



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS  
DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)**

**LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS EM PERSPECTIVA  
TRIGONOMÉTRICA**

**FERNANDA JEANE DA PAZ**

Foz do Iguaçu  
2026



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS  
DA VIDA E DA NATUREZA (ILACVN)**

**LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS EM PERSPECTIVA  
TRIGONOMÉTRICA**

**FERNANDA JEANE DA PAZ**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León  
Co-Orientador: Prof. Dr. Newton Mayer Solórzano Chávez

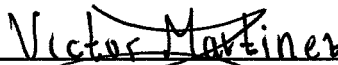
Foz do Iguaçu  
2026

FERNANDA JEANE DA PAZ

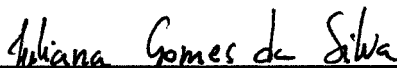
**DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS EM PERSPECTIVA  
TRIGONOMÉTRICA**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Instituto Latino-Americano  
de Ciências da Vida e da Natureza da  
Universidade Federal da Integração  
Latino-Americana, como requisito parcial  
à obtenção do título de Licenciada em  
Matemática.

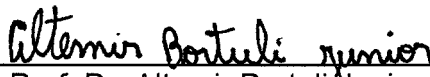
**BANCA EXAMINADORA**



\_\_\_\_\_  
Orientador: Prof. Dr. Víctor Arturo Martínez León  
(UNILA)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dra. Juliana Gomes da Silva  
(UNILA)



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Altemir Bortuli Junior  
(UNILA)

Foz do Iguaçu, 03 de julho de 2026.

## TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo da autora: Fernanda Jeane da Paz

Curso: Matemática – Licenciatura

Tipo de Documento

- |   |  |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> graduação | <input type="checkbox"/> artigo                                    |
| <input type="checkbox"/> especialização       | <input checked="" type="checkbox"/> trabalho de conclusão de curso |
| <input type="checkbox"/> mestrado             | <input type="checkbox"/> monografia                                |
| <input type="checkbox"/> doutorado            | <input type="checkbox"/> dissertação                               |
|   | <input type="checkbox"/> tese                                      |
|   | <input type="checkbox"/> CD/DVD – obras audiovisuais               |
|   | <input type="checkbox"/>   |
- 

Título do trabalho acadêmico: Demonstrações do Teorema de Pitágoras em Perspectiva Trigonométrica

Nome do orientador: Víctor Arturo Martínez León

Data da Defesa: 03/07/2026

### Licença não-exclusiva de Distribuição

A referida autora:

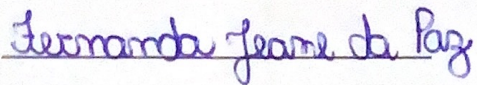
a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons Licença 3.0 Unported*.

Foz do Iguaçu, 10 de julho de 2026.



Fernanda Jeane da Paz

Dedico este trabalho a Deus, aos meus pais, aos meus sobrinhos e, com respeito e saudade, à memória do professor Lincon Senger.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por sua graça, cuidado e sustento ao longo de toda a minha trajetória sendo fonte de força e esperança nos momentos mais difíceis.

Ao meu orientador, professor Víctor Arturo Martínez León, expreso profunda gratidão pela excelência na orientação, dedicação, paciência e apoio constantes, além da inspiração e amizade que marcaram este percurso.

Ao meu co-orientador, professor Newton Mayer Solórzano Chávez, manifesto meu sincero agradecimento pela disponibilidade, pelas contribuições acadêmicas e pelo apoio oferecido durante o desenvolvimento deste trabalho. Sua colaboração foi fundamental para o aprimoramento desta pesquisa e para minha formação acadêmica.

Aos meus pais, Jane Aparecida Romero da Paz e Pedro da Paz, agradeço por serem meu alicerce, oferecendo amor, incentivo e apoio incondicional em todos os momentos. Este sonho também é de vocês.

À minha melhor amiga Sandra Maricel Martinez Ferreira, registro o meu sincero agradecimento pela parceria, amizade e cumplicidade desde o início desta jornada, tornando-a mais leve e significativa.

Aos meus sobrinhos, Cauã e Caleb, agradeço pelo carinho e alegria que sempre me proporcionaram, sendo fonte de motivação ao longo do caminho.

Presto também uma homenagem ao saudoso professor Lincon Senger, cuja dedicação e amor pelo ensino foram essenciais para despertar em mim o desejo de seguir essa trajetória.

Aos membros da banca examinadora, agradeço pela disponibilidade e pelas valiosas contribuições para o aprimoramento deste trabalho. Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a minha formação acadêmica e pessoal. A conclusão deste trabalho representa a realização de um sonho construído com esforço, dedicação e apoio coletivo, marcando o início de novos desafios e conquistas.

*Não fui eu que lhe ordenei? Seja forte e corajoso! Não se apavore e nem desanime, pois o Senhor, o Seu Deus, estará com você por onde você andar.*

**Josué 1:9**

## RESUMO

Este trabalho investiga, em perspectiva trigonométrica, demonstrações do Teorema de Pitágoras, tomando como ponto de partida o artigo *Five or Ten New Proofs of the Pythagorean Theorem*, de Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson. O objetivo central é mostrar que as razões trigonométricas elementares, quando tratadas em seu contexto geométrico próprio, podem organizar construções não triviais e sustentar demonstrações do Teorema de Pitágoras. Como fundamento teórico, o texto estabelece inicialmente um lema segundo o qual, em um triângulo retângulo, conhecido um ângulo agudo e um de seus lados, os demais lados ficam determinados pelas razões trigonométricas correspondentes. Em seguida, deduz geometricamente as fórmulas de adição de ângulos para seno e cosseno, trata o caso do triângulo retângulo isósceles e apresenta uma interpretação geométrica da série geométrica. Com essas ferramentas, o trabalho desenvolve dois conjuntos de demonstrações do Teorema de Pitágoras. No primeiro, reúne cinco demonstrações em diálogo com o artigo de Jackson e Johnson, reorganizadas e apresentadas em perspectiva própria. No segundo, apresenta cinco demonstrações obtidas ao longo da pesquisa, construídas no contexto deste trabalho a partir das ferramentas trigonométricas desenvolvidas nos capítulos preliminares. Ao longo de todo o texto, privilegia-se o uso sistemático das razões trigonométricas elementares. Embora essas razões estejam fundamentadas na semelhança de triângulos, as argumentações desenvolvidas são organizadas principalmente pela determinação de comprimentos por meio de relações trigonométricas. Os resultados obtidos mostram que a trigonometria elementar, compreendida com precisão conceitual, não apenas descreve triângulos retângulos, mas também oferece um princípio fecundo para a construção e a organização de demonstrações do Teorema de Pitágoras.

**Palavras-chave:** Teorema de Pitágoras; trigonometria; demonstrações geométricas; triângulos retângulos; razões trigonométricas.

## RESUMEN

Este trabajo investiga, desde una perspectiva trigonométrica, demostraciones del Teorema de Pitágoras, tomando como punto de partida el artículo *Five or Ten New Proofs of the Pythagorean Theorem*, de Ne'Kiya Jackson y Calcea Johnson. El objetivo central es mostrar que las razones trigonométricas elementales, cuando se consideran en su propio contexto geométrico, pueden organizar construcciones no triviales y sustentar demostraciones del Teorema de Pitágoras. Como fundamento teórico, el texto establece inicialmente un lema según el cual, en un triángulo rectángulo, conocido un ángulo agudo y uno de sus lados, los demás lados quedan determinados por las razones trigonométricas correspondientes. A continuación, deduce geoméricamente las fórmulas de adición de ángulos para el seno y el coseno, estudia el caso del triángulo rectángulo isósceles y presenta una interpretación geométrica de la serie geométrica. Con estas herramientas, el trabajo desarrolla dos conjuntos de demostraciones del Teorema de Pitágoras. En el primero, reúne cinco demostraciones en diálogo con el artículo de Jackson y Johnson, reorganizadas y presentadas desde una perspectiva propia. En el segundo, presenta cinco demostraciones obtenidas a lo largo de la investigación, construidas en el contexto de este trabajo a partir de las herramientas trigonométricas desarrolladas en los capítulos preliminares. A lo largo de todo el texto se privilegia el uso sistemático de las razones trigonométricas elementales. Aunque estas razones se fundamentan en la semejanza de triángulos, las argumentaciones desarrolladas se organizan principalmente mediante la determinación de longitudes por medio de relaciones trigonométricas. Los resultados obtenidos muestran que la trigonometría elemental, comprendida con precisión conceptual, no solo describe triángulos rectángulos, sino que también ofrece un principio fecundo para la construcción y la organización de demostraciones del Teorema de Pitágoras.

**Palabras clave:** Teorema de Pitágoras; trigonometría; demostraciones geométricas; triángulos rectángulos; razones trigonométricas.

## ABSTRACT

This work investigates, from a trigonometric perspective, proofs of the Pythagorean Theorem, taking as its starting point the article *Five or Ten New Proofs of the Pythagorean Theorem* by Ne’Kiya Jackson and Calcea Johnson. The main objective is to show that elementary trigonometric ratios, when considered within their proper geometric context, can organize nontrivial constructions and support proofs of the Pythagorean Theorem. As a theoretical foundation, the text first establishes a lemma stating that, in a right triangle, once an acute angle and one of its sides are known, the remaining sides are determined by the corresponding trigonometric ratios. It then derives geometrically the angle-addition formulas for sine and cosine, studies the case of the isosceles right triangle, and presents a geometric interpretation of the geometric series. With these tools, the work develops two collections of proofs of the Pythagorean Theorem. The first gathers five proofs in dialogue with the article by Jackson and Johnson, reorganized and presented from the author’s own perspective. The second presents five proofs obtained throughout the research, constructed within the framework of this work using the trigonometric tools developed in the preliminary chapters. Throughout the text, emphasis is placed on the systematic use of elementary trigonometric ratios. Although these ratios are grounded in triangle similarity, the arguments developed are organized primarily through the determination of lengths by means of trigonometric relations. The results show that elementary trigonometry, when understood with conceptual precision, not only describes right triangles but also provides a fruitful principle for the construction and organization of proofs of the Pythagorean Theorem.

**Keywords:** Pythagorean Theorem; trigonometry; geometric proofs; right triangles; trigonometric ratios.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Definições trigonométricas do seno e cosseno . . . . .	16
Figura 2 – Determinação dos lados de um triângulo retângulo a partir de um ângulo agudo e um lado . . . . .	17
Figura 3 – Fórmulas de adição de ângulos . . . . .	19
Figura 4 – Teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo isósceles. . . . .	20
Figura 5 – Interpretação geométrica da série geométrica . . . . .	23
Figura 6 – Construção do triângulo isósceles $ABB'$ . . . . .	26
Figura 7 – Construção sucessiva de triângulos retângulos . . . . .	26
Figura 8 – Construção do triângulo $ABD$ . . . . .	29
Figura 9 – Decomposição do triângulo $ABC$ nos triângulos $DBC$ e $ABD$ . . . . .	31
Figura 10 – Construção auxiliar para a quarta demonstração. . . . .	33
Figura 11 – Construção auxiliar para a quinta demonstração. . . . .	36
Figura 12 – Construção auxiliar para a quinta demonstração no caso isósceles. . . . .	38
Figura 13 – Primeira demonstração. . . . .	41
Figura 14 – Segunda demonstração. . . . .	44
Figura 15 – Terceira demonstração. . . . .	46
Figura 16 – Quarta demonstração. . . . .	48
Figura 17 – Quinta demonstração. . . . .	51

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>16</b>
2.1	AS FÓRMULAS DE ADIÇÃO DE ÂNGULOS	18
2.2	O TRIÂNGULO RETÂNGULO ISÓSCELES	20
2.3	SÉRIE GEOMÉTRICA	21
<b>3</b>	<b>CINCO DEMONSTRAÇÕES EM DIÁLOGO COM JACKSON E JOHNSON</b>	<b>25</b>
3.1	PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO	26
3.2	SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO	29
3.3	TERCEIRA DEMONSTRAÇÃO	31
3.4	QUARTA DEMONSTRAÇÃO	33
3.5	QUINTA DEMONSTRAÇÃO	36
<b>4</b>	<b>CINCO DEMONSTRAÇÕES EM PERSPECTIVA TRIGONOMÉTRICA</b>	<b>40</b>
4.1	PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO	40
4.2	SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO	43
4.3	TERCEIRA DEMONSTRAÇÃO	45
4.4	QUARTA DEMONSTRAÇÃO	48
4.5	QUINTA DEMONSTRAÇÃO	50
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>54</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>56</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O Teorema de Pitágoras ocupa posição central na história da Matemática. Sua elegância, sua ampla aplicabilidade e a variedade de contextos em que aparece fizeram dele um dos resultados mais estudados, reinterpretados e redemonstrados ao longo do tempo. A extensa coleção de demonstrações reunidas por Loomis (LOOMIS, 1940) já mostrava que o interesse por esse teorema não se reduz ao seu enunciado, mas se estende aos diversos modos de justificar, interpretar e reconstruir a igualdade

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Além do interesse matemático propriamente dito, o Teorema de Pitágoras também ocupa lugar privilegiado na história da geometria elementar. O debate sobre a origem de sua primeira demonstração, envolvendo tradições pitagóricas, euclidianas e mesmo resultados anteriores em outras culturas, continua sendo tema de investigação, como discutido por Lučić (LUČIĆ, 2022). Ao mesmo tempo, novas demonstrações seguem sendo propostas, sobretudo quando se examinam com maior cuidado os recursos permitidos em uma prova e o papel desempenhado por ideias geométricas e trigonométricas (ZIMBA, 2009; LUZIA, 2015).

Nesse cenário, destaca-se o artigo *Five or Ten New Proofs of the Pythagorean Theorem*, de Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson (JACKSON; JOHNSON, 2024), publicado em *The American Mathematical Monthly*. O trabalho das autoras é notável não apenas pelas novas demonstrações que apresenta, mas também pela clareza com que formula uma questão conceitual delicada: o que, afinal, deve ser entendido por uma demonstração trigonométrica do Teorema de Pitágoras? Em vez de tratar a trigonometria como um conjunto indiferenciado de fórmulas, Jackson e Johnson chamam atenção para o fato de que seno e cosseno costumam ser introduzidos por dois caminhos conceitualmente distintos: um baseado na medição de triângulos retângulos e outro baseado no círculo unitário.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> No espírito da discussão proposta por Jackson e Johnson (JACKSON; JOHNSON, 2024), distinguimos aqui duas situações conceitualmente diferentes. Para ângulos agudos, seno e cosseno podem ser definidos a partir da comparação entre lados de um triângulo retângulo; já para ângulos arbitrários, entra em cena a definição no círculo unitário. Embora ambas coincidam para ângulos agudos, elas respondem a problemas matemáticos distintos. No caso da definição por triângulos retângulos, sua consistência repousa no Teorema da Semelhança de Triângulos, que garante a invariância dessas razões para um mesmo ângulo agudo.

Essa observação possui relevância não apenas teórica, mas também didática. Como observam as autoras, talvez poucos assuntos gerem tanta confusão entre estudantes do ensino médio quanto a trigonometria (JACKSON; JOHNSON, 2024). Uma razão possível é justamente a sobreposição, na mesma terminologia, de procedimentos que partem de ideias diferentes. Quando essa distinção não é explicitada, pode-se dar a impressão de que duas imagens conceituais distintas foram impressas uma sobre a outra. Tal perspectiva é especialmente fecunda no caso do Teorema de Pitágoras, pois permite reexaminar com cuidado quais argumentos são realmente trigonométricos e quais apenas revestem de linguagem trigonométrica uma ideia de outra natureza.

Essa discussão também ajuda a compreender por que certas provas frequentemente apresentadas como trigonométricas devem ser analisadas com cautela. Por exemplo, a dedução imediata do Teorema de Pitágoras mediante as substituições  $a = c \operatorname{sen} \alpha$  e  $b = c \operatorname{cos} \alpha$ , reduzindo o problema à identidade  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ , pode ocultar uma dependência lógica dessa própria identidade em relação ao Teorema de Pitágoras, conforme a escolha das definições adotadas para as razões trigonométricas. De modo semelhante, uma demonstração por semelhança de triângulos pode sempre ser reescrita em linguagem trigonométrica, sem que isso altere a ideia matemática que a sustenta. Assim, a simples presença dos símbolos  $\operatorname{sen}$  e  $\operatorname{cos}$  não basta, por si só, para caracterizar uma prova como trigonométrica (JACKSON; JOHNSON, 2024).

É justamente nesse ponto que o artigo de Jackson e Johnson se mostra particularmente valioso. Dialogando com a tradição representada por Loomis (LOOMIS, 1940), com as reflexões históricas de Lučić (LUČIĆ, 2022) e com as contribuições de Zimba (ZIMBA, 2009) e Luzia (LUZIA, 2015), as autoras propõem não apenas novas demonstrações, mas também um método para procurar outras. Além disso, situam suas construções em um contexto geométrico elementar suficientemente rigoroso, compatível com um tratamento axiomático da geometria escolar, como o desenvolvido por Clark e Pathania (CLARK; PATHANIA, 2023).

O presente Trabalho de Conclusão de Curso tem como ponto de partida esse artigo (JACKSON; JOHNSON, 2024), mas não se limita a reproduzi-lo. Nosso objetivo é investigar demonstrações do Teorema de Pitágoras em perspectiva trigonométrica, reorganizando fundamentos, adaptando construções e desenvolvendo

novas abordagens. Em particular, o trabalho enfatiza uma ideia que se mostrou estrutural em todo o desenvolvimento: em um triângulo retângulo, uma vez conhecida a medida de um ângulo agudo e um de seus lados, os demais lados ficam determinados pelas razões trigonométricas correspondentes. Esse princípio, formalizado no Capítulo 2 como um lema, passa a desempenhar papel organizador em todas as demonstrações desenvolvidas ao longo do texto.

Essa escolha metodológica marca uma diferença importante em relação a abordagens mais tradicionais. Convém observar que as próprias razões trigonométricas utilizadas neste trabalho repousam, em sua formulação clássica para ângulos agudos, na semelhança de triângulos, pois é esse resultado que garante que as razões entre lados dependam apenas do ângulo considerado. Assim, a semelhança de triângulos permanece como fundamento conceitual da trigonometria elementar adotada ao longo do texto. Entretanto, uma vez estabelecidas essas definições e propriedades básicas, as demonstrações desenvolvidas neste trabalho são organizadas principalmente pela determinação de comprimentos por meio de relações trigonométricas. Com isso, buscamos evidenciar que seno, cosseno, tangente, secante, cotangente e cossecante, entendidos em seu contexto genuinamente trigonométrico, já possuem força suficiente para orientar construções geométricas não triviais. Em outras palavras, procuramos mostrar que a trigonometria elementar, quando tratada com precisão conceitual, não apenas descreve triângulos retângulos, mas também pode gerar demonstrações de um de seus resultados mais célebres.

Do ponto de vista da organização, o trabalho está dividido em cinco capítulos, incluindo esta introdução.

No Capítulo 2, apresentamos os resultados preliminares necessários para as demonstrações posteriores. Inicialmente, formalizamos um lema sobre a determinação dos lados de um triângulo retângulo a partir de um ângulo agudo e um lado conhecido. Em seguida, deduzimos geometricamente as fórmulas de adição de ângulos para seno e cosseno, tratamos separadamente o caso do triângulo retângulo isósceles e incluímos uma breve discussão sobre a série geométrica, acompanhada de interpretação geométrica.

No Capítulo 3, reunimos cinco demonstrações do Teorema de Pitágoras em diálogo mais direto com o artigo de Jackson e Johnson, reorganizadas e

apresentadas em perspectiva própria.

No Capítulo 4, apresentamos um segundo conjunto de cinco demonstrações obtidas ao longo do desenvolvimento deste trabalho, construídas a partir das ferramentas trigonométricas desenvolvidas nos capítulos anteriores.

Finalmente, no Capítulo 5, retomamos os principais aspectos do percurso desenvolvido e discutimos o valor matemático e formativo das demonstrações obtidas. Mais do que apresentar novos caminhos para um resultado clássico, pretendemos mostrar que a Matemática elementar permanece um espaço autêntico de criação, reorganização conceitual e investigação rigorosa.

As construções geométricas apresentadas ao longo do trabalho foram elaboradas com o auxílio do *software* GeoGebra 6.0.

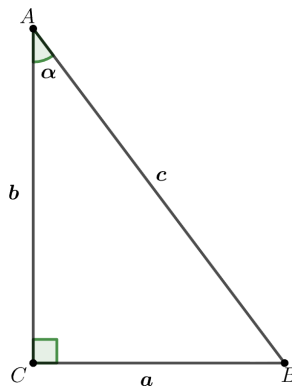
Por fim, registramos aqui que durante a elaboração deste trabalho, utilizou-se a ferramenta ChatGPT como apoio pontual à revisão linguística, reorganização expositiva e discussão de alternativas de redação. As ideias matemáticas, as demonstrações, as figuras, as escolhas conceituais e a versão final do texto são de inteira responsabilidade da autora e do orientador.

## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo, reunimos os resultados preliminares que servirão de base para as demonstrações desenvolvidas nos capítulos seguintes. Em vez de recorrer desde o início a argumentos de semelhança de triângulos, privilegiamos uma abordagem centrada nas razões trigonométricas elementares e em suas consequências geométricas. Em particular, formalizamos um lema sobre a determinação dos lados de um triângulo retângulo a partir de um ângulo agudo e um lado conhecido, deduzimos as fórmulas de adição de ângulos para seno e cosseno, tratamos o caso do triângulo retângulo isósceles e apresentamos uma interpretação geométrica da série geométrica. Esses resultados constituirão o suporte conceitual das demonstrações do Teorema de Pitágoras apresentadas nos capítulos posteriores.

Considere o triângulo retângulo  $\triangle ABC$ , em que  $\alpha$  denota a medida do ângulo agudo  $BAC$ , com catetos  $AC = a$  e  $CB = b$  e hipotenusa  $AB = c$ .

Figura 1 – Definições trigonométricas do seno e cosseno



Fonte: Autores (2026). Construção no *software Geogebra 6.0*.

Definimos o *seno* e *cosseno* de  $\alpha$ , respectivamente, por

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} \text{ e } \text{cos } \alpha = \frac{b}{c}.$$

Naturalmente temos definidas outras razões trigonométricas, *tangente*, *cotangente*, *secante* e *cossecante*, respectivamente, por

$$\text{tan } \alpha = \frac{a}{b}, \text{cot } \alpha = \frac{b}{a}, \text{sec } \alpha = \frac{c}{b} \text{ e } \text{csc } \alpha = \frac{c}{a}.$$

As definições acima são consistentes em virtude da semelhança de triângulos. De fato, quaisquer dois triângulos retângulos que possuem uma mesma

medida de ângulo agudo são semelhantes pelo critério AA (Ângulo-Ângulo). Portanto, as razões entre lados correspondentes dependem apenas da medida do ângulo considerado e não do triângulo particular escolhido.

A observação anterior garante a consistência das definições trigonométricas utilizadas ao longo deste trabalho. O próximo lema constitui a ferramenta básica que permitirá obter, a partir do conhecimento de um lado e de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, os demais lados do triângulo.

**Lema 2.1** Em um triângulo retângulo, uma vez conhecida a medida de um de seus ângulos agudos e um de seus lados, os outros dois ficam unicamente determinados pelas razões trigonométricas desse ângulo.

**Demonstração.** Considere um triângulo retângulo cuja medida de um dos ângulos agudos é  $\alpha$ . A Figura 2 ilustra os três casos possíveis. Se o lado conhecido é o cateto oposto  $a$ , então

$$c = a \csc \alpha, \quad b = a \cot \alpha.$$

Se o lado conhecido é a hipotenusa  $c$ , então

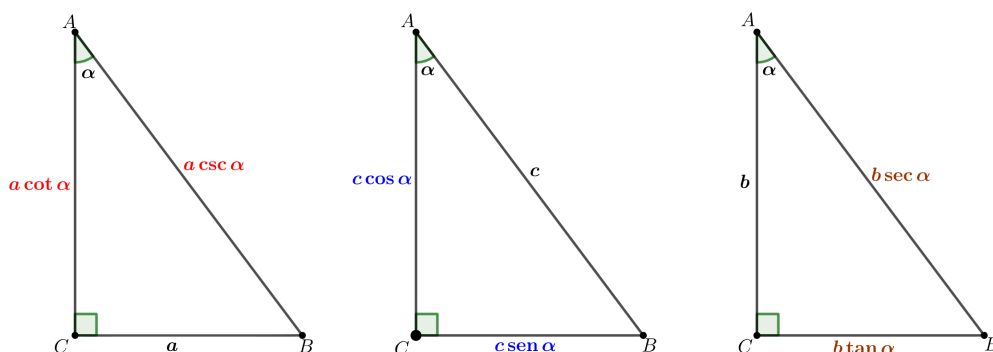
$$a = c \sin \alpha, \quad b = c \cos \alpha.$$

Por fim, se o lado conhecido é o cateto adjacente  $b$ , então

$$a = b \tan \alpha, \quad c = b \sec \alpha.$$

Logo, conhecido um dos lados e a medida  $\alpha$  de um ângulo agudo, os outros dois ficam unicamente determinados.

Figura 2 – Determinação dos lados de um triângulo retângulo a partir de um ângulo agudo e um lado



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

## 2.1 AS FÓRMULAS DE ADIÇÃO DE ÂNGULOS

Vamos utilizar as fórmulas de adição de ângulos para seno e cosseno. A Figura 3 ilustra geometricamente que, quando  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\alpha + \beta$  são medidas de ângulos agudos, tem-se

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta \quad (2.1)$$

e

$$\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cos } \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{sen } \beta. \quad (2.2)$$

De fato, na Figura 3 considera-se o triângulo retângulo  $ABC$ , com hipotenusa  $AB = 1$  e  $m\angle BAC = \beta$ . Como  $\beta$  é agudo, segue do Lema 2.1 (o qual será aplicado repetidamente), que  $BC = \text{sen } \beta$  e  $AC = \text{cos } \beta$ . Sobre o lado  $AC$ , constrói-se o triângulo  $ACD$  com ângulo reto em  $D$  e  $m\angle CAD = \alpha$ . Como  $AC = \text{cos } \beta$ , obtemos  $AD = \text{cos } \alpha \text{cos } \beta$  e  $CD = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta$ .

Em seguida, pelo ponto  $B$ , traça-se a perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{AD}$ , encontrando o ponto  $E \in \overline{AD}$ . Completa-se então o retângulo  $AFBE$ , obtendo o ponto  $F$ . Agora, como  $AB = 1$  e  $m\angle ABF = \alpha + \beta$ , segue que  $FB = \text{cos}(\alpha + \beta)$  e  $FA = \text{sen}(\alpha + \beta)$ .

Finalmente, pelo ponto  $C$ , traça-se a perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{BE}$ , encontrando o ponto  $H \in \overline{BE}$ . Logo, no triângulo retângulo  $BCH$ , cuja hipotenusa é  $BC = \text{sen } \beta$  e cujo ângulo em  $B$  é  $\alpha$ , segue que  $BH = \text{cos } \alpha \text{sen } \beta$  e  $HC = \text{sen } \alpha \text{sen } \beta$ .

Observando os comprimentos dos segmentos verticais da figura, temos

$$FA = BE = BH + HE.$$

Como  $HE = CD$ , resulta

$$FA = \text{cos } \alpha \text{sen } \beta + \text{sen } \alpha \text{cos } \beta.$$

Mas  $FA = \text{sen}(\alpha + \beta)$ . Logo,

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta.$$

De modo análogo, observando os comprimentos dos segmentos horizontais, temos

$$FB = AE = AD - ED.$$



Finalmente, se  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos complementares com  $\alpha < \beta$ , então, como  $\text{sen } \theta = \cos(90^\circ - \theta)$  com  $\theta$  ângulo agudo, temos

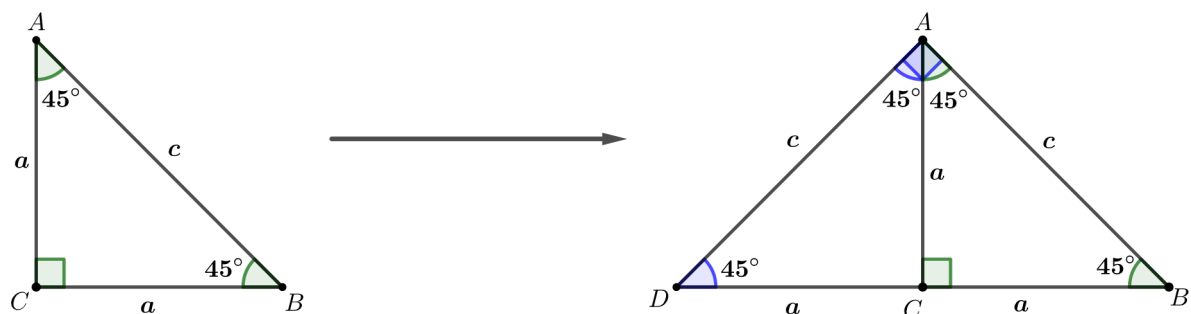
$$\text{sen}(\beta - \alpha) = \cos(90^\circ - (\beta - \alpha)) = \cos((\alpha + \beta) - (\beta - \alpha)) = \cos(2\alpha).$$

Logo, por (2.4),

$$\text{sen}(\beta - \alpha) = \frac{b^2 - a^2}{c^2}. \quad (2.5)$$

## 2.2 O TRIÂNGULO RETÂNGULO ISÓSCELES

Figura 4 – Teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo isósceles.



Fonte: Autores (2026). Construção no *software Geogebra 6.0*.

A Figura 4 sugere uma demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras no caso em que o triângulo retângulo é isósceles. De fato, partimos do triângulo retângulo isósceles  $ABC$ , em que

$$BC = CA = a \quad \text{e} \quad BA = c.$$

Como os catetos têm o mesmo comprimento, os ângulos agudos do triângulo  $ABC$  medem  $45^\circ$ .

Em seguida, prolongamos o lado  $CB$  além de  $C$ , marcando um ponto  $D$  de modo que

$$CD = a.$$

Assim,

$$BD = BC + CD = 2a.$$

Além disso, o triângulo  $DAB$  é retângulo em  $A$ , com

$$AB = AD = c.$$

Portanto, no triângulo  $DAB$ , o ângulo em  $B$  mede  $45^\circ$ , e pela definição de seno obtemos

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{c}{2a}.$$

Por outro lado, no triângulo retângulo inicial  $ABC$ , também temos

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Igualando as duas expressões para  $\operatorname{sen} 45^\circ$ , segue que

$$\frac{c}{2a} = \frac{a}{c}.$$

Logo,

$$c^2 = 2a^2 = a^2 + a^2.$$

Portanto, no caso do triângulo retângulo isósceles, verifica-se o Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + a^2.$$

Vale observar que, embora o caso do triângulo retângulo isósceles já apareça na literatura por abordagens distintas, a abordagem adotada aqui foi escolhida de modo a manter coerência com o eixo conceitual deste trabalho. Em particular, em vez de recorrer a argumentos de área, privilegiamos também nesse caso a determinação de comprimentos por meio das razões trigonométricas, antecipando o papel central que o Lema 2.1 desempenhará nas demonstrações do capítulo seguinte.

### 2.3 SÉRIE GEOMÉTRICA

Seja  $0 < r < 1$ ,  $a > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ , considere a soma

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n. \quad (2.6)$$

**Afirmção 2.1** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se  $S_n = \frac{a - ar^{n+1}}{1 - r}$ .

De fato, multiplicando por  $r$  a ambos os lados de (2.6), temos

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n+1}. \quad (2.7)$$

Agora, subtraindo (2.6) com (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= (a + ar + ar^2 + \dots + ar^n) - (ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n+1}) \\ S_n(1 - r) &= a - ar^{n+1} \\ S_n &= \frac{a - ar^{n+1}}{1 - r}. \end{aligned}$$

Por outro lado, desde que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$  (pois  $0 < r < 1$ ), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - r}. \quad (2.8)$$

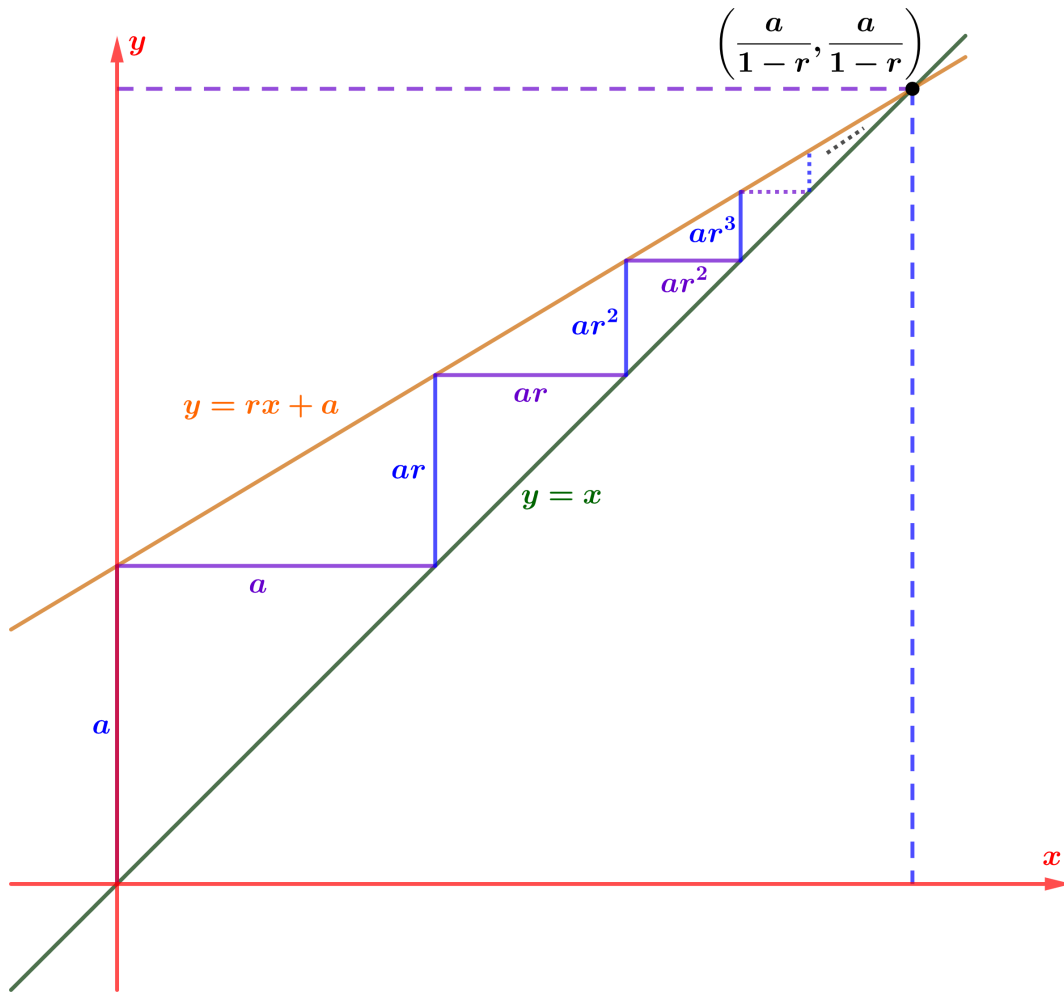
O lado esquerdo de (2.8) é chamado *série geométrica*, a qual denotamos por  $a + ar + ar^2 + \dots$ . Portanto, temos

$$a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1 - r}. \quad (2.9)$$

A Figura 5 fornece uma interpretação geométrica dessa igualdade.

De fato, consideremos as retas  $y = x$  e  $y = rx + a$  com  $0 < r < 1$ . Como  $r < 1$ , a reta  $y = rx + a$  tem inclinação menor do que a reta  $y = x$ , e as duas se intersectam em um único ponto. Igualando as expressões, obtemos  $x = rx + a$ , isto é,  $x(1 - r) = a$ .

Figura 5 – Interpretação geométrica da série geométrica



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

Portanto, o ponto de interseção é

$$\left(\frac{a}{1-r}, \frac{a}{1-r}\right).$$

A construção em forma de escada mostrada na figura começa no ponto  $(0, a)$ , que pertence à reta  $y = rx + a$ . A partir dele, traça-se um segmento horizontal de comprimento  $a$ , chegando ao ponto  $(a, a)$ , que pertence à reta  $y = x$ .

Em seguida, sobe-se verticalmente até reencontrar a reta  $y = rx + a$ . Como no ponto de abscissa  $x = a$ , temos

$$y = ra + a,$$

a altura desse novo segmento vertical é

$$(ra + a) - a = ar.$$

A partir daí, traça-se um novo segmento horizontal, agora de comprimento  $ar$ , até a reta  $y = x$ . Chega-se então ao ponto

$$(a + ar, a + ar).$$

Novamente sobe-se verticalmente até a reta  $y = rx + a$ . Como

$$y = r(a + ar) + a = a + ar + ar^2,$$

esse segmento vertical tem comprimento  $ar^2$ .

Prosseguindo do mesmo modo, obtém-se sucessivamente segmentos horizontais e verticais de comprimentos

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

Assim, após  $n + 1$  segmentos horizontais, a abscissa alcançada é

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = S_n.$$

Do mesmo modo, a ordenada do ponto correspondente também é  $S_n$ , pois esse ponto está sobre a reta  $y = x$ . Portanto, a escada produz a sequência de pontos

$$(S_n, S_n),$$

com  $S_n$  dado por (2.6).

Como  $0 < r < 1$ , os comprimentos dos degraus vão diminuindo e os pontos  $(S_n, S_n)$  se aproximam do ponto de interseção das duas retas. Consequentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n, S_n) = \left( \frac{a}{1-r}, \frac{a}{1-r} \right),$$

o que implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}.$$

Em outras palavras, a soma infinita

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

representa exatamente a abscissa, ou equivalentemente a ordenada, do ponto de interseção entre as retas  $y = x$  e  $y = rx + a$ . Portanto,

$$a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r}.$$

### 3 CINCO DEMONSTRAÇÕES EM DIÁLOGO COM JACKSON E JOHNSON

Como já vimos na Seção 2.2 do Capítulo 2, o Teorema de Pitágoras foi demonstrado no caso do triângulo retângulo isósceles. Assim, nas quatro primeiras das cinco demonstrações apresentadas a seguir, assumiremos que  $ABC$  é um triângulo retângulo não isósceles, no qual  $a < b$  ou, equivalentemente,

$$\alpha < 45^\circ < \beta.$$

De acordo com a exigência estrita de (LOOMIS, 1940), iniciaremos cada demonstração com a figura de um triângulo retângulo.

Antes de começar as provas, convém explicitar a ideia que orienta as construções geométricas deste capítulo. Inspirados no método proposto por Jackson e Johnson (JACKSON; JOHNSON, 2024), perguntamos: a partir de um triângulo retângulo dado  $ABC$ , que novos triângulos retângulos podem ser criados usando combinações simples de seus ângulos?

No artigo (JACKSON; JOHNSON, 2024), essa questão é tratada de modo sistemático no Lema 1.1, onde as autoras mostram que, no caso não isósceles ( $\alpha < \beta$ ), as combinações angulares

$$2\alpha \quad \text{e} \quad \beta - \alpha$$

desempenham papel privilegiado: são precisamente elas que surgem de maneira natural na construção de novos triângulos retângulos a partir do triângulo inicial. Em outras palavras, o Lema 1.1 em (JACKSON; JOHNSON, 2024) explica por que as figuras das quatro primeiras demonstrações procuram, em diferentes contextos, produzir triângulos retângulos cujos ângulos agudos sejam  $2\alpha$  e  $\beta - \alpha$ .

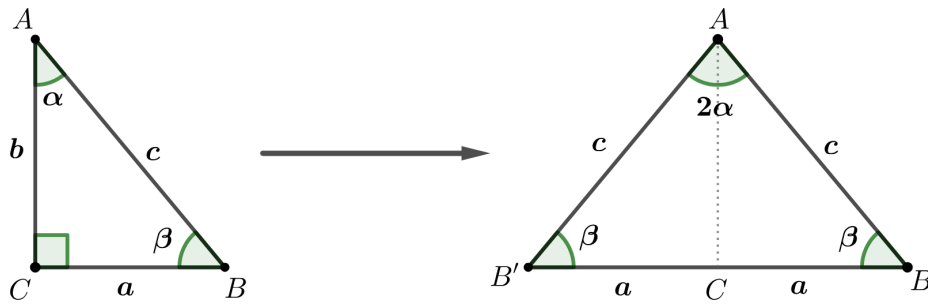
Não reproduziremos aqui a demonstração completa desse lema, pois nosso objetivo principal é desenvolver e reorganizar as demonstrações do Teorema de Pitágoras. Ainda assim, a observação anterior é importante para o leitor: ela mostra que as construções usadas nas provas seguintes não surgem de modo arbitrário, mas estão ligadas a uma estratégia geométrica geral, já indicada no Lema 1.1 de (JACKSON; JOHNSON, 2024).

Com essa motivação em mente, passamos agora às demonstrações.

### 3.1 PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO

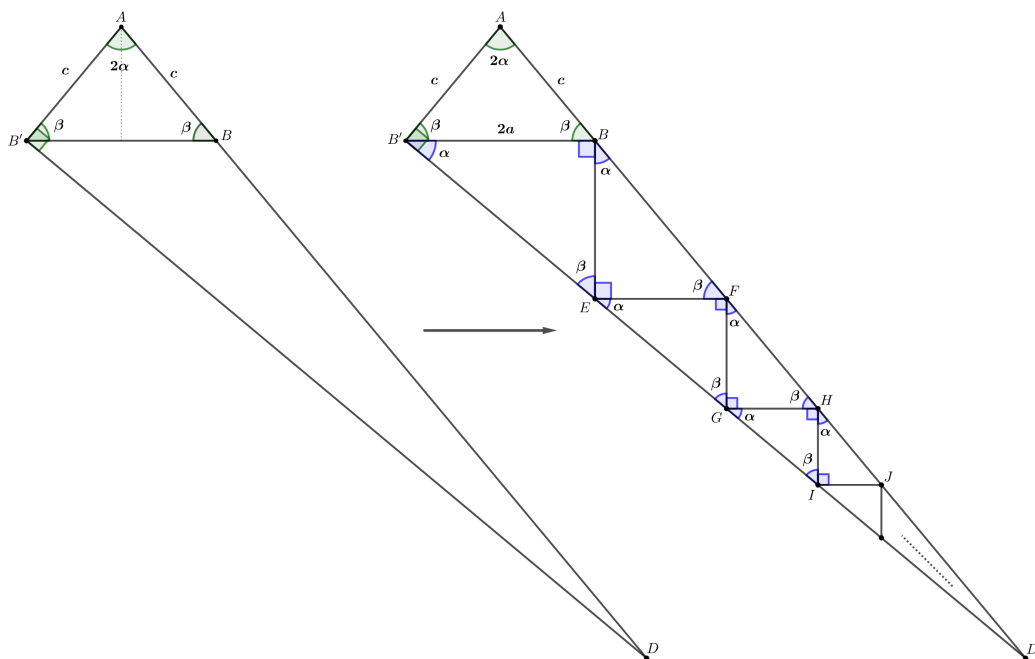
Começamos refletindo o triângulo  $ABC$  em relação à reta  $\overleftrightarrow{AC}$ , obtendo o triângulo congruente  $AB'C$ . Assim,  $ABB'$  é um triângulo isósceles com  $AB = AB' = c$  e  $B'B = 2a$ .

Figura 6 – Construção do triângulo isósceles  $ABB'$



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

Figura 7 – Construção sucessiva de triângulos retângulos



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

Como  $a < b$ , tem-se  $\alpha < 45^\circ$ , e portanto  $2\alpha < 90^\circ$ . Isso permite construir o triângulo retângulo  $AB'D$ , no qual  $m\angle DAB' = 2\alpha$ . A partir daí, construímos sucessivamente novos triângulos retângulos, como mostra a Figura 7. Em cada passo, utilizaremos o Lema 2.1: uma vez conhecido o ângulo agudo  $\alpha$  e um dos lados de um

triângulo retângulo, os demais lados ficam determinados pelas razões trigonométricas. Pelo ponto  $B$ , traçamos uma perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{B'B}$ , a qual intersecta a reta  $\overleftrightarrow{B'D}$  no ponto  $E$ . No triângulo retângulo  $B'BE$ , conhecemos o ângulo  $\alpha$  e o lado

$$B'B = 2a.$$

Logo, pelo Lema 2.1,

$$BE = B'B \tan \alpha = 2a \tan \alpha = 2a \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a^2}{b}.$$

Agora, pelo ponto  $E$ , traçamos uma perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{B'E}$ , encontrando a reta  $\overleftrightarrow{B'D}$  no ponto  $F$ . No triângulo retângulo  $BEF$ , conhecemos novamente o ângulo  $\alpha$  e o lado  $BE$ . Portanto,

$$BF = BE \sec \alpha = \frac{2a^2}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{2a^2 c}{b^2},$$

e

$$EF = BE \tan \alpha = \frac{2a^2}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a^3}{b^2}.$$

Em seguida, pelo ponto  $F$ , traçamos uma perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{E'F}$ , encontrando a reta  $\overleftrightarrow{E'D}$  no ponto  $G$ . No triângulo retângulo  $EFG$ , como conhecemos o ângulo  $\alpha$  e o lado  $EF$ , segue que

$$FG = EF \tan \alpha = \frac{2a^3}{b^2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a^4}{b^3}.$$

Pelo ponto  $G$ , traçamos uma perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{F'G}$ , a qual intersecta a reta  $\overleftrightarrow{F'D}$  no ponto  $H$ . No triângulo retângulo  $FGH$ , obtemos

$$FH = FG \sec \alpha = \frac{2a^4}{b^3} \cdot \frac{c}{b} = \frac{2a^4 c}{b^4},$$

e

$$GH = FG \tan \alpha = \frac{2a^4}{b^3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a^5}{b^4}.$$

Prosseguindo desse modo, pelo ponto  $H$  traçamos uma perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{G'H}$ , que encontra a reta  $\overleftrightarrow{G'D}$  no ponto  $I$ . No triângulo retângulo  $GHI$ , temos

$$HI = GH \tan \alpha = \frac{2a^5}{b^4} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a^6}{b^5}.$$

Finalmente, pelo ponto  $I$ , traçamos uma perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{H'I}$ , encontrando a reta  $\overleftrightarrow{H'D}$  no ponto  $J$ . No triângulo retângulo  $H'IJ$ , segue que

$$HJ = HI \sec \alpha = \frac{2a^6}{b^5} \cdot \frac{c}{b} = \frac{2a^6 c}{b^6},$$

e

$$IJ = HI \tan \alpha = \frac{2a^6}{b^5} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2a^7}{b^6}.$$

O que acontece, portanto, é que cada novo comprimento é obtido a partir do anterior multiplicando-se por  $\tan \alpha = \frac{a}{b}$  ou por  $\sec \alpha = \frac{c}{b}$ . Em particular, a medida dos segmentos

$$\overline{BF}, \overline{FH}, \overline{HJ}, \dots$$

formam uma progressão geométrica de primeiro termo

$$BF = \frac{2a^2c}{b^2}$$

e razão

$$\frac{a^2}{b^2},$$

pois

$$FH = \frac{2a^4c}{b^4} = \frac{a^2}{b^2} BF, \quad HJ = \frac{2a^6c}{b^6} = \frac{a^2}{b^2} FH,$$

e assim por diante.

Por construção, os segmentos  $\overline{AB}, \overline{BF}, \overline{FH}, \overline{HJ}, \dots$  são colineares e contíguos sobre a reta  $\overleftrightarrow{AD}$ . Portanto,

$$AD = AB + BF + FH + HJ + \dots$$

Como  $AB = c$ , segue que

$$AD = c + \frac{2a^2c}{b^2} + \frac{2a^4c}{b^4} + \frac{2a^6c}{b^6} + \dots = c \left( 1 + \frac{2a^2}{b^2} + \frac{2a^4}{b^4} + \frac{2a^6}{b^6} + \dots \right).$$

Por outro lado, no triângulo retângulo  $AB'D$ , conhecemos o ângulo  $2\alpha$  e o cateto adjacente  $AB' = c$ . Novamente pelo Lema 2.1,

$$AD = AB' \sec(2\alpha) = c \sec(2\alpha) = \frac{c}{\cos(2\alpha)}.$$

Igualando as duas expressões obtidas para  $AD$ , temos

$$c \left( 1 + \frac{2a^2}{b^2} + \frac{2a^4}{b^4} + \frac{2a^6}{b^6} + \dots \right) = \frac{c}{\cos(2\alpha)}.$$

Como  $a < b$ , temos  $\frac{a^2}{b^2} < 1$ , e portanto

$$1 + \frac{2a^2}{b^2} + \frac{2a^4}{b^4} + \frac{2a^6}{b^6} + \dots = 1 + \frac{2\frac{a^2}{b^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}}.$$

Logo,

$$c \left( 1 + \frac{2\frac{a^2}{b^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right) = \frac{c}{\cos(2\alpha)}.$$

Cancelando  $c$  em ambos os lados e usando

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{b}{c}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2 - a^2}{c^2},$$

obtemos

$$1 + \frac{2a^2}{b^2 - a^2} = \frac{c^2}{b^2 - a^2}.$$

Assim,

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} = \frac{c^2}{b^2 - a^2},$$

e, conseqüentemente,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

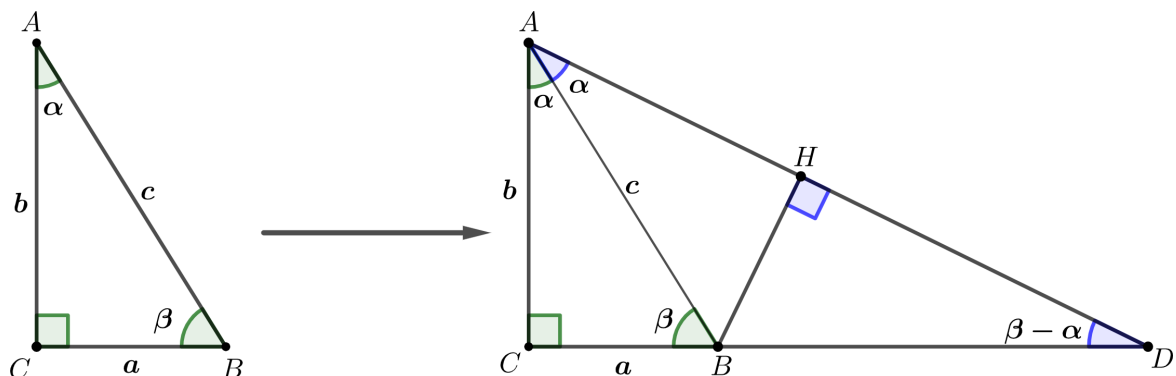
Isso demonstra o Teorema de Pitágoras.

### 3.2 SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO

Como  $\beta > \alpha$ , temos  $\beta - \alpha > 0$ . Assim, podemos escolher um ponto  $D$  no prolongamento da reta  $\overleftrightarrow{CB}$  além de  $B$ , de modo que o triângulo  $ABD$  satisfaça

$$m\angle BAD = \alpha \quad \text{e} \quad m\angle BDA = \beta - \alpha.$$

Figura 8 – Construção do triângulo  $ABD$



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

Observe que, como

$$m\angle CAD = m\angle CAB + m\angle BAD = \alpha + \alpha = 2\alpha,$$

o triângulo  $ACD$  é retângulo em  $C$  e tem ângulo  $2\alpha$  em  $A$ . Como  $AC = b$ , pelo Lema 2.1 obtemos

$$CD = b \tan(2\alpha).$$

Usando (2.3) e (2.4), segue que

$$CD = b \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = b \frac{\frac{2ab}{c^2}}{\frac{b^2 - a^2}{c^2}} = b \frac{2ab}{b^2 - a^2} = \frac{2ab^2}{b^2 - a^2}.$$

Como  $C$ ,  $B$  e  $D$  são colineares e  $CD = CB + BD$ , temos

$$BD = CD - CB = \frac{2ab^2}{b^2 - a^2} - a.$$

Colocando tudo sobre o mesmo denominador,

$$BD = \frac{2ab^2 - a(b^2 - a^2)}{b^2 - a^2} = \frac{ab^2 + a^3}{b^2 - a^2} = \frac{a(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}.$$

Agora, pelo ponto  $B$ , traçamos uma perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{AD}$ , a qual a intersecta no ponto  $H$ . No triângulo retângulo  $ABH$ , cuja hipotenusa é  $AB = c$  e cujo ângulo em  $A$  mede  $\alpha$ , o Lema 2.1 fornece

$$BH = c \sin \alpha = c \frac{a}{c} = a.$$

Por outro lado, o triângulo  $BHD$  é retângulo em  $H$ , tem hipotenusa  $BD$  e ângulo em  $D$  igual a  $\beta - \alpha$ . Portanto,

$$BH = BD \sin(\beta - \alpha).$$

Usando (2.5), obtemos

$$BH = BD \cdot \frac{b^2 - a^2}{c^2}.$$

Como já vimos que  $BH = a$  e

$$BD = \frac{a(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2},$$

segue que

$$a = \frac{a(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c^2}.$$

Logo,

$$a = \frac{a(a^2 + b^2)}{c^2}.$$

Como  $a > 0$ , concluímos que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

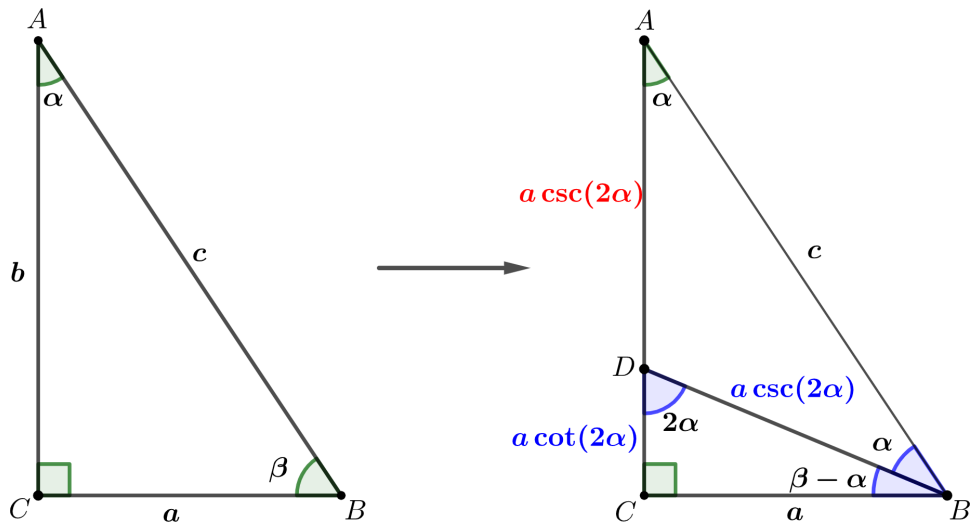
Isso demonstra o Teorema de Pitágoras.

### 3.3 TERCEIRA DEMONSTRAÇÃO

Como  $\beta > \alpha$ , temos  $\beta - \alpha > 0$ . Assim, podemos escolher um ponto  $D$  no segmento  $\overline{AC}$  de modo que o segmento  $\overline{BD}$  subdivide o ângulo  $\angle CBA$  da seguinte maneira:

$$m\angle CBD = \beta - \alpha \quad \text{e} \quad m\angle DBA = \alpha.$$

Figura 9 – Decomposição do triângulo  $ABC$  nos triângulos  $DBC$  e  $ABD$ .



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

No triângulo retângulo  $DBC$ , temos

$$m\angle DBC = \beta - \alpha.$$

Como  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , segue que

$$\beta - \alpha = 90^\circ - 2\alpha.$$

Logo,

$$m\angle CDB = 2\alpha.$$

Assim, conhecendo o lado  $CB = a$ , o Lema 2.1 fornece

$$DC = a \cot(2\alpha) \quad \text{e} \quad DB = a \csc(2\alpha).$$

Por outro lado, no triângulo  $ABD$ , temos

$$m\angle DAB = \alpha \quad \text{e} \quad m\angle DBA = \alpha.$$

Portanto, o triângulo  $ABD$  é isósceles, e daí

$$AD = DB = a \csc(2\alpha).$$

Como os pontos  $A$ ,  $D$  e  $C$  são colineares, obtemos

$$AC = AD + DC.$$

Como  $AC = b$ , segue que

$$b = a \csc(2\alpha) + a \cot(2\alpha).$$

Escrevendo em termos de seno e cosseno, temos

$$b = a \frac{1}{\sin(2\alpha)} + a \frac{\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}.$$

Multiplicando ambos os lados por  $\sin(2\alpha)$ , resulta

$$b \sin(2\alpha) = a(1 + \cos(2\alpha)).$$

Dividindo por  $a$ , obtemos

$$\frac{b}{a} \sin(2\alpha) = 1 + \cos(2\alpha).$$

Agora, usando (2.3) e (2.4), segue que

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{2ab}{c^2} = 1 + \frac{b^2 - a^2}{c^2}.$$

Isto é,

$$\frac{2b^2}{c^2} = 1 + \frac{b^2 - a^2}{c^2}.$$

Portanto,

$$\frac{2b^2 - (b^2 - a^2)}{c^2} = 1,$$

e daí

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$

Concluimos, então, que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

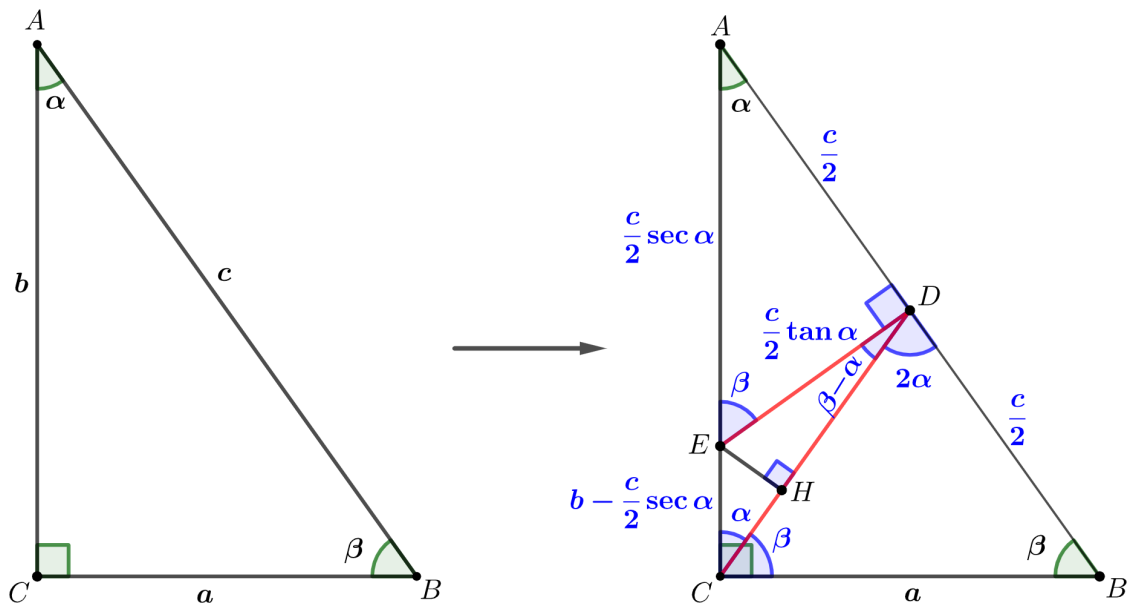
Isso demonstra o Teorema de Pitágoras.

### 3.4 QUARTA DEMONSTRAÇÃO

Como  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , podemos escolher um ponto  $D$  no segmento  $\overline{AB}$  de modo que o segmento  $\overline{CD}$  decomponha o ângulo reto  $\angle ACB$  da seguinte forma:

$$m\angle ACD = \alpha \quad \text{e} \quad m\angle DCB = \beta.$$

Figura 10 – Construção auxiliar para a quarta demonstração.



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

Observe que, no triângulo  $ADC$ , temos

$$m\angle CAD = \alpha \quad \text{e} \quad m\angle ACD = \alpha,$$

pois  $D \in \overline{AB}$ . Logo, o triângulo  $ADC$  é isósceles, e portanto

$$AD = CD.$$

De modo análogo, no triângulo  $BCD$ , temos

$$m\angle CBD = \beta \quad \text{e} \quad m\angle DCB = \beta,$$

pois  $D \in \overline{AB}$ . Assim, o triângulo  $BCD$  também é isósceles, e daí

$$CD = DB.$$

Concluimos, então, que

$$AD = DB.$$

Como  $D \in \overline{AB}$  e  $AB = c$ , segue que

$$AD = DB = \frac{c}{2}.$$

Agora, pelo ponto  $D$ , traçamos uma perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , encontrando o segmento  $\overline{AC}$  no ponto  $E$ . No triângulo retângulo  $ADE$ , conhecemos o lado

$$AD = \frac{c}{2}$$

e o ângulo em  $A$ , que mede  $\alpha$ . Pelo Lema 2.1, obtemos

$$ED = \frac{c}{2} \tan \alpha \quad \text{e} \quad AE = \frac{c}{2} \sec \alpha.$$

Como os pontos  $A$ ,  $E$  e  $C$  são colineares, temos

$$AC = AE + EC.$$

Como  $AC = b$ , segue que

$$EC = b - \frac{c}{2} \sec \alpha.$$

Agora, pelo ponto  $E$ , traçamos uma perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{CD}$ , a qual a intersecta no ponto  $H$ . No triângulo retângulo  $EHC$ , cuja hipotenusa é

$$EC = b - \frac{c}{2} \sec \alpha$$

e cujo ângulo em  $C$  mede  $\alpha$ , o Lema 2.1 fornece

$$EH = \left( b - \frac{c}{2} \sec \alpha \right) \sen \alpha.$$

Usando  $\sec \alpha = \frac{c}{b}$  e  $\sen \alpha = \frac{a}{c}$ , obtemos

$$EH = \left( b - \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{b} \right) \frac{a}{c} = \left( \frac{2b^2 - c^2}{2b} \right) \frac{a}{c} = \frac{a(2b^2 - c^2)}{2bc}.$$

Por outro lado, o triângulo  $EDH$  é retângulo em  $H$ . Para determinar o ângulo em  $D$ , como  $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$  e  $\overline{DB} \subset \overline{AB}$ , segue que

$$m\angle EDB = 90^\circ.$$

Além disso, no triângulo isósceles  $BCD$ , os ângulos da base são iguais a  $\beta$ , de modo que

$$m\angle CDB = 180^\circ - 2\beta.$$

Como  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , temos

$$180^\circ - 2\beta = 2\alpha.$$

Logo,

$$m\angle CDB = 2\alpha.$$

Portanto,

$$m\angle EDC = m\angle EDB - m\angle CDB = 90^\circ - 2\alpha.$$

Usando novamente  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , obtemos

$$90^\circ - 2\alpha = \beta - \alpha.$$

Assim,

$$m\angle EDC = \beta - \alpha.$$

No triângulo retângulo  $EDH$ , cuja hipotenusa é  $ED$ , segue então que

$$EH = ED \operatorname{sen}(\beta - \alpha).$$

Usando (2.5), obtemos

$$EH = \frac{c}{2} \tan \alpha \operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c^2} = \frac{a(b^2 - a^2)}{2bc}.$$

Igualando as duas expressões obtidas para  $EH$ , temos

$$\frac{a(2b^2 - c^2)}{2bc} = \frac{a(b^2 - a^2)}{2bc}.$$

Como  $a, b, c > 0$ , segue que

$$2b^2 - c^2 = b^2 - a^2,$$

isto é,

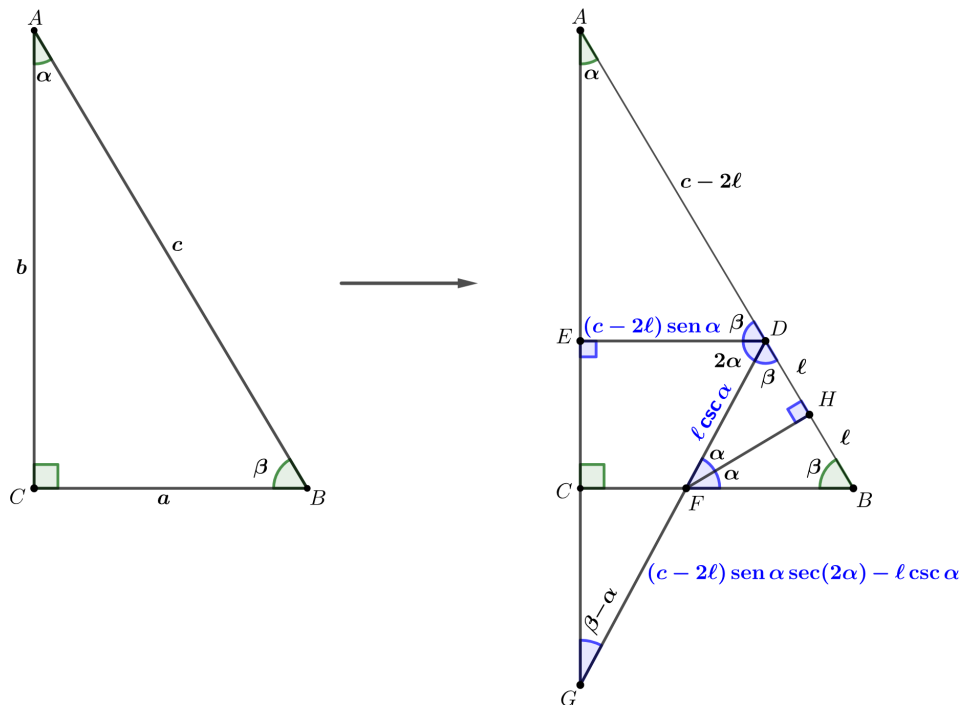
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Isso demonstra o Teorema de Pitágoras.

### 3.5 QUINTA DEMONSTRAÇÃO

Diferentemente das quatro primeiras demonstrações, esta quinta demonstração também funciona no caso em que o triângulo retângulo é isósceles. Seja  $ABC$  um triângulo retângulo, com catetos  $a$  e  $b$ , hipotenusa  $c$ , e ângulos agudos  $\alpha \leq \beta$ . Escolha uma constante  $\ell$  tal que  $0 < \ell < \frac{c}{2}$ . Tomemos um ponto  $D \in AB$  tal que  $DB = 2\ell$ . Pelo ponto  $D$ , traçamos a perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{AC}$ , a qual a intersecta no ponto  $E$ . Além disso, escolhemos o ponto  $F \in BC$  de modo que  $m\angle EDF = 2\alpha$ .

Figura 11 – Construção auxiliar para a quinta demonstração.



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

Suponhamos primeiro que  $\alpha < 45^\circ$ . Nesse caso, prolongamos a reta  $\overleftrightarrow{DF}$  até encontrar o prolongamento de  $\overleftrightarrow{AC}$  no ponto  $G$ . Assim, obtemos o triângulo retângulo  $DGE$ .

Como  $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AC}$ , segue que  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ . Logo,  $m\angle BFD = m\angle EDF = 2\alpha$  e  $m\angle ADE = m\angle CBA = \beta$ . Além disso, no triângulo  $DBF$ ,

$$m\angle BDF = 180^\circ - (2\alpha + \beta) = \beta,$$

pois  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Assim, o triângulo  $DBF$  é isósceles, e daí  $DF = BF$ .

Como

$$AB = AD + DB \quad \text{e} \quad DB = 2\ell,$$

segue que

$$AD = c - 2\ell.$$

No triângulo retângulo  $ADE$ , conhecemos a hipotenusa  $AD = c - 2\ell$  e o ângulo em  $A$ , que mede  $\alpha$ . Pelo Lema 2.1,

$$ED = (c - 2\ell) \operatorname{sen} \alpha = (c - 2\ell) \frac{a}{c}.$$

Agora, no triângulo isósceles  $DBF$ , tracemos por  $F$  a perpendicular a  $\overleftrightarrow{DB}$ , encontrando-a no ponto  $H$ . Como  $DB = 2\ell$  e o triângulo  $DBF$  é isósceles, o ponto  $H$  é o ponto médio de  $\overline{DB}$ , de modo que

$$DH = HB = \ell.$$

No triângulo retângulo  $DHF$ , conhecemos o lado  $DH = \ell$  e o ângulo em  $F$ , que mede  $\alpha$ . Pelo Lema 2.1,

$$BF = FD = \ell \operatorname{csc} \alpha = \ell \frac{c}{a}. \quad (3.1)$$

Passemos agora ao triângulo retângulo  $DGE$ . Como o ângulo em  $D$  mede  $2\alpha$ , e conhecemos o lado

$$ED = (c - 2\ell) \frac{a}{c},$$

o Lema 2.1 e a identidade (2.4) fornecem

$$GD = ED \operatorname{sec}(2\alpha) = (c - 2\ell) \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{\cos(2\alpha)} = (c - 2\ell) \frac{a}{c} \cdot \frac{c^2}{b^2 - a^2}.$$

Logo,

$$GD = (c - 2\ell) \frac{ac}{b^2 - a^2}.$$

Como  $F$  está no segmento  $\overline{DG}$ , temos

$$GF = GD - FD.$$

Usando a expressão anterior para  $GD$  e (3.1), obtemos

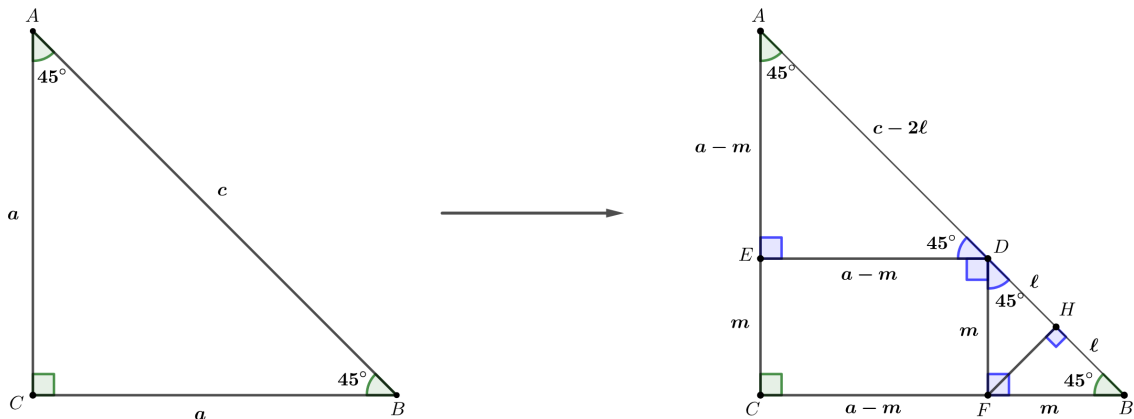
$$GF = (c - 2\ell) \frac{ac}{b^2 - a^2} - \ell \frac{c}{a}.$$

No triângulo retângulo  $GCF$ , o ângulo em  $G$  mede  $\beta - \alpha$ . Assim, pelo Lema 2.1 e por (2.5),

$$\begin{aligned}
 CF &= GF \operatorname{sen}(\beta - \alpha) \\
 &= \left[ (c - 2\ell) \frac{ac}{b^2 - a^2} - \ell \frac{c}{a} \right] \frac{b^2 - a^2}{c^2} \\
 &= \frac{(c - 2\ell)a}{c} - \frac{\ell(b^2 - a^2)}{ac} \\
 &= \frac{(c - 2\ell)a^2 - \ell(b^2 - a^2)}{ac} \\
 &= \frac{ca^2 - \ell(a^2 + b^2)}{ac}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Passemos agora ao caso  $\alpha = 45^\circ$ . Nesse caso, o triângulo  $ABC$  é retângulo isósceles, conforme a Figura 12.

Figura 12 – Construção auxiliar para a quinta demonstração no caso isósceles.



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

Se denotarmos

$$BF = m,$$

então

$$CF = a - m.$$

Como o triângulo  $DBF$  é isósceles, temos

$$DF = BF = m.$$

Traçando por  $F$  a perpendicular a  $\overleftrightarrow{DB}$ , encontramos o ponto  $H$ . Como os triângulos  $FHB$  e  $DHF$  são ambos retângulos isósceles, segue que

$$DH = HB = \ell.$$

No triângulo retângulo  $FHB$ , como  $HB = \ell$ , o Lema 2.1 fornece

$$FB = m = \ell \csc 45^\circ = \ell \frac{c}{a},$$

o que coincide com (3.1) no caso  $b = a$ .

Além disso, como  $CEDF$  é um retângulo, temos

$$EC = DF = m \quad \text{e} \quad ED = CF = a - m.$$

No triângulo retângulo isósceles  $ADE$ , como

$$AD = c - 2\ell,$$

o Lema 2.1 implica

$$CF = ED = (c - 2\ell) \operatorname{sen} 45^\circ = (c - 2\ell) \frac{a}{c},$$

o que também coincide com (3.2) no caso  $b = a$ .

Portanto, em qualquer triângulo retângulo  $ABC$ , por (3.1) e (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} BC &= BF + CF \\ a &= \ell \frac{c}{a} + \frac{ca^2 - \ell(a^2 + b^2)}{ac}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por  $ac$ , segue que

$$a^2c = \ell c^2 + ca^2 - \ell(a^2 + b^2).$$

Cancelando o termo  $ca^2$  em ambos os lados, resulta

$$0 = \ell(c^2 - a^2 - b^2).$$

Como  $\ell > 0$ , concluímos que

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Isso demonstra o Teorema de Pitágoras.

## 4 CINCO DEMONSTRAÇÕES EM PERSPECTIVA TRIGONOMÉTRICA

Neste capítulo, apresentamos cinco demonstrações do Teorema de Pitágoras encontradas ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Até onde pudemos verificar, elas não coincidem com as construções apresentadas no artigo de Jackson e Johnson (JACKSON; JOHNSON, 2024), que serviu de motivação inicial para esta pesquisa. Nosso objetivo não é reivindicar de forma definitiva a novidade absoluta dessas provas, mas registrar construções que, ao menos na forma aqui desenvolvida, parecem ser distintas das abordagens que tomamos como referência.

Em todas as demonstrações, partimos de um triângulo retângulo  $ABC$ , com

$$m\angle CAB = \alpha, \quad m\angle CBA = \beta, \quad AC = b, \quad CB = a, \quad AB = c,$$

onde  $\alpha \leq 45^\circ \leq \beta$ . Como nas seções anteriores, privilegiamos uma abordagem em perspectiva trigonométrica, baseada na determinação de comprimentos por razões trigonométricas e identidades angulares.

### 4.1 PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO

Partimos do triângulo retângulo  $ABC$ , com

$$m\angle CAB = \alpha, \quad m\angle CBA = \beta, \quad AC = b, \quad CB = a, \quad AB = c,$$

onde  $\alpha \leq 45^\circ \leq \beta$ . Escolhemos um ponto  $D$  no prolongamento da reta  $\overleftrightarrow{AC}$ , para além de  $A$ , de modo que

$$m\angle CDB = \frac{\alpha}{2},$$

como mostra a Figura 13.

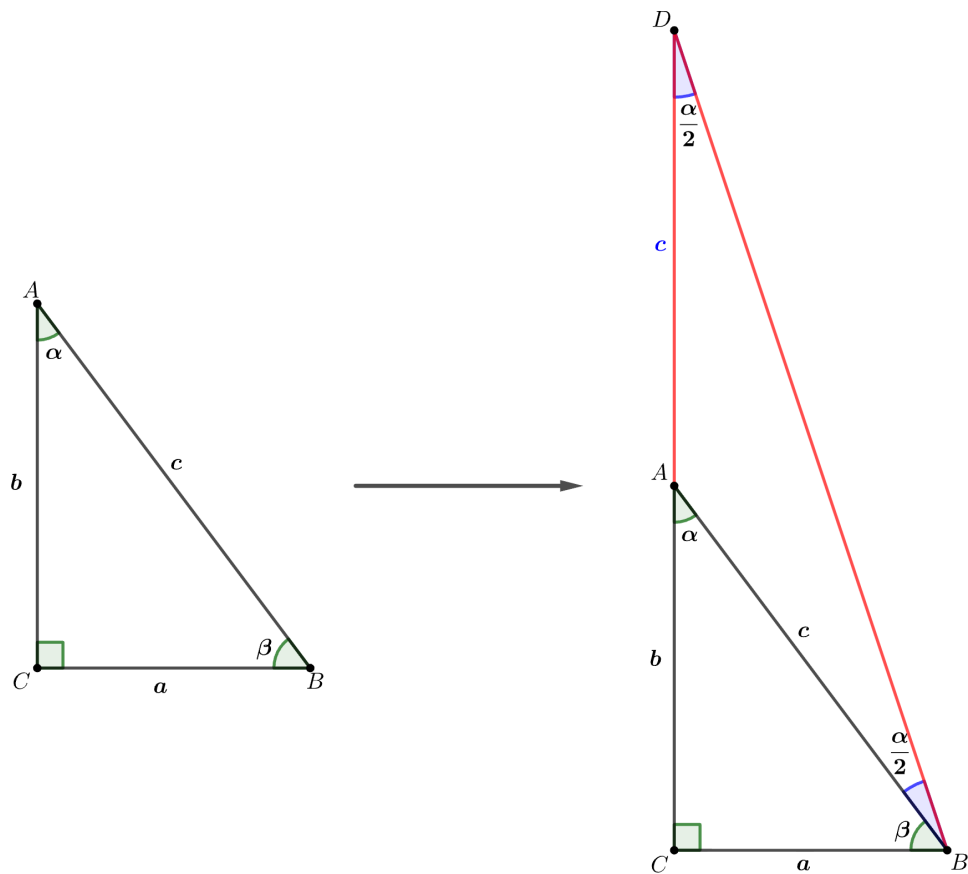
Como  $C$ ,  $A$  e  $D$  são colineares, segue que

$$m\angle ADB = m\angle CDB = \frac{\alpha}{2}.$$

Além disso, no triângulo  $DBA$ , o ângulo  $\angle CAB$  é exterior ao triângulo  $DBA$  no vértice  $A$ . Logo,

$$m\angle CAB = m\angle ADB + m\angle ABD.$$

Figura 13 – Primeira demonstração.



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

Como  $m\angle CAB = \alpha$  e  $m\angle ADB = \frac{\alpha}{2}$ , obtemos

$$m\angle ABD = \frac{\alpha}{2}.$$

Portanto, o triângulo  $DBA$  é isósceles, e assim

$$DA = AB = c.$$

Agora, no triângulo retângulo  $CDB$ , temos

$$CD = CA + AD = b + c$$

e, portanto,

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{CB}{CD} = \frac{a}{b+c}. \quad (4.1)$$

Por outro lado, usando as fórmulas de adição de ângulos, obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right),\end{aligned}\tag{4.2}$$

e

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)} \\ &= \frac{2 \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Como, no triângulo retângulo  $ABC$ , temos  $\tan \alpha = \frac{a}{b}$ , segue de (4.4)

que

$$\frac{a}{b} = \frac{2 \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Denotando

$$x = \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right),$$

obtemos

$$\frac{a}{b} = \frac{2x}{1 - x^2},$$

ou, equivalentemente,

$$ax^2 + 2bx - a = 0.$$

Resolvendo essa equação do segundo grau em  $x$ , encontramos

$$x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 + 4a^2}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Como  $x > 0$ , segue que

$$\tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) = x = \frac{-b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}.\tag{4.5}$$

Racionalizando a expressão à direita, obtemos

$$\frac{-b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{a}{b + \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Portanto, de (4.1) e (4.5), segue que

$$\frac{a}{b+c} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)^1 = \frac{a}{b + \sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.6)$$

Como  $a > 0$ , concluímos que

$$b+c = b + \sqrt{a^2 + b^2},$$

isto é,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Assim, fica demonstrado o Teorema de Pitágoras.

Observe que o argumento acima continua válido no caso  $\alpha = \beta = 45^\circ$ .

Portanto, esta demonstração também abrange o triângulo retângulo isósceles.

## 4.2 SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO

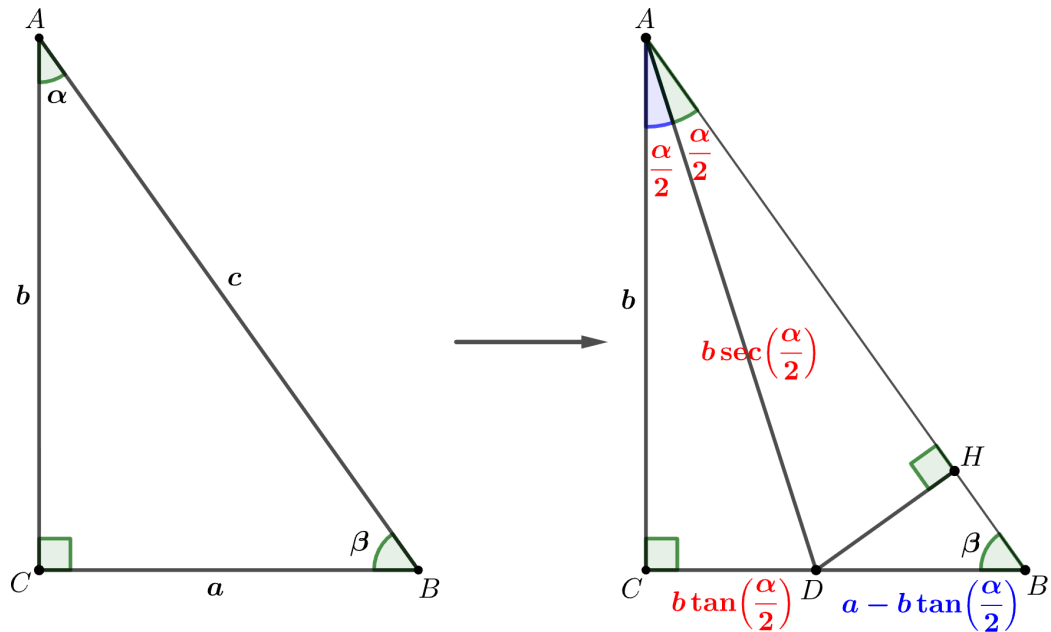
Traçamos, no triângulo  $ABC$ , a bissetriz do ângulo  $A$ , a qual intersecta o segmento  $\overline{CB}$  no ponto  $D$ , de modo que

$$m\angle CAD = m\angle DAB = \frac{\alpha}{2},$$

como mostra a Figura 14.

<sup>1</sup> Durante a fase de finalização deste trabalho, tomamos conhecimento do artigo *Trigonometric Ratios Can Prove the Pythagorean Theorem* de Kise, Uehara e Shinzato (KISE; UEHARA; SHINZATO, 2025). Embora exista uma equivalência algébrica entre as expressões obtidas, a construção geométrica aqui apresentada difere em aspectos fundamentais: enquanto aqueles autores partem de um triângulo isósceles com ângulo duplo  $2\theta$  e obtêm  $\tan \theta = (c-b)/a$ , nossa abordagem parte estritamente do triângulo retângulo dado e constrói externamente um triângulo isósceles com ângulo de base  $\alpha/2$ , conduzindo à expressão  $\tan(\alpha/2) = a/(b+c)$ . Esta diferença de perspectiva — ângulo metade versus ângulo duplo — preserva a exigência axiomática de Loomis (1940) para demonstrações do Teorema de Pitágoras e evidencia a independência do caminho geométrico percorrido.

Figura 14 – Segunda demonstração.



Fonte: Autores (2026). Construção no *software Geogebra 6.0*.

No triângulo retângulo  $CAD$ , como  $AC = b$ , o Lema 2.1 fornece

$$CD = b \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{e} \quad AD = b \sec\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Como  $CB = a$ , segue que

$$DB = CB - CD = a - b \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Agora, traçamos pelo ponto  $D$  a perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , encontrando-a no ponto  $H$ . No triângulo retângulo  $AHD$ , cuja hipotenusa é  $AD = b \sec\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  e cujo ângulo em  $A$  mede  $\frac{\alpha}{2}$ , o Lema 2.1 implica

$$DH = AD \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = b \sec\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = b \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Por outro lado, no triângulo retângulo  $DHB$ , cuja hipotenusa é

$$DB = a - b \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

e cujo ângulo em  $B$  mede  $\beta$ , temos

$$DH = DB \sin \beta = \left(a - b \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \sin \beta.$$

Igualando as duas expressões obtidas para  $DH$ , segue que

$$\left(a - b \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \sin \beta = b \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Logo,

$$a \operatorname{sen} \beta - b \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{sen} \beta = b \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right),$$

e, portanto,

$$a \operatorname{sen} \beta = b \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) (1 + \operatorname{sen} \beta).$$

Como, no triângulo retângulo  $ABC$ , temos

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{c},$$

obtemos

$$a \cdot \frac{b}{c} = b \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) \left( 1 + \frac{b}{c} \right).$$

Como  $b > 0$ , podemos simplificar por  $b$ , ficando

$$\frac{a}{c} = \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) \left( 1 + \frac{b}{c} \right).$$

Assim,

$$\frac{a}{c} = \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) \frac{b+c}{c},$$

e, multiplicando ambos os lados por  $c$ , segue que

$$a = (b+c) \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right).$$

Portanto,

$$\tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{a}{b+c}.$$

Mas, pela (4.6), já vimos na primeira demonstração que essa igualdade implica

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Assim, fica demonstrado o Teorema de Pitágoras.

Observe que o argumento acima também permanece válido no caso  $\alpha = \beta = 45^\circ$ . Portanto, esta demonstração igualmente abrange o triângulo retângulo isósceles.

### 4.3 TERCEIRA DEMONSTRAÇÃO

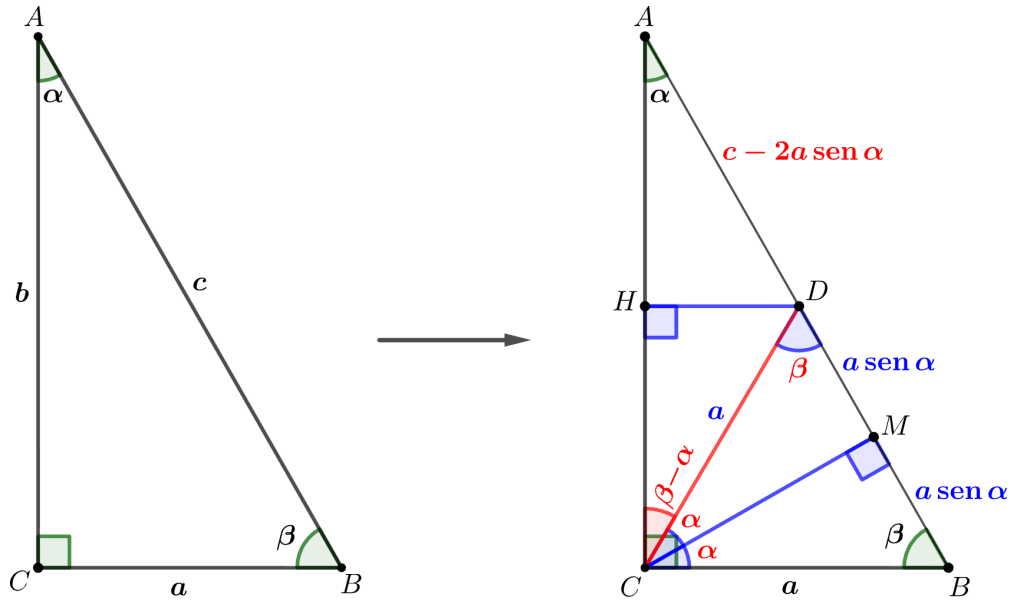
Traçamos, a partir do ponto  $C$ , uma reta que intersecta a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  no ponto  $D$ , de modo que

$$m\angle BCD = 2\alpha,$$

como mostra a Figura 15. Como  $m\angle ACB = 90^\circ$  e  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , segue que

$$m\angle ACD = 90^\circ - 2\alpha = \beta - \alpha.$$

Figura 15 – Terceira demonstração.



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

No triângulo  $BCD$ , temos

$$m\angle DCB = 2\alpha \quad \text{e} \quad m\angle CBD = \beta.$$

Logo,

$$m\angle CDB = 180^\circ - (2\alpha + \beta).$$

Como  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , obtemos

$$m\angle CDB = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ) = 90^\circ - \alpha = \beta.$$

Portanto,

$$m\angle CDB = m\angle CBD = \beta,$$

e o triângulo  $BCD$  é isósceles. Daí,

$$CD = CB = a.$$

Agora, traçamos a altura relativa ao lado  $DB$  no triângulo  $BCD$ , isto é, a perpendicular por  $C$  à reta  $\overleftrightarrow{DB}$ , cujo pé é o ponto  $M$ . Como o triângulo  $BCD$  é isósceles, essa altura também é mediana. Assim,  $DM = MB$ .

No triângulo retângulo  $DMC$ , cuja hipotenusa é  $CD = a$ , o ângulo em  $C$  mede  $\alpha$ . Portanto, pelo Lema 2.1,  $DM = a \operatorname{sen} \alpha$ .

Logo,

$$DB = 2DM = 2a \operatorname{sen} \alpha.$$

Como  $AB = c$ , obtemos

$$AD = AB - DB = c - 2a \operatorname{sen} \alpha.$$

Em seguida, traçamos pelo ponto  $D$  a perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{AC}$ , encontrando-a no ponto  $H$ . No triângulo retângulo  $ADH$ , cuja hipotenusa é

$$AD = c - 2a \operatorname{sen} \alpha$$

e cujo ângulo em  $A$  mede  $\alpha$ , o Lema 2.1 fornece

$$HD = (c - 2a \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha.$$

Por outro lado, no triângulo retângulo  $CHD$ , cuja hipotenusa é  $CD = a$ , o ângulo em  $C$  mede

$$m\angle HCD = m\angle ACD = \beta - \alpha.$$

Assim, pelo Lema 2.1,

$$HD = a \operatorname{sen}(\beta - \alpha).$$

Igualando as duas expressões obtidas para  $HD$ , segue que

$$(c - 2a \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha = a \operatorname{sen}(\beta - \alpha).$$

Usando agora que, no triângulo retângulo  $ABC$ ,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}$$

e, pela fórmula (2.5),

$$\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \frac{b^2 - a^2}{c^2},$$

obtemos

$$\left(c - 2a \frac{a}{c}\right) \frac{a}{c} = a \frac{b^2 - a^2}{c^2}.$$

Simplificando, resulta

$$\frac{a(c^2 - 2a^2)}{c^2} = \frac{a(b^2 - a^2)}{c^2}.$$

Como  $a > 0$ , segue que

$$c^2 - 2a^2 = b^2 - a^2,$$

isto é,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Assim, fica demonstrado o Teorema de Pitágoras.

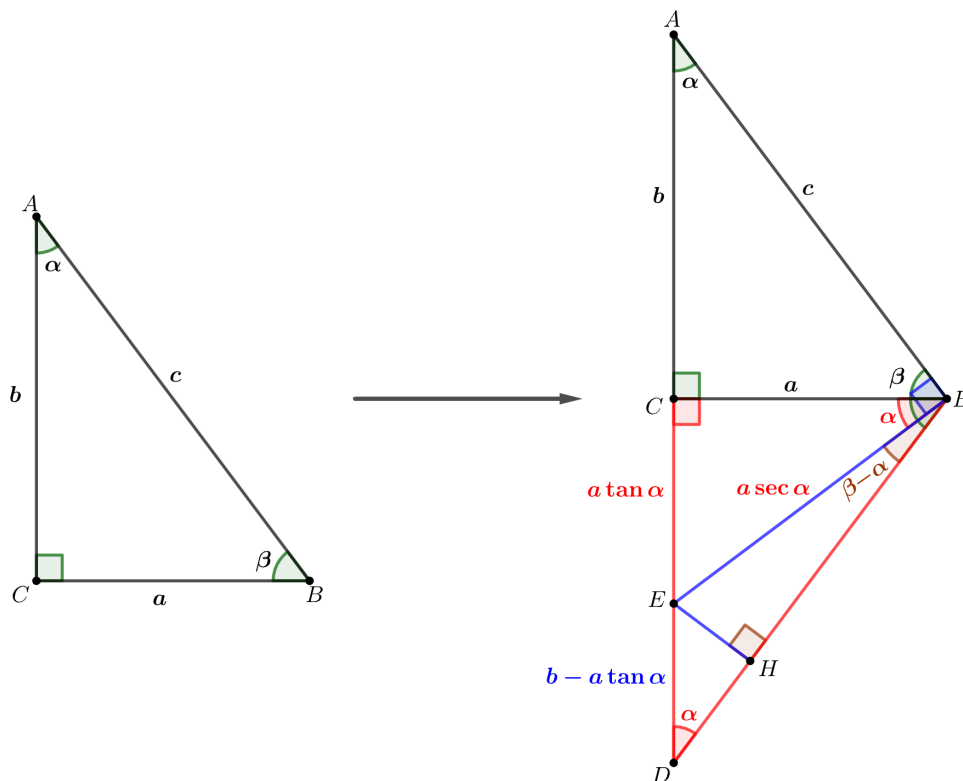
#### 4.4 QUARTA DEMONSTRAÇÃO

Prolongamos o segmento  $\overline{AC}$  para além de  $C$ , marcando um ponto  $D$  de modo que

$$CD = AC = b,$$

como mostra a Figura 16. Como  $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AC}$ , segue que também  $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{CD}$ . Portanto, o triângulo  $BDC$  é retângulo em  $C$ .

Figura 16 – Quarta demonstração.



Fonte: Autores (2026). Construção no *software* Geogebra 6.0.

Agora, os triângulos  $ABC$  e  $BDC$  satisfazem

$$AC = CD, \quad CB = CB, \quad m\angle ACB = m\angle DCB = 90^\circ.$$

Logo, esses triângulos são congruentes pelo caso LAL. Em particular, obtemos

$$DB = AB = c, \quad m\angle CDB = m\angle CAB = \alpha, \quad m\angle DBC = m\angle ABC = \beta.$$

Pelo ponto  $B$ , traçamos a perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , a qual intersecta a reta  $\overleftrightarrow{CD}$  no ponto  $E$ . Como

$$m\angle EBA = 90^\circ \quad \text{e} \quad \alpha + \beta = 90^\circ,$$

segue que

$$m\angle EBC = \alpha.$$

No triângulo retângulo  $CBE$ , conhecemos o lado  $CB = a$  e o ângulo em  $B$ , que mede  $\alpha$ . Pelo Lema 2.1, obtemos

$$CE = a \tan \alpha \quad \text{e} \quad EB = a \sec \alpha.$$

Como  $CD = b$ , resulta

$$ED = CD - CE = b - a \tan \alpha.$$

Agora, pelo ponto  $E$ , traçamos a perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{DB}$ , encontrando-a no ponto  $H$ .

No triângulo retângulo  $EHD$ , cuja hipotenusa é

$$ED = b - a \tan \alpha,$$

o ângulo em  $D$  mede  $\alpha$ , pois  $ED \subset \overleftrightarrow{CD}$  e

$$m\angle CDB = \alpha.$$

Assim, pelo Lema 2.1,

$$DH = (b - a \tan \alpha) \cos \alpha.$$

Por outro lado, no triângulo retângulo  $EBH$ , cuja hipotenusa é

$$EB = a \sec \alpha,$$

o ângulo em  $B$  é

$$m\angle DBE = m\angle DBC - m\angle EBC = \beta - \alpha.$$

Logo, pelo Lema 2.1,

$$HB = a \sec \alpha \cos(\beta - \alpha).$$

Como os pontos  $D$ ,  $H$  e  $B$  são colineares, temos

$$DB = DH + HB.$$

Como  $DB = c$ , segue que

$$c = (b - a \tan \alpha) \cos \alpha + a \sec \alpha \cos(\beta - \alpha). \quad (4.7)$$

Agora, observamos que

$$\cos(\beta - \alpha) = \sin(90^\circ - (\beta - \alpha)) = \sin((\alpha + \beta) - (\beta - \alpha)) = \sin(2\alpha).$$

Logo, por (2.3),

$$\cos(\beta - \alpha) = \sin(2\alpha) = \frac{2ab}{c^2}. \quad (4.8)$$

Substituindo (4.8) em (4.7) e usando

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \sec \alpha = \frac{c}{b},$$

obtemos

$$c = \left(b - a \cdot \frac{a}{b}\right) \frac{b}{c} + a \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{2ab}{c^2}.$$

Simplificando, segue que

$$c = \frac{b^2 - a^2}{c} + \frac{2a^2}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c}.$$

Multiplicando ambos os lados por  $c$ , concluímos que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Assim, fica demonstrado o Teorema de Pitágoras.

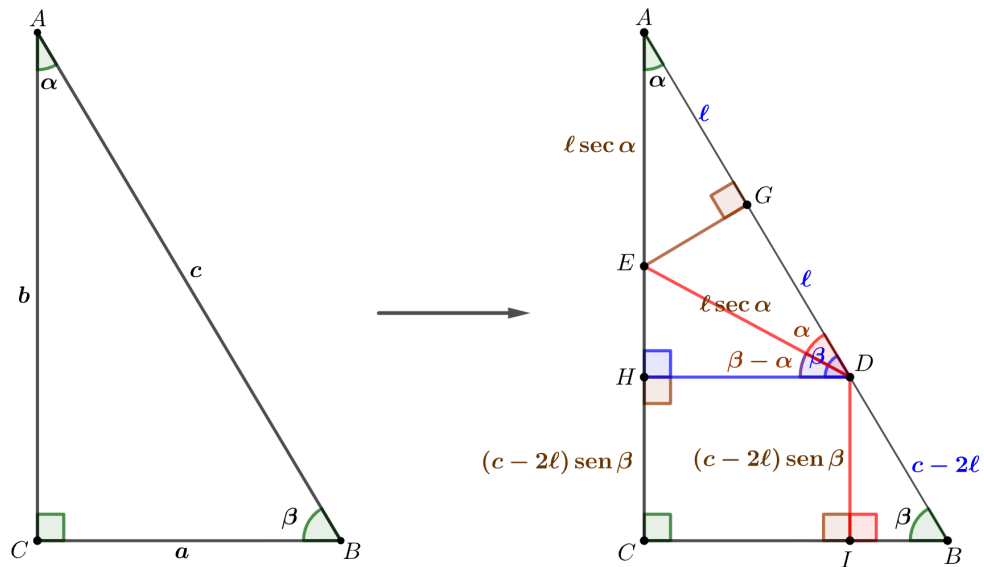
#### 4.5 QUINTA DEMONSTRAÇÃO

Escolhemos um ponto  $D$  no segmento  $\overline{AB}$  tal que

$$AD = 2\ell, \quad \text{com} \quad 0 < \ell < \frac{c}{2},$$

como mostra a Figura 17.

Figura 17 – Quinta demonstração.



Fonte: Autores (2026). Construção no software Geogebra 6.0.

Traçamos a mediatriz do segmento  $\overline{AD}$ , a qual intersecta a reta  $\overleftrightarrow{AC}$  no ponto  $E$  e o segmento  $\overline{AD}$  no ponto  $G$ . Assim,

$$\overleftrightarrow{EG} \perp \overleftrightarrow{AD} \quad \text{e} \quad AG = GD = \ell.$$

Em seguida, traçamos o segmento  $\overline{ED}$  obtendo o triângulo  $ADE$ .

Como os triângulos  $AGE$  e  $DEG$  são retângulos em  $G$ , têm

$$AG = GD \quad \text{e} \quad EG = EG,$$

segue que são congruentes. Em particular,

$$AE = ED \quad \text{e} \quad m\angle EDG = m\angle EAG = \alpha.$$

No triângulo retângulo  $AGE$ , como  $AG = \ell$  e o ângulo em  $A$  mede  $\alpha$ , o Lema 2.1 fornece

$$AE = \ell \sec \alpha.$$

Como  $AE = ED$ , concluímos que

$$ED = \ell \sec \alpha.$$

Agora, pelo ponto  $D$ , traçamos a perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{AC}$ , encontrando-a no ponto  $H$ . Como o triângulo  $ADH$  é retângulo em  $H$  e o ângulo em  $A$  mede  $\alpha$ ,

segue que

$$m\angle HDA = 90^\circ - \alpha = \beta.$$

Além disso, como  $m\angle EDG = \alpha$ , obtemos

$$m\angle EDH = m\angle HDA - m\angle EDG = \beta - \alpha.$$

No triângulo retângulo  $EDH$ , cuja hipotenusa é  $ED = \ell \sec \alpha$ , o Lema 2.1 fornece

$$EH = \ell \sec \alpha \sin(\beta - \alpha).$$

Pelo ponto  $D$ , traçamos também a perpendicular à reta  $\overleftrightarrow{CB}$ , encontrando-a no ponto  $I$ . No triângulo retângulo  $DBI$ , cuja hipotenusa é

$$DB = AB - AD = c - 2\ell,$$

e cujo ângulo em  $B$  mede  $\beta$ , o Lema 2.1 implica

$$DI = (c - 2\ell) \sin \beta.$$

Observemos agora o quadrilátero  $CHDI$ . Como  $\overline{CH} \subset \overleftrightarrow{AC}$  e  $\overline{CI} \subset \overleftrightarrow{CB}$ , temos

$$m\angle HCI = 90^\circ.$$

Além disso, por construção,

$$\overleftrightarrow{DH} \perp \overleftrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \overleftrightarrow{DI} \perp \overleftrightarrow{CB}.$$

Como  $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$ , segue que  $\overline{DH} \parallel \overline{CB}$  e  $\overline{DI} \parallel \overline{AC}$ . Portanto, o quadrilátero  $CHDI$  é um retângulo. Em particular,

$$HC = DI = (c - 2\ell) \sin \beta.$$

Finalmente, como os pontos  $A$ ,  $E$ ,  $H$  e  $C$  são colineares, temos

$$AC = AE + EH + HC.$$

Logo,

$$b = \ell \sec \alpha + \ell \sec \alpha \sin(\beta - \alpha) + (c - 2\ell) \sin \beta.$$

Usando

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \frac{b^2 - a^2}{c^2}, \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{b}{c},$$

obtemos

$$b = \ell \frac{c}{b} + \ell \frac{c}{b} \frac{b^2 - a^2}{c^2} + (c - 2\ell) \frac{b}{c}.$$

Multiplicando ambos os lados por  $bc$ , resulta

$$b^2c = \ell c^2 + \ell(b^2 - a^2) + (c - 2\ell)b^2.$$

Isto é,

$$b^2c = \ell c^2 + \ell b^2 - \ell a^2 + b^2c - 2\ell b^2.$$

Cancelando  $b^2c$  em ambos os lados, segue que

$$0 = \ell(c^2 - a^2 - b^2).$$

Como  $\ell > 0$ , concluímos que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Assim, fica demonstrado o Teorema de Pitágoras.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, investigamos demonstrações do Teorema de Pitágoras em perspectiva trigonométrica, tomando como ponto de partida o artigo *Five or Ten New Proofs of the Pythagorean Theorem*, de Ne’Kiya Jackson e Calcea Johnson. Embora esse artigo tenha servido como motivação inicial e referência conceitual importante, o percurso desenvolvido neste TCC assumiu configuração própria, tanto na seleção dos resultados preliminares quanto na organização e na elaboração das demonstrações apresentadas.

Um dos principais aspectos evidenciados ao longo do texto foi o papel estruturante das razões trigonométricas em triângulos retângulos. Em particular, procuramos mostrar que o fato de, conhecido um ângulo agudo e um lado, os demais lados ficarem determinados não constitui apenas uma observação elementar, mas pode ser tomado como um princípio organizador na construção de demonstrações. Essa ideia, formalizada no Lema 2.1, mostrou-se especialmente fecunda, pois permitiu dar unidade a todo o trabalho e enfatizar uma leitura genuinamente trigonométrica das figuras construídas.

As preliminares reunidas no Capítulo 2 desempenharam papel decisivo nesse processo. As fórmulas de adição de ângulos para seno e cosseno, o tratamento do caso do triângulo retângulo isósceles e a interpretação geométrica da série geométrica não foram incluídos apenas como ferramentas auxiliares isoladas, mas como partes de uma estratégia mais ampla. Cabe destacar ainda que essa organização conceitual não se limitou às demonstrações posteriores: mesmo no tratamento do caso do triângulo retângulo isósceles, privilegiamos a determinação de comprimentos por meio das razões trigonométricas, em vez de recorrer a argumentos de área. Com isso, o Lema 2.1 deixa de ser apenas uma ferramenta auxiliar e passa a constituir efetivamente o eixo organizador de todo o texto.

Nos Capítulos 3 e 4, o trabalho apresentou dois conjuntos de demonstrações do Teorema de Pitágoras. No primeiro, reunimos cinco demonstrações em diálogo com o artigo de Jackson e Johnson, reorganizadas e desenvolvidas em perspectiva própria. No segundo, apresentamos cinco demonstrações obtidas ao longo da pesquisa e construídas a partir das ferramentas trigonométricas apresentadas

nos capítulos preliminares. Em conjunto, essas provas mostram que a diversidade de demonstrações não é mero ornamento formal, mas expressão da riqueza interna da geometria elementar.

Do ponto de vista formativo, o desenvolvimento deste trabalho permitiu aprofundar a compreensão de noções fundamentais de trigonometria e geometria euclidiana, ao mesmo tempo em que destacou o valor matemático da produção e da comparação de demonstrações. Estudar diferentes provas de um mesmo resultado contribui para ampliar a percepção das conexões internas da Matemática, favorece a argumentação dedutiva e estimula uma postura investigativa diante de resultados já consagrados. Nesse sentido, acreditamos que o presente trabalho também possui interesse didático, especialmente na formação inicial de professores de Matemática.

Além disso, o percurso realizado permite reconhecer com maior clareza o mérito do artigo que inspirou esta pesquisa. O trabalho de Jackson e Johnson não apenas apresenta novas demonstrações do Teorema de Pitágoras, mas também mostra, de modo elegante, que a geometria elementar continua sendo um espaço legítimo de criatividade matemática. Ao dialogar com esse artigo, este TCC buscou não apenas explicar algumas de suas ideias, mas também reorganizá-las e desenvolvê-las em uma direção própria, adequada aos objetivos de um estudo exploratório em nível de graduação.

Como possível continuidade, seria interessante investigar de forma mais sistemática o potencial didático das demonstrações aqui apresentadas, comparando sua recepção e sua acessibilidade em diferentes níveis de ensino. Também parece promissor examinar se o método de construção adotado neste trabalho pode ser estendido para a obtenção de outras demonstrações do Teorema de Pitágoras ou mesmo de novos resultados da geometria elementar.

Em síntese, este estudo procurou mostrar que, mesmo sobre um dos teoremas mais conhecidos da Matemática, ainda há espaço para reorganização conceitual, criatividade e investigação rigorosa, particularmente quando a trigonometria elementar é tomada como princípio efetivo de construção de demonstrações.

## REFERÊNCIAS

- CLARK, D.; PATHANIA, S. ***A full axiomatic development of high school geometry***. Cham (CH): Springer Nature, 2023.
- JACKSON, N.; JOHNSON, C. Five or ten new proofs of the pythagorean theorem. ***The American Mathematical Monthly***, v. 131, n. 9, p. 739–752, 2024.
- KISE, S.; UEHARA, T.; SHINZATO, T. Trigonometric ratios can prove the pythagorean theorem. ***ArXiv:2506.06304***, 2025.
- LOOMIS, E. ***The Pythagorean Proposition***. 2. ed. Ann Arbor (MI): The National Council of Teachers of Mathematics (classics in Mathematics Education Series), 1940.
- LUČIĆ, Z. Who proved pythagoras's theorem? ***Math Intell***, v. 44, p. 373–381, 2022.
- LUZIA, N. Other trigonometric proofs of pythagoras theorem. ***ArXiv:1502.06628***, 2015.
- ZIMBA, J. On the possibility of trigonometric proofs of the pythagorean theorem. ***Forum Geometricorum***, v. 9, p. 275–278, 2009.