

TEOREMAS DO PONTO FIXO DE BANACH E DE BROUWER

EDUARDO FELIPE DE SOUZA

Foz do Iguaçu
2022

TEOREMAS DO PONTO FIXO DE BANACH E DE BROUWER

EDUARDO FELIPE DE SOUZA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Mauro da Silva Vascocelos

Foz do Iguaçu
2022

EDUARDO FELIPE DE SOUZA

TEOREMAS DO PONTO FIXO DE BANACH E DE BROUWER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Mauro da Silva Vasconcelos
UNILA

Prof. Dr. Cleilton Aparecido Canal
UNILA

Prof. Dra. Mariana Ramos Reis Gaete
UNILA

Foz do Iguaçu, 13 de Julho de 2022



Emitido em 2022

DOCUMENTO EXTERNO Nº 278/2022 - CMAT (10.01.06.03.04.04.04)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 01/08/2022 16:46)

CLEILTON APARECIDO CANAL
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
ILACVN (10.01.06.03.04)
Matrícula: 1086306

(Assinado digitalmente em 01/08/2022 16:27)

GUILHERME VASCONCELOS DA SILVA MAURO
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
CMAT (10.01.06.03.04.04.04)
Matrícula: 2195063

(Assinado digitalmente em 01/08/2022 19:27)

MARIANA RAMOS REIS GAETE
PROFESSOR DO MAGISTÉRIO SUPERIOR
ILACVN (10.01.06.03.04)
Matrícula: 1937286

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sig.unila.edu.br/documentos/> informando seu número: 278, ano: 2022, tipo: DOCUMENTO EXTERNO, data de emissão: 01/08/2022 e o código de verificação: **d74e741a31**

TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor(a): Eduardo Felipe de Souza

Curso: Licenciatura plena em Matemática

	Tipo de Documento
(X) graduação	(.....) artigo
(.....) especialização	(X) trabalho de conclusão de curso
(.....) mestrado	(.....) monografia
(.....) doutorado	(.....) dissertação
	(.....) tese
	(.....) CD/DVD – obras audiovisuais
	(.....)

Título do trabalho acadêmico: Teoremas do Ponto Fixo de Banach e de Brouwer

Nome do orientador(a): Guilherme Mauro da Silva Vasconcelos

Data da Defesa: 13/07/2022

Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor(a):

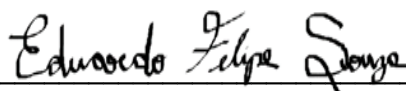
a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons Licença 3.0 Unported*.

Foz do Iguaçu, 12 de Julho de 2022.



Assinatura do Responsável

Dedico este trabalho a Jeová.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Jeová Deus, que foi quem me concedeu a vida e uma esperança maravilhosa para o futuro. Também, agradeço ao meu professor e orientador Guilherme, pela confiança e por ter me ajudado a lidar com os meus propósitos e erros.

Durante muito tempo eu imaginava que cursar matemática não era algo pra mim. Tive que lidar, ao longo desses seis anos, com crises pessoais e desincentivo por parte da família e de amigos, que me diziam para desistir. Claro que eles tinham seus bons motivos.

Mesmo assim, consegui chegar neste objetivo que parecia algo muito distante. Nesta jornada, encontrei colegas, amigos e professores, e cada um deles a sua maneira, com suas falas, seus gestos ou mesmo com os seus defeitos, fizeram as minhas semanas (tirando as quintas) melhores e mais suportáveis.

Agradeço especialmente aos professores que me acompanharam e me auxiliaram nesta trajetória, muitos deles compartilhando seu tempo extra sala tirando dúvidas, incentivando a pesquisa ou mesmo tomando um café e falando da vida.

Quanto aos meus colegas de curso, estes foram essenciais! Ao resolver listas, rever definições e me apoiar mentalmente. Muitos destes não conseguiram continuar seu caminho pela UNILA, mas tem um lugar especial juntos a mim. Meus agradecimentos, em especial, vão para: André, Junior (juninho), Midiã, Hassan, Bianca, Micaelli, Everton, Thiago Mantovanni, Matheus Gauto, Jessica.

Por último, mas não menos importante, agradeço aos membros da banca, por tirarem tempo para ler este texto e por serem responsáveis pela possibilidade de apresentação deste trabalho.

*“Ó Jeová, teu nome permanece para sempre. Ó Jeová,
tua fama dura por todas as gerações”
(Salmos 135:13)*

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar dois teoremas clássicos da teoria do ponto fixo e algumas de suas aplicações. O Teorema de Banach assegura que toda contração contínua de um espaço métrico completo em si mesmo admite um único ponto fixo e o Teorema de Brouwer que afirma a existência de ao menos um ponto fixo de uma aplicação contínua com domínio e contra-domínio na bola fechada unitária n -dimensional.

Palavras-chave: ponto fixo; Banach; Brouwer; topologia; espaços métricos

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo estudiar dos teoremas clásicos de la teoría del punto fijo y algunas de sus aplicaciones. el Teorema de Banach que afirma que toda contracción continua de un espacio métrico completo en sí mismo admite un único punto fijo y el Teorema de Brouwer que afirma la existencia de al menos un punto fijo de una función continua con dominio y codominio en la bola unidad cerrada n -dimensional

Palabras clave: punto fijo; Banach; Brouwer, topología, espacio métrico

ABSTRACT

The objective of this work is to study two classical theorems of fixed point theory and some of their applications. Banach's Theorem assures that every continuous contraction of a complete metric space in itself admits a single fixed point, and, Brouwer's Theorem affirms the existence of at least one fixed point of a continuous map with domain and range in the n -dimensional unitary closed ball.

Key words: fixed point; Banach ; Brouwer; topology; metric spaces

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	PRELIMINARES	14
2.1	ESPAÇOS TOPOLÓGICOS	14
2.1.1	Definições iniciais	14
2.1.2	Aplicações contínuas	16
2.1.3	Topologia induzida	17
2.1.4	Topologia quociente	18
2.1.5	Espaços produtos	20
2.1.6	Compactos	21
3	TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH	24
3.1	INTRODUÇÃO	24
3.2	ESPAÇOS MÉTRICOS	24
3.3	SEQUÊNCIAS DE CAUCHY	30
3.4	TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH	33
3.5	APLICAÇÕES DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH	35
3.5.1	Teorema de Picard-Lindelof	35
3.5.2	Equações Integrais	37
4	TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER	40
4.1	HOMOTOPIA	40
4.2	HOMOTOPIA DE PARES	42
4.3	EQUIVALÊNCIA HOMOTÓPICA	43
4.4	RETRAÇÃO E EXTENSÃO	47
4.5	TEOREMA DO PONTO FXO DE BROUWER	49
4.6	APLICAÇÕES DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER	52
4.6.1	Teorema de Perron	52
5	CONCLUSÕES	56
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

A Teoria do Ponto Fixo é uma ramificação da matemática que continua sendo desenvolvida nos dias atuais e recebe cada vez mais reconhecimento por matemáticos do mundo todo. Resumidamente, este campo de pesquisa consiste em eleger as condições necessárias ou suficientes para que uma aplicação f de um conjunto em si próprio possua um ponto fixo. Ou seja, ela busca examinar e definir restrições sobre o conjunto X e uma aplicação $f : X \rightarrow X$ de modo, que exista um ponto $x \in X$, onde $f(x) = x$. Por ser um ideia bastante simples de entender, de inicio ela parece não revelar muitos benefícios, no entanto compreender esta propriedade traz seu beneficio ao pensarmos em suas aplicações que vão desde resultados sobre a existência e unicidade de soluções de EDOs à teoria dos jogos, à teoria a medida, combinatória, geometria fractal e a diversas outras.

A teoria do Ponto fixo como um todo engloba um enorme número de teoremas com os mais diversos requisitos e condições. De fato, muitos teoremas de ponto fixo são generalizações de outros teorema já existentes. Neste trabalho estudamos dois dos teoremas mais fundamentais desta teoria, o Teorema do Ponto Fixo de Banach e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Na linha do tempo, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer provado no século passado, em certa medida pode ser considerado como um dos primeiros resultados da Teoria dos Pontos Fixos pois, a partir deste teorema surgiram algumas equivalências e outros teoremas. Já em 1922 temos uma demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que por sua vez leva ao Teorema de Picard-Lindolf que versa sobre a existência e unicidade de soluções de EDOs. Sendo assim, ao estudar estes teoremas é possível compreender as interações existentes entre vários campos de pesquisa matemáticos distintos por meios de suas equivalências e aplicações.

Para trabalhar com esse teoremas precisamos realizar uma pequena incursão tanto em resultados sobre Espaços Topológicos para o Teorema de Brouwer e Espaços Métricos para o Teorema de Banach. No capítulo dois é realizada a definição de Espaço Topológico e enunciamos alguns resultados que iremos utilizar. No capítulo três definimos um tipo especial de Espaço Topológico, os Espaços Métricos Completos e realizamos a demonstração do Teorema de Banach resultado principal do capítulo. E finalmente no quarto capítulo é introduzida a noção de homotopia e retração contínua necessárias para demonstração do Teorema de Brouwer.

2 PRELIMINARES

2.1 Espaços Topológicos

Neste capítulo, introduziremos uma noção básica sobre os espaços topológicos, necessária para compreender da melhor forma possível o restante do trabalho, e o seu objetivo principal, visto que utilizaremos mais adiante questões de homotopias entre espaços topológicos, bem como suas conexões com os espaços métricos, que também é uma categoria de espaço topológico com características que serão melhores abordadas quando apresentarmos o Teorema de Banach. O objetivo desta seção é possibilitar que qualquer um que já tenha conhecimentos básicos na temática possa revisar as definições aqui enunciadas, bem como enunciar resultados e notações que utilizaremos no decorrer do trabalho. Os resultados podem ser encontrados em (KOSNIOWSKI, 1980).

2.1.1 Definições iniciais

Definição 2.1.1. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{U}$ uma coleção de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

- $\emptyset \in \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$;
- A intersecção de dois objetos de $\mathcal{U}$ pertence a $\mathcal{U}$;
- A união de qualquer número de objetos de $\mathcal{U}$ pertence a $\mathcal{U}$.

*Uma coleção de $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X com estas três propriedades se chama **topologia** em X . O conjunto X junto com $\mathcal{U}$ chama-se de **espaço topológico** e é denotado por $(X, \mathcal{U})$.*

Os membros $U \in \mathcal{U}$ se chamam **conjuntos abertos** da topologia $(X, \mathcal{U})$ e os elementos de X se chamam pontos da topologia.

Observe que, a segunda condição implica que a intersecção de um número finito de membros de $\mathcal{U}$ ainda pertence a $\mathcal{U}$. Se denotarmos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X , então uma topologia em X não é mais que uma escolha de elementos $U \in \mathcal{P}(X)$ que satisfaçam as três condições da definição 2.1.1. Diferentes escolhas dão lugar a diferentes topologias em X . Veremos nos próximos capítulos que os espaços métricos são exemplos de espaços topológicos, munidos da topologia métrica.

Exemplo 2.1.2 (Topologia trivial). *Sejam X um conjunto qualquer e $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$. Obviamente $\mathcal{U}$ é uma topologia em X , chamada de topologia trivial(ou indiscreta) de X .*

Exemplo 2.1.3 (Topologia Discreta). Seja X um conjunto qualquer e considere $\mathcal{U} = \mathcal{P}(X)$, observe que o par cumpre todas as condições da definição 2.1.1. Essa é chamada de topologia discreta de X .

Exemplo 2.1.4 (Topologia dos complementos finitos). Seja X um conjunto qualquer. Nesta topologia o $\mathcal{U}$ é composto por $\emptyset$, X e pelos subconjuntos de X que tenha complementar finito. Observe primeiramente que, se X é finito, então esta topologia é a mesma que a discreta. Agora, se X é infinito deveremos provar que $\mathcal{U}$ realmente cumpre as três condições exigidas.

- A primeira condição é trivialmente observada, pois vem da própria definição de $\mathcal{U}$ onde $\emptyset, X \in \mathcal{U}$;
- Considere $A, B \in \mathcal{U}$. Sabemos pela definição que $X - A$ e $X - B$ são finitos. Deste modo, $(X - A) \cup (X - B)$ também é finito. Observe que esse conjunto coincide com $X - (A \cap B)$, de onde $(A \cap B) \in \mathcal{U}$.
- Basta observar que $X - \left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) = \bigcap_{j \in J} (X - U_j)$, onde $U_j \in \mathcal{U}$.

Exemplo 2.1.5 (Topologia em $\mathbb{R}^n$). O espaço $\mathbb{R}^n$, com n um número inteiro positivo também admite uma topologia introduzida por meio do conceito de bola aberta. Essa propriedade é discutida na seção de espaços métricos.

Definição 2.1.6. Para qualquer subconjunto Y de um espaço topológico X , podemos considerar o maior conjunto aberto contido em Y , o designaremos por $\overset{\circ}{Y}$ e é chamado de **interior** de Y . Em termos algébricos,

$$\overset{\circ}{Y} = \bigcup_{j \in J} U_j,$$

onde U_j é a família de todos os conjuntos abertos contidos em Y .

Definição 2.1.7. Um subconjunto C de um espaço topológico X se diz **fechado** se, e somente se, $X - C$ é aberto.

Definição 2.1.8. Para qualquer subconjunto Y de um espaço topológico X , podemos considerar o menor conjunto fechado que contém Y . Este conjunto é denotado por $\overline{Y}$. Em termos simbólicos,

$$\overline{Y} = \bigcap_{j \in J} U_j,$$

onde U_j é a família de todas os subconjuntos fechados que contém Y . Os pontos que pertencem a $\overline{Y}$ são chamados de **pontos limite** ou de **pontos de aderência** de Y .

Definição 2.1.9. Seja X um espaço topológico. Dado $x \in X$, uma **vizinhança** de x é qualquer conjunto aberto U tal que $x \in U \subseteq X$.

2.1.2 Aplicações contínuas

Definição 2.1.10. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços topológicos se diz **contínua** se a imagem inversa $f^{-1}(U)$ de todo conjunto aberto $U \subseteq Y$ é aberto em X .

Exemplo 2.1.11. As aplicações mais triviais são: a aplicação identidade e a aplicação constante.

Se considerarmos um espaço topológico X com a topologia discreta, então toda aplicação $f : X \rightarrow Y$ em qualquer espaço topológico Y é contínua, visto que a imagem inversa de qualquer subconjunto de Y é aberto em X . Por outro lado, se considerarmos Y com a topologia indiscreta ou trivial, então toda aplicação $f : X \rightarrow Y$ de qualquer espaço topológico X em Y é também contínua.

Teorema 2.1.12. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ entre dois espaços topológicos é contínua se, e somente se, para todo subconjunto fechado C de Y , $f^{-1}(C)$ é fechado em X .

Demonstração. Suponhamos que f é contínua. Se C é fechado, então $Y - C$ é aberto e, portanto, $f^{-1}(Y - C)$ é aberto. E, como $f^{-1}(Y - C) = X - f^{-1}(C)$, portanto $f^{-1}(C)$ é fechado. Reciprocamente, se U é aberto em Y , então $Y - U$ é fechado e $f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U)$ também é, o que significa que $f^{-1}(U)$ é aberto e, portanto, f é contínua. ■

Definição 2.1.13. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ que transforma conjuntos abertos de X em conjuntos abertos de Y é chamada de **aplicação aberta**.

Definição 2.1.14. Diremos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é **fechada** se a imagem por f de qualquer conjunto fechado de X é um conjunto fechado de Y .

Proposição 2.1.15. Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são aplicações contínuas, então a composição $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ também é contínua.

Demonstração. Se U é aberto em Z , então $g^{-1}(U)$ é aberto em Y e, portanto, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ é aberto em X . Mas, $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. ■

Definição 2.1.16. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que X e Y são **homeomorfos** se existem aplicações contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ inversas uma da outra. Escrevemos então $X \cong Y$ e dizemos que f e g são **homeomorfismos** entre X e Y .

Também é possível definir, um homeomorfismo entre X e Y como uma bijeção entre os pontos e os conjuntos abertos de X e Y .

2.1.3 Topologia induzida

Definição 2.1.17. Dado $S \subseteq X$, a topologia **induzida** em S pela topologia de X é uma família de conjuntos da forma $U \cap S$, para todo conjunto aberto $U \subseteq X$.

Em outras palavras, se $\mathcal{U}$ é uma família de conjuntos abertos de X , então $\mathcal{U}_S = \{U \cap S; U \in \mathcal{U}\}$ é uma família de conjunto abertos de S . Onde S é chamado de subespaço de X .

Observação 2.1.18. Se $h : X \cong Y$ é um homeomorfismo, então, para todo ponto $x \in X$, os espaços $X - x$ e $Y - (h(x))$ são homeomorfos.

Exemplo 2.1.19. Seja $a = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Vamos mostrar que $\mathbb{R}^n$ e $S = \mathbb{S}^n - \{a\}$ são homeomorfos com a topologia usual do $\mathbb{R}^n$. Para isto, definiremos φ e θ funções contínuas¹, sendo $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Definiremos também $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow S$ dado por:

$$\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, \|x\|^2 - 1)}{1 + \|x\|^2}.$$

Nosso objetivo é mostrar que as seguintes composições acontecem: $\theta \circ \varphi = Id_S$ e $\varphi \circ \theta = Id_{\mathbb{R}^n}$. Primeiramente, mostraremos a composição $\theta(\varphi(x))$. Observe:

$$\theta \circ \varphi(x) = \theta \circ \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \theta \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Note que precisamos determinar o valor de $\|x\|$. Como a topologia utilizada é a usual do $\mathbb{R}^n$, basta calcular normalmente.

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{1 - x_{n+1}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)^2 \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{(1 - x_{n+1})^2} \\ &= \frac{1 - x_{n+1}^2}{(1 - x_{n+1})^2} \\ &= \frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n+1}}. \end{aligned}$$

Assim, podemos aplicar θ :

¹ A condição de continuidade das funções citadas ocorre quando cada uma de suas funções coordenada é contínua, no entanto com as ferramentas desenvolvidas ate agora, não poderíamos demonstrar este resultado de modo simples, sem nos desviar do propósito desta seção.

$$\begin{aligned}
\theta\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}} = y_1, \frac{x_2}{1-x_{n+1}} = y_2, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} = y_n\right) &= \frac{1}{1 + \|x\|^2} (2y_1, 2y_2, \dots, 2y_n, \|x\|^2 - 1) \\
&= \frac{1}{\frac{2}{1-x_{n+1}}} (2y_1, 2y_2, \dots, 2y_n, \frac{2x_{n+1}}{1-x_{n+1}}) \\
&= (1-x_{n+1})(y_1, y_2, \dots, \frac{x_{n+1}}{1-x_{n+1}}) \\
&= (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Agora, mostraremos a segunda composição: $\varphi(\theta(x))$. Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Temos que:

$$\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, \|x\|^2 - 1)}{1 + \|x\|^2}.$$

Deste modo, sabemos que cada n -upla de $\theta(x)$ é da forma $\frac{2x_i}{1 + \|x\|^2}$, para $1 \leq i \leq n$.

Já sua $(n+1)$ -upla é da forma $\frac{\|x\|^2 - 1}{1 + \|x\|^2}$.

Assim, chamaremos por $z_i = \frac{2x_i}{1 + \|x\|^2}$, para $1 \leq i \leq n$ e $z_{n+1} = \frac{\|x\|^2 - 1}{1 + \|x\|^2}$. Portanto, basta calcular, os $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1})$:

$$\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}) = \left(\frac{z_1}{1 - z_{n+1}}, \frac{z_2}{1 - z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{1 - z_{n+1}} \right).$$

Vamos calcular:

$$\begin{aligned}
\frac{z_i}{1 - z_{n+1}} &= \frac{2x_i}{1 + \|x\|^2} \cdot \left(1 - \frac{\|x\|^2 - 1}{1 + \|x\|^2} \right)^{-1} \\
&= \frac{2x_i}{1 + \|x\|^2} \cdot \left(1 - \frac{1 + \|x\|^2 - 2}{1 + \|x\|^2} \right)^{-1} \\
&= \frac{2x_i}{1 + \|x\|^2} \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{-2}{1 + \|x\|^2} \right) \right)^{-1} \\
&= \frac{2x_i}{1 + \|x\|^2} \cdot \left(\frac{1 + \|x\|^2}{2} \right) \\
&= \frac{2x_i}{2} \cdot \left(\frac{1 + \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} \right) \\
\frac{z_i}{1 - z_{n+1}} &= x_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(\theta(x)) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = Id_{\mathbb{R}^n}$, como queríamos mostrar.

2.1.4 Topologia quociente

Definição 2.1.20. Dada $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação sobrejetiva de um espaço topológico X em um conjunto Y . A topologia quociente em Y com respeito a f é definida como a família:

$$\mathcal{U}_f = \{U \subset Y; f^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}.$$

Observação 2.1.21. Uma vez que Y detém a topologia quociente, a aplicação f que a determina é uma aplicação contínua de X em Y .

Teorema 2.1.22 (Propriedade universal do quociente). *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação e suponha que Y detenha a topologia quociente com respeito a f . Então, uma aplicação $g : Y \rightarrow Z$, onde Z é um espaço topológico, é contínua se, e somente se, $g \circ f$ também for.*

Prova de 2.1.22. $(\Rightarrow)$ Como $f : X \rightarrow Y$ é contínua, se g também for, segue pela proposição 2.1.15 que $g \circ f$ será contínua. $(\Leftarrow)$ Suponha agora que $g \circ f$ é contínua. Se $V \subseteq Z$ é um conjunto aberto, então $(g \circ f)^{-1}(V)$ deve ser um aberto de X , ou de outra maneira, $f^{-1}(g^{-1}(V))$ é aberto em X . No entanto, pela definição de espaço quociente de Y , temos que $g^{-1}(V)$ é aberto em Y e, portanto, g é contínua. ■

Definição 2.1.23. *Seja X um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência em X . Definimos $f : X \rightarrow X/\sim$, com $f(x) = [x]$, a classe de equivalência que contenha x . Dizemos que $X/\sim$ com a topologia quociente é uma **identificação topológica**.*

Teorema 2.1.24. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre os espaços topológicos X e Y . Suponha que existam as relações de equivalência $\sim_x$ e $\sim_y$ em X e Y , respectivamente, de modo que ocorra*

$$x \sim_x x' \quad \text{se, e somente se} \quad f(x) \sim_y f(x').$$

Se f é um homeomorfismo, então $X/\sim_x$ e $Y/\sim_y$ são homeomorfos.

Prova de 2.1.24. Vamos definir uma aplicação entre os espaços topológicos $X/\sim_x$ e $Y/\sim_y$ com a seguinte definição:

$$F : X/\sim_x \longrightarrow Y/\sim_y \quad F([x]) = [f(x)].$$

Observe que F está bem definida, pois se tivéssemos $[x] = [x']$, então $x \sim_x x'$, que implica $f(x) \sim_y f(x')$ e $[f(x)] = [f(x')]$.

Vamos mostrar que F é um homeomorfismo. Primeiro, para verificar que F é injetiva, suponha que $F[x] = F[x']$, onde $[f(x)] = [f(x')]$. Sabemos que isto significa que $f(x) \sim_y f(x')$. No entanto, $x \sim_x x'$ e, portanto, $[x] = [x']$. Logo, F é injetiva. Da mesma forma, $[x]$ pode ser associado a $f(x)$ que por sua vez leva a $[f(x)] = F([x])$. Para demonstrar que F é contínua vamos considerar as projeções naturais $f_x : X \rightarrow X/\sim_x$ e $f_y : Y \rightarrow Y/\sim_y$, que sabemos serem contínuas. Observamos no diagrama abaixo, que vale a seguinte igualdade $Ff_x = f_yf$ onde f e f_y são contínuas, então Ff_x também é contínua. Pela propriedade universal do quociente (Teorema 2.1.22), segue que F é contínua.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 f_x \downarrow & & \downarrow f_y \\
 X/\sim_x & \xrightarrow{F} & Y/\sim_y
 \end{array}$$

■

2.1.5 Espaços produtos

Definição 2.1.25. *Sejam X e Y espaços topológicos. O produto topológico $X \times Y$ é o conjunto $X \times Y$ com a topologia $\mathcal{U}_{X \times Y}$ formada pelas famílias de conjuntos que são uniões de produto de conjuntos abertos de X e de Y . Os elementos típicos de $\mathcal{U}_{X \times Y}$ são da forma $\bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$, onde J é o conjunto de índices e, para cada $j \in J$, temos que U_j e V_j são subconjuntos abertos de X e de Y , respectivamente.*

Teorema 2.1.26. *Seja $X \times Y$ o produto de espaços topológicos. Um conjunto $W \subseteq X \times Y$ é aberto se, e somente se, para todo $w \in W$, existem abertos U_w e V_w em X e Y , respectivamente. Tais que, $U_w \times V_w \subseteq W$ e $w \in U_w \times V_w$.*

Demonstração. Suponha que W é um conjunto aberto, então temos que $W = \bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$, onde J é o conjunto de índices. Para cada $j \in J$, temos que U_j e V_j são subconjuntos abertos de X e de Y , respectivamente. Assim, se $w \in W$, para algum índice $i \in J$, então temos que $w \in U_i \times V_i$. Reciprocamente, o conjunto $\bigcup_{w \in W} U_w \times V_w$ é aberto em $X \times Y$, o que obviamente coincide com W . ■

Observação 2.1.27. *Aplicações triviais são as seguintes:*

$$f_x : X \times Y \rightarrow X \quad (x, y) \rightarrow x$$

e

$$f_y : X \times Y \rightarrow Y \quad (x, y) \rightarrow y,$$

chamadas de *projeção produto*. Veja que $f_x^{-1}(U) = U \times X$.

Teorema 2.1.28. *Para todo $y \in Y$, o subespaço $X \times y \subseteq X \times Y$ é homeomorfo a X .*

Demonstração. Considere a aplicação bijetiva $f : X \times y \rightarrow X$, onde $(x, y) \rightarrow x$. Então f é a composição da inclusão $X \times y \rightarrow X \times Y$ e da projeção f_x , que são contínuas.

Suponha $W \subseteq X \times y$ é aberto, tal que $W = (\bigcup_{j \in J} U_j \times V_j) \cap X \times y$.

Temos que U_j e V_j são subconjuntos abertos de X e de Y , respectivamente. Logo, $W = \bigcup_{j \in J'} U_j \times y$, onde $J' = \{j \in J; y \in V_j\}$.

Desta forma, temos que $f(W) = \bigcup_{j \in J'} U_j$ é aberto em X , provando que f também é aberta em Y e, portanto, um homeomorfismo. ■

Teorema 2.1.29. *Sejam X, Y, Z espaços topológicos. Para qualquer par de aplicações $f : X \rightarrow Z$ e $g : Y \rightarrow Z$, a aplicação $h : Z \rightarrow X \times Y$, definida por $h(a) = (f(a), g(a))$, é contínua se, e somente se, f e g são contínuas.*

Demonstração. Se h é contínua, então $f_x h = f$ e, ainda, $f_y h = g$ também devem ser contínuas, o que se conclui uma das condições.

Suponha agora que f e g são contínuas. Sejam U e V conjuntos abertos de X e de Y . Então $h^{-1}(U \times V) = \{a; f(a) \in U \text{ e } g(a) \in V\} = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$. Como f e g são contínuas, sabemos que $f^{-1}(U)$ e $g^{-1}(V)$ são abertos e, portanto, $h^{-1}(U \times V)$ também é.

Seja agora $A \subseteq X \times Y$ aberto. Se $x \in A$, então existem U e V abertos de X e Y respectivamente tais que $x \in U \times V \subseteq A$. Deste modo, $h^{-1}(a) \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq h^{-1}(A)$. Logo, $h^{-1}(A)$ é aberto. ■

2.1.6 Compactos

Definição 2.1.30. *Uma **cobertura** de um subconjunto A em um conjunto X é uma coleção de subconjuntos $\{U_j; j \in J\}$ de X , tal que $A \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$. Se o conjunto de índice J for finito, dizemos que a coleção é uma **cobertura finita**.*

Definição 2.1.31. *Suponha que ocorra de existir duas coberturas de A em X da seguinte forma: $\{U_j; j \in J\}$ e $\{V_k; k \in K\}$. Se acontecer de, para todo $j \in J$, existir um $k \in K$ tal que $U_j \subseteq V_k$, dizemos que $\{U_j; j \in J\}$ é um **subcobertura** da cobertura $\{V_k; k \in K\}$.*

Exemplo 2.1.32. *Observe as duas famílias de conjuntos $\{V_k; k \in \mathbb{R}\}$, onde $V_k = (k, k+3) \subseteq \mathbb{R}$ uma cobertura de $\mathbb{R}$, e $\{U_j; j \in \mathbb{Z}\}$, onde $U_j = (j, j+3)$ é um subcobertura de $\{V_k; k \in \mathbb{R}\}$.*

Definição 2.1.33. *Sejam X um espaço topológico e S um subconjunto de X . Dizemos que uma cobertura $\{U_j; j \in J\}$ é uma **cobertura aberta** de S se cada U_j , $j \in J$, é um subconjunto aberto de X .*

Definição 2.1.34. *Um subconjunto S de um espaço topológico X é **compacto** se toda cobertura aberta de S admite uma subcobertura finita.*

Observação 2.1.35. *O espaço $\mathbb{R}$ com sua topologia usual não é um espaço compacto, já que $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$ que não admite nenhuma subcobertura finita.*

Teorema 2.1.36. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se $S \subseteq X$ é um subespaço compacto, então $f(S)$ também é compacto.*

Demonstração. Suponha que $\{U_j; j \in J\}$ é uma cobertura aberta de $f(S)$. Então, pela continuidade da f , temos que $\{f^{-1}(U_j); j \in J\}$ é uma cobertura aberta de S . Visto que S é compacto, existe uma subcobertura finita $\{f^{-1}(U_k); k \in K\}$, onde K é finito. Mas $f(f^{-1}(U_k)) \subseteq U_k$. Portanto, $\{U_k; k \in K\}$ é uma cobertura de $f(S)$ e uma subcobertura finita de $\{U_j; j \in J\}$. ■

Teorema 2.1.37. *Todo subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto.*

Demonstração. Seja $\{U_j; j \in J\}$ uma cobertura aberta do subconjunto $S \subseteq X$, onde cada U_j é um subconjunto aberto de X . Visto que $\bigcup_{j \in J} U_j \supseteq S$, $\{U_j; j \in J\} \cup \{X - S\}$ é uma cobertura aberta de X , pois S é fechado, então $X - S$ é aberto e, como X é compacto, então admite uma subcobertura finita que será da seguinte forma: $\{(U_k); k \in K\}$ ou $\{(U_k); k \in K\} \cup \{X - S\}$, onde K é finito. Portanto, $\{U_k; k \in K\}$ é uma subcobertura finita de $\{U_j; j \in J\}$ que cobre S . Logo, S é compacto. ■

Existem no ramo da topologia muitas nomenclaturas para designar classes de espaços topológicos que apresentam uma característica em comum. Neste trabalho, vamos trabalhar, especialmente, com os espaço denominados de Hausdorff.

Definição 2.1.38. *Um espaço topológico é dito de **Hausdorff** se, para todo o par de pontos distintos x, y , existem abertos U_x e U_y que contenham x, y , respectivamente, tais que $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

Observe que, não são todos os espaços topológicos que detém desta propriedade. Observe por exemplo, considere o seguinte conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ e seja $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ sua topologia. Nesta topologia os pontos a, b não possuem abertos disjuntos.

Teorema 2.1.39. *Todo subconjunto compacto A de um espaço de Hausdorff X é fechado.*

Demonstração. Se A for fechado, não há nada para demonstrar. Assim podemos supor, sem perda de generalidade, que $A \neq \emptyset$ e $A \neq X$. Escolhemos um ponto $x \in X - A$. Para cada $a \in A$, existem um par de conjuntos abertos disjuntos U_a e V_a , com $x \in U_a$ e $a \in V_a$. O conjunto $\{V_a; a \in A\}$ cobre A e, como A é compacto, então existe um subcobertura finita

$$\{V_{a(1)}, V_{a(2)}, V_{a(3)}, \dots, V_{a(n)}\}$$

que cobre A . O conjunto $U = U_{a(1)} \cap U_{a(2)} \cap U_{a(3)} \cap \dots \cap U_{a(n)}$ é um conjunto aberto que contém x e que não intersecta nenhum $V_{a(i)}$. Assim, temos $U \subseteq X - A$. Resulta que, para cada ponto $x \in X - A$, existe um conjunto aberto que o contenha e que está contido em $X - A$. Ou seja, $X - A$ é aberto e, portanto, A é fechado. ■

Teorema 2.1.40. *Suponha $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua de um espaço compacto X em um espaço de Hausdorff Y . Logo, f é um homeomorfismo se, e somente se, f é bijetiva.*

Demonstração. Sabemos que se f for um homeomorfismo, então é bijetiva. O caso mais interessante seria a volta. Suponha então que f seja bijetiva. Então, existe f^{-1} . Lembre-se que f^{-1} é contínua se, e somente se, para todo conjunto fechado U de X , o conjunto $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ é fechado. Vamos mostrar então que $f(U)$ é fechado. Seja U fechado em X . Temos então, pelo Teorema 2.1.37, que U é compacto. Logo, $f(U)$ também é compacto, como consequência do teorema 2.1.36. Portanto, $f(U)$ é fechado em virtude do teorema anterior. Logo f^{-1} é contínua e, então f é homeomorfismo. ■

Teorema 2.1.41. *Todo subespaço V de um espaço de Hausdorff X também é de Hausdorff*

Demonstração. Sejam x, y pontos distintos contidos em V . Existem então dois conjuntos abertos disjuntos U_x, U_y de X tais que $x \in U_x$ e $y \in U_y$. Os conjuntos formados pela interseções com V são, então, subconjuntos abertos disjuntos de V , onde $x \in (U_x \cap V)$ e $y \in (U_y \cap V)$. Assim, podemos concluir que V é de Hausdorff. ■

Definição 2.1.42. *Uma sequência x_n está eventualmente em X se existir uma número natural N_X tal que $x_n \in X$ para todo $n > N_X$*

Teorema 2.1.43. *Uma sequência em um espaço de Hausdorff pode ter no máximo um ponto de limite.*

Demonstração. Seja X um espaço de Hausdorff e x_n uma sequência neste espaço que tenha dois limites diferentes x e y . Considere $x \in V_x$ e $y \in V_y$ dois abertos disjuntos. Então, como x_n converge a x e a y , temos que $x_n \in V_x$ para todo $n > N_{V_x}$ e $x_n \in V_y$ para todo $n > N_{V_y}$. Portanto, $x_n \in V_x \cap V_y$ para todo $n > \max\{N_{V_x}, N_{V_y}\}$, mas isso contraria que $V_x \cap V_y = \emptyset$ ■

3 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

3.1 Introdução

Um teorema do ponto fixo estabelece em quais condições uma função f definida sobre um domínio X possui em seu domínio um ponto x , tal que a função f seja invariante. Ou seja, ela se assemelha a aplicação identidade. Desta forma, temos $f(x) = x$.

Neste capítulo daremos atenção ao Teorema do Ponto Fixo de Banach, também conhecido como teorema das contrações contínuas. Este é um resultado fundamental em espaços métricos e suas aplicações surgem em vários ramos da Matemática, como Análise Funcional, Equações Integrais, Homologia Básica, Teoria de Jogos e Topologia Algébrica.

O nome do teorema é em homenagem a Stefan Banach (1892 – 1945), um matemático polonês que forneceu enormes contribuições para vários campos matemáticos, em especial à Análise Funcional moderna. Além disso, suas ideias principais também são observadas na teoria dos espaços vetoriais normados, onde ele provou vários teoremas, na teoria das séries ortogonais e na teoria da medida e da integração. Stefan Banach foi contemporâneo de Sobolev, Borsuk, Ulan e Schauder. Os resultados abaixo podem ser encontrados em (LIMA, 2003) e (KOSNIOWSKI, 1980).

3.2 Espaços Métricos

Nesta seção, citaremos definições e resultados sobre espaços métricos que serão utilizados para a compreensão do texto.

Definição 3.2.1. Uma **métrica** em um conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado de **distância** de x a y e satisfaz as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in X$:

$$d1) \quad d(x, x) = 0;$$

$$d2) \quad \text{Se } x \neq y \text{ então } d(x, y) > 0;$$

$$d3) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$d4) \quad (\text{Desigualdade triangular}) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) .$$

Ao longo do texto, chamaremos o par (X, d) de espaço métrico, onde $d(x, y)$ denota a distância de x a y . Vejamos alguns exemplos de espaços métricos:

Exemplo 3.2.2. O conjunto X dos números reais com a métrica $d(x, y) = |x - y|$ é um espaço métrico. De fato

d1) $d(x, x) = 0$:

$$d(x, x) = |x - x| = 0;$$

d2) Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$:

$$d(x, y) = |x - y| > 0,$$

para todos os elementos $x, y \in \mathbb{R}$, onde $x \neq y$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$:

$$d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R};$$

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y),$$

para todo $x, y, z \in X$. Portanto $(X, d) = (\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Exemplo 3.2.3. Seja X um conjunto qualquer não vazio. Definimos a métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tomando a seguinte regra:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

As condições d1) a d4) são facilmente verificadas. O espaço métrico assim obtido é bastante trivial, o que o torna útil para contraexemplos. Esta métrica é chamada de métrica zero-um.

Exemplo 3.2.4. Considere $X = \mathbb{R}^N = \{(x_1, x_2, \dots, x_N); x_l \in \mathbb{R}, l = 1, 2, \dots, N\}$. Vamos ver agora algumas métricas do $\mathbb{R}^N$ que são mais utilizadas. Para os vetores $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$. Observe:

$$\bullet d_e : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R},$$

$$d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{l=1}^N (x_l - y_l)^2}.$$

Vamos mostrar que d_e é uma métrica. para isto sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^N$. Temos que,

$$d_e(x, x) = \sqrt{\sum_{l=1}^N (x_l - x_l)^2} = \sqrt{\sum_{l=1}^N (0)^2} = 0.$$

Se $x \neq y$, então existe algum $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$, onde $x_i \neq y_i$. Assim, como $x_i - y_i \neq 0$, concluímos que $(x_i - y_i)^2 > 0$. Deste modo,

$$d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{l=1}^N (x_l - y_l)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} > 0.$$

Sabemos que $(x_l - y_l)^2 = (y_l - x_l)^2$, para todo $l \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$. Então temos:

$$\sum_{l=1}^N (x_l - y_l)^2 = \sum_{l=1}^N (y_l - x_l)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade,

$$\sqrt{\sum_{l=1}^N (x_l - y_l)^2} = \sqrt{\sum_{l=1}^N (y_l - x_l)^2}.$$

Para demonstrar a última propriedade de um espaço métrico, vamos primeiro considerar a desigualdade de Cauchy- Schwartz:

Lema 3.2.5 (Desigualdade de Cauchy-Schwartz). Para todo x e $y \in \mathbb{R}^N$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$. Ocorre,

$$\left| \sum_{i=1}^N x_i y_i \right| \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i)^2} \right) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i)^2} \right). \quad (3.1)$$

Demonstração. Se os vetores x e y forem linearmente dependentes, mostraremos que a igualdade será válida, pois $x = a \cdot y$. Onde o produto interno de $x, y \in \mathbb{R}^N$ é dado por $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ e a norma de x é dada por $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. Com isso,

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &= |\langle x, ax \rangle| = |a| \langle x, x \rangle \\ &= |a| \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= \sqrt{a^2 \langle x, x \rangle} \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= \sqrt{a \langle ax, x \rangle} \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{a \langle x, ax \rangle} \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= \sqrt{\langle ax, ax \rangle} \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Agora, consideramos o caso em que x e y são linearmente independentes. Podemos considerar $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = \|x - ty\|^2$, com $x, y \in \mathbb{R}^N$. Percebemos que $g(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é, $\|x - ty\|^2 > 0$, implicando que

$$\|x - ty\|^2 = \langle x - ty, x - ty \rangle = \langle x, x \rangle - 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle.$$

Observe que a expressão acima é uma equação do segundo grau na variável t , que não intersesta o eixo Ox . Logo, a equação abaixo não possui raízes reais.

$$\|x\|^2 - 2t \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2 > 0.$$

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Esta última desigualdade só ocorre se $(-2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 < 0$, e, assim,

$$|\langle x, y \rangle| < \|x\| \cdot \|y\|.$$

■

Agora podemos provar a propriedade d4):

$$\begin{aligned}
 (d_e(x, z))^2 &= \sum_{i=1}^N (x_i - z_i)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N [(x_i - y_i) + (y_i - z_i)]^2 \\
 &= \sum_{i=1}^N [(x_i - y_i)^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i) + (y_i - z_i)^2] \\
 &= \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^N (y_i - z_i)^2 \\
 &= (d_e(x, y))^2 + 2 \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)(y_i - z_i) + (d_e(y, z))^2 \\
 &\leq (d_e(x, y))^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - z_i)^2 + (d_e(y, z))^2} \\
 &= (d_e(x, y))^2 + 2d_e(x, y) \cdot d_e(y, z) + (d_e(y, z))^2 \\
 &= (d_e(x, y) + d_e(y, z))^2.
 \end{aligned}$$

Deste modo, mostramos que $d_e(x, z) \leq d_e(x, y) + d_e(y, z)$.

Outros meios de visualizar $\mathbb{R}^N$ como um espaço métrico, seriam obtidos abordando as seguintes definições:

- $d_1 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|;$$

- $d_\infty : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq N} \{|x_i - y_i|\}.$$

Para ambas as definições de métricas d_1 e d_∞ é possível verificar as propriedades d1) à d4).

Exemplo 3.2.6. Considere o conjunto X de todas as funções contínuas com valores reais sobre um intervalo $I = [a, b]$, com a métrica definida por:

$$d(x, y) = \max_{t \in I} |x(t) - y(t)|.$$

X é um espaço métrico, denotado por $X = C([a, b], \mathbb{R})$. Observe que a métrica está bem definida, pois I é compacto e $f(t) = |x(t) - y(t)|$ é contínua, logo $f(t)$ sempre assume um valor máximo.

Exemplo 3.2.7. Considere o conjunto X de todas as funções contínuas com valores reais sobre um intervalo $I = [a, b]$, com a métrica definida por:

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

X é um espaço métrico denotado por $X = C([a, b], \mathbb{R})$.

Se X é um espaço vetorial normado sobre algum corpo $\mathbb{F}$, podemos definir uma métrica neste espaço que o torne um espaço métrico. Defina:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

A métrica d , quando obtida desta maneira, é chamada de métrica induzida a partir da norma.

Definição 3.2.8. O espaço vetorial $\mathbb{R}^N$ sobre o corpo dos números reais, partindo das três métricas apresentadas nos Exemplo 3.2.4, podemos definir três normas:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{1/2};$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|;$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \{|x_i|\}.$$

Na primeira seção, afirmamos que os espaços métricos são também espaços topológicos. Agora mostraremos qual é sua topologia.

Definição 3.2.9. Seja (X, d) espaço métrico, dados $x \in X$ e $r > 0$, o conjunto $B_r(x) := \{y \in X, d(x, y) < r\}$ é chamado de bola aberta de centro x e raio r .

Definição 3.2.10. O conjunto $A \subset X$ será dito aberto em (X, d) , se para cada $x \in A$, existir $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset A$.

Note a semelhança com a Definição 2.1.9. Além disto, observe que toda bola aberta também é um conjunto aberto do espaço métrico.

Proposição 3.2.11. Todo espaço métrico (X, d) é um espaço topológico.

Demonstração. Considere os conjuntos abertos da Definição 3.2.10, como os abertos da topologia. Vamos mostrar as três propriedades dos espaços topológicos.

- i) Se o conjunto vazio não fosse aberto, existiria um elemento $x \in \emptyset$, onde não existira nenhuma bola centrada em x estaria nele contida. Um absurdo. E também $x \in X$, $B_{r_x}(x) \subset X$ para qualquer $r_x > 0$. Portanto X também é aberto.

- ii) Sejam $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X$ conjuntos abertos, consideremos a interseção finita $A = \bigcap A_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Se $A = \emptyset$ ele seria aberto, suponha então que $A \neq \emptyset$ e considere $x \in A$, como cada um dos conjuntos é aberto, existe $r_i > 0$ onde $B_{r_i}(x) \subset A_i$, agora se escolhermos $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ teremos que $B_r(x) \subset B_{r_i}(x) \subset A_i$. Logo, $B_r(x) \subset A$, logo A é aberto.
- iii) Considere uma família de abertos não vazios A_i . Dado $x \in A = \bigcup A_i$ temos que $x \in A_j$ para algum índice. Assim A_j é aberto, existe $r > 0$, tal que $B_r(x) \subset A_j \subset A$, portanto A é aberto.

■

Proposição 3.2.12. *Todo espaço métrico é um espaço do tipo hausdorff.*

Demonstração. Seja (X, d) um espaço métrico, sejam $x, y \in X$ distintos. definiremos $r = d(x, y)$. Considere os abertos $A_x = B_{\frac{r}{3}}(x)$ e $A_y = B_{\frac{r}{3}}(y)$. Suponha que exista $a \in A_x \cap A_y$. Então teríamos que $d(x, a) < \frac{r}{3}$ e $d(a, y) < \frac{r}{3}$. Pela desigualdade triangular temos

$$r = d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < \frac{2r}{3}$$

No entanto, $r < \frac{2r}{3}$ não faz sentido, portanto não existe $a \in A_x \cap A_y$.

■

Definiremos agora alguns espaços topológicos que utilizam a norma euclidiana. Estes espaços serão utilizados no decorrer de todo o texto.

Definição 3.2.13. *O conjunto $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tal que } \|x\| = 1\}$ chamado de esfera n -dimensional.*

Definição 3.2.14. *O conjunto $\mathbb{D}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tal que } \|x\| \leq 1\}$ chamado de disco $(n+1)$ -dimensional fechado*

Partindo da ideia de definir uma distância entre pontos de um espaço topológico, podemos nos perguntar se é possível definir a distância entre dois subconjuntos A e B de um espaço métrico (X, d) , ou mesmo a distancia entre um ponto e um conjunto. A definição abaixo explicita uma destas ideias.

Definição 3.2.15. *Seja $A \subseteq X$ e (X, d) um espaço métrico qualquer. O **diâmetro** do conjunto A é definido como:*

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Exemplo 3.2.16. *Considere $\mathbb{D}^n(r)$ a bola fechada de raio r em $\mathbb{R}^n$. Os pontos do bordo simétricos em relação ao centro do disco detêm a maior distância dentro do conjunto $\mathbb{D}^n(r)$. Sabendo que a distância de um ponto do bordo ao centro da bola é igual a r , então $\text{diam}(\mathbb{D}^n(r)) = 2r$.*

3.3 Sequências de Cauchy

Definição 3.3.1. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é dita convergente se existir um $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

o valor x é chamado de limite de (x_n) em X quando existir.

Observação 3.3.2. Como vimos na Proposição 3.2.12 todo espaço métrico e hausdorff, portanto o limite da sequência é único.

Definição 3.3.3. Uma sequência (x_n) é dita de Cauchy em um Espaço Métrico (X, d) quando, qualquer que seja $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n_0$, teremos sempre $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Se escolhermos um índice $v = m + n$, podemos encontrar uma sequência que atente as condições acima, ou seja, uma sequência é de Cauchy quando $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+v}) = 0$, isto é, os termos se aproximam uns dos outros.

Proposição 3.3.4. Toda sequência convergente em (X, d) é uma sequência de Cauchy.

Demonstração. Como $(x_n) \rightarrow c$, então para todo $\epsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x_n, c) < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Por conta da propriedade d4) das métricas, temos que para $m, n > n_0$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, c) + d(c, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy. ■

Proposição 3.3.5. Toda sequência de Cauchy em (X, d) é limitada.

Demonstração. Seja (x_n) de Cauchy em (X, d) e fixe $\epsilon = 1$. Então, para $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$d(x_m, x_n) < 1, \forall \quad m, n > n_0.$$

Seja $c = \max \{d(x_m, x_n); m, n \geq n_0\}$, então

$$d(x_m, x_n) \leq c + 1, \forall \quad m, n \in \mathbb{N}.$$
■

Proposição 3.3.6. Sejam (X, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência de Cauchy, tal que existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge para x . Então (x_n) converge para x

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Como (x_n) é de Cauchy, existe um N tal que

$$n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2},$$

agora seja $n_k \geq N$ de modo que $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Se substituirmos m por n_k , teremos

$$n \geq N \Rightarrow d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

Definição 3.3.7. Um Espaço Métrico (X, d) é chamado de **completo** se toda sequência de Cauchy de X convergir em X .

Exemplo 3.3.8. O espaço métrico $(\mathbb{R}, d_e)$ é completo. Seja (x_n) sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$

Observe que temos que $X_1 \supset X_2 \supset \dots$, sabemos que cada uma destas subsequências é limitada (Proposição 3.3.5) e admitem pontos de ínfimo. Assim, definimos $a_n = \inf X_n$ onde $n \in (1, 2, 3, \dots)$. Então ocorre com os ínfimos $\inf X_1 \leq \inf X_2 \leq \inf X_3 \dots$, ou seja, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots \geq b = \sup X_1$. Portanto para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $\inf X_n \leq b$, ainda

$$a_n = \{a_1, a_2, a_3 \dots, b\}$$

(a_n) é uma sequência monótona e limitada de números reais, que é convergente¹. Logo existe $a = \lim a_n$. Portanto uma subsequencia para $m > n_1$ e $\epsilon > 0$ também converge. Logo $a_m = \inf X_m$ então existe $n > m$ e $\epsilon > 0$ onde $a - \epsilon \leq a_m \leq x_n < a + \epsilon$. Portanto $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

Definição 3.3.9. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que X é sequencialmente compacto, se toda sequência (x_n) tem uma subsequência convergente.

Definição 3.3.10. Sejam (X, d_m) e (Y, d_n) espaços métricos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é contínua em um ponto $a \in X$ se, para todo $\epsilon > 0$ dado, é possível obter um $\delta > 0$ de modo que ocorra:

$$d_m(x, a) < \delta \Rightarrow d_n(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Esta f é dita apenas contínua se for contínua em todos os pontos de X .

Proposição 3.3.11. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ definida em (X, d_1) e (Y, d_2) é contínua em $a \in X$ se, e somente se toda sequência (x_n) em X , acontecer:

$$x_n \xrightarrow{d_1} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(a).$$

¹ Proposição 7, capítulo 5 de (LIMA, 2003)

Demonstração. Sendo f contínua, por 3.3.10 teremos:

$$d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Sendo x_n convergente em d_1 , então existe n_0 tal que, para todo $n > n_0$, temos $d_1(x_n, a) < \delta$,

$$d_1(x_n, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_n), f(a)) < \epsilon.$$

Logo, $f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(a)$.

Agora, por contradição, suponha f não é contínua em a , para todo $\delta > 0$, existe $\epsilon_n > 0$ e um $x \neq a$.

$$d_1(x, a) < \delta, \text{ mas } d_2(f(x), f(a)) \geq \epsilon_n$$

Como $\delta > 0$ é um valor qualquer, em particular, podemos escolher que, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos $\delta = \frac{1}{n}$. Portanto,

$$d_1(x_n, a) < \frac{1}{n}, \text{ mas } d_2(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon_n.$$

Ou seja, temos uma sequência (x_n) que converge para a , quando n cresce, mas $f(x_n)$ não converge para $f(a)$, o que contradiz nossa hipótese. ■

Definição 3.3.12. Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow Y$ converge uniformemente em X para a aplicação $f : X \rightarrow Y$ quando, para todo número real $\epsilon > 0$ dado, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $x \in X$, temos:

$$n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Exemplo 3.3.13. O espaço métrico $C[a, b]$ das funções contínuas é completo com a métrica do máximo. Para mostrar isto considere uma sequência x_n de Cauchy em $C[a, b]$, isto é dado dado $\epsilon > 0$ existem $m, n > N$ de modo que:

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in [a, b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon$$

Isto significa que para cada ponto $t_0 \in [a, b]$ fixado teremos que $|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \epsilon$. No entanto isso quer dizer que a sequência $(x_0(t_0), x_1(t_0), \dots)$ é uma sequência de Cauchy formado por apenas por números reais, como $\mathbb{R}$ é completo, temos que a sequência é convergente. Deste modo, podemos associar para cada $t \in [a, b]$ a função $x(t)$ limite da sequência $x_m(t_0) \rightarrow x(t_0)$ quando $m \rightarrow \infty$. Assim podemos definir a função $x \in C[a, b]$ de modo que quando $n \rightarrow \infty$ e $m > N$:

$$\max_{t \in [a, b]} |x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon$$

Ou seja, para todo valor t teremos que $|x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon$, portanto a função x_m converge uniformemente para x que pertence a $C[a, b]$, logo é um espaço métrico completo.

Observação 3.3.14. Se $f_n \rightarrow f$ em X , então $f_n \rightarrow f$ simplesmente em X . Logo (f_n) não pode convergir para outra função em X .

3.4 Teorema do Ponto fixo de Banach

Durante esta seção, iremos enunciar e demonstrar este importante resultado da Matemática.

Definição 3.4.1. *Um ponto fixo de uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Definição 3.4.2. *Sejam X e Y espaços métricos. Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ é chamada de **contração** se existir um número real $0 < c < 1$ tal que, para todos $x, y \in X$, têm-se:*

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y).$$

Proposição 3.4.3. *Sejam X e Y espaços métricos. Se $T : X \rightarrow Y$ for uma contração, então T é contínua.*

Demonstração. De fato, sendo T uma contração, existe uma constante $0 < c < 1$ tal que

$$d_Y(T(x), T(y)) \leq cd_X(x, y).$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ teremos que

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(T(x), T(y)) \leq c \cdot d_X(x, y) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon.$$

Portanto T é contínua. ■

Observação 3.4.4. *Se E, F são espaços vetoriais, então uma transformação linear $T : E \rightarrow F$ é uma contração se, e somente se, sua norma $|T|$ for menor do que 1.*

Teorema 3.4.5 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Se X é um espaço métrico completo, então toda contração $f : X \rightarrow X$ possui um único ponto fixo em X . Este ponto é obtido pelo limite da sequência $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots)$, onde $f^n(x_0) := f(f^{n-1}(x_0))$, para qualquer $x_0 \in X$.*

Prova de 3.4.5. Considere (x_n) a sequência iterativa definida a partir de $x_0 \in X$ da seguinte forma: $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) \cdots x_{n+1} = f(x_n)$. Iremos mostrar que a sequência converge, ou seja é de Cauchy. Observe que, pela Definição 3.4.2, existe um número real c de modo que $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$. Aplicando este fato à sequência x_n ,

teremos:

$$\begin{aligned}
 d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\
 &\leq cd(x_n, x_{n-1}) \\
 &\leq cd(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \\
 &\leq c^2d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
 &\vdots \\
 &\leq c^nd(x_1, x_0).
 \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, temos:

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}).$$

E, também, podemos analisar da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 d(x_n, x_{n+1}) &\leq c^nd(x_0, x_1) \\
 d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq c^{n+1}d(x_0, x_1) \\
 &\vdots \\
 d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) &\leq c^{n+p-1}d(x_0, x_1).
 \end{aligned}$$

Logo, temos:

$$d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq (c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{n+p-1}) d(x_0, x_1).$$

Utilizando a fórmula da soma de uma progressão geométrica e a desigualdade triangular expressa acima, temos

$$c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{n+p-1} = c^n \cdot \frac{1 - c^p}{1 - c} \leq \frac{c^n}{1 - c},$$

Obtemos, finalmente, para $m > n$:

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{c^n}{1 - c} d(x_0, x_1) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Deste modo, mostramos que (x_n) é uma sequência de Cauchy, sendo (X, d) um espaço métrico completo, temos que (x_n) converge para x em X . Para mostrar que este x é ponto fixo de f , utilizaremos que a continuidade de f implica no seguinte:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x).$$

Para provarmos a unicidade do ponto fixo, considere x, y em X tais que $f(x) = x$ e $f(y) = y$. Assim,

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y).$$

Pela desigualdade,

$$(1 - c)d(x, y) \leq 0.$$

Sendo $c < 1$, logo $1 - c > 0$. Concluimos então que $d(x, y) \leq 0$. Como $d(x, y)$ é um número real que não pode ser negativo, segue $d(x, y) = 0$ e, isto acontece se, e somente se, $x = y$. Logo, f só tem um ponto fixo, o que completa a demonstração do teorema. ■

3.5 Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Faremos uma abordagem relacionando o Teorema do Ponto Fixo de Banach com algumas aplicações voltadas a equações diferenciais, lembrando que $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico em relação à norma do supremo definida anteriormente. Os resultados abaixo podem ser encontrados em (LIMA, 2003) e em (KREYSZIG, 1989), nas páginas 300-321.

3.5.1 Teorema de Picard-Lindelof

Antes de estabelecermos a existência e a unicidade da solução para um problema de Cauchy, vejamos alguns resultados e definições:

Definição 3.5.1. Dada uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, onde X é um aberto contido em $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, e $(t_0, x_0) \in X$, o problema de valor inicial (P.V.I.), definida por f , é escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Uma possível solução de (3.2) é uma função diferenciável $x : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, onde $I \subset \mathbb{R}$ tal que $t_0 \in I$ e $x_0 = x(t_0)$, que satisfaz a equação $x' = f(t, x)$.

Definição 3.5.2. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$, onde X é um aberto do $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, é dita lipschitziana, com respeito a sua segunda variável, se existir $C > 0$ tal que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\|,$$

para quaisquer $(t, x_1), (t, x_2) \in X$. Dizemos que f é localmente lipschitziana, com respeito à segunda variável, se todo ponto de X possui uma vizinhança restrita na qual f é lipschitziana, com respeito à segunda variável.

Teorema 3.5.3 (Teorema de Picard-Lindelof). Seja $X = I_a \times B_b$ uma região de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\} \subset \mathbb{R}$ e $B_b = \{x; \|x - x_0\| \leq b\} \subset \mathbb{R}^N$. Se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é

contínua e lipschitziana na segunda variável em X , então o P.V.I:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' & = f(t, x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

tem solução única em I_β , onde

$$\beta = \min \left\{ a, \frac{b}{K}, \frac{1}{L} \right\}.$$

Sendo $K > |f|$ e L o número lipschitziano.²

Observação 3.5.4. Sejam $I_a = [t_0 - a, t_0 + a]$ intervalo fechado de $\mathbb{R}$, centrado em t_0 , e B_b uma bola fechada em $\mathbb{R}^N$, centrada em x_0 e de raio b . Sendo f contínua e X compacto, obtemos que $f(X)$ é limitado. Portanto, existe um valor K de modo que

$$|f(t, x)| < K \quad (t, x) \in X.$$

Demonstração. Fazendo a integração de t_0 a t em ambos os lados da equação (3.2), temos o seguinte:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (3.3)$$

A solução de (3.2) também é solução de (3.3) e, do mesmo modo, se $x(t)$ é solução de (3.3), então

$$x(t_0) = x_0 \quad e \quad x' = f(t, x).$$

Ou seja, se $h(t)$ é solução de (3.3), temos que $h(t) = x(t)$ é solução de (3.2). Vamos usar o espaço vetorial definido por $C(I_\beta, B_b)$ com a métrica

$$d(f, h) = \max_{t \in I_\beta} |f(t) - h(t)|,$$

que é um espaço métrico completo. Definiremos agora uma aplicação contínua $T : C(I_\beta, B_b) \rightarrow C(I_\beta, \mathbb{R}^N)$ dada da seguinte forma

$$T(x(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad x \in C(I_\beta, B_b).$$

Observe que a aplicação T está bem definida. De fato, pelas hipóteses, f é contínua e limitada no cilindro compacto definido por X . Podemos ver que, para $y \in C(I_\beta, B_b)$, então $T(y) \in C(I_\beta, B_b)$.

² O número lipschitziano da aplicação f entre dois Espaços Métrico (X, d) e (Y, δ) é a constante real M ínfimo do conjunto que satisfaz:

$$\delta(f(x), f(y)) \leq M d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

A constante de Lipschitz de f denota-se usualmente por $\text{Lip}(f)$.

De fato queremos provar que $T(x(t))$ está na bola fechada de centro x_0 e de raio β , ou seja,

$$\|T(x(t)) - x_0\| < \beta.$$

Para isso, basta observar que

$$\|T(x(t)) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \leq K |t - t_0| \leq Ka \leq \beta.$$

Sendo $\beta = \min\{a, \frac{b}{K}\}$, mostramos que a aplicação esta definida em uma bola. Agora, basta mostrarmos que a aplicação é uma contração.

$$\|T(x_1(t)) - T(x_2(t))\| \leq \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))] ds \right\| \leq L \int_{t_0}^t \|x_1(s) - x_2(s)\| ds,$$

onde L é o número lipschitziano de f . Assim,

$$\|T(x_1(t)) - T(x_2(t))\| \leq L \int_{t_0}^t \|x_1(s) - x_2(s)\| ds,$$

sendo que,

$$\|x_1(s) - x_2(s)\| \leq \max_{s \in [a, b]} \|x_1(s) - x_2(s)\| = d(x_1, x_2),$$

temos então,

$$\|T(x_1(t)) - T(x_2(t))\| \leq L |t - t_0| d(x_1, x_2) \leq L \cdot \beta \cdot d(x_1, x_2).$$

Assim, para que T seja uma contração basta que $L\beta < 1$, ou seja, $\beta < \frac{1}{L}$. Logo, sendo $\beta = \min\left\{a, \frac{b}{K}, \frac{1}{L}\right\}$, tomando o supremo nesta desigualdade, obtemos que T é uma contração. Pelo Teorema 3.4.5, T possui um único ponto fixo $x(t)$ e este ponto é solução da equação (3.2). ■

3.5.2 Equações Integrais

Definição 3.5.5. Chamamos a seguinte equação integral abaixo de **Fredholm** de segunda espécie:

$$f(t) = g(t) + \phi \int_a^b k(t, \theta) f(\theta) d\theta$$

onde $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\phi \in \mathbb{R}$ é um parâmetro e f uma função definida sobre $[a, b]$ desconhecida. k é dito núcleo da equação e é uma função sobre $G = [a, b]^2$. g é uma função sobre $[a, b]$.

Observe que G compacto e limitado, e o núcleo k contínuo, então temos que existe $c > 0$ real, de modo que $|k(t, \theta)| < c$, para todo $(t, \theta) \in G$.

Antes de prosseguirmos vamos considerar da mesma forma que falamos sobre a continuidade de função entre espaços métricos com métricas distintas, aqui trazemos mais uma ideia sobre funções de duas variáveis contínuas sobre um conjunto compacto.

Proposição 3.5.6. *Considere $X \subset \mathbb{R}^p$, $S \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $x_0 \in X$ fixo. Se $g : X \times S \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua, então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x \in X \text{ tal que } \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|g(x, t) - g(x_0, t)\| < \epsilon, \quad \forall t \in S.$$

Demonstração. Suponha que não ocorra, ou seja, existem $\epsilon_0 > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ de modo que temos $x_n \in X$ e $t_n \in S$ tal que.

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \text{ e } \|g(x_n, t_n) - g(x_0, t_n)\| > \epsilon_0.$$

Sendo S compacto, existe uma subsequência onde ocorre $t_n \rightarrow t_0 \in S$. Utilizando a continuidade de g , teremos:

$$\epsilon_0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|g(x_n, t_n) - g(x_0, t_n)\| = \|g(x_0, t_0) - g(x_0, t_0)\| = 0,$$

que é um absurdo, pois $\epsilon_0 > 0$ por hipótese. Assim, por contradição, provamos nosso resultado. ■

Agora vamos mostrar que existe uma solução para Equação Integral de Fredholm, utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Proposição 3.5.7. *Suponha que $k : G \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua sobre $G = [a, b]^2$ e suponha $g \in C[a, b]$. Se*

$$|\phi| < \frac{1}{c(b-a)}, \quad (3.4)$$

com $|k(t, \theta)| < c$ em G , então a equação

$$f(t) - \phi \int_a^b k(t, \theta) f(\theta) d\theta = g(t)$$

tem uma única solução f em $[a, b]$.

Demonstração. Para cada função $f \in C[a, b]$, onde a equação (3.4) é satisfeita, queremos definir uma aplicação contínua no intervalo $[a, b]$. Definimos, assim, a aplicação da seguinte forma:

$$R(f)(t) = g(t) + \phi \int_a^b k(t, \theta) f(\theta) d\theta.$$

Para mostrar a continuidade de $R(f)$, devemos mostrar que dada uma sequência r_n que converge para r_0 então $R(f)(r_n) \rightarrow R(f)(r_0)$. Sendo k contínua, temos que dado $\epsilon > 0$, existe δ de modo que se as funções ϕ e f não forem nulas teremos

$$|r_n - r_0| < \delta \Rightarrow |k(r_n, \theta) - k(r_0, \theta)| < \frac{\epsilon}{2|\phi| \|f\| |b-a|}, \quad \forall \theta \in [a, b].$$

Isso só é possível por conta da Proposição 3.5.6. Assim, como g também é contínua, para um valor grande de n , teremos

$$\begin{aligned} |R(f(r_n)) - R(f(r_0))| &= \left| g(r_n) - g(r_0) + \phi \int_a^b [k(r_n, \theta) - k(r_0, \theta)] f(\theta) d\theta \right| \\ &\leq |g(r_n) - g(r_0)| + |\phi| \int_a^b |k(r_n, \theta) - k(r_0, \theta)| |f(\theta)| d\theta \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + |\phi| \|f\| \int_a^b \frac{\epsilon}{2|\phi| \|f\| |b-a|} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + |\phi| \|f\| |b-a| \frac{\epsilon}{2|\phi| \|f\| |b-a|} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, temos que a aplicação definida anteriormente $R(f)$ é contínua. Como a continuidade dela é garantida, podemos considerá-la como um aplicação entre $C[a, b] \rightarrow C[a, b]$. Se observarmos bem a definição de R e a equação (3.4), encontrar uma solução para a mesma pode ser visto como um problema de ponto fixo de Banach de R . A demonstração acaba ao mostrarmos que R é uma contração, condições necessárias para o funcionamento do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para isso, considere f_1 e $f_2 \in C[a, b]$. Assim,

$$\begin{aligned} d(R(f_1), R(f_2)) &= \max_{t \in [a, b]} |R(f_1)(t) - R(f_2)(t)| \\ &= |\phi| \max_{t \in [a, b]} \left| \int_a^b k(t, \theta) [f_1(\theta) - f_2(\theta)] d\theta \right| \\ &\leq |\phi| \max_{t \in [a, b]} \int_a^b |k(t, \theta)| |f_1(\theta) - f_2(\theta)| d\theta \\ &\leq |\phi| \int_a^b c \max_{x \in [a, b]} |f_1(x) - f_2(x)| d\theta \\ &= |\phi| c \left(\max_{x \in [a, b]} |f_1(x) - f_2(x)| \right) \int_a^b d\theta \\ &= |\phi| c d(f_1, f_2) (b-a) \\ &= |\phi| c (b-a) d(f_1, f_2). \end{aligned}$$

De acordo com a equação (3.4), temos que $|\phi| c (b-a) < 1$. Logo, R é uma contração e, portanto, admite um ponto fixo f a qual é solução da Equação Integral de Fredholm. ■

4 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, do mesmo modo que o de Banach, assegura sob certas condições a existência de pelo menos um ponto fixo para uma função. Este é um dos resultados básicos do estudo dos teoremas de ponto fixo. O nome deste teorema é em homenagem ao matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966).

Além de um grande gênio e entusiasta matemático, Brouwer também é conhecido por suas tendências filosóficas a respeito da construção do saber matemático, um dos fundadores e defensores do intuicionismo matemático.

O intuicionismo matemático de Brouwer acredita que todo objeto matemático é uma construção da mente e, portanto, a existência de um objeto é equivalente à possibilidade de sua construção. Isto vai contra a primeira demonstração de seu próprio teorema de ponto fixo, na qual utilizava a ideia do terceiro excluído, ou do absurdo.

O objetivo desta seção é demonstrar o teorema de Brouwer, no caso de dimensão um, além de considerar a ideia por trás da demonstração no caso geral.

Como a matemática é uma ciência viva e se auto reafirma em cada uma de suas vertentes, existem hoje muitas demonstrações distintas para os teoremas clássicos, como no caso do teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Neste trabalho, decidimos abordar o caminho das homotopias entre espaços topológicos. Os resultados abaixo podem ser encontrados em (KOSNIOWSKI, 1980) e (GRANAS; DUGUNDJ, 2003).

4.1 Homotopia

Neste capítulo, faremos a inserção do conceito de homotopia, que será a chave algébrica principal para construção da demonstração do Teorema de Brouwer. Para aqueles que não estão familiarizados com ideias aqui utilizadas, recomendamos a leitura do primeiro capítulo deste trabalho. Além disso, denotaremos por I o intervalo $[0, 1]$ ao longo do restante do texto.

Definição 4.1.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f e g são homotópicas se, existir a uma função $H : X \times I \rightarrow Y$ contínua tal que*

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad H(x, 1) = g(x), \quad \forall x \in X.$$

Desta maneira, escrevemos $f \simeq g : X \rightarrow Y$.

Proposição 4.1.2. *Sejam X e Y espaços topológicos. A relação $f \simeq g : X \rightarrow Y$ é uma relação de equivalência em $C(X, Y)$.*

Demonstração. Para mostrar que a relação de homotopia é uma relação de equivalência, vamos mostrar que ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

1. Reflexiva

$$\begin{aligned} H : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

H é uma homotopia entre f e f . Com isso, $H(x, 0) = f(x) = H(x, 1)$.

2. Simétrica.

Seja $f \simeq g : X \rightarrow Y$ com

$$\begin{aligned} H : X \times I &\rightarrow Y \\ H(x, 0) = f(x) \quad e \quad H(x, 1) = g(x), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Definiremos então a seguinte função:

$$\begin{aligned} \tilde{H} : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto H(x, 1 - t). \end{aligned}$$

É fácil observar que $\tilde{H}(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$ e, ainda, $\tilde{H}(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$, provando que $g \simeq f$.

3. Transitiva

Suponha $F : f \simeq g$ e $G : g \simeq h$. Mostraremos que a aplicação:

$$H : X \times I \rightarrow Y, \text{ sendo } H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t - 1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é uma homotopia entre f e h . Observe que, para todo $x \in X$, ocorre $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$. Ainda, $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$. Sabendo que composição de aplicações contínuas ainda é contínuas, portanto, temos que $H : f \simeq h$.

■

É importante ressaltar que, nas relações de homotopia de $f, g : X \rightarrow Y$, o papel de Y é importantíssimo, pois é nele onde ocorrem as deformações de f .

Definição 4.1.3. *As classes de equivalência de $\simeq$ chamam-se classes de homotopia.*

A classe de uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ será indicado por $[f]$ e denotaremos por $[X, Y] = \{[f] \mid f \in C(X, Y)\}$ o conjunto das classes de homotopia das funções contínuas de X em Y .

Proposição 4.1.4. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Se $f, \tilde{f} : X \rightarrow Y$ e $g, \tilde{g} : Y \rightarrow Z$ são funções contínuas, tais que $f \simeq \tilde{f}$ e $g \simeq \tilde{g}$, então $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}$.*

Demonstração. Sejam $F : f \rightarrow \tilde{f}$ e $G : g \rightarrow \tilde{g}$ homotopias. Definimos então as aplicações:

$$\begin{aligned} R : X \times I &\rightarrow Y \times I \mapsto R(x, t) = (F(x, t), t), \\ H : X \times I &\rightarrow Z \mapsto H(x, t) = G(F(x, t), t). \end{aligned}$$

Afirmamos que R é contínua, tendo em vista a continuidade de cada uma das suas coordenadas. Portanto, temos que $H = G \circ R$ é a composição de duas funções contínuas, deste modo, ela mesma o é. Observamos então que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= G(F(x, 0), 0) = G(f(x), 0) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \\ H(x, 1) &= G(F(x, 1), 1) = G(\tilde{f}(x), 1) = \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = (\tilde{g} \circ \tilde{f})(x). \end{aligned}$$

■

4.2 Homotopia de Pares

Definição 4.2.1. *Um par topológico (X, A) é constituído de um espaço topológico X e um subespaço topológico $A \subseteq X$.*

Observação 4.2.2. *No caso de $A = \emptyset$, têm-se $(X, A) = X$.*

Definição 4.2.3. *Uma função contínua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma função $f : X \rightarrow Y$ contínua, de modo que $f(A) \subseteq B$.*

Definição 4.2.4. *Dadas $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ funções contínuas entre os pares topológicos, definimos a homotopia, entre f e g , por*

$$H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B) \text{ tal que } \begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x). \end{cases}$$

Definição 4.2.5. *Sejam $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ funções contínuas entre os pares topológicos (X, A) e (Y, B) e seja $\tilde{X} \subseteq X$. Falaremos que f e g são homotópicas relativas a $\tilde{X}$ e denotaremos por $f \simeq g \left(\text{rel. } \tilde{X} \right)$, sempre que existir uma homotopia entre f e g , de modo que, $H(x, t) = f(x) = g(x)$, quando $x \in \tilde{X}$ e $t \in I$.*

Exemplo 4.2.6. *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas como $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$. A função $L : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $L(x, t) = (1 - t)x$ é tal que $L : f \simeq g(\text{rel } 0)$, onde 0 denota a origem de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 4.2.7. *A relação $\simeq (rel. \tilde{X})$, com $\tilde{X} \subseteq X$ é uma relação de equivalência das funções contínuas entre os pares (X, A) e (Y, B) .*

Demonstração. A demonstração deste teorema é análoga a Proposição 4.1.2. ■

Teorema 4.2.8. *Se $f, \tilde{f} : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $g, \tilde{g} : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ são contínuas entre os pares topológicos, de modo que $f \simeq \tilde{f}(rel. \tilde{X})$, com $\tilde{X} \subseteq X$, e $g \simeq \tilde{g}(rel. \tilde{Y})$, com $\tilde{Y} \subseteq Y$, e $f(\tilde{X}) \subseteq \tilde{Y}$, então $g \circ f \simeq \tilde{g} \circ \tilde{f}(rel. \tilde{X})$.*

Demonstração. A demonstração deste teorema é análoga a Proposição 4.1.4. ■

4.3 Equivalência Homotópica

Definição 4.3.1. *Dados dois espaços topológicos X e Y , dizemos que X tem o mesmo tipo de homotopia que Y se existem funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$, de modo que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$. Neste caso, dizemos que g é o inverso homotópico de f e denotamos por $X \equiv Y$.*

Espaços com a propriedade do mesmo tipo de homotopia são equivalentes no sentido homotópico.

Proposição 4.3.2. *A relação de tipo de homotopia é uma relação de equivalência na categoria dos espaços topológicos.*

Demonstração. Devemos mostrar que essa relação é reflexiva, simétrica e transitiva.

- Reflexiva:

Se X é um espaço topológico, tomemos $f, g = Id_X : X \rightarrow X$ e observamos que $f \circ g = g \circ f = Id_X : X \rightarrow X$ são equivalências homotópicas. Logo, $X \equiv X$.

- Simétrica:

Seja $X \equiv Y$. Existem funções contínuas tais que $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$, de modo que $f \circ g = Id_Y$ e $g \circ f = Id_X$. Basta definir $\tilde{g} = f$ e $\tilde{f} = g$ e, assim, teremos $\tilde{f} \circ \tilde{g} = Id_X$ e $\tilde{g} \circ \tilde{f} = Id_Y$. Ou seja, $Y \equiv X$.

- Transitiva:

Seja $X \equiv Y$ e $Y \equiv Z$. Existem as seguintes equivalências homotópicas: $\phi : X \equiv Y$ e $\varphi : Y \equiv Z$. Então, a composição $\varphi \circ \phi : X \rightarrow Z$ é contínua e uma equivalência homotópica entre X e Z . Basta observar que os inversos homotópicos de ϕ e φ , denotados, respectivamente, por ϕ' e φ' , formam o inverso homotópico de $\varphi \circ \phi : X \rightarrow Z$, onde sua composição é dada por $\phi' \circ \varphi' : Z \rightarrow X$.

■

Exemplo 4.3.3. Note a semelhança com o Exemplo 2.1.19. Observe que S^n (a esfera n -dimensional de raio unitário) tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Com efeito, seja $i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ a inclusão e seja $p: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$, onde $p(x) = \frac{x}{\|x\|}$, temos que p é a projeção radial. Para todo $x \in S^n$, temos que $(p \circ i)(x) = p(x) = x$, isto é, $(p \circ i)(x) = Id_{S^n}$.

Além disso, para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, podemos ligar o ponto x com o ponto $p(x)$ por um segmento de reta completamente contido em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Portanto, $i \circ p$ é homotópico à identidade em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Logo, $S^n \equiv \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Definição 4.3.4. Um espaço topológico X chama-se **contrátil** se, X tiver o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

Proposição 4.3.5. Um espaço topológico X é contrátil se, e somente se, a função identidade de X for homotópica a uma função constante em X .

Demonstração. Vamos mostrar que valem as duas direções.

- Ida($\Rightarrow$)

Como $f: X \equiv \{p\}$, queremos mostrar que existe uma homotopia entre Id_X e uma função constante. Observe que existe uma função g que é a inversa homotópica de f , de modo que $g \circ f \simeq Id_X$. Além disso, $g(f(x)) = g(p)$ e $g(p)$ é constante. Logo, $g \circ f \simeq Id_X$ implica que $g(p) \simeq Id_X$, como queríamos mostrar.

- Volta($\Leftarrow$)

Agora, tome $f: X \rightarrow X$, onde $f(x) = p$ uma função constante de modo que $f \simeq Id_X$. Podemos definir outra função g que tenha apenas $p \in X$ na imagem, ou seja, $g: X \rightarrow \{p\}$. Considere a inclusão natural $i: \{p\} \rightarrow X$. Portanto, $i \circ g = f(x) \simeq Id_X$ e $g \circ i \simeq Id_{\{p\}}$.

■

Proposição 4.3.6. Quaisquer duas funções contínuas arbitrárias de um espaço topológico qualquer em um espaço topológico contrátil são homotópicas.

Demonstração. Considere Y um espaço topológico contrátil e X espaço arbitrário. Sabemos pela proposição anterior existe uma função constante $g: Y \rightarrow Y$ de modo que g seja homotópica à identidade de Y . Considere, então, duas funções contínuas arbitrárias $f, h: X \rightarrow Y$. Utilizando a Proposição 4.1.4, temos que $f = Id_Y \circ f \simeq g \circ f$. Do mesmo modo, mostra-se que $h \simeq g \circ h$. Como g é constante, concluímos, que $g \circ f \simeq g \circ h$ e portanto $f \simeq h$.

■

Definição 4.3.7. Um caminho em X é uma aplicação contínua $g: I \rightarrow X$. O ponto $g(0)$ será chamado de **inicial** do caminho e $g(1)$ será chamado de **final**. Dizemos que g une $g(0)$ e $g(1)$ e g é o percurso entre eles.

Definição 4.3.8. Dizemos que um espaço X é **conexo por caminhos** se, para qualquer par de pontos $x, y \in X$, sempre existir um caminho em X que une x e y .

Exemplo 4.3.9. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual é um exemplo de conexo por caminhos. Veja que, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida da forma $g(t) = tx + (1 - t)y$ é um caminho entre x, y .

Proposição 4.3.10. Todo espaço contrátil é conexo por caminhos.

Demonstração. Seja X contrátil e tome $a, b \in X$. Sabemos pela Proposição 4.3.6 que duas funções constantes $f, g : X \rightarrow X$ são homotópicas. Defina, então, $f(x) = a$ e $g(x) = b$. Seja H uma homotopia entre f, g . Fixe agora $x_0 \in X$. Assim, a aplicação $t \rightarrow H(x_0, t)$ $t \in I$ define um caminho ligando a e b . ■

Proposição 4.3.11. Sejam X um espaço topológico contrátil e Y conexo por caminhos. Para quaisquer funções contínuas $f, g : X \rightarrow Y$, temos que $f \simeq g$.

Demonstração. Considere H homotopia entre Id_X e uma constante, logo $f \circ H$ é uma homotopia entre f e uma constante. A mesma coisa acontece com g . Como Y é conexo por caminhos, obtemos que ambas as constantes são homotópicas, ou seja, $f \simeq g$. ■

Proposição 4.3.12. Seja X um espaço topológico e sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ contínuas. Temos:

- (i) se $f(x) \neq -g(x)$, para todo $x \in X$ então $f \simeq g$. Em particular, se $f(x) \neq -x$ para todo $x \in X$ então $f \simeq Id_{\mathbb{S}^n}$
- (ii) se $f(x) \neq g(x)$, para todo $x \in X$ então $f \simeq -g$. Temos que $f(x)$ não possui ponto fixo, então $f \simeq -Id_{\mathbb{S}^n}$.

Demonstração. Vamos construir a homotopia para cada caso.

- (i) $f(x) \neq -g(x)$, $x \in X \Rightarrow (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot g(x) \neq 0$, $(x, t) \in \mathbb{S}^n \times I$. Então $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow \mathbb{S}^n$ definida da forma $H(x, t) = \frac{(1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)}{\|(1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)\|}$ é contínua e $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, ou seja, $f \simeq g$.
- (ii) $f(x) \neq g(x)$, $x \in X \Rightarrow f(x) \neq -(-g(x))$. Pelo item acima, temos que $f \simeq -g$. ■

Definição 4.3.13. Sejam E um espaço vetorial e $S \subset E$. Dizemos que S é **simétrico**, para todo $x \in S$, temos que $-x \in S$.

Definição 4.3.14. Sejam E, F espaços vetoriais e $S \subset E$ simétrico. Então a aplicação $f : S \rightarrow F$ é dita **ímpar**, ou **antípodal**, se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in S$. Ou, equivalentemente, $f \circ (-Id_{\mathbb{S}^n}) = (-Id_{\mathbb{S}^n}) \circ f$.

Exemplo 4.3.15. Seja $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ satisfazendo $f(x) \neq f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Vamos mostrar que a aplicação $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ definida por

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

é ímpar e $f \simeq g$.

Suponha então que exista um $x \in \mathbb{S}^n$ tal que ocorra $g(x) = -f(x)$. Segue

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \\ -f(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \\ f(x) &= \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \\ f(x) \cdot \|f(x) - f(-x)\| &= f(-x) - f(x) \\ f(x) \cdot \|f(x) - f(-x)\| + f(x) &= f(-x) \\ f(-x) &= f(x) \cdot (1 + \|f(x) - f(-x)\|) \\ f(-x) &= f(x), \text{ pois } f(x), f(-x) \in \mathbb{S}^n \text{ e } \|f(x)\| = \|f(-x)\| = 1. \end{aligned}$$

Isto é um absurdo, pois $f(x) \neq f(-x)$, $x \in \mathbb{S}^n$ e, portanto, $g(x) \neq -f(x)$, $x \in \mathbb{S}^n$. De acordo com a Proposição 4.3.12, temos $f \simeq g$. Observe também que

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{f(-x) - f(-(-x))}{\|f(-x) - f(-(-x))\|} \\ g(-x) &= \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -g(x). \end{aligned}$$

Portanto, g é ímpar.

Teorema 4.3.16. Seja X um espaço topológico e $f : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ uma função contínua. São equivalentes:

1. Existe uma função $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow X$ tal que $\bar{f}|_{\mathbb{S}^n} = f$, em que $\mathbb{D}^{n+1}$ é a bola fechada unitária $(n+1)$ -dimensional;
2. f é homotópica a uma constante.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & \nearrow \bar{f} & \\ \mathbb{D}^{n+1} & & \end{array}$$

Demonstração. Vamos demonstrar:

(1) implica (2): Tome $s \in \mathbb{S}^n$ um ponto qualquer. Definimos $F : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$ colocando $F(x, t) = \bar{f}((1-t)x + ts)$. Temos então que $F(x, 0) = \bar{f}(x) = f(x)$ e, também, $F(x, 1) = \bar{f}(s) = f(s)$ uma constante, para todo $x \in \mathbb{S}^n$. Como F é contínua

por ser uma composição de funções contínuas, temos que F é uma homotopia entre f e a aplicação constante $x \rightarrow \bar{f}(x)$, $x \in \mathbb{S}^n$.

(2) implica (1) Considere agora $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$ uma homotopia entre $0 \simeq f$. Definimos a extensão $\bar{f} : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow X$ como

$$\bar{f}(y) : \begin{cases} H(\mathbb{S}^n, 0) & 0 \leq \|y\| \leq \frac{1}{2} \\ H\left(\frac{y}{\|y\|}, 2\|y\| - 1\right) & \frac{1}{2} \leq \|y\| \leq 1. \end{cases}$$

A aplicação acima leva todos os pontos de $\mathbb{S}^n$ em uma constante. Mostraremos que $\bar{f}$ está bem definida, é contínua e que $\bar{f}|_{\mathbb{S}^n} = f$ o que completará a demonstração.

Analisemos como $\bar{f}$ se comporta para $\|y\| = \frac{1}{2}$. Temos então que:

$$\begin{aligned} \bar{f}(y) &= H\left(\frac{y}{\|y\|}, 2\|y\| - 1\right) \\ &= H\left(\frac{y}{\frac{1}{2}}, 2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) \\ &= H(2y, 0) = \text{constante} = H(\mathbb{S}^n, 0). \end{aligned}$$

Isso mostra que a função está bem definida. A aplicação é constante por que é a união de duas funções contínuas, uma sendo a função constante e a outra é uma composição sem pontos de descontinuidade definidos no seu domínio. Basta mostrar que $\bar{f}|_{\mathbb{S}^n} = f$. Para isto, tome $y \in \mathbb{S}^n$. Logo, $\|y\| = 1$. Temos então $\bar{f}(y) = H(y, 1) = f(y)$, provando, assim, o teorema. ■

A função $\bar{f}$ do teorema acima é chamada de uma extensão contínua de f ao conjunto $\mathbb{D}^{n+1}$.

Observação 4.3.17. Qualquer função contínua de $\mathbb{S}^n$ em um espaço contrátil pode ser estendida para o disco fechado unitário $\mathbb{D}^{n+1}$. Isto pode ser observado utilizando o teorema anterior e a Proposição 4.3.6.

4.4 Retração e Extensão

Definição 4.4.1. Seja X um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subespaço. Dizemos que uma aplicação contínua $r : X \rightarrow Y$ é uma retração se, r for uma extensão contínua no espaço X da aplicação Id_Y . Nesse caso, Y chama-se retrato de X .

O que esta definição quer nos dizer é que uma aplicação r será uma retração quando acontecer de $r(y) = y$, para todo $y \in Y$, ou seja, r coincide com a aplicação Id_Y quando restrita ao subconjunto $Y \subseteq X$. Observamos também que a

aplicação Id_Y é sobrejetiva. Dizemos que $Y \subseteq X$ é um retrato de X sempre que a aplicação identidade de Y poder ser estendida continuamente a uma função $r : X \rightarrow Y$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{r} & Y \\ \uparrow i & \nearrow Id_Y & \\ Y & & \end{array}$$

Proposição 4.4.2. *Seja X um espaço topológico. Para que $Y \subseteq X$ seja um retrato de X é suficiente e necessário que toda aplicação contínua $f : Y \rightarrow Z$, onde Z é um espaço topológico arbitrário, possua uma extensão contínua $\bar{f} : X \rightarrow Z$.*

Demonstração. Suponha que exista $r : X \rightarrow Y$ uma retração. Agora, considere uma aplicação contínua qualquer $f : Y \rightarrow Z$. A composição $f \circ r$ é uma extensão contínua de f , o que mostra a necessidade da condição. Reciprocamente, suponha agora que, para toda função $f : Y \rightarrow Z$, com Z espaço topológico qualquer, podemos estendê-la a uma função $\bar{f} : X \rightarrow Z$. Em particular, se $Z = Y$, a inclusão natural pode ser estendida continuamente a uma função $\bar{i} : X \rightarrow Y$, ou seja, Y é retrato de X . Portanto, a condição além de necessária é suficiente. ■

Agora temos as condições necessárias para demonstrar um dos principais resultados deste trabalho, que reflete um dos teoremas das existências essenciais da topologia, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Um das informações que utilizaremos na demonstração deste resultado versa sobre a contratibilidade de $\mathbb{S}^n$.

Proposição 4.4.3. *$\mathbb{S}^n$ não é contrátil.*

Demonstração. A demonstração deste resultado foge do escopo deste trabalho¹. ■

Observação 4.4.4. *Este resultado tem algumas aplicações na topologia, no entanto, sua demonstração para o caso geral não é trivial e exige conteúdos que fogem ao escopo deste trabalho. Para o fim de informação, algumas demonstrações deste resultado exigem o estudo sobre grupo fundamental e homologia simplicial, mais especificamente, o n -ésimo grupo de homologia da esfera n -dimensional. Outras abordagens utilizam o Teorema da Extensão de Dugundji, o Teorema de Borsuk-Ulam e o Teorema de Lusternik-Schnirelmann-Borsuk.*

Na seção abaixo trazemos o resultado central deste capítulo, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. A demonstração abaixo é uma adaptação do mesmo teorema demonstrado em (GRANAS; DUGUNDJ, 2003), nas páginas 95.

¹ Uma demonstração deste resultado pode ser encontrado em (GRANAS; DUGUNDJ, 2003) página 93, Teorema (5.2) item (3) que afirma que nenhuma função ímpar da esfera n -dimensional em si mesma é homotópica a uma constante.

4.5 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Iniciaremos esta parte demonstrando o teorema para o caso um dimensional e, depois, comentaremos brevemente algumas características de espaços topológicos que contêm a propriedade do ponto fixo. Em seguida, apresentaremos uma abordagem para o teorema no caso geral e daremos uma ideia de sua demonstração.

Teorema 4.5.1. (Brouwer em dimensão 1) *Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua. Então existe pelo menos um ponto fixo $c \in [a, b]$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos observar que, caso aconteça $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, não há o que argumentar, pois já está provado.

Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) > a$ e $f(b) < b$ e defina uma função $g(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $g(x) = x - f(x)$. Então, $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto $c \in [a, b]$, tal que $g(c) = 0$. Ou seja, $g(c) = c - f(c) = 0$, de onde $c = f(c)$. ■

É interessante notar que existem enunciados distintos para o Teorema de Brouwer, no entanto, cada um essencialmente demonstra o mesmo resultado, ou mais geral ou mais restrito. Agora, abaixo enunciamos algumas características de espaços com a propriedade do ponto fixo.

Definição 4.5.2. *Dizemos que um espaço topológico X tem a propriedade do ponto fixo se, para toda função $f : X \rightarrow X$ contínua, existir $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Exemplo 4.5.3. *A esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ não possui a propriedade do ponto fixo, visto que a aplicação antípoda é contínua e sem ponto fixo.*

Proposição 4.5.4. *A propriedade do ponto fixo é um invariante topológico.*

Demonstração. Considere X um espaço topológico com a propriedade do ponto fixo. suponha que $g : X \rightarrow Y$ um homomorfismo entre X e Y . Dada uma aplicação $f : Y \rightarrow Y$ contínua temos que a composição:

$$g^{-1} \circ f \circ g : X \rightarrow X$$

também é contínua. Logo, existe $x \in X$ tal que seja ponto fixo da aplicação acima. Desta forma, temos:

$$g^{-1}(f(g(x))) = x.$$

No entanto, como g é bijeção, a afirmação acima implica que

$$f(g(x)) = g(x).$$

Portanto, $g(x) \in Y$ é ponto fixo de f . ■

Teorema 4.5.5. *Todo retrato de um espaço com a propriedade do ponto fixo também tem esta propriedade.*

Demonstração. Seja X um espaço com a propriedade do ponto fixo. Considere $A \subset X$ um subconjunto de X e uma aplicação $r : X \rightarrow A$ retrato. Assim, considere uma aplicação contínua $f : A \rightarrow A$ e, juntamente, considere a função inclusão $i : A \rightarrow X$, onde leva ponto de A em si mesmo em X . Observe que a composição $i \circ f \circ r : X \rightarrow X$ é contínua. Como X tem a propriedade do ponto fixo, temos que existe $x \in X$ tal que $i \circ f \circ r(x) = x$. Vamos mostrar que $r(x)$ é ponto fixo de f . Pois de fato, $r(x) \in A$ e $f(r(x)) \in A$. Logo $x = i(f(r(x))) = f(r(x))$, agora basta re aplicar a função r em ambos os lados, $r(x) = r(f(r(x))) = f(r(x))$. Portanto $r(x)$ é ponto fixo de f . ■

Teorema 4.5.6. *Seja n um número inteiro não negativo. Então, as afirmações abaixo são equivalentes.*

- (1) $\mathbb{S}^n$ não é contrátil;
- (2) $\mathbb{S}^n$ não é retrato de $\mathbb{D}^{n+1}$;
- (3) (**Brouwer**) Toda função contínua $f : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow \mathbb{D}^{n+1}$ possui um ponto fixo.

Antes, demonstraremos um pequeno lema que nos será útil nesta demonstração.

Lema 4.5.7. *Se uma aplicação contínua $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ é homotópica à uma constante, então g possui ponto fixo.*

Demonstração. Suponha que g **não possua** pontos fixos e que $g \simeq p$ onde p é a aplicação constante. Então, considere a seguinte homotopia entre g e aplicação antípoda $\varphi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, onde $\varphi(x) = -x$. Seja $F : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow \mathbb{S}^n$

$$F(x, t) = \frac{(1-t)g(x) - tx}{|(1-t)g(x) - tx|}.$$

Observe que está bem definida, pois $g(x) \neq x$ para $x \in \mathbb{S}^n$. Como $g \simeq p$ e $\varphi \simeq g$, pela transitividade, temos que $\varphi \simeq p$. Portanto, pela Proposição 4.1.4, a composição de homotopias em um mesmo espaço ainda é uma homotopia. Temos que $\varphi \circ \varphi = Id_{\mathbb{S}^n}$ é homotópica a uma constante. Portanto, a aplicação $Id_{\mathbb{S}^n}$ é homotópica a uma constante e, pela Proposição 4.3.5 segue que $\mathbb{S}^n$ é contrátil, o que contradiz a Proposição 4.4.3. Logo, g admite ponto fixo. ■

Vamos agora de fato demonstrar o teorema 4.5.6:

Demonstração. **Teorema do Ponto Fixo de Brouwer**

- (1) $\Leftrightarrow$ (2) É uma consequência do Teorema 4.3.16, aplicado na identidade em $\mathbb{S}^n$. Observe que, quando analisamos a identidade de $\mathbb{S}^n$ no Teorema 4.3.16, chegamos sempre à uma contradição ou que $\mathbb{S}^n$ é contrátil ou, na volta, que $\mathbb{S}^n$ é retrato de $\mathbb{D}^{n+1}$.
- (3) $\Rightarrow$ (2) Suponha que a aplicação $r : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ seja uma retração. Então temos que $\mathbb{S}^n$ é retrato de $\mathbb{D}^{n+1}$. Como $\mathbb{D}^{n+1}$ tem a propriedade do ponto fixo, temos pelo Teorema 4.5.5 que toda função de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{S}^n$ admite ponto fixo. No entanto, a função antípoda $\varphi(x) = -x$ não admite. Portanto, não existe retração $r : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$.
- (1) $\Rightarrow$ (3) Considere uma função $f : \mathbb{D}^{n+1} \rightarrow \mathbb{D}^{n+1}$ contínua. Suponha, por absurdo, que f não tenha ponto fixo. Assim, podemos definir uma função $g = f(x) - x$, onde $g(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{D}^{n+1}$. Agora, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} h : \mathbb{D}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\mapsto \frac{g(x)}{\|g(x)\|}. \end{aligned}$$

A função h é contínua e afirmamos que h não possui pontos fixos em $\mathbb{S}^n$. Suponha que exista $x \in \mathbb{S}^n$ que seja ponto fixo de h . Então, temos que $x \cdot \|g(x)\| = g(x)$, ou seja, $x \cdot (\|g(x)\| + 1) = f(x)$. Observe, ainda, que isto significa que $\|f(x)\| > 1$, o que contradiz a hipótese de $f(x) \in \mathbb{D}^{n+1}$.

Isso mostra que h não tem ponto fixo. Portanto, a restrição de $\underline{f} : h|_{\mathbb{S}^n}$ possui uma extensão contínua. Com essa informação, podemos utilizar o resultado do Teorema 4.3.16, de onde conseguimos concluir que $\underline{f} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ é homotópica a uma constante. Mas, como vimos no Lema 4.5.7, se $\underline{f}$ é homotópica a uma constante, então $\underline{f}$ admite ponto fixo em $\mathbb{S}^n$, o que é um absurdo. Assim, concluímos que f deve possuir ponto fixo em $\mathbb{D}^{n+1}$.

■

Podemos observar que o item (3) do Teorema acima reflete o enunciado clássico do teorema do ponto fixo de Brouwer, na qual provamos por meio de afirmações equivalentes, nos fazendo valer também do Teorema 4.3.16 e assumindo a Proposição 4.4.3.

Teorema 4.5.8. *Toda bola fechada do $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração. No item (3) do Teorema 4.5.6, vemos que o disco unitário ou a bola fechada de raio $d = 1$ tem a propriedade do ponto fixo. Como constatamos na Proposição

4.5.4, esta propriedade é um invariante topológico, então basta mostrar um homeomorfismo entre o disco unitário e uma bola fechada qualquer. Seja $B[x_0, r]$ a bola fechada, com centro em x_0 e raio igual a r . Seja $f : B[x_0, r] \rightarrow \mathbb{D}^n$ a aplicação $f(x) = \frac{x - x_0}{r}$. Temos que f é uma função contínua. Além disso, sua inversa $g(x) = rx + x_0$ também é. Portanto, $B[x_0, r] \simeq \mathbb{D}^n$. Logo, a bola fechada tem a propriedade do ponto fixo. ■

Como já dito no início deste capítulo, existem algumas maneiras de se enunciar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, algumas dessas formas adicionam mais ou menos requisitos ao teorema. No teorema abaixo escrevemos um destes enunciados.

Teorema 4.5.9. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto, compacto, convexo e com interior não vazio. Seja $f : A \rightarrow A$ uma função contínua, então f admite um ponto fixo $x \in A$ onde $f(x) = x$.*

Podemos observar que o disco unitário é um conjunto fechado e limitado do espaço euclidiano o qual é não vazio e convexo, portanto ele seria um caso particular do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. É possível mostrar, com conteúdos que fogem a ideia deste trabalho, que existe um homeomorfismo entre o disco n -dimensional e um conjunto convexo, compacto com interior não vazio². Utilizando as ideias de extensão contínua de uma função é possível concluir que dois espaços compactos, convexos e não vazios são invariantes no sentido topológico, utilizando como argumento a extensão de Tietze e p -normas.

4.6 Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

4.6.1 Teorema de Perron

Esta parte do trabalho apresenta uma das provas para o Teorema Perron, que versa sobre a existência de autovalores associados a autovetores positivos. Este teorema foi provado por Oskar Perron e esta demonstração é uma adaptação de (MIRANDA, 2017). Antes de definirmos e demonstrarmos tal teorema, enunciaremos algumas definições e proposições que nos serão úteis. Para começarmos, definiremos um n -simplexo padrão Δ^n .

Definição 4.6.1. *Seja $n \geq 0$. Definimos um n -simplexo padrão como o conjunto das combinações convexas de $n+1$ pontos de vértices denotados pelos vetores $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$*

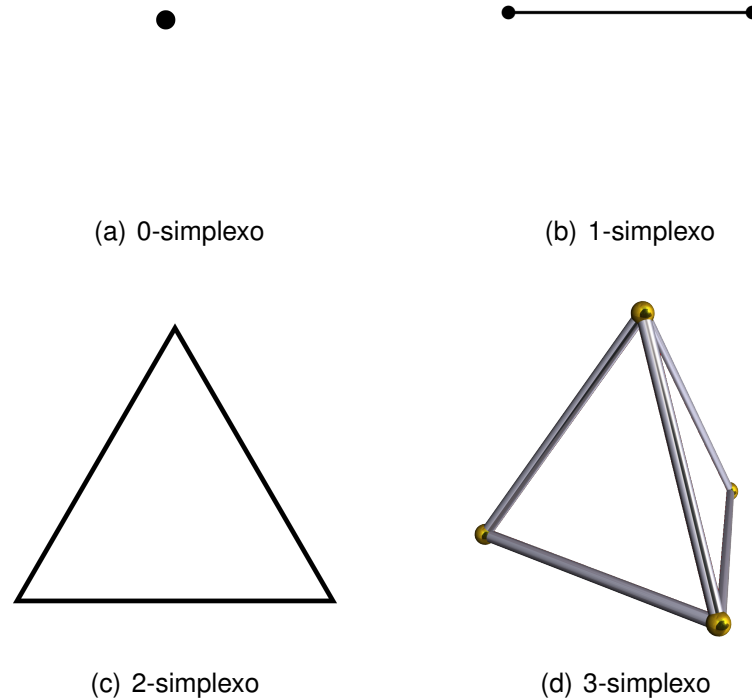
² PEIXOTO, Adriano Leandro da Costa. A construção do grau topológico e sua aplicação a um sistema diferencial não linear com condições de contorno. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. doi:10.11606/D.45.2019.tde-18052019-112509. Pagina 53

base para $\mathbb{R}^{n+1}$, de modo que a soma de seus coeficientes seja igual a 1:

$$\Delta^n = \left\{ (v_0, v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=0}^n x_j e_j, \sum_{j=0}^n x_j = 1, x_j \geq 0 \right\}.$$

Afim de compreendermos o que seriam estes objetos matemáticos, observe que um **0-simplexo** é apenas 1 ponto. Já o **1-simplexo** é uma reta e o **2-simplexo** é um triângulo e, ainda, um **3-simplexo** é um tetraedro.

Figura 1 – Simplexos



Fonte: Polytope Wiki, Simplex (2022)

Observe que n -simplexo é um subconjunto do espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, é um conjunto convexo por definição, observamos que ele é limitado no espaço métrico. Vamos mostrar que ele é um conjunto fechado, para isto consideramos os dois conjuntos abaixo:

$$\Delta_1 = \{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_j \geq 0 \forall j \}.$$

$$\Delta_2 = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{j=0}^n x_j = 1 \right\}.$$

Observe que o complementar de Δ_1 é o conjunto $\Delta_1^c = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_j < 0\}$, que é um conjunto aberto. Logo, Δ_1 é fechado.

Considere agora a função que soma todas as coordenadas de um vetor do espaço definida por $f(x) = \sum_j x_j$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Desta forma observamos que o conjunto Δ_2 seria os pontos do domínio de f que resultam em um. Portanto podemos considerar o inverso da imagem de f , assim teremos $\Delta_2 = f^{-1}(\{1\})$. Por ser o conjunto com um único elemento, é um conjunto fechado na topologia usual concluímos que Δ_2 é fechado. Agora, como $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$ ele também é fechado, limitado, convexo portanto compacto.

Logo, pela Proposição 4.5.4 e pelo Teorema 4.5.9, o n -simplexo tem a propriedade do ponto fixo. Esta informação será utilizada mais a frente na prova do Teorema de Perron.

Definição 4.6.2. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita positiva quando $A_{ij} > 0$, para todos $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definição 4.6.3. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita não-negativa quando $A_{ij} \geq 0$, para todos $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definição 4.6.4. Um vetor $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ é dito um autovetor da matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ quando Ax for colinear a x , ou seja, $Ax = \lambda x$.

Definição 4.6.5. Um escalar λ é dito um autovalor da matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ associado à x quando ocorrer $Ax = \lambda x$.

Teorema 4.6.6. (Perron) Seja A uma matriz de $\mathbb{R}^{n \times n}$ positiva. Então existe um autovalor $\lambda > 0$ e um autovetor $a > 0$ tais que $Aa = \lambda a$

Demonstração. Inicialmente observe que existe uma projeção do $\mathbb{R}^n$ para o Δ^n . Nesta demonstração temos a projeção $T : R \rightarrow \Delta^n$ dada por $T(x) = \frac{x}{\sum x_i}$, onde x_i é o valor da cada uma de suas coordenadas e o conjunto $R = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; x \geq 0\}$ e, agora considere o seguinte conjunto:

$$S = \left\{ (v_0, v_1, \dots, v_n)^t : \sum_{j=0}^n x_j e_j, \sum_{j=0}^n x_j = 1, x_j \geq 0 \right\}.$$

Podemos observar que esse conjunto é o mesmo que o n -simplex anteriormente definido. A letra t acima do vetor indica que devemos considerar sua transposta. Também é fácil observar que, o conjunto acima S é não vazio, fechado, limitado e convexo. Definimos abaixo uma aplicação entre os conjuntos S :

$$\begin{aligned} f : S &\rightarrow S \\ x &\mapsto \frac{Ax}{(\sum_i (Ax)_i)}. \end{aligned}$$

Algumas observações importantes são que, tanto a matriz A é positiva quanto $x > 0$. Visto que $x \in S$, portanto, para cada i , temos que $(Ax)_i \geq 0$. Logo, $\sum_i (Ax)_i > 0$ e, ainda, f está bem definida. Observe que, para cada $x \in S$, temos que $f(x) \in S$, ou seja, $f(S) \subset S$.

Além disso, temos que f é contínua e, portanto, nos valendo do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, provado para o $\mathbb{D}^n$, que é homeomorfo ao n -simplex. E, sabendo que a propriedade de ponto fixo é um invariante topológico, temos que existe $a \in S$ tal que $f(a) = a$. Assim,

$$\left(\sum_i (Aa)_i \right)^{-1} Aa = a.$$

Definimos o autovalor $\lambda = \sum_i (Aa)_i$. Desta forma, temos a igualdade: $Aa = \lambda a$. Visto que $a > 0 \in S$, temos que o autovalor associado a a é $\lambda > 0$. Desta forma, temos provado o Teorema de Perron. Onde a é chamado de autovetor de Perron e denotado por $P(A)$. ■

5 CONCLUSÕES

Ao observarmos os dois teoremas do ponto fixo aqui abordados, vemos diferenças claras entre o Teorema de Banach que além de garantir a existência do ponto fixo para uma contração continua, garante sua unicidade. Diferentemente do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer que tem sua construção utilizando principalmente argumentos relacionados a suposições por absurdo, além de não garantir uma unicidade do ponto fixo, sendo um teorema puramente sobre existência.

Observamos que o primeiro resultado traz também um método construtivo de como se obter este ponto fixo, através de uma sequência de reaplicações de uma contração contínua f sobre um ponto dado x_0 método que lembra em partes, o conhecido método de Newton-Raphson para obtenção de raízes de uma equação utilizando suas derivadas. Enquanto a prova para o TPF de Brouwer não nos apresenta nenhuma aproximação do valor do ponto fixo x da aplicação.

Apesar do Teorema do Ponto fixo de Brouwer requerer em sua demonstração conhecimentos básicos sobre homologia, existem versões do mesmo que utilizam o cálculo diferencial através dos estudos de variedades diferenciáveis, outras demonstrações do mesmo teorema utiliza argumentos da combinatória, como o Lema de Sperner. Existe também a possibilidade de considerar a função grau de uma aplicação.

Abordar esses teoremas durante a graduação pode servir de ponta de entrada para o início dos estudos em homologia, combinatória, teoria da medida, topologia algébrica, visto que generalizações e aplicações dos dois teoremas podem se encaixar nestas categorias.

REFERÊNCIAS

GRANAS, A.; DUGUNDJ, J. ***Fixed Point Theory***. New York: Springer, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 48.

KOSNIOWSKI, C. ***A First Course in Algebraic Topology***. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 14, 24 e 40.

KREYSZIG, E. ***Introductory Functional Analysis with Applications***. Canada: John Wiley Sons Inc, 1989. Citado na página 35.

LIMA, E. L. ***Espaços métricos***. Projeto Euclides: IMPA, 2003. v. 5. Citado 3 vezes nas páginas 24, 31 e 35.

MIRANDA, G. J. A. **Teoria de persistência e de matrizes irredutíveis: aplicações em epidemiologia**. *Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco*, p. 48–50, 2017. Citado na página 52.