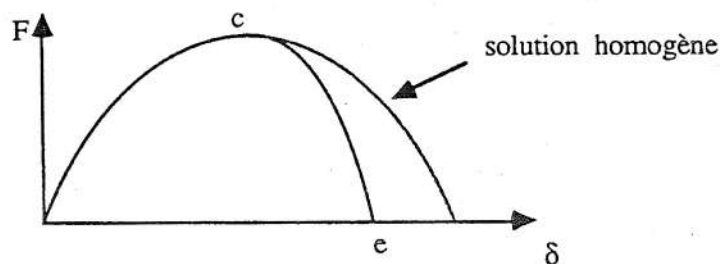


figure 8 Force en fonction du déplacement pour la solution à déformation localisée sur la barre 2.

La matrice  $\mathbf{H}_b$  qui permet d'étudier l'unicité du problème en vitesses est alors la suivante:

$$\mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} J_{,uu}^u & J_{,u2}^u \\ J_{,2u}^d & J_{,22}^d \end{bmatrix}$$

On peut prouver que la solution b est unique pour

$$\delta_c < \delta < \delta_e$$

où le point e est indiqué en figure 8.

c) autres solutions.

Si on examine le graphe force en fonction du déplacement correspondant à la solution homogène, on constate que la forme quadratique (53) n'est plus positive au delà du point c de la figure 6. Cela signifie qu'une bifurcation avec décharge élastique est possible au delà du point c. En effet on peut toujours trouver des solutions à déformation localisée sur la barre 1 ou la barre 2 (avec  $\delta$  non nécessairement croissant) à partir de n'importe quel point dans la branche descendante de la solution homogène. Dans un problème élémentaire à dimension 3, il est donc possible de trouver une infinité de solutions.

---

## V Etude de la stabilité de la solution et de la sensibilité aux imperfections

---

### 1. Introduction

En élasticité, l'étude de la stabilité de systèmes en équilibre quasistatique est considéré comme un problème résolu dans l'essentiel. Nous nous limiterons dans ce paragraphe, à en citer les résultats principaux, en vue de discuter par la suite la stabilité de systèmes élastiques-endommageables. Le lecteur intéressé par le sujet peut consulter les références classiques, telles que: Timoshenko et Gere [TIM61], Koiter [KOI45], Thompson et Hunt [THO73], Budiansky [BUD74].

Un modèle très simple tiré de l'ouvrage de Timoshenko peut illustrer la nature du problème de la stabilité. Considérons le système de la figure 1. Constitué par une barre verticale absolument rigide AB de longueur L et un ressort BC de raideur élastique E. La barre est articulée à la base et elle est supportée par le ressort. Une charge Q est appliquée sur la barre, à l'extrémité B et elle est dirigée suivant son axe.

L'angle  $\theta$  de la barre avec la verticale est la seule variable d'état du système. Une solution au problème de la figure 1, que l'on notera solution fondamentale, est :

$$(1) \quad \theta = 0 \quad \forall Q$$

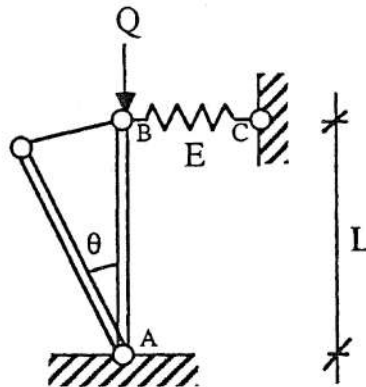


figure 1 Modèle élémentaire

Supposons maintenant que du à la présence d'une sollicitation extérieure de nature accidentelle une petite perturbation:

$$(2) \quad \theta = \theta^* > 0$$

hors de l'équilibre est introduite dans le système. Le bilan des forces agissant sur la barre est alors le suivant:

- La force Q produit un moment par rapport à l'articulation A d'expression:

$$(3) \quad M_Q = Q \theta^* L$$

- La force exercée par le ressort sur la barre AB de module:

$$(4) \quad F_R = E \theta^* L$$

produit un moment par rapport à la articulation d'expression:

$$(5) \quad M_R = E \theta^* L^2$$

Si le moment produit par le ressort est supérieur à celui de la force Q, c'est à dire si:

$$(6) \quad M(\theta^*, Q) = M_R + M_Q > 0$$

alors l'état d'équilibre  $\theta = 0$  est stable puisque lors de la disparition de la perturbation le système tendra vers son état d'équilibre précédent. Réciproquement si  $M < 0$ , la structure ne

pourra pas revenir à cet équilibre, même si la perturbation  $\theta^*$  cesse d'agir. Par conséquent le système s'éloignera de plus en plus de l'état initial pour finalement, dans ce cas particulier, s'effondrer. ■

Le critère de stabilité (6) peut être interprète de plusieurs façons:

a) "l'équilibre est stable tant que la fonction  $M = M(\theta^*)$  est strictement monotone (à  $Q$  constant), autour du point d'équilibre".

En effet, l'inégalité (6) est dans ce cas, la condition de stricte monotonie de la fonction  $M$ . On peut remarquer que cette condition assure aussi l'existence et unicité de la solution (voir chapitre 4). Ce résultat peut être généralisé au cas tridimensionnel continu. En élasticité, dans le cas général, la bifurcation se réalise avec perte de stabilité de la solution fondamentale.

b) Le notion de stricte monotonie de  $M$  est entièrement équivalent à celui de stricte convexité du potentiel  $J$ :

$$(7) \quad J = \int M d\theta^* = \frac{1}{2} E (\theta^* L)^2 - \frac{1}{2} Q (\theta^*)^2 + J_0$$

où  $J_0$  est la constante d'intégration,

Cela conduit à une interprétation "énergétique" du critère de stabilité (6). En effet le premier terme de l'expression (7) est l'incrément d'énergie de déformation du ressort BC lors de la perturbation. Le seconde est le travail de la force  $Q$  sur la perturbation  $\theta^*$ .  $J$  est donc l'énergie potentielle du système considéré. L'équilibre est alors caractérisé par:

$$(8) \quad M = \frac{dJ}{d\theta}$$

ce qui signifie qu'il rend stationnaire l'énergie potentielle  $J$ . Si le potentiel  $J$  est localement strictement convexe, c'est à dire si le critère de stabilité (6) est vérifié, alors le point stationnaire est un point de minimum de l'énergie potentiel. par conséquent le critère de stabilité (6) peut être exprimé de façon équivalente par:

$$(9) \quad \Delta J(\theta^*) = \Delta W - \Delta T_Q > 0$$

En termes généraux l'interprétation énergétique est la suivante: "Un état d'équilibre est stable s'il constitue un point de minimum relatif de l'énergie potentielle". Cela implique l'existence d'une "barrière d'énergie" entre l'état d'équilibre considéré et d'autres états alternatifs.

c) Si l'on fait un bilan d'énergie lors de la perturbation, on obtient, en l'absence des termes de dissipation, l'expression suivante:

$$(10) \quad \Delta W = \Delta T_{ex}$$

où  $\Delta W$  est l'incrément de l'énergie de déformation et  $\Delta T_{ex}$  le travail des efforts de extérieurs lors de la perturbation.

Le travail des efforts extérieurs peut à son tour s'exprimer par:

$$(11) \quad \Delta T_{ex} = \Delta T_Q + \Delta T_P$$

où  $\Delta T_Q$  est l'incrément du travail de la force  $Q$  sur la perturbation et  $\Delta T_P$  est le travail des efforts de perturbation (la sollicitation extérieure, de nature indéterminée).

Des expressions (10) et (11) on a donc:

$$(12) \quad \Delta T_P = \Delta W - \Delta T_Q$$

La comparaison de l'équation (12) avec le critère de stabilité (8) nous emmène a une troisième interprétation:

"L'état d'équilibre est stable si pour toute perturbation du système hors de l'équilibre, le travail des efforts de perturbations est positif".

En effet supposons que ce travail soit négatif pour au moins une perturbation particulière. Alors, si la perturbation est effectivement réalisée, le système rendrait une partie de son énergie de déformation pendant le processus. Par conséquent il ne pourrait pas récupérer l'état d'équilibre précédent sans intervention extérieure. Alors le système s'éloignerait de plus en plus de l'état d'équilibre précédent vers un état d'équilibre alternatif à moindre énergie et complètement différent du précédent. ■

L'étude de la stabilité dans le cas général peut se faire par généralisation de l'une des trois interprétations données ci-dessus. La seconde interprétation donne lieu au critère bien connu de seconde variation de Lagrange-Dirichlet qui peut être interprété comme suit:

Soit un système élastique dont l'équilibre est déterminé par le principe de l'énergie potentielle stationnaire à partir de la fonctionnelle  $J$ .

$$(13) \quad J = J(U, \lambda)$$

où  $U$  représente la ( ou les ) variables d'état et  $\lambda$  est un paramètre scalaire caractérisant les efforts extérieurs.

Alors l'équilibre quasistatique est obtenu par:

$$(14) \quad (J_u, U^*) = 0 \quad \forall U^* \text{ adm.}$$

Et la stabilité de l'état d'équilibre ainsi déterminé par le critère de seconde variation:

$$(15) \quad (J_{uu}, U^*) > 0 \quad \forall U^* \text{ adm.} \quad \blacksquare$$

La troisième interprétation du critère de stabilité a été utilisée dans l'extension de l'étude de la stabilité, au cas des systèmes irréversibles dissipatifs.

Dans le cas des systèmes irréversibles, la stabilité continue à être le sujet de nombreux travaux bien qu'elle ait été discutée depuis longtemps, notamment dans le cas de l'élastoplasticité. Des références classiques dans le sujet sont les articles de Karmann, Shanley et Hill. D'une importance particulière, l'article de Hill de 1958 [HIL58] où ont été énoncés des critères de stabilité et d'unicité dans le cas de l'élastoplasticité. Nous ne ferons pas ici une étude bibliographique du sujet, nous nous limiterons comme dans le cas de l'élasticité à citer quelques références: L'article de Hill déjà mentionné, Petrik [PET85] pour l'élastoplasticité, Bazant [BAZ88], De Borst [BOR87] pour des matériaux adoucissants en petites perturbations, Fedelich et Ehflacher [FED88], [FED89] pour les modèles à "dissipation simple" et Nguyen [NGU84] dans le cadre général des matériaux standards généralisés.

Ce dernier article est à la base de l'étude menée au N° 2 de ce chapitre. Dans l'article cité il a été réalisé une généralisation de l'étude de Hill au cas de systèmes irréversibles obéissant au

principe de dissipation maximale, c'est à dire de milieux qui suivent modèles standards en plasticité, frottement, rupture, endommagement, etc.

Tel qu'il a été précisé au chapitre 4, les résultats de cet étude peuvent être appliqués directement au cas des modèles d'élasticité couplée à l'endommagement en formulation incrémentale dont le convexe d'élasticité ne dépend pas de l'état. Dans le paragraphe 2. de ce chapitre nous étudierons la stabilité des systèmes obéissant à une loi de comportement d'élasticité couplée à l'endommagement en formulation fonctionnelle dans le cadre un peu plus général décrit lors du chapitre 2. Il s'agit donc, d'étendre les résultats de Hill et Nguyen au cas cité. C'est ce que nous appellerons "stabilité au sens de Hill".

Dans la troisième section de ce chapitre nous étudierons la sensibilité de la solution aux imperfections. Dans ce paragraphe on considère le problème en vitesses formulé comme la recherche d'un point de Nash avec contrainte (voir chapitre 3), où l'on introduira une nouvelle variable  $P$  caractérisant les données du problème en vitesses (géométrie de la structure, paramètres caractéristiques du matériau et l'état du système à l'instant considéré). On peut alors définir l'ensemble  $S(P_0)$  qui est constitué par toutes le couples  $(\dot{U}, \dot{D})$  qui sont solutions du problème correspondant aux données  $P = P_0$ . On définira alors la stabilité des solutions  $S(P_0)$  vis à vis des défauts de la façon suivante:

Les solutions  $S(P_0)$  seront dites stables (au sens "sensibilité aux imperfections") si l'application  $P \rightarrow S(P)$  est continue au point  $P_0$ .

Autrement dit, l'ensemble de solutions  $S(P_0)$  est stable si lors d'une "petite variation"  $\Delta P$  des données du problème en question, on peut trouver, pour chaque solution  $(\dot{U}_0, \dot{D}_0) \in S(P_0)$  une solution  $(\dot{U}_p, \dot{D}_p) \in S(P_0 + \Delta P)$  qui est "proche" de la première et réciproquement.

Cette étude à été réalisée sur la base des résultats obtenus par Robinson [ROB79],[ROB82]. Dans ces articles l'auteur étudie les propriétés des solutions des équations généralisées qui apparaissent en programmation non-linéaire et économie mathématique et dont le problème d'endommagement fait aussi partie. Il est important de faire remarquer que l'étude de Robinson concerne exclusivement le cas où les inconnues du problème appartiennent à un espace de dimension finie, cela signifie que les résultats énoncés ne sont valables pour le problème d'endommagement qu'après discrétisation.

Bien que de nature différente les études menés lors des paragraphes 2. et 3. conduisent à des critères semblables, ce qui signifie qu'au moins dans certains cas particuliers le critère de stabilité "au sens de Hill" est aussi un critère de stabilité au sens "sensibilité aux imperfections".

## 2. Etude de la stabilité au sens de Hill.

### 2.1 Position du problème

On se place dans le cadre suivant:

- On considère un solide dont le matériau vérifie une loi d'élasticité couplée à l'endommagement en formulation fonctionnelle, telle quelle a été décrite dans le chapitre 2.
- On accepte le postulat de stabilité suivant: "Un état d'équilibre est stable si pour toute perturbation admissible du système, hors de l'équilibre, le travail des efforts de perturbation est positif"

Autrement dit, l'état d'équilibre est stable si:

$$(13) \quad \Delta T_P(\Delta U, \Delta D) > 0 \quad \forall \Delta U, \Delta D \neq 0$$

où  $\Delta T_P$  est le travail des efforts de perturbation et  $\Delta U, \Delta D$  sont des perturbations admissibles.

Il suffit alors de définir l'espace des perturbations admissibles et d'étudier le travail des efforts de perturbation sur cet espace pour en déduire un critère de stabilité.

### 2.2 Définition du travail des efforts de perturbation

On considère un solide dont l'état d'équilibre à un instant  $t$  est donné par  $(U, D)$  on introduit alors des efforts de perturbation  $\Delta F_p$  dans le système. Alors d'après le premier principe de la thermodynamique on a:

$$(14) \quad \Delta W + \Delta \Phi = \Delta T_{ex}$$

où  $\Delta W$  est l'incrément de l'énergie de déformation lors de la perturbation,  $\Delta T_{ex}$  est l'incrément du travail des forces extérieures  $F + \Delta F_p$  et  $\Delta \Phi$  l'incrément de l'énergie dissipée. C'est à dire:

$$\begin{aligned} \Delta W &= W(U + \Delta U, D + \Delta D) - W(U, D) \\ (15) \quad \Delta \Phi &= \Phi(D + \Delta D) - \Phi(D) \\ \Delta T_{ex} &= \int_{\partial V_\sigma} (F + \Delta F_p) (U + \Delta U) dS - \int_{\partial V_\sigma} F U dS = \Delta T + \Delta T_p \end{aligned}$$

Dans la dernière expression le terme  $\Delta T$  désigne l'incrément du travail des efforts extérieurs  $F$  lors de perturbation et  $\Delta T_p$  le travail des efforts de perturbation. Par conséquent d'après (14) et compte tenu de (15c) on a:

$$(16) \quad \Delta T_p = \Delta W - \Delta T + \Delta \Phi$$

Si l'on exprime les termes de l'expression (16) en fonction des potentiels utilisés dans la formulation "point de Nash" du problème d'évolution (voir chapitre 3), on obtient:

$$(17) \quad \Delta T_p(\Delta U, \Delta D) = J^u(U + \Delta U, D + \Delta D) - J^u(U, D) + \Phi(D + \Delta D) - \Phi(D)$$

où  $\Phi(D) = \int_V \Phi dV$  et  $J^u(U, D)$  a été défini dans le chapitre 3.

### 2.3 Critère de stabilité

Si l'on suppose que le potentiel  $J^u(U, D)$  et l'énergie dissipée  $\Phi(D)$  admettent un développement en série de Taylor autour du point  $(U, D)$  jusqu'au second ordre, on a:

$$(18) \quad \Delta T_P(\Delta U, \Delta D) \approx J_{,u}^u \Delta U + (J_{,d}^u + \Phi_{,d}) \Delta D + \\ + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta U & \Delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{,uu}^u & J_{,ud}^u \\ J_{,du}^u & J_{,dd}^d + \Phi_{,dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D \end{bmatrix}$$

où l'on a considéré que les perturbations sont suffisamment petites pour que l'on puisse approcher  $\Delta T_P$  par la forme quadratique (18). On obtiendra donc un critère de stabilité aux "petites" perturbations ou critère de stabilité "au second ordre".

On introduit alors l'espace des perturbations admissibles  $\theta$  composé par les perturbations  $\Delta U$  qui respectent les conditions aux limites en déplacement, et les perturbations  $\Delta D$  qui sont thermodynamiquement admissibles, c'est à dire  $\Delta D_i \geq 0$ .

$$(19) \quad \theta = \{ (\Delta U, \Delta D) / \Delta U \text{ C. A. à zéro (noté } \Delta U \in K_0), \Delta D \geq 0 \forall x \in V, \Delta U \text{ et } \Delta D \text{ "petits"} \}$$

Autrement dit, on suppose que l'endommagement ne peut qu'augmenter lors d'une perturbation.

On peut alors prouver que le terme de premier ordre:  $(\Delta T_P)_1$  est toujours positif ou nul. En effet:

$$(20) \quad (\Delta T_P)_1 = J_{,u}^u \Delta U + (J_{,d}^u + \Phi_{,d}) \Delta D$$

où

$$J_{,u}^u \Delta U = \int_V \frac{\partial W}{\partial \epsilon} : \epsilon(\Delta U) \, dv - \int_{\partial_\sigma V} F_d \Delta U \, ds \\ J_{,d}^u \Delta D = \int_V \frac{\partial W}{\partial D} \cdot \Delta D \, dv$$

$$\Phi_{,d} \Delta D = \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial D} \cdot \Delta D \, dv$$

or

$$(21) \quad J_{,u}^u \Delta U = 0 \quad (\text{équilibre de } (\Delta U, \Delta D))$$

$$(22) \quad (J_{,d}^u + \Phi_{,d}) \Delta D = \int_V (Z - Y) \cdot \Delta D \, dv \geq 0 \quad \text{puisque:}$$

$$Z_i = \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y_i(\epsilon(\tau), D(\tau))]$$

Par conséquent:

$$(23) \quad (\Delta T_P)_1 \geq 0 \quad \forall (\Delta U, \Delta D) \in \theta \quad \blacksquare$$

On introduit la notation suivante. On appelle zone à endommagement actif l'ensemble:

$$(24) \quad V_d = \{ x \in V / Z = Y \text{ et } D \in D_c \}$$

Et on définit le sous-ensemble  $\gamma$  de l'ensemble de perturbations admissibles  $\theta$  par:

$$(25) \quad \gamma = \{ (\Delta U, \Delta D) / \Delta U \in K_0, \Delta D \geq 0 \, \forall x \in V_d, \Delta D = 0 \, \forall x \notin V_d, \Delta U \text{ et } \Delta D \text{ "petits"} \}$$

On a alors que:

$$(26) \quad (\Delta T_P)_1 = 0 \quad \forall (\Delta U, \Delta D) \in \gamma$$

L'interprétation mécanique de  $\gamma$  est la suivante:  $\gamma$  est le sous-ensemble de perturbations "potentiellement déstabilisantes". En effet, les perturbations admissibles qui n'appartiennent pas à  $\gamma$  sont sans importance du point de vue de la stabilité puisque pour les produire il faut un travail des efforts de perturbation qui est positif déjà au premier ordre. Par conséquent, pour étudier la stabilité, il suffit de considérer l'ensemble de perturbations  $\gamma$ .

On peut alors énoncer le critère de stabilité suivant: Un état d'équilibre est stable "au sens de Hill" si la forme quadratique:

$$(27) \quad (\Delta T_P)_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta U & \Delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{,uu}^u & J_{,ud}^u \\ J_{,du}^d & J_{,dd}^d + \Phi_{,dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D \end{bmatrix}$$

est positive sur l'ensemble  $\gamma$ .

Remarque:

Le calcul des différentielles intervenant dans le critère (27) et celles de la condition de non-bifurcation du problème en vitesses énoncé lors du chapitre 4, permet de comparer les deux critères. On trouve alors:

$$(28) \quad \begin{aligned} J_{,uu}^u \Delta U \Delta U &= V_{,uu}^u \Delta U \Delta U \\ J_{,ud}^u \Delta U \Delta D &= V_{,ud}^u \Delta U \Delta D \\ J_{,du}^d \Delta D \Delta U &= V_{,du}^d \Delta D \Delta U \\ (J_{,dd}^d + \Phi_{,dd}) \Delta D \Delta D &= V_{,dd}^d \Delta D \Delta D \end{aligned} \quad \forall (\Delta U, \Delta D) \in \gamma$$

Le critère de stabilité (27) et la condition de non-bifurcation pour le problème en vitesses conduisent donc à la même inégalité variationnelle, mais à la différence du critère (27) la condition de non-bifurcation doit être vérifiée pour toutes les variations  $\Delta D$  positives et négatives admissibles. Autrement dit dans la condition de stabilité, la forme quadratique (27) doit être positive sur  $\gamma$ , dans le critère de non-bifurcation la forme quadratique doit être définie sur l'espace vectoriel engendré par les éléments de  $\gamma$ . Par conséquent, en élasticité couplée à l'endommagement, il n'est pas a priori exclu la possibilité d'une bifurcation sans perte de stabilité de la solution fondamentale. Cela constitue une différence par rapport à l'élasticité non-linéaire. On retrouve donc le résultat énoncé par Hill en élastoplasticité et Nguyen dans les systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale.

### 3. Etude de la sensibilité des solutions en vitesses aux imperfections.

Une justification mathématique du critère de stabilité (27), dans le cas particulier où les inconnues du problème appartiennent à des espaces de dimension finie, est possible sur la base des résultats obtenus par Robinson [ROB79],[ROB82] (Voir aussi le chapitre 1) pour les équations généralisées. D'après ces résultats le critère de stabilité (27) assure la continuité des solutions du problème en vitesses par rapport aux données du problème.

On considère donc la formulation "point de Nash", avec contrainte du problème en vitesses:

$$(29) \quad \begin{aligned} V^u(\dot{U}; \dot{D}) &\leq V^u(U^*, \dot{D}) & \forall U^* \in \dot{K}_t \\ V^d(\dot{U}, \dot{D}) &\leq V^d(U, D^*) & \forall D^* \in \alpha \end{aligned}$$

où les fonctions  $V^u$ ,  $V^d$  et les espaces  $\dot{K}_t$  et  $\alpha$  ont été définis dans le chapitre 3. Mais on suppose maintenant que  $\dot{K}_t$  et  $\alpha$  sont de dimension finie (par exemple, après discrétisation par éléments finis d'un problème continu).

Les fonctions  $V^u$  et  $V^d$  dépendent aussi de l'état à l'instant considéré, de la géométrie de la structure, des conditions aux limites, etc. Tous ces paramètres peuvent être caractérisés par une variable que l'on appellera  $P$ . On suppose que cette variable appartient à un certain espace topologique. En introduisant explicitement la dépendance des fonctions  $V^u$  et  $V^d$  de la variable  $P$ , les expressions (29) deviennent:

$$(30) \quad \begin{aligned} V^u(\dot{U}, \dot{D}, P) &\leq V^u(U^*, \dot{D}, P) & \forall U^* \in \dot{K}_t \\ V^d(\dot{U}, \dot{U}, P) &\leq V^d(U, D^*, P) & \forall D^* \in \alpha \end{aligned}$$

Le problème (28) conduit alors à la résolution du système d'équations généralisées suivant (voir chapitre 1):

$$(31) \quad \begin{aligned} 0 &\in V^u_{,u}(\dot{U}, \dot{D}, P) + \partial_u \Psi_{\dot{K}_t}(\dot{U}, \dot{D}) \\ 0 &\in V^d_{,d}(\dot{U}; \dot{D}, P) + \partial_d \Psi_{\alpha}(\dot{U}, \dot{D}) \end{aligned}$$

La première équation généralisée du système (31) est donc la condition de minimisation de la fonction convexe  $V^u(\dot{U}, \dot{D})$  à  $\dot{D}$  constant sur l'ensemble  $\dot{K}_t$ . La seconde correspond à la minimisation de  $V^d(\dot{U}, \dot{D})$  à  $\dot{U}$  constant sur l'ensemble  $\alpha$ . L'expression (31) est, bien entendu, équivalente aux conditions de minimisation avec contrainte utilisées lors du chapitre 4. Il s'agit en fait d'une notation différente pour designer les mêmes inéquations variationnelles. Cette notation permet de faire remarquer que les expressions (31) correspondent à la résolution d'un système d'équations généralisées *linéaire*, puisque les fonctions  $V^u$  et  $V^d$  sont quadratiques en  $(\dot{U}, \dot{D})$ .

On introduit la notation suivante: On appelle  $S(P)$  l'ensemble de solutions du problème (31) à  $P$  fixé. On peut remarquer qu'il n'y pas besoin de préciser d'avantage la variable  $P$  ou l'espace auquel elle appartient puisque pour utiliser les théorèmes de stabilité (énoncés lors du chapitre 1) des solutions des équations généralisées (31) pour des données  $P = P_0 (S(P_0))$ , il suffit de connaître le gradient de l'opérateur:  $X \rightarrow F(X, P)$  au point  $P = P_0$ .

$$(32) \quad \begin{aligned} F(X; P) &= \begin{bmatrix} V^u_{,u} \\ V^d_{,d} \end{bmatrix} \\ X &= \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{D} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La condition suffisante de seconde ordre (énoncée lors du chapitre 1) est alors:

$$(33) \quad \begin{bmatrix} \Delta U & \Delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^u_{,uu} & V^u_{,ud} \\ V^d_{,du} & V^d_{,dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D \end{bmatrix} > \mu (||\Delta U||^2 + ||\Delta D||^2) \quad \forall \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D \end{bmatrix} \in \beta$$

où

$$\beta = \{ (\Delta U, \Delta D) / \Delta U \in \dot{K}_0, \Delta D \geq 0 \forall x \in V_d \}$$

Si la condition de second ordre (33) est vérifiée, on peut alors montrer [ROB82], l'existence d'un voisinage  $M$  autour du point  $P_0$  tel que si  $S(P_0)$  n'est pas vide et si  $P \in M$ ,  $S(P)$  n'est pas

vide. On peut également montrer [ROB82] la continuité de l'application:  $S : P \longrightarrow S(P)$ , au point  $P_0$ .

Remarques:

i) Etant donné que l'on considère  $\dot{U}$  et  $\dot{D}$  appartenant à des espaces de dimension finie, on constate que les critères de stabilité (33) et (27) coïncident. Autrement dit on constate que la condition de stabilité "au sens de Hill" assure la continuité de la solution du problème en vitesses par rapport aux données.

---

## VI Etude de la localisation et de la régularité de la solution.

---

### 1. Introduction.

Afin d'illustrer la nature du problème de la régularité et la localisation, considérons l'exemple unidimensionnel élémentaire qui est montré en figure 1. Il s'agit d'une barre encastrée à ses deux extrémités et de longueur 1. Elle est soumise à un déplacement imposé à l'extrémité supérieure, caractérisé par une fonction croissante et positive du temps  $t$  qui sera notée  $\delta(t)$ .

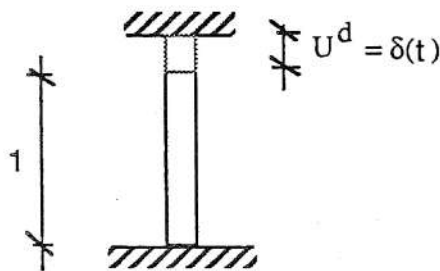


Figure 1 Barre unidimensionnelle soumise à un déplacement imposé.

La barre est modélisée comme un milieu continu qui occupe l'intervalle  $(0,1)$ . Le matériau de la barre obéit à la loi de comportement suivante:

$$\begin{aligned} \sigma &= (1-D) E \varepsilon \\ (1) \quad D &= M \sup_{\tau} [\varepsilon(\tau)] \end{aligned}$$

Une solution à cet exemple, la solution uniforme, est caractérisée par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} (2) \quad U(x,t) &= \delta(t) \times \\ D(x,t) &= M \delta(t) \end{aligned}$$

Considérons à présent le problème en vitesses lorsque l'on fixe l'état à  $t = \bar{t}$ . Dans ce cas, on sait que les vitesses vérifient les inégalités suivantes (voir chapitre 4):

$$(3) \quad \begin{aligned} (V_{,u}^u, U^* - \dot{U}) &\geq 0 & \forall U^* \in K \\ (V_{,d}^d, D^* - \dot{D}) &\geq 0 & \forall D^* \in \beta \end{aligned}$$

Où les fonctionnelles  $V^u, V^d$  et les espaces  $K$  et  $\beta$  ont été définis lors du chapitre 3.

Pour l'exemple considéré, les inégalités (3) deviennent (Voir les potentiels pour la loi de comportement (2) dans le N°4 du chapitre 4):

$$(4) \quad \begin{aligned} \int_0^1 \left\{ (1 - M \bar{\delta}) E \frac{d\dot{U}}{dx} - E \bar{\delta} \dot{D} \right\} \left( \frac{dU^*}{dx} - \frac{d\dot{U}}{dx} \right) dx &\geq 0 \\ \forall U^* \in H^1(0,1) / U^*(0) = 0 \quad U^*(1) = \dot{\bar{\delta}} \\ \int_0^1 \left\{ 6NM \bar{\delta} \dot{D} - E \bar{\delta} \frac{d\dot{U}}{dx} \right\} (D^* - \dot{D}) dx &\geq 0 \\ \forall D^* \in L_2(0,1) / D^*(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0,1) \end{aligned}$$

où  $\bar{\delta} = \delta(\bar{t})$ ,  $N = 6EM^2$ ,  $\dot{\bar{\delta}} = \dot{\delta}(\bar{t})$

Le problème 4 pourrait également être formulé à l'aide des formes locales des équations d'équilibre des milieux continus, auquel cas le problème de la figure 1 serait formulé comme suit:

Trouver  $\dot{U}(x) \in C^2(0,1)$ ,  $(\dot{\epsilon}(x), \dot{\sigma}(x)) \in C^1(0,1) \times C^1(0,1)$  tels que:

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{d\dot{U}}{dx} && \text{(équation de compatibilité)} \\ \dot{\sigma} &= \begin{cases} E[(1-D) - M] \dot{\epsilon} & \text{si } \dot{\epsilon} > 0 \\ E(1-D) \dot{\epsilon} & \text{sinon} \end{cases} && \text{(loi de comportement)} \\ \frac{d\dot{\sigma}}{dx} &= 0 && \text{(équation d'équilibre)} \\ \dot{U}(0) &= 0 \quad \dot{U}(1) = \dot{\bar{\delta}} && \text{(conditions aux limites)} \end{aligned}$$

On appellera "solution classique au problème en vitesses" les champs qui vérifient (5), afin d'indiquer la différence avec les champs vérifiant (4) qui seront nommés simplement "solution au problème en vitesses".

Les champs:

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{U}(x) &= x \, \bar{\delta} \\ \dot{D}(x) &= M \, \bar{\delta} \end{aligned}$$

vérifient, bien entendu, les inégalités (4) ainsi que les équations (5), mais on peut se demander s'il en est ainsi pour toutes les éventuelles solutions du problème (4). La réponse est négative. En effet, on peut montrer que les expressions suivantes:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{U}(x) &= ax + b \langle x - L \rangle_+ \\ \dot{D}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \leq L \\ c & \text{si } L < x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(où  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $L$  sont des constants à déterminer) peuvent être solutions au problème (4) à condition d'avoir:

$$(8) \quad \bar{\delta} \geq \frac{1}{2M}$$

Cependant (7) n'est évidemment pas, une solution classique puisque  $\dot{U}(x)$  n'est pas continûment dérivable.

On peut affirmer dans le cas général que toute solution classique est une solution au problème en vitesses et que la réciproque n'est pas nécessairement vérifiée. Tout cela est bien connu et correspond à la différence entre solution faible et solution classique aux problèmes aux limites en dérivées partielles.

L'étude de la régularité consiste alors, à étudier sous quelles conditions les solutions du problème en vitesses sont suffisamment régulières pour qu'elles puissent être des solutions classiques.

Cette étude peut sembler, à première vue, d'un intérêt secondaire du point de vue de l'ingénieur, puisque les solutions physiquement significatives sont les solutions faibles qui ont été dénommés ici solutions au problème en vitesses. Cependant l'exemple considéré montre que

la perte de régularité, est accompagnée par une "localisation" de l'endommagement qui peut précipiter l'amorçage d'une fissure ou même la ruine de la structure.

En effet, si on calcule les constantes indiquées dans (7) pour que ces fonctions soient des solutions au problèmes au vitesses, on trouve les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
 (9) \quad a &= \frac{1 - 2M \dot{\bar{\delta}}}{1 - (1-L)M \dot{\bar{\delta}}} \\
 b &= \frac{\dot{\bar{\delta}} - a}{1-L} \quad 0 < L < 1 \quad \text{et} \quad \bar{\delta} \geq \frac{1}{2M} \\
 c &= \frac{M \dot{\bar{\delta}}}{1-L} - ML a / (1-\bar{\delta})
 \end{aligned}$$

On constate alors:

i) Il existe une infinité de solutions (pour  $\bar{\delta} \geq \frac{1}{2M}$ ) au problème en vitesses puisque L peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre 0 et 1.

ii) On peut diviser la barre en deux zones, une zone en décharge élastique (l'intervalle (0,L)) puisque:

$$(10) \quad \text{si } x \in (0,L) \quad \text{et} \quad \bar{\delta} \geq \frac{1}{2M} \quad \text{alors} \quad \dot{\epsilon} = a < 0$$

et une zone, que l'on appellera zone de localisation, où le mécanisme d'endommagement reste actif, puisque:

$$(11) \quad \text{si } x \in [L,1) \quad \dot{D} = c > 0$$

iii) Dans la zone de localisation et quelle que soit la solution (7) choisie, le mécanisme d'endommagement est plus actif que pour la solution classique. En effet quelque soit  $L \in (0,1)$  on a:

$$(12) \quad \dot{D}_{\text{sol. avec loc.}} = c > M \dot{\bar{\delta}} = \dot{D}_{\text{sol. class.}}$$

iv) A la suite de iii, on constate que si la structure "suit" une branche avec localisation, la durée de vie de la structure (mesurée par la valeur de  $\bar{\delta}$  à la rupture) se trouve diminuée par rapport à la solution uniforme (2). Cette durée de vie sera d'autant plus courte que la largeur 1-L

de la zone de localisation est petite, (on peut aussi remarquer que la dissipation intrinsèque **ne tend pas vers zéro** lorsque  $L$  tend vers 1) puisque:

$$(13) \quad \dot{D}(x, \bar{t}) \rightarrow \infty \text{ lorsque } 1 - L \rightarrow 0 \quad x \in [L, 1)$$

Les remarques précédentes sont valables dans (au moins) beaucoup de cas (Billardon et Doghri ont par exemple proposé comme critère d'amorçage une condition de perte de régularité de la solution, voir Billardon et Doghri [BIL89]), d'où l'importance de l'étude des solutions non-régulières ou localisées. D'autant plus que de telles solutions sont très souvent (toujours?) plus stables, au sens défini lors du chapitre 5, que les solutions régulières. Autrement dit les systèmes mécaniques "tendront à suivre" les solutions avec localisation, plutôt que les solutions régulières.

Cela a aussi été constaté expérimentalement (voir Rice [RIC76] et les références citées dans cet article). En effet, il a été remarqué lors des expériences en traction que la déformation initialement uniforme, tend à localiser à l'intérieur d'une petite bande lorsque les sollicitations dépassent un certain seuil.

Nous avons utilisé indistinctement les notions de "localisation" et "perte de régularité" mais on pourrait se demander si la localisation (une constatation expérimentale) correspond à la perte de régularité de la solution (un concept mathématique). Nous ne discuterons pas ce sujet dans ce texte. Dans ce qui suit (comme dans toutes les références consultées), nous supposerons que l'étude de la localisation peut être confondue avec celle de la régularité de la solution.

Dans ce chapitre nous nous limiterons à reprendre les résultats de régularité qui ont été trouvés dans la littérature, sauf peut être le critère de localisation (34) du N°3, et qui peuvent être appliqués au problème qui nous occupe. On doit citer en particulier l'étude de Rice et Rudnicki [RIC80] et aussi Rice [RIC76], Necas [NEC67], Benallal, Billardon et Geymonat [BEN89] Billardon et Doghri [BIL88] Chambon [CHA86], Ortiz [ORT87].

Nous ne discuterons pas dans ce texte les problèmes liés au calcul numérique des solutions avec localisation. Le lecteur intéressé pourra consulter par exemple: Ortiz, Leroy et Needleman [ORT86], Belytschko, Fish et Engelmann [BEL87], Billardon et Doghri [BIL88], Doghri [DOG89].

## 2. Etude de la régularité de la solution dans le cas élastique non-linéaire.

### 2.1 Position du problème.

On considère à un instant fixe  $t$  un solide constitué d'un matériau élastique-endommageable en formulation fonctionnelle (voir chapitre 2). On suppose que l'état  $(\mathbf{U}, \mathbf{D})$  à cet instant, est connu. La vitesse d'évolution des variables d'état est alors donnée par (voir chapitre 3):

$$(14) \quad \begin{aligned} V^u(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{D}}) &\leq V^u(\mathbf{U}^*, \dot{\mathbf{D}}) \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{K} \\ V^d(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{D}}) &\leq V^d(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{D}^*) \quad \forall \mathbf{D}^* \in \beta \end{aligned}$$

où  $\beta = \{ \dot{\mathbf{D}} \in L_2(V) / \dot{\mathbf{D}}(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in V_d \}$

Tel qu'il a été remarqué à plusieurs reprises, le problème (14) n'est pas linéaire, cela est du au fait que  $\beta$  n'est pas un sous-espace vectoriel.

Dans ce paragraphe nous n'allons pas considérer le problème non-linéaire directement. Nous allons suivre la voie indiquée dans Rice et Rudnicki [RIC80], c'est à dire nous allons étudier à sa place et dans un premier temps, le problème en vitesses avec l'hypothèse du solide équivalent de Hill.

Dans le contexte présent cela revient à considérer le problème suivant:

$$(15) \quad \begin{aligned} V^u(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{D}}) &\leq V^u(\mathbf{U}^*, \dot{\mathbf{D}}) \quad \forall \mathbf{U}^* \in \mathcal{K} \\ V^d(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{D}}) &\leq V^d(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{D}^*) \quad \forall \mathbf{D}^* \in \gamma \end{aligned}$$

où  $\gamma = \{ \dot{\mathbf{D}}(x) / \dot{\mathbf{D}} \in L_2(V) \}$

$\gamma$  étant un espace vectoriel, les inégalités (15) sont équivalentes à la résolution du système d'équations variationnelles linéaires ( $V^u$  et  $V^d$  sont quadratiques) suivant (voir chapitre 1).

$$(16) \quad \begin{aligned} (V_{,u}^u, U^*) &= 0 \quad \forall U^* \in K_0 \\ (V_{,d}^d, D^*) &= 0 \quad \forall D^* \in \gamma \end{aligned}$$

Le problème (16) étant linéaire, il caractérise la solution d'un problème d'élasticité non-linéaire en vitesses.

On supposera aussi que les forces volumiques appliquées sont schématisées par des fonctions continues et que l'état  $(U, D)$  est caractérisé par des champs réguliers.

On définira la régularité de la façon suivante: Les champs  $(\dot{U}, \dot{D})$  solution de (16) seront dit réguliers si la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon} = \epsilon(\dot{U})$  et le champ de vitesse d'endommagement  $\dot{D}$  sont des fonctions continues sur  $V$ .

## 2.2 Critère local de régularité.

Dans ce paragraphe nous allons décrire un critère local, c'est à dire une condition qui doit être vérifiée p.p. dans  $V$  et qui assure la régularité de la solution du problème en vitesses à l'intérieur du domaine  $V$ . Ce critère est la condition dite "d'ellipticité". Pour l'obtention de ce critère, nous aurons besoin des formes locales des équations du problème en vitesses linéaire (16).

On considère le solide de volume  $V$  et on suppose qu'à l'instant  $t$  en question, il existe au moins une solution  $(\dot{U}, \dot{D})$  à (16) qui n'est pas régulière, avec une surface de discontinuité de  $\dot{\epsilon}$  et  $\dot{D}$  noté  $\Sigma$ .

Alors en utilisant la formule de Stokes et compte tenu du lemme fondamental du calcul de variations, on déduit de la première des relations (16) les équations locales suivantes:

$$(17) \quad \text{div} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} \cdot \dot{D} \right] + \dot{f}_d = 0 \quad \text{sur } V$$

$$(18) \quad \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} \cdot \dot{D} \right] m = \dot{F}_d \quad \text{sur } \partial_\sigma V$$

$$(19) \quad \dot{U} = \dot{U}_d \quad \text{sur } \partial_u V$$

$$(20) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : [[\dot{\epsilon}]] n + \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} \cdot [[\dot{D}]] n = 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

où  $m$  est la normale extérieure à  $\partial_\sigma V$ ,  $n$  la normal à  $\Sigma^+$  et la notation  $[[x]] = x^+ - x^-$  représente le saut de la quantité  $x$  à travers la surface  $\Sigma$ .

De la seconde des relations (16) on obtient:

$$(21) \quad \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} + \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D} \right] \cdot \dot{D} = - \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \epsilon} : \dot{\epsilon} \quad \text{si } G=0$$

où  $G=0$  est l'équation de la surface du convexe d'élasticité défini lors du chapitre 2.

Parmi ces équations nous aurons besoin uniquement de l'expression (20) qui traduit l'équilibre de forces d'un côté et de l'autre de la surface  $\Sigma$  et de la loi d'évolution de l'endommagement (21).

On se place alors dans un point de la surface de discontinuité  $\Sigma$ , à l'intérieur de  $V$ . Le saut de la vitesse de déformation à travers  $\Sigma$  n'est pas arbitraire, il doit vérifier la condition de compatibilité de Maxwell:

$$(22) \quad [[\dot{\epsilon}]] = \frac{1}{2} (g \otimes n + n \otimes g)$$

où  $g$  est un vecteur et le symbole  $\otimes$  indique le produit tensoriel des vecteurs  $g$  et  $n$ .

Le saut de la vitesse d'endommagement à travers  $\Sigma$  sera noté:

$$(23) \quad [[\dot{D}]] = d$$

Alors à l'aide des expressions (20), (21), (22) et (23) on déduit l'équation matricielle (24) qui est vérifiée chaque fois qu'il existe une surface de discontinuité:

$$(24) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} n \cdot n & \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \epsilon} n \\ n \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} & \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} + \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ d \end{bmatrix} = 0$$

On note  $H(n)$  la matrice qui intervient dans (24). Alors si  $H(n)$  est inversible quelque soit le vecteur unitaire  $n$ , la seule solution possible à l'équation (24) est:

$$(25) \quad \begin{matrix} g = 0 \\ n = 0 \end{matrix} \quad \text{si } H(n) \text{ est inversible } \forall n$$

Si (25) est vérifiée p.p.  $x \in V$  alors la localisation est impossible.

Une condition telle que (25) est appelée "critère de localisation". Le critère (25) coïncide, bien entendu, avec celui énoncé dans Rice[RIC76]. En effet, si on élimine le terme  $[[\dot{D}]]$  dans (21) grâce à la loi d'endommagement (22) on obtient la relation classique:

$$(26) \quad (L \, n \, n) \, g = 0$$

où  $L$  vaut dans ce cas:

$$L = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon} - \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial D} \cdot \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} + \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D} \right]^{-1} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial \varepsilon}$$

à nouveau, si la matrice  $L \, n \, n$  est inversible quelque soit  $n$  et p.p.  $x \in V$ , la localisation est impossible. Lorsque  $L$  vérifie cette condition on dit que  $L$  est un "opérateur elliptique".

Remarques:

i) Dans la discussion précédent on a suppose  $G = 0$  de chaque coté de la surface  $\Sigma$ . Si la structure considérée ne présente pas de zone élastique, c'est à dire si  $V = V_d$  (voir le chapitre 3 pour les définitions de  $V_e$  et  $V_d$ ), le critère (25) est valable partout à l'intérieure de  $V$ . Si au contraire, le solide est divisé en deux zones, une zone à endommagement actif,  $V_d$  et une autre élastique  $V_e$ . Alors le résultat énoncé est valable seulement à l'intérieur de  $V_d$ . Cependant on peut suivre à nouveau le raisonnement précédent, en supposant l'existence d'une surface de discontinuité à l'intérieur de  $V_e$ . On retrouve alors le critère (25) avec:

$$(27) \quad H(n) = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon} \, n \, n$$

qui est toujours inversible si  $D \notin D_c$  puisque  $W$  est une fonction strictement convexe par rapport à  $\varepsilon$ . Par conséquent la localisation à l'intérieur de  $V_e$  est dans tous le cas impossible.

ii) La condition (25) est un critère de localisation à l'intérieur du domaine  $V$ . Il n'assure pas en toute généralité la régularité de la solution. Pour un étude complet il faut joindre au critère (25) une autre condition appelée "condition complémentaire" à vérifier sur la frontière  $\partial_\sigma V$ . Pour une description de la condition complémentaire voir Benallal, Billardon et Geymonat [BEN89].

### 2.3 Critère global de régularité.

Une condition globale de régularité peut être obtenue directement à partir du critère local (25) énoncé dans le paragraphe précédent. En effet, on peut montrer (voir Nečas [NEC67]) qu'une condition suffisante d'ellipticité de l'opérateur  $H$  dans  $V$  est la condition de second ordre suivante:

$$(28) \quad \int_V \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \epsilon(\Delta U) : \epsilon(\Delta U) \, dV + 2 \int_V \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial D} : \epsilon(\Delta U) \cdot \Delta D \, dV + \\ + \int_V \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D \partial D} + \frac{\partial^2 W}{\partial D \partial D} \right] \Delta D \cdot \Delta D \, dV \geq \mu (||\Delta U||^2 + ||\Delta D||^2) \\ \forall (\Delta U, \Delta D) \in v_0$$

où  $||\Delta U||$  désigne la norme en énergie de  $\Delta U$  et  $||\Delta D||$  la norme  $L_2(V)$  du champ  $\Delta D$ .

$$v_0 = \{(\Delta U, \Delta D) / \Delta U \text{ et } \Delta D \text{ suffisamment réguliers, } \Delta U = 0 \text{ sur } \partial V\}$$

Si l'on emploie la notation utilisée lors des chapitres 4 et 5, la condition (28) peut s'écrire de la manière suivante:

$$(29) \quad \begin{bmatrix} \Delta U & \Delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{,uu}^u & V_{,ud}^u \\ V_{,du}^u & V_{,dd}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D \end{bmatrix} > \mu (||\Delta U||^2 + ||\Delta D||^2) \\ \forall [\Delta U, \Delta D] \in v_0$$

Par conséquent si (29) est vérifiée, l'opérateur  $H$  est elliptique dans  $V$  et la localisation, à l'intérieur de  $V$ , est impossible.

On peut remarquer que la condition (29) est une condition suffisante d'ellipticité et a priori plus forte que le critère de localisation local (25).

### 3. Etude de la régularité de la solution pour le problème en vitesses avec endommagement.

#### 3.1 Position du problème.

Dans le paragraphe précédent on a considéré la régularité de la solution avec l'hypothèse de Hill. Cela signifie que l'on a supposé que la vitesse d'endommagement  $\dot{\mathbf{D}}$  vérifiait de chaque côté de la surface de discontinuité  $\Sigma$ , l'expression suivante:

$$(30) \quad \left( \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} \right] \cdot \dot{\mathbf{D}} \right)_i = - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right)_i$$

Dans le cas du problème d'endommagement cela est vrai seulement si:

$$(31) \quad - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right)_i \geq 0$$

Puisque dans le cas contraire la loi d'évolution de l'endommagement impose (voir chapitre 2):

$$(32) \quad \dot{\mathbf{D}}_i = 0$$

Si on considère maintenant le problème en vitesses, on constate que la condition de localisation locale (25) ou globale (29) excluent la possibilité d'apparition d'une classe particulière de solutions non-régulières, les solutions sans décharge élastique. Par conséquent ces critères ne sont pas, a priori, des conditions suffisantes de régularité pour le problème avec endommagement, puisque une solution non-régulière avec décharge élastique pourrait éventuellement exister, même si les critères (25) ou (29) sont vérifiés.

Mais alors dans les cas où les décharges élastiques sont impossibles et si la condition de localisation (29) est vérifiée, on peut affirmer que toutes les éventuelles solutions au problème en vitesses avec endommagement sont régulières. Cela a été la voie suivie par Rice et Rudnicki [RIC80], où il a été prouvé, moyennant quelques hypothèses additionnelles, un critère de localisation local pour une classe de modèles de plasticité. Nous suivrons alors la même voie pour obtenir, à l'aide des résultats obtenus lors du chapitre 4 et dans le N° 2 de ce chapitre, un critère global de localisation pour le problème en question.

### 3.2 Critère global de régularité.

On se place dans le cadre décrit lors du N°3 de ce chapitre, sans l'hypothèse de Hill et lors du N° 3.3 du chapitre 4. On peut alors prouver (voir le chapitre 4) que si l'inégalité (33) est vérifiée, la décharge élastique est impossible.

$$(33) \quad \begin{bmatrix} \Delta U & \Delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{,uu}^u & V_{,ud}^u \\ V_{,du}^d & V_{,dd}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D \end{bmatrix} > 0 \quad \forall [\Delta U, \Delta D] \in \rho$$

$\rho = \{ (\Delta U; \Delta D) / \Delta U \text{ et } \Delta D \text{ suffisamment réguliers, } \Delta U \in K_0 \}$

D'autre part si (29) est vérifiée, la localisation sans décharge élastique est impossible. Par conséquent si (29) et (33) sont vérifiées simultanément la solution u problème en vitesses est unique et régulière.

On peut alors formuler la condition d'unicité et régularité à l'aide de la relation (34):

$$(34) \quad \begin{bmatrix} \Delta U & \Delta D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{,uu}^u & V_{,ud}^u \\ V_{,du}^d & V_{,dd}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta D \end{bmatrix} > \mu (\|\Delta U\|^2 + \|\Delta D\|^2) \\ \forall [\Delta U, \Delta D] \in \rho \quad \mu > 0$$

### 3.3 Exemple élémentaire.

Dans cette section on analysera l'exemple considéré lors de l'introduction à ce chapitre à l'aide du critère énoncé dans le N°3.2.

Pour le problème en question et pour l'état homogène défini par les expressions (2), le critère de localisation (34) s'écrit:

$$(35) \quad \int_0^1 (1-D) E \left[ \frac{d\Delta U}{dx} \right]^2 dx - 2 \int_0^1 E \epsilon \frac{d\Delta U}{dx} \Delta D dx + \int_0^1 6ND \Delta D^2 dx \geq \mu (\|\Delta U\|^2 + \|\Delta D\|^2)$$

$$\forall \Delta U \in H^1(0,1) / \Delta U(0) = 0 \quad \Delta U(1) = 0$$

$$\forall \Delta D \in L_2(0,1)$$

Si on considère maintenant des perturbations qui vérifient:

$$(36) \quad \Delta \epsilon(x) = M \Delta D(x)$$

l'inégalité (35) devient:

$$(37) \quad \int_0^1 \Delta D^2 (1-2D) dx \geq \mu (\|\Delta U\|^2 + \|\Delta D\|^2)$$

Par conséquent le critère de localisation (37) n'est plus vérifié lorsque:

$$(38) \quad D = M\delta(t) \geq \frac{1}{2}$$

---

## VII Approximation numérique de l'élasticité couplée à l'endommagement

---

### 1. Introduction.

Dans ce chapitre nous décrivons une méthode d'approximation numérique du problème d'élasticité couplée à l'endommagement, basée sur la formulation variationnelle à deux champs pour le problème d'évolution énoncée lors du chapitre 3. Le déplacement et l'endommagement sont les variables principales de cette formulation et l'approximation par des fonctions d'interpolation est réalisée sur chaque variable de façon indépendante. La discrétisation en espace est réalisée par la méthode des éléments finis, la discrétisation en temps grâce à la méthode des différences finies. On utilise alors une méthode pas à pas, l'état étant connu à l'instant  $t_i$  on cherche la solution à l'instant  $t_{i+1}$ . La recherche du point d'équilibre non-coopératif est réalisée par une méthode de décomposition qui consiste à minimiser de façon successive les fonctionnelles  $J^u$  et  $J^d$  jusqu'à la détermination de la solution.

Il s'agit donc d'une méthode pour le calcul de points de Nash, et elle est suffisante pour la détermination de la solution du problème d'endommagement lorsque celle-ci est unique. Si une bifurcation a lieu, cette méthode permet uniquement de calculer une solution au problème considéré. Le calcul numérique de branches bifurquées ainsi que de leur stabilité n'a pas été considéré dans ce texte.

### 2. Approximation numérique à deux champs pour le problème d'évolution.

## 2.1. Position du problème.

On considère un solide dont le matériau constitutif suit la loi de comportement en formulation fonctionnelle, décrite lors du chapitre 2, dans le cas particulier suivant:

i) l'endommagement est caractérisé par un scalaire, c'est à dire  $D \in \Omega \subset \mathbb{R}$  avec  $\Omega = [0, D_c]$

ii) L'énergie libre volumique est une fonction quadratique en  $\epsilon$  de la forme suivante:

$$(1) \quad W(\epsilon, D) = \frac{1}{2} g(D) \mathbb{K}_0 : \epsilon : \epsilon$$

où  $\mathbb{K}_0$  est l'opérateur d'Hooke habituel et  $g(D)$  est une fonction réelle, positive, convexe continûment dérivable dans  $\Omega$  et telle que  $g(0) = 1$ .

iii) Le solide est soumis à des forces surfaciques  $F_d$  sur  $\partial_\sigma V$  et à déplacements imposés sur  $\partial_u V$ . Les forces volumiques sont nulles.

L'objet de ces hypothèses est de simplifier les notations, le cadre considéré correspond d'ailleurs à la plupart des applications. L'extension de la méthode qui est décrite dans ce chapitre à d'autres cas ne devrait pas présenter de difficultés particulières.

## 2.2 Discrétisation du problème.

Le problème à résoudre numériquement est le suivant:

Trouver  $(U(t), D(t)) \in (K \times \Delta)$  pour  $t \in [0, T]$  tels que:

$$(2) \quad \begin{aligned} J^u(U(t), D(t)) &\leq J^u(U^*, D(t)) & \forall & \quad U^* \in K \\ J^d(U(t), D(t)) &\leq J^d(U(t), D^*) & \forall & \quad D^* \in \Delta \end{aligned}$$

$$D(x, 0) = D_0$$

où

$$J^u(U, D) = \int_V w^d(\epsilon(U); D) dv - \int_{\partial_\sigma V} F_d U ds$$

$$J^d(U; D) = \int_V \Phi(D) dV + \int_V \Psi(\epsilon^t, D) dV$$

$$\Psi = \frac{1}{2} g(D) \sup_{0 \leq \tau \leq t} K_0 : \epsilon(U(\tau)) : \epsilon(U(\tau))$$

$$K = \{ U(t) \text{ suffisamment régulier} / U(t) = U_d(t) \text{ sur } \partial_u V \}$$

$$\Delta = \{ D(t) \text{ suffisamment régulier} / D(t) \in \Omega \quad \forall x \in V \}$$

et la notation  $U(t)$  indique la valeur de  $U$  à l'instant  $t$  et  $U^t$  indique l'histoire  $U(\tau) \quad 0 \leq \tau \leq t$

La discrétisation se fait en deux étapes, la discrétisation en temps et la discrétisation en espace.

### 2.2.1 Discrétisation en temps.

On discrétise l'intervalle  $[0, T]$  au quel on s'intéresse en  $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n = T$  et on approche les fonctions  $U(x, t)$  et  $D(x, t)$  par différences finies en temps. Le problème est donc réduit au calcul de:  $(U(x, t_1), D(x, t_1)), (U(x, t_2), D(x, t_2)) \dots (U(x, t_n), D(x, t_n))$ . Le calcul du "Sup" dans la fonctionnelle  $\Psi$  est alors:

$$(3) \quad \sup_{0 \leq \tau \leq t_i} \left[ \frac{\partial W}{\partial D}(\epsilon(\tau), X) \right] \equiv \sup \left[ \frac{\partial W}{\partial D}(\epsilon(t_0), D(t_1)), \frac{\partial W}{\partial D}(\epsilon(t_1), D(t_1)), \dots, \frac{\partial W}{\partial D}(\epsilon(t_i), D(t_i)) \right]$$

Si on introduit les notations suivantes:

$$(4) \quad z_{i-1} = \frac{1}{2} \sup [ K_0 : \epsilon(t_0) : \epsilon(t_0), K_0 : \epsilon(t_1) : \epsilon(t_1), \dots, K_0 : \epsilon(t_{i-1}) : \epsilon(t_{i-1}) ]$$

$$y_i = \frac{1}{2} K_0 : \epsilon(t_i) : \epsilon(t_i)$$

l'expression (3) devient:

$$(5) \quad \sup_{0 \leq \tau \leq t_i} \left[ \frac{\partial W}{\partial D}(\epsilon(\tau), X) \right] \equiv g'(D(t_i)) \sup [ z_{i-1}, y_i ]$$

La fonctionnelle  $\Psi$  discrétisée est alors:

$$(6) \quad \Psi(t_i) = \Psi_i \equiv [ g(D(t_i)) - g(D(t_0)) ] z_i$$

Cela signifie que pour le calcul de l'état à l'instant  $t_i$ , il suffit de "retenir" en mémoire le champ  $z$  à l'instant  $t_{i-1}$  et non toute l'histoire de déformations.

On peut alors utiliser une méthode pas à pas où l'état à l'instant  $t_i$  est caractérisé par:

$$(U_i(x), D_i(x)) \in (K_i \times \Delta) \quad \text{tel que:}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} J^u(U_i, D_i) &\leq J^u(U^*, D_i) & \forall U^* \in K_i \\ J_i^d(U_i, D_i) &\leq J_i^d(U_i, D^*) & \forall D^* \in \Delta \end{aligned}$$

où  $(U_i, D_i) = (U(x, t_i), D(x, t_i))$ ;  $K_i$  est l'ensemble des champs C.A. à  $U_d(t_i)$  et  $J_i^d$  est la fonctionnelle  $J^d$  discrétisée en temps, d'expression:

$$(8) \quad J_i^d(U_i, D_i) = \int_V \Phi(D_i) dV + \int_V \Psi_i(U_i, D_i) dV$$

L'état à l'instant  $t_{i-1}$  intervenant comme paramètre dans l'expression de  $\Psi_i(U_i, D_i)$ .

### 2.2.2 Discretisation en espace

Dans ce paragraphe on décrira la discrétisation en espace du problème (7). L'indice  $i$  qui indique la discrétisation en temps sera omis afin de simplifier la notation.

On utilise la méthode des éléments finis. Le volume  $\bar{V} = V \cup \partial V$  est divisé en  $P$  éléments  $\bar{V}_e$ . Les champs  $U(x, t_i)$  et  $D(x, t_i)$  sont approchés par de polynômes définis à l'intérieur de chaque élément  $V_e$ . C'est à dire:

$$(9) \quad \begin{aligned} U(x, t_i) &\equiv U_h = \sum_{j=1}^m N_j^u(x) u_j \\ D(x, t_i) &\equiv D_h = \sum_{j=1}^n N_j^d(x) d_j \end{aligned}$$

où  $N_j^u(x)$  et  $N_j^d(x)$  sont des fonctions d'interpolation et  $u_j$  et  $d_j$  les inconnues nodales de l'approximation (9) à l'instant  $t = t_i$ .

La discrétisation de  $K$  (à l'instant  $t_i$ ) en  $K_h$  est réalisée par une méthode d'éléments finis conformes tout à fait classique (voir par exemple Bathe [BAT82]). La discrétisation du convexe  $\Delta$  présente par contre quelque particularités:

- Tel qu'il a été discuté lors du chapitre 6, les champs de déformation et d'endommagement peuvent présenter de discontinuités. La continuité de  $D$  entre éléments n'est donc pas imposée. Par conséquent les fonctions d'interpolation  $N^d$  (à la différence des  $N^u$ ) ne sont pas continues sur  $V$ , mais elles appartiennent encore à  $L_2(v)$ , comme le montre les exemples unidimensionnels de la figure (1).

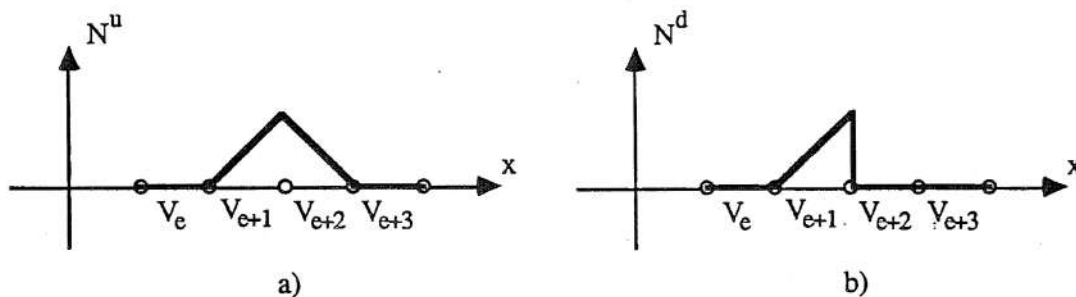


figure 1 Fonctions d'interpolation des variables du problème d'évolution. a) Fonction d'interpolation pour la discrétisation du déplacement. b) Fonction d'interpolation pour la discrétisation de l'endommagement.

Cela permet de décrire de discontinuités de l'endommagement entre les éléments mais pas à l'intérieur. Cette modélisation est cependant jugée valable. Des calculs avec des bandes de localisation à l'intérieur des éléments sont néanmoins possibles, (voir Ortiz, Leroy et Needleman [ORT87], Belytschko, Fish et Engelmann [BEL88], Doghri [DOG89])

- L'approximation de la contrainte  $D \in \Omega$  peut être envisagée de deux façons différentes:

- Elle est vérifiée, après discrétisation, partout dans le volume  $V$ .
- Elle est vérifiée, après discrétisation, seulement sur les inconnues nodales. On précisera par la suite chacune de ces possibilités.

2.2.2.1 La vérification de la contrainte est réalisée partout dans le volume  $V$ .

Alors on obtient l'ensemble discrétisé  $\Delta_h^I$  qui est défini de la façon suivante:

$$(10) \quad \Delta_h^I = \{ d_j \in \mathbb{R}^n / D_h = \sum_{j=1}^n N_j^d(x) d_j \in \Omega \quad \forall x \in V \}$$

Le convexe ainsi obtenu est une approximation interne de  $\Delta$ . On a en particulier que  $\Delta_h^I$  est un sous-ensemble de  $\Delta$ . Dans la pratique, cette possibilité est envisageable (dans le cas général) seulement si on substitue la contrainte  $D_h \in \Omega$  par un terme de pénalisation dans la fonctionnelle  $J_h^d$ . Cela sera discuté lors du N° 2.5.1

2.2.2.2 La vérification de la contrainte  $D \in \Omega$  est réalisée uniquement sur les inconnues nodales.

On obtient alors l'ensemble discrétisé  $\Delta_h^{\Pi}$  qui est défini de la façon suivante:

$$(11) \quad \Delta_h^{\Pi} = \{ d_j \in \mathbb{R}^n / d_j \in \Omega \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \}$$

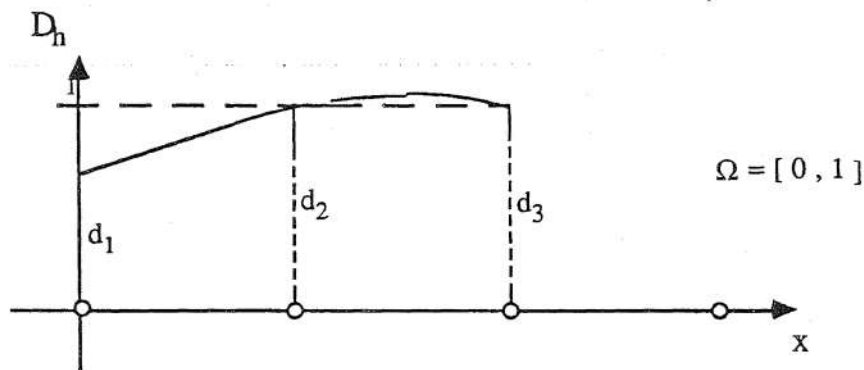


Figure 2 Champ d'endommagement  $D(x)$  approché par un polynôme du second degré.  
 $d_j \in \Omega$  et  $D_h \notin \Omega$

Cette approximation est préférable du point de vue numérique. Notamment elle permet d'utiliser les algorithmes de minimisation avec projection qui seront décrits lors du N° 2.4.2. Néanmoins

dans le cas général on a que  $\Delta_h^{\text{II}}$  n'est pas un sous-ensemble de  $\Delta$ , comme le montre l'exemple unidimensionnel de la figure 2.

On peut donc se demander si l'ensemble  $\Delta_h^{\text{II}}$  est une "bonne" approximation de  $\Delta$ . Bien que la réponse soit négative dans le cas général, l'ensemble  $\Delta_h^{\text{II}}$  est, dans certains cas particuliers, une approximation adéquate de  $\Delta$  comme le montrent les exemples donnés dans la suite.

Par exemple dans le cas particulier où les fonctions d'interpolation  $N_j^d(x)$  vérifient la relation suivante:

$$(12) \quad 0 \leq N_j^d(x) \leq 1$$

on peut montrer que:

$$(13) \quad \Delta_h^{\text{II}} = \Delta_h^{\text{I}} \subset \Delta$$

En effet quelle que soit l'approximation par éléments finis choisie on a:

$$(14) \quad \sum_{j=1}^n N_j^d(x) = 1$$

Par conséquent si (12) a lieu et si  $d_j \in \Delta$  alors

$$(15) \quad D_h = \sum_{j=1}^n N_j^d(x) d_j \in \Omega$$

du fait de la convexité de  $\Omega$ . Ceci est le cas des fonctions d'interpolation linéaires par morceaux.

Une étude abstraite de la convergence dans le cas général n'a pas été réalisée mais on a testé numériquement quelques éléments couramment utilisés dans le calcul de structures

bidimensionnelles. Le tableau I permet de comparer la solution analytique et la solution par éléments finis avec trois types différents d'éléments, pour le problème suivant:

Trouver  $D(x) \in \Delta$  tel que:

$$(16) \quad J^d(D) \leq J^d(D^*) \quad \forall \quad D^* \in \Delta$$

$$\text{où} \quad J^d(D) = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{2M} (MD + Y_0)^2 - Y D \right) dx_1 dx_2$$

$$\Delta = \{ D(x_1, x_2) \in L^2 / D(x_1, x_2) \in [0, D_c] \quad \forall (x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1] \}$$

avec:  $Y_0 = 0.30$ ,  $M=4$ ,  $D_c = 0.995$  et les différentes valeurs de  $Y$  ( $Y$  est une constante) qui sont indiquées dans le tableau I.

Dans les calculs numériques  $D(x_1, x_2)$  est approché par des fonctions d'interpolation de Lagrange (éléments à 4 et 9 nœuds) et de Serendip (élément à 8 nœuds). L'ensemble  $\Delta$  est approché par  $\Delta_h^\Pi$ . La minimisation de  $J_h^d(D)$  sur  $\Delta_h^\Pi$  est réalisée avec l'algorithme de relaxation avec projection (voir le N° 2.5.2. de ce chapitre).

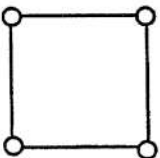
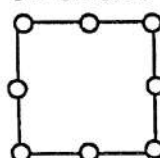
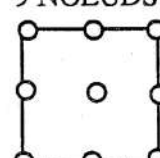
|                                                                                                                                  |                                                                                                                 | Y                               |        |        |         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|--------|--------|---------|
|                                                                                                                                  |                                                                                                                 | 0.049                           | 1.600  | 4.900  |         |
| SOLUTION                                                                                                                         |                                                                                                                 | D(x)                            | 0      | 0.325  | 0.995   |
| EXACTE                                                                                                                           |                                                                                                                 | J <sup>d</sup> (D)              | 0      | -0.845 | -10.390 |
| S<br>O<br>L<br>U<br>T<br>I<br>O<br>N<br><br>P<br>A<br>R<br><br>E<br>L<br>E<br>M<br>E<br>N<br>T<br>S<br><br>F<br>I<br>N<br>I<br>S | ELEMENT<br>A<br>4 NOEUDS<br>   | $d_i$<br>i=1,2,3,4              | 0      | 0.325  | 0.995   |
|                                                                                                                                  |                                                                                                                 | J <sup>d</sup> <sub>h</sub> (D) | 0      | -0.845 | -10.390 |
|                                                                                                                                  | ELEMENT<br>A<br>8 NOEUDS<br>  | $d_i$<br>i=1,3,5,7              | 0.072  | 0.325  | 0.816   |
|                                                                                                                                  |                                                                                                                 | $d_i$<br>i=2,4,6,8              | 0      | 0.325  | 0.995   |
|                                                                                                                                  |                                                                                                                 | J <sup>d</sup> <sub>h</sub> (D) | -0.012 | -0.845 | -10.460 |
|                                                                                                                                  | ELEMENT<br>A<br>9 NOEUDS<br> | $d_i$<br>i=1,...,9              | 0      | 0.325  | 0.995   |
|                                                                                                                                  |                                                                                                                 | J <sup>d</sup> <sub>h</sub> (D) | 0      | -0.845 | -10.390 |

Tableau I comparaison de la solution analytique avec les calculs numériques avec différents types d'éléments pour un problème de minimisation avec contrainte. Rôle de la discrétisation de l'ensemble  $\Delta$ .

On constate donc que l'ensemble discrétisé  $\Delta_h^{\Pi}$  "passe avec succès" le test proposé lorsque l'on utilise de polynômes d'interpolation de Lagrange (éléments à 4 et 9 nœuds). Ces résultats ont été confirmés lors d'autres exemples. L'approximation de  $\Delta$  par  $\Delta_h^{\Pi}$  est alors jugée acceptable dans ces cas particuliers. L'élément à 8 nœuds par contre ne peut pas être utilisé si l'on approche  $\Delta$  par  $\Delta_h^{\Pi}$ .

### 2.2.3 Le problème discrétisé.

Une fois choisi l'ensemble  $\Delta_h$ , il ne reste qu'à discrétiser les fonctionnelles  $J^d$  en  $J_h^d$  et  $J^u$  en  $J_h^u$ . On a donc à résoudre le problème discret suivant:

Trouver  $(u, d) \in K_h \times \Delta_h \subset R^m \times R^n$  tel que:

$$(17) \quad \begin{aligned} J_h^u(u, d) &\leq J_h^u(u^*, d) & \forall \quad u^* \in K_h \\ J_h^d(u, d) &\leq J_h^d(u, d^*) & \forall \quad d^* \in \Delta_h \end{aligned}$$

Les fonctions  $J_h^d$  et  $J_h^u$  dépendent bien entendu des fonctions  $\Phi(D)$  et  $g(D)$  que l'on a choisies. Leur expression, dans le cas particulier où  $g(D) = 1-D$  et  $\Phi(D)$  est représentée par un polynôme du second degré, est donnée dans le N° 3. de ce chapitre.

Pour décrire complètement la méthode numérique, il suffit maintenant de proposer un algorithme pour la recherche des points de Nash.

### 2.3 Algorithme de décomposition.

On suppose connu l'état à l'instant  $t_{i-1}$  et on souhaite calculer les champs  $(U(x), D(x))$  (discrétisés par éléments finis ou non) à l'instant  $t_i$ . On procède alors comme suit:

a) On utilise comme valeur de départ  $D^0$  ( $D(x)$  à l'itération 0) le champ d'endommagement à l'instant  $t_{i-1}$ .

b) On calcule le champ déplacement  $U^j$  ( $U$  à l'itération  $j$ ) qui minimise la fonctionnelle  $U \rightarrow J^u(U, D^{j-1})$  à champ d'endommagement constant. C'est à dire  $U^j$  est la solution de:

$$(18) \quad J^u(U^j, D^{j-1}) \leq J^u(U^*, D^{j-1}) \quad \forall \quad U^* \in K$$

c) On calcule le champ endommagement  $D^j$  ( $D$  à l'itération  $j$ ) qui minimise la fonctionnelle  $D \rightarrow J^d(U^j, D^j)$  à champ déplacement constant. C'est à dire  $D^j$  est la solution de:

$$(19) \quad J^d(U^j, D^j) \leq J^d(U^j, D^*) \quad \forall \quad D^* \in \Delta$$

d) Le processus est répète jusqu'à convergence vers une solution du problème.

Dans les paragraphes 2.4, 2.5 et 2.6 de ce chapitre, on décrira en détails les étapes: b,c et d respectivement du schéma précédent.

On peut constater que cet algorithme peut être comparé aux algorithmes itératifs à matrice sécante bien connus en mécanique de structures. Cela est illustré à l'aide de l'exemple unidimensionnel de la figure 3.

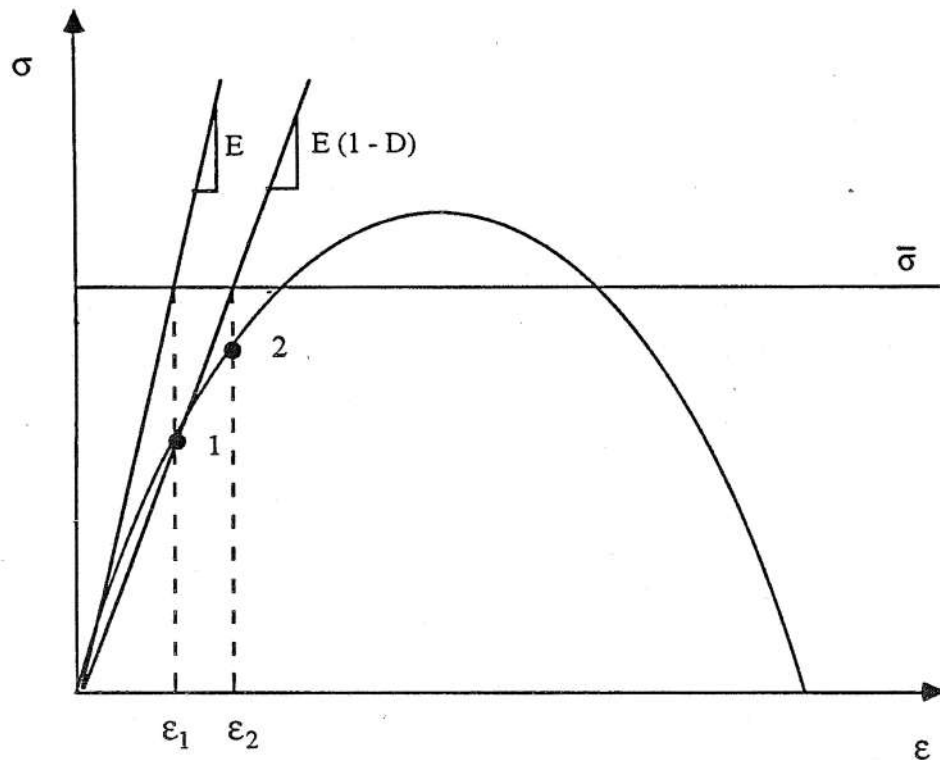


figure 3 contrainte en fonction de la déformation dans le cas unidimensionnel. Illustration de l'algorithme de décomposition.

Le graphe de la figure 3 montre la courbe  $\sigma$  en fonction de  $\varepsilon$  pour un élément de volume unidimensionnel (avec  $g(D) = 1 - D$ ). L'élément de volume est soumis à une contrainte imposée de valeur  $\bar{\sigma}$ .

On prend comme valeur de départ  $D^0 = 0$  et on minimise la fonction  $J^u : \varepsilon \rightarrow J^u(\varepsilon, D^0)$  correspondante. Cela revient, tel qu'il a été indiqué lors du chapitre 3, à la solution d'un problème d'élasticité linéaire avec module d'élasticité  $(1 - D^0) E$ . Cette minimisation est donc obtenue pour la valeur  $\varepsilon = \varepsilon^1$  qui est indiquée en figure 2.

Le pas suivant est la minimisation de  $J^d : D \rightarrow J^d(\varepsilon_1, D)$ , c'est à dire le calcul de  $D$  qui vérifie la loi d'endommagement pour  $\varepsilon = \varepsilon_1$ . Cela est indiqué en figure 2 par la valeur  $D^1$  tel que la droite de pente  $(1 - D^1) E$  passe par l'origine et par le point 1. Ce point est donc le résultat de la première itération de l'algorithme de décomposition utilisé. On constate donc que dans ce cas particulier cet algorithme coïncide avec l'algorithme itératif à matrice sécante.

Une étude abstraite de la convergence de cet algorithme n'a pas été réalisée, cependant il a été testé avec succès dans tous les exemples proposés.

D'autres algorithmes de décomposition sont possibles. Dans Bensoussan, Lions, Temam [BEN74] par exemple, il a été proposé un algorithme où la convergence, sous certaines conditions, est démontrée.

## 2.4 Minimisation de la fonction $J_h^u$ .

Il s'agit d'un calcul élastique classique. On tient alors compte de la contrainte  $\mathbf{u} = \mathbf{U}_h^d$  sur  $\partial_u V$ , par exemple, par la méthode de pénalisation (pour la description des méthodes standards de prise en compte de la contrainte  $\mathbf{u} = \mathbf{U}_h^d$  voir Bathe [BAT82]), le problème (18) devient donc:

$$(20) \quad \hat{J}_h^u(\mathbf{u}, d) \leq \hat{J}_h^u(\mathbf{u}^*, d) \quad \forall \quad \mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$$

$$\text{où} \quad \hat{J}_h^u(\mathbf{u}, d) = J_h^u(\mathbf{u}, d) + \frac{\alpha}{2} [(u_{11} - U_{11}^d)^2 + (u_{12} - U_{12}^d)^2 + \dots + (u_{1q} - U_{1q}^d)^2]$$

$\alpha$  est une constante fixée à priori et "très grande" par rapport aux termes diagonaux de la matrice de raideur.  $U_{11}^d, U_{12}^d, \dots, U_{1q}^d$  sont les déplacements imposés correspondant aux degrés de liberté 11, 12, ..., 1q. Le problème (20) est donc équivalente à la résolution de l'équation linéaire en  $u$  suivante

$$(21) \quad \nabla J_h^u = \sum_{j=1}^m K_{ij}(d) u_j - f_i + \alpha [ (u_{11} - U_{11}^d) + (u_{12} - U_{12}^d) + \dots + (u_{1q} - U_{1q}^d) ] = 0$$

où  $K_{ij}(d)$  est la matrice de raideur qui est une fonction de l'endommagement (celui-ci est constant lors de la minimisation de  $J_h^u$ ),  $u$  est le vecteur des déplacements nodaux et  $f$  celui de forces nodales.

On peut remarquer que si  $d_j \neq D_c$   $j = 1, 2, \dots, n$ , la matrice  $K$  est définie positive à cause de la convexité de  $J_h^u$  en  $u$  et le problème (21) possède une solution unique si on impose des conditions aux limites en déplacement ( $\partial_u V$  est d'aire non nulle).

Cela n'est pas le cas s'il y a des nœuds où  $d$  prend la valeur  $D_c$ , puisque alors la matrice  $K$  peut être singulière (rappel  $d = D_c$  si  $g(D) = 0$ ). Il y a, dans ce cas, plusieurs solutions envisageables, parmi celles-ci on a choisi la plus simple à mettre en œuvre. Elle consiste à approcher la valeur  $D_c$  par une autre valeur, que l'on notera  $D_p$ , tel que:

$$(21) \quad g(D_p) = \eta > 0$$

Alors la matrice  $K$  est inversible quelque soit  $d_j \in [0, D_p]$  et  $D_p \rightarrow D_c$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ .

Tout cela est illustré plus clairement par l'exemple suivant:

$$(22) \quad \begin{aligned} g(D) &= (1-D) \\ \Omega &= [0, 1] \end{aligned}$$

Alors  $\Omega$  peut être approché par:

$$(23) \quad \Omega_p = [0, D_p] \quad 0 < D_p < 1$$

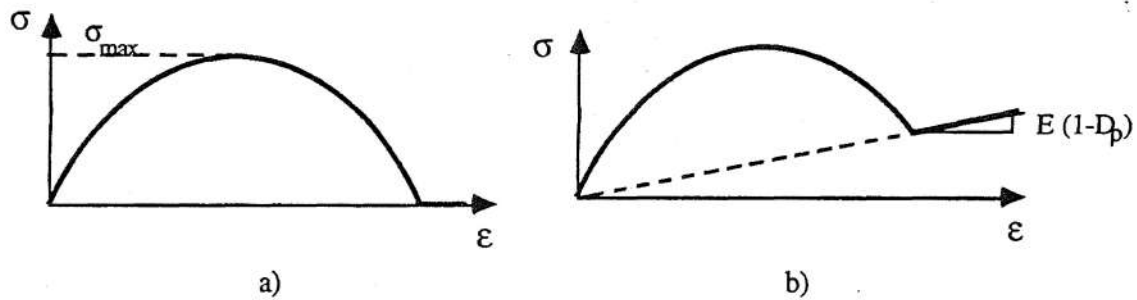


figure 4      Contrainte en fonction de la déformation, rôle de l'ensemble  $\Omega$   
 a)  $\Omega = [0, 1]$  b)  $\Omega = [0, D_p]$

La figure 4a montre le graphe  $\sigma$  en fonction de  $\varepsilon$  avec l'ensemble  $\Omega$  défini par (22) et la figure 4b celui associé à (23).

Remarques:

i) La méthode ici proposée présente quelques similitudes avec la méthode de pénalisation en théorie d'optimisation. L'introduction de l'ensemble  $\Omega_p$  apporte aussi des effets régularisants. Dans le cas unidimensionnel considéré dans le paragraphe 2.4., on constate par exemple que pour n'importe quelle contrainte imposée  $\bar{\sigma}$ , il existe une solution  $(\bar{\varepsilon}, \bar{D})$  qui vérifie la loi de comportement, même si  $\bar{\sigma} > \sigma_{\max}$ . Lorsque  $\bar{\sigma} > \sigma_{\max}$ , la solution dépend du paramètre  $D_p$  ( $\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{(1-D_p)E}$ ;  $\bar{D} = D_p$ ) et on peut remarquer que:

$$(24) \quad \bar{\varepsilon} \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque} \quad D_p \rightarrow 1.$$

Ce résultat ne manque pas de sens physique. Dans le calcul de structures on trouve de résultats qui sont en général aussi faciles à interpréter.

ii) Le paramètre  $D_p$  doit être choisi en fonction du maillage utilisé. En effet, on peut constater à l'aide de la figure 4 que la loi de comportement devient, lorsque  $D = D_p$ , une loi de comportement élastique avec raideur élastique  $\eta \mathbb{K}_0$ . Or, des point de singularité sont susceptibles d'apparaître (s'il n'y en a pas dans la géométrie initiale de la structure) comme conséquence de la localisation de l'endommagement sur une bande d'éléments puisque l'épaisseur de celle-ci peut tendre vers zéro lorsque le maillage devient de plus en plus fin. Par conséquent si  $D_p$  reste constant lorsque  $h \rightarrow \infty$ , on pourrait avoir des contraintes infinies dans une zone fissurée!. Il faut donc fixer  $D_p$  de tel façon

que pour le maillage utilisé, on obtienne des "contraintes petites" par rapport à celles de la zone non-endommagée, on doit avoir en particulier  $D_p \rightarrow D_c$  lorsque  $h \rightarrow \infty$ .

## 2.5. Minimisation de la fonction $J_h^d$ .

La minimisation de  $J_h^d$  est réalisée élément par élément, cela est possible puisque  $J^d$  (ainsi que  $J^u$ ) ne contient pas de dérivées spatiales de l'endommagement. La minimisation élément par élément simplifie notablement la mise en œuvre de la méthode et permet une grande économie de temps lors des calculs.

Dans la suite de ce paragraphe on décrira quelques méthodes de minimisation avec contrainte bien connues en théorie d'optimisation et qui sont applicables au problème en question. On classifera ces méthodes en deux groupes, les méthodes avec pénalisation qui seront utilisées avec l'ensemble discrétisé  $\Delta_h^I$  et qui sont applicables dans le cas général et les méthodes avec projection qui sont utilisées avec l'ensemble  $\Delta_h^{II}$ , de mise en œuvre plus simple mais qui ne peuvent être utilisées que lorsque l'on utilise certains types d'éléments.

### 2.5.1 Méthodes de pénalisation.

L'idée de la pénalisation consiste à approcher le problème:

$$(25) \quad \inf J_h^d \quad d \in \Delta_h^I$$

Par un problème de minimisation sans contrainte en ajoutant à la fonction  $J_h^d$  le terme de pénalisation  $G(d)$  ce qui donne le problème suivant:

$$(26) \quad \inf I_\eta(d) \quad d \in \mathbb{R}^n$$

où

$$I_\eta(d) = J_h^d(d) + \frac{1}{\eta} G(d)$$

La fonction  $G(d) : R^n \rightarrow R$  doit présenter les propriétés suivantes:

- i)  $G$  est convexe, continûment différentiable et coercive
- ii)  $G(d) = 0 \iff d \in \Delta_h^I$

Alors si on note  $d_\eta$  la solution du problème (26) (qui peut alors être obtenu par une méthode classique quelconque), on peut montrer que (Glowinski, Lions, et Tremolières [GLO76]):

$$(27) \quad d_\eta \rightarrow d \quad \text{lorsque} \quad \eta \rightarrow 0$$

Il existe une infinité de termes de pénalisation possibles pour chaque convexe  $\Delta_h^I$ . Voici deux exemples.

On considère la même fonctionnelle  $J^d$  et le même ensemble  $\Delta$  de l'exemple (16). Un terme de pénalisation possible est alors:

$$(28) \quad G(D) = \int_0^1 \int_0^1 [ \langle -D(x) \rangle_+^2 + \langle D(x) - D_c \rangle_+^2 ] dx_1 dx_2$$

Après discrétisation on a donc:

$$(29) \quad G(D) = \int_0^1 \int_0^1 [ \langle - \sum_{j=1}^n N_j^d(x) d_j \rangle_+^2 + \langle \sum_{j=1}^n N_j^d(x) d_j - D_c \rangle_+^2 ] dx_1 dx_2$$

Quelques résultats numériques correspondant à cet exemple sont montrés dans le tableau II.

On peut constater que la convergence est linéaire en  $\eta$ , mais la recherche du minimum de  $I_\eta$  est de plus en plus longue lorsque  $\eta$  approche 0 à cause de la non-linéarité croissante de la fonction en question.

On peut aussi remarquer que les valeurs de  $d_\eta$  approchent la solution exacte par "l'extérieur". C'est à dire que  $d_\eta \notin \Delta$ , ce pourquoi la méthode de pénalisation est dénommée dans ce cas "pénalisation par l'extérieur".

Une pénalisation "par l'intérieur" est toutefois possible, par exemple:

$$(30) \quad I_{\eta}(D) = J^d + \eta \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{1}{D(x)} + \frac{1}{D(x) - D_c} \right] dx_1 dx_2 \quad \eta \text{ destiné à tendre vers } 0$$

Le terme de pénalisation dans (30) est appelé "fonction barrière" puisqu'il empêche à  $D(x)$  "de sortir de  $\Delta$ " au cours des itérations.

| CHARGEMENT | SOLUTION EXACTE |          | SOLUTION PAR ELEMENTS FINIS AVEC PENALISATION EXTERIEURE<br>ELEMENT A 8 NŒUDS |                        |                          |
|------------|-----------------|----------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------|--------------------------|
|            | D(x)            | $J^d(D)$ | $\eta$                                                                        | $i=1, \dots, 9$        | $I_{\eta}(D)$            |
| 0.049      | 0               | 0        | $0.8 \times 10^{-2}$                                                          | $-1.94 \times 10^{-3}$ | $-9.768 \times 10^{-4}$  |
|            |                 |          | $0.4 \times 10^{-2}$                                                          | $-9.88 \times 10^{-4}$ | $-4.960 \times 10^{-4}$  |
|            |                 |          | $0.9 \times 10^{-3}$                                                          | $-2.25 \times 10^{-4}$ | $-1.1299 \times 10^{-5}$ |
|            |                 |          | $0.5 \times 10^{-3}$                                                          | $-1.25 \times 10^{-4}$ | $-6.2875 \times 10^{-5}$ |
| 4.900      | 0.995           | -10.387  | $0.8 \times 10^{-2}$                                                          | 0.9998                 | -10.3938                 |
|            |                 |          | $0.4 \times 10^{-2}$                                                          | 0.9974                 | -10.3908                 |
|            |                 |          | $0.2 \times 10^{-2}$                                                          | 0.9962                 | -10.3893                 |
|            |                 |          | $0.1 \times 10^{-2}$                                                          | 0.9956                 | -10.3885                 |

Tableau II Comparaison entre la solution exacte et la solution par éléments finis avec pénalisation extérieure.

La mise en œuvre informatique de la méthode de pénalisation est assez délicate à cause de la très forte non-linéarité de la fonction  $I_{\eta}(D)$  lorsque  $\eta$  est proche de 0 (fâcheuse tendance à l'overflow). Usuellement le calcul est réalisé par étapes. On obtient une première approximation de  $d_j$  avec  $\eta$  "relativement grand" et on recommence le calcul avec  $\eta$  plus petit en prenant

comme valeur initiale le résultat obtenu précédemment. On répète ce cycle jusqu'à obtenir des valeurs jugées satisfaisantes. On obtient donc une suite de valeurs  $d_\eta$  dont on peut prouver que la fonction  $d_\eta \rightarrow J_\eta^d(d_\eta)$  est décroissante lorsque  $\eta \rightarrow 0$ .

Lorsque  $\Omega$  est un ensemble borné un critère de convergence acceptable est le suivant:

$$(31) \quad |(d_\eta)_j - (d_\eta)_{j-1}| \leq \frac{e}{D_c}$$

où  $(d_\eta)_j$  est la valeur de  $d$  qui minimise  $I_\eta(D)$  pour  $\eta = \eta_j$ ,  $D_c$  est le Sup de  $\Omega$  et  $e$  est un erreur jugée admissible.

### 2.5.2 Méthodes de projection.

Une méthode préférable, lorsque elle est applicable, est la méthode de projection. Il s'agit d'une adaptation de certaines méthodes classiques d'optimisation (relaxation, gradient conjugué, etc.) au cas de la minimisation avec contrainte. Voici un exemple:

- Méthode de sur-relaxation (ou sous-relaxation) avec projection. On décrira cet algorithme en trois étapes, d'abord l'algorithme classique de relaxation dans le cas sans contrainte. On décrira par la suite l'accélération par sur-relaxation et finalement l'extension de ces algorithmes au cas avec contrainte.

a) Algorithme de relaxation cas sans contrainte. On suppose connues les valeurs  $d^{k-1} = (d_1^{k-1}, d_2^{k-1}, \dots, d_n^{k-1})$  ( $d$  à l'itération  $k-1$ ). La méthode de relaxation consiste alors à calculer  $d_j^k$  (composante  $j$  de  $d$  à l'itération  $k$ ) comme la solution de :

$$(32) \quad J^d(d_1^k, \dots, d_{j-1}^k, d_j^k, d_{j+1}^{k-1}, \dots, d_n^{k-1}) \leq J^d(d_1^k, \dots, d_{j-1}^k, d^*, d_{j+1}^{k-1}, \dots, d_n^{k-1})$$

$$\forall \quad d^* \in \Omega$$

(Un algorithme de décomposition pour la minimisation de la fonction  $J^d$  !)

Par exemple, lorsque  $J^d$  est une fonction quadratique définie par:

$$(33) \quad J^d = \sum_{i,j=1}^n H_{ij} d_i d_j + \sum_{i=1}^n I_i d_i$$

où  $H$  est une matrice symétrique définie positive et  $I$  est un vecteur à  $n$  composantes.

Alors l'algorithme (32) dévient

$$(34) \quad d_i^k = -\frac{1}{H_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} H_{ij} d_j^k + \sum_{j=i+1}^n H_{ij} d_j^{k-1} - I_i \right)$$

b) Algorithme de sur-relaxation (sous-relaxation), cas sans contraintes. Une modification de (32) qui augmente la vitesse de convergence est connue sous le nom d'algorithme de sur-relaxation. Le calcul de  $d^k$  se fait alors en deux temps.

On calcul d'abord la valeur intermédiaire  $d_j^{k-1/2}$  ( $d^{k-1}$  supposé connu) à l'aide de l'algorithme de relaxation décrit premièrement. C'est à dire:

$$(35) \quad J^d(d_1^{k-1/2}, \dots, d_{j-1}^{k-1/2}, d_j^{k-1/2}, d_{j+1}^{k-1}, \dots, d_n^{k-1}) \leq J^d(d_1^{k-1/2}, \dots, d_{j-1}^{k-1/2}, d^*, d_{j+1}^{k-1}, \dots, d_n^{k-1})$$

$$\forall d^* \in \Omega$$

On calcul par la suite la valeur  $d_j^k$  ( $d_j$  à l'itération  $k$ ) par:

$$(36) \quad d_j^k = (1-\omega) d_j^{k-1} + \omega d_j^{k-1/2}$$

Où  $\omega > 1$  ( $\omega < 1$  pour la sous-relaxation) est choisi convenablement.

c) Algorithme de sur-relaxation (sous-relaxation), cas avec contrainte. Les algorithmes (32) ou (35)-(36), valables dans le cas sans contraintes peuvent être étendus au cas avec contraintes à l'aide d'un opérateur de projection.

Le problème est donc le suivant:

$$(37) \quad \inf_{d \in \Delta_h^\Pi} J_h^d$$

où

$$\Delta_h^\Pi = \{ d_j \in \mathbb{R}^n / d_j \in [0, D_p] \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \}$$

Le calcul est, comme dans le cas précédent, divisé en deux étapes. On calcule d'abord la valeur intermédiaire  $d_j^{k-1/2}$  ( $d^{k-1}$  supposé connu) à l'aide de l'algorithme de relaxation défini par (35). On calcule par la suite  $d_j^k$  de la façon suivante:

$$(38) \quad d_j^k = P_\Omega((1-\omega) d_j^{k-1} + \omega d_j^{k-1/2})$$

où  $P_\Omega$  est l'opérateur de projection de  $d_j$  sur l'ensemble  $\Omega$  défini par  $[0, D_p]$ . C'est à dire:

$$(39) \quad P_\Omega(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq D_p \\ D_p & \text{si } x > D_p \end{cases}$$

La convergence de cet algorithme a été montrée dans le cas général défini lors du N°1 de ce chapitre (voir Glowinski, Lions, et Tremolières [GLO76]).

Lorsque  $\Omega$  est un ensemble borné, un critère de convergence acceptable est le suivant:

$$(40) \quad \|d^k - d^{k-1}\| \leq \frac{\nu}{D_c}$$

où  $\nu$  est une erreur jugée admissible.

## 2.6 Critère de convergence de l'algorithme de décomposition.

Soit  $(U^n, D^n)$  les champs de déplacement et d'endommagement à l'itération  $n$ . On admet que  $(U^n, D^n)$  est un point de Nash si:

$$(41) \quad \|J_{,u}^u(U^n, D^n)\| \leq \left\| \sum_{j=1}^m K_{ij}(d) u_j - f_i \right\| \leq \tau \|f_i\|$$

Où  $\tau$  est un facteur imposé à priori et jugé satisfaisant.

En effet, avec l'algorithme de décomposition utilisé, les champs  $(U^n, D^n)$  "vérifient" la seconde des inégalités (17). Autrement dit,  $U^n$  et  $D^n$  vérifient la loi d'endommagement avec une précision jugée acceptable. D'autre part l'expression (41) sera satisfaite seulement si  $(U^n, D^n)$  vérifient les équations d'équilibre, c'est à dire la première des inégalités (17), avec une précision aussi jugée satisfaisante. Par conséquent on utilisera la relation (41) comme critère de convergence.

D'autres critères de convergence sont possibles, par exemple:

$$(42) \quad A_1 \| U^n - U^{n-1} \| + A_2 \| D^n - D^{n-1} \| \leq \tau \{ A_1 \| U^n \| + A_2 \| D^n \| \}$$

Où  $A_1$  et  $A_2$  sont deux constantes que l'on fixe adéquatement. Le critère (41) qui a un sens mécanique précis a été préféré à (42). On peut aussi considérer l'utilisation de plusieurs critères simultanément.

### 3. Exemples.

Dans ce paragraphe on présentera quelques résultats numériques obtenus par la méthode proposée. Celle-ci a été installée dans le code de calcul par éléments finis "VISCOENDO" développé par A. Benallal. Les potentiels suivants ont été utilisés:

$$(43) \quad \begin{aligned} g(D) &= 1 - D \\ \mathbb{K}_0 : \epsilon : \epsilon &= \frac{1}{2} [ \lambda \epsilon_{kk}^2 + 2 \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} ] \\ \Phi(D) &= \begin{cases} 0 & \text{si } D < 0 \\ \frac{1}{2M} (M D - Y_0)^2 & \text{si } 0 \leq D \leq D_p \\ +\infty & \text{si } D > D_p \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble  $\Omega = [0, 1]$  est approché par l'intervalle  $[0, D_p]$ .  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $M$  et  $Y_0$  sont des paramètres du matériau.

Après discrétisation on a les fonctions suivantes:

$$\begin{aligned}
 J_h^u &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m K_{ij}(d) u_i u_j - \sum_{i=1}^m f_i u_i \\
 J_h^d &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m H_{ij} d_i d_j + \sum_{i=1}^m I_i(u) d_i
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

où

$$[K(d)] = \sum_e \int_{V_e} (1 - [N^u] \{d\}) [B]^T [A] [B] dV$$

$$[H] = \sum_e \int_{V_e} M \{N^d\}^T \{N^d\} dV$$

$$[I(u)] = \sum_e \int_{V_e} (Y(u) - Y_0) \{N^d\}^T dV$$

$$Y(u) = \frac{1}{2} \{u\}^T [B]^T [A] [B] \{u\}$$

$$\{f\} = \sum_e \int_{V_e \cap \partial V_\sigma} \{N^u\}^T \{f\} dS$$

La matrice  $[B]$  est la matrice de passage déplacement-petites déformations et  $[A]$  la matrice d'élasticité, telles quelles sont définies habituellement (voir par exemple Bathe[BAT82]).

L'ensemble  $\Delta$  est discrétisé en  $\Delta_h^\Pi$ , c'est à dire:

$$(45) \quad \Delta_h^\Pi = \{ d \in R^n / 0 \leq d_j \leq D_p \quad j = 1, 2, \dots, n \}$$

On utilise l'algorithme de décomposition décrit lors du N° 2.3 de ce chapitre. La minimisation de  $J_h^d$  est réalisée élément par élément à l'aide de l'algorithme de sous-relaxation avec projection décrit dans le N° 2.5.2. de ce chapitre.

### 3.1 Structure à deux barres soumise à un cisaillement pur.

Cette structure est constituée par trois éléments isoparamétriques en contraintes planes à 4 nœuds (voir figure 5), l'élément du milieu étant beaucoup plus rigide que les autres. Les éléments 1 et 3 sont constitués de deux matériaux à module d'élasticité différent ( $E_1 \neq E_2$ ). Les conditions aux limites et les déplacements imposés sont tels que chaque élément est soumis à un état de cisaillement pur ( $\sigma_{11} = 0$ ,  $\sigma_{22} = 0$ ,  $\sigma_{12} = \tau \neq 0$ ). Le déplacement imposé  $U^d$  est caractérisé par une fonction monotone croissante et continue du temps  $t$ .

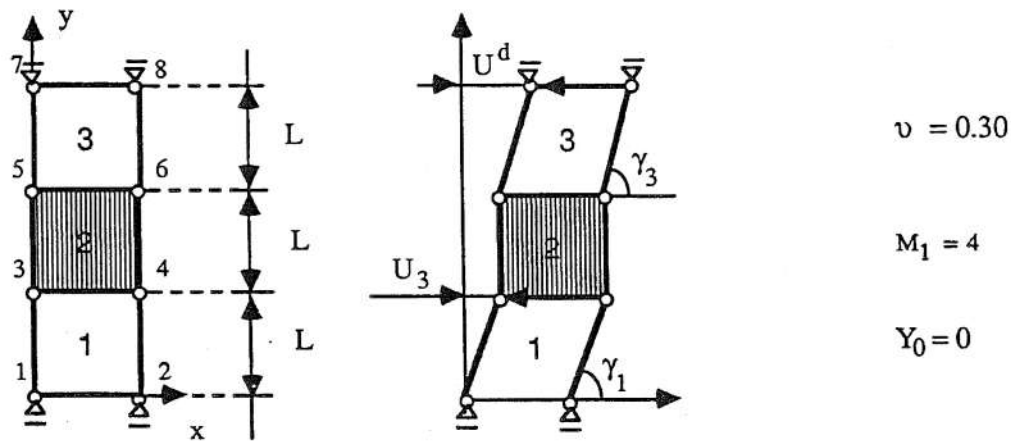


figure 5 Modélisation par éléments finis du modèle à deux barres.

On peut remarquer que cet exemple est semblable au modèle à deux barres considéré lors du chapitre 4. On peut donc calculer la solution exacte. A la différence du modèle du chapitre 4, les caractéristiques du matériau des éléments 1 et 3 sont différentes. On a donc des lois de comportement dont l'allure est indiquée en figure 6.

$\gamma_1$  et  $\gamma_3$  dénotent les déformations angulaires respectives caractérisées par:

$$(46) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= 2(\epsilon_{12})_{\text{element 1}} = \frac{U_3}{L} \\ \gamma_3 &= 2(\epsilon_{12})_{\text{element 3}} = \frac{U^d - U_3}{L} \end{aligned}$$

$U_3$  et  $U^d$  étant les déplacements respectifs des nœuds 3 et 7 indiqués dans la figure 5.

L'équation d'équilibre impose:

$$(47) \quad (\sigma_{12})_{\text{élément 1}} = (\sigma_{12})_{\text{élément 3}}$$

On peut alors effectuer le calcul en deux étapes:

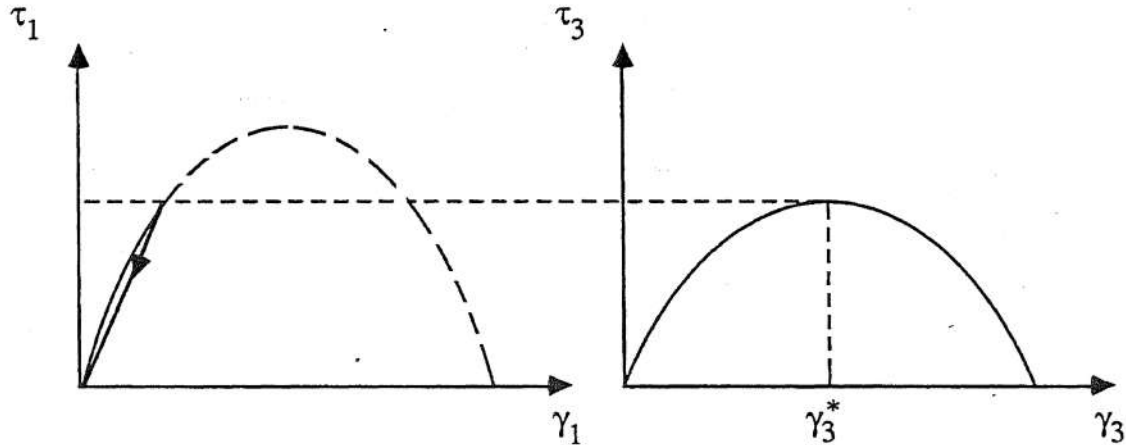


figure 6 Représentation graphique de l'équation d'équilibre et des lois de comportement des éléments 1 et 3 de la figure 5.

a) Lorsque  $\gamma_3 \leq \gamma_3^*$  ( $\gamma_3^*$  étant la valeur indiquée en figure 6) on constate (voir figure 6) que l'endommagement et la déformation sont des fonctions croissantes du déplacement imposé  $U^d$ . Alors à partir de l'équation (47) avec les conditions de compatibilité (46) et les lois de comportement de chaque élément on obtient l'expression (48) qui permet de déterminer l'état du système en fonction de  $U^d$ .

$$(48) \quad (K_1 G_1 + K_3 G_3) (\gamma_3)^3 - 3 K_1 G_1 \frac{U^d}{L} (\gamma_3)^2 - [G_3 (1 + \rho_3) + G_1 (1 + \rho_1) - 3 K_1 G_1 \left(\frac{U^d}{L}\right)^2] \gamma_3 + [G_1 (1 + \rho_1) \frac{U^d}{L} - K_1 G_1 \left(\frac{U^d}{L}\right)^3] = 0$$

où

$$G_i = \frac{E_i}{2(1+\mu)} \quad K_i = \frac{G_i}{2M_i} \quad \rho_i = \frac{Y_{0i}}{M_i}$$

b) Lorsque  $\gamma_3 > \gamma_3^*$  il y a une décharge élastique dans l'élément 1, on a donc un comportement élastique avec module d'élasticité  $(1 - D^*)G_i$  ( $D^*$  étant la valeur de l'endommagement qui corresponde à  $\gamma_3^*$ ) dans le premier élément et un comportement élastique endommageable dans le

troisième. On peut remarquer que dans ce cas particulier cette solution est la seule solution possible. On peut alors déterminer l'état du système en fonction de  $U^d$  à l'aide de la relation (49).

$$(49) \quad \frac{U^d}{L} = - [ K_3 G_3 / (1 - D^*) G_i ] (\gamma_3)^3 + [ 1 + \{ G_3 (1 + \rho_3) / (1 - D^*) G_i \} ] \gamma_3$$

La relation (49) est représentée graphiquement dans le plan  $(U^d, \gamma_3)$  en figure 7.

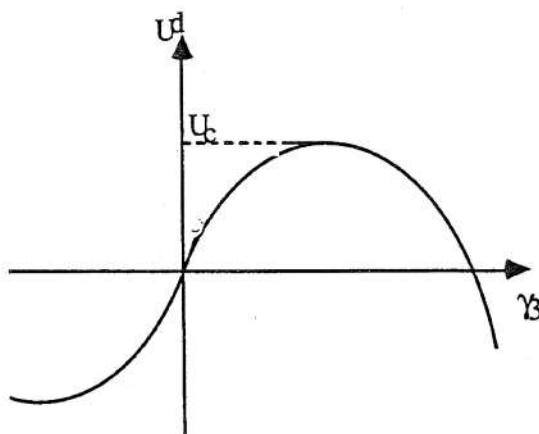


Figure 7 Représentation de la relation (49) dans le plan  $(U^d, \gamma_3)$

On peut constater que pour  $U^d > U_c$  ( $U_c$  étant la valeur indiquée en figure 7) la solution au problème considéré n'existe pas (on suppose que la rupture locale définie par  $D_1 = D_p$  n'a pas été atteinte).

Les figures 8 et 10 montrent les courbes force (somme des composantes horizontales des réactions des nœuds 7 et 8) en fonction du déplacement ( $U^d$ ) pour les valeurs de  $(E_1, E_2)$  indiquées dans chaque figure. les courbes contrainte en fonction de la déformation ( $\tau$  en fonction de  $\gamma$ ) dans chaque élément et dans les deux cas considérés sont indiquées en figures 9a et 11a. L'évolution de l'endommagement en fonction du temps est indiquée en figures 11a et 11b. On peut remarquer la précision du calcul numérique dans ces deux cas particulièrement simples. On constate, dans l'exemple de la figure 8, que la rupture locale de la barre 3 est atteinte avant que  $U^d = U_c$ . Dans l'exemple de la figure 9 par contre, la perte d'existence de la solution a lieu pour  $D \approx 0.5$  (ce phénomène est appelé par fois "instabilité"). Il existe cependant quelques points correspondant au calcul numérique après la perte d'existence de la solution analytique, cela est dû à l'approximation de l'ensemble  $\Omega$  par l'intervalle  $[0, D_p]$ , où  $D_p = 0.999$ . (voir le N°2.4. de ce chapitre)

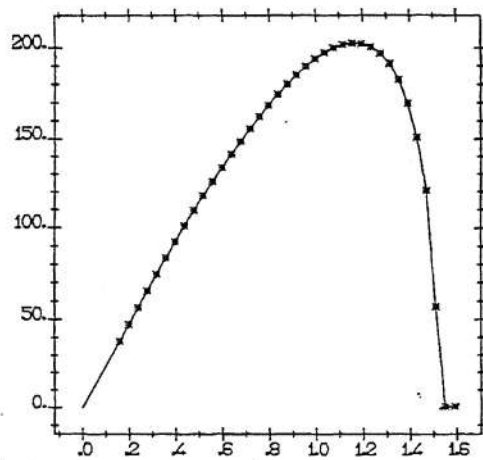
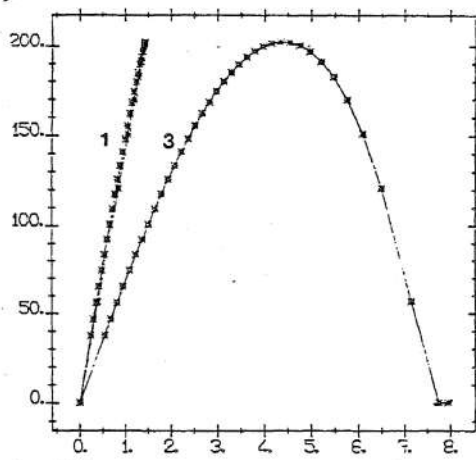
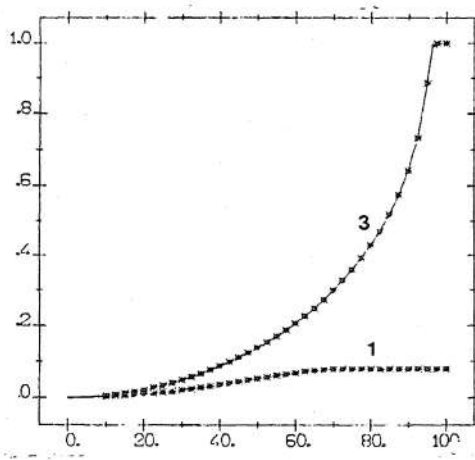


figure 8 Modèle à deux barres ( $E_1 = 200000 \text{ MPa}$ ,  $E_3 = 90000 \text{ MPa}$ ). Force en fonction du déplacement. Comparaison entre la solution analytique (—) et le calcul numérique (\*\*\*).



a)



b)

figure 9 Modèle à deux barres ( $E_1 = 200000 \text{ MPa}$ ,  $E_3 = 90000 \text{ MPa}$ ). Comparaison entre la solution analytique (—) et le calcul numérique (\*\*\*). a) Contrainte en fonction de la déformation ( $\tau$  en fonction de  $\gamma$ ) dans les éléments 1 et 3 b) Endommagement en fonction du temps dans les éléments 1 et 3.

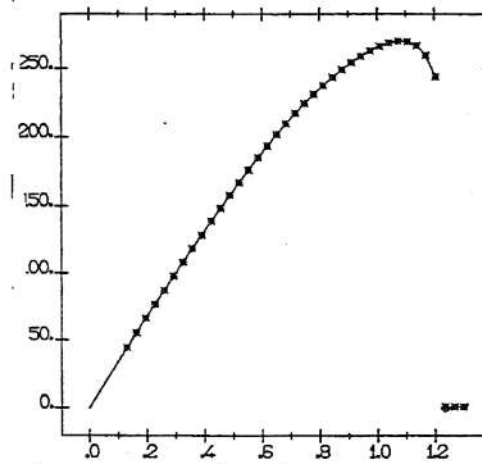


figure 10 Modèle à deux barres ( $E_1 = 200000 \text{ MPa}$ ,  $E_3 = 160000 \text{ MPa}$ ). Force en fonction du déplacement. Comparaison entre la solution analytique (—) et le calcul numérique (\*\*\*).

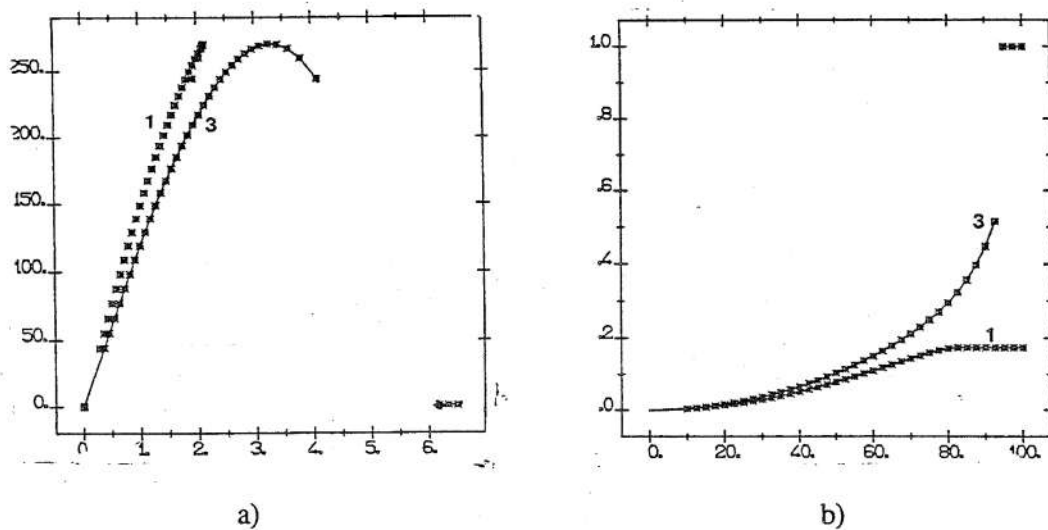


figure 11 Modèle à deux barres ( $E_1 = 200000 \text{ MPa}$ ,  $E_3 = 160000 \text{ MPa}$ ). Comparaison entre la solution analytique (—) et le calcul numérique (\*\*\*). a) Contrainte en fonction de la déformation ( $\tau$  en fonction de  $\gamma$ ) dans les éléments 1 et 3 b) Endommagement en fonction du temps dans les éléments 1 et 3.

### 3.2 Cylindre infini à paroi épaisse soumis à des déplacements imposés sur la surface extérieure.

On considère un cylindre infini en conditions axisymétriques. Le maillage correspondant et les conditions aux limites sont indiqués en figure 12. Le chargement en déplacement imposé sur la surface extérieure est caractérisé par une fonction monotone croissante du temps tel qu'il est indiqué dans la même figure. Les figures 13a, 13b et 13c montrent l'évolution de la contrainte radiale, tangentielle et de l'endommagement sur l'épaisseur du cylindre pour les 4 valeurs de  $U^d$  indiquées dans ces figures. Pour le premier niveau de charge le comportement est encore purement élastique. L'endommagement apparaît sur tout l'épaisseur du cylindre pour le deuxième niveau mais l'amorçage n'a pas encore eu lieu. Pour les deux dernières on constate l'apparition et le développement de la zone totalement endommagée.

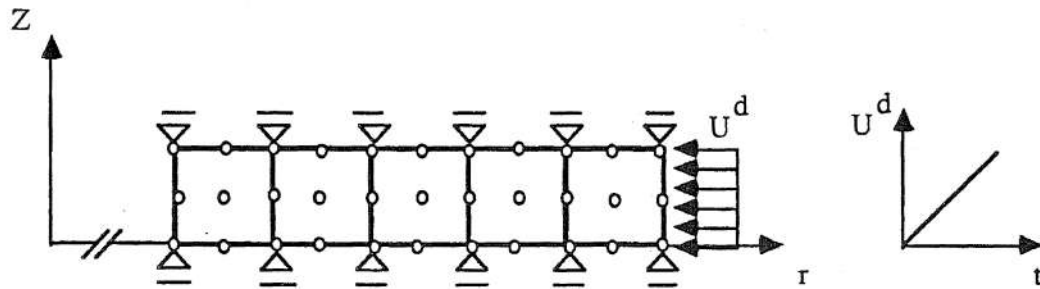


Figure 12 Cylindre infini à paroi épaisse. Maillage et chargement. paramètres du matériau utilisés:  $E = 200000 \text{ MPa}$   $\nu = 0.30$   $Y_0 = 0.30$   $M = 4$ .

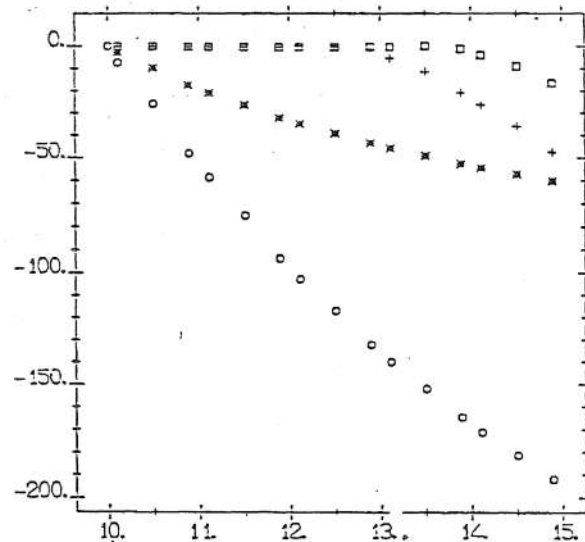


Figure 13a Cylindre infini à paroi épaisse. Contrainte radiale ( $\sigma_{rr}$ ) en fonction de  $r$ .  
 $\square$   $U^d = 0.9 \times 10^{-2}$   $*$   $U^d = 3.6 \times 10^{-2}$   $+$   $U^d = 7.2 \times 10^{-2}$   $\circ$   $U^d = 8.1 \times 10^{-2}$

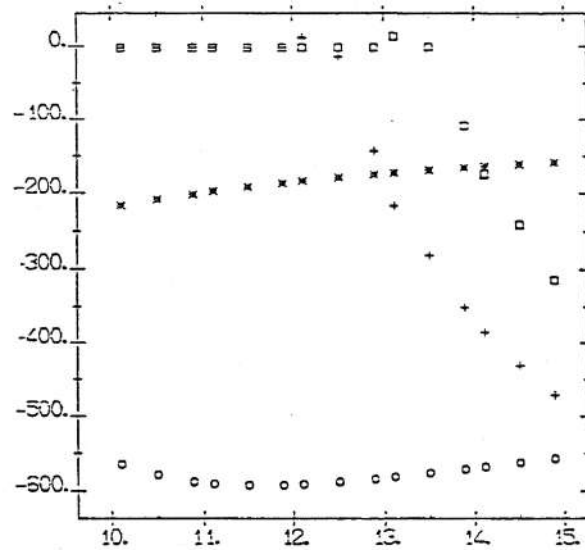


Figure 13b Cylindre infini à paroi épaisse. contrainte orttoradiale ( $\sigma_{\theta\theta}$ ) en fonction de  $r$ .

□  $U^d = 0.9 \times 10^{-2}$  \*  $U^d = 3.6 \times 10^{-2}$  +  $U^d = 7.2 \times 10^{-2}$  o  $U^d = 8.1 \times 10^{-2}$

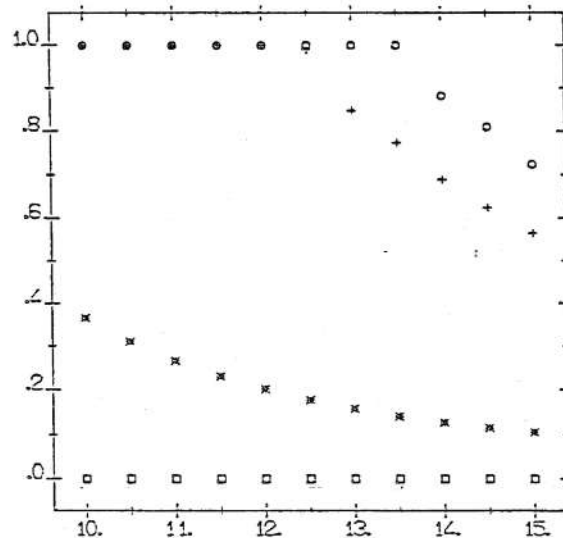


Figure 13c Cylindre infini à paroi épaisse. Endommagement en fonction de  $r$ .

□  $U^d = 0.9 \times 10^{-2}$  \*  $U^d = 3.6 \times 10^{-2}$  +  $U^d = 7.2 \times 10^{-2}$  o  $U^d = 8.1 \times 10^{-2}$

### 3.3. Eprouvette entaillée à grande concentration de contraintes.

On analysera par la suite une structure plus complexe. Il s'agit d'une éprouvette entaillée (rayon de l'entaille 1m.m.) en contraintes planes et soumise à des déplacements imposés. Le maillage est constitué par 203 éléments à 4 nœuds. La géométrie de la structure, les conditions aux limites, le chargement ainsi que un "zoom" sur l'entaille sont indiqués en figure 14. Les paramètres du matériau sont aussi indiqués dans la même figure. Les figures 15a, 15b, 15c et 15d montrent la croissance de la zone complètement endommagée lorsque le déplacement

imposé augmente progressivement. Les figures 16 17 18 et 19 indiquent la distribution de l'endommagement et de la contrainte normale ( $\sigma_{yy}$ ) sur l'axe de symétrie de éprouvette pour les mêmes déplacements de la figure 15. Ces dernières figures montrent aussi la redistribution de la contrainte lors de l'apparition et propagation de la zone complètement endommagée. On peut également remarquer la légère augmentation de la contrainte dans la zone endommagée due à l'approximation de  $\Omega$  par l'intervalle  $[0, 0.999]$ .

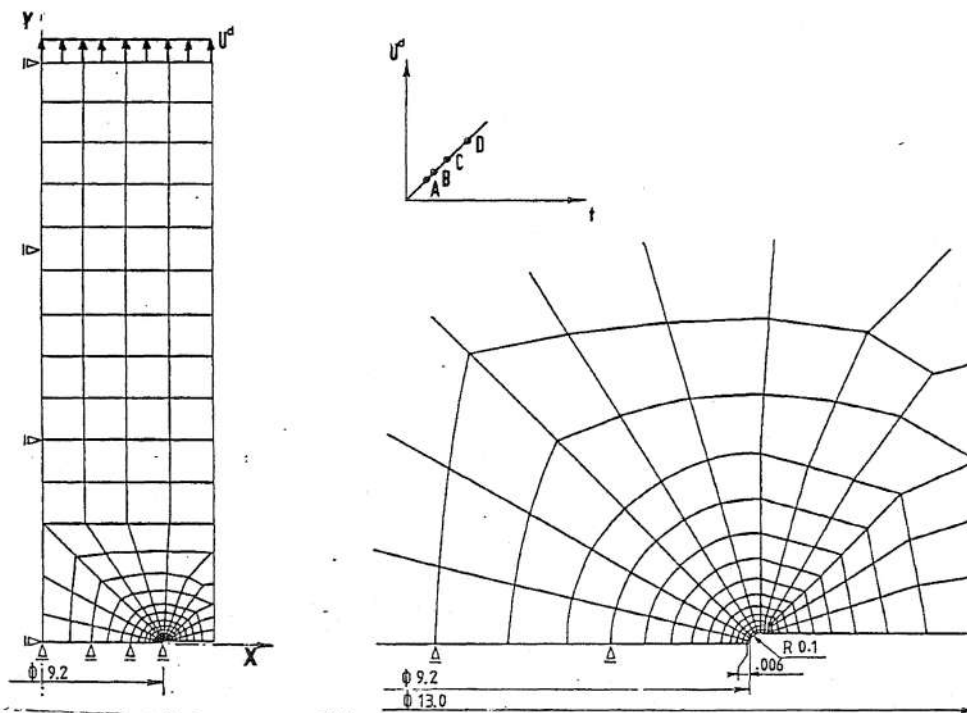


Figure 14 Epruvette entaillée à grande concentration de contraintes. Maillage et chargement. paramètres du matériau utilisés:  $E = 200000 \text{ MPa}$   $\nu = 0.30$   $Y_0 = 0.30$   $M = 4$ .

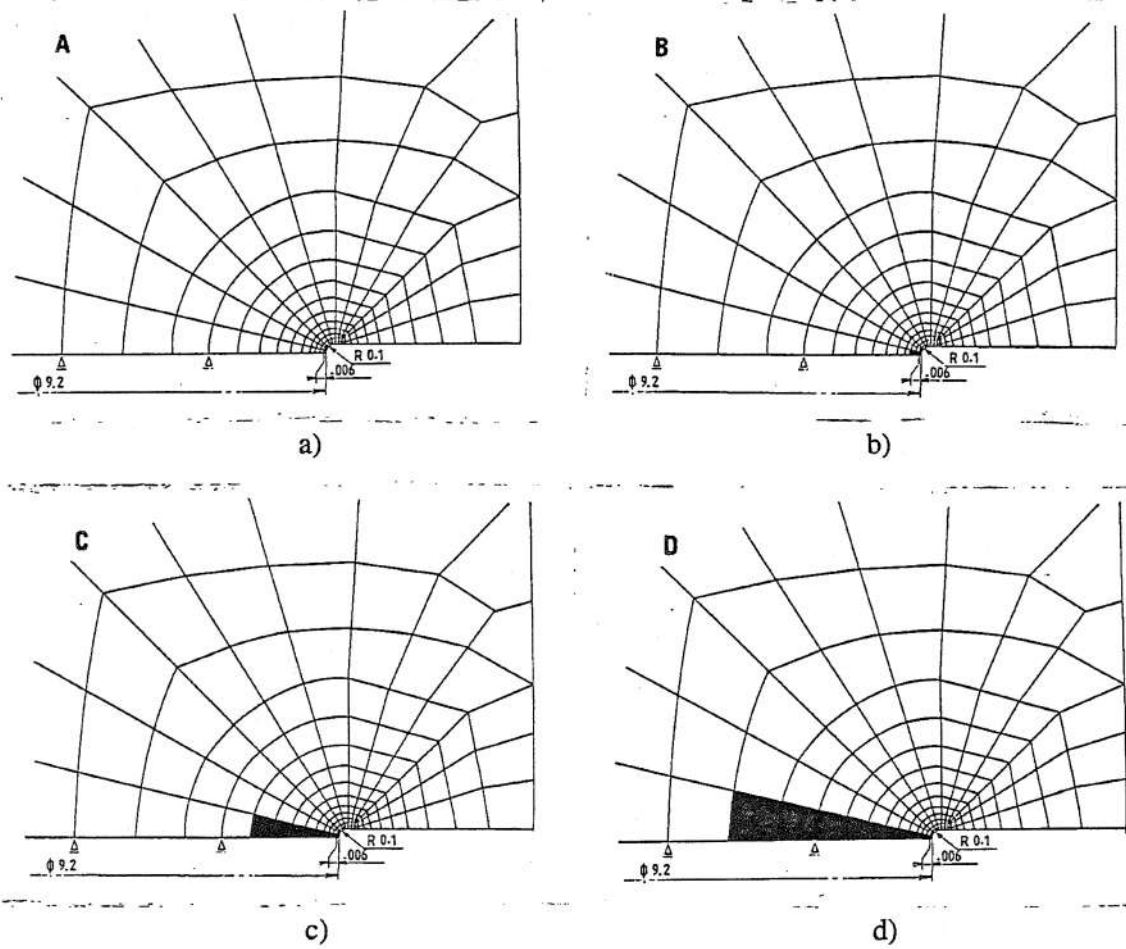


Figure 15 Epreuve entaillée à grande concentration de contraintes. Evolution de la zone complètement endommagée a)  $U^d = 9.20 \times 10^{-3}$  m.m b)  $U^d = 1.08 \times 10^{-2}$  m.m c)  $U^d = 2.03 \times 10^{-2}$  m.m d)  $U^d = 2.44 \times 10^{-2}$  m.m

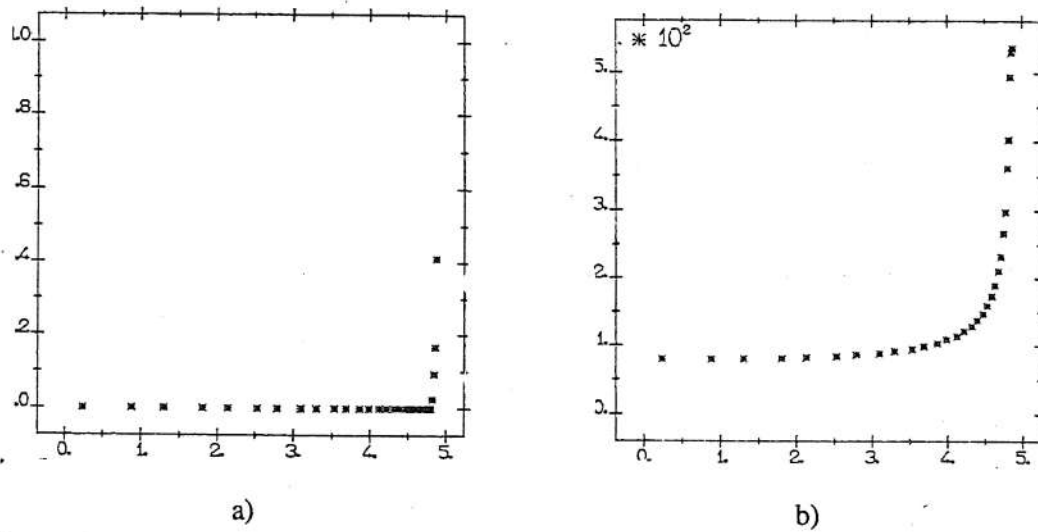


Figure 16 Epreuve entaillée à grande concentration de contraintes. Déplacement imposé:  $U^d = 9.20 \times 10^{-3}$  m.m a) Distribution de l'endommagement sur l'axe de symétrie de l'éprouvette. b) Distribution de la contrainte normale sur l'axe de symétrie de l'éprouvette.

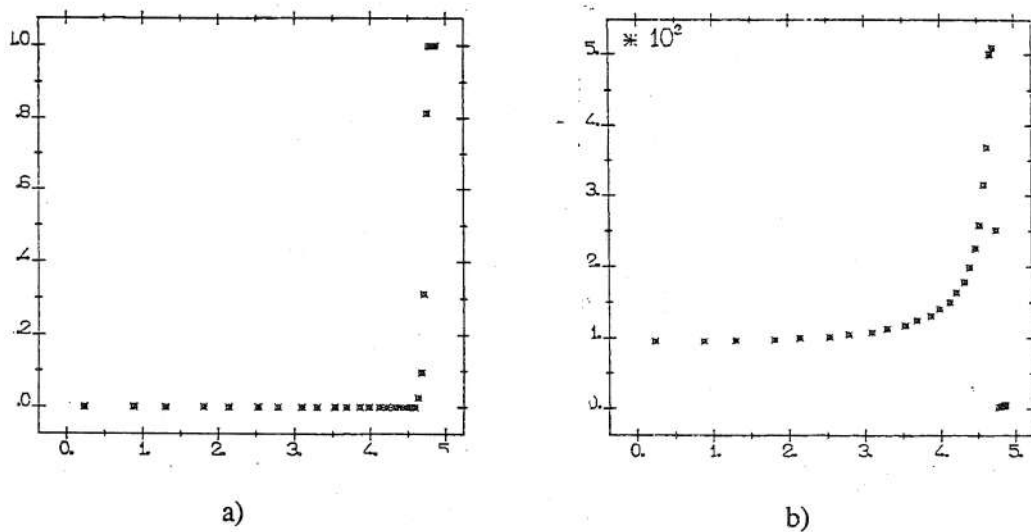


Figure 17 Epreuve entaillée à grande concentration de contraintes. Déplacement imposé:  $U^d = 1.08 \times 10^{-2}$  m.m a) Distribution de l'endommagement sur l'axe de symétrie de l'éprouvette. b) Distribution de la contrainte normale sur l'axe de symétrie de l'éprouvette.

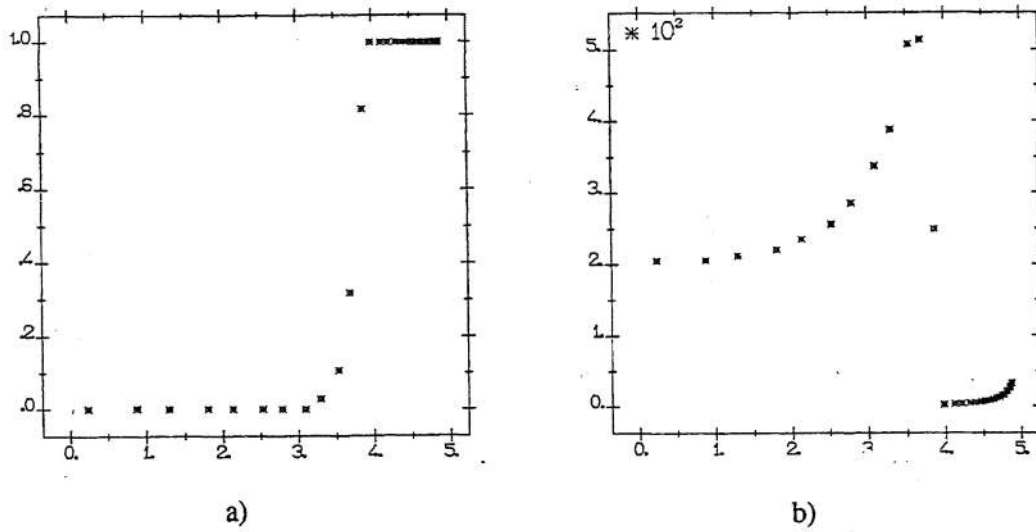


Figure 18 Eprouvette entaillée à grande concentration de contraintes. Déplacement imposé:  $U^d = 2.03 \times 10^{-2}$  m.m a) Distribution de l'endommagement sur l'axe de symétrie de l'éprouvette. b) Distribution de la contrainte normale sur l'axe de symétrie de l'éprouvette.

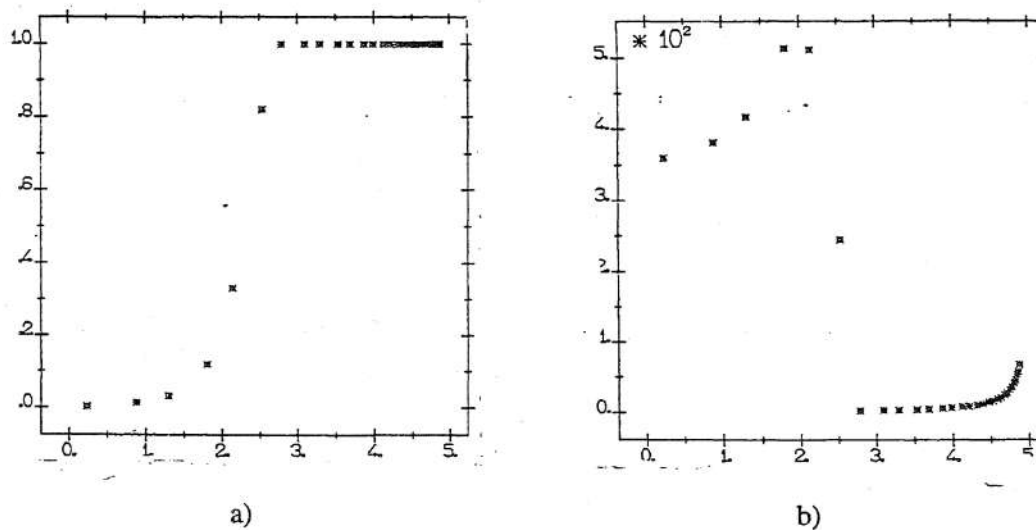


Figure 19 Eprouvette entaillée à grande concentration de contraintes. Déplacement imposé:  $U^d = 2.44 \times 10^{-2}$  m.m a) Distribution de l'endommagement sur l'axe de symétrie de l'éprouvette. b) Distribution de la contrainte normale sur l'axe de symétrie de l'éprouvette.

### 3.4. Eprouvette entaillée à faible concentration de contraintes.

On considère l'éprouvette entaillée (rayon de l'entaille 5m.m) indiquée en figure 20. L'éprouvette est soumise au même type de chargement et de conditions aux limites de l'exemple précédent. Les figures 21a et 21b montrent la distribution de l'endommagement aux instants A et B indiqués en figure 20. Ces instants sont séparés uniquement par un incrément de temps  $\Delta t$ . On peut constater que à l'instant A, l'amorçage n'a pas encore eu lieu. A l'instant B la structure est traversée complètement par une bande d'éléments à endommagement  $D = D_p$ . Celle-ci ne part pas du fond de l'entaille, cela est dû à un défaut du maillage qui fait que la section minimale ne correspond pas à  $Y = 0$  mais à la section où la bande d'éléments rompus commence.

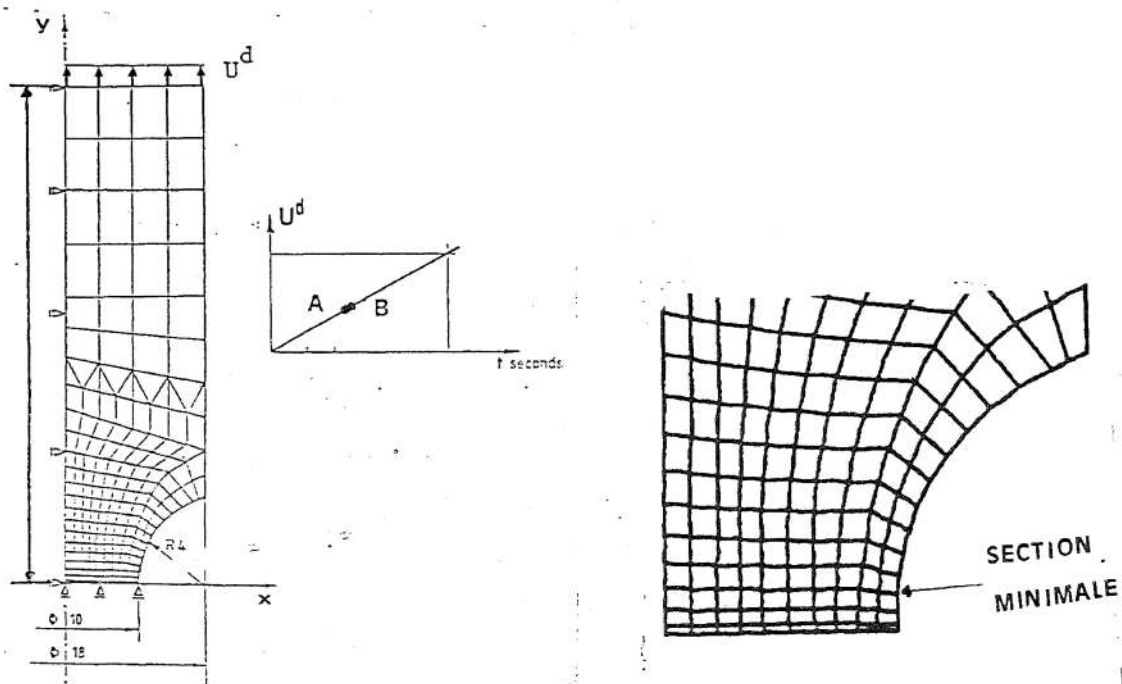


Figure 20 Eprouvette entaillée à faible concentration de contraintes. Maillage et chargement.  
paramètres du matériau utilisés:  $E = 200000 \text{ MPa}$   $\nu = 0.30$   $Y_0 = 0.30$   $M = 4$ .

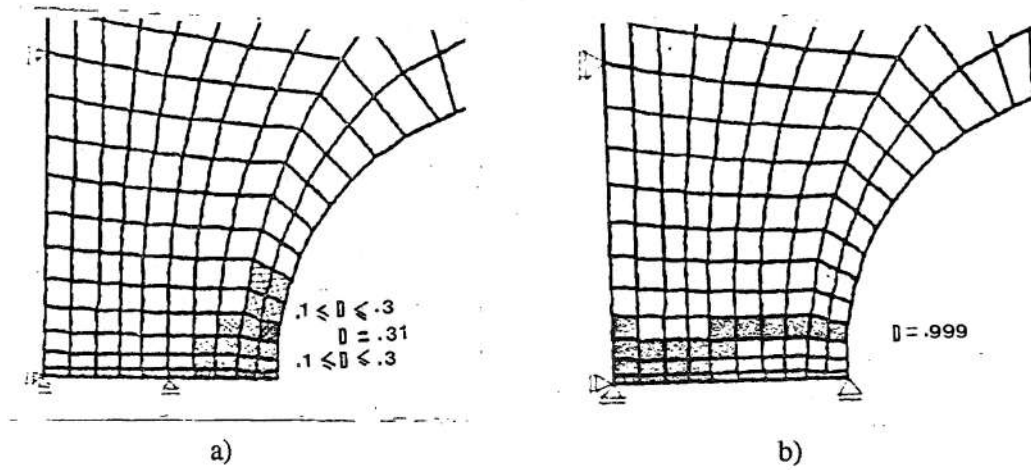


Figure 19 Eprouvette entaillée à faible concentration de contraintes. Distribution de l'endommagement autour de l'entaille. a) Déplacement imposé:  $U^d = 4.25 \times 10^{-2}$  m.m. b) Déplacement imposé:  $U^d = 4.35 \times 10^{-2}$  m.m.

---

## Bilan, conclusions et perspectives

---

**Bilan:** Nous avons étudié une classe particulière de modèles d'endommagement, les modèles d'élasticité couplée à l'endommagement indépendant du temps. Nous avons mis en évidence ses différentes formulations, la formulation incrémentale et la formulation fonctionnelle. Nous avons précisé la relation qui existe entre elles et aussi leurs différences. Nous avons proposé pour la formulation fonctionnelle un cadre thermodynamique qui permet (comme dans la formulation incrémentale classique) d'exprimer ces modèles à l'aide de deux potentiels, l'énergie libre et l'énergie dissipée. Le reste de la thèse est axé autour de la formulation fonctionnelle.

Nous avons étudié une classe particulière de formulations variationnelles, des formulations à deux champs qui expriment la solution du problème comme un point d'équilibre non-coopératif. Nous avons proposé des formulations à deux champs pour le problème en vitesses et pour le problème d'évolution.

Sur la base des formulations à deux champs, nous avons discuté les propriétés des solutions au problème en vitesses, unicité, stabilité et régularité de la solution, et nous avons réalisé une première tentative pour tirer des résultats concernant le problème d'évolution directement. Plus précisément nous avons proposé un critère d'unicité de la solution pour le problème en vitesses et pour le problème d'évolution. Nous avons étudié la stabilité de la solution pour les modèles en formulation fonctionnelle et nous avons proposé une justification mathématique du critère de stabilité au sens de Hill. Nous avons en effet montré que ce critère est la condition de continuité du point d'équilibre non-coopératif par rapport aux données du problème en vitesses. Nous avons enfin discuté la régularité de la solution du problème en vitesses non-linéaire et proposé un critère de localisation global.

Dans la dernière partie de la thèse nous avons décrit une méthode numérique pour l'obtention de solutions approchées au problème d'évolution. Elle aussi basée sur la formulation à deux champs. Nous avons enfin montré sa faisabilité avec quelques exemples numériques.

### Conclusions:

- Sur l'écriture des lois de comportement. Les deux formulations sont équivalentes dans la plupart des cas d'intérêt pratique. Il est alors préférable d'utiliser la formulation fonctionnelle. Elle permet notamment de réaliser l'intégration de la loi d'évolution une fois pour toutes à ce stade de la formulation du modèle et non pendant la résolution numérique du problème de structures. Elle conduit à des méthodes numériques plus simples et plus efficaces et elle permet d'étudier directement les propriétés de la solution au problème d'évolution.

- Sur les formulations variationnelles à deux champs. Ces formulations présentent des avantages par rapport à la formulation classique en vitesse de déplacement. D'abord, dans la plupart des applications, l'objet principal des calculs, en utilisant la mécanique de l'endommagement, est précisément l'obtention des champs d'endommagement, la prévision des zones rompues, etc. Il semble donc naturel de garder l'endommagement comme la variable principale du problème spécialement en vue des applications numériques. En suite, les formulations choisies présentent aussi certaines avantages techniques. Elles permettent, par exemple, d'exprimer le problème en vitesses à l'aide d'équations généralisées linéaires, c'est à dire de se débarrasser des termes non-linéaires dans les fonctionnelles. Etant exprimée à l'aide de deux fonctionnelles, elle est applicable dans un cadre très général. On peut remarquer que l'on n'a pas fait des hypothèses contraignantes sur le domaine d'élasticité dans la loi de évolution de l'endommagement, notamment il peut dépendre de l'état. Enfin, la formulation variationnelle à deux champs pour le problème d'évolution permet d'introduire explicitement la contrainte  $D \in \Omega$  parmi les relations du problème à résoudre. Cela constitue un atout important pour l'obtention d'une méthode numérique appropriée au problème.

- Sur les propriétés de solutions. Il est généralement admis que l'utilisation de la mécanique de l'endommagement présente des limites au moins en ce qui concerne une utilisation fiable et lorsque l'on utilise des modèles locaux. On peut considérer que des résultats fiables peuvent être obtenus tant que le critère du N° 3.4. du chapitre IV est vérifié, au delà de ce stade, l'auteur n'a malheureusement rien à dire. Le critère de stabilité énoncé lors du chapitre V est plus faible que le précédent. Cependant on a constaté qu'il assure la stabilité (la continuité par rapport aux données) de la solution au problème en vitesses et non nécessairement celle du

problème d'évolution, qui par conséquent pourrait éventuellement être instable même si le critère énoncé est vérifié.

- Sur la méthode numérique proposée. Elle présente des avantages par rapport aux méthodes traditionnelles, notamment le calcul de l'endommagement et la prise en compte de la contrainte  $D \in \Omega$  partout dans le volume de la structure et non aux points de Gauss uniquement. Elle permet donc un plus grand contrôle sur le champ d'endommagement puisque l'utilisateur choisit (avec quelques restrictions en fonction de la méthode employée) les fonctions d'interpolation de l'endommagement. On signale aussi le fait qu'il n'a pas été constaté une augmentation appréciable du temps de calcul par rapport aux méthodes classiques.

**Perspectives:** Sans citer les nombreux points techniques qui peuvent et doivent être développés, on peut noter les thèmes en rapport direct avec le sujet de cette thèse et qui n'ont pas été développés.

Au chapitre III nous avons proposé une formulation pour le problème d'évolution qui peut constituer un outil pour tirer de résultats concernant les solutions du problème d'évolution. Nous avons à peine touché du doigt cette possibilité.

Au chapitre IV nous avons noté qu'il pouvait exister plusieurs solutions au problème d'endommagement. Mais nous n'avons pas considéré la calcul de branches bifurquées. Pourtant les études sur ce sujet sont nombreuses et il est sans doute possible de les adapter, en tirant profit des avantages des modèles en formulation fonctionnelle.

Au chapitre VI nous avons noté qu'il peut y avoir une infinité de solutions au problème d'endommagement, mais nous n'avons pas discuté quelle est celle (ou celles) qui sont significatives physiquement ou encore si parler de "solutions significatives" a un sens dans ce cas. Il faut donc une étude théorique beaucoup plus poussée.

Enfin dans ce texte nous nous sommes limités à une classe particulière de modèles d'endommagement, tout les sujets considérés ici, devraient être développés en considérant des modèles avec dépendance du temps, modèles d'endommagement de fatigue, etc.

## Annexe I

On suppose que le potentiel  $\Phi$  est convexe et que l'énergie libre  $W$  est de la forme suivante:

$$(1) \quad W(\epsilon, D) = \sum_{i=1}^n g_i(D_i) W_{0i}(\epsilon)$$

où  $n$  est le nombre de paramètres d'endommagement, les fonctions  $g_i$  sont convexes et les  $W_{0i}$  représentent des seminormes de la déformation.

**Proposition:** La résolution en  $D(t)$  de l'équation généralisée:

$$(2) \quad Z(t) = \sup_{0 \leq t' \leq t} [ Y(\epsilon(t'), D(t')) ] \in \partial\Phi(D(t))$$

est équivalente au problème de minimisation suivant:

Trouver  $D(t) \in \Omega$  minimisant la fonction  $J(t)$  à l'instant  $t$ .

$$(3) \quad J(D(t), \epsilon(t)) = \Phi(D(t)) + \Psi(D(t), \epsilon(t))$$

où

$$\Psi(D(t), \epsilon(t)) = - \int_0^{D(t)} \sup_{0 \leq t' \leq t} [ Y(\epsilon(t'), X) ] dX$$

**Preuve:**

La convexité de  $\Phi$  implique:

$$(4) \quad \Phi(D^*) - \Phi(D) - (D^* - D)A \geq 0 \quad \forall D^*, D \in \Omega \quad \forall A \in \partial\Phi(D)$$

l'équation (2) implique donc:

$$(5) \quad \Phi(D^*) - \Phi(D(t)) - (D^* - D(t))Z(t) \geq 0 \quad \forall D^* \in \Omega$$

La fonction  $\Psi$  est aussi convexe par rapport à  $D$  puisque les fonctions  $g_i$  sont convexes et les  $W_{0i}$  sont positives quelque soit  $\varepsilon(\tau)$ .

On a donc:

$$(6) \quad \Psi(D^*, \varepsilon(\tau)) - \Psi(D(t), \varepsilon(\tau)) + (D^* - D(t))Z(t) \geq 0 \quad \forall D^* \in \Omega$$

(5) + (6) donnent alors:

$$(7) \quad \Phi(D^*) + \Psi(D^*, \varepsilon(\tau)) \geq \Phi(D) + \Psi(D, \varepsilon(\tau)) \quad \forall D^*$$

Remarques:

i) L'existence de  $D(t)$  pour n'importe quelle histoire  $\varepsilon(\tau)$  est alors assurée par la coercivité de  $\Phi$ . (voir Ekeland et Temam [EKE74])

ii) Si la fonction  $\Phi + \Psi$  est strictement convexe par rapport à  $D$ , alors  $D(t)$  est unique. (voir Ekeland et Temam [EKE74])

iii) La stricte convexité et coercivité de  $\Phi + \Psi$  implique (voir Ekeland et Temam [EKE74]) la stabilité de la solution du problème de minimisation par rapport à  $\varepsilon(\tau)$  et par conséquent la continuité de la application:

$$\varepsilon(\tau) \text{ ----> } D(t)$$

iv) La proposition reste valable si au lieu de considérer  $\Phi$  et  $\Psi$ , on étudie les surpotentiels :

$$\Phi = \int_V \Phi(\mathbf{D}) dV$$

$$\Psi = \int_V \Psi(\mathbf{D}) dV$$

En effet la minimisation sur  $\Delta$  du surpotentiel:

$$J = \int_V J(\mathbf{D}, \epsilon) dV$$

est équivalente à la vérification de:

$$\mathbf{Z}(t) \in \partial\Phi(\mathbf{D}(t)) \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

## Annexe II

On suppose  $\Phi(D) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(D_i)$  deux fois différentiable et strictement convexe. On note  $Z_i(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} [Y_i(\tau), D(\tau)]$  où  $n$  est le nombre de paramètres d'endommagement et  $X_i$  désigne la composante  $i$  du vecteur  $X$

### **Proposition:**

La dissipation intrinsèque  $\theta$  peut s'écrire:

$$(1) \quad \theta = Z \cdot \dot{D} = \dot{\Phi}$$

### **Preuve:**

Par définition (voir chapitre I), la définition intrinsèque est:

$$(2) \quad \theta = Y \cdot \dot{D}$$

Lorsque la fonction  $\Phi(D)$  est deux fois différentiable, la loi d'endommagement peut s'écrire comme suit:

$$(4) \quad Z_i = \frac{d\Phi_i}{dD_i}$$

et la loi d'évolution de l'endommagement:

$$(5) \quad \dot{D}_i = \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial D_i \partial D_i} \right]^{-1} Z_i$$

d'autre part

$$(6) \quad Z_i = \sup (Y_i)$$

Alors en dérivant (6) par rapport au temps on obtient:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{Z}_i &= \dot{Y}_i & \text{si } Z_i &= Y_i \text{ et } \dot{Y}_i \geq 0 \\ \dot{Z}_i &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

Par conséquent  $\dot{D}_i$  non nulle si et seulement si  $Z_i = Y_i$

Alors, compte tenu de (2),(7) et (4), la dissipation intrinsèque s'exprime par:

$$(7) \quad \theta = \sum Y_i \dot{D}_i = \sum Z_i \dot{D}_i = \sum \frac{d\Phi_i}{dD_i} \dot{D}_i = \dot{\Phi}$$

**Annexe III**

On suppose  $\Phi(\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\mathbf{D}_i)$  deux fois différentiable, convexe

et  $W(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{D}_i) W_{0i}(\boldsymbol{\varepsilon})$  deux fois différentiable et convexe par rapport à  $\mathbf{D}$

**Proposition:**

La loi d'évolution de l'endommagement :

$$(1) \quad \left\langle -\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}}\right)_i \right\rangle = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}}\right)_i \quad \text{si } G_i(t) = 0$$

est équivalente à:

$$(2) \quad \left\langle -\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)_i \right\rangle = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}}\right]_{ii} \dot{\mathbf{D}}_i \quad \text{si } G_i(t) = 0$$

**Preuve:**

Pour les potentiels choisis on a :

$$(3) \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}}\right)_i = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}}\right)_{ii} \dot{\mathbf{D}}_i$$

$$(4) \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}}\right)_i = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}}\right)_{ii} \dot{\mathbf{D}}_i$$

(pas de sommation sur les indices)

puisque:

$$(5) \quad \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}}\right)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}}\right)_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

On peut alors montrer que:

a) La relation (1) implique (2).

En effet si la partie positive dans (1) est non nulle alors le terme  $(-\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \dot{\epsilon})_i$  est nécessairement positif puisque les potentiels  $W$  et  $\Phi$  sont convexes et  $\dot{D}_i$  est toujours positif, par conséquent (1) et (2) sont équivalentes dans ce cas particulier.

Si la partie positive dans (1) est nulle  $\dot{D}_i$  est, d'après (1), égale à zéro et par conséquent le terme  $(-\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \dot{\epsilon})_i$  est nécessairement négatif. On a donc que dans tous le cas la relation (1) implique (2)

b) La relation (2) implique (1).

En effet si la partie positive dans (2) est nulle alors  $\dot{D}_i$  est égale à zéro d'après (1) et compte tenu de la convexité de  $W$ . Par conséquent la relation (2) est équivalente à (1) dans ce cas particulier.

Si la partie positive dans (2) est non nulle alors d'après (1) la valeur de  $\dot{D}_i$  est aussi nécessairement positive puisque  $(-\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon \partial \epsilon} : \dot{\epsilon})_i > 0$  et  $\dot{D}_i = 0$  simultanément sont en contradiction avec la relation (1), par conséquent la partie positive dans (2) est également positive et les relations (2) et (6) sont donc équivalentes.

---

## Références bibliographiques

---

- [BAT82] K.J. BATHE, *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey , 1982.
- [BAZ88] Z.P. BAZANT, *Stable states and stable paths of propagation of damage zones: inelastic stability criteria with applications*. dans Strain localization and size effect due to cracking and damage, France -U.S. Workshop, Cachan, 1988.
- [BEL88] T. BELYTSCHKO, J. FISH et E. ENGELMANN, *A finite element with embedded localisation zones*. Computer methods in applied mechanics and engineering 70 p. 59-89, 1988.
- [BEN74] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS et R. TEMAM, *Sur les méthodes de décomposition, de decentralisation et de coordination et applications*. dans Sur les méthodes numériques en sciences physiques et économiques, Dunod, Paris, 1974.
- [BEN86] A. BENALLAL, J. FLOREZ et G. GEYMONAT, *A two-field finite element formulation in continuum damage mechanics*. dans Numerical methods for non-linear problems, Vol 3, Ed Taylor C., Owen D.R.J., Hinton E., Damjanic F.B., Pineridge Press, Swansea, p. 564, 1986
- [BEN87a] A. BENALLAL, J. FLOREZ et G. GEYMONAT, *Sur une formulation variationnelle à deux champs en élasticité couplée à l'endommagement*. C.R.Acad.Sci.Paris, t. 305, Série II, p. 1131-1136, 1987.
- [BEN87b] A. BENALLAL, J. FLOREZ et G. GEYMONAT, *Continuum damage mechanics and Nash non-cooperative equilibria: Numerical implications*. dans Numerical methods in fracture mechanics. ed A.R. Luxmoore, D.R.J. Owen, Y.P.S. Rajapakse, F. Kanninen. Pineridge Press, Swensea 1987, p. 353-367.
- [BEN89] A. BENALLAL, R. BILLARDON et G. GEYMONAT, *Conditions de bifurcation à l'intérieur et aux frontières pour une classe de matériaux non-standards*. C.R.Acad.Sci.Paris, à paraître.
- [BIL87a] R. BILLARDON et L. MORET-BAILLY, *Fully coupled strain and damage finite element analysis of ductile fracture*. Nuclear Engineering and design 105, 1987, p. 43-49.

- [BIL87b] R. BILLARDON, *Mesh sensitivity of fully coupled strain and damage finite element analysis*. Int.Seminar on high temperature fracture mechanisms and mechanics, 1987.
- [BIL88] R. BILLARDON et I. DOGHRI, *Localisation bifurcation analysis for damage softening elasto-plastic materials*. dans Strain localization and size effect due to cracking and damage, France -U.S. Workshop, Cachan, 1988.
- [BIL89] R. BILLARDON et I. DOGHRI, *Prévision de l'amorçage d'une macrofissure par localisation de l'endommagement*. C.R.Acad.Sci.Paris, à paraître.
- [BOR87] R. de BORST, *Stability and uniqueness in numerical modelling of concrete structures*.dans Computational Mechanics of concrete structures-Advances and applications IABSE Colloquium, Delft 1987.
- [BUD74] B. BUDYANSKY, *Theory of buckling and postbuckling behaviour of elastic structure*. Advances in Appl. Mech, vol. 14, 1974, p. 1-65.
- [BUI81a] H.D. BUI et A. EHRLACHER, *Protection of damage in elastic and plastic solids*. dans Advances in fracture research, I.C.F. , Pergamon Press, 1981, 2, p. 533-551.
- [BUI81b] H.D. BUI, K.D. VAN et C. STOLZ, *Formulations variationnelles du problème en vitesses pour le solide élastique-fragile avec zone endommagée*. C.R.Acad.Sc.Paris, t. 292, 1981.
- [CHA86] R. CHAMBON, *Bifurcation par localisation en bande de cisaillement, une approche avec des lois incrémentalement non lineaires*.J. Mécan. théor. et appl., Vol 5, N° 2, 1986, p.277-298.
- [COR82] J.P. CORDEBOIS et F. SIDOROFF, *Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité*. J. Mécan. théor. et appl., N° spécial p.45-60, 1982.
- [DOG89] I. DOGHRI, *Etude de la localisation de l'endommagement*. Thèse de l'université ParisVI, à paraître.
- [EHR88] A. EHRLACHER et B. FEDELICH, *Stability and bifurcation of simple dissipative systems: application to brutal damage*. Proceedings of "Strain localisation and size effect due to cracking and damage" E.N.S. Cachan France
- [EKE74] I. EKELAND et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnell*. Dunod, Paris, 1974.
- [FED88] B. FEDELICH et A. EHRLACHER, *Sur l'évolution des matériaux à dissipation simple*. Compte rendu du 23ème colloque du groupe Français de rhéologie "Endommagement et rhéologie des solides", 1988.
- [FED89] B. FEDELICH et A. EHRLACHER, *On a minimun principle concerning physical time independant materials*. International conference on constitutive laws for engineering materials (I.C.C.L.E.M.).Chongking Chine° 1989.
- [GLO76] R. GLOWINSKI, J.L. LIONS et R. TREMOLIERES, *Analyse numérique des inéquations variationnelles* . tome 1, Dunod, Paris, 1976.

- [HIL58] R. HILL, *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids*. J.Mech.Phys.Solids, Vol 6, p.236-249, 1958.
- [KOI45] W.T. KOITER, *The stability of elastic equilibrium*. These Delft 1945, Traduction AFFDL-TR 1970.
- [LAD83] P. LADEVEZE, *On an anisotropic damage theory*. Proc. of the C.N.R.S. international colloquium on failure criteria of structural media, Villars de Lans, France, 1983.
- [LAD86] P. LADEVEZE, *Sur la mécanique de l'endommagement des composites*, dans Comptes rendus des cinquèmes journées nationales sur les composites, Pluralis, 1986, p. 667-683
- [LAD87] P. LADEVEZE, communication personnelle
- [LEM85] J. LEMAITRE et J.L. CHABOCHE, *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1985.
- [MAR81] J.J. MARIGO, *Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique*. C.R.Acad.Sci. Paris 292, série II, 1981, p. 1309-1312.
- [MAR82] J.J. MARIGO, *Etude numérique de l'endommagement*. E.D.F.- Bulletin de la direction des études et recherches série C N°2, 1982 p. 27-48
- [MAR85] J.J. MARIGO, *Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids*. Engineering Fracture Mechanics, 1985, Vol. 21. N° 4. p. 861-874.
- [MAZ86] J. MAZARS, *A model of a unilateral elastic damageable material and its applications to concrete*. dans Fracture toughness and fracture energy of concrete ed. F.H. Wittmann Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam 1986
- [NEC67] J. NECAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris, 1967
- [NGU84] Q.S. NGUYEN, *Bifurcation et stabilité des systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximum*. J. Mécan. théor. et appl., Vol 3, N° 2, 1984 p. 533-551
- [NGU87] Q.S. NGUYEN, *Bifurcation and post-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture*. J.Mech.Phys.Solids Vol 35, N° 3, p. 303-324, 1987
- [NGU89] Q.S. NGUYEN et N. TRIANTAFYLIDIS, *Plastic bifurcation and postbifurcation analysis for generalized standard continua*. A paraître.
- [ORT86] M. ORTIZ, Y. LEROY et A. NEEDLEMAN, *A finite element method for localized failure analysis*. Computer methods in applied mechanics and engineering 61 p. 189-214, 1987.
- [ORT87] M. ORTIZ, *An analytical study of the localized failure modes of concrete*. Mechanics of materials 6, p. 159-174, 1987.
- [PAP88] E. PAPA, *Sur un modèle élastique couplé à l'endommagement pour la maçonnerie*. Rapport interne L.M.T. Cachan, N° ,1988.

- [PET84] H. PETRYK et K.THERMANN, *Second-order bifurcation in elastic-plastic solids*. J.Mech.Phys.Solids vol 33, N° 6 p. 577-593, 1984.
- [PET85] H. PETRYK, *On energy criteria of plastic instability*. dans Plastic instability proceedings, Considère Mémorial ENPC Press, Paris 1985.
- [RIC76] J.R. RICE, *The localization of plastic deformation*. dans Theoretical and applied Mechanics, ed. W.T. Koiter, North-Holland, Amsterdam, 207, 1976.
- [RIC80] J.R. RICE et J.W. RUDNICKI, *A note on some features of the theory of localization of deformation*. Int.J.Solids Structures Vol 16, p. 597-605. 1980
- [ROB79] S.M. ROBINSON *Generalized equations and their solutions, part I: Basic theory*. Mathematical Programing, 1979, 10, p. 128-141.
- [ROB82] S.M. ROBINSON *Generalized equations and their solutions, part II: Applications to nonlinear programming*. Mathematical Programing, 1982, 19, p. 200-221.
- [SIM87] J.C. SIMO et J.W. JU, *Strain- and stress-based continuum damage models I: Formulation*. Int. J; Solids Structures, 1987, Vol 23, N° 7, p. 821-840
- [STO87] C. STOLZ, *Anélasticité et stabilité*. Thèse de doctorat d'état, Université Paris-VI, 1987
- [SUQ82] P. SUQUET, *Plasticité et homogénéisation*. Thèse de doctorat d'état, Université Paris-VI, 1982
- [THO73] J.M.T. THOMPSON et G.W. HUNT, *A general theory of elastic stability*. John Wiley & Sons, Londres, 1973
- [TIM61] S.P. TIMOSHENKO et J.M. Gere, *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill, New York, 1961
- [TRE85] V. TRÉNOGUINE, *Analise fonctionnelle*. (Traduction de l'edition russe de 1980) Mir, Moscou 1985
- [VAI64] M.M. VAINBERG, *Variatiionnal methods for the study of non-linear operators* (Traduction de l'edition russe de 1956) Holden-Day, San Francisco, 1964.