INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA E TERRITÓRIO (ILATIT)

ENGENHARIA CIVIL DE INFRAESTRUTURA

ESTADO DA ARTE E DESDOBRAMENTOS DAS FORMULAÇÕES MECÂNICAS ASSOCIADOS A TRELIÇA DE VON MISES

LEANDRO OLIVEIRA E SILVA FILHO

FOZ DO IGUAÇU
2025

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA E TERRITÓRIO (ILATIT)

ENGENHARIA CIVIL DE INFRAESTRUTURA

ESTADO DA ARTE E DESDOBRAMENTOS DAS FORMULAÇÕES MECÂNICAS ASSOCIADOS A TRELIÇA DE VON MISES

LEANDRO OLIVEIRA E SILVA FILHO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil de Infraestrutura.

Orientador: Prof. Dr. Aref Kzam

FOZ DO IGUAÇU

2025

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

LEANDRO OLIVEIRA E SILVA FILHO

ESTADO DA ARTE E DESDOBRAMENTOS DAS FORMULAÇÕES MECÂNICAS ASSOCIADOS A TRELIÇA DE VON MISES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil de Infraestrutura.

BANCA EXAMINADORA

_____

Orientador: Prof. Dr. Aref Kalilo Lima Kzam
UNILA

_____

Prof. Dr. Ivan Dario Gomez Araujo
UNILA

_____

Prof. Dr. Paulo Junges
UNILA

Foz do Iguaçu, 2025.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Dedico este trabalho a todos aqueles que me apoiaram e confiaram em mim.

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho, primeiramente, ao meu professor orientador, que honrou seu trabalho e cuja dedicação, paciência e sabedoria foram fundamentais para a concretização deste estudo. Agradeço de coração a todos os professores da UNILA e aos membros da banca, por compartilharem não apenas conhecimento, mas também experiências que transformaram minha trajetória acadêmica em aprendizado e amizade genuínos.

Aos meus colegas de curso, que tornaram cada desafio mais leve e cada conquista mais significativa, meu reconhecimento pela parceria e pelo ambiente inspirador que ajudaram a construir.

Aos supervisores do meu estágio, que me apoiaram, acolheram e compartilharam seu conhecimento, minha gratidão por contribuírem para meu crescimento profissional e pessoal.

E, acima de tudo, à minha família, por acreditarem em mim mesmo nos momentos mais difíceis, oferecendo força e apoio incondicional. Sem vocês, este caminho teria sido muito mais árduo e solitário.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

“Engenheiros deveriam gostar de engenheiros, gerar mais negócios entre si, entender que juntos somos uma grande força.
Ajude seu colega da engenharia dando oportunidade a ele, e irá gerar valor para ambos.”
— Maurício Marques

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

RESUMO

Em diversas aplicações da mecânica estrutural, uma das referências mais utilizadas como benchmark é treliça de von Mises (TVM). O estado da arte e várias inovações relacionadas à TVM podem ser exploradas. No desenvolvimento deste trabalho acadêmico, um capítulo é dedicado à exploração de técnicas associadas ao Método dos Elementos Finitos (MEF) e à sua formulação. As aplicações específicas do MEF na engenharia estrutural, abordando aspectos como otimização, simulação de modelos, riscos e segurança no cálculo estrutural, também são investigadas. As informações coletadas e sintetizadas podem servir como ponto de partida para pesquisadores da área. Nesse sentido, ao destacar as oportunidades de investigações, esta pesquisa também incentiva a continuidade das discussões e o desenvolvimento de novos trabalhos que contribuam para o avanço do conhecimento na área.

Contudo, quanto à seleção das fontes e aos critérios adotados, indica-se a necessidade de estudos complementares para aprofundar as descobertas apresentadas.

PALAVRAS-CHAVE: Treliças de von Mises, Elementos Finitos, Instabilidade.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

RESUMEN

En diversas aplicaciones de la mecánica estructural, una de las referencias más utilizadas como punto de comparación es la cercha de von Mises (TVM). Se pueden explorar el estado del arte y varias innovaciones relacionadas con la TVM. En el desarrollo de este trabajo académico, un capítulo se dedica a la exploración de técnicas asociadas al Método de los Elementos Finitos (MEF) y a su formulación. También se investigan las aplicaciones específicas del MEF en la ingeniería estructural, abordando aspectos como optimización, simulación, riesgos y seguridad en el cálculo estructural. La información recopilada y sintetizada puede servir como punto de partida para investigadores del área. En este sentido, al destacar las oportunidades de investigación, esta investigación también fomenta la continuidad de las discusiones y el desarrollo de nuevos trabajos que contribuyan al avance del conocimiento en el campo.

No obstante, con respecto a la selección de fuentes y a los criterios adoptados, se indica la necesidad de estudios complementarios para profundizar en los hallazgos presentados.

PALABRAS-CLAVE: Cercha de von Mises, Instabilidad, Método de los Elementos Finitos.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ILATIT	Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território
UNILA	Universidade Federal da Integração Latino-Americana
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TVM	Treliça de von Mises
MEF	Método dos Elementos Finitos
IA	Inteligência artificial
JBI	*Joanna Briggs Institute*
PRISMA	*Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses*
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
CEC	Condições essenciais de contorno
SHM	*Structural Health Monitoring*
MODOWEN[1]	Corresponde à modificação do programa realizada pelo autor, sob supervisão de seu orientador (MODOWEN *version* OK – *Owen formulation modified by Oliveira under the supervision of Kzam*)

[1] O nome do programa é uma homenagem ao engenheiro civil e professor consagrado da *Swansea University,* no Reino Unido, Roger Owen (1942–2020). Em 2004, recebeu a Medalha Gauss-Newton (IACM *Congress Medal*), concedida pela *International Association for Computational Mechanics* em reconhecimento às suas contribuições de excelência para a mecânica computacional. Uma síntese biográfica detalhada é apresentada por Chenfeng (2025).

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

SUMÁRIO

1 **INTRODUÇÃO** 11

1.1 Apresentação do Tema 11

1.2 Justificativa 11

1.3 Objetivos 12

1.3.1 Objetivos Gerais 12

1.3.2 Objetivos Específicos 12

1.4 Métodos 13

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 18

2.1 Análises exploratórias 18

2.1.1 Otimização Estrutural 18

2.1.2 Simulações de modelos 19

2.1.3 Riscos e segurança no cálculo estrutural 22

2.2 Resultado das Análises Exploratórias 25

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 26

3.1 Fundamento 26

3.1.1 Mecânica estrutural 26

3.1.2 Abordagens energéticas 27

3.1.3 Energia e linearidade 29

3.1.4 Método linear 31

3.1.5 Abordagens não lineares 34

3.1.6 Sofisticações associadas as abordagens energéticas 37

3.1.7 Métodos variacionais 41

3.2 MEF na Engenharia Civil 42

3.2.1 Fundamento 42

3.2.2 Método de Rayleigh-Ritz 45

3.2.3 Definição da Matriz de Rigidez 47

3.2.4 Solução numérica: o método de Newton-Raphson 53

3.2.5 Modelo elástico não linear 58

3.2.6 Modelos elastoplástico 60

3.2.7 MEF Posicional 65

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

3.2.8 Análise de instabilidade 68
3.2.9 Solução numérica elastoplástica 78
4 MODELOS VISCOELÁSTICOS 80
4.1 Modelo viscoso de Newton 80
4.2 Introdução ao modelo viscoelástico alternativo de três parâmetros 81
4.3 Modelo viscoelástico alternativo de três parâmetros 83
4.4 Algoritmo de integração temporal 88
4.5 Procedimento para solução numérica 90
4.6 Procedimento computacional 91
4.7 Resultados no modelo viscoelástico generalizado de Maxwell 94
5 ESTRATÉGIAS DE PARALELIZAÇÃO E CONTROLE PARA ANÁLISES NÃO LINEARES 97
5.1 Análise da trajetória de equilíbrio automatizada pelo ABAQUS e MATLAB 98
5.2 Análise de tempo de processamento pelo ABAQUS 99
5.3 Análise de processamento pelo MODOWEN 101
5.4 Análise da trajetória de equilíbrio automatizada pelo MODOWEN 101
6 CONCLUSÃO 105
7 APÊNDICE 107
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 108

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do Tema

A utilidade no desenvolvimento de novas aplicações de engenharia e na realização de testes de referência (benchmarks) está relacionada à ampla classe de estruturas que a treliça de von Mises (TVM) é capaz de representar, assumindo diversas configurações estáveis, de acordo com Castro (2024).

Alguns temas estudados, como a multiestabilidade em sistemas estruturais (uma nova área de pesquisa em engenharia), ainda são restritos a poucos centros de estudo, como a Universidade de Harvard, a Universidade de Cambridge e o Imperial College London, e apresentam grande potencial de aplicação na engenharia civil, segundo Fonseca (2018).

Além disso, problemas de grande escala podem exigir enorme capacidade computacional. Melhorias no método dos elementos finitos (MEF), como técnicas de redução de ordem, refinamento adaptativo e algoritmos paralelos, permitem simulações mais rápidas e acessíveis. Outro campo de pesquisa se refere ao avanço dos materiais, como compósitos e estruturas nanométricas, em que exige o desenvolvimento de formulações mais sofisticadas no MEF para capturar corretamente seu comportamento mecânico e térmico. No entanto, deu-se menos importância aos temas relacionados a este assunto, devido à complexidade ainda existente nas formulações teóricas deste tema.

O MEF em conjunto com inteligência artificial e aprendizado de máquina apresenta potencial para otimizar processos de simulação, reduzir o tempo de análise e propor soluções mais eficientes, segundo Zhang (2025).

1.2 Justificativa

Para determinar a posição deformada da estrutura, é necessário conhecer sua rigidez efetiva. Todos os materiais apresentam alguma forma de não linearidade física (NFL) quando suficientemente solicitados. No caso específico do concreto, essa não linearidade manifesta-se principalmente por meio da fissuração, fenômeno que reduz a rigidez local e altera de forma significativa o comportamento estrutural. Assim, a

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

configuração deformada deve ser avaliada considerando os possíveis efeitos da NLF, como a fissuração. Contudo, mesmo atualmente, essa análise pode ser computacionalmente custosa, o que evidencia a necessidade de empregar técnicas robustas que viabilizem a aplicação prática das teorias associadas ao MEF. Além disso, o monitoramento pós-construção e a comparação entre modelo e comportamento real acabam prejudicados pela falta de coerência entre rigidez modelada e rigidez observada.

Esse cenário reforça a necessidade de empregar métodos numéricos capazes de lidar com essas complexidades sem inviabilizar a aplicação prática das teorias associadas ao MEF. A adoção de estratégias eficientes, como técnicas de linearização, métodos incrementais-iterativos e modelos constitutivos simplificados, aliada ao uso de paralelização e recursos de automação computacional, faz-se fundamental para viabilizar análises realistas dentro de tempos computacionais aceitáveis. Abordagens baseadas em dimensionamento inverso, capazes de estimar as propriedades estruturais reais a partir dos dados de resposta, em consonância com técnicas associadas ao *Structural Health Monitoring* (SHM), possibilita a calibração contínua do modelo numérico com o desempenho observado, aprimorando sua representatividade e permitindo avaliações mais precisas ao longo de toda a vida útil da estrutura.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivos Gerais

Investigar a evolução do MEF, suas principais formulações matemáticas, computacionais, sua relevância no contexto da engenharia civil moderna e automatizada.

1.3.2 Objetivos Específicos

- ✓ Explorar os fundamentos matemáticos e físicos do MEF para investigar diferentes tipos de elementos.
- ✓ Avaliar códigos com softwares como ABAQUS e MATLAB para resolver problemas mecânicos do MEF.
- ✓ Identificar benefícios, desafios e possíveis melhorias na aplicação do método no intuito de justificar a relevância do problema dentro da engenharia civil.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

- ✓ Avaliar tempo de simulação e propor estratégias de otimização, incluindo paralelização e possíveis integrações com IA ou computação de alto desempenho.

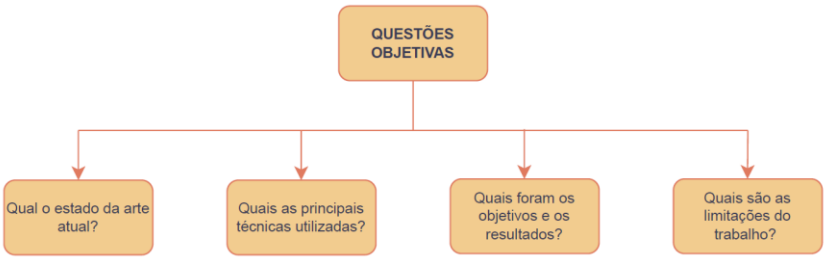
1.4 Métodos

A possibilidade de automação na análise do MEF, especialmente na área de infraestruturas, constitui um dos principais objetivos deste trabalho. O estado da arte do MEF advém da síntese do conhecimento existente sobre o tema neste trabalho acadêmico.

O método do protocolo JBI (*Joanna Briggs Institute*) e no PRISMA (*Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses*) estabelece um conjunto de diretrizes, composto por checklists e fluxogramas que proporcionam aos pesquisadores um sistema sólido na síntese e aplicação de conteúdos relevantes de revisões sistemáticas, assegurando uniformidade, credibilidade e consistência adequada nos aspetos críticos da concretização da análise exploratória.

As questões objetivas são enunciadas por tópicos, em conformidade com as diretrizes do protocolo PRISMA:

Figura 1 – Diagrama PRISMA



Fonte: Autoria própria. Elaborado com *draw.io*.

Para a análise exploratória, um conjunto de palavras-chave e filtros avançados de pesquisa foi definido com base em critérios de inclusão e exclusão, seguido por análises e rastreamento dos resumos. Os artigos foram organizados de acordo com sua delimitação de pesquisa. Para sintetizar os conteúdos analisados, cada um deles é apresentado nas tabelas a seguir.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Tabela 1 – Otimização estrutural

Autor	Título	Objetivo	Expectativas
ARHAMI et al. (2023)	*Optimization process of the Truss Structure using Finite Element Analysis: Step by step from 2D to 3D space*	Obter a menor área e peso para as barras da treliça	A implementação pode ser feita no Fortran e estendida a aplicabilidade a algoritmos meta-heurísticos
LI et al. (2023)	*Nonlinear Dynamics of Elastically Connected Multistable Structures*	Otimização de treliças de aço baseada na integração entre Algoritmos Genéticos (AG) e o MEF	Criação de estratégias adaptativas para ajustar automaticamente os parâmetros do AG
ZHANG et al. (2025)	*Data-driven Design Of Well-behaved Nonlinear Structures: A Case Study On The Von Mises Truss*	Desenvolver machine learning (ML) para o projeto inverso de estruturas não lineares	Otimizar o processo de geração de dados para treinamento dos modelos

Fonte: Autoria própria.

Tabela 2 – Falhas e instabilidades

Autor	Título	Objetivo	Expectativas
BYLIK et al. (2017)	*Determining Sloped-load Limits Inside Von Mises Truss With Elastic Support*	Analisar estruturas submetidas a cargas inclinadas, considerando a presença de apoios elásticos	Aplicar a metodologia a estruturas tridimensionais mais realistas, como cúpulas reticuladas completas
BYLIK et al. (2022)	*Stability of von-Misses truss with initial random imperfections*	Analisar o comportamento da treliça considerando a presença de imperfeições iniciais determinísticas e aleatórias	Incorporar imperfeições assimétricas, imperfeições no apoio, variações de rigidez ao longo dos elementos, e efeitos de montagem.
RAVINGER et al. (2017)	*Statics and Dynamics of Snap-through Effect*	Investigar o fenômeno do snap-through	Desenvolvimento de algoritmos mais robustos para lidar com singularidades na matriz de rigidez durante o snap-through

Fonte: Autoria própria.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Tabela 3 – Simulação de modelos

Autor	Título	Objetivo	Expectativas
SELHORST et al. (2017)	*Finite Element Analysis Using Shell Elements on Reticulated Structures*	Avaliar se elementos tipo *SHELL* podem substituir, os elementos tradicionalmente usados em estruturas reticuladas, comparando seus resultados com modelos sólidos e soluções analíticas.	Estendender a validação desses elementos para diferentes configurações geométricas, carregamentos variados e estruturas reticuladas de maior porte.
BARBOSA (2017)	*Análise dinâmica não linear de estruturas abatidas*	Analisar os mecanismos de escape (*scape*) do estado de pré-flambagem estável sob cargas estáticas e dinâmicas	Coletas de dados e aplicações de correlações que testem de forma adequada a confiabilidade dos modelos computacionais empregados.
AMARAL et al. (2017)	*Análise Não Linear De Estruturas: Aplicação Do Método Do Comprimento De Arco De Crisfield*	Estudar os fenômenos de snap-through e o snap-back associados à não linearidade geométrica de estruturas.	Desenvolver estratégias adaptativas de atualização dos parâmetros para aumentar a estabilidade
RAUNYR et al. (2018)	*Discussões Sobre Análise Analítica Da Trajetória De Equilíbrio De Estruturas De Barra Simples Sujeitas A Grandes Deslocamentos: Uma Abordagem Energética*	Analisar a trajetória de equilíbrio de estruturas formadas por elementos de barras simples submetidas a grandes deslocamentos	Combinar a abordagem energética do MEF e técnicas baseadas em IA pode proporcionar soluções mais rápidas, robustas e aplicáveis em tempo real
FONSECA (2018)	*Comportamento não linear, bifurcações e instabilidade de uma treliça hiperelástica*	Analisar comportamento não linear, as bifurcações e as instabilidades estáticas e dinâmicas de uma treliça plana composta por barras hiperelásticas modeladas pelo material neo-Hookeano.	Investigar estruturas inteligentes com atuação ativa, onde elementos podem alterar suas propriedades sob comando externo (por exemplo, materiais eletroativos ou sistemas com atuadores embutidos).

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

FERNANDES (2022)	*Análise Paramétrica Da Instabilidade De Estruturas Reticuladas Planas Esbeltas Com Comportamento Dinâmico Geometricamente Não Linear Pelo Método Posicional Dos Elementos Finitos*	Desenvolver uma metodologia para a análise da instabilidade dinâmica de estruturas reticuladas planas esbeltas com comportamento geometricamente não linear	O comportamento caótico pode ser utilizado no monitoramento de integridade estrutural em tempo real, por meio de sensores e algoritmos de tertrole baseados nos expoentes de Lyapunov
RODRIGUES et al. (2022)	*Comportamento Dinâmico E Estabilidade De Elementos*	Estudar o comportamento dinâmico e a estabilidade de elementos estruturais	Integração com algoritmos de otimização para projetar sistemas com comportamento multiestável desejável
PANTALEÃO et al. (2020)	*Comportamento Dinâmico E Estabilidade De Elementos Estruturais Multiestáveis*	Investigar o comportamento dinâmico e a estabilidade de sistemas estruturais multiestáveis formados por cadeias de terliças de von Mises	Desenvolver protótipos físicos das treliças de von Mises acopladas para realizar testes laboratoriais que validem os modelos teóricos
BARBOSA (2023)	*Estudo da Estabilidade Dinâmica de Estruturas Reticuladas Planas Através dos Expoentes de Lyapunov, Considerando Não-linearidades Física e Geométrica pela Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos*	Estudar a estabilidade dinâmica considerando os expoentes de Lyapunov	Usar os expoentes em conjunto com métodos de inteligência artificial para diagnósticos automáticos de falhas
CASTRO et al. (2024)	*Nonlinear dynamics of elastically connected multistable structures*	Estudar a resposta estática e dinâmica não linear de comportamento de estruturas multiestáveis (podendo ser aplicado a várias áreas, como colapso progressivo)	Incorporar materiais viscoelásticos

Fonte: Autoria própria.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Tabela 4. Riscos e segurança no cálculo estrutural

Autor	Título	Objetivo	Expectativas
ORLANDO et al. (2017)	*Influence of the mechanics of escape on the instability of von Mises truss and its control*	Estudar as trajetórias de equilíbrio da treliça de Von Mises	Caracterização mais detalhada do comportamento caótico e controle de caos
KALA (2017)	*Stability of von-Misses truss with initial random imperfections*	Analisar o comportamento da treliça considerando a presença de imperfeições iniciais determinísticas e aleatórias	Incorporar imperfeições assimétricas, imperfeições no apoio, variações de rigidez ao longo dos elementos, e efeitos de montagem.
RAUNYR (2019)	*Análise Mecânica e Probabilística de Estruturas Treliçadas Sujeitas ao Colapso Progressivo*	Desenvolver um modelo numérico 17orna17-probabilístico capaz de analisar o comportamento e o colapso progressivo de treliças tridimensionais.	Aprimorar o modelo físico, cinemático e computacional para 17orna-lo mais comple-to e eficiente.

Fonte: Autoria própria.

Após a realização de toda a análise exploratória, foi possível delimitar temas mais específicos que orientaram o desenvolvimento desta monografia. Na sequência deste capítulo, apresentam-se as revisões bibliográficas detalhadas que mais impactaram esta pesquisa, as quais permitem compreender um panorama do objeto de estudo. Alguns tópicos, como a análise dinâmica, mostraram-se particularmente relevantes, motivando a inclusão de um capítulo dedicado aos modelos viscoelásticos. Outro eixo temático refere-se ao uso de técnicas automatizadas, que possibilitaram o desenvolvimento de um controlador computacional.

No desenvolvimento deste trabalho, empregou-se ferramentas de IA. Utilizou-se como recurso principal o ChatGPT, em suas versões 3.0 a 5.0. De forma complementar, recorreu-se ao Grook (versões 3.0 a 4.1) e ao Microsoft Copilot, aliado ao SmartGPT, especialmente para a otimização e depuração das rotinas computacionais.

Por fim, destaca-se que as tecnologias de inteligência artificial ainda se encontram em fase de intenso aprimoramento, podendo apresentar limitações ou erros significativos. Assim, os usuários são totalmente responsáveis pela verificação, validação e interpretação dos resultados obtidos por meio dessas ferramentas.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Análises exploratórias

A presente revisão bibliográfica tem como objetivo contextualizar os principais conceitos, métodos e avanços que fundamentam o desenvolvimento deste trabalho. Para isso, são apresentados estudos recentes que abordam desde análises exploratórias iniciais até técnicas avançadas relacionadas ao Método dos Elementos Finitos (MEF), bem como as ferramentas computacionais aplicadas à engenharia estrutural. O intuito é identificar as contribuições relevantes, compreender o estado da arte e destacar as lacunas que justificam as abordagens adotadas ao longo desta pesquisa.

2.1.1 Otimização Estrutural

No artigo de Zhang et al. (2025): **“Data-driven Design Of Well-behaved Nonlinear Structures: A Case Study On the von Mises Truss”,** tem-se como objetivo desenvolver uma estratégia computacional baseada em aprendizado de máquina (machine learning – ML) para o projeto inverso de estruturas não lineares que utilizam instabilidades elásticas de forma funcional, como a treliça de von Mises. Para isso, os autores criaram uma ferramenta computacional automatizada que integra geração e análise de modelos em elementos finitos via ABAQUS, controle de critérios de término da simulação e pós-processamento dos resultados. Essa ferramenta alimenta três tipos de modelos de ML: dois modelos diretos (*forward*) para prever ou classificar o caminho de equilíbrio não linear com base nas propriedades geométricas e mecânicas da estrutura, e um modelo inverso *(backward*) que estima as propriedades da estrutura a partir de um caminho de equilíbrio desejado. Entre as técnicas utilizadas estão redes neurais (MLP), K-vizinhos mais próximos (KNN), máquinas de vetores de suporte (SVM) e versões aprimoradas de XGBoost (como R-XGBoost), com otimização de hiperparâmetros por métodos como *grid search* e otimização bayesiana. Os resultados mostraram que os modelos baseados em XGBoost, especialmente o R-XGBoost, foram os mais precisos para prever pontos críticos e características dos caminhos de equilíbrio, mesmo em casos com comportamento *snap-back*. O modelo inverso também demonstrou boa precisão na reconstrução dos parâmetros estruturais, sendo validado em dois estudos de caso: um metamaterial dissipador de energia e um robô cápsula

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

vibratório. O trabalho mostra o potencial do uso de ML para acelerar e aprimorar o design de estruturas não lineares com funcionalidades específicas, minimizando a intervenção manual e os custos computacionais associados à análise tradicional. Como limitações, embora o framework automatize a análise com o uso do Abaqus, o próprio software não permite comutação automática de caminhos bifurcados ou análise robusta de ramificações simétricas/assimétricas. Assim, o framework atual não realiza mudança automática de caminho após bifurcação, sendo limitado a cenários sem bifurcações de ramificação. A detecção de possíveis bifurcações é feita apenas por monitoramento de autovalores negativos da matriz de rigidez tangente, sem garantir a transição para novos ramos de equilíbrio. Apesar do uso de técnicas avançadas (MLP, XGBoost, R-XGBoost), os modelos foram treinados exclusivamente para a geometria da treliça de von Mises, limitando a aplicação imediata a outras topologias ou sistemas estruturais. Casos com comportamento altamente assimétrico ou múltiplos estados de equilíbrio podem exigir reformulação ou retreinamento completo dos modelos. Além disso, a geração do grande conjunto de dados para treinar os modelos de ML ainda demanda elevado esforço computacional, especialmente para estruturas com comportamento altamente não linear e múltiplos parâmetros geométricos e mecânicos. Como expectativas, pode-se otimizar o processo de geração de dados para treinamento dos modelos, usando modelos reduzidos (ROM) ou modelos físicos simplificados, aplicando técnicas de *active learning* para priorizar simulações mais informativas. Como perspectivas futuras, pode-se explorar o uso de modelos generativos (como GAN's ou VAE's) para criar *designs* com comportamento não linear desejado e integrar a estrutura com otimizadores evolutivos ou bayesianos mais eficientes para alcançar soluções globais rapidamente.

2.1.2 Simulações de modelos

A tese de doutorado de Fernandes (2022): "**Análise Paramétrica Da Instabilidade De Estruturas Reticuladas Planas Esbeltas Com Comportamento Dinâmico Geometricamente Não Linear Pelo Método Posicional Dos Elementos Finitos"***,* tem como objetivo principal desenvolver uma metodologia para a análise da instabilidade dinâmica de estruturas reticuladas planas esbeltas com comportamento geometricamente não linear, utilizando a formulação posicional do Método dos

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Elementos Finitos (MEF). A abordagem é baseada na formulação Lagrangiana Total e considera a posição dos nós como variáveis fundamentais, permitindo descrever com precisão grandes deslocamentos e instabilidades como o snap-through dinâmico. Entre as principais técnicas empregadas, destacam-se: (primeiro) a avaliação da estabilidade dinâmica por meio da energia potencial total e análise da matriz Hessiana, (segundo) o cálculo de frequências naturais usando o método de Iteração por Subespaços Vetoriais, especialmente útil em sistemas com matrizes de massa singulares, (terceiro) a implementação e comparação de métodos de integração numérica no tempo (clássicos como Generalizado-α, HHT-α, WBZ-α e recentes como TSTSM e TPSM), e (ultimo) a análise do comportamento caótico com base nos expoentes de Lyapunov e nas seções de Poincaré. Os resultados demonstram que a formulação posicional aplicada ao MEF é robusta e precisa para capturar comportamentos complexos, inclusive em situações de instabilidade severa. Os algoritmos de integração mostraram boa estabilidade numérica, com destaque para o método Generalizado-α. Além disso, os algoritmos desenvolvidos para calcular os expoentes de Lyapunov se mostraram eficazes na detecção de caos em estruturas sob certas condições de carregamento. Como limitações, apesar de eficientes, os métodos de integração numérica podem apresentar acúmulo de erros ou instabilidades em simulações de longo prazo, especialmente em sistemas caóticos ou com alta sensibilidade a condições iniciais. Algumas das estratégias como o uso da matriz Hessiana e o cálculo dos expoentes de Lyapunov, podem demandar grande poder computacional, especialmente para modelos com muitos graus de liberdade, o que pode dificultar sua aplicação em larga escala. Como perspectivas futuras, pode-se realizar a análise da instabilidade e do comportamento caótico no monitoramento de integridade estrutural em tempo real, por meio de sensores e algoritmos de controle baseados nos expoentes de Lyapunov ou nos mapas de Poincaré. A metodologia pode ser integrada com técnicas de otimização estrutural (topológica ou paramétrica), permitindo projetar estruturas mais eficientes, resistentes e adaptativas a partir do controle do comportamento dinâmico. A tese abre caminho para a exploração aprofundada do caos em estruturas, possibilitando o mapeamento de zonas de sensibilidade e a aplicação de técnicas de controle do caos, com aplicações em estruturas inteligentes ou metamateriais.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

A dissertação de mestrado de Barbosa (2023): **“Estudo da Estabilidade Dinâmica de Estruturas Reticuladas Planas Através dos Expoentes de Lyapunov, Considerando Não Linearidades Física e Geométrica pela Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos”**, objetiva estudar a estabilidade dinâmica de estruturas reticuladas planas considerando não linearidades física e geométrica, utilizando a formulação posicional do MEF e os expoentes de Lyapunov como ferramenta de análise. Para isso, o autor modela o comportamento inelástico dos materiais com dois modelos constitutivos: o modelo de encruamento isotrópico multilinear e o modelo de dano dúctil isotrópico (FLHB). A solução das equações não lineares é obtida por meio da formulação posicional do MEF, onde as variáveis principais são as posições nodais. A integração temporal foi realizada pelos métodos de Newmark e Generalizado-α, e os expoentes de Lyapunov foram determinados por duas abordagens: o preditor não linear (baseado em séries temporais) e o espectro via autovalores da matriz jacobiana. Os resultados demonstraram a eficácia dos expoentes de Lyapunov na identificação de instabilidades e falhas estruturais, especialmente sob ações dinâmicas. Foi observado que o método do preditor não linear apresentou maior praticidade e sensibilidade, embora não forneça expoentes negativos. O trabalho conclui que os expoentes de Lyapunov são ferramentas promissoras para monitoramento de estruturas, contribuindo para uma análise mais precisa do comportamento instável, especialmente em estruturas esbeltas e suscetíveis a efeitos não lineares. Como limitações, não foram considerados outros comportamentos relevantes, como viscoelasticidade, fadiga, histerese ou anisotropia, que ocorrem em muitos materiais reais. O método do preditor não linear não identifica expoentes negativos, dificultando a caracterização completa da estabilidade. O cálculo via matriz jacobiana mostrou dificuldades em identificar algumas instabilidades, sendo sensível a perturbações e discretizações. A análise da estabilidade dinâmica foi feita com tempo de simulação restrito e em casos idealizados, o que pode não refletir a complexidade de situações reais de carregamento prolongado ou cíclico. Como perspectivas futuras, pode-se desenvolver técnicas para obter expoentes negativos com o preditor não linear. Usar os expoentes em conjunto com métodos de inteligência artificial para diagnósticos automáticos de falhas. Aplicar a metodologia em sistemas de

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

SHM (*Structural Health Monitoring*), com coleta de dados em tempo real de sensores instalados em pontes, torres, edifícios ou turbinas eólicas. Usar os dados obtidos com os expoentes de Lyapunov para treinar modelos de aprendizado de máquina, capazes de prever falhas estruturais ou responder a padrões de instabilidade complexos.

2.1.3 Riscos e segurança no cálculo estrutural

A tese de doutorado de Raunyr (2019): "**Análise Mecânica e Probabilística de Estruturas Treliçadas Sujeitas ao Colapso Progressivo**", apresenta uma contribuição científica abrangente voltada para a modelagem avançada, a análise numérica e a avaliação probabilística de estruturas treliçadas submetidas a danos acidentais e processos de colapso progressivo. O trabalho se destaca por integrar, em uma única estrutura analítica, fenômenos de não linearidade geométrica, não linearidade física, degradação por dano dúctil, plasticidade e técnicas de confiabilidade estrutural, resultando em um modelo robusto aplicável tanto a análises estáticas quanto dinâmicas. O objetivo principal da tese consiste no desenvolvimento e implementação computacional de uma formulação numérica baseada em uma descrição Lagrangeana total, no contexto do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), capaz de representar com precisão a trajetória de equilíbrio de treliças tridimensionais submetidas a grandes deslocamentos, grandes deformações e processos progressivos de falha estrutural. Essa formulação é posteriormente acoplada a métodos probabilísticos, especialmente a Simulação de Monte Carlo, a fim de avaliar incertezas associada à resistência dos materiais e às ações aplicadas, possibilitando a determinação da probabilidade de colapso do sistema estrutural. Dentro desse objetivo geral, a tese estabelece alguns objetivos específicos fundamentais: empregar a medida de deformação logarítmica para expressar o potencial da energia livre de Helmholtz diretamente em termos das posições nodais, elevando a consistência cinemática da formulação para níveis compatíveis com grandes deformações; desenvolver e propor um modelo abrangente de dano dúctil, fundamentado na evolução da porosidade do material e na coalescência de microcavidades e microfissuras, capaz de capturar de forma contínua e realista a degradação da rigidez e resistência; integrar o modelo mecânico ao método de Simulação de Monte Carlo, possibilitando a análise

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

probabilística de falhas locais e globais em treliças sob cenários de danos acidentais. Um dos elementos-chave da formulação é a adoção da deformação logarítmica, que se mostra superior às medidas convencionais de engenharia quando sujeitos a grandes deformações, pois garante consistência energética, evita singularidades relacionadas ao jacobiano e possibilita a decomposição multiplicativa das parcelas de deformação em componentes elástica, plástica e de dano. O modelo mecânico proposto incorpora dois fenômenos essenciais da não linearidade física: a plasticidade e a mecânica do dano contínuo. Para representar o comportamento pós-escoamento dos materiais, o autor utiliza o critério de plastificação de von Mises com encruamento isótropo, integrando-o numericamente através do algoritmo de mapeamento de retorno de Simo & Hughes (1997), reconhecido pela estabilidade e objetividade. Já a mecânica do dano contínuo é abordada com profundidade por meio do desenvolvimento de um modelo de dano dúctil inédito, cujas variáveis internas estão associadas ao crescimento da porosidade do material. Isso permite que a degradação da rigidez ocorra de forma contínua, garantindo que o módulo tangente nunca tenda a zero, evitando instabilidades numéricas típicas de modelos de dano convencionais. O potencial de energia livre de Helmholtz é formulado em termos da deformação logarítmica, da variável de dano e de um parâmetro de encruamento, gerando um modelo capaz de reproduzir com precisão curvas tensão–deformação de onze materiais distintos, incluindo aço, alumínio, cobre, madeira, concreto e UHPFRC (concreto de ultra alto desempenho com fibras). Para validação do modelo constitutivo, o autor emprega dados experimentais extensos desses materiais, ajustando automaticamente os parâmetros do modelo de dano através de algoritmos implementados em Fortran. Além das análises estáticas, a tese também contempla análises dinâmicas não lineares, utilizando métodos de integração direta, como o procedimento de Newmark. São incorporados efeitos de amortecimento, forças impulsivas, ações aperiódicas e excitações sísmicas reais, como os terremotos de Fukushima e El-Centro, o que demonstra a aplicabilidade da formulação a problemas de engenharia estrutural de alta complexidade. Estruturas como treliças 2D, torres metálicas, treliças 3D e sistemas com cabos são analisadas dinamicamente, revelando a capacidade do modelo de capturar efeitos como acúmulo de dano, redistribuição de esforços, instabilidades geométricas, falhas sequenciais e propagação de colapso ao

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

longo do tempo. Ainda mais, o acoplamento completo entre o modelo mecânico não linear e métodos de confiabilidade estrutural (modelo mecano-probabilístico), permitiu uma abordagem probabilística. Com isto, inclui-se inclui a Simulação de Monte Carlo (SMC), que constitui o método principal, permitindo avaliar probabilidades de falha mesmo em modelos altamente não lineares e não diferenciáveis. Também foi utilizado o método WASM (*Weighted Average Simulation Method*), como alternativa mais eficiente à SMC. O método FORM (*First Order Reliability Method*), foi empregado para comparação e validação das respostas probabilísticas. O autor formula critérios de falha locais (por barra) e globais (para a estrutura como um todo), considerando estados limites dependentes da trajetória de equilíbrio e das condições de contorno. Também são conduzidas análises probabilísticas dependentes do tempo, possibilitando avaliar a evolução da probabilidade de falha durante eventos transientes, como terremotos. A tese comprova que foi possível integrar análise estrutural estática não linear, dinâmica não linear e tratamento probabilístico das incertezas em um único modelo matemático coerente e funcional. Como limitações, apesar dos importantes avanços obtidos, o modelo de dano e plasticidade contém hipóteses simplificadoras como isotropia, o que limita sua validade para materiais com fratura direcional, não inclui acumulação de dano cíclico (fadiga), assume estado uniaxial para cada barra, o que descarta fenômenos como: flambagem local; cisalhamento; flexão acoplada ao dano. O autor também reconhece limitações no modelo geométrico, como a formulação de treliças perfeitamente articuladas, restringindo graus de liberdade. Embora o método tenha convergido bem, há limitações citadas quanto sensibilidade à matriz tangente quase singular, principalmente em estados avançados de dano, com possibilidade de perda de convergência em carregamentos dinâmicos severos, regimes de impacto, colapso extremamente localizado (*snap-back* acentuado). Como perspectivas futuras, pode-se aprofundar a formulação de hipóteses aplicadas ao modelo físico, estender a análise para elementos de casca e sólidos, modelos com ligações semi-rígidas. O autor também reconhece a necessidade de aprofundar o aspecto computacional. Isto poderia ser feito por meio de técnicas de paralelização (OpenMP, MPI ou GPU CUDA). Métodos de convergência mais avançados poderiam incorporar hessianas consistentes, controle de arco avançado (Crisfield, Riks), técnicas de estabilização para snap-through e snap-

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

back, algoritmos de predição-correção. Redução de ordem e meta-modelos poderiam acelerar o método de Monte Carlo, como o POD (*Proper Orthogonal Decomposition*), *surrogates* (*Kriging*, PCE) ou modelos reduzidos.

2.2 Resultado das Análises Exploratórias

A seguir são apresentadas, de forma sistematizada, os principais temas de pesquisa que delinearam este trabalho. Essa síntese permite compreender não apenas os pontos críticos observados, mas também as expectativas que emergem dessa avaliação, destacando oportunidades de aprimoramento e caminhos potenciais para aprofundamento da pesquisa.

Tabela 5. Resultados das análises exploratórias.

Objetivo	Limitação	Expectativa
Otimizar a resposta estrutural	Elevado custo computacional e dependência do método de solução	Obter um dimensionamento estrutural mais eficiente e com melhor relação rigidez–massa
Integração com métodos de Machine Learning	Complexidade das formulações e necessidade de grandes bases de dados	Aplicação de técnicas de dimensionamento inverso e modelos preditivos
Consideração de cargas inclinadas e imperfeições geométricas	Restrições impostas por formulações lineares e pela teoria elástica	Análise de colapso por instabilidade com modelos não lineares mais completos
Análise Dinâmica Não Linear de Estruturas	Elevado custo computacional e suscetibilidade a instabilidades numéricas	Aplicar os resultados às áreas de monitoramento estrutural e SHM (*Structural Health Monitoring*)
Multiestabilidade	Comportamentos dinâmicos complexos e sensíveis a imperfeições	Desenvolver protótipos laboratoriais para avaliar a aplicabilidade desses sistemas na engenharia civil

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Método Do Comprimento De Arco De Crisfield (*snap-back*)	Complexidade do método, incluindo possibilidade de raízes complexas e dificuldade de convergência	Desenvolver estratégias adaptativas de atualização dos parâmetros para aumentar a estabilidade

Fonte: autoria própria.

A partir das análises realizadas, desenvolveram-se modelos destinados a compreender as limitações identificadas na etapa exploratória. Assim, tanto formulações dinâmicas quanto algoritmos meta-heurísticos foram elaborados para tratar problemas recorrentes na engenharia civil.

Além disso, buscou-se estimar medidas de custo de desempenho computacional para as análises, considerando que cada modelo precisa ser executado repetidas vezes. Para viabilizar esse processo, foi necessário recorrer a solucionadores numéricos robustos, capazes de empregar métodos de processamento paralelizado e, assim, otimizar o tempo de simulação e o custo computacional.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Fundamento

3.1.1 Mecânica estrutural

Encontrar tensões, deslocamentos e reações em estruturas, especialmente as hiperestáticas, é o objetivo da análise estrutural, conforme Timoshenko (1993).

Os estudos sobre curvatura e resistência de vigas realizados por Jacob Bernoulli (1691-1705), em sua obra “A Arte da Conjectura” (1713), formaram um conceito essencial para a formulação dos métodos de energia. Em “*Opera Posthuma*” (1742), publicado após sua morte, escritos incluindo estudos fundamentais sobre curvatura de vigas e teoria da elasticidade são reunidos. A equação da linha elástica, que estabelece a relação entre a curvatura de uma viga e as forças aplicadas a ela, foi um dos temas inovadores desenvolvidos por Bernoulli. Esses estudos influenciaram diretamente a teoria da elasticidade e a instabilidade de colunas, formalizados por Leonhard Euler (1707-1873).

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

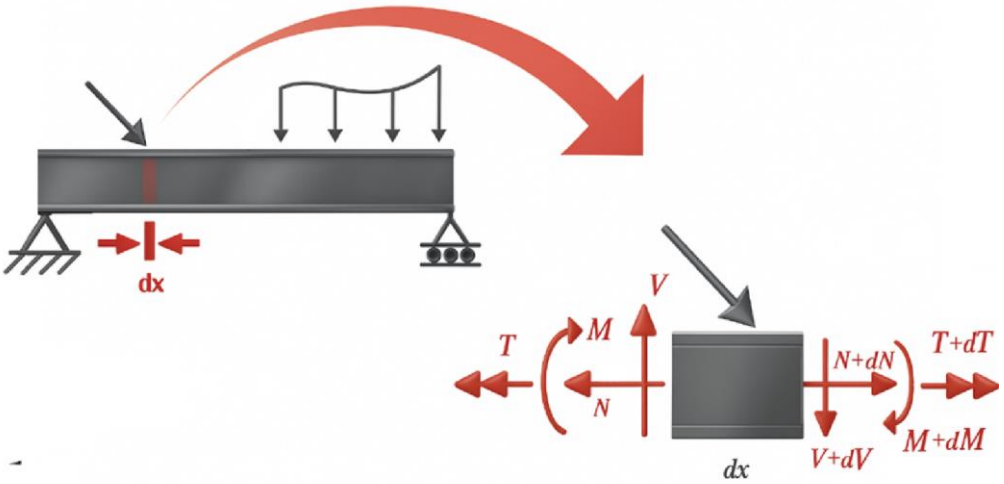
As bases teóricas dos cursos de Resistência dos Materiais fundamentam-se nos estudos de Bernoulli-Euler, associados aos métodos de cálculo estrutural. Com isto, as tensões resultantes nos corpos, por meio de equações constitutivas, foram relacionadas de forma quantitativa aos deslocamentos e deformações.

3.1.2 Abordagens energéticas

O *Princípio dos Trabalhos Virtuais* generalizou o conceito de trabalho e energia, ao formular a equação de equilíbrio estrutural com base na energia, conforme Joseph-Louis Lagrange (1750–1788) em *Mecânica Analítica* (1788).

A energia armazenada na estrutura, resultante das deformações internas, pode ser relacionada ao trabalho das forças externas. A seguinte estrutura hipotética da figura 2, mostra como isso ocorre.

Figura 2. Exemplo de viga genérica.



Fonte: Adaptado de Timoshenko (1993). Elaborado com IA.

Na figura 2, um elemento diferencial de comprimento dx é retirado da viga. Ao admitir uma deformação virtual (imaginária), adicional aos deslocamentos já existentes na viga em equilíbrio, cada partícula também será submetida a um deslocamento virtual e, consequentemente, tanto as forças externas quanto as internas realizarão trabalho virtual.

Para um elemento diferencial da estrutura, o trabalho virtual total dW_{total} realizado pelas forças quando ocorre um deslocamento virtual pode ser decomposto em duas partes:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$dW_{total} = dW_{\text{rígido}}^{corpo} + dW_{\text{elemento}}^{\text{deformação}} \quad \textbf{(3.1.1)}$$

Em que:

dW_{total}: Trabalho total realizado por todas as forças sobre o elemento dx.

$dW_{\text{rígido}}^{corpo}$: Trabalhado causado pelo deslocamento do elemento como corpo rígido (translação e rotação).

$dW_{\text{elemento}}^{\text{deformação}}$: Trabalho causado pela deformação do elemento dx.

A força resultante atuando sobre o elemento dx é nula. Logo, $dW_{\text{rígido}}^{corpo} = 0$ e o trabalho total se resume na deformação do elemento infinitesimal, uma vez que a viga está em equilíbrio estático.

$$dW_{total} = dW_{\text{elemento}}^{\text{deformação}} \quad \textbf{(3.1.2)}$$

Isto é, para analisar a viga em equilíbrio estático, somente interessa o que acontece durante a deformação dos elementos. Somando todos os elementos da estrutura:

$$\int dW_{total} = \int dW_{\text{elemento}}^{\text{deformação}} \quad \textbf{(3.1.3)}$$

As tensões resultantes também se anulam, uma vez que a face da direita de um elemento genérico estará em contato com a seguinte. Portanto, o trabalho total realizado por todas as forças sobre a viga será o trabalho das forças externas:

$$W_{total} = W_{\text{externas}}^{\text{forças}} \quad \textbf{(3.1.4)}$$

Em que:

$W_{\text{externas}}^{\text{forças}}$: trabalho virtual realizado pelas forças externas sobre a viga.

Resta, então, avaliar o termo a direita da equação **(3.1.3)**, o qual representa o trabalho associado a deformação na viga. Embora na deformação do elemento todas as forças deveriam ser avaliadas, ao aplicar um deslocamento virtual infinitesimal as forças externas já estariam equilibradas pelas tensões internas. Logo, quando um elemento se deforma, apenas as tensões resultantes realizam algum trabalho, segundo Timoshenko (1993):

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$W_{\text{elemento}}^{\text{deformação}} = W_{\text{internas}}^{\text{forças}} \quad \textbf{(3.1.5)}$$

$W_{\text{internas}}^{\text{forças}}$: Trabalho virtual realizado pelas tensões resultantes sobre a viga.

Portanto, chega-se ao princípio geral dos Trabalhos Virtuais:

$$W_{\text{externas}}^{\text{forças}} = W_{\text{internas}}^{\text{forças}} \quad \textbf{(3.1.6)}$$

O módulo de Young (E) utilizado na viga foi mencionado apenas neste parágrafo, ou seja, após a conclusão de toda a demonstração. Esse fato gerou grande interesse no estudo das propriedades não lineares dos materiais, uma vez que tal propriedade é irrelevante para a formulação do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

3.1.3 Energia e linearidade

O Teorema da Reciprocidade de Betti, ou Teorema de Betti, um princípio fundamental na mecânica dos sólidos, especialmente na análise estrutural e na resistência dos materiais, foi elaborado inicialmente por Enrico Betti (1823–1892) conhecido por suas contribuições à teoria da elasticidade.

Para compreender o Teorema da Reciprocidade de Betti, analisa-se o exemplo da viga anterior, porém com duas cargas concentradas:

Figura 3. Teorema de Betti.

Fonte: Adaptado de Timoshenko (1993). Elaborado com IA.

O trabalho virtual realizado sobre a estrutura, numa primeira análise, pela aplicação simultânea das forças F e P é:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$W = \left(\frac{1}{2}\right) F\left(\delta_{ff} + \delta_{fp}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) P\left(\delta_{pp} + \delta_{pf}\right) \quad \textbf{(3.1.7)}$$

Em que:

δ_{pf}: deslocamento no vínculo e direção de P causado pela força F.

δ_{fp}: deslocamento no vínculo e direção de F causado pela força P.

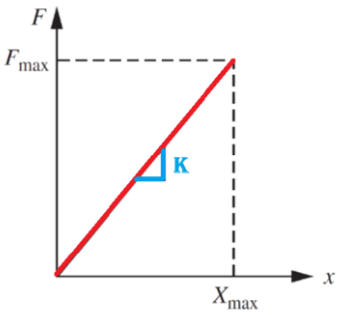
W: trabalho total realizados pelas forças concentradas (F e P).

Para uma segunda análise, considera-se a aplicação de uma carga e logo após, em sequência, a outra carga. Assim, aplicando-se primeiro a carga P, e após a carga F, tem-se que:

$$W = \left(\frac{1}{2}\right) F\left(\delta_{ff}\right) + P\left(\left(\frac{1}{2}\right) \delta_{pp} + \delta_{pf}\right) \quad \textbf{(3.1.8)}$$

É importante relembrar que ao se admitir a validade do princípio da superposição (regime linear-elástico) e o trabalho de uma força quase estática varia linearmente de zero até a carga final (no caso, de zero a $F_{\text{máx}}$), ilustrado de acordo com a figura 4:

Figura 4. Lei de Hooke para uma mola.



Fonte: Autoria própria.

Portanto seu trabalho nada mais é que a área de um triângulo (área do gráfico F por δ_{ff}). Já quando existe uma carga aplicada, o trabalho seria calculado como a área de um retângulo com base constate (força *P*) e comprimento com valor do deslocamento (δ_{pf}).

Como os trabalhos acima são iguais (equações **3.1.7** e **3.1.8**), tem-se que:

$$F\delta_{pf} = P\delta_{fp} \quad \textbf{(3.1.9)}$$

Em particular, se $F = P$:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$\delta_{pf} = \delta_{fp} \quad \textbf{(3.1.10)}$$

A coerência de outros métodos é frequentemente analisada pelo Teorema de Betti. Um destes, são equações do método das forças, desenvolvido com base no trabalho de James Maxwell (1831-1879) e Carlo Alberto Castigliano (1847-1884).

3.1.4 Método linear

Ao utilizar os conceitos de trabalho virtual, pode-se chegar no método das forças para resolver estruturas hiperestáticas.

Primeiro, escolhe-se, de forma arbitrária, as forças redundantes (incógnitas) para se aplicar nas equações de compatibilidade de deslocamentos. Frequentemente, escreve-se primeiramente a equação de equilíbrio estático e, em seguida, busca-se uma segunda equação que permita determinar a incógnita hiperestática. Nesse caso, desenvolve-se uma relação constitutiva adequada para impor a compatibilidade do sistema.

As equações da estática (introduzidas por Newton) são capazes de resolver inúmeras estruturas isostáticas. Mas, ao se analisar estruturas hiperestáticas, faz-se necessário introduzir algum tipo de equação para tornar o sistema de equações possível de ser determinado. Diante disso, as *equações constitutivas* relacionam as forças (tensões) aos deslocamentos (deformações), de acordo com Timoshenko (1993).

Por exemplo, no curso de Resistência dos Materiais, aprende-se que através da lei de Hook, há uma relação entre tensão e deformação:

$$\sigma = E\,\epsilon \quad \textbf{(3.1.11)}$$

A equação **(3.1.11)**, pode ser considerada uma equação constitutiva para se introduzir na equação de compatibilidade de uma estrutura hiperestática linear e elástica.

Para ilustrar o método, considera-se o pilar sofrido de vida útil com redução de capacidade resistente:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 5. Exemplo de pilarete.

Fonte: autoria própria (elaborado com IA).

Ao retirar a laje inferior (apoio inferior), percebe-se que a reação neste vínculo é redundante, uma vez que a estrutura permaneceria em equilíbrio (pelo menos, assim se esperaria). Além disso, apenas com as equações de equilíbrio da estática seria possível resolvê-la e a estrutura se tornaria isostática:

$$R_2 + W = 0 \quad \rightarrow \quad R_2 = -W \tag{3.1.12}$$

Em que:

R_2: Força de reação do apoio superior;

W: Força peso aplicado no centro de gravidade do pilar.

No entanto, com a presença da reação inferior X_1, o sistema passa a ser hiperestático de grau 1, pois é necessário introduzir uma equação adicional para determinar X_1:

$$R_2 - W + X_1 = 0 \tag{3.1.13}$$

Em que:

X_1: Força de reação do apoio inferior direcionada para cima.

Como já mencionado, pelo método das forças, é comum escrever primeiro a equação de equilíbrio da estática e, depois, procurar uma segunda equação adicional.

Assim, ao substituir a laje inferior por uma força genérica X_1, basta introduzir uma equação constitutiva de compatibilidade que relacione o deslocamento vertical do pilar — afinal, é necessário garantir que o pilar não caia.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Essa condição é obtida a partir do PTV, que estabelece que a soma dos trabalhos virtuais das forças externas (W_{ext}) e internas (W_{int}) deve ser nula:

$$W_{ext} = W_{int} \quad \textbf{(3.1.14)}$$

Pelo Teorema de Betti, o trabalho da força externa X_1 aplicada no vínculo redundante é energeticamente simétrico ao trabalho produzido pelas forças internas associadas a esse mesmo vínculo. Escolhendo o sistema real, com as forças W e X_1, e o sistema virtual, com uma força unitária aplicada no local do redundante X_1, a condição de compatibilidade pode ser escrita como:

$$-W\ \delta_{22} + X_1\ \delta_{21} = 1 \cdot \delta \quad \textbf{(3.1.15)}$$

O termo δ_{21} é calculado como deslocamento externo, mas representa — por simetria energética — o mesmo trabalho que ocorreria se a força atuasse dentro da estrutura, ou seja, o trabalho das tensões internas equivalentes.

Em que:

δ_{22}: deslocamento unitário no ponto 2 devido ao peso real W;

δ_{21}: deslocamento unitário no ponto 2 devido à forca redundante em X_1;

δ: é o deslocamento real no ponto do redundante (soma das contribuições).

Da Resistência dos Materiais:

$$\delta_{2W} = \frac{WL}{2EA} = W\ f_{22} \quad \textbf{(3.1.16)}$$

$$\delta_{2X_1} = \frac{X_1 L}{EA} = X_1\ f_{21} \quad \textbf{(3.1.17)}$$

Onde:

L: corresponde ao comprimento do pilar

f_{22} , f_{21}: são os coeficientes de flexibilidade.

δ_{2W}: deslocamento no ponto 2 devido ao peso real W;

δ_{2X_1}: deslocamento no ponto 2 devido à forca redundante em X_1.

O deslocamento real no ponto do vínculo é zero, $\delta = 0$. Logo, impondo-se a compatibilidade:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$-W\,\delta_{22} + X_1\,\delta_{21} = 0 \qquad \textbf{(3.1.18)}$$

Identificando $\delta_{22} = f_{22}$ e $\delta_{21} = f_{21}$, obtém-se a relação de flexibilidade do método das forças:

$$-W\,f_{22} + X_1\,f_{21} = 0 \qquad \textbf{(3.1.19)}$$

Portanto, f_{22} e f_{21} representam a superposição de duas parcelas de deslocamentos: a primeira corresponde ao deslocamento total causado pelo peso, e a segunda, ao deslocamento associado à força redundante X_1:

$$-\delta_{2W} + \delta_{2X_1} = 0 \qquad \textbf{(3.1.20)}$$

Da equação **(3.1.19),** segue diretamente:

$$X_1 = W\left(\frac{f_{22}}{f_{21}}\right) \qquad \textbf{(3.1.21)}$$

Substituindo **(3.1.21)** em **(3.1.13)**:

$$R_2 = W - W\left(\frac{f_{22}}{f_{21}}\right) = W\left(1 - \frac{f_{22}}{f_{21}}\right) \qquad \textbf{(3.1.22)}$$

Conclui-se, portanto, que o caminho das cargas — e, consequentemente, as reações — dependem da flexibilidade relativa. Para o caso analisado, $f_{22}/f_{21} = 1/2$, obtendo-se:

$$R_2 = X_1 = W/2 \qquad \textbf{(3.1.23)}$$

Os conceitos apresentados usaram o princípio da superposição a partir do teorema de Betti, por isso, são aplicáveis apenas a análises de estruturas que se encontram em fase elástica linear, de acordo com Timoshenko, 1993.

3.1.5 Abordagens não lineares

As propriedades do material da estrutura determinam a não linearidade material. Já a a geometria da estrutura, associado a alguma imperfeição que causa aumentos substâncias de esforços, tal como a causada por uma excentricidade num pilar, definem a não linearidade geométrica. Contudo, admite-se que os materiais apresentam fase elástica, independente da não-linearidade, segundo Timoshenko (1993).

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

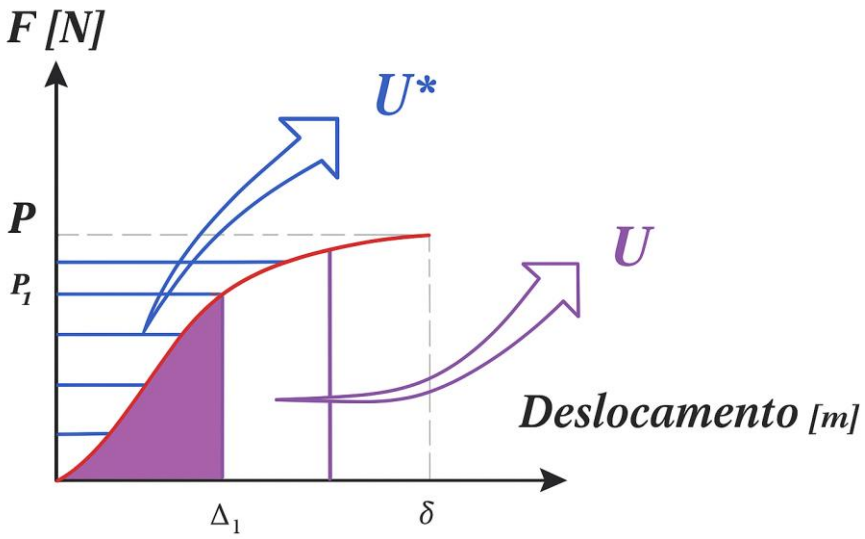
A energia de deformação pode ser obtida a partir do trabalho realizado por uma carga genérica P sobre um elemento, para um caso simples, como em uma barra prismática, como:

$$W = \int_0^{\delta} F dx \qquad \textbf{(3.1.24)}$$

Em que:

δ: deflexão máxima na barra.

Figura 6. Energia complementar.



Fonte: Autoria própria, adaptado de Timoshenko (1993).

O trabalho pode ser aproximado para o caso particular de deslocamento Δ_1, como:

$$W_1 = \int_0^{\Delta_1} F\, dx \approx \frac{P_1 . \Delta_1}{2} \qquad \textbf{(3.1.25)}$$

Todo o trabalho realizado pela carga se transforma em energia de deformação (U) quando se despreza as perdas de energias para o exterior — ou seja, considerando um sistema conservativo — assim como numa mola ideal:

$$|U| = W = \int_0^{\delta} F\, dx \qquad \textbf{(3.1.26)}$$

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

De forma análoga, a área delimitada pelo tracejado em azul defini o trabalho complementar, isto é:

$$W^* = \int_0^P x\, dF \tag{3.1.27}$$

A partir desta definição, observa-se que:

$$W^* + W = P \cdot \delta \tag{3.1.28}$$

O trabalho complementar corresponde à área adicional necessária para completar o retângulo de área $P \cdot \delta$. No caso linear, as duas áreas são iguais, pois a relação $F = k\,x$ é proporcional. Portanto, a não linearidade se manifesta na forma da relação funcional entre essas energias — isto é, quando W e W^* deixam de ser proporcionais entre si — refletindo a natureza não linear da relação entre força e deslocamento do sistema.

Ao longo da história, a compreensão das deformações em materiais submetidos a cargas externas tornou-se cada vez mais detalhada, culminando em abordagens baseadas nos princípios de energia de deformação.

Dentro desse contexto, ferramentas poderosas para análise estrutural ganharam destaque com os métodos energéticos. Dentre essas formulações, destaca-se o **Teorema de Castigliano**, que oferece uma abordagem eficiente para determinar deslocamentos e rotações em estruturas elásticas a partir da energia potencial armazenada.

Em um sistema em fase elástica, teoricamente, as cargas podem ser expressas em função do deslocamento e vice-versa:

$$F = F(x) \quad \text{ou} \quad x = x(F) \tag{3.1.29}$$

Então, a energia de deformação pode ser expressa em termos do deslocamento:

$$U = U(x) \tag{3.1.30}$$

Portanto, pode-se estipular um acréscimo de energia dado por:

$$dU = \left(\frac{dU}{dx}\right) dx \tag{3.1.31}$$

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

No entanto, o trabalho é igual a energia armazenada:

$$dW = dU = P(x) \cdot dx \quad \textbf{(3.1.32)}$$

Combinando as equações **(3.1.31)** e **(3.1.32)** acima, chega-se em:

$$P(x) = \frac{dU}{dx} \quad \textbf{(3.1.33)}$$

A equação ficou conhecida como primeiro Teorema de Castigliano, depois que o engenheiro italiano publicou em seu livro “Teoria do Equilíbrio dos Sistemas Elásticos" (1879). Em um contexto mais amplo de métodos baseados na energia potencial total do sistema, a abordagem energética de Castigliano se insere de forma fundamental.

3.1.6 Sofisticações associadas as abordagens energéticas

O trabalho realizado por todas as forças atuantes, ao se impor um deslocamento virtual da configuração atual para uma configuração de referência (adotada como a posição descarregada) define a energia potencial de um sistema mecânico.

A energia potencial das forças internas (U) é a energia de deformação armazenada. Já a energia potencial das forças externas é negativa, uma vez que ao deslocar as cargas, elas estarão apontando em sentido oposto ao deslocamento (δ) (TIMOSHENKO, 1993):

$$\Pi = U - P\,\delta \quad \textbf{(3.1.34)}$$

Em que:

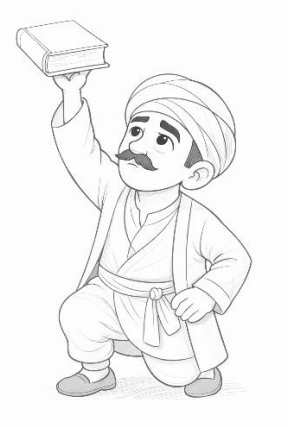
Π: energia potencial total do sistema;

P: carga externa.

Inspirado nos experimentos mentais consagrados por Erwin Schroedinger — físico laureado com o Prêmio Nobel — considera-se aqui a elevação de um livro sob força constante para analisar a energia potencial das forças externas. O problema, então, é explicado a partir de uma metáfora da figura de um sábio anônimo que um dia caminhou entre desertos e números, e mostrou que todo problema, quando bem-visto, se resolve com serenidade.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 7. O livro do calculista.



Fonte: autoria própria (Elaborado com IA).

O experimento mental consiste em levantar um livro para cima com força constante. Inicialmente, deduz-se que ao aplicar uma força igual à força peso do livro ($F = m_{livro}g$), o movimento ocorre em velocidade constante, sem aceleração. A intuição é confirmada pelo Teorema da Energia Cinética:

$$W_{total} = \Delta K \qquad \textbf{(3.1.35)}$$

Em que:

W_{total}: trabalho total realizado sobre o corpo (o livro);

ΔK: variação da energia cinética do livro.

A análise conceitual conduzida pelo aventureiro pode ser expressa da seguinte forma: se o livro se desloca para cima com velocidade constante, então $\Delta K = 0$. Consequentemente, pelo Teorema da Energia Cinética, tem-se $W_{\text{total}} = 0$.

- A força gravitacional F_g age para baixo;
- O calculista aplica uma força F_C para cima contra a gravidade;

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 8. Diagrama de corpo livre do livro.

Fonte: Autoria própria (elaborado com IA).

O trabalho total (W_{total}) realizado sobre o livro corresponde a soma do trabalho individual da força realizada pelo aventureiro (W_C) com o trabalho da força peso (W_g), exibidas conforme o diagrama de corpo livre (DCL).

$$W_{total} = W_C + W_g = F_C\,\Delta h - F_g\,\Delta h = 0 \qquad \textbf{(3.1.36)}$$

Onde:

Δh: variação entre as alturas final e inicial ($\Delta h > 0$).

Portanto, com o experimental mental acima, conclui-se que ao deixar o livro cair em queda livre, após erguê-lo, a variação da energia potencial gravitacional do livro (ΔU_g) seria igual ao trabalho realizado pelo aventureiro:

$$W_C = \Delta U_g = m_{livro}\; g\; \Delta h \qquad \textbf{(3.1.37)}$$

Onde:

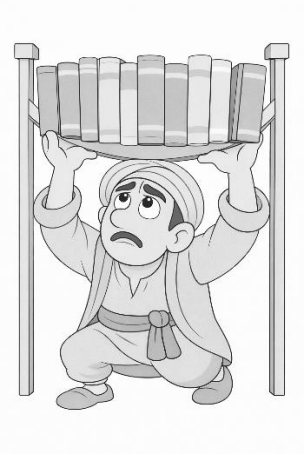
m_{livro}: é a massa do livro.

Logo, o trabalho realizado pelo sábio aventureiro é convertido em energia potencial gravitacional armazenada no livro.

Para expandir esse raciocínio ao contexto estrutural, realiza-se um experimento mental parecido, porém numa estante velha e fletida de uma biblioteca.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 9. O potencial das forças externas.



Fonte: Autoria própria (elaborado com IA).

O carregamento aplicado na estrutura seria o análogo da força gravitacional atuante no livro. Caso o sábio aventureiro for capaz de erguer a estrutura de forma quase-estática ($\Delta K = 0$), então, $W_{total} = 0$. Logo:

$$W_B = U_{ext} = F_C\, \Delta y \qquad \textbf{(3.1.38)}$$

Sendo:

Δy: a flecha (ou deslocamento) da estante;

U_{ext}: energia potencial associada às forças externas.

O trabalho realizado pelo Calculista é equivalente ao potencial das forças externas. Já o potencial das forças internas representa o esforço necessário para manter a estrutura em equilíbrio quase-estático. À medida que o Calculista reduz gradualmente sua força, as tensões internas passam a absorver o carregamento. Se a estrutura resistir, o equilíbrio estável é alcançado e o Calculista pode, enfim, cessar sua intervenção — numa analogia às reflexões de Schrödinger[2] (1935).

Como os potenciais das forças dependem da posição, tem-se que:

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{d[U(x)]}{dx} - \frac{d[(P\,x)]}{dx} \qquad \textbf{(3.1.39)}$$

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{dU}{dx} - P \qquad \textbf{(3.1.40)}$$

[2] Referência à discussão de Schrödinger sobre sistemas que, antes da observação, permanecem simultaneamente em estados potenciais distintos — ideia ilustrada de forma célebre pelo experimento mental do "gato de Schrödinger", formulado como crítica à interpretação de Copenhague da mecânica quântica (SCHRÖDINGER, 1935).

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Mas da equação **(3.1.33)**, em que $U'(x) = P$, concluí-se que:

$$\frac{d\Pi}{dx} = 0 \qquad \textbf{(3.1.41)}$$

Portanto, encontrando a energia potencial total do sistema, o problema se resume em encontrar candidatos a pontos extremantes desta função. Em particular, quando se encontra um mínimo, então, tem-se um equilíbrio estável.

Convém relembrar que a energia potencial total foi tomada em função de uma única carga concentrada aplicada. No entanto, o teorema é simples de ser generalizado para o caso de várias cargas aplicadas, admitindo tantos deslocamentos quanto se queira na estrutura (x_n), isto é:

$$\Pi = \Pi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1,} x_i, \dots, x_n) \qquad \textbf{(3.1.42)}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0} \qquad \textbf{(3.1.43)}$$

Como $i = 1, 2, \dots, n$, a equação **(3.1.43)** fornece "n" equações simultâneas para serem resolvidas. Em particular, quando a estrutura se comporta de maneira linear, o sistema de equações se iguala as equações do método das forças.

Vale notar a visão mais abrangente de equilíbrio estrutural, considerando não apenas a energia de deformação, mas também os efeitos da energia potencial associada às cargas externas, pelo método da energia potencial. Esse princípio, essencial na formulação de problemas estruturais, é amplamente utilizado na análise de estabilidade, dinâmica estrutural e formulações variacionais, como o Princípio de Mínima Energia Potencial.

3.1.7 Métodos variacionais

John William Strutt (1842–1919), engenheiro, herdou o título de nobreza britânico de sua família e foi nomeado 3º Barão de Rayleigh. Esse título, criado para a família Strutt no sistema de pares do Reino Unido, foi por ele recebido como terceiro sucessor, conforme registrado na *Oxford Dictionary of National Biography* (FALCONER, s.d.).

- O 1º Barão de Rayleigh foi John Strutt (1766–1823), seu avô.
- O 2º Barão de Rayleigh foi John James Strutt (1796–1873), seu pai.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Quando seu pai faleceu, John William Strutt herdou o título, tornando-se o 3º Barão de Rayleigh. Na nobreza britânica, títulos de barão são passados por herança, e é comum numerá-los para indicar a sucessão dentro da mesma família. Mesmo sendo um cientista brilhante, *Lord* Rayleigh manteve o título ao longo da vida. Em sua obra, “A Teoria do Som" (1877), o engenheiro britânico contribuiu para temas relacionados tanto a mecânica e a ótica quanto a teoria das vibrações.

Walther Ritz (1878-1909) foi um matemático e físico suíço. Morreu jovem, com 31 anos de idade apenas. No entanto, ainda assim, conseguiu obter o título de doutorado na Universidade de Göttingen (Alemanha). Ritz deduziu um procedimento numérico na mecânica conhecido como princípio variacional, um trabalho teórico que serviu como base para o método dos elementos finitos. Naquela época, publicou um artigo fundamental em 1909 intitulado:

"*Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations probleme der mathematischen Physik*" ("Sobre um novo método para a solução de certos problemas variacionais da física matemática").

Ritz formalizou um método variacional para aproximação de soluções de problemas diferenciais, expandindo e refinando ideias já utilizadas por *Lord* Rayleigh em seus estudos de vibração e mecânica estrutural, segundo Courant (1943). O método passou a ser chamado de método de Rayleigh-Ritz porque combina a abordagem intuitiva de *Lord* Rayleigh com a formulação matemática rigorosa de Ritz.

Na formulação variacional, o deslocamento do sistema é aproximado por uma função arbitrária (função “forma”) que satisfaça as condições de contorno essenciais. Essa função contém parâmetros desconhecidos e são determinados impondo a minimização da energia potencial total. Assim, evita-se resolver diretamente as equações diferenciais do problema, conforme Timoshenko (1993).

3.2 MEF na Engenharia Civil

3.2.1 Fundamento

Desde sua formulação inicial na década de 1950, o MEF tem evoluído significativamente, impulsionado pelo avanço dos computadores e pelo desenvolvimento de novos algoritmos e técnicas de discretização. Softwares especializados, como

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

ANSYS, ABAQUS e COMSOL Multiphysics, têm facilitado sua aplicação prática em projetos industriais e acadêmicos (BATHE, 2006).

O comportamento estrutural pode ser descrito com precisão por meio de equações diferenciais. Contudo, em muitas delas não é possível obter soluções exatas, sendo necessário recorrer a métodos numéricos aproximados, conforme Timoshenko (1993).

Teoricamente, para resolver uma estrutura, bastaria identificar, entre as funções admissíveis, aquela que estacionariza o funcional. Embora o problema possua uma abordagem inicialmente simples, a solução se torna desafiadora à medida que estruturas mais complexas são consideradas. Nesse contexto, introduz-se o Cálculo Variacional, que permite adotar hipóteses razoáveis e obter soluções aproximadas adequadas ao problema real.

O Cálculo Variacional utiliza a entidade funcional que é uma função de funções sob a forma de equação integral e que resulta em um número real quando essas funções são arbitradas (SORIANO, 2013):

$$\Pi(u) = \int_0^L F(u\,, u_{,x}\,, u_{,xx}\,, \dots, x)\, dx \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

Em que:

F: é uma função de $u(x)$, $u_{,x}(x)$, $u_{,xx}(x)$ (como deslocamentos, deformações, curvaturas etc.) e da variável independente x. No contexto da mecânica estrutural, geralmente representa uma densidade de energia, incluindo energia armazenada e trabalho das forças aplicadas;

$u = u(x)$: variável primária do problema (por exemplo, deslocamento);

Π: funcional associado a $u(x)$, como a energia potencial total da estrutura.

Definida a função de funções F, geralmente associada às equações diferenciais que caracterizam o problema, faz-se necessário impor as condições de contorno. Estas podem ser subdivididas em duas categorias, conforme Soriano (2013):

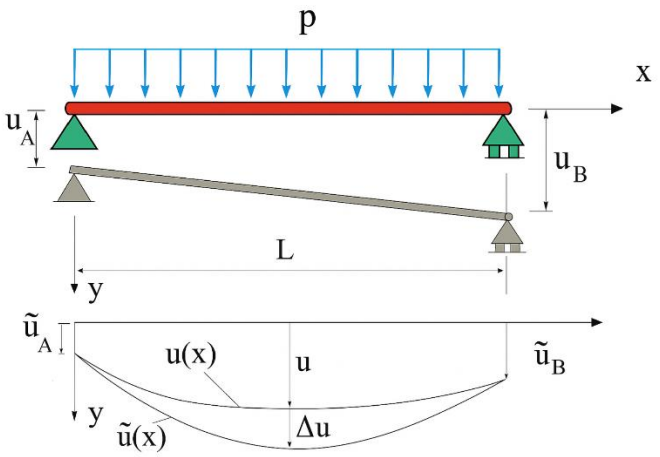
- **Condições essenciais de contorno (CEC)**: correspondem às restrições impostas aos deslocamentos da estrutura, como no caso de uma viga simplesmente apoiada (caso $u_A(x) = 0$ — como deslocamento vertical nulo nos apoios — diz CEC *homogênea*). Tais condições delimitam o conjunto das funções admissíveis.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

- **Condições não essenciais de contorno**: expressam condições mecânicas no contorno, como o momento fletor nulo nas extremidades de uma viga simplesmente apoiada.

Inicialmente, adota-se $\tilde{u}(x)$, uma função admissível "próxima" de $u(x)$, como ilustra a figura 10:

Figura 10. Deslocamento de uma viga biapoiada.



Fonte: adaptado de Soriano (2013). Elaborado com IA.

As CEC são: $u_{x=0} = \tilde{u}_A$ e $u_{x=L} = \tilde{u}_B$. Já os incrementos da função $u(x)$, são:

$$\Delta u = \tilde{u} - u \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

E os incrementos de suas derivadas:

$$\Delta u_{,x} = \tilde{u}_{,x} - u_{,x} \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

$$\Delta u_{,xx} = \tilde{u}_{,xx} - u_{,xx} \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

...

$$\Delta u_{,\mathrm{x(n)}} = \tilde{u}_{,\mathrm{x(n)}} - u_{,\mathrm{x(n)}} \qquad \textbf{(3.2.5)}$$

Onde (n) representa a máxima ordem de derivada que ocorre no funcional Π.

De acordo com Soriano (2013):

> *"...e quando esses incrementos se tornam tão pequenos quantos se queiram, são denominadas variações da função admissível e de suas derivadas, e são denotados por δu, $\delta u_{,x}$, $\delta u_{,xx}$, ..."*

Em que:

δ : é o operador de variação;

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$(u + \delta u)$: é uma função admissível infinitamente próxima da função u;

δu: é a primeira variação dessa função.

O incremento do funcional $(\Delta\Pi)$ para cada conjunto dessas variações é, conforme Soriano (2013):

$$\Delta\Pi(u) = \delta\Pi(u) + \frac{1}{2!}\delta^2\Pi(u) + \frac{1}{3!}\delta^3\Pi(u) + \cdots + \frac{1}{n!}\delta^n\Pi(u) \quad \textbf{(3.2.6)}$$

Onde:

$\delta\Pi(u)$: é a primeira variação do funcional e;

$\delta^n\Pi(u)$: é a variação de ordem (n) desse funcional.

Pelo Lema do cálculo variacional:

$$\delta\left(u(x_i)_{,x_i}\right) = (\delta u(x_i))_{,x_i} \quad \textbf{(3.2.7)}$$

Logo:

$$\delta\Pi(u) = \int_{x_0}^{x_1} \delta F(u\,, u_{,x}\,, u_{,xx}\,, \ldots, x)dx \quad \textbf{(3.2.8)}$$

Em analogia com a expansão de Taylor, reescreve-se **(3.2.8)** sob a forma:

$$\delta\Pi(u) = \int_{x_0}^{x_1} (\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u_{,x}}\delta u_{,x} + \frac{\partial F}{\partial u_{,xx}}\delta u_{,xx} + \cdots)dx \quad \textbf{(3.2.9)}$$

É importante notar que não se define variação da variável independente x. A condição de estacionariedade requer que seja nula a primeira variação do funcional $\Pi(u)$:

$$\delta\Pi(u) = 0 \quad \textbf{(3.2.10)}$$

Em analogia com a segunda derivada de uma função de segundo grau, parabólica, $y = ax^2 + bx + c$ (se $a > 0$, concavidade para cima) a segunda variação de um funcional pode ser maior ou menor que zero e indica, respectivamente, condição de mínimo (equilíbrio estável) ou máximo. Já para o caso nulo, tem-se um caso indefinido, que pode ou não indicar uma mudança de concavidade ou inflexão do funcional.

$$\delta^2\Pi(u) = 0 \quad \textbf{(3.2.11)}$$

3.2.2 Método de Rayleigh-Ritz

Para o caso de uma única variável dependente primária, arbitra-se a solução propositiva a seguir, conforme Soriano (2013):

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$u(x_i) \approx \tilde{u}(x_i) = \psi_o(x_j) + \sum_{j=1}^{j'} \alpha_j \, \psi_j(x_i) = \psi_o(x_j) + \boldsymbol{\Psi}\,\boldsymbol{\alpha} \qquad \textbf{(3.2.12)}$$

Onde:

ψ_o: função que respeita às formas não homogêneas das CEC;

ψ_j: funções de base que respeitam às formas homogêneas das CEC;

$\boldsymbol{\Psi}$: matriz formada a partir das funções de base;

α_j: graus de liberdade ou coeficientes de Ritz e que formam o vetor $\boldsymbol{\alpha}$.

Os coeficientes de Ritz correspondem aos parâmetros generalizados a serem determinados. Para a viga simplesmente biapoiada, por exemplo, pode-se representar a solução propositiva por meio da forma polinomial:

$$u = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^4 + \cdots + \alpha_{j'} x^{(j'+1)} = \boldsymbol{\Psi}\,\boldsymbol{\alpha} \qquad \textbf{(3.2.13)}$$

A equação **(3.2.13)** respeita às CEC *homogêneas* no apoio, $u_{|x=0} = 0$ e $u_{|x=L} = 0$, e as funções $\psi_1 = x^2$, $\psi_2 = x^3$, ..., $\psi_{j'} = x^{(j'+1)}$ são linearmente independentes.

Com a substituição da solução propositiva **(3.2.13)** no funcional, obtém-se a sua transformação em função dos parâmetros generalizados, $\Pi(u) \approx \Pi(\tilde{u}) = \Pi(\alpha_j)$. Então, utiliza-se a condição de estacionariedade do funcional:

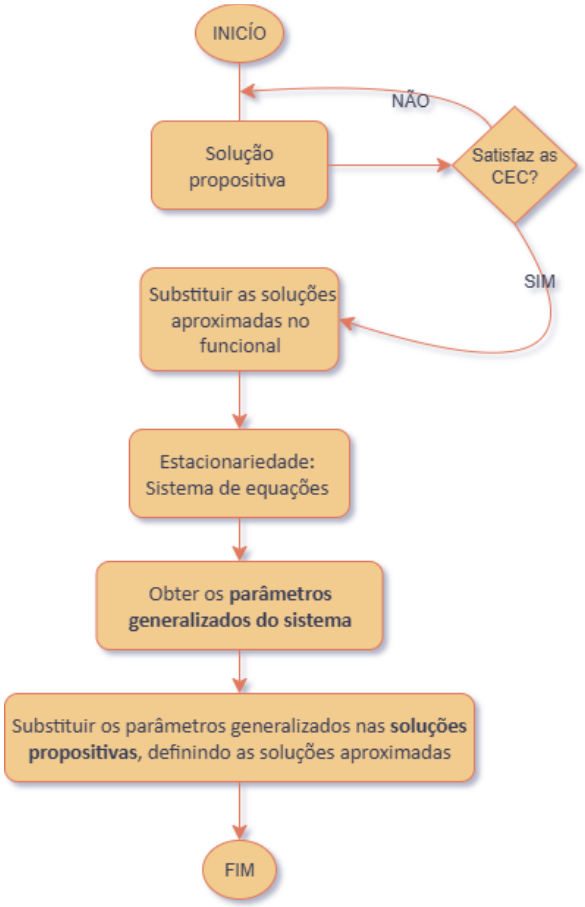
$$\frac{\partial \Pi(\tilde{u})}{\partial \alpha_j} = 0, \qquad para\ j = 1,2,\dots,n \qquad \textbf{(3.2.14)}$$

Este sistema de equações (algébricas) fornece os parâmetros generalizados α_j, que podem ser substituídos na solução propositiva, definindo a solução aproximada para o problema real formulado.

Em resumo, o Método de Rayleigh-Ritz segue o fluxograma da figura 11:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 11. Fluxograma do método de Ritz.



Fonte: Autoria própria (elaborado com *draw.io*).

3.2.3 Definição da Matriz de Rigidez

Para um elemento, a Matriz de Rigidez $\boldsymbol{H}^{(e)}$ é uma matriz tal que:

$$\boldsymbol{H}^{(e)}\boldsymbol{\phi}^{(e)} = \boldsymbol{f}^{(e)} \quad \textbf{(3.2.15)}$$

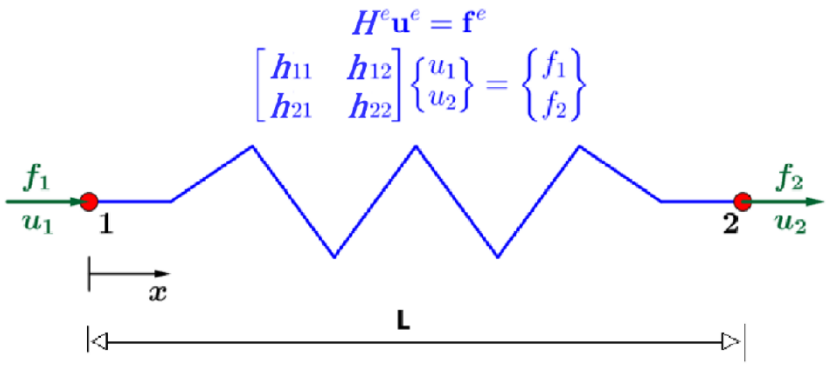
Em que $\boldsymbol{H}^{(e)}$ relaciona os deslocamentos nodais do elemento $u_i^{(e)}$ com as forças nodais no elemento $f_i^{(e)}$. Já para uma estrutura, com um conjunto de elementos, a Matriz de Rigidez Global, $\boldsymbol{H}$, relaciona o vetor de deslocamentos nodais $\boldsymbol{\phi}$ com o vetor de forças nodais $\boldsymbol{f}$ de toda a estrutura, de forma que:

$$\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{f} \quad \textbf{(3.2.16)}$$

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Os termos da matriz de rigidez global, h_{ij}, expressam uma relação de efeito e causa. Isto é, representa a força (efeito) necessária em "i" para produzir um deslocamento (causa) unitário em j.

Figura 12. Elemento de mola.



Fonte: adaptado de Santos (2022).

A soma da Energia Potencial das Forças Internas (U_{int}) com a Energia Potencial das Forças Externas U_{ext} define a Energia Potencial Total do sistema. A Energia Interna de Deformação, U_{int}, representa a capacidade das forças internas (tensões) realizarem trabalho ao longo das deformações. A Energia Potencial das Forças Externas, U_{ext}, é a capacidade de forças tais como, forças de corpo, trações superficiais e forças nodais realizarem trabalho ao longo da deformação da estrutura, conforme Santos (2022).

O trabalho interno (W_{int}) realizado (figura 4) é dado como a área abaixo da curva da força interna (F) com a deformação (u):

$$W_{int} = \int_0^u \left(\frac{F_{máx}}{u_{máx}}\right) u \, du = \frac{k\, u^2}{2} \qquad \textbf{(3.2.17)}$$

O trabalho realizado pelas forças externas (f) é baseado no quanto de energia é convertida pela energia potencial externa:

$$\delta W_{ext} = \delta U_{ext} = f_1 \, \delta u_1 + f_2 \, \delta u_2 \qquad \textbf{(3.2.18)}$$

Pelo PTV, tem-se que:

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} \qquad \textbf{(3.2.19)}$$

Logo:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$\delta W_{int} - \delta W_{ext} = k\, u\, \delta u - (f_1\, \delta u_1 + f_2\, \delta u_2) \quad \textbf{(3.2.20)}$$

Então, tem-se que:

$$\delta\left(\frac{k\, u^2}{2} - f_1\, u_1 - f_2\, u_2\right) = 0 \quad \textbf{(3.2.21)}$$

A partir da condição de estacionariedade de um funcional $\Pi(u)$, tem-se que:

$$\delta\Pi = 0 \quad \textbf{(3.2.22)}$$

Como $u = u_2 - u_1$, chega-se em:

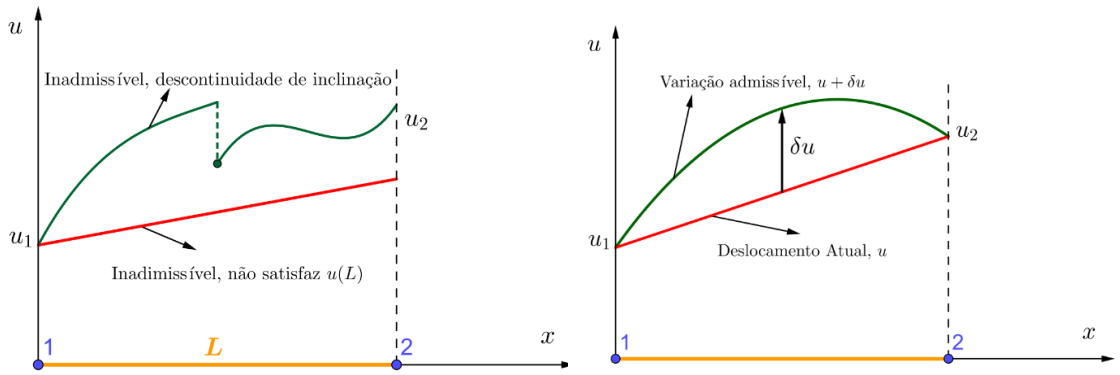
$$\Pi = \frac{k\,(u_2 - u_1)^2}{2} - f_2 u_2 - f_1\, u_1 \quad \textbf{(3.2.23)}$$

Assim, define-se para o caso da mola uma variação arbitrária do funcional:

$$\delta\Pi = \frac{\delta\Pi}{\delta u_1}\delta u_1 + \frac{\delta\Pi}{\delta u_2}\delta u_2 \quad \textbf{(3.2.24)}$$

O princípio da mínima energia potencial dita que o equilíbrio da estrutura é alcançado quando u definir uma estrutura tal que $\delta\Pi = 0$, para qualquer variação admissível no deslocamento δu_i a partir do estado de equilíbrio. Uma variação admissível é aquela na qual o campo de deslocamentos satisfaz as condições de contorno e a continuidade entre os elementos (SANTOS, 2022).

Figura 13. Admissibilidade da solução propositiva.



Fonte: SANTOS (2022).

A figura 13 da esquerda mostra um tipo de campo de deslocamento $u(x)$ que não pode ser usado com a variação admissível δu. A curva verde tem um salto na derivada, onde o campo de deslocamentos não é contínuo entre o elemento. Portanto é inadmissível, porque viola a continuidade cinemática da estrutura. A linha vermelha não chega no valor u_2 no nó 2 e não respeita a condição de contorno ou deslocamento

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

imposto no nó 2. Já na figura 13 da direita, a variação δu se anula nos nós com deslocamento prescrito, $\delta u(1) = 0\ e\ \delta u(2) = 0$. Esse detalhe sutil permite compreender que o deslocamento de equilíbrio é aquele para o qual qualquer perturbação admissível não contribui para o termo linear da energia potencial, de modo que a variação resultante é dominada pelo termo quadrático.

Como o elemento mola tem 2 deslocamentos nodais pontuais, adota-se um polinômio de grau 1 para a solução propositiva:

$$\boldsymbol{\phi}^{(e)} = \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\phi_{|x=x_1}\\ \phi_{|x=x_2}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Psi_0}\ \boldsymbol{\alpha} \qquad \textbf{(3.2.25)}$$

Onde $\boldsymbol{\phi}^{(e)}$ são os deslocamentos aproximados do elemento mola. E dessa equação, obtém-se os parâmetros generalizados:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Psi_0^{-1}}\ \boldsymbol{\phi}^{(e)} = \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{bmatrix}x_2 & -x_1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{bmatrix}\boldsymbol{\phi}^{(e)} \qquad \textbf{(3.2.26)}$$

Logo, chega-se à solução propositiva por meio da interpolação dos deslocamentos nodais:

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\Psi}\ \boldsymbol{\Psi_0^{-1}}\ \boldsymbol{\phi}^{(e)} \rightarrow\ \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix}\frac{x_2 - x}{L} & \frac{x - x_1}{L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}N_1 & N_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix} = \boldsymbol{N}\ \boldsymbol{\phi}^{(e)} \qquad \textbf{(3.2.27)}$$

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{L} \qquad \textbf{(3.2.28)}$$

$$N_2 = \frac{x - x_1}{L} \qquad \textbf{(3.2.29)}$$

As funções N_1 e N_2 são as funções de forma (*shape functions)* e dependem das coordenadas dos pontos nodais. O campo da equação anterior tem a derivada:

$$\boldsymbol{\phi}_{,x} = \boldsymbol{N}_{,x}\ \boldsymbol{\phi}^{(e)} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix} = \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{\phi}^{(e)} \qquad \textbf{(3.2.30)}$$

A equação **(3.2.30)** representa um campo constante em todo o elemento, onde:

$$\boldsymbol{N}_{,x} = \boldsymbol{B} \qquad \textbf{(3.2.31)}$$

A constante elástica da mola ("k" com unidade $[N/m]$) definida para a lei $F = k\ u$, representa uma rigidez discreta (concentrada). Em modelagem de estruturas, de acordo com a formulação do MEF para elementos contínuos, pode-se definir um coeficiente distribuído para simular o elemento mola. Quando a rigidez "k" é distribuída ao longo de um domínio de comprimento L, obtém-se o coeficiente contínuo:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$k_c = k\,L \rightarrow \quad [k_c] = \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right] \cdot\ [\mathrm{m}] = [\mathrm{N}] \qquad \textbf{(3.2.32)}$$

Onde:

k_c: é a rigidez distribuída integrada ao longo do elemento.

Portanto, para representar a energia de uma mola através de um funcional contínuo, é necessário distinguir a rigidez concentrada "k", associada à lei constitutiva discreta $F = k(u_2 - u_1)$, do coeficiente distribuído que aparece na formulação integral. Com isto, a partir de **(3.2.23)** o funcional energético no formato integral toma a forma:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} k_c\, u_{,x}^2\, dx - f_1\, u_1 - f_2\, u_2 \qquad \textbf{(3.2.33)}$$

De onde se obtém:

$$\delta\Pi(u) = \int_{x_0}^{x_1} (\delta u_{,x}\, k_c\, u_{,x})\, dx - f_1\, \delta u_1 - f_2\, \delta u_2 \qquad \textbf{(3.2.34)}$$

E com a substituição do campo de deslocamentos proposto e de sua primeira derivada, na equação **(3.2.34**) que representa uma variação arbitrária do funcional Π, obtém-se:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{\delta\phi}^{(e)}\right) k_c\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{\phi}^{(e)})\, dx - f_1\left(\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{\delta\phi}^{(e)}\right)_{|x=x_1} + f_2\left(\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{\delta\phi}^{(e)}\right)_{|x=x_2} = 0 \qquad \textbf{(3.2.35)}$$

$$\boldsymbol{\delta\phi}^{(e)^T}\int_{x_1}^{x_2}(\boldsymbol{B}^T\, k_c\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{\phi}^{(e)})\, dx - \boldsymbol{\delta u}^{(e)^T}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} f_1 + \boldsymbol{\delta u}^{(e)^T} f_2\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} = 0 \qquad \textbf{(3.2.36)}$$

$$\boldsymbol{\delta\phi}^{(e)^T}\left(\int_{x_1}^{x_2}(\boldsymbol{B}^T\, k_c\,(\boldsymbol{B\phi}^{(e)})\, dx - \begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} f_1 + f_2\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right) = 0 \qquad \textbf{(3.2.37)}$$

Como as variações $\boldsymbol{\delta\phi}$ são arbitrarias, obtém-se o sistema de equações algébricas:

$$\left(\int_{x_1}^{x_2}(\boldsymbol{B}^T k_c\,\boldsymbol{B}\, dx\right)\boldsymbol{\phi}^{(e)} = \begin{Bmatrix}f_1\\f_2\end{Bmatrix} \qquad \textbf{(3.2.38)}$$

Finalmente, a matriz de rigidez é determinada a partir da substituição das funções de forma ($N_1\ e\ N_2$), de acordo a seguir**:**

$$\boldsymbol{H}^{(e)} = \int_{x_1}^{x_2}(\boldsymbol{B}^T k_c\,\boldsymbol{B})\, dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\begin{Bmatrix}\frac{-1}{L}\\ \frac{1}{L}\end{Bmatrix} k_c \begin{bmatrix}\frac{-1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\right) dx \rightarrow \boldsymbol{H}^{(e)} = k_c\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.2.39)}$$

O procedimento anterior foi apresentado para ilustrar a aplicação do método de Rayleigh–Ritz. Entretanto, a matriz de rigidez obtida pode ser deduzida de forma mais

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

direta simplesmente pela estática do sistema discreto. Considerando que a mola aplica forças iguais e opostas nos dois nós, tem-se:

$$\begin{cases} f_{1x} = -k\,(u_2 - u_1) = k\,(u_1 - u_2) \\ f_{2x} = k(u_2 - u_1) = k\,(-u_1 + u_2) \end{cases} \quad \textbf{(3.2.40)}$$

Onde:

$f_{1x} = f_{2x} = T$, Sendo T a tração na mola.

Portanto, para o elemento de mola, conclui-se que a matriz de rigidez deste elemento ($\boldsymbol{H}^{(e)}_{\boldsymbol{mola}}$) pode ser dada por:

$$\boldsymbol{H}^{(e)}_{\boldsymbol{mola}} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2.41)}$$

Para a formulação do elemento de barras, o procedimento pouco diverge do explicado acima. Diferentemente da mola, possuem área transversal A, e sua resposta mecânica segue a Lei de Hooke uniaxial ($\sigma = E\,\varepsilon$). Seguindo procedimento análogo ao adotada para a mola, pode-se obter a matriz de rigidez do elemento de barra:

$$\boldsymbol{H}^{(e)}_{\boldsymbol{barra}} = k_{barra} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{EA}{L}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.2.42)}$$

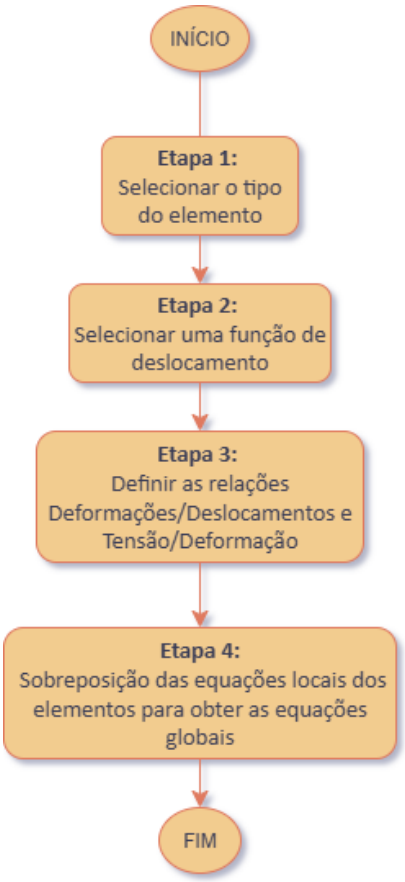
Portanto, a matriz do elemento barra possui exatamente a mesma estrutura da matriz do elemento mola, bastando substituir a rigidez discreta k pela rigidez axial equivalente. Assim, para que o elemento barra se comporte como um elemento mola, basta definir:

$$k_c = EA \quad \textbf{(3.2.43)}$$

Com isto, a rigidez distribuída k_c corresponde fisicamente à rigidez axial do material ao longo do elemento. Em resumo, o procedimento para a formação inicial do MEF segue o fluxograma da figura 14.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 14. Montagem inicial do MEF.



Fonte: autoria própria.

Caso os eixos locais não coincidam com os eixos globais, deve-se ficar atento que é necessário transformar todas as matrizes de rigidez locais $\boldsymbol{H}^{(e)}$ para o sistema de coordenadas globais antes da montagem da matriz global.

3.2.4 Solução numérica: o método de Newton-Raphson

O sistema de equações simultâneas resultante do MEF é do tipo:

$$\boldsymbol{H\phi} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \qquad \textbf{(3.2.44)}$$

Em que:

$\boldsymbol{\phi}$: vetor de deslocamentos;

$\boldsymbol{f}$: vetor de cargas aplicadas;

$\boldsymbol{H}$: matriz de rigidez do sistema.

Contudo, o problema se torna não linear se o coeficiente da matriz $\boldsymbol{H}$ depende dos deslocamentos, isto é $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi})$, ou de suas derivadas, pois à medida que um

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

incremento de carga impõe um deslocamento, este, por sua vez, impõe uma nova matriz de rigidez, segundo Owen (1980).

O método de Newton consiste em se tomar um modelo local linear da função $f(x)$ em tomo x_k (a reta tangente à função em x_k), no caso de uma equação não linear a uma variável, de acordo com Ruggiero (2000).

Um sistema de forças residuais pode ser introduzido para caso de um sistema de equações não lineares sobre a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{H\phi} - \boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{0} \tag{3.2.45}$$

Como $\boldsymbol{H}$ é função de $\boldsymbol{\phi}$ e possivelmente de suas derivadas, então o vetor de resíduos também será função de $\boldsymbol{\phi}$**,** isto é, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\phi})$.

Então, a função não linear, terá a seguinte estrutura:

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \quad \dots \quad \psi_n]^T \tag{3.2.46}$$

O objetivo é encontrar as soluções para:

$$\begin{cases} \psi_1(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = 0 \\ \psi_2(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = 0 \\ \dots \\ \psi_n(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = 0 \end{cases} \tag{3.2.47}$$

O vetor das derivadas parciais da função $\psi_i(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ é denominado vetor gradiente de ψ_i e é denotado por $\nabla\psi_i(\phi),\ i = 1, \dots, n$:

$$\boldsymbol{\nabla\psi_i}(\boldsymbol{\phi}) = \left[\frac{\partial\psi_i(\phi)}{\partial\phi_1} \quad \frac{\partial\psi_i(\phi)}{\partial\phi_2} \quad \dots \quad \frac{\partial\psi_i(\phi)}{\partial\phi_n}\right]^T \tag{3.2.48}$$

A matriz das derivadas parciais de $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\phi})$ é chamada matriz Jacobiana e é denotada por $J(\boldsymbol{\phi})$:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nabla\psi_1^T} \\ \boldsymbol{\nabla\psi_2^T} \\ \dots \\ \boldsymbol{\nabla\psi_n^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1(\phi)}{\partial\phi_1} & \frac{\partial\psi_1(\phi)}{\partial\phi_2} & \dots & \frac{\partial\psi_1(\phi)}{\partial\phi_n} \\ \frac{\partial\psi_2(\phi)}{\partial\phi_1} & \frac{\partial\psi_2(\phi)}{\partial\phi_2} & \dots & \frac{\partial\psi_2(\phi)}{\partial\phi_n} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial\psi_n(\phi)}{\partial\phi_1} & \frac{\partial\psi_n(\phi)}{\partial\phi_2} & \dots & \frac{\partial\psi_n(\phi)}{\partial\phi_n} \end{bmatrix} \tag{3.2.49}$$

Os métodos para resolução de sistemas não lineares são iterativos, isto é, a partir de um ponto inicial $\boldsymbol{\phi}^{(0)}$, geram uma sequência $\boldsymbol{\phi}^{(k)}$ de vetores e, na situação de convergência (OWEN, 1980):

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\phi}^{(k)} = \boldsymbol{\phi}^{*} \qquad \textbf{(3.2.50)}$$

Onde $\boldsymbol{\phi}^{*}$ é uma das soluções do sistema não linear.

Em qualquer método iterativo, é preciso estabelecer critérios de parada para se aceitar um ponto $\boldsymbol{\phi}^{(k)}$ como aproximação para a solução exata $\boldsymbol{\phi}^{*}$ ou para se detectar a divergência do processo. Como $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\phi}^{(k)})$ representa um vetor, verifica-se que $\|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\phi}^{(k)})\| < \epsilon$, onde a norma do vetor deve ser menor que uma dada tolerancia ϵ, de acordo Owen (1980).

Para se construir um modelo local linear para o caso de um sistema de equações não lineares, teremos: conhecida a aproximação $\boldsymbol{\phi}^{(r)}$ pertencente ao dominio, qualquer que seja $\boldsymbol{\phi}$, existe um $\boldsymbol{c_i}$, tal que (RUGGIERO, 2000):

$$\psi_i(\phi) = \psi_i(\phi^{(r)}) + \boldsymbol{\nabla\psi_i}(\boldsymbol{c_i})^{T}(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}^{(r)}) \qquad \textbf{(3.2.51)}$$

Aproximando $\boldsymbol{\nabla\psi_i}(\boldsymbol{c_i})$ por $\boldsymbol{\nabla\psi_i}(\boldsymbol{\phi}^{(r)})$, com $i = 1,\dots,n$, obtem-se um modelo local linear para $\psi_i(x)$ em tomo de $\boldsymbol{\phi}^{(r)}$:

$$\psi_i(x) \cong \psi_i(x^{(r)}) + \boldsymbol{\nabla\psi_i}(\boldsymbol{\phi}^{(r)})^{T}(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}^{(r)}) \qquad \textbf{(3.2.52)}$$

E, portanto, o modelo local linear para $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\phi})$ em torno de $\boldsymbol{\phi}^{(r)}$ se torna:

$$\boldsymbol{\psi} \cong \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\phi}^{(r)}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\phi}^{(r)})(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}^{(r)}) \qquad \textbf{(3.2.53)}$$

A nova aproximação, $\boldsymbol{\phi}^{(r+1)}$ será o zero do modelo local linear $\boldsymbol{\psi}^{(r)}$. Assim, na última iteração, onde o resíduo é suficientemente pequeno, conforme Booth (1966), chega-se em:

$$\boldsymbol{\psi} \cong \mathbf{0} \leftrightarrow \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\phi}^{(r)}) = -\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\phi}^{(r)})(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}^{(r)}) \qquad \textbf{(3.2.54)}$$

Onde o sinal de aproximação em **(3.2.54)** expressa a ideia de que dentro da tolerância arbitrada, $\boldsymbol{\psi}$ (o resíduo) pode ser considerado nulo. :

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\phi}^{(r)})\,\boldsymbol{\Delta\phi}^{(r)} = -\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\phi}^{(r)}) \qquad \textbf{(3.2.55)}$$

Isto é, se a solução verdadeira do problema existe em $\boldsymbol{\phi}^{r} + \boldsymbol{\Delta\phi}^{r}$, então a aproximação de Newton–Raphson para o termo geral do vetor de forças residuais, $\boldsymbol{\psi}^{(r)}$, correspondente à solução em $\boldsymbol{\phi}^{r}$, de acordo com Owen (1980), é:

$$\psi_i^{(r)} = -\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{N}} \left(\Delta\phi_j^{(r)} \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\phi_j} \right)^{r} \right) \qquad \textbf{(3.2.56)}$$

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Em que N é o número total de variáveis do sistema. Como o vetor de forças residuais é dado por:

$$\psi_i^{(r)} = \left(\sum_{k=1}^{N} h_{ik}^{(r)}(\phi)\ \phi_k^{(r)}\right) - f_k \qquad \textbf{(3.2.57)}$$

Logo:

$$\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_j}\right)^r = \frac{\partial}{\partial \phi_j^{(r)}}\left(\sum_{k=1}^{N} h_{ik}^{(r)}(\phi)\ \phi_k^{(r)}\right) - \frac{\partial f_j}{\partial \phi_k^{(r)}} \qquad \textbf{(3.2.58)}$$

$$\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_j}\right)^r = h_{ik}^{(r)}\delta_{jk} + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}} \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial \phi_j}\right)^r \phi_k^{(r)} \qquad \textbf{(3.2.59)}$$

Como o delta de Kronecker (δ_{ij}) é utilizado para simplificar expressões e realizar contrações de índices, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$, um termo qualquer da matriz Jacobiana é dado, portanto, por:

$$J_{ij} = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \phi_j}\right)^r = h_{ij}^{(r)} + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}} \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial \phi_j}\right)^r \phi_k^{(r)} \qquad \textbf{(3.2.60)}$$

Onde:

h_{ij}: é um termo geral da matriz $\boldsymbol{H}$.

O último termo dá origem a termos não simétricos na matriz Jacobiana. Se esses termos não simétricos forem desprezados, a fim de manter a simetria, então a substituição de **(3.2.60)** acima leva a:

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right)\boldsymbol{\Delta\phi}^{(r)} = \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right)\boldsymbol{\Delta\phi}^{(r)} = -\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right) \qquad \textbf{(3.2.61)}$$

Como:

$$\boldsymbol{\Delta\phi}^{(r)} = \boldsymbol{\phi}^{(r+1)} - \boldsymbol{\phi}^{(r)} \qquad \textbf{(3.2.62)}$$

Então:

$$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right)\left(\boldsymbol{\phi}^{(r+1)} - \boldsymbol{\phi}^{(r)}\right) = -\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right) \qquad \textbf{(3.2.63)}$$

$$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right)\boldsymbol{\phi}^{(r+1)} - \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right)\boldsymbol{\phi}^{(r)} = -\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right) \qquad \textbf{(3.2.64)}$$

$$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right)\boldsymbol{\phi}^{(r+1)} - \left[\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right) + \boldsymbol{f}\right] = -\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right) \qquad \textbf{(3.2.65)}$$

Esta equação resulta identicamente a equação que governa o método da iteração direta, de acordo Owen, (1980):

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right)\boldsymbol{\phi}^{(r+1)} - \boldsymbol{f} = \mathbf{0} \qquad \textbf{(3.2.66)}$$

Muitas vezes, é importante reter a parte não simétrico da matriz jacobiana para obter melhor convergência no processo iterativo. Os termos da matriz jacobiana podem, então, serem montados a fim de obter a expressão geral:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}) + \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{\phi}) \qquad \textbf{(3.2.67)}$$

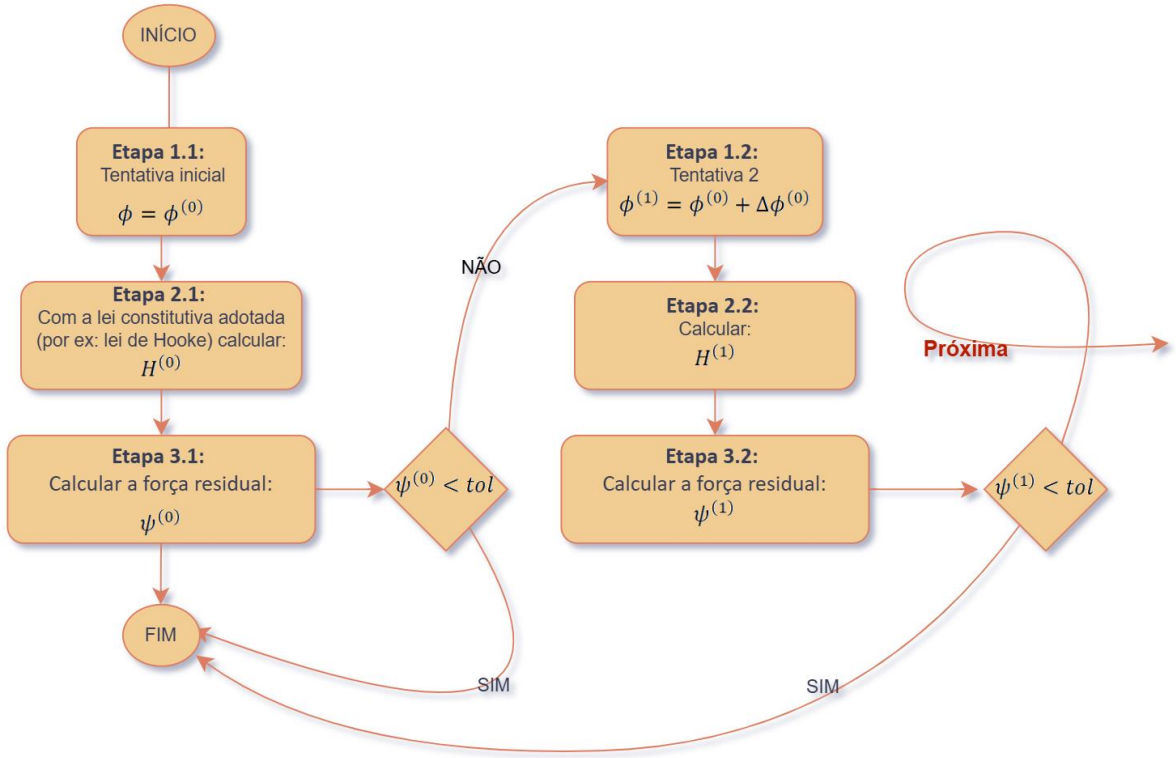
O método de Newton Raphson pode ser escrito, então, como (OWEN, 1980):

$$\boldsymbol{\Delta\phi}^{(r)} = -\left[\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right) = -\left[\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right) + \boldsymbol{H}'\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right)\right]^{-1}\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\phi}^{(r)}\right) \qquad \textbf{(3.2.68)}$$

A solução para o problema não linear será alcançada quando o vetor de forças resíduas se tornar suficientemente desprezível, uma vez que este termo mede diretamente o quão distante a solução ($\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{f}$) esta do equilíbrio.

Em resumo, tem-se que para calcular a solução, adota-se o seguinte passo-a-passo, onde no caso da figura 15, supostamente foi obtido a convergência na segunda tentativa:

Figura 15. Método de Newton Raphson para 2 iterações.



Fonte: Autoria própria.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

3.2.5 Modelo elástico não linear

Materiais elásticos em geral apresentam fase em que a relação tensão/deformação é não linear. Contudo, o comportamento do material é elástico, com todas as deformações e deslocamentos sendo recuperáveis após o descarregamento.

A relação constitutiva não linear se fundamenta da definição termodinâmica da tensão (σ) a partir da energia de deformação por unidade de volume (W) em materiais elásticos. Em uma análise termodinâmica, o comportamento do material parte de uma função de energia potencial, a energia livre de Helmholtz ($\psi = \psi(\varepsilon, \theta)$). Assim, as leis termodinâmicas exigem que a tensão seja derivada da energia, caso não houver histerese. Isto é, se não há dissipação de energia, então toda resposta mecânica é derivada de uma função de energia.

Em muitos modelos, pode-se escrever W em forma adimensional, separando um módulo de elasticidade de referência E_0:

$$W = E_0\, \psi^*(\varepsilon) \tag{3.2.69}$$

Onde:

$\psi^*(\varepsilon)$: é uma função adimensional do alongamento. Então:

$$\sigma = \frac{dW}{d\varepsilon} = E_0\, \frac{d\psi^*(\varepsilon)}{d\varepsilon} \tag{3.2.70}$$

Onde:

σ: é a tensão;

ε: é a deformação e;

E_0: algum valor de referência do modulo de rigidez tangente do material.

Portanto, a função da energia de deformação específica do material $W(\epsilon)$, determina o comportamento não linear. Assim, para o caso unidimensional, fazendo $d\psi^*/d\varepsilon = g$, as tensões podem ser escritas como funções de um módulo do material e depende da deformação (OWEN, 1980):

$$\sigma = \frac{dW}{\varepsilon} = E_0\, g(\varepsilon) \tag{3.2.71}$$

Para o caso linear elástico (Lei de Hooke), a energia de deformação (por unidade de volume) é:

$$W^{Hooke}(\varepsilon) = \frac{1}{2} E_0 \varepsilon^2 \tag{3.2.72}$$

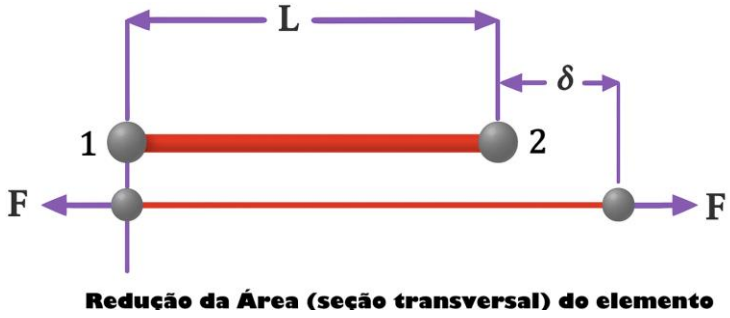
Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Então, derivando em relação à deformação:

$$\sigma = \frac{dW^{Hooke}}{d\varepsilon} = E_0\,\varepsilon \rightarrow g(\varepsilon) = \varepsilon \qquad \textbf{(3.2.73)}$$

Esta é a forma mais simples de modelar um elemento finito, de acordo com Owen (1980), em que se assume variação linear de deslocamento conforme a figura 16:

Figura 16. Elemento unidimensional.



Fonte: autoria própria (elaborado com IA).

No caso da figura 16, o elemento finito unidimensional possui tensão constante no qual se assume uma variação linear de deslocamento entre os nós 1 e 2.

$$F = E_0\,A\,g(\delta/L) \qquad \textbf{(3.2.74)}$$

Onde:

A: é a área da seção transversal do elemento.

A rigidez tangente (K_T) do material é definida como (OWEN, 1980):

$$K_T = \frac{dF}{d\delta} = \frac{dF}{d\epsilon}\frac{d\epsilon}{d\delta} = \frac{E_0 A}{L}\frac{dg}{d\epsilon} = \frac{E_0 A}{L}\,g'(\epsilon) \qquad \textbf{(3.2.75)}$$

Com isto, para o elemento, define-se sua matriz de rigidez tangencial ($\boldsymbol{K_T^{(e)}}$) como:

$$\boldsymbol{K_T^{(e)}} = \frac{\boldsymbol{dF}}{\boldsymbol{d\delta}} = \frac{E_0 A}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} g'(\epsilon) \qquad \textbf{(3.2.76)}$$

Se $g'(\epsilon) > 0$ (positivo definido) então $\boldsymbol{K_T^{(e)}}$ pode ser utilizado na solução, sendo diretamente equivalente a $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}^{(r)})$. Se a matriz de rigidez tangente se tornar nula, as equações de rigidez montadas se tornarão singulares e o processo de inversão exigido pela equação não poderá ser realizado.

Contudo, se $g'(\epsilon) \leq 0$, pode-se adotar o ***método da rigidez inicial***, tomando-se $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}^{(r)}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}^{(0)})$ para todas as iterações. Com isto, $\boldsymbol{K_T^{(e)}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\phi}^{(0)}) > 0$ durante todo

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

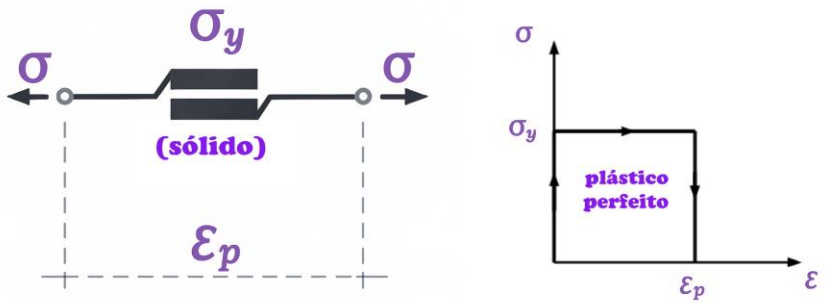
o processo e $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{T}}^{(\boldsymbol{e})}$ (a matriz de rigidez montada) permanecerá positivo definida ao longo de todo o cálculo.

3.2.6 Modelos elastoplástico

3.2.6.1 Modelo plástico de Saint-Venant

Este modelo caracteriza as deformações irreversíveis decorrentes da tensão aplicada (σ) superar ou igualar a tensão de escoamento do material (σ_Y).

Figura 17. Modelo plástico de Saint-Venant.



Fonte: Autoria própria (elaborado com IA).

A deformação plástica é irreversível e o início da deformação plástica (escoamento) é governado por um critério de escoamento. Para situações unidimensionais, os parâmetros do material necessários para definir completamente o comportamento plástico podem ser obtidos a partir de um ensaio de tração uniaxial, conforme Owen (1980).

. A deformação ε_p indicada na figura é a de formação permanente ou residual num ciclo de tensões. Assim pode-se definir uma função tal que:

$$\sigma_p = \begin{cases} \sigma, & se\ \sigma_p < \sigma_Y \\ \sigma_Y, & se\ \sigma_p \geq \sigma_Y \end{cases} \qquad \textbf{(3.2.77)}$$

Onde:

σ_p: é a tensão (plástica) no elemento solido do elemento;

σ_Y: é a tensão de escoamento.

Apesar de não existir deformação enquanto a tensão não atingir o limite plástico σ_Y, nota-se que a ainda há tensão associada ao elemento:

$$\sigma \leq \sigma_Y \qquad \textbf{(3.2.78)}$$

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Assim pode-se definir uma função tal que:

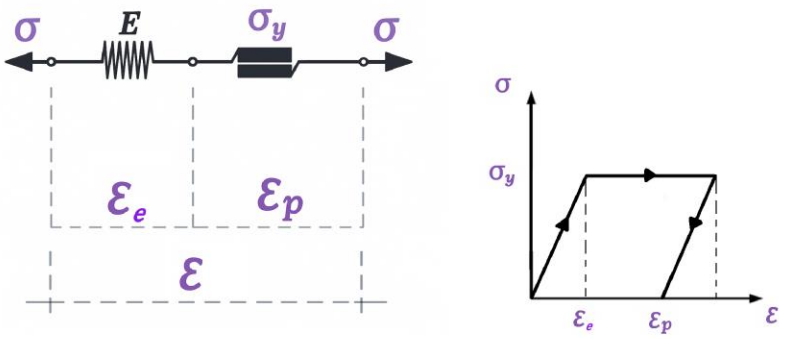
$$F(\sigma) = |\sigma_p| - \sigma_Y \leq 0 \qquad \textbf{(3.2.79)}$$

Quando F se anula, diz-se que ele está num estado plástico e há deslizamento. Tensões maiores em módulo que σ_Y não são admissíveis. Quando σ_Y é constante, e o material não endurece, diz-se que o material é perfeitamente plástico.

3.2.6.2 Modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss em Série

Representa o modelo descrito anteriormente, porém com uma mola em série com o modelo plástico de Saint-Venant. Vale destacar que anteriormente, não ficou muito bem definido em termos numéricos como as tensões poderiam ser avaliadas. Neste caso, em ambos os elementos, as tensões são as mesmas:

Figura 18. Modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss.



Fonte: autoria própria (elaborado com IA).

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p \quad , \qquad se\ \sigma < \sigma_Y \rightarrow d\epsilon = d\epsilon_e$$
$$\sigma_e = \sigma_p = \sigma \qquad \textbf{(3.2.80)}$$

Onde:

σ_e: tensão na mola de rigidez E;

$d\epsilon_e$: deformação na mola;

$d\epsilon_p$: deformação plástica (com dissipação de energia);

ϵ: deformação total do modelo.

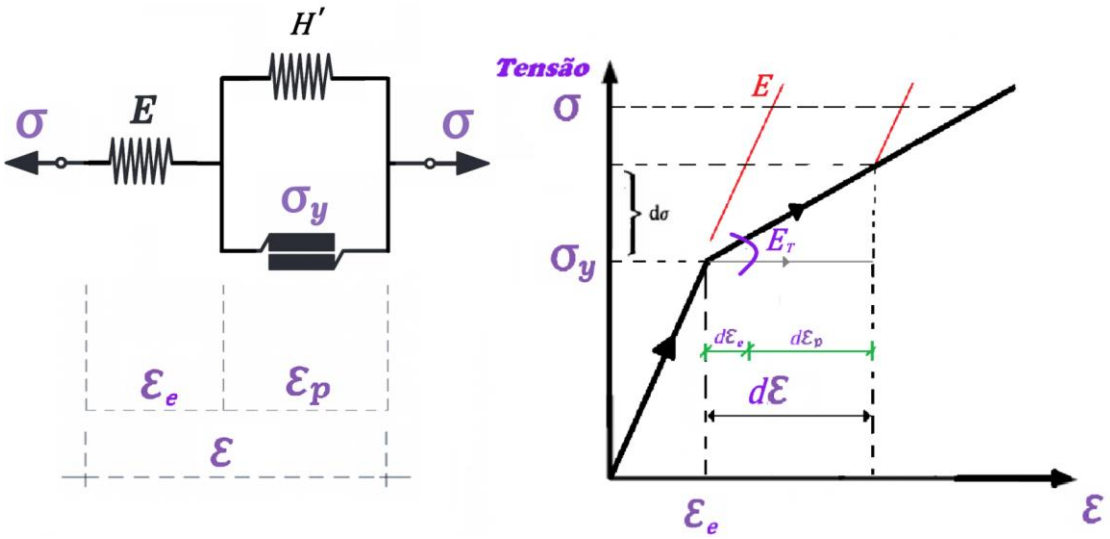
A deformação corresponde à soma das deformações individuais de cada elemento do modelo. Enquanto a tensão aplicada permanecer inferior à tensão de escoamento, a deformação total será devida apenas à mola, não havendo contribuição do elemento sólido.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

3.2.6.3 Modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss em Paralelo

A figura 19 ilustra o comportamento de um material inicialmente elástico, que se deforma linearmente (ϵ_e) de acordo com o módulo de Young E até que a tensão atinja o valor de escoamento uniaxial σ_Y.

Figura 19. Modelo elastoplástico com endurecimento.



Fonte: autoria própria, adaptado de Munaiar (1994) e Owen (1980).

Para uma carga aplicada até exatamente o limite plástico, vale a relação:

$$\sigma_Y = E\,\epsilon_{Y_1} \qquad \textbf{(3.2.81)}$$

O termo ϵ_{Y_1} pode ser interpretado a partir do modelo representado na Figura 20, constituído por um elemento sólido (barra central) envolto por uma mola adicional de módulo de Young H', que representa o endurecimento do material.

Figura 20. Modelo elastoplástico do endurecimento.

Fonte: autoria própria, (elaborado com IA).

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Quando um determinado incremento de carga ultrapassa o primeiro limite de escoamento ($\epsilon_e > \epsilon_{Y_1}$) , a barra sólida central entra em regime plástico, deixando de ser capaz de suportar incrementos adicionais de tensão. A partir desse ponto, qualquer acréscimo de carga passa a ser absorvido pela mola H', dando início ao processo de deformação plástica.

À medida que a mola H' se alonga, ocorre o fenômeno de endurecimento do material, aumentando progressivamente a tensão necessária para continuar o escoamento. Assim, após alívio da carga e aplicação de um novo incremento, o limite de escoamento não retorna ao valor inicial (ϵ_{Y_1}). Em outras palavras, o limite plástico passa a depender da deformação plástica acumulada, $\sigma_Y = \sigma_Y(\epsilon_p)$.

Logo, ϵ_{Y_i} representa a máxima tensão que o elemento sólido (barra) consegue suportar sem acionar H'. A máxima tensão, até o limite plástico, é modelada a partir de uma mola de constate E, equivalente a barra central.

Considerando um acréscimo de carga $d\sigma$, imediatamente após o limite plástico:

$$d\sigma = E_T\, d\epsilon_e + E_T\, d\epsilon_p = E_T\, d\epsilon \qquad \textbf{(3.2.82)}$$

Em que:

E_T: é módulo tangente reduzido após a plastificação do elemento sólido.

Logo, a tensão total é a contribuição das parcelas de cada elemento do modelo em paralelo, sendo que a deformação através do arranjo em paralelo da mola (H') com o solido são iguais a deformação plástica (ϵ_p). A deformação será sempre igual à deformação plástica (ϵ_p) acrescida da deformação na mola (ϵ_e) para $\sigma \geq \sigma_Y$.

Portanto, admite-se que a deformação total (ϵ) pode ser separada em partes elástica e plástica:

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p \qquad \textbf{(3.2.83)}$$

Define-se o parâmetro de encruamento linear (H') após o limite plástico como:

$$H' = \frac{\sigma - \sigma_Y}{\epsilon_p} \quad ou \quad H' = \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} \qquad \textbf{(3.2.84)}$$

O parâmetro H' pode ser interpretado como a inclinação da parte de encruamento da curva tensão–deformação, após a remoção do componente de deformação elástica.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Dessa forma, ele representa o quanto a tensão aumenta à medida que o material continua se deformando plasticamente após o início do escoamento:

$$H'\epsilon_p = \sigma - \sigma_Y \tag{3.2.85}$$

Portanto, o encruamento linear resulta em:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\epsilon - d\epsilon_e} = \frac{\frac{d\sigma}{d\epsilon}}{\frac{d\epsilon - d\epsilon_e}{d\epsilon}} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \tag{3.2.86}$$

Para um elemento unidimensional, se a tensão for menor ou igual à tensão de escoamento uniaxial σ_Y, o comportamento do material será elástico, apresentando uma rigidez dada por:

$$K_e = \frac{F}{\delta} = \frac{EA}{L} \tag{3.2.87}$$

Onde:

F: força axial que aumenta gradualmente;

δ: extensão (linear) causada pela força axial;

A: área de seção transversal do elemento;

E a matriz de rigidez será:

$$\boldsymbol{K_e^{(e)}} = \frac{E\,A}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.88}$$

Se F for incrementado para além do limite plástico, então:

$$d\delta = \left(d\epsilon_e + d\epsilon_p\right) L \tag{3.2.89}$$

Onde L é o comprimento do elemento, logo:

$$dF = d\sigma\, A = A\, H' d\epsilon_p \tag{3.2.90}$$

E a rigidez tangente do material se torna:

$$K_{ep} = \frac{dF}{d\delta} = \frac{A\, H' d\epsilon_p}{L\left(\frac{d\sigma}{E} + d\epsilon_p\right)} \tag{3.2.91}$$

Da definição do parâmetro de endurecimento do material ($H' = d\sigma/d\epsilon_p$), obtem-se uma forma simplificada para a rigidez do elemento elastoplástico:

$$K_{ep} = \frac{EA}{L}\left(1 - \frac{E}{E + H'}\right) \tag{3.2.92}$$

Portanto, a matriz de rigidez do elemento para o comportamento elastoplástico do material é dada por (OWEN, 1980):

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{ep}}^{(e)} = \frac{EA}{L}\left(1 - \frac{E}{E + H'}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.2.93)}$$

Nos termos entre parênteses da equação **(3.2.93)**, pode-se observar que o primeiro termo representa a rigidez elástica e o segundo, a redução da rigidez.

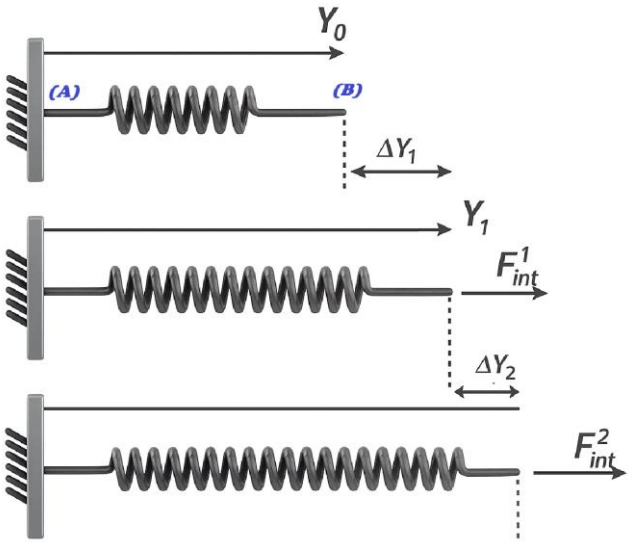
3.2.7 MEF Posicional

O controle e monitoramento da posição de todos os nós do sistema (treliça) é o objeto do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP). Nesse contexto, o MEFP considera a substituição da força externa por um deslocamento imposto compatível com as reações da estrutura. Com isto, ao invés de controlar a aplicação de carga externa, como é comum na prática da engenharia civil, o problema pode ser interpretado, de acordo descrito por Coda (2018, p. 7), como:

> *"... a aplicação de uma posição Y , crescente, com a medida da força reativa F_{int} (chamada interna) necessária para manter a mola na configuração desejada..."*

Desse modo, para a figura 21, o deslocamento é imposto para o nó 2 da estrutura, sem carga externa. Contudo, vale destacar que isto pode exigir um tempo de processamento longo para estruturas com vários nós, conforme Coda (2018).

Figura 21. Força reativa (interna) crescente em função da posição atual.



Fonte: adaptado de CODA (2018).

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

A partir da figura 21, incrementa-se a posição nodal de Y_0 para Y_1:

$$Y_1 = Y_0 + \Delta Y_1 \quad \textbf{(3.2.94)}$$

Onde:

ΔY_1: é o primeiro incremento de posição.

Logo após, calcula-se a força interna $F_{int}^{(1)}$:

$$F_{int}^{(1)} = \frac{d\mathbb{U}}{dY_1} \quad \textbf{(3.2.95)}$$

É importante notar também que para a equação **(3.2.95)** o termo energético ($\mathbb{U}$) está relacionado com o incremento da posição nodal, e não diretamente com os deslocamentos, como é usual.

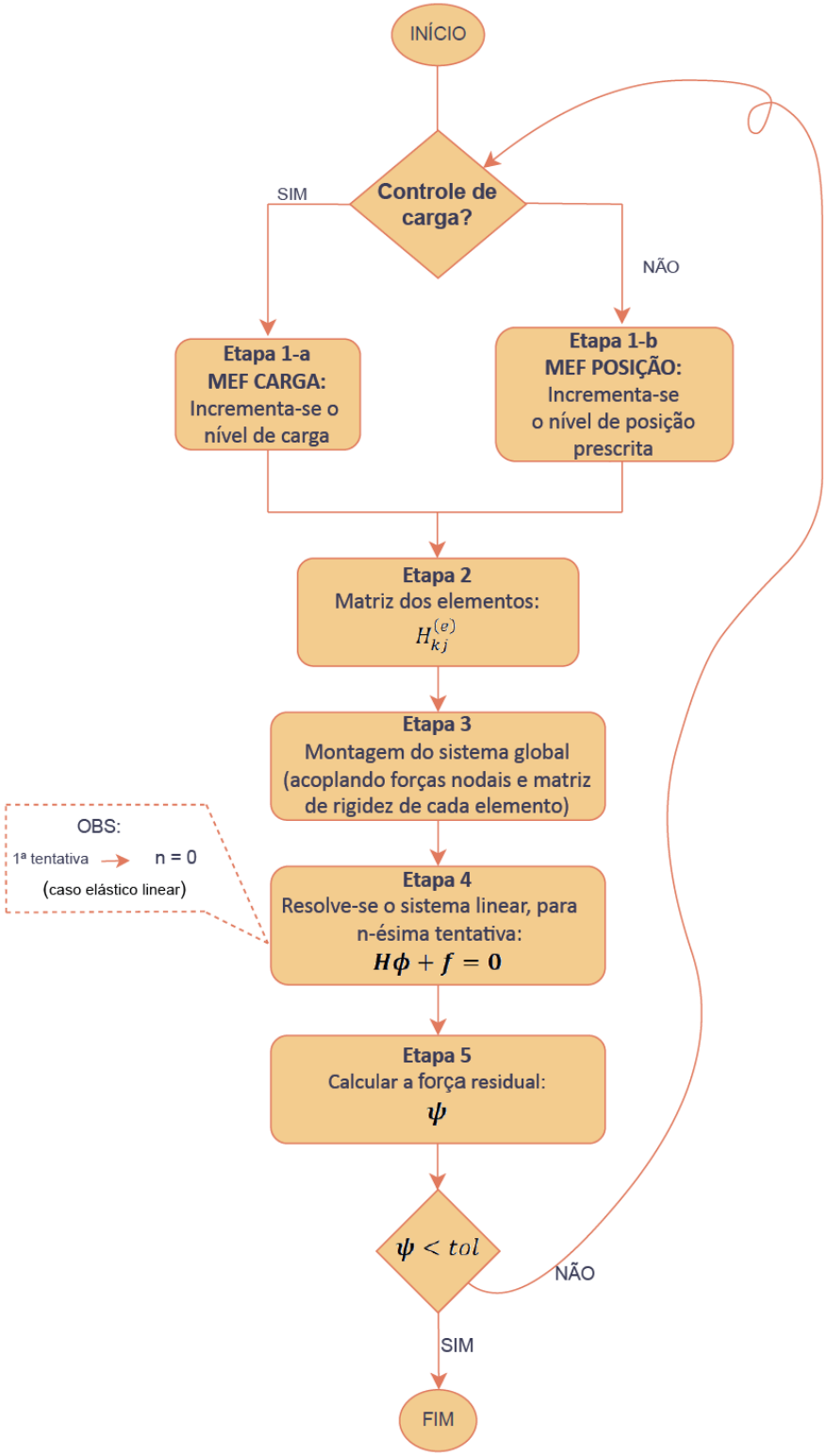
Prosseguindo de forma análoga, após o segundo incremento de posição (ΔY_2), atualiza-se a posição nodal de Y_1 para Y_2:

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y_2 \quad \textbf{(3.2.96)}$$

E calcula-se à força interna $F_{int}^{(2)}$. Na figura 22, descreve-se um fluxograma para a rotina de cálculo do MEF:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 22. Rotina geral do MEF e MEFP.



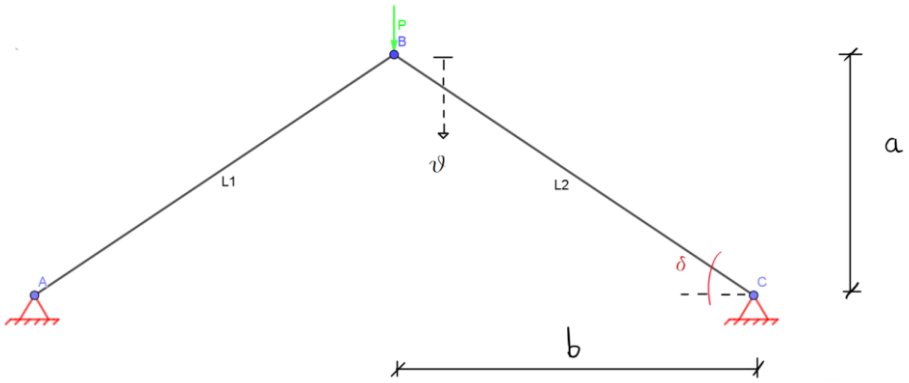
Fonte: autoria própria.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

3.2.8 Análise de instabilidade

A teoria da estabilidade estática e dinâmica propõe ferramentas que permitem o estudo dos fatores que geram a perda de estabilidade de uma estrutura. Para estabelecer comparações entre as formulações descritas anteriormente, considerou-se a seguinte treliça, comumente designada por Treliça de von Mises:

Figura 23. Treliça de von Mises genérica.



Fonte: autoria própria.

3.2.8.1 Solução analítica

Definindo a barra da esquerda igual a barra da direita, tem-se seus comprimentos iniciais:

$$L_1^{inicial} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$L_2^{inicial} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \textbf{(3.2.97)}$$

Da mesma forma, podem-se definir os comprimentos finais das barras:

$$L_1^{final} = \sqrt{(a - v)^2 + b^2} = L_2^{final} \quad \textbf{(3.2.98)}$$

Usando uma medida de deformação linear (Lei de Hooke), a deformação das barras (ϵ) podem ser descritas como:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\left(L_1^{final} - L_1^{inicial}\right)}{L_1^{inicial}} \quad \textbf{(3.2.99)}$$

De acordo com a formulação proposta por Rayleigh-Ritz, a energia interna de deformação da treliça (U) é obtida a partir da soma das contribuições de cada barra que compõe a estrutura.

Se todas as barras possuem rigidez $k_1 = k_2 = EAL$, tem-se que:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$U_{int} = \sum_{j=1}^{N} U_j = \frac{1}{2} E\ A\ L_j\ \epsilon_j^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot k_1 \left[\frac{\left(L_1^{final} - L_1^{inicial} \right)}{L_1^{inicial}} \right]^2 \right) \quad \textbf{(3.2.100)}$$

Já a energia potencial da forca externa vertical (P) é calculada como:

$$U_{ext} = -W \quad \textbf{(3.2.101)}$$

Onde:

$$W = P\ v \quad \textbf{(3.2.102)}$$

Também, pode-se definir os seguintes parâmetros adimensionais $(b = L)$:

$$\begin{aligned} a &= \delta\ L \\ P &= \lambda\ A\ E \\ v &= \chi\ a \end{aligned} \quad \textbf{(3.2.103)}$$

Logo, a energia das barras da treliça pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} U_{int} &= \left(E\ A\ L_1^{inicial} \right) \left[\frac{\left(L_1^{final} - L_1^{inicial} \right)}{L_1^{inicial}} \right]^2 = \\ & E\ A\ L_1^{inicial} \left[\frac{\sqrt{(a-v)^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]^2 \end{aligned} \quad \textbf{(3.2.104)}$$

Como $L_1 = \sqrt{a^2 + L^2}$, tem-se que:

$$U_{int} = E\ A\ L_1^{inicial} \left[\frac{\sqrt{(a-v)^2 + L^2} - \sqrt{a^2 + L^2}}{\sqrt{a^2 + L^2}} \right]^2 \quad \textbf{(3.2.105)}$$

Reagrupando os termos dentro da raiz, tem-se que:

$$U_{int} = E\ A\ L_1^{inicial} \left[\frac{\sqrt{(\delta\ L - \chi\ \delta\ L)^2 + L^2} - \sqrt{\delta^2 L^2 + L^2}}{\sqrt{\delta^2 L^2 + L^2}} \right]^2 \quad \textbf{(3.2.106)}$$

Logo, após cancelar o fator L, chega-se em:

$$U_{int} = E\ A\ L \left[\frac{\sqrt{1 + (\delta - \chi\ \delta)^2} - \sqrt{1 + \delta^2}}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right]^2 \quad \textbf{(3.2.107)}$$

Dividindo a expressão **(3.2.107)** por EAL para adimensionaliza-la, chega-se em:

$$U_{int}^{*} = \frac{U_{int}}{E\ A\ L} = \left(\frac{\sqrt{1 + (\delta - \chi\ \delta)^2} - \sqrt{1 + \delta^2}}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right)^2 \quad \textbf{(3.2.108)}$$

Considerando os parâmetros adimensionais, para a carga vertical P resulta da seguinte forma:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$U_{ext} = -P\,v = -(\lambda\,E\,A)(\chi\,a) = -\lambda\,E\,A\,\chi\,(\delta\,L) = -E\,A\,L\,(\lambda\,\chi\,\delta)$$

$$U_{ext}^{*} = -\lambda\,\chi\,\delta \qquad \textbf{(3.2.109)}$$

Com as energias de **(3.2.108)** e **(3.2.109)**, é possível obter a energia potencial total da estrutura adimensionalizada (Π^{*}):

$$\Pi^{*} = U_{int}^{*} + U_{ext}^{*}$$

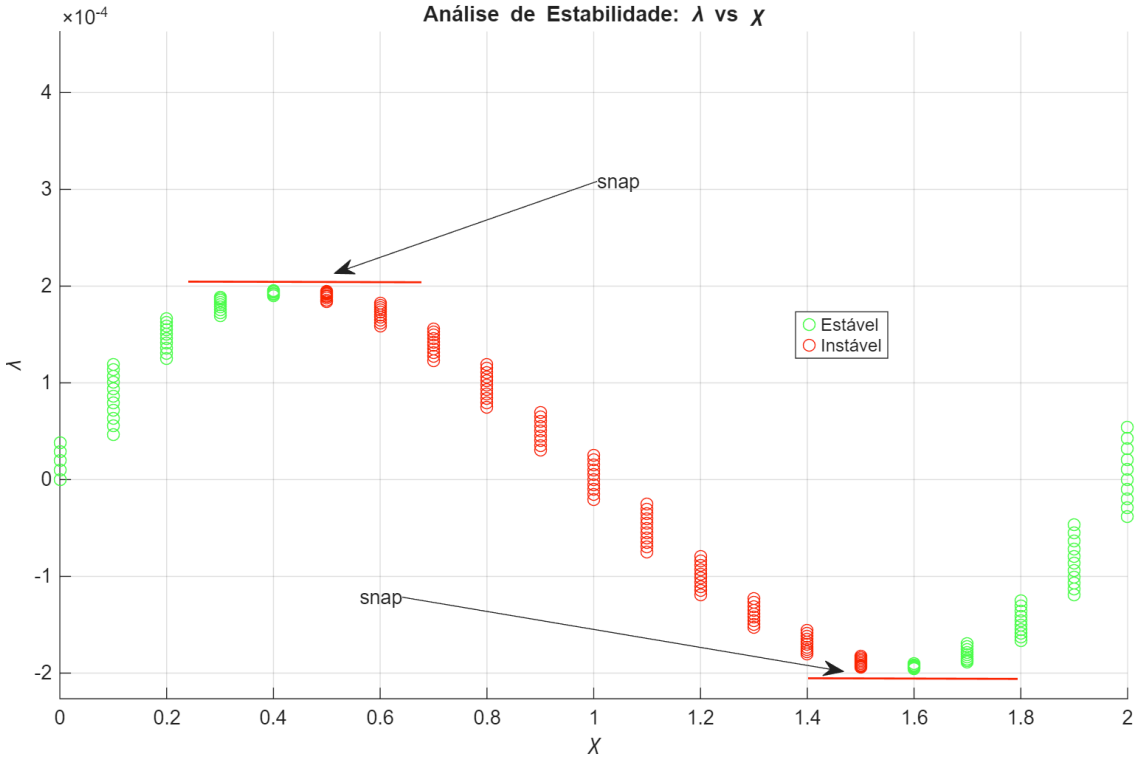
$$\Pi^{*} = \left(\frac{\sqrt{1+(\delta-\chi\,\delta)^{2}} - \sqrt{1+\delta^{2}}}{\sqrt{1+\delta^{2}}}\right)^{2} - \lambda\,\chi\,\delta \qquad \textbf{(3.2.110)}$$

Derivando a expressão **(3.2.110)** acima, obtém-se:

$$\frac{\partial\Pi^{*}}{\partial\chi} = -\frac{2\delta(1-\chi)\left(\sqrt{1+\delta^{2}(1-\chi)^{2}} - \sqrt{1+\delta^{2}}\right)}{(1+\delta^{2})\sqrt{1+\delta^{2}(1-\chi)^{2}}} - \lambda\,\delta \qquad \textbf{(3.2.111)}$$

A trajetória de equilíbrio da estrutura pode ser analisada impondo-se que a expressão **(3.2.111)** seja igual a zero e solucionando o problema para diferentes incrementos de deslocamentos. A solução discreta pelo MATLAB é ilustrada na figura 24 (caso de $\delta = 0{,}08$).

Figura 24. Trajetória de equilíbrio da TVM obtida pelo MATLAB R2025b, $\delta = 0{,}08$.



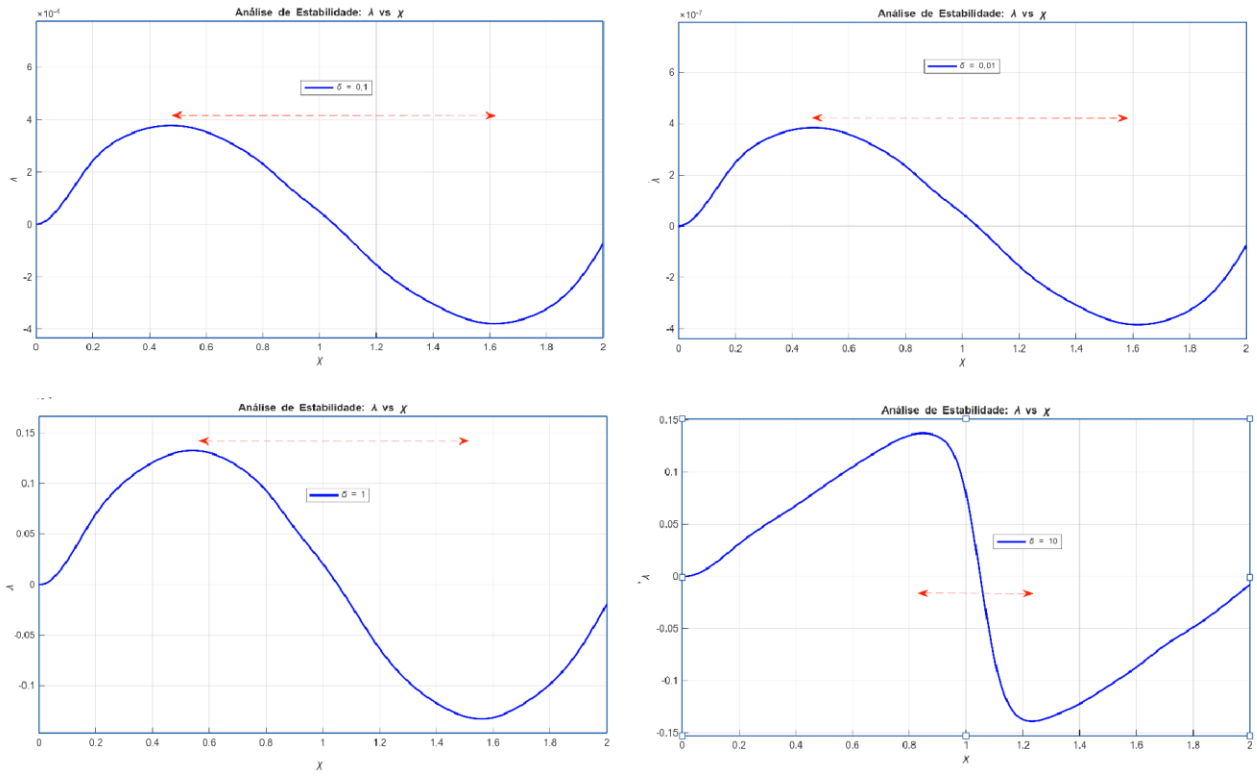
Fonte: Autoria própria.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

O gráfico foi obtido a partir de 200 incrementos, de zero até $\chi = 2$. Observa-se que, a partir de um determinado valor de carga, a matriz de rigidez tangente da estrutura se anula — caracterizando o ponto de *snap-through* (indicada pela linha vermelha). Neste sentido, tanto aumentar a carga a partir de $\lambda = 2$ (ou -2) resulta em rigidez negativa (perda de estabilidade).

A seguir, apresenta-se a mesma análise feita para vários valores de δ. Em particular, para altos valores, $\delta > 10$, obtém-se um comprimento de onda característico da trajetória de equilíbrio (distância entre os pontos de máximo e mínimo) da ordem de metade da trajetória de $\delta = 1$.

Figura 25. Comprimento característico de trajetórias da TVM tendem a reduzir. Obtido pelo MATLAB R2025b.



Fonte: Autoria própria.

O código obtido para a solução discretizada apresentada pode ser obtido no apêndice deste trabalho. Este foi obtido a partir da adaptação de um código em MAPLE para o MATLAB, por meio de IA sendo o código original devido a RODRIGUES (2020).

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

3.2.8.2 Solução numérica pelo software ABAQUS

A seguir, são realizadas análises utilizando o software Abaqus *Learning Edition* 2025, com o objetivo de complementar a investigação apresentada anteriormente. Esta seção tem como objetivo evidenciar a dificuldade de obter da trajetória de equilíbrio pelo ABAQUS quando ocorrem instabilidades estruturais. Isto implica, também, numa dificuldade de representação precisa do comportamento pós-crítico da estrutura.

É importante destacar que o ABAQUS não possui um sistema de unidades interno automático. Isso significa que o usuário deve adotar e manter um conjunto de unidades de forma consistente em todo o modelo. Assim, o software é considerado *unitless*, ou seja, ele não “reconhece” se os valores inseridos estão em metros, milímetros ou polegadas (o essencial é que todas as grandezas físicas estejam expressas de maneira coerente entre si).

Dessa forma, uma maneira simples e adequada de manter a consistência de grandezas físicas é adotar o Sistema Internacional (SI) de medidas. Com isto, todas as análises e os resultados seriam expressos no SI. Logo, para analisar a treliça adimensional, basta estabelecer dados consistentes com as medidas do SI.

Primeiramente, obtém-se a rigidez axial inicial da treliça de von Mises (TVM), a partir da carga adimensionalizada:

$$P = (E\ A)\ \lambda \tag{3.2.112}$$

A partir da solução analítica apresentada para este problema, obteve-se para o par força/deslocamento:

$$\begin{cases} v_{inicial} = a \cdot \chi_{inicial} = 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}01 \\ \lambda_{inicial} = 0{,}00000996 \end{cases} \tag{3.2.113}$$

O modelo de Young (*E)* e a área das barras (A_{barras}) sao adotados como, respectivamente, $E = 200\ GPa = 2e11\ N/m^2$ e $A_{barras} = 1\ cm^2 = 0{,}0001\ m^2$.

Logo, obteve-se a rigidez axial inicial ($(E\ A)_{incial}$) aproximada dada por:

$$(E\ A)_{incial} \cong 2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}0001 = 2 \cdot 10^{7} = 2e7\ N \tag{3.2.114}$$

As deformações para análise linear e não linear dos valores iniciais são aproximadamente iguais, conforme Coda (2018). Com isto, estima-se um valor de carga para o lançamento do carregamento:

$$P_{inicial} = (E\ A)_{incial}\ \lambda = 2 \cdot 10^{7} \cdot 0.00000996 = 199{,}2\ \cong 200\ N \tag{3.2.115}$$

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Com 50 incrementos de carga, obtém-se a carga equivalente a $P_{inicial}$, para o lançamento no software:

$$P = 10\ kN \quad \textbf{(3.2.116)}$$

Na figura 26, em “Increment 0: Step Time = 0.000”, tem-se a situação antes de aplicar a carga incremental.

Figura 26. Treliça na configuração de referência (não deformada).

Fonte: autoria própria.

Em “Increment 17: Step Time = 0.3929”, tem-se a situação de carga de pico (valor máximo encontrado pelo ABAQUS antes da matriz de rigidez se tornar singular)**.**

Figura 27. Treliça na configuração atual (deformada).

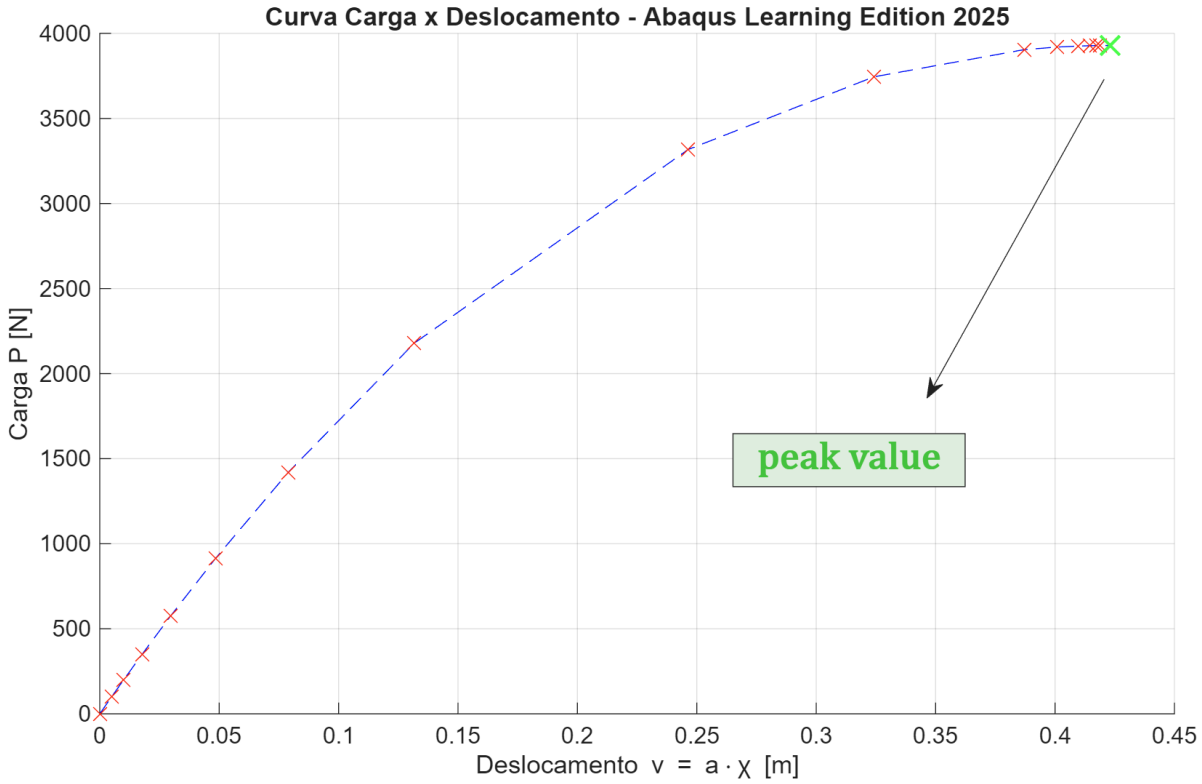
Fonte: autoria própria.

Depois de encontrado a carga de pico, o software encerra a análise, apontando erro. Devido a singularidade na matriz de rigidez do sistema, o software grava apenas os resultados (*outputs*) das cargas que convergiram, não sendo possível continuar a análise por incremento de carga.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

A figura 28 apresenta a trajetória de equilíbrio numa análise por controle de carga realizada pelo software ABAQUS:

Figura 28. Trajetória de equilibro pelo ABAQUS Learning Edition 2025.



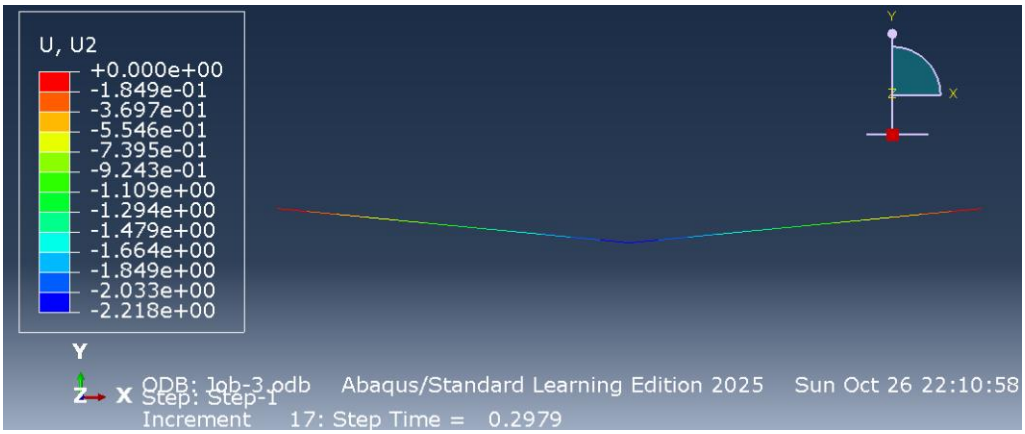
Fonte: autoria própria.

O programa possui análise incremental automatizada. Para encontrar a carga de pico, definiu-se o número máximo de incrementos igual a 50 e incremento inicial de 1% da carga. O valor mínimo foi de 1e-05 (0,00001%) e o máximo igual a 1 (100%). O arquivo *.inp da TVM pode ser obtido no apêndice deste trabalho.

Ainda mais, numa outra análise, *diferente da realizada anteriormente*, é possível conduzir a treliça TVM a passar pelo ponto de *snap* utilizando um procedimento de estabilização automatizado. Para isso, adotou-se uma fração de energia específica dissipada igual a 0,002. No caso, observa-se que a configuração inicial da treliça se inverte:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 29. Modelo ABAQUS da TVM após o valor de pico.

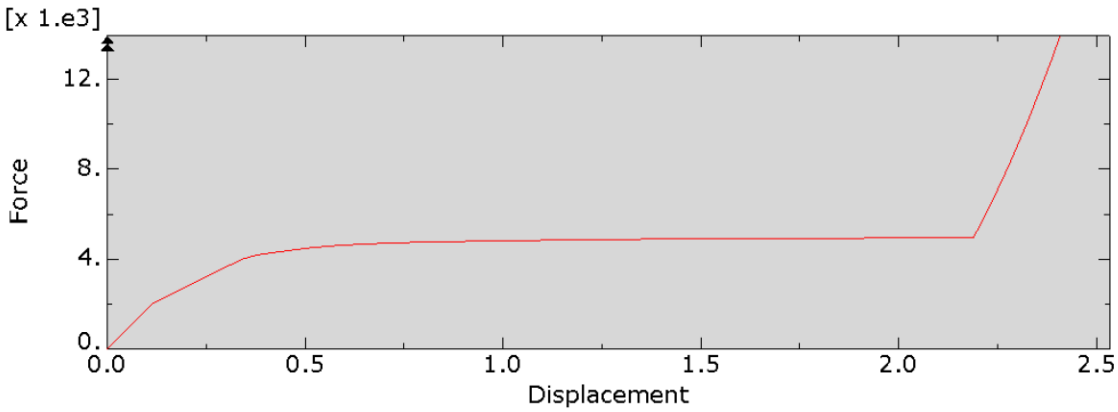


Fonte: autoria própria.

No gráfico fornecido pelo software ABAQUS, a TVM tende a buscar o estado de equilíbrio e convergir para um conjunto de deslocamentos que evolui conforme ilustrado na figura 29.

Figura 30. Gráfico da força com o deslocamento pelo ABAQUS da TVM.

Obtido com controle de carga.



Fonte: autoria própria.

3.2.8.3 Solução numérica elástica não linear

A seguir, é apresentada a solução numérica da Treliça de von Mises (TVM) com a lei de Hooke, representando o comportamento linear elástico clássico.

A deformação de engenharia (com a Lei de Hooke) pode ser calculada, para um elemento de treliça, como sendo a deformação média (constante no elemento) em função de seu comprimento inicial e final.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Define-se a deformação longitudinal de engenharia (ε) como:

$$\varepsilon = \frac{dy - dx}{dx} \tag{3.2.117}$$

A energia de deformação total acumulada (U) no corpo pode ser calculada como a integral da energia específica de deformação, sobre o volume inicial do corpo (V_0), ou seja:

$$U = \int_{V_0} \psi_e^{Hooke}\, dV_0 \tag{3.2.118}$$

Mas:

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{d\psi_e^{Hooke}}{d\varepsilon} = \int_{V_0} \frac{1}{2} E\, \varepsilon^2 dV_0 = E\, \varepsilon \tag{3.2.119}$$

Onde:

ψ_e^{Hooke}: é a energia de deformação por unidade de volume (energia específica de deformação);

E: módulo de Young do material.

Logo, para a Lei de Hooke, tem-se:

$$F = E \frac{(L - L_0)}{L_0} A_0 \tag{3.2.120}$$

Onde:

L_0: comprimento inicial em função das coordenadas iniciais;

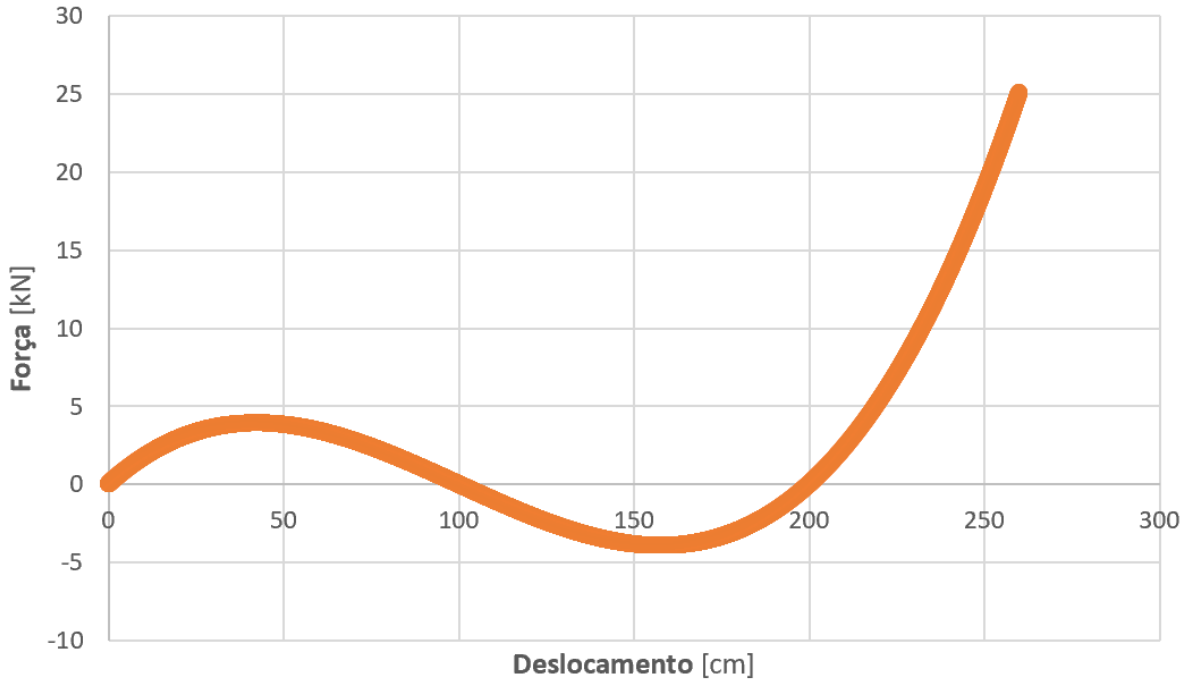
L: comprimento em função das coordenadas atualizadas;

A_0: área do elemento.

A figura 30 ilustra a trajetória de equilibro para o caso da treliça analisada no tópico (3.2.8.1), onde se usou $\delta = 0{,}08$ e 20 000 (vinte mil) incrementos de deslocamentos.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 31. Trajetória de equilíbrio elaborada a partir do MODOWEN.



Fonte: autoria própria.

Outra medida de deformação muito utilizada é a deformação de Green-Lagrange ($\mathbb{E}$). Para o caso uniaxial, ela é dada por:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}\frac{(dy^2 - dx^2)}{dx^2} \tag{3.2.121}$$

Esta medida de deformação advém da energia específica de deformação de Saint-Venant-Kirchhof (ψ_e^{SVK}), de acordo Coda (2018) e definida por:

$$\psi_e^{(SVK)} = \frac{K}{2}\mathbb{E}^2 \tag{3.2.122}$$

Assim, introduz-se a grandeza de estiramento (λ), a qual representa a razão entre o comprimento deformado (dy) e o comprimento inicial do elemento (dx):

$$\lambda = \frac{dy}{dx} \tag{3.2.123}$$

Com isto, obtém-se a seguinte forma alternativa:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}\left[\frac{(dy + dx)}{dx}\frac{(dy - dx)}{dx}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dy}{dx} + 1\right)\frac{(dy - dx)}{dx}\right] = \frac{1}{2}[(\lambda + 1)\,\varepsilon\,] \tag{3.2.124}$$

Então, a tensão será dada por:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$\sigma^{(SVK)}(\mathbb{E}) = \frac{d\psi_e^{(SVK)}}{d\mathbb{E}} = \int_{V_0} \frac{K}{2}\mathbb{E}^2 d\mathbb{E} = K\ \mathbb{E} \qquad \textbf{(3.2.125)}$$

É interessante observar que calculando-se a variação da deformação ($\delta\varepsilon$) em função da variação do comprimento ($\delta L = L - L_0$), para pequenos níveis de deformações ($\lambda \cong 1$), as duas medidas de deformação (Hook e SVK) são equivalentes, isto é:

$$\frac{\delta\varepsilon}{\delta L} = \left(\frac{L - L_0}{L_0}\right)' = \frac{1}{L_0} \qquad \textbf{(3.2.126)}$$

$$\frac{\delta\mathbb{E}}{\delta L} = \left[\frac{1}{2}\frac{\left(L^2 - {L_0}^2\right)}{{L_0}^2}\right]' = \frac{L}{L_0^2} \cong \frac{1}{L_0} \qquad \textbf{(3.2.127)}$$

Portanto, a partir do MEFP, no regime de pequenas deformações, e para discretizações suficientemente refinadas, as trajetórias de equilíbrio obtidas com a deformação de engenharia (baseada em deformações infinitesimais) e com a deformação de Green tendem a convergir. Isto é, as soluções obtidas pelas formulações linear e não linear geométrica tendem a convergir para a mesma trajetória de equilíbrio.

Contudo, convém destacar que o aumento do refinamento e discretização do modelo, embora aumente a precisão da solução, também eleva o custo computacional.

3.2.9 Solução numérica elastoplástica

A seguir, apresenta-se a solução numérica pelo MODOWEN para a treliça já analisada do tópico (3.2.8.1), porém com endurecimento $H' = 3000\ kN/m^2$. Já para o a tensão de escoamento, usou-se o valor de $\sigma_Y = 500\ MPa$. Os valores de deslocamentos correspondem ao ponto de aplicação da carga, isto é, no meio da treliça.

São utilizados 6 incrementos, divididos da seguinte forma: os 2 primeiros correspondem às cargas permanentes imediatas, os 2 seguintes às demais cargas permanentes e os últimos 2 às cargas variáveis. Essa divisão permite representar:

- Início da plastificação;
- Redistribuição de rigidezes;
- Crescimento progressivo das deformações;
- Estabilização do regime pós-plastificação.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Com isto, definiu-se de forma aproximada, 40% para o peso-próprio, 40% para outras cargas permanentes, e 20% para as cargas variáveis. O valor da carga total, como citado anteriormente, foi de $P = 10\ kN \cong 1\ tf$.

A atualização das posições nodais foi realizada apenas após a convergência de cada incremento. Assim, as coordenadas foram modificadas exclusivamente com base nos incrementos de carga correspondentes. Por esse motivo, mesmo após a ocorrência da primeira plastificação (e mesmo com a inversão da configuração geométrica da treliça) ainda foram observadas tensões de compressão, pois a atualização da geometria não acompanhou continuamente o processo de deformação plástica.

Tabela 6. Modelo elastoplástico da TVM.

Incrementos	Deslocamentos (cm)	Tensão (kN/cm²)	Plastificação	Plastificação (em %)
1 – 20%	-9,85952	$-1{,}25399 \cdot 10^{1}$	-	-
2 – 20%	$-1{,}97190 \cdot 10^{1}$	$-2{,}50799 \cdot 10^{1}$	-	-
3 – 20%	$-2{,}95786 \cdot 10^{1}$	$-3{,}76198 \cdot 10^{1}$	-	-
4 – 20%	$-4{,}07968 \cdot 10^{1}$	$-5{,}01597 \cdot 10^{1}$	$-8{,}64027 \cdot 10^{-5}$	$-0{,}0086\%$
5 – 10%	$-7{,}90642 \cdot 10^{1}$	$-5{,}64297 \cdot 10^{1}$	$-2{,}20644 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}2206\%$
6 – 10%	$-1{,}22479 \cdot 10^{2}$	$-6{,}26997 \cdot 10^{1}$	$-4{,}65381 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}4653\%$

Fonte: autoria própria.

No último incremento de carga o escoamento plástico foi de aproximadamente 0,46% e a treliça inverteu sua configuração geométrica. Esse comportamento, contudo, não representa a resposta física da estrutura, mas sim uma instabilidade numérica decorrente do método de Newton–Raphson com controle de carga, o qual, de modo geral, não é capaz de descrever adequadamente problemas com não linearidade geométrica acentuada. Nessa condição, a matriz de rigidez tangente tende a ficar mal condicionada, levando o algoritmo a convergir para uma solução matematicamente válida, porém fisicamente inconsistente. Quando se adota o controle por deslocamentos, a resposta pode ser discretizada de forma apropriada na vizinhança do ponto de instabilidade, evitando a perda de convergência.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

4 MODELOS VISCOELÁSTICOS

Os modelos viscosos são fundamentais para descrever os fenômenos de relaxação e fluência, representando o comportamento dependente do tempo de diversos materiais. A consideração do comportamento viscoso permite representar de forma mais realista a dissipação de energia e a evolução das deformações em sistemas estruturais, tornando as análises mais coerentes com o comportamento observado experimentalmente.

4.1 Modelo viscoso de Newton

Este modelo viscoso, do ponto de vista mecânico, pode ser representado por um amortecedor, onde relação entre tensão e deformação é dada por:

$$q(t) = \mu\,\dot{\gamma} \tag{4.1}$$

Onde:

μ: é a viscosidade;

$\eta = \mu^{-1}$: é a fluidez.

Figura 32. Modelo viscoso de newton representado por um amortecedor.

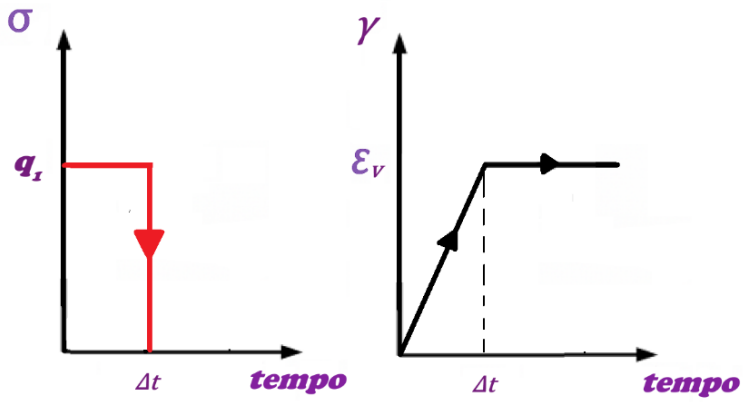
Fonte: Autoria própria (elaborado com IA).

Quando o líquido contido dentro do amortecedor possui viscosidade (μ) constante, trata-se de um modelo Newtoniano. Mas, se a viscosidade alterar, por exemplo com a temperatura, diz-se que a fluidez é função da deformação viscosa, $\eta = \eta(\gamma)$, sendo chamado de um modelo não-Newtoniano.

Conforme a figura 32 do amortecedor acima, um ensaio realizado com tensão q_1 constante, permite a análise de dois tipos de fases de deformação. A primeira referente a tensão constante. E a segunda, ao de descarregamento quando a tensão aplicada se anula.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 33. Resposta do amortecedor com o tempo.



Fonte: Autoria própria (elaborado com IA).

A partir do instante inicial ($t = 0$), com a qual se obtém uma deformação com taxa linear de variação, tem-se a primeira fase do ensaio:

$$\dot{\gamma} = \frac{q_1(0)}{\mu} \rightarrow \gamma = q_1(0)\left(\frac{\Delta t}{\mu}\right) \quad \textbf{(4.2)}$$

Já quando a tensão aplicada é retirada, inicia-se a segunda fase, referente ao descarregamento do amortecedor:

$$q_1(\Delta t) = 0 \rightarrow \dot{\gamma} = \frac{q_1}{\mu} = 0 \rightarrow \gamma = constante \quad \textbf{(4.3)}$$

Devido ao retardamento das deformações, o modelo pode simular um comportamento associado com tempo. Quando a tensão q_1 é aplicada, a energia não é imediatamente convertida em deformação, mas fica armazenada no amortecedor, que a libera de forma dissipativa com o passar do tempo.

4.2 Introdução ao modelo viscoelástico alternativo de três parâmetros

O modelo viscoelástico alternativo de três parâmetros representa uma formulação capaz de descrever com maior precisão o comportamento dependente do tempo de materiais que exibem simultaneamente características elásticas e viscosas.

Esse modelo combina elementos típicos dos sistemas de Kelvin–Voigt e Maxwell. O modelo de Kelvin-Voigt pode ser representado mecanicamente por uma mola e um amortecedor em paralelo:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 34. Modelo de Kelvin–Voigt

Fonte: autoria própria (elaborado com IA).

Diferente do modelo da figura 34 acima, o elemento de Maxwell representa uma mola e um amortecedor em série:

Figura 35. Modelo de Maxwell.

Fonte: autoria própria (elaborado com IA).

Para compreender o modelo alternativo de três parâmetros, é fundamental entender a principal diferença entre os dois modelos clássicos apresentados anteriormente.

No modelo de Kelvin–Voigt, tanto a deformação na mola $(\epsilon_e^{(KV)})$ quanto no amortecedor $(\gamma^{(KV)})$ são idênticas, pois ambos os elementos estão conectados em paralelo:

$$(\epsilon_{ve})^{KV} = (\epsilon_e)^{KV} = (\gamma)^{KV} \quad \textbf{(4.4)}$$

Onde:

$(\epsilon_{ve})^{KV}$: deformação viscoelástico no elemento de Kelvin-Voigt.

Por outro lado, no modelo de Maxwell, os elementos estão dispostos em série, o que introduz uma variável interna associada à deformação relativa entre os componentes. Nesse caso, a deformação no amortecedor $(\gamma)^M$ não aparece de forma direta, mas é incorporada indiretamente na formulação, contribuindo para a definição da deformação total do elemento viscoelástico:

$$(\epsilon_{ve})^M = (\epsilon_1)^M + (\gamma)^M \quad \textbf{(4.5)}$$

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Onde:

$(\epsilon_{ve})^M$: deformação viscoelástico no elemento de Maxwell.

$(\epsilon_1)^M$: deformação elástica na mola em serie do elemento de Maxwell.

4.3 Modelo viscoelástico alternativo de três parâmetros

Para o modelo generalizado de Maxwell da figura 36, tem-se que a tensão no elemento (σ) pode ser representada por:

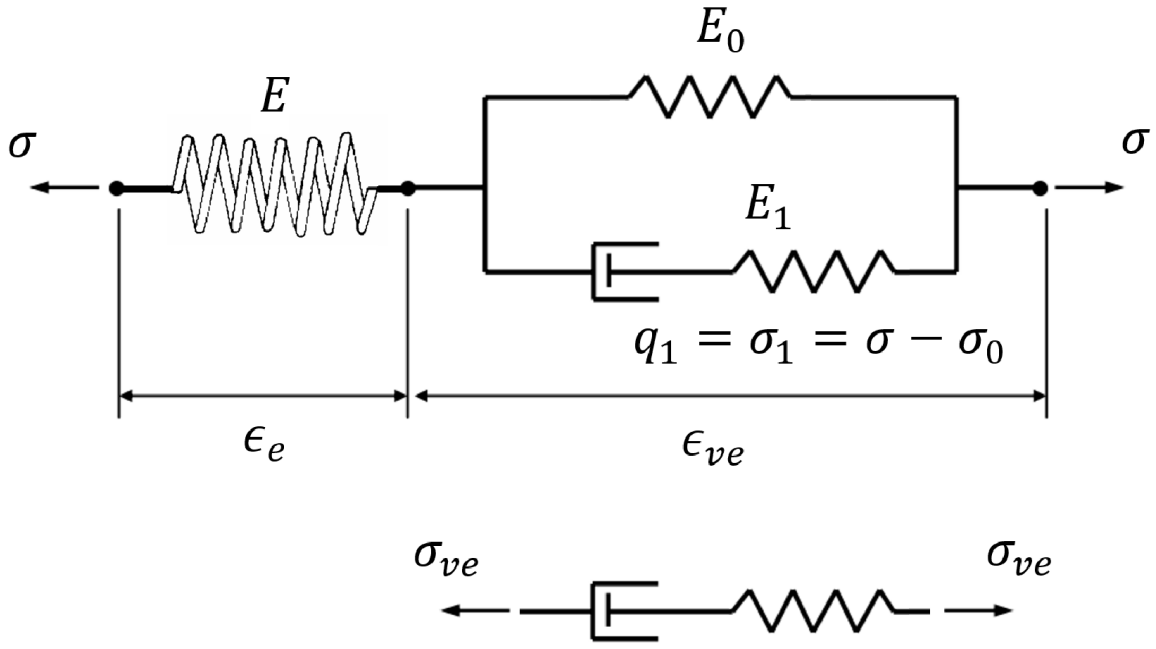
$$\sigma = \sigma_0 + q_1 \quad \textbf{(4.6)}$$

Onde:

σ_1: tensão na mola em paralelo com o amortecedor;

q_1: tensão no amortecedor (*dashpot*).

Figura 36. Modelo generalizado de Maxwell.



Fonte: autoria própria, adaptado de Owen (1980).

O desenvolvimento da solução desse modelo foi realizado por meio de um procedimento análogo ao proposto por Owen em *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice (1980)*, utilizado originalmente para o modelo viscoplástico. Contudo, algumas características do modelo ilustrado, figura 36, foram adaptadas a fim de prosseguir com a resolução das equações correspondentes.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

A deformação total neste modelo é dada pela soma das componentes elásticas e viscoelásticas como:

$$\epsilon(t) = \epsilon_e(t) + \epsilon_{ve}(t) = \epsilon_e(t) + \epsilon_0(t) = \epsilon_e(t) + [\epsilon_1(t) + \gamma_1(t)] \quad \textbf{(4.7)}$$

Onde, tem-se que:

E: módulo de Young da 1º mola referido ao trecho sem amortecimentos diretos;

E_0: módulo de Young referido ao trecho em paralelo com o amortecedor;

E_1: módulo de Young da mola em série com o amortecedor;

ϵ: deformação total do modelo;

ϵ_{ve}: deformação viscoelásticas do elemento de Maxwell;

ϵ_e: deformação da mola E;

ϵ_0: deformação da mola E_0;

ϵ_1: deformação da mola em paralelo com módulo de Young E_1;

γ: deformação do amortecedor viscoso (μ).

A tensão (σ) na mola linear é dada por:

$$\sigma = \sigma_e = E\ \epsilon_e \quad \textbf{(4.8)}$$

Por definição do elemento de Maxwell: a tensão é a mesma na mola e no amortecedor e a tensão no amortecedor viscoso é relacionado com a deformação viscoelásticas por meio de:

$$\sigma_1 = q_1 = \mu \frac{d\gamma}{dt} \quad \textbf{(4.9)}$$

q_1: tensão no amortecedor (***dashpot***);

μ: coeficiente de viscosidade do amortecedor.

Nos elementos em paralelo, ambos recebem o mesmo alongamento $\epsilon_{ve}(t)$ e as tensões se somam:

$$\sigma = \sigma_{total}(t) = \sigma_e(t) = \sigma_{ve}(t) = \sigma_0(t) + \sigma_1(t) = \sigma_0(t) + q_1(t) \quad \textbf{(4.10)}$$

Com isto, resta estabelecer a relação constitutiva para o modelo sob condições elásticas e viscoelásticas. A tensão elástica na mola superior já foi definida ($\sigma_0 = E_0\ \epsilon_{ve}$). Então substituindo q_1 e σ_0 na equação **(4.10)**, resulta em:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$\sigma_{tot}(t) = E_0\,\epsilon_{ve} + \mu\frac{d\gamma}{dt} \tag{4.11}$$

Substituindo $\epsilon - \epsilon_e - \epsilon_1 = \gamma$ na equação anterior:

$$\sigma_0 + \mu\frac{d(\epsilon - \epsilon_e - \epsilon_1)}{dt} = \sigma_{tot} \tag{4.12}$$

$$\eta\frac{d\epsilon}{dt} = (\sigma_{tot} - \sigma_0) + \mu\left(\frac{d\epsilon_e}{dt} + \frac{d\epsilon_1}{dt}\right) \tag{4.13}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{\mu}(\sigma_{tot} - \sigma_0) + \frac{d\epsilon_e}{dt} + \frac{d\epsilon_1}{dt} \tag{4.14}$$

Substituindo a fluidez ($\eta = 1/\mu$) e rearranjando a equação, obtém-se:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \eta\,(\sigma_{tot} - \sigma_0) + \frac{1}{E}\frac{d\sigma_{tot}}{dt} + \frac{1}{E_1}\frac{d\sigma_1}{dt} \tag{4.15}$$

Ou:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_{ve} \tag{4.16}$$

Onde:

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{1}{E}\frac{d\sigma_{tot}}{dt} \tag{4.17}$$

$$\dot{\epsilon}_{ve} = \eta\,(\sigma_{tot} - \sigma_0) + \frac{1}{E_1}\frac{d\sigma_1}{dt} \tag{4.18}$$

A expressão define a taxa de deformação viscoelástica em função da parcela da tensão que excede o valor de tensão na mola superior E_0, isto é, que excede o valor de deformação elástica ϵ_0 em regime permanente de escoamento.

A tensão no amortecedor em determinado instante é $q_1(t) = \sigma_{tot} - \sigma_0$, já a tensão na mola inferior é igual a tensão no amortecedor q_1 , então a equação anterior se torna:

$$\frac{d\epsilon_{ve}}{dt} = \eta\,q_1 + \frac{1}{E_1}\frac{dq_1}{dt} \tag{4.19}$$

Fazendo $\tau = \mu/E_1$, a deformação viscoelástica pode ser obtida da seguinte maneira:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$E_1 \frac{d\epsilon_{ve}}{dt} = \frac{dq_1}{dt} + (\eta\, E_1)\, q_1 \qquad \textbf{(4.20)}$$

Assim, reescreve-se a equação diferencial sobre a forma:

$$E_1\, \dot{\epsilon}_{ve} = \dot{q}_1 + \frac{q_1}{\tau} \qquad \textbf{(4.21)}$$

Esse sistema conduz a duas análises diferentes. Para a primeira, ao impor uma deformação constate (inicial) e observar a tensão ao longo do tempo, observa-se um tempo de relaxação em que a tensão começa a diminuir. Em uma segunda análise, ao aplicar uma tensão constante e observar a deformação ao longo do tempo, observa-se o fenômeno da fluência (*creep*), em que a deformação começa a aumentar.

Para o caso de uma tensão constante aplicada (σ_A), tem-se a partir da equação **(4.18)** a solução analítica da equação com deformação que evolui ao longo do tempo. Nesse contexto, caracterizado pelo aumento gradual da deformação com o passar do tempo, observa-se o fenômeno da fluência (*creep*):

$$\frac{d\epsilon_{ve}}{dt} = \eta\, (\sigma_A - \sigma_0) + \frac{1}{E_1}\frac{d\sigma_1}{dt} \qquad \textbf{(4.22)}$$

Ao aplicar um ensaio conhecido com uma tensão imposta constante σ_A e medir a deformacão total na barra ao longo do tempo, $\epsilon(t) = \epsilon_e(t) + \epsilon_{ve}(t)$, também é conveniente definir um tempo de fluência (τ), dado por:

$$\tau = \frac{\mu}{E_1} = \frac{1}{\eta\, E_1} \qquad \textbf{(4.24)}$$

Conforme equação **(4.6)**, a tensão (σ_{tot}) é a soma dos ramos em paralelo e em série, logo:

$$\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_A - \dot{\sigma}_0 = -E_0\, \dot{\epsilon}_{ve} \qquad \textbf{(4.25)}$$

Como a tensão aplicada é constante, basta introduzir $\dot{\sigma}_1$ na equação **(4.22):**

$$\frac{d\epsilon_{ve}}{dt} = \eta\, (\sigma_A - E_0\, \epsilon_{ve}) - \frac{E_0}{E_1}\frac{d\epsilon_{ve}}{dt} \qquad \textbf{(4.26)}$$

Reescrevendo a equação **(4.25)**, obtém-se a equação fundamental do modelo para uma tensão aplicada constante:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$(E_0 + E_1)\dot{\epsilon}_{ve} + \eta\, E_0\, E_1\, \epsilon_{ve} = \eta\, E_1 \sigma_A \qquad \textbf{(4.27)}$$

A seguir, define-se o parâmetro de fluência (V'):

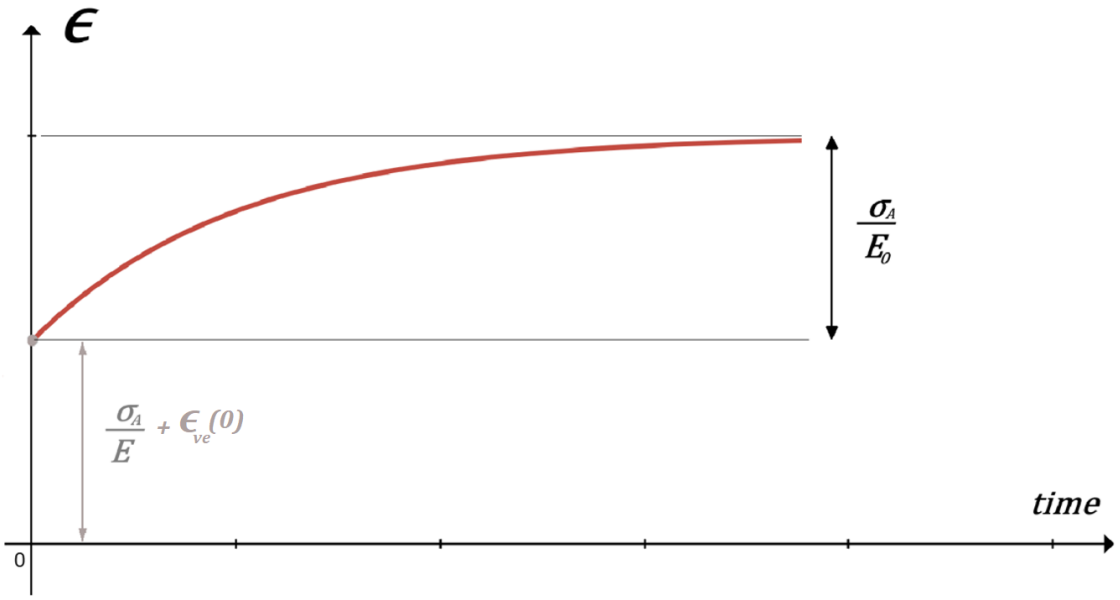
$$V' = \frac{E_1}{E_0 + E_1} = \frac{1}{1 + E_0/E_1} \qquad \textbf{(4.28)}$$

A solução para a equação **(4.27),** diferencial ordinária de primeira ordem (EDO), é elementar. O termo $\epsilon_{ve}(0)$ representa a condição da função no instante inicial.

$$\epsilon_{ve}(t) = \frac{\sigma_A}{E_0} + \left[\epsilon_{ve}(0) - \frac{\sigma_A}{E_0}\right] e^{-(\eta\, E_0\, V')t} \qquad \textbf{(4.29)}$$

Para a figura 37, a deformação viscoelástica (fluência) do modelo se inicia com a deformação inicial do caso elástico (σ_A/E) e com a fluência imediata, evoluindo com a dissipação da energia do amortecedor ($t \to \infty$).

Figura 37. Deformação total com a parcela viscoelástica.



Fonte: autoria própria, adaptado de Owen (1980).

Retornando a equação fundamental do elemento de Maxwell **(4.21)**, determina-se a evolução da tensão ou das variáveis internas:

$$\dot{q}_1 + \frac{q_1}{\tau} = E_1\, \dot{\epsilon}_{ve} \qquad \textbf{(4.25)}$$

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Onde q_1 é interpretado como uma variável interna de tensão não-equilibrada (ou parte viscoelástica da tensão). A equação **(4.25)** é uma EDO linear de 1ª ordem para $q_1(t)$. Usando o fator integrante $e^{t/\tau}$, obtém-se a equação diferencial exata:

$$e^{\frac{t}{\tau}}(dq_1) + e^{t/\tau}\left(\frac{1}{\tau}q_1 - E_1\dot{\epsilon}_{ve}\right)dt = 0 \qquad \textbf{(4.26)}$$

Portanto, chega-se à solução em forma analítica por meio de uma integral de convolução para integração numérica:

$$q_1(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}q_1(t_0) + E_1\int_{s=t_0}^{s=t} e^{-(t-s)/\tau}\dot{\epsilon}_{ve}(s)\,ds \qquad \textbf{(4.27)}$$

Além disso, definindo parâmetros α e β, ambos dependentes do incremento de tempo (Δt), pode-se demonstrar uma forma de tensão mais simples para o amortecedor:

$$q_1^{n+1} = \alpha\, q_1^n + \beta\, \Delta\epsilon_{ve} \qquad \textbf{(4.28)}$$

Conclui-se, portanto, que a tensão no amortecedor é atualizada a partir da memória do estado anterior combinada com o incremento da evolução da deformação viscoelástica.

4.4 Algoritmo de integração temporal

O objetivo principal da seguinte discussão é delinear um algoritmo de atualização apropriado para o modelo de tensões finitas viscoelásticas para implementação num programa de elementos finitos. O método a seguir é devido a Simo (1987) e a chave do algoritmo de atualização está na integração numérica das equações de convolução.

Uma implementação numérica simplificada para simular o comportamento de uma estrutura pode ser obtida com uma atualização algorítmica da tensão por meio de uma partição (discretização temporal):

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \rightarrow\ t \in [0\,, T] \qquad \textbf{(4.29)}$$

Onde:

T: tempo estipulado para o ensaio teórico;

Δt: passo de tempo (subintervalo).

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Com isso, a solução para cada passo de tempo pode ser calculada. O objetivo seguinte é avançar a solução para o tempo $t_{n+1} = \Delta t + t_n$ e atualizar todas as grandezas relevantes.

Inicialmente, faz-se uma estimativa inicial, conhecida como solução inicial, e atualiza-se os carregamentos prescritos. Com o método de Newton-Raphson, o novo movimento no tempo t_{n+1} é corrigido iterativamente até que os princípios de equilíbrio sejam satisfeitos dentro de um limite de tolerância dado.

Em particular, a chamada tensão algorítmica no tempo t_{n+1} é escrita como:

$$\sigma^{n+1} = \sigma_0^{n+1} + q_1^{n+1} \tag{4.30}$$

Onde a tensão σ_0^{n+1} requerida até t_{n+1} é conhecida. O terceiro termo, que é a contribuição viscoelástica q_1^{n+1}, ainda precisa ser avaliado. Então, divide-se a integral de convolução **(4.27)** na forma de:

$$\int_0^{t_{n+1}} (\cdot) dt = \int_0^{t_n} (\cdot)\, dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\cdot)\, dt \tag{4.31}$$

Com isto, a variável interna q_1, no tempo t_{n+1} é dada por:

$$q_1^{n+1} = e^{-\frac{t_{n+1}}{\tau}} q_1(t_0) + E_1 \int_{t_0}^{t_n} e^{-\frac{t_{n+1}-s}{\tau}} \dot{\epsilon}_{ve}(s)\, ds + E_1 \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\frac{t_{n+1}-s}{\tau}} \dot{\epsilon}_{ve}(s)\, ds \tag{4.32}$$

Para simplificar, aplica-se a seguinte relação a todos os três termos:

$$e^{-\frac{(t_{n+1})}{\tau}} = e^{-\frac{(\Delta t + t_n)}{\tau}} = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \cdot e^{-\frac{t_n}{\tau}} \tag{4.33}$$

Além disso, aplica-se a regra do ponto médio de segunda ordem ao terceiro termo do membro direito da equação **(4.32)**: $\int_{t=t_n}^{t=t_{n+1}} (\cdot) dt$, o que significa que a variável de tempo é aproximada por $t_m = (t_{n+1} + t_n)/2$:

$$t_{n+1} - t_m = t_{n+1} - \left(\frac{t_{n+1} + t_n}{2}\right) = \frac{t_{n+1} - t_n}{2} = \frac{\Delta t}{2} \tag{4.34}$$

Então:

$$q_1^{n+1} = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \left[e^{-\frac{t_n}{\tau}} q_1(t_0) + E_1 \int_{t_0}^{t_{n+1}} e^{-\frac{t_n - s}{\tau}} \dot{\epsilon}_{ve}(s) ds \right] + E_1 e^{-\frac{\Delta t}{2\tau}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\epsilon}_{ve}(s) ds \tag{4.35}$$

O termo entre colchetes é simplesmente $\boldsymbol{q_1}$ no tempo t_n. Ainda mais, define-se um parâmetro adimensional (ξ):

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$\xi = -\Delta t/(2\tau) \quad \textbf{(4.36)}$$

Onde se obtém a seguinte aproximação:

$$q_1^{n+1} = e^{2\xi} q_1^n + E_1 e^{\xi} [\epsilon_{ve}^{n+1} - \epsilon_{ve}^n] \quad \textbf{(4.37)}$$

Após reorganizar a equação **(4.37)**, chega-se finalmente a uma fórmula de atualização recursiva para as tensões internas em um formato simples, a saber:

$$q_1^{n+1} = E_1 \, e^{\xi} \epsilon_{ve}^{n+1} + \mathcal{H}_n \quad \textbf{(4.38)}$$

$$\mathcal{H}_n = e^{\xi} \left(e^{\xi} q_1^n - E_1 \, \epsilon_{ve}^n \right) \quad \textbf{(4.39)}$$

Na relação recursiva acima, a expressão **(4.39)** introduziu uma nova função $\mathcal{H}_n$. Este termo é determinado pelas variáveis históricas internas q_1^n e ϵ_{ve}^n, que são conhecidas do passo anterior e servem como um banco de dados inicial, representando o termo histórico (*time history*).

4.5 Procedimento para solução numérica

Um esquema de avanço no tempo (*time stepping*) permiti que a solução seja atualizada do instante t_n para o instante $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$. Para incrementar as variáveis ao longo de um intervalo de tempo, pode-se usar a regra de Euler.

Nesse método, a taxa média de variação durante o intervalo é considerada igual ao valor no início do intervalo e, assim, o valor previsto de uma certa grandeza X, no instante t_{n+1}é extrapolado a partir do valor no instante t_n, de acordo com Owen (1980):

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} + \dot{X}^{(n)} \Delta t_n \quad \textbf{(4.40)}$$

Contudo, esse esquema torna-se instável para incrementos de tempo que ultrapassam um valor crítico. A partir da taxa de deformação viscoelástica definida, pode-se, então, determinar o *step* para a deformação no intervalo de tempo Δt_n:

$$\Delta \epsilon_{ve}^{(n)} = \dot{\epsilon}_{ve}^{(n)} \, \Delta t_n \quad \textbf{(4.41)}$$

Em geral, para cada iteração, o intervalo de tempo pode ser diferente. A variação de comprimento do elemento $\left(\Delta \phi_{ve}^{(n)} \right)$ associada à deformação viscoelástica é dada por:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

$$\Delta\phi_{\mathrm{ve}}^{(n)} = \Delta\epsilon_{ve}^{(n)} L \tag{4.42}$$

Ao adicionar a variação de deslocamento decorrente da variação de carregamento aplicado $\Delta f^{(n)}$, ocorrida entre os instantes t_ne t_{n+1}, obtém-se a variação total no comprimento do elemento dada por (OWEN, 1980):

$$\Delta\phi^{(n)} = \Delta\epsilon_{ve}^{(n)} L + \frac{L}{AE}\Delta f^{(n)} \tag{4.43}$$

Essa expressão pode ser reescrita em forma matricial, em termos dos deslocamentos e forças nodais, como:

$$\boldsymbol{\Delta\varphi^{(n)}} = [\boldsymbol{K}]^{-1}\boldsymbol{\Delta V^{(n)}} \tag{4.44}$$

Onde, para o elemento linear considerado:

$$\boldsymbol{\Delta\varphi^{(n)}} = \begin{bmatrix}\Delta\phi_1^{(n)} \\ \Delta\phi_2^{(n)}\end{bmatrix} \tag{4.45}$$

$$\boldsymbol{\Delta V^{(n)}} = AE\ \dot{\epsilon}_{ve}^{(n)}\Delta t_n \begin{bmatrix}1 \\ -1\end{bmatrix} + \boldsymbol{\Delta f^{(n)}} \tag{4.46}$$

$$\boldsymbol{K^{(e)}} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{4.47}$$

O vetor de pseudo-forças ($\Delta V^{(n)} -$ *pseudo forces*) representa a força nodal não equilibrada. Este vetor contém o incremento de carga associado ao próximo passo de tempo (*step),* composto pela soma da carga nodal (Δf) com o incremento de carga associado a deformação viscoelástica.

4.6 Procedimento computacional

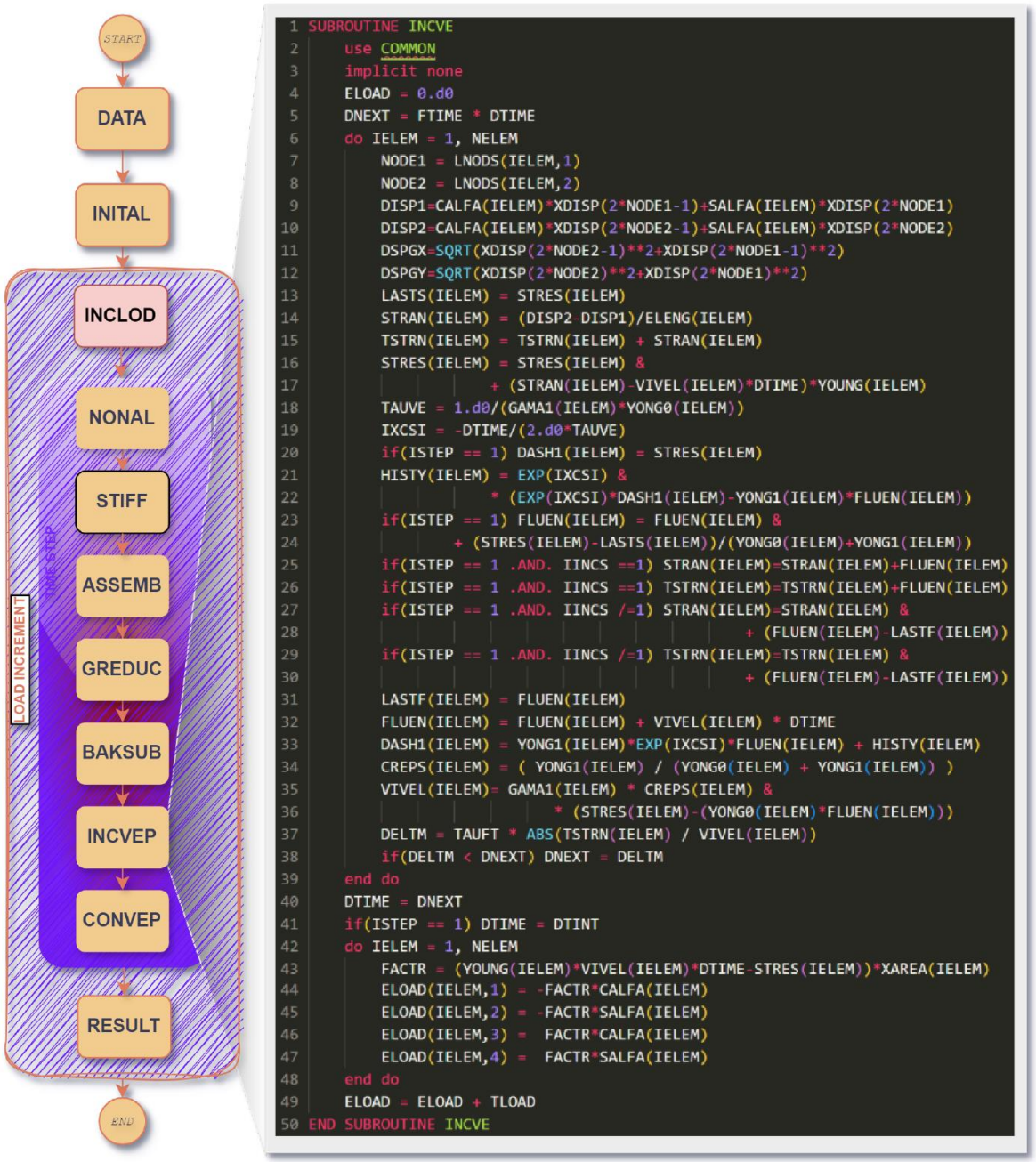
A solução do problema deve partir das condições iniciais conhecidas no instante $t = 0$ (ou $n = 0$), correspondentes à resposta elástica inicial. Nesta etapa:

- ✓ $\phi^{(0)}$, $f^{(0)}$, $\epsilon^{(0)}$, $\sigma^{(0)}$ são conhecidos;
- ✓ $\epsilon_{ve}^{(0)} = 0,\ \mathcal{H}^{(0)} = q_1^{(0)}$.

O procedimento geral para avançar a solução do instante t_n para o instante t_{n+1} com a sub-rotina de inclusão de deslocamentos viscoelásticos segue na figura 38:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 38. Subrotina INCVE do Modelo generalizado de Maxwell.




```
SUBROUTINE INCVE
    use COMMON
    implicit none
    ELOAD = 0.d0
    DNEXT = FTIME * DTIME
    do IELEM = 1, NELEM
        NODE1 = LNODS(IELEM,1)
        NODE2 = LNODS(IELEM,2)
        DISP1=CALFA(IELEM)*XDISP(2*NODE1-1)+SALFA(IELEM)*XDISP(2*NODE1)
        DISP2=CALFA(IELEM)*XDISP(2*NODE2-1)+SALFA(IELEM)*XDISP(2*NODE2)
        DSPGX=SQRT(XDISP(2*NODE2-1)**2+XDISP(2*NODE1-1)**2)
        DSPGY=SQRT(XDISP(2*NODE2)**2+XDISP(2*NODE1)**2)
        LASTS(IELEM) = STRES(IELEM)
        STRAN(IELEM) = (DISP2-DISP1)/ELENG(IELEM)
        TSTRN(IELEM) = TSTRN(IELEM) + STRAN(IELEM)
        STRES(IELEM) = STRES(IELEM) &
                     + (STRAN(IELEM)-VIVEL(IELEM)*DTIME)*YOUNG(IELEM)
        TAUVE = 1.d0/(GAMA1(IELEM)*YONG0(IELEM))
        IXCSI = -DTIME/(2.d0*TAUVE)
        if(ISTEP == 1) DASH1(IELEM) = STRES(IELEM)
        HISTY(IELEM) = EXP(IXCSI) &
                     * (EXP(IXCSI)*DASH1(IELEM)-YONG1(IELEM)*FLUEN(IELEM))
        if(ISTEP == 1) FLUEN(IELEM) = FLUEN(IELEM) &
                + (STRES(IELEM)-LASTS(IELEM))/(YONG0(IELEM)+YONG1(IELEM))
        if(ISTEP == 1 .AND. IINCS ==1) STRAN(IELEM)=STRAN(IELEM)+FLUEN(IELEM)
        if(ISTEP == 1 .AND. IINCS ==1) TSTRN(IELEM)=TSTRN(IELEM)+FLUEN(IELEM)
        if(ISTEP == 1 .AND. IINCS /=1) STRAN(IELEM)=STRAN(IELEM) &
                                              + (FLUEN(IELEM)-LASTF(IELEM))
        if(ISTEP == 1 .AND. IINCS /=1) TSTRN(IELEM)=TSTRN(IELEM) &
                                              + (FLUEN(IELEM)-LASTF(IELEM))
        LASTF(IELEM) = FLUEN(IELEM)
        FLUEN(IELEM) = FLUEN(IELEM) + VIVEL(IELEM) * DTIME
        DASH1(IELEM) = YONG1(IELEM)*EXP(IXCSI)*FLUEN(IELEM) + HISTY(IELEM)
        CREPS(IELEM) = ( YONG1(IELEM) / (YONG0(IELEM) + YONG1(IELEM)) )
        VIVEL(IELEM)= GAMA1(IELEM) * CREPS(IELEM) &
                            * (STRES(IELEM)-(YONG0(IELEM)*FLUEN(IELEM)))
        DELTM = TAUFT * ABS(TSTRN(IELEM) / VIVEL(IELEM))
        if(DELTM < DNEXT) DNEXT = DELTM
    end do
    DTIME = DNEXT
    if(ISTEP == 1) DTIME = DTINT
    do IELEM = 1, NELEM
        FACTR = (YOUNG(IELEM)*VIVEL(IELEM)*DTIME-STRES(IELEM))*XAREA(IELEM)
        ELOAD(IELEM,1) = -FACTR*CALFA(IELEM)
        ELOAD(IELEM,2) = -FACTR*SALFA(IELEM)
        ELOAD(IELEM,3) =  FACTR*CALFA(IELEM)
        ELOAD(IELEM,4) =  FACTR*SALFA(IELEM)
    end do
    ELOAD = ELOAD + TLOAD
END SUBROUTINE INCVE
```

Fonte: autoria própria, elaborado com draw.io.

INCVE 01-03 Adiciona o módulo COMMON (com as variáveis comuns as subrotinas).

INCVE 04-05 Zera a matriz de pseudo-cargas utilizada na n-ésima iteração do método de Newton-Raphson. Para a primeira iteração, o intervalo de tempo é zero. O fator de tempo multiplicativo para a próxima iteração é definido pelo *input*.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

INCVE 06-22 O incremento de tensão $\Delta\sigma^{(n)}$ é dado a partir da equação **(4.7)**, e o incremento de deformação viscoelástica $\Delta\epsilon_{ve}^{(n)}$, para cada elemento, é obtido pela regra de Euler. Já o termo histórico dá-se conforme **(4.39)**:

$$\Delta\sigma^{(n)} = E\left(\frac{\Delta\phi_1^{(n)} - \Delta\phi_2^{(n)}}{L} - \dot{\epsilon}_{ve}^{(n)}\Delta t_n\right) \quad \textbf{(4.48)}$$

$$\Delta\epsilon_{ve}^{(n)} = \dot{\epsilon}_{ve}^{(n)}\,\Delta t_n \quad \textbf{(4.49)}$$

Logo após, determina-se as deformações totais, tensões, deformações viscoelásticas e a evolução de tensões no amortecedor:

$$\epsilon^{(n+1)} = \epsilon^{(n)} + \Delta\epsilon^{(n)} \quad \textbf{(4.50)}$$

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} + \Delta\sigma^{(n)} \quad \textbf{(4.51)}$$

$$\epsilon_{ve}^{(n+1)} = \epsilon_{ve}^{(n)} + \Delta\epsilon_{ve}^{(n)} \quad \textbf{(4.52)}$$

$$q_1^{(n+1)} = E_1 e^{\xi}\epsilon_{ve}^{(n+1)} + \mathcal{H}^{(n)} \quad \textbf{(4.53)}$$

$$\mathcal{H}^{(n)} = e^{\xi}\left(e^{\xi}q_1^{(n)} - E_1\,\epsilon_{ve}^{(n)}\right) \quad \textbf{(4.54)}$$

INCVE 23-30 Determina-se as parcelas de fluência imediata.

INCVE 31-36 Calcula-se o coeficiente de fluência e a taxa de deformação viscoelástica para cada elemento:

$$\dot{\epsilon}_{ve}^{(n+1)} = \eta\,V'\left(\sigma^{(n+1)} - E_0\,\epsilon_{ve}^{(n+1)}\right) \quad \textbf{(4.55)}$$

INCVE 37-41 Aplica-se a limitação do tempo e avança para o tempo t_{n+1}

INCVE 42-48 Depois, realiza-se a correção de equilíbrio, de forma a avaliar as forças residuais para cada elemento:

$$\boldsymbol{\psi}^{(n+1)} = A\,\sigma^{(n+1)}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \boldsymbol{f}^{(n+1)} \quad \textbf{(4.56)}$$

INCVE 49-50 Por fim, adiciona-se essas forças ao vetor de pseudo-cargas incrementais, para uso no próximo passo de tempo:

$$\boldsymbol{\Delta V}^{(n+1)} = AE\,\dot{\epsilon}_{ve}^{(n+1)}\,\Delta t_{n+1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \boldsymbol{\Delta f}^{(n+1)} + \boldsymbol{\psi}^{(n+1)} \quad \textbf{(4.57)}$$

Vale ressaltar que o carregamento total aplicado na n-ésima iteração é dado pela matriz **TLOAD** e contém $\boldsymbol{f}^{(n+1)}$ e $\boldsymbol{\Delta f}^{(n+1)}$. Após feito a inclusão das deformações

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

viscoelásticas, deve-se verificar se o regime estacionário foi atingido por meio da taxa de deformação viscoelástica $\dot{\epsilon}_{ve}^{(n+1)}$em cada elemento. A solução é encerrada se ela resultou suficientemente pequena. Caso contrário, deve-se continuar com as próximas rotinas e repetir todo o procedimento para o próximo passo de tempo (*time step*). Se o processo convergiu, pode-se partir para o próximo incremento de carga (*load increment*).

4.7 Resultados no modelo viscoelástico generalizado de Maxwell

Com o objetivo de testar a eficiência do código de cálculo em questão, especialmente no que se refere ao funcionamento das expressões do modelo viscoelástico, selecionaram-se alguns exemplos capazes de fornecer informações suficientes para uma avaliação adequada. Os exemplos foram então testados considerando os seguintes casos:

- Caso 1: regime viscoelástico de Kelvin-Voigt:

  $\eta = 0{,}001\,; E = 2000\dfrac{kN}{cm^2};\ E_0 = 2000\ kN/cm^2\,; E_1\ =\ -$

- Caso 2: regime viscoelástico com variável interna:

  $\eta = 0{,}001\,;\ E = 2000\dfrac{kN}{cm^2};\ E_0 = 2000\ kN/cm^2\,; E_1 = 2000\ kN/cm^2$

A análise consiste em uma treliça plana bidimensional formada por 5 barras de mesmas características de área $A = 10\ cm^2$, com uma carga P de $180\ kN$, conforme trabalho de dissertação de mestrado do engenheiro civil Munaiar (1994) e ilustrado na figura 39.

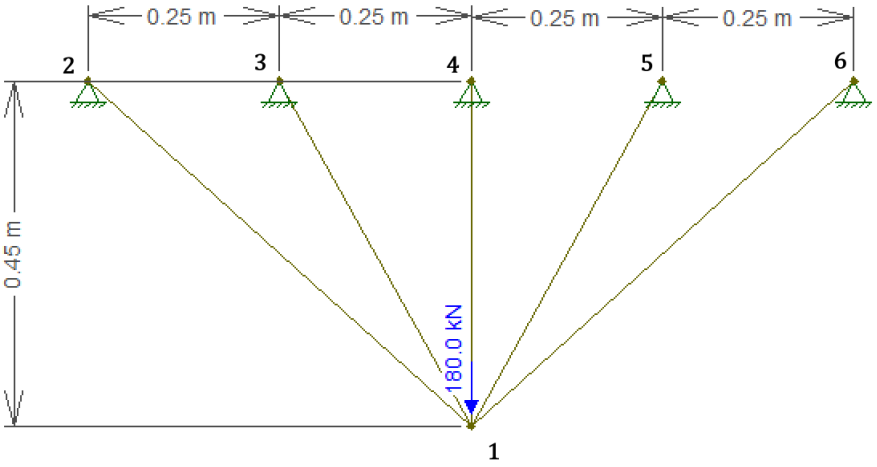
Ainda mais, também é apresentado uma solução analítica para o problema do Caso 1 de acordo com Munaiar (1994):

$$\epsilon(t) = \sigma\left[\frac{E + E_0}{E\ E_0} - \frac{e^{-(E_0\,\eta\,t)}}{E_0}\right] \qquad \textbf{(4.58)}$$

São comparados de forma ilustrativa para o Caso 1, os valores de deformações nas três primeiras barras (1-2, 1-3, 1-4), para o sétimo (7º) incremento de carga, conforme apresentados na tabela 7.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 39. Treliça plana formada por 5 barras.



Fonte: MUNAIAR (1994). Elaborado com FTOOL (versão 4.01).

Tabela 7. Deformações para o Caso 1.

Elemento	EXPRRES. 4.1	MUNAIAR	MODOWEN
1-2	$2{,}74481 \cdot 10^{-3}$	$2{,}74519 \cdot 10^{-3}$	$2{,}74475 \cdot 10^{-3}$
1-3	$4{,}69689 \cdot 10^{-3}$	$4{,}68754 \cdot 10^{-3}$	$4{,}68678 \cdot 10^{-3}$
1-4	$6{,}13347 \cdot 10^{-3}$	$6{,}13432 \cdot 10^{-3}$	$6{,}13332 \cdot 10^{-3}$

Fonte: autoria própria.

A seguir é realizado de forma ilustrativa para o Caso 2, os valores de deformações, tensões e fluência da treliça. Os resultados obtidos também foram avaliados a partir da expressão da fluência para o modelo de Zener (1948) e de acordo com Creus (1986):

$$\epsilon(t) = \sigma\left[\frac{1}{E} + \frac{1}{E_0}\left(1 - \frac{E_1}{E_0 + E_1}e^{\left(-t\,\eta\frac{E_0\,E_1}{E_0+E_1}\right)}\right)\right] \qquad \textbf{(4.59)}$$

Analogamente para o Caso 2, os valores de deformações correspondem as três primeiras barras (1-2, 1-3, 1-4), para o sétimo (7º) incremento de carga, conforme apresentados nas tabelas 8 e 9:

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Tabela 8. Análise viscoelástica com parâmetro interno pelo MODOWEN.

ELEMENTO	DEFORMAÇÃO	FLUÊNCIA	FLUÊNCIA (%)
1-2	$2{,}74481 \cdot 10^{-3}$	$1{,}37241 \cdot 10^{-3}$	0,13 %
1-3	$4{,}68690 \cdot 10^{-3}$	$2{,}34345 \cdot 10^{-3}$	0,23 %
1-4	$6{,}13347 \cdot 10^{-3}$	$3{,}06673 \cdot 10^{-3}$	0,30 %

Fonte: autoria própria.

Tabela 9. Resultado da análise viscoelástica pela expressão analítica **(4.59)**.

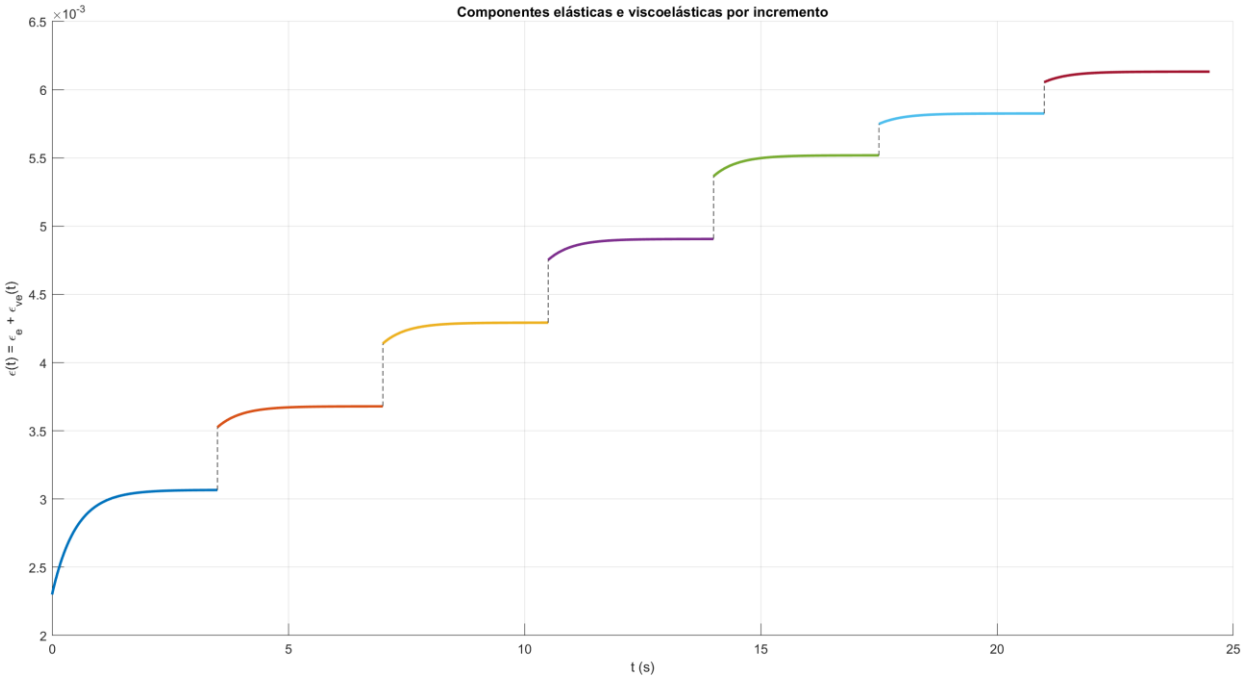
ELEMENTO	DEFORMAÇÃO
1-2	$2{,}74418 \cdot 10^{-3}$
1-3	$4{,}68582 \cdot 10^{-3}$
1-4	$6{,}13206 \cdot 10^{-3}$

Fonte: autoria própria.

A representação da evolução do carregamento com as deformações também é apresentada na figura 40 para a barra central (1-4). Quando o carregamento é aplicado em passos múltiplos, a barra tem tempo para desenvolver fluência progressivamente entre os incrementos de carga. Isso faz com que a curva tensão–deformação (ou carga–deformação) apresente uma trajetória mais suave, com maior deformação acumulada ao longo do tempo. Já quando o carregamento é aplicado em um único passo, toda a tensão inicial aparece instantaneamente. Como a fluência depende do tempo sob tensão, o material responde com uma deformação inicial maior, mas uma evolução temporal diferente, pois não há a redistribuição gradual que ocorre nos incrementos sucessivos. Portanto, as curvas resultantes são diferentes, refletindo não só a não linearidade viscoelástica, mas também o efeito da história de carregamento.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 40. Evolução das deformações viscoelásticas.



Fonte: autoria própria.

Os arquivos de dados utilizados neste tópico podem ser encontrados no apêndice deste trabalho.

5 ESTRATÉGIAS DE PARALELIZAÇÃO E CONTROLE PARA ANÁLISES NÃO LINEARES

Uma vez que cada modelo requer múltiplas execuções até a convergência dos resultados ou a obtenção de respostas em diferentes condições de carregamento, neste tópico, buscou-se comparar ou estimar o desempenho computacional para as análises realizadas, bem como marchas de cálculo automatizadas. Essa necessidade torna fundamental a avaliação da eficiência dos algoritmos implementados, tanto em termos de tempo de processamento quanto de consumo de recursos computacionais.

Para viabilizar esse processo de forma eficiente, primeiramente recorreu-se a um solucionador numérico robusto do mercado, o software ABAQUS.

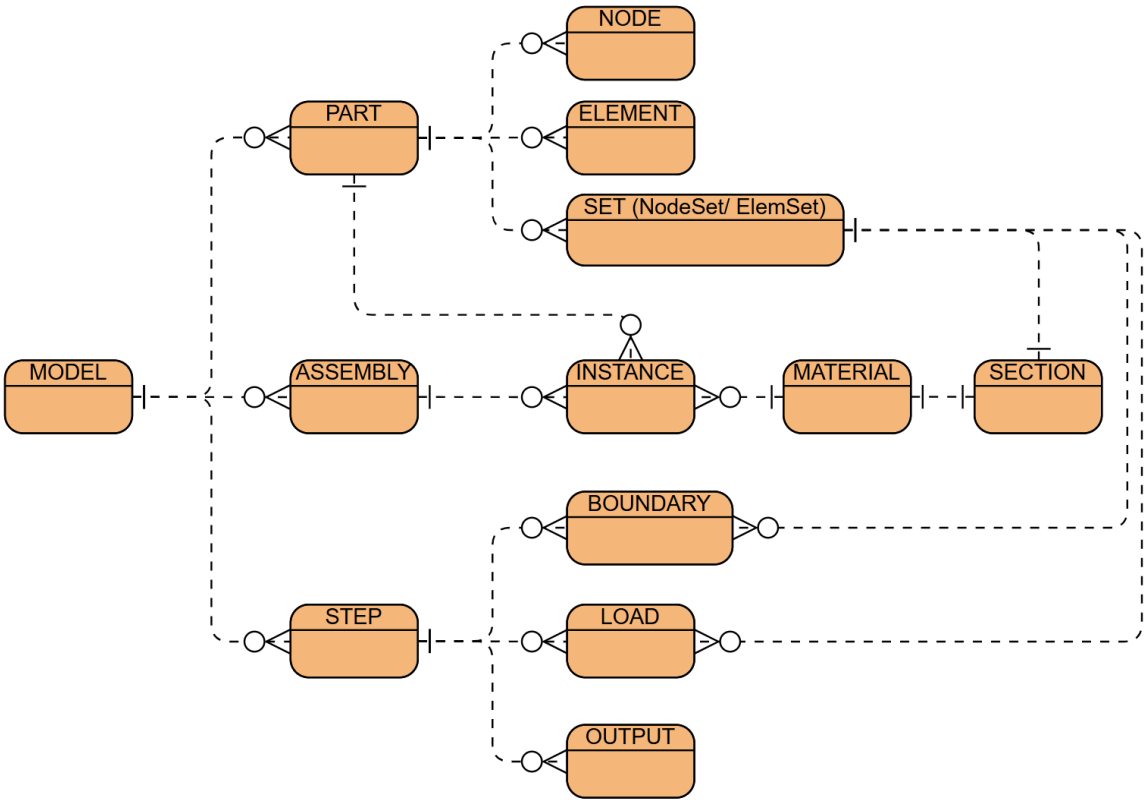
Posteriormente, testou-se o MODOWOEN com rotinas robustas utilizando o LAPACK, capaz de empregar técnicas avançadas de processamento paralelizado e otimização de memória.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

5.1 Análise da trajetória de equilíbrio automatizada pelo ABAQUS e MATLAB

Em geral, o procedimento para criar uma estrutura no ABAQUS segue o diagrama da figura 41 abaixo:

Figura 41. Modelo de arquivo de entrada de dados do ABAQUS.

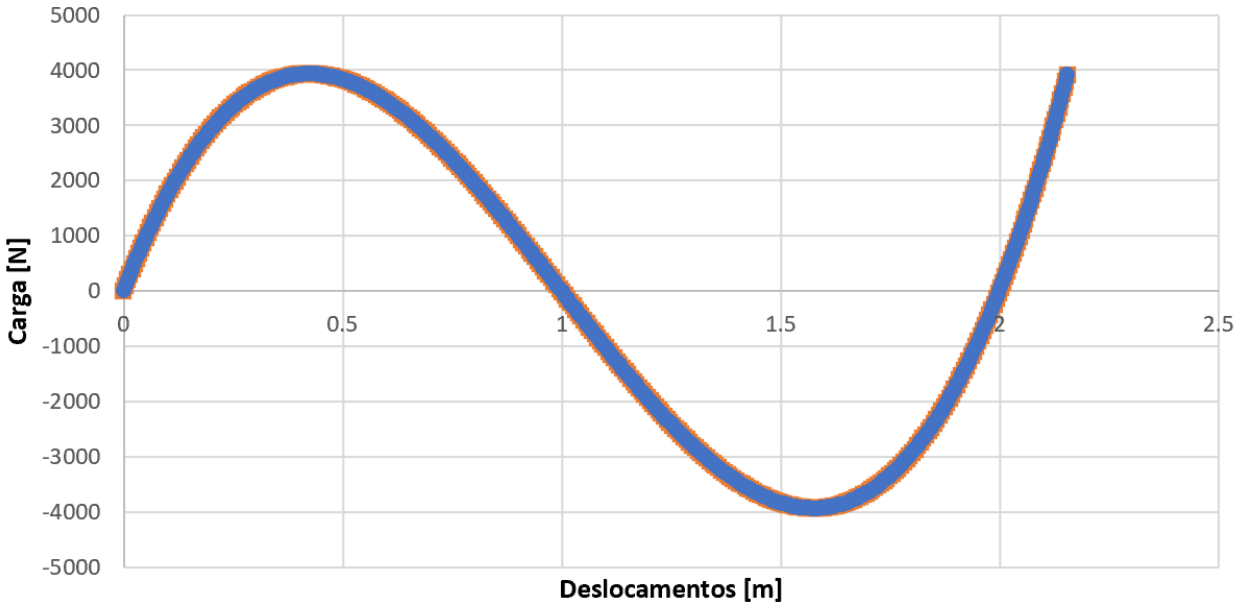


Fonte: autoria própria, elaborado com Visual Paradigm.

A trajetória de equilíbrio automatizada é obtida pelo MATLAB por meio de um algoritmo desenvolvido com base no trabalho de Zhang et al. (2025). O método utiliza o software MATLAB, associado às bibliotecas necessárias para que o programa possa monitorar, em tempo real, a análise executada pelo ABAQUS por meio do terminal do Windows. A extração dos dados de processamento é realizada por um script em linguagem Python, responsável por registrar os esforços e deslocamentos em um arquivo de saída no formato *.txt. O procedimento detalhado é apresentado no apêndice deste trabalho, na figura 42, tem-se o gráfico do resultado registrado no arquivo de texto.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 42. Extração da trajetória de equilíbrio da TVM automatizada.

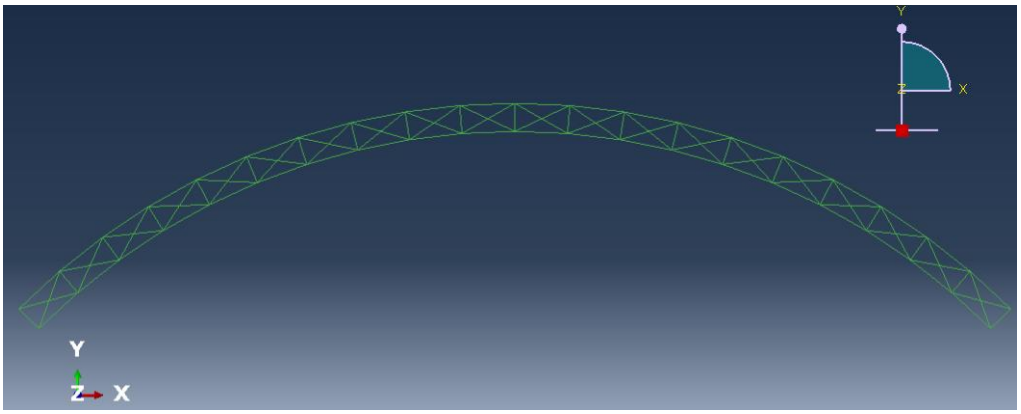


Fonte: autoria própria, elaborado com o Excel 2025.

5.2 Análise de tempo de processamento pelo ABAQUS

A seguir, é apresentado o modelo da Treliça de Crisfield, retirado do trabalho da tese de doutorado do engenheiro civil Kzam (2016). A estrutura foi implementada por meio do software ABAQUS, com $E = 10^7 Pa$, $A = 1\ m^2$ uma força $F = 10^6 N$ sendo aplicada no vínculo superior central da treliça.

Figura 43. Arco treliçado de Crisfield.



Fonte: autoria própria, elaborado com o ABAQUS Standard Learning Editions 2025.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

O modelo da treliça de Crisfield é inserida nesse contexto com o intuito inicial de se estimar métricas entre o tempo de processamento e o número de elementos da estrutura. O modelo de Crisfield apresenta uma treliça composta por 101 elementos. Já a TVM, apenas dois.

Para a análise de tempo de processamento, utilizou-se o tempo total do CPU (*total CPU time).* Inicialmente, definiu-se uma análise incremental fixa para o controle de força até o valor de pico. Posteriormente, é feita uma análise incremental variável por meio de controle de deslocamentos. As duas análises foram realizadas com 10 000 incrementos, porém a análise por controle de força somente ocorreu até a carga de pico (ponto de instabilidade), pois a partir desse ponto o ABAQUS encerra a análise. Ambas as análises são realizadas para o ABAQUS Standard (versão via terminal do Windows), quanto pelo ABAQUS CAE (com ambiente gráfico). Os resultados são apresentados na tabela 10, sendo utilizado um processador Intel® Core™ i5-4200 CPU @ 1,60GHz, ano 2013.

Tabela 10. Análise de custo computacional pelo ABAQUS.

	Controle por força (tempo em segundos)		**Controle por deslocamento** (tempo em segundos)	
	Standard	*CAE*	*Standard*	*CAE*
TVM	0,60	1,00	217	492
CRISFIELD	0,20	0,80	246	484

Fonte: autoria própria.

Embora o modelo de Crisfield possua cerca de cinquenta vezes mais elementos do que o modelo da TVM, o custo computacional permaneceu praticamente inalterado. Isso ocorre porque, em treliças pequenas, o tempo total de CPU do ABAQUS é dominado pelo algoritmo não linear (Newton–Raphson ou Riks), e não pela montagem dos elementos. Assim, mesmo aumentando significativamente o número de barras, o custo é desprezível quando comparado às iterações de convergência. Dessa forma, o número de incrementos e o comportamento pós-pico exercem influência dominante no tempo total do que o número de elementos.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

5.3 Análise de processamento pelo MODOWEN

A TVM foi testada com a incorporação de rotinas numéricas robustas baseadas no pacote LAPACK (*Linear Algebra Package*), amplamente reconhecido por sua eficiência em operações matriciais e solução de sistemas lineares de grande porte. Esta foi comparada com o método de redução de Gauss, introduzido por meio da subrotina GREDUC. O uso do LAPACK possibilitou o emprego de técnicas avançadas de otimização de memória, resultando em ganhos significativos de desempenho computacional, especialmente em análises que envolvem muitos incrementos. Para a TVM considerou-se 20 000 incrementos de deslocamentos. Na análise de processamento, utilizou-se o compilador Intel IFX 2025.2.0 (20250605), associado ao ambiente de desenvolvimento Visual Studio 2022.

Tabela 11. Análise de custo computacional pelo MODOWEN.

	Controle por deslocamento (tempo em segundos)	
	GREDUC	LAPACK
TVM	64	34

Fonte: autoria própria.

A análise por controle dos deslocamentos é feita a partir do método de Newton-Raphson. É importante ressaltar, portanto, que uma comparação direta com o método de Riks pode ser inconsistente. Com o resultado, nota-se um ganho significativo de tempo de processamento.

5.4 Análise da trajetória de equilíbrio automatizada pelo MODOWEN

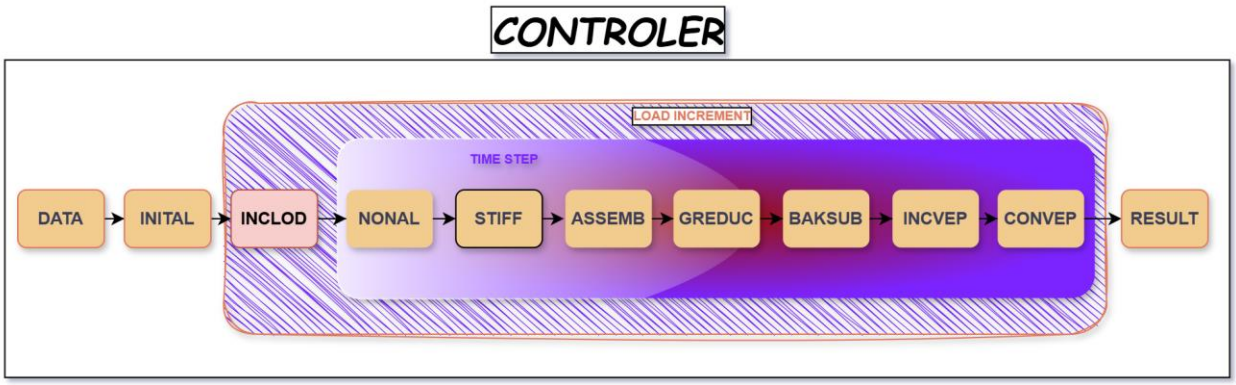
Marchas de cálculo automatizadas destinadas à determinação da trajetória de equilíbrio permitem que o processo iterativo de solução avance de forma autônoma, conforme o comportamento da resposta estrutural. Tal abordagem possibilita a redução de necessidade de intervenção manual durante as simulações, tornando o processo mais eficiente e reprodutível.

A partir do programa desenvolvido neste trabalho, tornou-se possível implementar um algoritmo de monitoramento automatizado, explorando os recursos de paralelização

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

fornecidos pelo OpenMP. O controlador adotado apresenta uma estrutura conceitualmente simples, porém passível de expansão para aplicações em larga escala, permitindo a criação de um banco de dados eficiente e de fácil gerenciamento. Embora o algoritmo proposto represente uma inovação em termos de implementação na linguagem Fortran, o modelo de dados é devido a Zhang et al. (2025).

Figura 43. Modelo de controlador do MODOWEN.



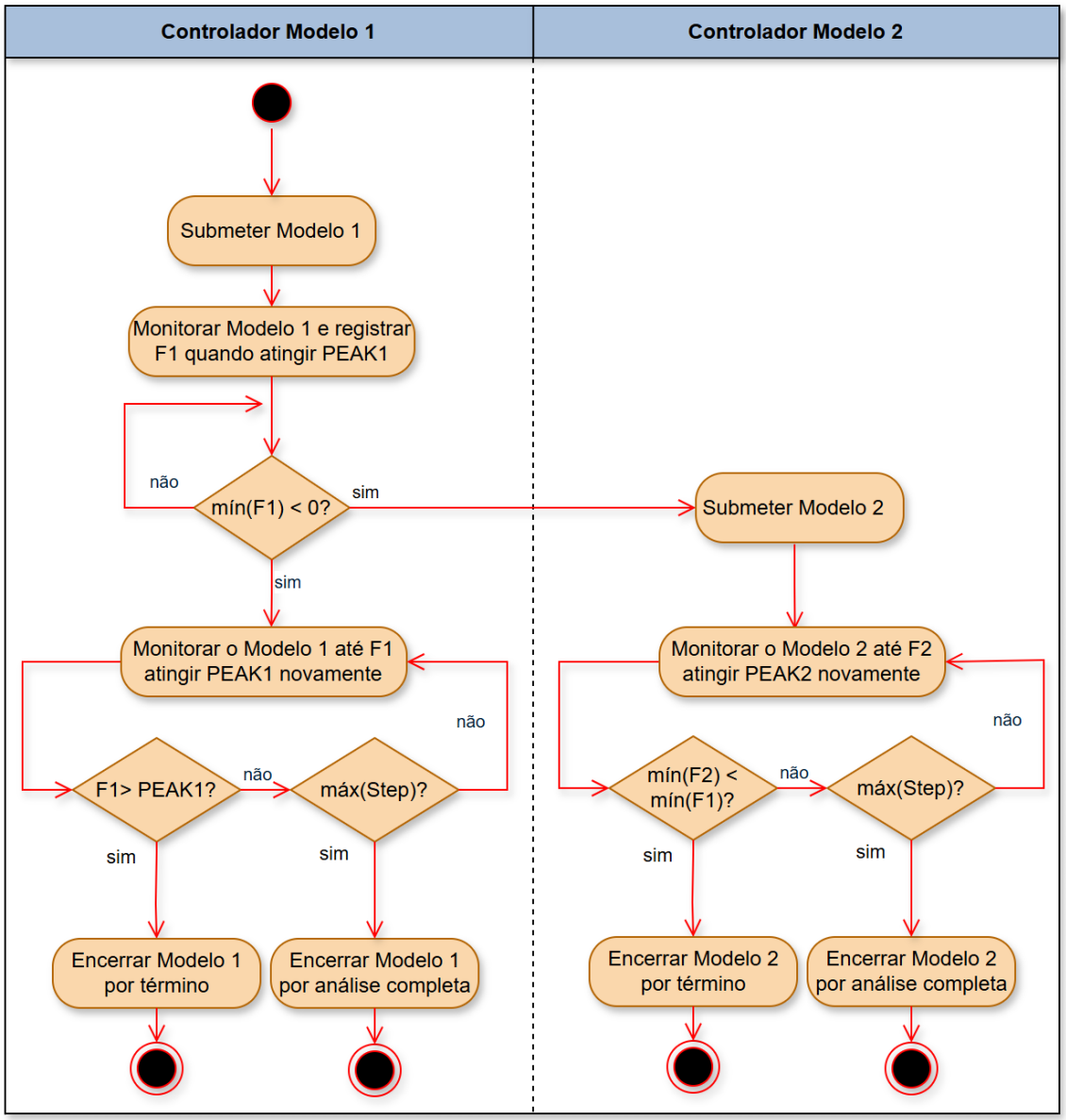
Fonte: autoria própria, elaborado com draw.io.

O controlador funciona como um *main program* (programa principal) que pode iniciar e monitorar as demais rotinas de cálculo. Com isso, permite-se gerar mais de uma análise usando *threads* (tarefas que o sistema operacional distribui entre os núcleos do processador) de forma independente. Após o início da análise, o controlador permanece inspecionando as rotinas de cálculo por meio da subrotina de resultado (RESULT). Com isso, tem-se o controlador atuando diretamente na interpretação dos resultados. Na figura 44, apresenta-se o fluxograma geral do controlador.

Para paralelizar o código, primeiramente, atualiza-se todas as variáveis globais do módulo COMMON, pois *threads* distintas não devem sobrescrever as mesmas variáveis utilizadas em rotinas compartilhadas. Para isso, basta introduzir a estrutura *type* no módulo. A seguir, cria-se um módulo adicional (CONTROL) com as variáveis que são passadas como parâmetro para a subrotina RESULT. A força de reação e deslocamento monitorado, também são introduzidos neste módulo para serem compartilhadas entre as *threads*. Adicionalmente, introduz-se uma variável compartilhada nesta subrotina, responsável por enviar um sinal ao controlador de acordo com a resposta nodal definida para a análise.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Figura 44. Fluxograma do controlador.



Fonte: autoria própria (elaborado com *draw.io*), adaptado de Zhang et al. (2025).

Dentro de um domínio paramétrico definido pelo usuário, o processo pode acontecer sozinho, sem que seja preciso ficar ajustando tudo manualmente. Isso deixa o trabalho muito mais rápido e facilita a geração das trajetórias. Com isso, o programa consegue calcular, de forma eficiente, várias trajetórias de equilíbrio não lineares.

Além disso, o algoritmo pode ser usado para diferentes finalidades. O critério de parada do controlador, por exemplo, pode ser ajustado conforme o que se deseja

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

analisar. Assim, ao invés de encerrar o modelo ao atingir o número máximo de *steps*, o usuário pode configurar o programa para parar quando a estrutura atingir uma certa deformação, quando uma barra alcançar um nível específico de tensão, quando o deslocamento ultrapassar um valor limite, ou qualquer outra condição que seja útil para o estudo.

Os softwares de análise estrutural, de modo geral, ainda carecem de implementações dedicadas à obtenção e à avaliação simultânea de múltiplas trajetórias de equilíbrio. Embora a integração entre MATLAB e ABAQUS tenha proporcionado resultados satisfatórios, diversas limitações persistem, conforme discutido na Seção 5.1.

Tanto o ABAQUS quanto o MATLAB são ferramentas comerciais que requerem licenças de uso, o que pode inviabilizar sua adoção em determinados projetos devido ao alto custo envolvido. Contudo, as limitações mais relevantes dessas plataformas relacionam-se à dificuldade de tornar o processo reprodutível. Em particular, o ABAQUS opera predominantemente como uma “caixa-preta”, restringindo o acesso direto aos seus arquivos internos e dificultando a extração automatizada das trajetórias de equilíbrio. A superação desse entrave demandaria procedimentos adicionais de pós-processamento, incluindo a manipulação de seus arquivos de saída mediante bibliotecas de processamento de sinais do MATLAB e rotinas auxiliares em Python. Além disso, essa abordagem ainda apresenta restrições significativas quando aplicada à análise dinâmica estrutural.

Diante desse cenário, o desenvolvimento de um programa modularizado desde sua concepção, estruturado para atuar como um serviço especializado na obtenção das trajetórias de equilíbrio, otimiza o desempenho do algoritmo numérico, ampliando sua eficiência operacional. Essa estratégia contribui para a redução do tempo de processamento e favorece a construção de um banco de dados robusto, consistente e adequado a aplicações em larga escala para treinamento de algoritmos de inteligência artificial.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

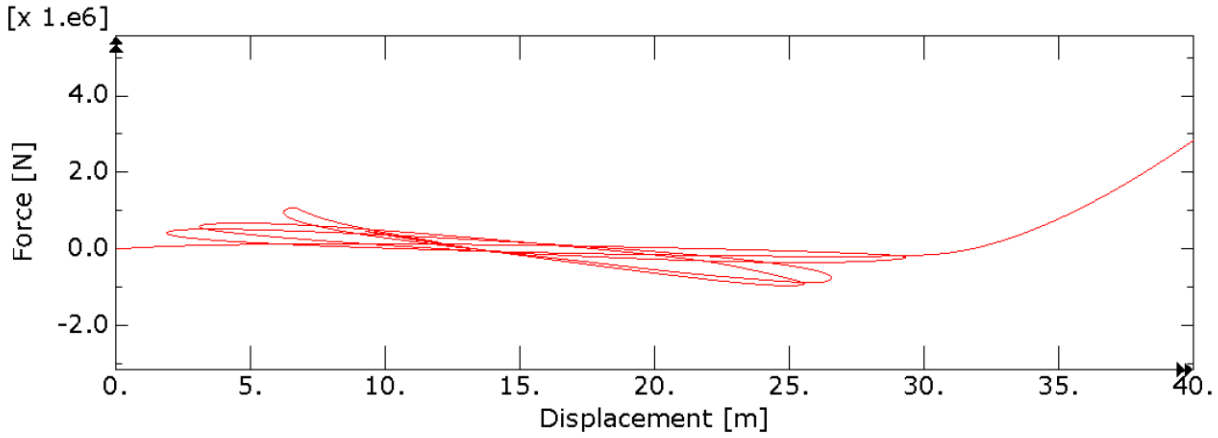
6 CONCLUSÃO

Este trabalho desenvolve um controlador inteiramente implementado em Fortran, capaz de automatizar e paralelizar a obtenção de trajetórias de equilíbrio não lineares. A proposta reestrutura o código original de Owen, introduzindo módulos orientados a tipos, paralelização via OpenMP e um sistema de monitoramento em tempo real da resposta estrutural. Com isso, torna-se possível executar múltiplas análises simultaneamente, eliminar a necessidade de intervenção manual e estabelecer uma base escalável para a geração massiva e reprodutível de trajetórias de equilíbrio, num algoritmo *open-source*.

Por outro lado, a simplicidade estrutural da TVM empregada neste trabalho gera limitações quando se busca investigar aspectos mais específicos da resposta mecânica, de modo que análises mais complexas podem se tornar inadequadas ou incompletas quando conduzidas nela. Embora adequada para validações iniciais e para o desenvolvimento do algoritmo de controle, essa configuração reduzida tende a se mostrar insuficiente em análises que envolvem fenômenos com alta não linearidade geométrica, como *snap-back* e bifurcações, os quais são extremamente sensíveis a pequenas imperfeições e variações geométricas.

Na análise por controle de deslocamentos apresentada na Figura 43, emprega-se o método de Crisfield/Riks, que permite capturar com maior precisão o comportamento pós-crítico e é mais adequado para situações com alta não linearidade geométrica. O gráfico correspondente, mostrado na Figura 45, exige diversas alterações e manipulações nas configurações de *output* para obter a trajetória de equilíbrio.

Figura 45. Trajetória de equilíbrio do arco treliçado de Crisfield.



Fonte: autoria própria. Elaborado com o ABAQUS Standard Learning Edition 2025.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

Na figura 45, ao se ultrapassar o *peak value* (primeiro ponto de instabilidade), a estrutura continua percorrendo a trajetória de equilíbrio até o ponto próximo ao deslocamento de 30 metros, caracterizado como o primeiro *turning-point* (curva carga–deslocamento inverte sua direção), onde a rigidez tangente (vertical) se anula e o método incremental convencional de controle de deslocamentos, por Newton-Raphson, deixa de convergir. Com isto, faz-se necessário a solução pelo método de *arc-length*, o qual pode descrever de forma adequada situações de instabilidade de *snap-through* e *snap-back.*

Além disso, este trabalho considera imperfeições de forma controlada e simplificada, não abrangendo variabilidades reais ou distribuições probabilísticas. Também, embora foi discutido o potencial da Inteligência Artificial no MEF, não se implementou modelos completos de aprendizado.

Essas restrições indicam a necessidade de implementação e desenvolvimento de modelagens capazes de lidar de forma mais abrangente com o tema de pesquisa proposto. Como perspectiva futura, destaca-se a possibilidade de estender a análise do MODOWEN utilizando rotinas fundamentadas capazes de capturar *snap-back* e combinar a analise dinâmica com a trajetória de equilíbrio de forma consistente. Dessa maneira, a melhoria das rotinas computacionais poderá viabilizar a expansão do estudo para análises estruturais dinâmicas, ampliando o escopo e a aplicabilidade da metodologia apresentada.

Conclui-se que a TVM permanece uma referência para o estudo de fenômenos não lineares e para o desenvolvimento de algoritmos robustos no MEF, sendo uma base eficaz para futuras investigações em engenharia estrutural.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

7 APÊNDICE

Neste apêndice são apresentados os códigos desenvolvidos e utilizados ao longo deste trabalho. Ressalta-se que tais códigos têm finalidade educacional e acadêmica, sendo disponibilizados para fins de estudo, reprodução dos resultados e compreensão metodológica. Qualquer adaptação ou redistribuição dos códigos aqui apresentados é de responsabilidade do usuário, que deve observar as normas éticas e legais pertinentes, bem como creditar adequadamente suas fontes quando necessário.

7.1- Código do modelo viscoelástico unidimensional para o MATLAB e análise de instabilidade da TVM do capítulo 3.2.8.1 sobre a solução analítica:

https://github.com/leoliveras/FEM/MATLAB

7.2 - Códigos do capítulo 3 para as análises de instabilidades e do capítulo 4 para as análises de fluência da TVM usando o MODOWEN:

https://github.com/leoliveras/FEM/FORTRAN

7.3 - Código do Capítulo 5 para as análises de trajetória de equilibro automatizadas:

https://github.com/leoliveras/FEM/SHM

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMARAL DE SOUSA, William Carvalho; IKEDA Júnior, Isamu. **Análise não linear de estruturas: aplicação do método do comprimento de arco de Crisfield**. Revista de Engenharia e Tecnologia, v. 9, n. 3, 2017. Disponível em: https://revistas.uepg.br/index.php/ret/article/view/11961. Acesso em: 08 dez. 2025.

ARHAMI, Arhami; HASANUDDIN, Iskandar; MASRI, Masri. **Optimization process of the Truss Structure using Finite Element Analysis: Step by step from 2D to 3D space.** Jurnal Polimesin, v. 21, n. 4, p. 421–425, 2023.

BARBOSA, Fábio Condado. **Análise dinâmica não linear de estruturas abatidas. Dissertação (Mestrado)** — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017. DOI: 10.11606/D.3.2017.tde-27112017-143431.

BARBOSA, Gustavo Botelho. **Estudo da estabilidade dinâmica de estruturas reticuladas planas através dos expoentes de Lyapunov considerando não-linearidades física e geométrica pela formulação posicional do método dos elementos finitos. Dissertação (Mestrado)** — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2023. Orientador: Marcelo Greco.

BERNOULLI, Jacob. **Opera Posthuma**. Genebra: Marc-Michel Bousquet, 1742.

BILYK, Serhii; BILYK, Artem; TONKACHEIEV, Vitalii. **Determining sloped-load limits inside von Mises truss with elastic support.** Materials and Technology, v. 51, n. 6, p. 105–109, 2017. DOI: 10.17222/mit.2016.083.

BILYK, Serhii; BILYK, Artem; TONKACHEIEV, Vitalii. **The stability of low-pitched von Mises trusses with horizontal elastic supports.** Strength of Materials and Theory of Structures, v. 108, p. 131–144, 2022. DOI: 10.32347/2410-2547.2022.108.131-144.

BOOTH, A. D. **Numerical Methods**, Butterworth, London, 1966.

CASTRO, C. H. L.; ORLANDO, D.; GONÇALVES, P. B. **Nonlinear dynamics of elastically connected multistable structures**. Journal of Physics: Conference Series, v. 2647, n. 9, p. 092001, 2024. DOI: 10.1088/1742-6596/2647/9/092001.

COURANT, R. **Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. Bulletin of the American Mathematical Society**, 49(1), 1-23.

CREUS, G. J. **Viscoelasticity: Basic Theory and Applications to Concrete Structures**. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1986.

DESCARTES, René. **Discurso do Método**. Tradução de Guido Antônio de Almeida. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

FALCONER, Isobel. Strutt, John William, third Baron Rayleigh (1842–1919). **Oxford Dictionary of National Biography**. Oxford: Oxford University Press. Disponível em: https://www.oxforddnb.com/. Acesso em: 20 nov. 2025.

FELIPE, Túlio Raunyr Cândido; ANDRANDE, Kaliel Gomes; JANUÁRIO, Rodolfo Baculle; SIMÕES, Marcos Antônio. **Discussões sobre análise analítica da trajetória de equilíbrio de estruturas de barra simples sujeitas a grandes deslocamentos: uma abordagem energética**. InterScientia, João Pessoa, v. 4, n. 1, 2018. DOI: 10.26843/interscientia.v6i2.883.

FERNANDES, William Luiz. **Análise paramétrica da instabilidade de estruturas reticuladas planas esbeltas com comportamento dinâmico geometricamente não linear pelo método posicional dos elementos finitos. Tese (Doutorado)** — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2022.

FONSECA, Filipe Meirelles. **Comportamento não linear, bifurcações e instabilidade de uma treliça hiperelástica**. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Rio de Janeiro, 2018. DOI: 10.17771/PUCRio.acad.45764.

GALILEI, Galileo. **Duas Novas Ciências**. Tradução de Marcello Basile. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

HUYGENS, Christiaan. **The Pendulum Clock: or Geometrical Demonstrations concerning the Motion of Pendula as Applied to Clocks**. Tradução de Richard J. Blackwell. Ames: Iowa State University Press, 1986.

KALA, Zdeněk. **Stability of Von-Mises Truss with Initial Random Imperfections**. Procedia Engineering, v. 172, p. 473–480, 2017. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.02.055.

KEPLER, Johannes. **A Harmonia do Mundo**. Tradução de E. J. Aiton, A. M. Duncan e J. V. Field. Philadelphia: American Philosophical Society, 1997.

KEPLER, Johannes. **Nova Astronomia**. Tradução de William H. Donahue. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

LAGRANGE, Joseph-Louis. **Mécanique Analytique.** 2. ed. Paris: Gauthier-Villars, 1811.

LI, Chenfeng. David Roger Jones Owen. 19 October 1942 — 5 January 2020. **Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society**, v. 2025, n. 1, 2025. Disponível em: https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsbm.2024.0009. Acesso em: 03/12/2025.

LI, Pengcheng; ZHAO, Xuxiang; DING, Dangsheng; LI, Xiwei; ZHAO, Yanjun; KE, Lu; ZHANG, Xiaoyue; JIAN, Bin. **Optimization Design for Steel Trusses Based on a Genetic Algorithm**. Buildings, v. 13, n. 6, 2023. DOI: 10.3390/buildings13061496.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

MUNAIAR NETO, Jorge. **Modelos de comportamentos viscoelástico e viscoplástico na análise de estruturas planas**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Engenharia de Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994. DOI: 10.11606/D.18.1994.tde-15102024-113002.

NEWTON, Isaac. **Princípios Matemáticos da Filosofia Natural**. Tradução de Motoyuki Shishido. São Paulo: Editora da Unesp, 2022.

ORLANDO, Diego; GONÇALVES, Paulo B.; LENCI, Stefano; REGA, Giuseppe. **Influence of the mechanics of escape on the instability of von Mises truss and its control.** Procedia Engineering, v. 199, p. 778–783, 2017. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.048.

PANTALEÃO, Rafael. **Análise dinâmica e instabilidade de estruturas multiestáveis.** 2020. Iniciação Científica – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

PANTALEÃO, Rafael Jalkh. **Comportamento Dinâmico e Estabilidade de Estruturas Reticuladas com Apoios Elásticos.** Relatório de Pesquisa, Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, 2019.

PRISMA. **Transparent Reporting of Systematic Reviews and Meta-Analyses**. Disponível em: https://www.prisma-statement.org/. Acesso em: 28/02/2025.

Santos, F. F. **Um Curso Introdutório ao Método dos Elementos Finitos - MEF**. Youtube, Brasil, 2022. Disponível em: https://youtu.be/eV d9WiUR3Q

SCHRÖDINGER, E. **Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. Naturwissenschaften**, v. 23, p. 807–812; 823–828; 844–849, 1935.

SELHORST, A. H. B.; MEYER, R.; COSTA, T.; ISOLDI, L. **Finite element analysis using shell elements on reticulated structures**. Revista Mundi Engenharia Tecnologia e Gestão, v. 2, n. 2, 2017. DOI: 10.21575/25254782rmetg2017vol2n2467.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. **Computational inelasticity**. New York: Springer, 1998.

SORIANO, Humberto Lima. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo: Edusp, 1997.

STUKELEY, William. Memoirs of Sir Isaac Newton’s Life. London: [s.n.], 1726.

TIMOSHENKO, S. P. **Resistência dos Materiais**. Volume 2. Tradução de Eduardo M. de Souza. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1993.

C. M. ZENER. **Elasticity and Anelasticity of Metals**, University of Chicago Press, Chicago, 1948.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35

ZHANG, Yujia; SHEN, Jiajia; TONG, Jingzhong; LINCOLN, Reece; ZHANG, Lei; LIU, Yang; EVANS, Ken E.; GROH, Rainer M. J. **Data-driven design of well-behaved nonlinear structures: A case study on the von Mises truss. International Journal of Solids and Structures**, v. 309, 2025. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2024.113146.

ZHOU, Z.; MURRAY, D. **An incremental solution technique for unstable equilibrium paths of shell structures.** Computer and Structure, vol. 55, n° 5, 1994.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. 7. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.

Versão Final Homologada
23/12/2025 17:35