



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE  
TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA E  
TERRITÓRIO (ILATIT)**

**ENGENHARIA CIVIL DE  
INFRAESTRUTURA**

**MODELOS DE DANO PARA PÓRTICOS DE AÇO E DE CONCRETO ARMADO**

**DEBORAH CRISTINA NARDI**

Foz do Iguaçu  
2020



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE  
TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA E TERRITÓRIO  
(ILATIT)**

**ENGENHARIA CIVIL DE  
INFRAESTRUTURA**

## **MODELOS DE DANO PARA PÓRTICOS DE AÇO E DE CONCRETO ARMADO**

**DEBORAH CRISTINA NARDI**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil de Infraestrutura.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Julio-Flórez-López

Co-orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Ricardo A. Picón

Foz do Iguaçu

2020

DEBORAH CRISTINA NARDI

**MODELOS DE DANO PARA PÓRTICOS DE AÇO E DE CONCRETO ARMADO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil de Infraestrutura.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Julio-Flórez-López  
UNILA

---

Co-orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Ricardo A. Picón  
Universidad Católica de Temuco

---

Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Jorge Luis Palomino Tamayo  
UFRGS

---

Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Aref Kalilo Lima Kzam  
UNILA

Foz do Iguaçu, 16 de Dezembro de 2020.

## TERMO DE SUBMISSÃO DE TRABALHOS ACADÊMICOS

Nome completo do autor(a): DEBORAH CRISTINA NARDI

Curso: ENGENHARIA CIVIL DE INFRAESTRUTURA

Tipo de Documento	
<input checked="" type="checkbox"/> graduação	<input type="checkbox"/> artigo
<input type="checkbox"/> especialização	<input checked="" type="checkbox"/> trabalho de conclusão de curso
<input type="checkbox"/> mestrado	<input type="checkbox"/> monografia
<input type="checkbox"/> doutorado	<input type="checkbox"/> dissertação
	<input type="checkbox"/> tese
	<input type="checkbox"/> CD/DVD – obras audiovisuais
	<input type="checkbox"/>

Título do trabalho acadêmico: MODELOS DE DANO PARA PÓRTICOS DE AÇO E DE CONCRETO ARMADO.

Nome do orientador(a): PROF. DR.º JULIO-FLÓREZ-LÓPEZ.

Data da Defesa: 16/12/2020

### Licença não-exclusiva de Distribuição

O referido autor(a):

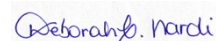
a) Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que o detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade.

b) Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à UNILA – Universidade Federal da Integração Latino-Americana os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Se o documento entregue é baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não a Universidade Federal da Integração Latino-Americana, declara que cumpriu quaisquer obrigações exigidas pelo respectivo contrato ou acordo.

Na qualidade de titular dos direitos do conteúdo supracitado, o autor autoriza a Biblioteca Latino-Americana – BIUNILA a disponibilizar a obra, gratuitamente e de acordo com a licença pública *Creative Commons Licença 3.0 Unported*.

Foz do Iguaçu, 16 de Dezembro de 2020.



Assinatura do Responsável

Dedico aos meus pais e ao meu irmão.  
Sem vocês esse sonho não se tornaria realidade.

“Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se arrepende.”

Leonardo da Vinci

NARDI, Deborah Cristina. **Modelos de dano para pórtico de aço e concreto armado**. 2020. 91. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil de Infraestrutura) – Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2020.

## RESUMO

As estruturas quando submetidas a solicitações podem apresentar o desenvolvimento de fissuração ao longo desse processo, sejam essas estruturas feitas de aço ou de concreto armado. O comportamento mecânico sofre mudanças e a resposta devido a tais solicitações com a presença de fissuras pode resultar em complicações caso a avaliação correta não tenha sido feita. Tal avaliação depende da precisão do modelo de cálculo que busca descrever essa realidade física. Essa descrição, para ambos os tipos de materiais, pode ser feita por meio dos conceitos básicos expostos pela mecânica da fratura, por exemplo. Dessa forma, o presente trabalho propõe duas formulações distintas para a avaliação do fenômeno físico da fissuração: a primeira referente a estruturas de aço quando submetidas ao mecanismo de fadiga e a segunda relativa a estruturas de concreto armado quando submetidas a solicitações mecânicas gerais. No primeiro modelo, abrangem-se os aspectos relevantes para descrição de fadiga de ultra-baixo, baixo e alto ciclo, em condições estacionárias e não estacionárias, e propõe-se relações constitutivas para avaliação do início e da evolução da fissuração, considerando a Teoria do Dano Concentrado (TDC). Já no segundo, desenvolve-se uma nova lei de dano, que também avalia a fissuração, sendo essa obtida a partir do potencial termodinâmico da Energia Livre de Gibbs, proveniente da Termodinâmica de Pórticos, a qual também considera a TDC. Os resultados numéricos de ambos os modelos para pórticos são comparados com resultados experimentais presentes na literatura. No modelo de aço, um elemento finito é implementado no software ABAQUS®. A introdução da variável de pré-dano permite a identificação do número de ciclos necessários para fratura, onde tais valores numéricos se apresentam muito próximos aos experimentais: para o teste estacionário SP-6 e para o não-estacionário SP-2, por exemplo, de acordo com os dados experimentais a fratura se inicia no ciclo 5 e 17, e os valores numéricos são de 4.85 e 17.85, respectivamente. Já no modelo de concreto armado, os valores de dano plástico e dano último variam entre 0,3-0,5 e 0,7-0,85, respectivamente, margem de valores a qual é distinta da TDC. Observa-se, portanto, que nos dois casos foram propostas ferramentas com potencial para descrever o aparecimento e evolução de fissuras, tanto para a análise quanto para a implementação computacional.

**Palavras-chave:** Fissuração; Fadiga em Pórticos de Aço; Pórticos de Concreto Armado; Termodinâmica de Pórticos; Mecânica do Dano Concentrado.

NARDI, Deborah Cristina. **Damage models for steel and reinforced concrete frames**. 2020. 91. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Civil de Infraestrutura) – Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2020.

## ABSTRACT

The structures when submitted to solicitations may present cracking development during this process, whether these structures are made of steel or reinforced concrete. The mechanical behavior changes and the response due to such solicitations with the presence of cracks may result into complications if the correct evaluation was not done. This evaluation depends on the calculus modeling accuracy, which aims to describe the physical reality. This description, for both types of materials, can be done through the basic concepts given by the fracture mechanics, por example. Thus, the present work proposes two different formulations for the evaluation of the physical phenomenon of cracking: the first one is referent to steel structures when submitted to the fatigue mechanism and the second one is relative to reinforced concrete structures when subjected to general mechanical solicitations. In the first model, the relevant aspects for describing ultra-low, low and high cycle fatigue are pointed, under stationary or non-stationary conditions, and then, constitutive relationships for evaluating the beginning and the cracking evolution are proposed, considering the Lumped Damage Mechanics (LDM). In the second model, a new damage law is proposed, which also evaluates the cracking evolution. The obtention of this new damage evolution law is done through the Gibbs Free Energy, which is derived from Thermodynamics of Frames, that also considers the LDM. The numerical results of both frame models are compared with the ones present in the literature. In the steel model, a finite element in ABAQUS® software is implemented. The introduction of the pre-damage variable allows the identification of the necessary number of cycles to fracture, where such numerical values are very close to the experimental ones: for the SP-6 stationary test and for the SP-2 non-stationary test, for example, according to the experimental data, fracture starts in cycles 5 and 17, and the numerical results are 4.85 and 17.85 respectively. In the reinforced concrete model, the values of plastic damage and ultimate damage vary between 0.3-0.5 and 0.7-0.85, respectively, a range of values which is different from the LDM. Therefore, it is observed that in both cases efficient tools to describe the appearance and cracking evolution were proposed, for both analysis and computational implementation.

**Key words:** Cracking; Fatigue in Steel Frames; Reinforced Concrete Frames; Thermodynamics of Frames; Lumped Damage Mechanics.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> - Pórtico plano e deformações generalizadas. ....	22
<b>Figura 2</b> – Representação das deformações e tensões generalizadas, respectivamente. ....	23
<b>Figura 3</b> – Esquematização das relações utilizadas entre $U$ , $\Phi$ , $M$ e $F$ .....	23
<b>Figura 4</b> – a) Relação entre deslocamentos nos eixos globais e locais; b) Incremento das deformações devido a aplicação de deslocamento infinitesimal.....	24
<b>Figura 5</b> – Rótula plástica em uma viga de aço.....	28
<b>Figura 6</b> - Relação entre amplitude de deformações e número de ciclos. ....	30
<b>Figura 7</b> – Esquema representativo do tamanho da fissura relacionado com a vida de fadiga para baixo e alto ciclo.....	31
<b>Figura 8</b> – Processo metodológico adotado para a Parte I. ....	32
<b>Figura 9</b> – Amplitude média do histórico de tempo com diferentes valores de $\Delta N$ .....	35
<b>Figura 10</b> – Procedimento para determinação dos valores de $\beta$ e $\Phi_{crp}$ .....	37
<b>Figura 11</b> – Procedimento para determinação dos valores de $\alpha$ , $Q$ e $r$ . ....	40
<b>Figura 12</b> – Elemento de pórtico como combinação de viga elástica e rótulas inelásticas. ....	42
<b>Figura 13</b> - (a) Conjunto experimental dos testes de Zhou, Wang et al. e (b) Malha do EF. ....	43
<b>Figura 14</b> – Histórico de deslocamentos dos testes estacionários SP-6, SP-7 e SP-9. ....	44
<b>Figura 15</b> – Resultados obtidos para (a) SP-6 (b) SP-7 e (c) SP-9.....	45
<b>Figura 16</b> – Resultados das amplitudes médias de rotações, momentos fletores e taxa de liberação de energia para (a) SP-6 (b) SP-7 e (c) SP-9.....	47
<b>Figura 17</b> – Histórico de deslocamentos dos testes não estacionários SP-2, SP-3 e SP-5. ....	48
<b>Figura 18</b> – Resultados obtidos para (a) SP-2 (b) SP-3 e (c) SP-5.....	49
<b>Figura 19</b> – Resultados das amplitudes médias de rotações, momentos fletores e taxa de liberação de energia para (a) SP-2 (b) SP-3 e (c) SP-5.....	50
<b>Figura 20</b> – Taxa de liberação de energia como uma função do dano.....	56
<b>Figura 21</b> – (a) Junção viga-coluna; (b) Representação mecânica do teste. ....	56
<b>Figura 22</b> – Momento em função do dano. ....	58
<b>Figura 23</b> – Fluxograma das etapas do trabalho. ....	66
<b>Figura 24</b> – Momento em função do dano para o novo modelo. ....	69
<b>Figura 25</b> – (a) Esquema que representa junção viga-coluna submetida à flexão; (b) Coluna com base rígida fixa e propriedades dos materiais; (c) Pórtico de dois níveis e suas	

propriedades. ....	71
<b>Figura 26</b> – Síntese do processo das simulações para ambos os modelos.....	73
<b>Figura 27</b> – Esquema que representa modelagem da junção viga-coluna .....	75
<b>Figura 28</b> – Gráfico de dano por deslocamento. ....	76
<b>Figura 29</b> – Gráfico das rotações plásticas por deslocamento.....	77
<b>Figura 30</b> – Gráfico de dano por taxa de liberação de energia para os modelos de (a) Dano Concentrado (b) Termodinâmica de Pórticos. ....	78
<b>Figura 31</b> – Gráfico de dano por taxa de liberação de energia. ....	79
<b>Figura 32</b> – Gráfico de dano por deslocamento. ....	80
<b>Figura 33</b> – Gráfico das rotações plásticas por deslocamento.....	80
<b>Figura 34</b> – Gráfico de força por deslocamento. ....	81
<b>Figura 35</b> – Representação da estrutura, com seus respectivos nós e elementos...	82
<b>Figura 36</b> – Gráfico de dano por deslocamento para (a) Modelo Termodinâmica de Pórticos e (b) Modelo De dano concentrado.....	83
<b>Figura 37</b> – Mapa de danos para (a) Modelo Termodinâmica de Pórticos e (b) Modelo De dano concentrado.....	84
<b>Figura 38</b> – Gráfico de dano por deslocamento para (a) Modelo Termodinâmica de Pórticos e (b) Modelo De dano concentrado.....	85
<b>Figura 39</b> – Gráfico de força por deslocamento (a) Modelo novo e (b) Modelo clássico. ....	86

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> - Parâmetros das fases de pré-dano e dano obtidos.....	44
<b>Tabela 2</b> - Comparativo entre os valores de entrada utilizados para cada simulação.....	75
<b>Tabela 3</b> – Parâmetros de cálculo $R_0$ , $q$ , $h$ e $k_0$ de cada simulação bem como valores de dano plástico e último. ....	76
<b>Tabela 4</b> - Comparativo entre os valores de entrada utilizados para cada simulação.....	79
<b>Tabela 5</b> - Parâmetros de cálculo $R_0$ , $q$ , $h$ e $k_0$ de cada simulação bem como valores de dano plástico e último. ....	79
<b>Tabela 6</b> - Comparativo entre os valores de entrada utilizados para cada simulação.....	82
<b>Tabela 7</b> - Parâmetros de cálculo $R_0$ , $q$ , $h$ e $k_0$ de cada simulação bem como valores de dano plástico e último. ....	82

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$A_\alpha$	Força termodinâmica associada as variáveis de estado
$AE$	Rigidez axial
$\{A^p\}$	Força termodinâmica associada à plasticidade
$\{A^d\}$	Força termodinâmica associada ao dano
$[B]_b$	Matriz de transformação cinemática do elemento b
$\mathbf{B}$	Conjunto dos momentos fletores acumulados, nos nós i e j
$b$	Número de elementos
$b_{cr}$	Número crítico momentos fletores acumulados
$\hat{b}$	Momentos fletores acumulados
$\{D\}$	Conjunto das variáveis de dano
$d, d_i, d_j$	Dano
$d_h$	Dano da fadiga de alto ciclo
$d(N)_L, d_L$	Dano da fadiga de baixo ciclo
$d_p$	Dano plástico
$d_u$	Dano último
$\dot{E}, \dot{E}_b$	Taxa de energia interna
$E$	Módulo de elasticidade
$EI$	Rigidez à flexão
$[F^0], [F^0(D)]$	Matriz de flexibilidade inicial do elemento
$[F], [F(D)], [F(cD)]$	Matriz de flexibilidade do elemento
$\{F\}$	Matriz de forças generalizadas
$f, f^p$	Função de escoamento
$\mathbf{g}$	Conjunto das taxas de liberação de energia acumuladas, nos nós i e j
$G$	Taxa de liberação de energia
$G_b$	Energia livre de Gibbs
$H$	Altura da seção transversal
$[H], [H(D)]$	matriz de encruamento cinemático linear
$h$	Termo de encruamento cinemático linear
$I$	Momento de inércia
$I(D)$	Função que representa a resistência no potencial termodinâmico
$\dot{K}, \dot{K}_b$	Taxa de energia cinética
$k_0,$	Momento plástico efetivo
$L_b$	Comprimento do elemento b
$L_p$	Comprimento da rótula plástica
$\{M\}$	Vetor de tensões generalizadas
$\{M\}_b$	Vetor de tensões generalizadas do elemento b
$[Mass]$	Matriz de massa

$M_p$	Momento plástico
$M_{cr}$	Momento crítico
$M_u$	Momento último
$m_i^b, m_j^b, n_b$	Tensões generalizadas do elemento b
$M_y$	momento de escoamento
$m$	Momento
$m_{max}$	Momento máximo
$N$	Número de ciclos
$N_{cr}$	Número crítico de ciclos para iniciar a fratura
$\mathbf{P}$	Conjunto das rotações plásticas acumuladas, nos nós i e j
$\dot{p}$	Rotação plástica acumulada
$p_{cr}$	Número crítico rotações plásticas acumuladas
$\hat{P}$	Potência virtual
$P_{def}$	Potência das deformações
$\hat{P}_{def}$	Potência virtual das deformações
$P_{ext}$	Potência das forças externas
$\hat{P}_{ext}$	Potência virtual das forças externas
$P_{ine}$	Potência das forças de inércia
$\hat{P}_{ine}$	Potência virtual das forças de inércia
$Q, Q_b$	Taxa quantidade de calor
$q$	Incremento da resistência pela ação da armadura
$Q$	Parâmetro do modelo para pórticos de aço
$r$	Parâmetro do modelo para pórticos de aço
$R(d)$	Função de resistência
$R_0$	Resistência inicial
$Ru_n$	Força horizontal externa
$Rw_n$	Força vertical externa
$\dot{S}, \dot{S}_b$	Entropia
$t$	Deslocamento
$t_p$	Deslocamento permanente
$T, T_b$	temperatura absoluta
$\{U\}$	Matriz de deslocamentos generalizados
$\{\dot{U}\}$	Matriz de velocidades virtuais
$\{\ddot{U}\}$	Matriz de acelerações
$V_\alpha$	Variáveis de estado
$W_b$	Energia de deformação complementar
$x$	Função de encruamento linear
$z$	Distância do eixo neutro

$y$	Taxa de liberação de energia pelo critério de Griffith
$Z(d)$	Inclinação da reta
$Z_0$	Inclinação inicial da reta
$\alpha$	Parâmetro do modelo geral para pórticos de aço
$\beta$	Parâmetro Lei de Coffin-Manson
$\gamma$	Parâmetro da Lei de Basquin
$\Delta G$	Amplitude da taxa de liberação de energia
$\Delta K$	Fator de intensidade de tensões
$\Delta m$	Amplitude de momentos fletores
$\Delta \varepsilon_p$	Amplitude de deformação plástica
$\Delta \sigma$	Amplitude de tensões
$\Delta \Phi^p$	Amplitude de rotações plásticas
$\Delta G_{ave}$	Amplitude média da taxa de liberação de energia
$\Delta m_{ave}$	Amplitude média de momentos fletores
$\Delta \Phi^p_{ave}$	Amplitude média de rotações plásticas
$\varepsilon_f$	Parâmetro Lei de Coffin-Manson
$\sigma_f$	Parâmetro da Lei de Basquin
$\{\Phi\}_b$	Vetor de deformações generalizadas do elemento b
$\{\Phi^p\}_b$	Vetor de deformações plásticas generalizadas do elemento b
$\{\Phi^0\}_b$	Vetor das deformações iniciais do elemento b
$\Phi_{cr}^p$	Rotação plástica crítica
$\{\Omega\}$	Conjunto das variáveis de pré-dano, nos nós i e j
$\omega$	Variável de pré-dano
$\omega_L$	Variável de pré-dano para fadiga de baixo ciclo
$\omega_h$	Variável de pré-dano para fadiga de alto ciclo

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>17</b>
<b>2 OBJETIVOS</b> .....	<b>21</b>
2.1 OBJETIVOS GERAIS .....	21
2.2.1 <i>Objetivos Específicos do “Modelo Geral de Fadiga para Pórticos de Aço” (Parte I)</i> .....	21
2.2.2 <i>Objetivos Específicos do “Modelo Elastoplástico com Dano Baseado na Termodinâmica de Pórticos” (Parte II)</i> .....	21
<b>3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA GERAL</b> .....	<b>22</b>
3.1 ANÁLISE GERAL DE PÓRTICOS .....	22
3.2 TEORIA DO DANO CONCENTRADO (TDC) .....	25
<b>4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DA PARTE I</b> .....	<b>27</b>
4.1 FADIGA DE ULTRA-BAIXO E BAIXO CICLO EM VIGAS DE AÇO .....	27
4.1.1 <i>Fadiga Estacionária</i> .....	27
4.1.2 <i>Fadiga Não Estacionária</i> .....	29
4.2 FADIGA DE ALTO CICLO EM VIGAS DE AÇO.....	29
<b>5 METODOLOGIA DA PARTE I</b> .....	<b>32</b>
5.1 IDENTIFICAÇÃO DO INÍCIO DA FISSURAÇÃO – FASE DE PRÉ-DANO .....	33
5.1.1 <i>Fadiga de Ultra-Baixo (ULCF) e Baixo ciclo (LCF)</i> .....	33
5.1.2 <i>Fadiga de Alto Ciclo (HCF)</i> .....	33
5.1.3 <i>Conceito de Amplitudes Médias: Fadiga não Estacionária em Rótulas Inelásticas - Implementação Numérica</i> .....	34
5.1.4 <i>Modelo Geral para Identificação do Início da Fissuração</i> .....	36
5.1.5 <i>Determinação dos Parâmetros na Fase de Pré-Dano</i> .....	36
5.2 AVALIAÇÃO DA EVOLUÇÃO DA FISSURA – FASE DE DANO.....	37
5.2.1 <i>Modelo de Dano para ULCF e LCF</i> .....	37
5.2.2 <i>Modelo de Dano para HCF</i> .....	38
5.2.3 <i>Modelo de Dano para Fadiga Geral</i> .....	39
5.2.4 <i>Determinação dos Parâmetros da Fase de Dano</i> .....	39
5.3 LEIS DE ELASTICIDADE E DE PLASTICIDADE.....	40
<b>6 RESULTADOS E DISCUSSÕES DA PARTE I</b> .....	<b>43</b>
6.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS: TESTES DE FADIGA ESTACIONÁRIOS .....	43
6.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS: TESTES DE FADIGA NÃO- ESTACIONÁRIOS.....	48
<b>7 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DA PARTE II</b> .....	<b>53</b>
7.1 ANÁLISE DE PÓRTICOS .....	53
7.1.1 <i>Análise de Pórticos Elásticos</i> .....	53

	16
7.1.2 <i>Análise De Pórticos Elastoplásticos</i> .....	53
7.1.3 <i>Modelos Elastoplástico com Encruamento Cinemático Linear e Dano</i> .....	55
7.1.4 <i>Medida Experimental do Dano em uma Rótula Plástica</i> .....	56
7.1.5 <i>Cômputo dos Parâmetros de <math>R_0</math>, <math>q</math>, <math>h</math> e <math>k_0</math> pela Teoria do Dano Concentrado (TDC)</i> ....	57
7.3 <b>TERMODINÂMICA DE PÓRTICOS</b> .....	59
7.3.1 <i>Princípio das Potências Virtuais e Equação do Equilíbrio Dinâmico</i> .....	59
7.3.2 <i>Primeiro Princípio da Termodinâmica</i> .....	60
7.3.3 <i>Segundo Princípio da Termodinâmica</i> .....	61
7.3.4 <i>Leis de Estado</i> .....	62
7.3.5 <i>Formulação Termodinâmica para Pórticos Elásticos</i> .....	63
7.3.6 <i>Formulação Termodinâmica para Pórticos Elastoplásticos</i> .....	63
7.3.7 <i>Formulação Termodinâmica para Pórticos com Encruamento Cinemático e Dano</i> .....	64
<b>8 METODOLOGIA DA PARTE II</b> .....	<b>66</b>
8.1 <b>MODELO ELASTOPLÁSTICO COM DANO BASEADO NA TERMODINÂMICA DE PÓRTICOS</b> .....	67
8.2 <b>TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA E EQUAÇÃO DE RESISTÊNCIA À FISSURAÇÃO</b> .....	68
8.3 <b>CÔMPUTO DOS PARÂMETROS <math>R_0</math>, <math>q</math>, <math>h</math> E <math>k_0</math></b> .....	70
8.4 <b>EXEMPLOS PARA ANÁLISE</b> .....	70
8.5 <b>ANÁLISE COMPARATIVA</b> .....	72
<b>9 RESULTADOS E DISCUSSÕES DA PARTE II</b> .....	<b>75</b>
9.1 <b>ANÁLISE DA JUNÇÃO VIGA-COLUNA SUBMETIDA À FLEXÃO</b> .....	75
9.2 <b>ANÁLISE DA COLUNA DE BASE RÍGIDA</b> .....	79
9.3 <b>ANÁLISE DO PÓRTICO DE DOIS NÍVEIS</b> .....	81
<b>10 CONCLUSÕES</b> .....	<b>87</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>89</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O projeto de uma estrutura é uma ciência na qual a experiência de construções passadas, bem sucedidas e malsucedidas, juntamente com as leis da física e da matemática e os resultados de inúmeras pesquisas são utilizados para providenciar estruturas que funcionem de forma eficiente e segura (GALAMBOS, 2016). Os elementos que vem a compor a estrutura como um todo podem ser feitos de materiais como aço ou concreto armado, por exemplo.

Sabe-se que o concreto armado é um dos principais materiais estruturais utilizados na construção (HAIFENG e JIANGUO, 2009) e pertence a um campo de pesquisa que passou a ganhar notoriedade durante o século passado devido ao fato de que os engenheiros começaram a procurar por melhoria nos critérios de segurança e economia (SOARES et al., 2002). Tem-se também que o uso do aço em membros estruturais veio se desenvolvendo ao longo do último século, onde o estudo sobre esse começou a passar de uma simples aproximação envolvendo propriedades básicas do material e sobre matemática elementar para um tratamento mais sofisticado e exigente por intermédio do conhecimento de comportamentos estruturais e materiais (SALMON e JOHNSON, 1996).

Tais estruturas quando submetidas a diferentes tipos de solicitações podem apresentar o surgimento de variados tipos de fenômenos, como, por exemplo, o da fissuração. Nas estruturas de concreto armado, os tipos de fissura que ocorrem podem ser provenientes de diversos mecanismos, como físicos, térmicos, químicos ou estruturais (MOLIN, 1998) e sua ocorrência traz o receio de que a estrutura ou elemento deixe de cumprir com seus critérios de desempenho, ou, que ainda, tenha sua vida útil reduzida (VIEIRA, 2017). Já nos elementos estruturais feitos de aço, o efeito da aplicação de cargas cíclicas repetidas pode ser marcante e, de acordo com Bai et al. (2020, no prelo), levar o elemento a falhar em serviço, sendo tal tipo de falha conhecido como falha por fadiga devido a formação e propagação de fissuras.

De forma geral, considera-se dois aspectos principais que devem ser levados em conta para o projeto apropriado de uma estrutura, independente do tipo de material utilizado: a confiança da previsão de limites de serviço e último e a precisão do modelo mecânico, no qual as condições de equilíbrio e compatibilidade geométrica devem ser satisfeitas em conjunto com modelos apropriados para descrever o comportamento material (SOARES et al., 2002). Agregado a tais fatores tem-se que não só a precisão é de extrema importância, mas também a facilidade da análise e consequente implementação computacional, ou seja, o modelo constitutivo proposto deve ser adequado e eficaz tanto em teoria quanto para o uso em simulações computacionais (YAZDANI e SCHREYER, 1990).

Amorim (2016) afirma que com a finalidade de se ter precisão da descrição do comportamento estrutural são propostas teorias não lineares, como a teoria da plasticidade, mecânica da fratura e mecânica do dano. Segundo o mesmo autor, para a representação do processo de deterioração da estrutura, a plasticidade leva em conta deformações plásticas locais,

enquanto que a mecânica clássica da fratura faz a análise de propagação de um número pequeno de fissuras nos meios contínuos, consideração essa de grande importância, já que, segundo Mazars e Pijadier-Cabot (1989), a falha de muitos materiais é de fato devido a propagação de tais fissuras.

Assim, de acordo com Ghib e Tinawi (1995), o entendimento adequado e modelagem mecânica do processo de danificação é de vital importância para discutir os efeitos mecânicos da deterioração do material no comportamento macroscópico da estrutura e por essa razão, uma aproximação sistemática para inter-relacionar a distribuição de defeitos e tal comportamento macroscópico pode ser fornecida com o intuito fundamental de representar o estado do dano dos elementos, por meio de uma variável interna, a qual diretamente caracteriza a distribuição de microfissuras formadas no processo de carregamento, estabelecendo equações que descrevem tanto evolução dessa como a do comportamento mecânico do elemento danificado.

Outra proposta, disponível então, para análise não linear é a Teoria do Dano Concentrado (TDC), a qual, segundo Flórez-López, Marante e Picón (2015), considera a variável do dano e a plasticidade acopladas em rótulas plásticas.

Portanto, o presente trabalho apresenta o desenvolvimento de dois modelos de cálculo estrutural que apesar de distintos possuem uma finalidade em comum: permitir a análise do início e da evolução da fissuração em estruturas de pórticos. Para uma melhor organização e consequente compreensão do que foi realizado, o trabalho será dividido conforme detalha-se em sequência: primeiramente, faz-se um levantamento dos conceitos que os modelos apresentam em comum entre eles, como as notações iniciais, um breve resumo sobre a TDC e uma abordagem sobre as equações de equilíbrio e cinemáticas consideradas; em seguida detalha-se o desenvolvimento do modelo para pórticos de aço, com sua respectiva metodologia e resultados obtidos; faz-se, então, o mesmo para o modelo para pórticos de concreto armado; e, finalmente, apresenta-se uma conclusão relativa aos dois temas explorados.

Dessa forma, o primeiro modelo, denominado "*Modelo Geral de Fadiga para Pórticos de Aço*" será apresentado na Parte I do presente trabalho. O incentivo para elaboração do mesmo é devido ao fato de que atualmente não existem modelos de cálculo que abrangem numa única formulação geral os efeitos advindos da fadiga de ultra-baixo, baixo e alto ciclo, estejam esses fenômenos ocorrendo sob processos estacionários (amplitudes constantes) ou não estacionários (amplitudes não constantes). A problemática levantada é de extrema importância para profissionais do ramo da engenharia civil, uma vez que se sabe que inúmeras das falhas estruturais ocorrentes se dão devido ao desencadeamento do fenômeno de fadiga. Um evento notável que pode ser mencionado onde a falha resultante foi devido ao mecanismo da fadiga de baixo ciclo é o terremoto de Northridge em 1994 (NAKASHIMA et al., 1997), no qual inúmeras estruturas colapsaram deixando danos imensuráveis (além de estruturais, como sociais e ambientais, por exemplo) para a comunidade local.

Na literatura existem modelos que consideram os tipos de fadiga (baixo ou alto ciclo) de

maneira individual. Destaca-se atenção de que um modelo que considera apenas um tipo de fadiga não pode ser aplicado a outro tipo já que os mecanismos de cada um deles são diferentes. Dessa maneira, a Parte I detalha todo o equacionamento e considerações feitas para o alcance das leis constitutivas finais contemplando ambos os possíveis tipos de fadiga. Para o alcance do modelo geral quatro referências foram utilizadas como base: o trabalho de Zhou et al. (2013), onde um estudo experimental a respeito do comportamento de junções viga-coluna de aço submetidas a ultra-baixo e baixo ciclo foi realizado; o modelo de dano para fadiga de ultra-baixo ciclo de Bai et al. (2016); a generalização da Lei de Paris para rótulas inelásticas feita por Bazán et al. (2019), trabalho o qual serve de suporte para a consideração dos efeitos da fadiga de alto ciclo; e, por fim, a hipótese de acumulação de dano de Lemaitre e Chaboche (1990), uma vez que, para o modelo geral são propostas combinações dos efeitos de baixo e alto ciclo, onde a soma dos efeitos só é possível por intermédio de tal hipótese.

Já o segundo modelo é apresentado na Parte II, sendo esse denominado "*Modelo Elastoplástico com Dano Baseado na Termodinâmica de Pórticos*". Para o desenvolvimento desse tópico, considerou-se que, segundo Haupt (1993), o comportamento mecânico dos materiais pode ser diretamente relacionado como comportamento termodinâmico sob condições isotérmicas ou adiabáticas. Além disso, ainda de acordo com o mesmo, enquanto o objeto de estudo da mecânica como parte da física é a compreensão científica do movimento de corpos, a termodinâmica faz parte de outro campo que investiga a transformação e troca de energia.

Ademais, levou-se em conta que a mudança interna estrutural de um elemento é caracterizada pelo seu estado (FREED e CHABOCHE, 1989). Portanto, com a finalidade de se obter um formalismo que é diretamente acessível aos métodos de análise funcional, é possível adotar a aproximação termodinâmica do processo irreversível pela introdução de variáveis de estado, onde o potencial termodinâmico definido permite a definição das variáveis de estado para o fenômeno estudado, o que, naturalmente leva às leis de estado (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990).

Nesse sentido, o modelo referente a Parte II se fundamenta em formulações termodinâmicas que permitem a avaliação do fenômeno físico da fissuração para estruturas de concreto armado, a fim de propor um novo modelo de cálculo que considera uma lei de dano que provém diretamente da Energia Livre de Gibbs. Assim, duas referências foram indispensáveis para o desenvolvimento desse modelo: os trabalhos de Dahmer (2018) e Brant (2019), os quais escreveram os princípios da Termodinâmica de Pórticos por meio dos conceitos da Termodinâmica de Sólidos apresentadas por Lemaitre e Chaboche (1990). Além dos princípios, ambos autores sugeriram formulações termodinâmicas para análise de fenômenos físicos e químicos, formulações as quais definem leis constitutivas, como a lei de dano, por exemplo. Finalmente, em prol da validação do modelo, uma vez que uma nova lei de dano é proposta, busca-se comparar os resultados fornecidos pelo novo modelo com os resultados dados pela TDC, uma vez que esse também contempla uma lei de dano amplamente utilizada, porém, que provém do conceito de

energia potencial complementar, conceito esse utilizado na teoria das estruturas.

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 OBJETIVOS GERAIS

Elaborar dois modelos distintos de cálculo elastoplástico que consideram a deterioração material por meio da consideração da variável do dano, sendo o primeiro referente a um modelo para análise geral de fadiga em pórticos de aço, construído a partir das conhecidas leis de Basquin e Coffin-Manson; e o segundo referente a um modelo para pórticos de concreto armado submetidos a solicitações mecânicas gerais, sendo esse fundamentado na termodinâmica de pórticos por intermédio da Energia Livre de Gibbs.

#### 2.2.1 Objetivos Específicos do “*Modelo Geral de Fadiga para Pórticos de Aço*” (Parte I)

- a) Propor leis constitutivas (lei de elasticidade, lei de plasticidade, lei de pré-dano e lei de dano) abrangentes para previsão de falha por fadiga, seja de ultra-baixo, baixo ou alto ciclo, seja sob condições estacionárias (amplitudes constantes) ou não estacionárias (amplitudes não constantes);
- b) Realizar simulações computacionais que possibilitem indicar o número de ciclos necessários para iniciação da fissura, e, posteriormente, avaliar a evolução desse fenômeno;
- c) Comparar os resultados numéricos com os experimentais que se encontram na literatura, em prol da validação do modelo.

#### 2.2.2 Objetivos Específicos do “*Modelo Elastoplástico com Dano Baseado na Termodinâmica de Pórticos*” (Parte II)

- a) Propor uma nova função do dano definida por intermédio do potencial de Gibbs;
- b) Obter resultados que permitem avaliar o comportamento mecânico de exemplos existentes na literatura, por meio de simulação computacional;
- c) Realizar uma análise comparativa, avaliando as diferenças e/ou semelhanças entre o modelo fornecido pela Teoria do Dano Concentrado (TDC) e o novo modelo em questão.

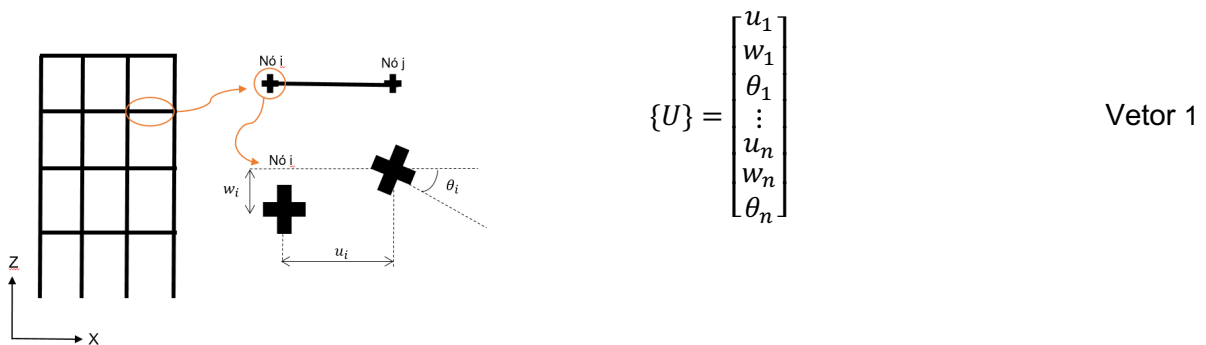
### 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA GERAL

No presente tópico revisa-se os principais conceitos bibliográficos que são comuns para ambos os modelos desenvolvidos.

#### 3.1 ANÁLISE GERAL DE PÓRTICOS

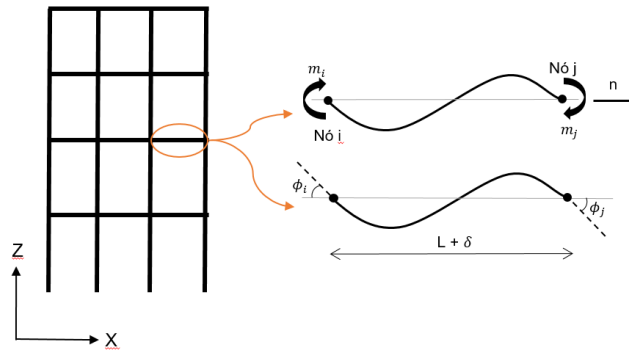
Os pórticos planos tratam-se de estruturas reticuladas, as quais podem ser discretizadas por elementos de viga com deformação axial (BARROS, 2004). Ao analisar os elementos separadamente (Figura 1), considera-se que cada nó apresenta deslocamentos generalizados  $u_i$  (horizontais),  $w_i$  (verticais) e  $\theta_i$  (rotações), os quais são sintetizados no vetor de deslocamentos generalizados  $\{U\}$  (Vetor 1) (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015), onde, por convenção, os deslocamentos horizontais e verticais positivos estão na direção positiva do eixo x e z, respectivamente, e a rotação do nó i positiva no sentido horário.

**Figura 1** - Pórtico plano e deformações generalizadas.



Para caracterizar a modificação da forma da estrutura (Figura 2), introduz-se o vetor de deformações  $\{\Phi\}$  (Vetor 2), e, a fim de refletir a relação entre essa resposta da estrutura (as deformações) quando submetida a um carregamento atuante, o qual é representado pelo vetor de forças externas  $\{F\}$  (Vetor 3), define-se o vetor de tensões generalizadas  $\{M\}$  (Vetor 4) (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

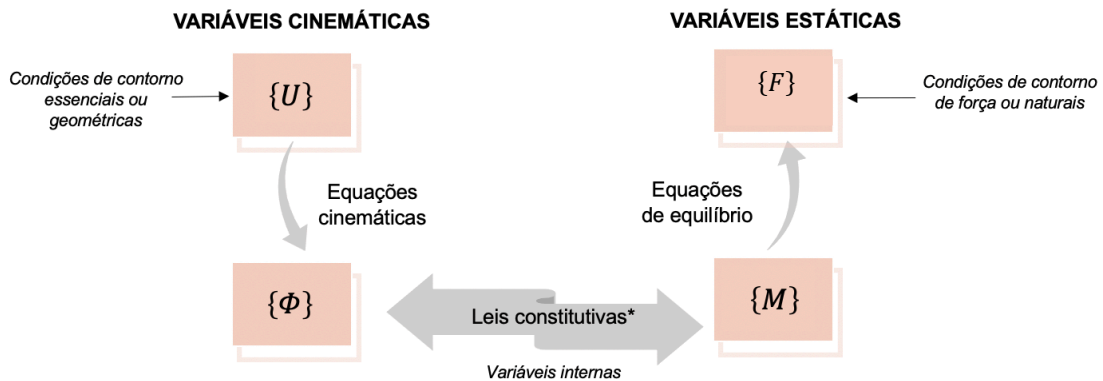
**Figura 2** – Representação das deformações e tensões generalizadas, respectivamente.



$$\{\Phi\} = \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \delta \end{bmatrix} \quad \text{Vetor 2} \quad \{F\} = \begin{bmatrix} Ru_1 \\ Rw_1 \\ M_1 \\ \vdots \\ Ru_n \\ Rw_n \\ M_n \end{bmatrix} \quad \text{Vetor 3} \quad \{M\} = \begin{bmatrix} m_i \\ m_j \\ n \end{bmatrix} \quad \text{Vetor 4}$$

Dessa maneira, torna-se possível relacionar os deslocamentos com as deformações por meio de relações cinemáticas, as deformações e as tensões por intermédio de leis constitutivas e as tensões com as forças externas pelas equações de equilíbrio, conforme sintetizado na Figura 3, onde as condições de contorno essenciais referem-se aos nós com reações de apoio enquanto as condições de contorno de força dizem respeito aos nós com carregamentos ou momentos aplicados (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

**Figura 3** – Esquemática das relações utilizadas entre  $\{U\}$ ,  $\{\Phi\}$ ,  $\{M\}$  e  $\{F\}$

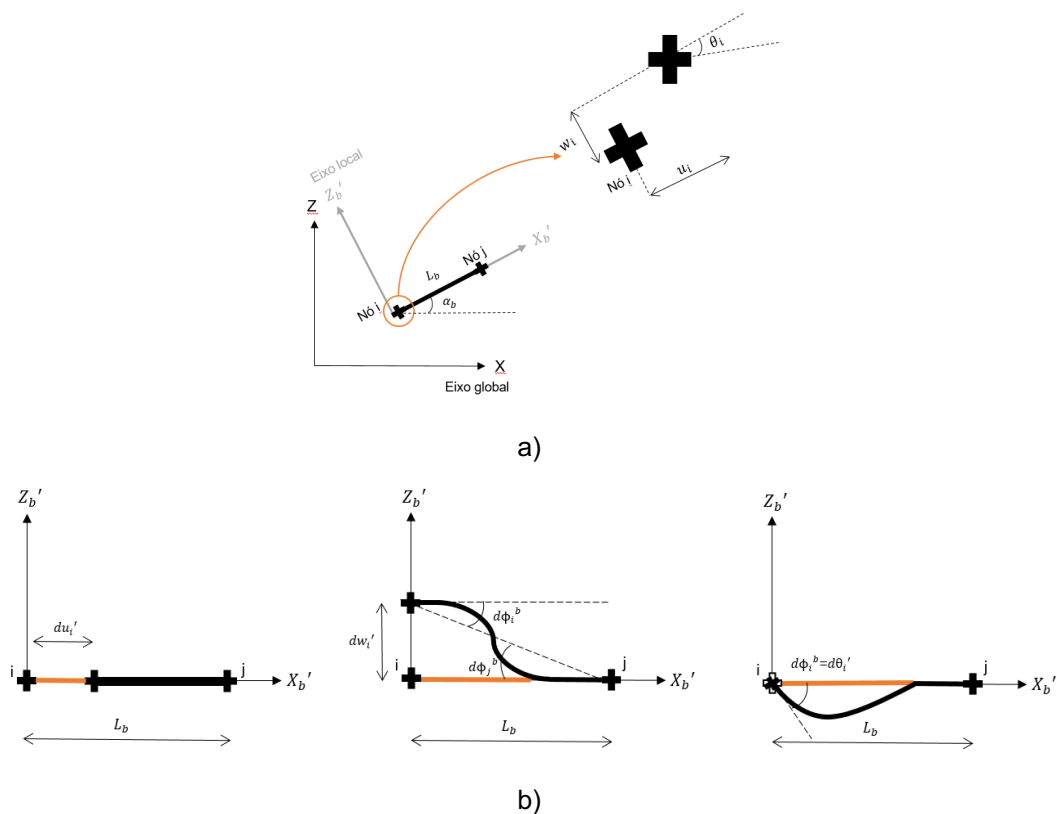


\* Lei de elasticidade, lei de plasticidade, lei de pré-dano e lei de dano

Fonte: Adaptado Flórez-López, Marante e Picón (2015).

É possível definir um vínculo entre os deslocamentos globais e locais por meio de uma relação geométrica simples (Figura 4a, onde  $\alpha_b$  corresponde ao ângulo entre o eixo axial do elemento  $b$  e o sistema de referência e  $L_b$  é o comprimento do elemento  $b$ ), e, por esse vínculo, ao considerar um deslocamento infinitesimal aplicado no nó em análise no seu eixo local, associa-se os deslocamentos às deformações (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015), conforme ilustra a Figura 4b para o nó  $i$  de um elemento  $b$  de pórtico. Assim, ressalta-se que a demonstração é análoga para o nó  $j$ .

**Figura 4** – a) Relação entre deslocamentos nos eixos globais e locais; b) Incremento das deformações devido a aplicação de deslocamento infinitesimal.



Fonte: Adaptado Flórez-López, Marante e Picón (2015).

Assim, a equação cinemática pode ser definida para cada elemento  $b$  de pórtico, sendo expressa pela Equação 1, onde  $[B]_b$  é a matriz de transformação cinemática (Matriz 1).

$$\{\Phi\}_b = [B]_b \{U\} \tag{1}$$

$$[B]_b = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & \dots & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \frac{\sin \alpha_b}{L_b} & -\frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 0 & \dots & -\frac{\sin \alpha_b}{L_b} & \frac{\cos \alpha_b}{L_b} & 1 & \dots \\ 0 & \dots & -\cos \alpha_b & -\sin \alpha_b & 0 & \dots & \cos \alpha_b & \sin \alpha_b & 0 & \dots \end{bmatrix} \tag{Matriz 1}$$

Por meio do princípio do trabalho virtual, Flórez-López, Marante e Picón (2015) determinam que a equação de equilíbrio da estrutura é expressa pela Equação 2, onde caso as forças de inércia sejam desconsideradas, tem-se a Equação 3 (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

$$\sum [B]_b^T \{M\} + [Mass] \{\ddot{U}\} = \{F\} \quad (2)$$

$$\sum [B]_b^T \{M\} = \{F\} \quad (3)$$

### 3.2 TEORIA DO DANO CONCENTRADO (TDC)

A teoria do dano concentrado se baseia em conceitos da mecânica da fratura e do dano clássico e permite descrever o que pode ser observado na realidade física por meio da quantificação do dano estrutural, representando o comportamento mecânico com a consideração da variável interna do dano  $(D)_b = (d_i, d_j)$  acoplada nas rótulas plásticas, as quais se tornam, então, rótulas inelásticas, e possibilitam avaliar o aparecimento e propagação da fissuração nas estruturas (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

**PARTE I – MODELO GERAL DE FADIGA PARA PÓRTICOS DE AÇO**

## 4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DA PARTE I

### 4.1 FADIGA DE ULTRA-BAIXO E BAIXO CICLO EM VIGAS DE AÇO

Na ocorrência de eventos com grandes amplitudes variáveis e com demandas multidirecionais, como, por exemplo, em terremotos, ventos de furacões e maremotos, as estruturas de aço estão normalmente sujeitas a cargas de fadiga ultra-baixo ciclo ou baixo ciclo (ULCF e LCF, respectivamente, sendo essas abreviações do inglês *Ultra-low Cycle Fatigue* e *Low Cycle Fatigue*). Tais tipos de fadiga são caracterizados por um número de reversões de carga muito pequenos, o que acaba causando grandes deformações plásticas localizadas e que levam ao início da fratura dúctil (KIRAN e KHANDELWAL, 2015; SOUSA e NUSSBAUMER, 2019). Com a finalidade de prever a falha por esse tipo específico de mecanismo, a conhecida Lei de Coffin-Manson, a qual relaciona a amplitude plástica e o número de ciclos, foi amplamente empregada para prever a iniciação de fissuras nesse processo, como nos trabalhos de Krawinkler e Zhorei (1983), McCabe e Hall (1989), Erberik e Sucuoglu (2004) e em Bai, Kurata e Flórez-López (2016), por exemplo.

#### 4.1.1 Fadiga Estacionária

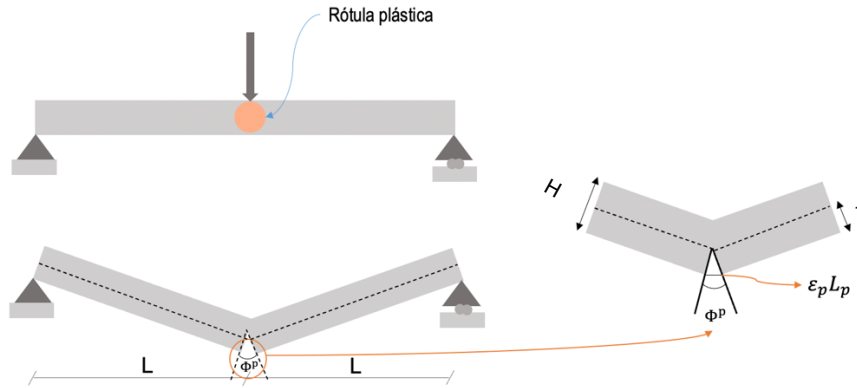
Pela Lei clássica de Coffin-Manson, para fadiga de ultra-baixo ciclo em um teste uniaxial com amplitude de deformação plástica constante  $\Delta\varepsilon_p$ , o número de ciclos para iniciar a fissura pode ser expresso pela Equação 4, onde  $\beta$  e  $\varepsilon_f$  são parâmetros do material (BAI, KURATA e FLÓREZ-LÓPEZ, 2016).

$$N_{cr} = \left( \frac{\Delta\varepsilon_p}{\varepsilon_f} \right)^\beta \quad (4)$$

De maneira geral,  $\varepsilon_f$  e  $\beta$  são considerados por meio de análise de um corpo de prova e devido a busca de se propor um modelo que seja capaz de fornecer resultados de forma eficiente para estruturas mais complexas, Bai, Kurata e Flórez-López (2016) afirmam que é possível passar a levar em conta a definição dos parâmetros por meio do ponto de vista segundo a resistência dos materiais e da teoria das estruturas.

Na Figura 5 tem-se a representação de uma viga de aço com rótula plástica, sujeita a carregamentos cíclicos, onde, ainda segundo os mesmos autores, o valor de  $L_p$  é o comprimento da rótula plástica.

**Figura 5** – Rótula plástica em uma viga de aço.



Fonte: Adaptado Bai, Kurata e Flórez-López (2016).

A amplitude de deformação plástica constante  $\Delta\varepsilon_p$  de uma fibra a uma distância  $z$  do eixo neutro, conforme mostra a figura acima, pode assumir o valor aproximado fornecido pela Equação 5 (BAI, KURATA e FLÓREZ-LÓPEZ, 2016), onde, uma vez que se trata do caso estacionário, a amplitude de deformação plástica  $\Delta\Phi^p$  é constante.

$$\Delta\varepsilon_p(z) \cong z \left( \frac{\Delta\Phi^p}{L_p} \right) \quad (5)$$

Substituindo essa relação na Equação 4, tem-se que o número de ciclos para iniciação da fissura passa a ser expresso de acordo com:

$$N_{cr} \cong \left( \frac{H\Delta\Phi^p}{2L_p\varepsilon_f} \right)^\beta \cong \left( \frac{\Delta\Phi^p}{\Phi_{cr}^p} \right)^\beta ; \Phi_{cr}^p = \frac{2L_p\varepsilon_f}{H} \quad (6)$$

Assim,  $\Phi_{cr}^p$  refere-se ao valor de rotação plástica crítica necessária para iniciar a fissura na região de uma rótula plástica em uma seção transversal de altura  $H$  (BAI, KURATA e FLÓREZ-LÓPEZ, 2016). Assim, relacionando com a lei de Coffin-Manson, tem-se que o número de ciclos necessário para quebrar uma fibra numa distância  $z$  do eixo neutro é:

$$N_{cr} \cong \left( \frac{z\Delta\Phi^p}{L_p\varepsilon_f} \right)^\beta \quad (7)$$

Entretanto, após o início de propagação de fissura, a rótula não pode ser considerada apenas plástica. Estende-se, portanto, tal lei por intermédio da TDC, onde  $z$  é dado pela Equação 8 (BAI, KURATA e FLÓREZ-LÓPEZ, 2016), onde  $d_i$  é a variável de dano e  $\alpha$  é um parâmetro do modelo.

$$z = \frac{H}{2}(1 - d_i)^\alpha \quad (8)$$

Assim, para  $N > N_{cr}$ , ou seja, o número de ciclos superior ao número de ciclos crítico que inicia a fissura, os mesmos autores reescrevem o valor do número de ciclos agora relacionando com a variável de dano para fadiga de ultra baixo e baixo ciclo  $d(N)_L$ :

$$N = \left[ \frac{(1 - d(N)_L)^\alpha \Delta\phi^p}{\Phi_{cr}^p} \right]^\beta \quad (9)$$

#### 4.1.2 Fadiga Não Estacionária

Uma vez que as amplitudes de deformações plásticas deixam de ser constantes no caso da fadiga não estacionária, para se obter um formalismo que permita quantificar a rotação plástica acumulada  $\dot{p}$  em um caso onde a iniciação da fissura comece logo nos primeiros ciclos, Bai, Kurata e Flórez-López (2016) propõem a expressão dada pela Equação 10, onde assumem que a rotação plástica em uma rótula cresce por um fator  $2\Delta\phi^p$ , como mostra a Equação 11.

$$\dot{p} = \frac{dp}{dN} = |\dot{\phi}^p| \quad (10) \quad p = 2\Delta\phi^p N \quad (11)$$

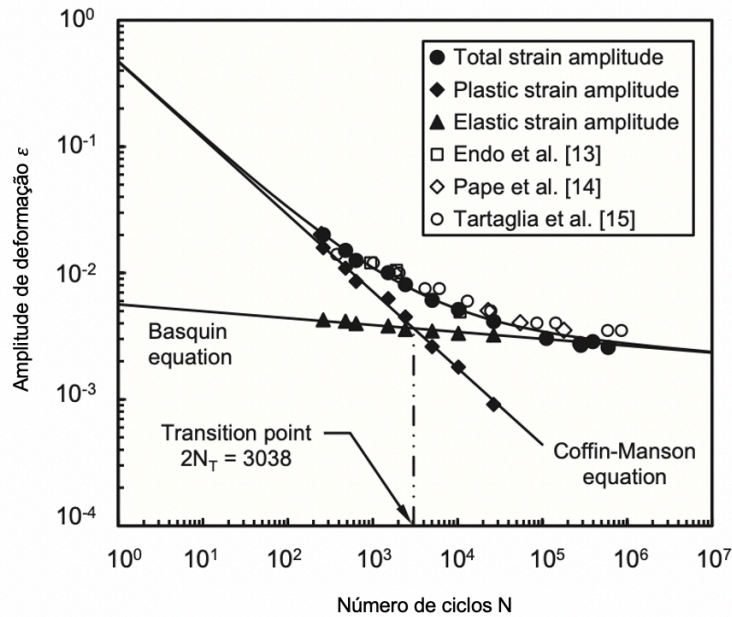
#### 4.2 FADIGA DE ALTO CICLO EM VIGAS DE AÇO

Os efeitos da fadiga de alto ciclo (HCF, do inglês *High Cycle Fatigue*) vem sendo estudados desde o século XIX em aplicações da engenharia mecânica, enquanto que, os engenheiros civis começaram a se envolver com tal problema a partir de 1930, quando a primeira conexão soldada apareceu como uma técnica promissora para o futuro (BALLIO e CASTIGLIONI, 1995).

Conforme demonstram Branco, Costa e Antunes (2012) pela Figura 6, é possível notar que a fadiga de alto ciclo, ao contrário da fadiga de baixo ciclo, caracteriza-se por baixos valores de amplitude de deformação, onde apenas valores de deformações elásticas são alcançadas, e, portanto, as deformações permanentes não estão envolvidas. Agregado a isso, observa-se que o número de ciclos para fratura é elevado, com a faixa de tensão nominal  $\Delta\sigma$  permanecendo no já mencionado intervalo elástico (BALLIO e CASTIGLIONI, 1995).

Pela conhecida Lei de Basquin, tem-se que o número de ciclos  $N_{cr}$  que inicia a fissura numa amostra de material dentro da faixa elástica é dado pela Equação 12, onde  $\Delta\sigma$  é a amplitude de tensões e  $\gamma$  e  $\sigma_f$  são parâmetros do material.

**Figura 6** - Relação entre amplitude de deformações e número de ciclos.



Fonte: Adaptado Branco, Costa e Antunes (2012).

$$N_{cr} = \left( \frac{\Delta\sigma}{\sigma_f} \right)^y \quad (12)$$

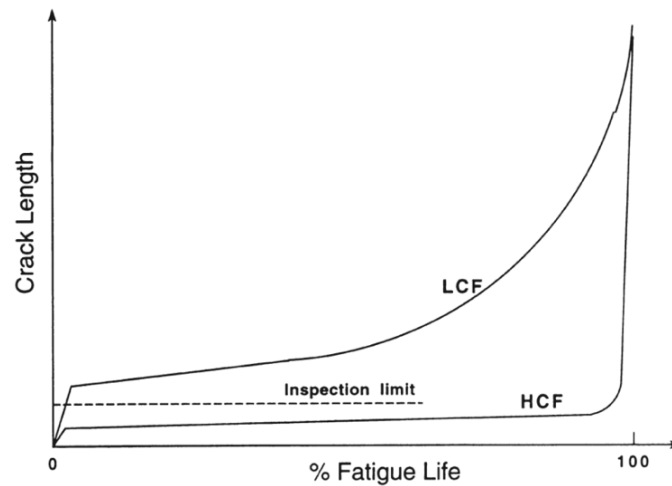
De acordo com Nicholas (1999), uma implementação que permite uma aproximação dos danos sofridos para a fadiga relaciona a vida restante do elemento estrutural com base nas previsões da taxa de propagação de trincas com um tamanho de falha que pode ser inspecionado.

Segundo o mesmo autor, para o caso LCF essa aproximação funciona bem, todavia, a aplicação direta dessa ideia acaba não funcionando para os casos de HCF, uma vez que, além do fato de que o número de ciclos nesse tipo de fadiga é extremamente elevado devido as altas frequências envolvidas, tem-se também que a HCF requer uma fração de vida de fadiga relativamente alta para a iniciação de um tamanho de falha que pode ser observado. Isso resulta em uma parcela de vida restante para propagação da fissura muito pequena, conforme pode ser observado na Figura 7 e contrastado com o caso de LCF.

Dessa maneira, uma vez que se busca traduzir matematicamente os efeitos da HCF, e uma vez que almeja-se relacionar a evolução do dano com os efeitos oriundos da fadiga de alto ciclo elementos de aço, torna-se possível associar a taxa de liberação de energia com o crescimento do dano. Tal evolução pode ser descrita, por exemplo, em termos dos valores de tensões generalizadas (BAZÁN, BECK e FLÓREZ-LÓPEZ, 2019).

A taxa de crescimento da fissura é relacionada com o número de ciclos ( $da/dN$ ) em função da variação do fator de intensidade de tensões  $\Delta K$  por intermédio da Lei de Paris (PARIS e ERDO-

**Figura 7**– Esquema representativo do tamanho da fissura relacionado com a vida de fadiga para baixo e alto ciclo.



Fonte: Nicholas (1999).

GAN, 1963), conforme mostra a Equação 13, sendo  $a$  o tamanho da fissura,  $N$  o número de ciclos e  $c$  e  $m$  constantes do material.

$$\frac{da}{dN} = c(\Delta K)^m \quad (13)$$

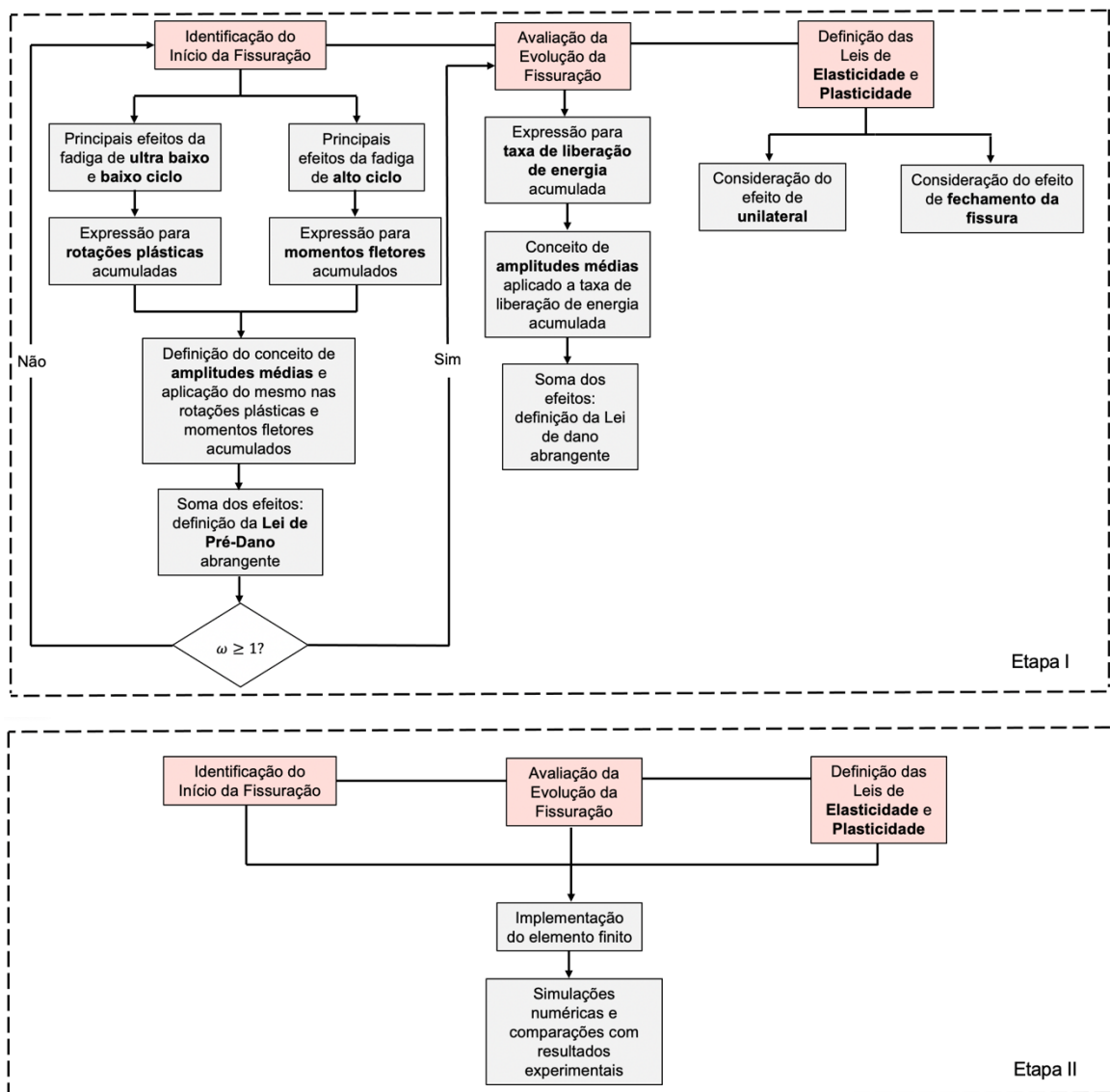
Bazán, Beck e Flórez-López (2019) estabelecem uma ideia análoga a Lei de Paris relacionando a taxa de crescimento do dano com o número de ciclos por intermédio da variação de liberação de energia  $\Delta G$ , conforme mostra-se abaixo, sendo que  $\bar{c}$  e  $M$  são constantes do modelo.

$$\frac{dd}{dN} = \bar{c}(\Delta G)^M \quad (14)$$

## 5 METODOLOGIA DA PARTE I

A metodologia do Modelo Geral de Fadiga para Vigas de Aço é esquematizada na Figura 8, onde a primeira parte é referente aos critérios desenvolvidos para introdução das leis constitutivas (lei de pré-dano, dano, elasticidade e plasticidade) e, uma vez que essas estão definidas, as simulações numéricas podem ser realizadas para posteriormente contrastar os resultados com os ensaios experimentais presentes na literatura.

Figura 8 – Processo metodológico adotado para a Parte I.



## 5.1 IDENTIFICAÇÃO DO INÍCIO DA FISSURAÇÃO – FASE DE PRÉ-DANO

### 5.1.1 Fadiga de Ultra-Baixo (ULCF) e Baixo ciclo (LCF)

O valor de amplitude plástica crítica que representa o início da fissuração pode ser escrita por intermédio de uma combinação das Equações 11 e 6, conforme mostra a Equação 15.

$$p_{cr} = 2\Delta\Phi^p N_{cr} = 2\Delta\Phi^p \left( \frac{\Delta\Phi^p}{\Phi_{cr}^p} \right)^\beta \quad (15)$$

Para os casos ULCF e LCF, introduz-se a variável de pré-dano  $\omega_L$ , a qual permite identificar o início da fissuração quando essa assume o valor de 1 (um), sendo dada, então, pela razão entre o valor de amplitude plástica pela amplitude plástica crítica, como segue:

$$\omega_L = \frac{p}{p_{cr}} = \frac{p}{2\Delta\Phi^p} \left( \frac{\Delta\Phi^p}{\Phi_{cr}^p} \right)^{-\beta} ; \omega_L(N_{cr}) = 1 \quad (16)$$

### 5.1.2 Fadiga de Alto Ciclo (HCF)

Seguindo os conceitos convencionais da resistência dos materiais, a amplitude de tensões em qualquer fibra da seção transversal pode ser expressa pela Equação 17, sendo que  $\Delta m$  é a amplitude de momento fletor,  $I$  é a inércia e  $z$  a distância da fibra até o eixo neutro.

$$\Delta\sigma(z) = \frac{\Delta m * z}{I} \quad (17)$$

Combinando as Equações 12 e 17, tem-se que o número de ciclos que inicia a fissura é dado pela Equação 18, onde  $M_{cr}$  é o valor do momento crítico que inicia a fissura.

$$N_{cr} = \left( \frac{h\Delta m}{2I\sigma_f} \right)^\gamma = \left( \frac{\Delta m}{M_{cr}} \right)^\gamma ; M_{cr} = \frac{2I\sigma_f}{h} \quad (18)$$

Analogamente ao que foi apresentado no item 4.1.2 da revisão bibliográfica, com a finalidade de se obter uma relação que permita expressar os valores de momentos fletores acumulados, propõe-se que  $b$  reflita esse valor em uma rótula (Equação 19), cujo crescimento é dado por um fator de  $2\Delta m$  (Equação 20). Essa relação é, portanto, útil para análises não estacionárias.

$$\dot{b} = \frac{dm}{dN} = |\dot{m}| \quad (19) \quad b = 2\Delta m N \quad (20)$$

Assim, o valor crítico acumulado de momento fletor  $b_{cr}$  que inicia a fissura pode ser escrito como:

$$b_{cr} = 2\Delta m N_{cr} = 2\Delta m \left( \frac{\Delta m}{M_{cr}} \right)^{\gamma} \quad (21)$$

Bem como utilizado na fadiga de ultra-baixo e baixo ciclo, define-se a variável de pré-dano para alto ciclo  $\omega_h$ , que permite avaliar o início da fissuração quando essa assume o valor de 1 (um) em casos de fadiga de alto ciclo:

$$\omega_h = \frac{b}{b_{cr}} = \frac{b}{2\Delta m} \left( \frac{\Delta m}{M_{cr}} \right)^{-\gamma} ; \omega_h(N_{cr}) = 1 \quad (22)$$

### 5.1.3 Conceito de Amplitudes Médias: Fadiga não Estacionária em Rótulas Inelásticas - Implementação Numérica

Quando tem-se forças ou deslocamentos não estacionários, os limites de carga mudam de um ciclo para o próximo. Assim, as leis de fadiga podem ser generalizadas usando um novo conceito a ser introduzido, o qual se chama “conceito de amplitudes médias”, conforme mostra-se nas Equações 23 e 24, onde  $\Delta\Phi^p_{ave}$  é a amplitude média de rotações plásticas e  $\Delta m_{ave}$  é a amplitude média de momentos fletores.

$$\Delta\Phi^p_{ave}(N) = \frac{\dot{p}}{2} \quad (23) \quad \Delta m_{ave}(N) = \frac{\dot{b}}{2} \quad (24)$$

Nos casos não estacionários, descrever exatamente os valores de amplitudes não é tão intuitivo como nos estacionários. Assim, com esse conceito, as leis que descrevem o fenômeno da fadiga podem ser generalizadas para tais casos não estacionários, por intermédio da substituição das amplitudes estacionárias por suas respectivas amplitudes médias.

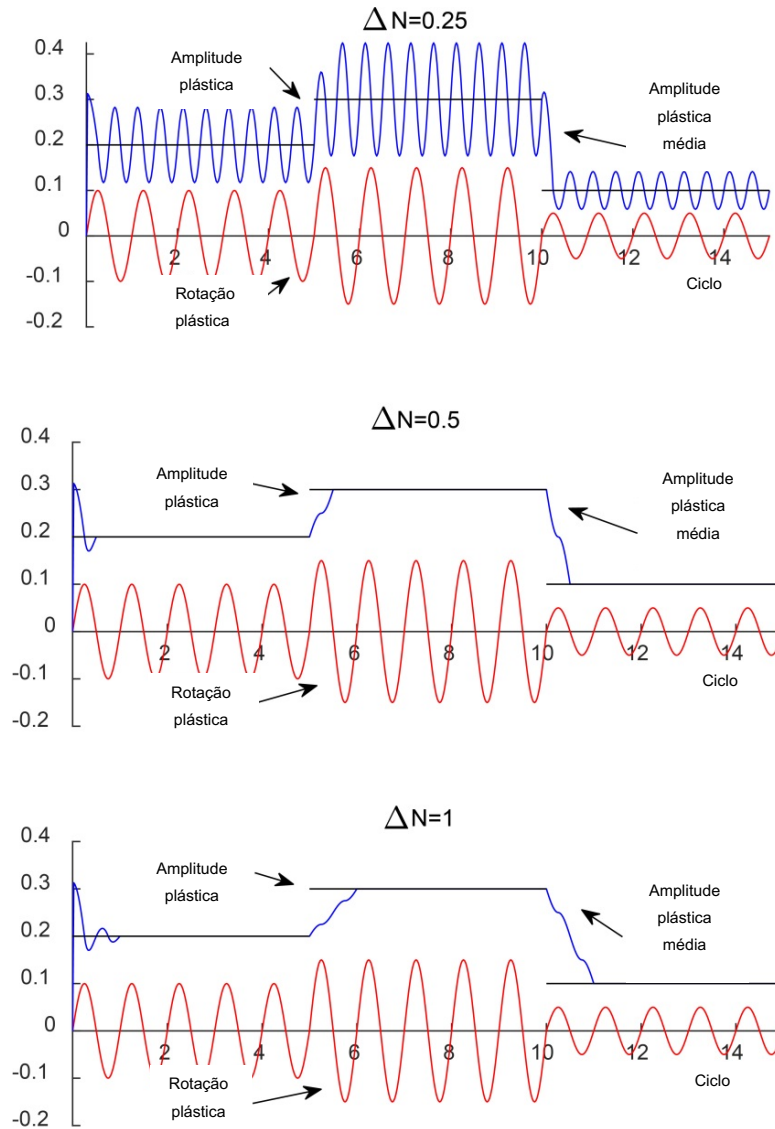
Numericamente, essas derivadas podem ser aproximadas por diferenças finitas:

$$\Delta\Phi^p_{ave} = \frac{p(N) - p(N - \Delta N)}{2\Delta N} \quad (25)$$

$$\Delta m_{ave} = \frac{b(N) - b(N - \Delta N)}{2\Delta N} \quad (26)$$

O valor de  $\Delta N$  deve ser o menor valor que leva da melhor forma possível à aproximações estáveis de amplitudes. Para se determinar tal valor, assume-se uma história de rotações plásticas de comportamento senoidal, conforme mostra-se na Figura 9. Tais rotações implicam em amplitudes que variam entre 0.2, 0.3 e 0.1, nos intervalos  $0 \leq N \leq 5$ ,  $0 < N \leq 10$  e  $10 < N \leq 15$ , respectivamente. Essas amplitudes totais são representadas pelas linhas constantes em cor preta na Figura 9. Na mesma imagem compara-se, portanto, as amplitudes médias obtidas para  $\Delta N$  iguais a 0.25, 0.5 e 1.

**Figura 9**– Amplitude média do histórico de tempo com diferentes valores de  $\Delta N$ .



Observa-se que o valor de  $\Delta N = 0.25$  pode ser descartado uma vez que esse valor leva a aproximações não estáveis de amplitudes plásticas. Já para  $\Delta N = 0.5$  e  $\Delta N = 1$ , a função  $\Delta\phi^p_{ave}$  tende para o valor exato de amplitudes da função senoidal de forma estável. A aproximação mais rápida é obtida com  $\Delta N = 0.5$ .

Dessa forma, a melhor aproximação dos valores de amplitude ocorre quando os valores acumulados, seja de rotações plásticas ou de momentos fletores, estão defasados a cada metade de ciclo ( $\Delta N = 0.5$ ). As equações 27 e 28 demonstram, então, os valores de amplitudes médias a serem utilizadas para a tradução dos efeitos não estacionários.

$$\Delta\phi^p_{ave} = \frac{p(N) - p(N/2)}{2(N - N/2)} = p(N) - p(N/2) \quad (27)$$

$$\Delta m_{ave} = \frac{b(N) - b(N/2)}{2(N - N/2)} = b(N) - b(N/2) \quad (28)$$

#### 5.1.4 Modelo Geral para Identificação do Início da Fissuração

Ao passo que se é proposto um modelo que contempla de forma conjunta ambos possíveis tipos de fadigas em vigas de aço, combina-se as relações expostas de pré dano para ultra-baixo e baixo ciclo juntamente com alto ciclo, por intermédio da consideração da acumulação de dano fornecida por Lemaitre e Chaboche (1990), conforme o seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{\partial \omega}{\partial N} = \dot{\omega}_L + \dot{\omega}_h; \Rightarrow \\ \omega &= \frac{p(N)}{2\Delta\Phi^p} \left( \frac{\Delta\Phi^p}{\Phi_{cr}^p} \right)^{-\beta} + \frac{b(N)}{2\Delta m} \left( \frac{\Delta m}{M_{cr}} \right)^{-\gamma}; \\ \omega(N_{cr}) &= 1 \end{aligned} \quad (29)$$

A Equação 23 é válida apenas em casos de fadiga estacionária, uma vez que considera amplitudes constantes tanto de rotações plásticas quanto de momentos fletores. Aplicando o que foi demonstrado no item anterior do presente trabalho (5.1.3), a fim de se abranger também os efeitos de possíveis casos não estacionários, substitui-se na Equação 29 as amplitudes médias (Equações 27 e 29), obtendo-se então, uma relação geral para o início da fissuração:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{\partial \omega}{\partial N} = \dot{\omega}_L + \dot{\omega}_h; \Rightarrow \\ \omega &= N \left( \frac{p(N) - p(N/2)}{\Phi_{cr}^p} \right)^{-\beta} + N \left( \frac{b(N) - b(N/2)}{M_{cr}} \right)^{-\gamma}; \\ \omega(N_{cr}) &= 1 \end{aligned} \quad (30)$$

#### 5.1.5 Determinação dos Parâmetros na Fase de Pré-Dano

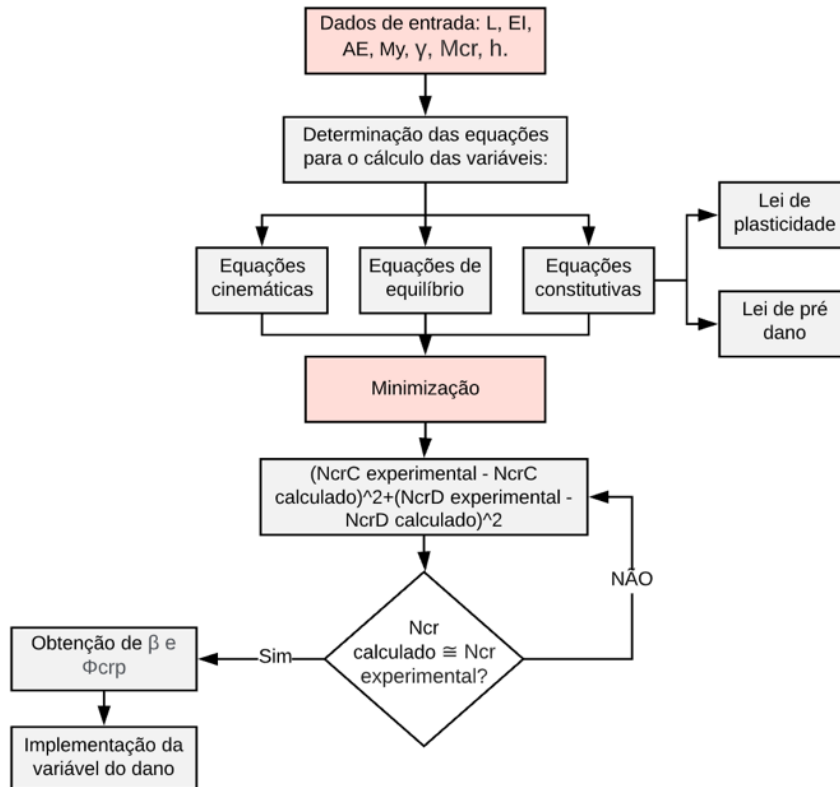
Propõe-se uma forma de obtenção dos valores de  $\Phi_{cr}^p$ ,  $\beta$ ,  $M_{cr}$  e  $\gamma$ : considera-se, primeiramente, dois testes de fadiga de alto ciclo ( $p = 0$ ) em uma viga de aço, com amplitudes constantes de momentos de  $\Delta mA$  e  $\Delta mB$ , sendo que seus respectivos números de ciclos para iniciação da fissura são  $NA$  e  $NB$ . Dessa forma, resolvendo um sistema de equações utilizando a relação de pré dano combinada anteriormente (Equação 29) para ambos os testes obtém-se que:

$$M_{cr} = \Delta mA \left( \frac{\Delta mA}{\Delta mB} \right)^{\left( \frac{\ln(NA)}{\ln\left(\frac{1}{NB}\right) + \ln(NA)} \right)} \quad (31)$$

$$\gamma = \frac{\ln\left(\frac{1}{NB}\right) + \ln(NA)}{\ln\left(\frac{\Delta mA}{\Delta mB}\right)} \quad (32)$$

Considerando agora dois testes de fadiga de ultra-baixo e/ou baixo ciclo, identifica-se, também por meio dos valores experimentais, o número  $NC$  e  $ND$  que geram a iniciação da fissura nesses casos. Com tais valores, faz-se uma otimização para a obtenção de  $\beta$  e  $\Phi_{cr}^p$ , almejando minimizar o erro do cômputo desses, de forma que o quadrado da diferença entre o valor calculado e valor experimental seja o menor possível. A Figura 10 exemplifica tal procedimento.

**Figura 10** – Procedimento para determinação dos valores de  $\beta$  e  $\Phi_{cr}^p$ .



## 5.2 AVALIAÇÃO DA EVOLUÇÃO DA FISSURA – FASE DE DANO

### 5.2.1 Modelo de Dano para ULCF e LCF

O processo de fadiga pode ser descrito como um fenômeno de duas fases: uma relativa a um período de incubação, a qual ocorre no intervalo de  $0 \leq N \leq N_{cr}$ , e outra que diz respeito a fase de propagação de fissura  $N_{cr} < N \leq N_f$ . A primeira etapa é caracterizada pela fase de pré-dano, enquanto a segunda pela fase de dano.

Assim, escreve-se, primeiramente, a taxa de evolução do dano para fadiga de ultra-baixo e baixo ciclo  $\dot{d}_L$  (Equação 33), derivando essa relação a partir da Equação 9, apresentada no item 4.1.1 do presente trabalho.

$$\dot{d}_L = -\frac{(1 - d_L(N))}{\beta\alpha} \left( \frac{(1 - d_L(N))^\alpha \Delta\Phi^p}{\Phi_{cr}^p} \right)^{-\beta} \quad (33)$$

### 5.2.2 Modelo de Dano para HCF

A relação exposta pela Equação 14 (item 4.2) se apresenta como uma alternativa coerente e eficaz para a análise da taxa de evolução do dano de alto ciclo, uma vez que essa não é dependente dos valores de deformações plásticas, os quais apenas são significativos para ULCF e LCF, conforme explicado na revisão bibliográfica. Assim sendo, reescreve-se tal relação de acordo com:

$$\dot{d}_H = Q(\Delta G(d_H))^r \quad (34)$$

As constantes  $Q$  e  $r$  são constantes do modelo;  $\dot{d}_H$  refere-se a taxa de evolução do dano para fadiga de alto ciclo. Assim, em uma rótula, a taxa de liberação de energia pode ser obtida por intermédio da relação dada pela Equação 35, enquanto que, o valor da amplitude  $\Delta G$  é computado de acordo com a Equação 36, onde  $EI$  é a rigidez de flexão do elemento;  $m_{max}$  é o valor máximo momento fletor no ciclo.

$$G = \frac{L\langle m \rangle_+^2}{2EI(1 - d_h)^2}; \langle m \rangle_+ = \begin{cases} 0 & \text{se } m < 0 \\ m & \text{se } m \geq 0 \end{cases} \quad (35) \quad \Delta G = \frac{Lm_{max}^2}{2EI(1 - d_h)^2} \quad (36)$$

Similar ao que se desenvolveu no tópico de Amplitudes Médias (item 5.3.1), define-se a amplitude média da taxa de liberação de energia de acordo com:

$$\Delta G_{ave}(N) = \frac{\dot{g}}{2}; \text{ onde } \dot{g} = |\dot{G}| \quad (37)$$

Novamente, numericamente aproximando por diferenças finitas tem-se:

$$\Delta G_{ave} = \frac{g(N) - g(N - \Delta N)}{2\Delta N} \quad (38)$$

Um estudo similar ao do item 5.3.1 foi realizado e conclui-se que o melhor valor de  $\Delta N$  para aproximação das amplitudes de taxa de liberação de energia é  $\Delta N = 1$ , ou seja, considera-se a variação entre ciclos. Assim, tem-se a seguinte relação final:

$$\Delta G_{ave_m} = \frac{g(N) - g(N - 1)}{2(N - (N - 1))} = \frac{g(N) - g(N - 1)}{2} \quad (39)$$

### 5.2.3 Modelo de Dano para Fadiga Geral

O modelo de dano geral que abrange os efeitos de fadiga de ultra baixo e baixo ciclo juntamente com alto ciclo, seja a fadiga estacionária ou não estacionária, é dado pela soma de  $\dot{d}_L$  e  $\dot{d}_H$ , soma essa feita de forma similar a fase de pré-dano, por intermédio da hipótese de acumulação de de Lemaitre e Chaboche (1990), conforme tem-se:

$$\dot{d} = \dot{d}_L + \dot{d}_H = -\frac{(1 - d_L(N))}{\beta\alpha} \left( \frac{(1 - d_L(N))^\alpha \Delta\Phi^p}{\Phi_{cr}^p} \right)^{-\beta} + Q(\Delta G)^r; \quad (40)$$

Reescrevendo a Equação 40 considerando o conceito de Amplitudes Médias, obtém-se:

$$\dot{d} = \dot{d}_L + \dot{d}_H = -\frac{(1 - d_L(N))}{\beta\alpha} \left( \frac{(1 - d_L(N))^\alpha p(N) - p(N/2)}{\Phi_{cr}^p} \right)^{-\beta} + Q \left( \frac{g(N) - g(N-1)}{2} \right)^r \quad (41)$$

### 5.2.4 Determinação dos Parâmetros da Fase de Dano

De acordo com Flórez-López, Marante e Picón (2015), a lei de evolução plástica para uma rótula inelástica que considera encruamento cinemático linear é dada pela Equação 42, onde  $h$  refere-se a constante de encruamento cinemático linear; e  $M_y$  é o momento de escoamento.

$$f = \left| \frac{m}{1-d} - h\Phi^p \right| - M_y; \quad \begin{cases} \dot{\Phi}^p = 0 \text{ se } f < 0 \\ f = 0 \text{ se } \dot{\Phi}^p \end{cases} \quad (42)$$

As constantes  $\alpha$ ,  $Q$  e  $r$  podem ser definidas através de testes de LCF. Primeiramente, assume-se que a variação de dano em cada ciclo pode ser negligenciada e que a amplitude de rotação plástica é constante, assim, tem-se que:

$$\frac{m_{max}(N)}{1-d(N)} - h\Phi_{max}^p - M_y = 0; \frac{-m_{min}(N)}{1-d(N)} + h\Phi_{max}^p - M_y = 0; \text{ portanto, } \frac{\Delta m(N)}{1-d(N)} - h\Delta\Phi^p - 2M_y = 0 \quad (43)$$

Integrando a Equação 41 e considerando a relação dada pela Equação 43, a Equação 44 é obtida:

$$d_h = \left( \frac{L(Q^2\Delta\Phi^{p^2} + 4CM_y\Delta\Phi^p + 4M_y^2)}{6EI} \right)^r Q(N - N_{cr}) \quad (44)$$

Todavia, não há uma solução analítica para  $d_L$ . Por outro lado, o problema é reduzido a uma única equação diferencial em  $d_L(N)$  com uma condição inicial de  $d_L(N_{cr}) = 0$ . Essa equação

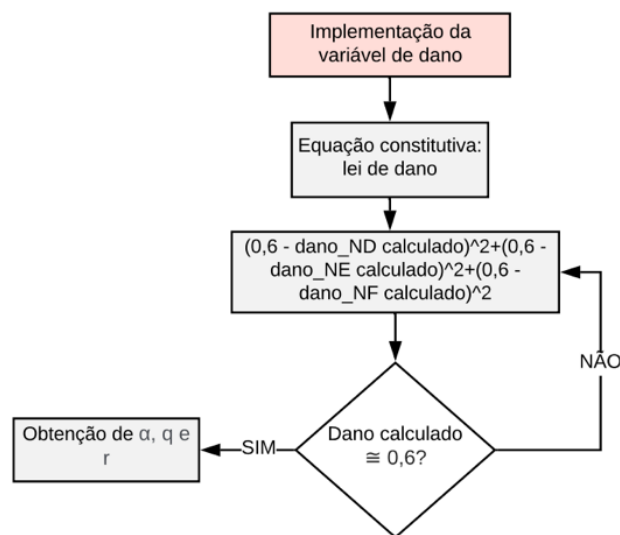
diferencial pode ser resolvida por diferentes métodos numéricos ou de aproximação. Assim, de acordo com a TDC, tem-se que o valor crítico de dano que corresponde ao colapso repentino da rótula é um valor de aproximadamente  $d_c \cong 0.6$ .

Considera-se então testes diferentes sob diferentes amplitudes plásticas,  $\Delta\phi_D^p$ ,  $\Delta\phi_E^p$ ,  $\Delta\phi_F^p$ , ..., onde  $ND$ ,  $NE$ ,  $NF$ , ..., são o número de ciclos para o total colapso dos testes. Faz-se uma otimização dos valores de  $Q$ ,  $r$  e  $\alpha$ :

$$d(\Delta\phi_D^p, ND; Q, r, \alpha) = 0.6; d(\Delta\phi_E^p, NE; Q, r, \alpha) = 0.6; d(\Delta\phi_F^p, NF; Q, r, \alpha) = 0.6; \quad (45)$$

Dessa forma, o quadrado da diferença entre o valor de dano último experimental e o assumido (de 0,6) deve ser o menor possível. A Figura 11 resume esse procedimento.

**Figura 11**– Procedimento para determinação dos valores de  $\alpha$ ,  $Q$  e  $r$ .



### 5.3 LEIS DE ELASTICIDADE E DE PLASTICIDADE

Para completar o modelo geral de fadiga, as leis de elasticidade e plasticidade devem passar a incluir o efeito unilateral que pode ser observado experimentalmente, como, por exemplo, em Zhou et. al (2012). Assim, Bai, Kurata e Flórez-López (2016) concluem que o comportamento dos testes é não simétrico na etapa de propagação de fissura, a diferença da resposta quando comparado se o teste está sob forças positivas ou negativas é significativamente diferente. Os mesmos autores afirmam que tal diferença ocorre por causa do efeito de fechamento da fissura com a reversão do momento na rótula, trazendo assim, como consequência, uma recuperação parcial da resistência e rigidez do elemento.

A lei de elasticidade e a de plasticidade são escritas como mostram as Equações 46 e 47,

respectivamente, sendo que  $c$  é o parâmetro que traduz o efeito de fechamento de fissura, podendo variar entre 0,2 e 0,3, de acordo com o que concluíram Bai et. al (2016).

$$\{\Phi\} - \{\Phi^P\} = [F(D)]\langle M \rangle^+ + [F(cD)]\langle M \rangle^- \quad (46)$$

$$f_i = \max\left(\frac{m_i}{1 - d_{H_i} - cd_{L_i}} - h\Phi_i^P, \frac{-m_i}{1 - d_{H_i} - cd_{L_i}} + h\Phi_i^P\right) - M_y \leq 0; \text{ onde} \quad (47)$$

$$\begin{cases} \dot{\Phi}^p = 0 \text{ se } f < 0 \\ f = 0 \text{ se } \dot{\Phi}^p \end{cases}$$

Assim,  $\langle M \rangle^+$  refere-se a parcela positiva do momento, enquanto  $\langle M \rangle^-$  a parcela negativa. O vetor  $\{\Phi^P\}$  refere-se as rotações plásticas, sendo  $\{\Phi^P\}^T = \{\Phi_i^P, \Phi_j^P, 0\}$ . A matriz  $[F(D)]$  é a matriz de flexibilidade (Matriz 2), enquanto que  $[F(cD)]$  é a matriz de flexibilidade que considera o efeito de fechamento de fissura (Matriz 3), sendo  $L$  o comprimento do elemento e  $AE$  a rigidez axial da seção em análise.

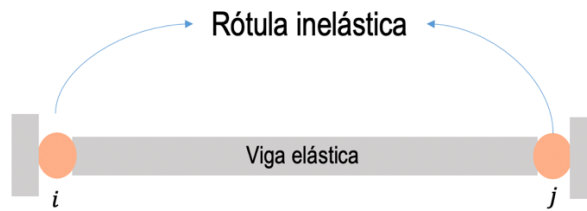
$$[F(D)] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI(1 - d_{H_i} - d_{L_i})} & \frac{-L}{6EI} & 0 \\ \frac{-L}{6EI} & \frac{L}{3EI(1 - d_{H_i} - d_{L_i})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{AE} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 2}$$

$$[F(cD)] = \begin{bmatrix} \frac{L}{3EI(1 - d_{H_i} - cd_{L_i})} & \frac{-L}{6EI} & 0 \\ \frac{-L}{6EI} & \frac{L}{3EI(1 - d_{H_i} - cd_{L_i})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{AE} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 3}$$

Percebe-se que o efeito unilateral é significativo e, conseqüentemente, apenas considerado para valores de dano de baixo e ultra-baixo ciclo. Tal determinação foi retirada da observação de testes experimentais de Zhou et. al (2012) e com base no modelo de ULCF de acordo com o modelo proposto por Bai et. al (2016).

Uma vez que se considera cada elemento de pórtico como combinação de uma viga elástica conectada por duas rótulas inelásticas (Figura 12), três conjuntos de variáveis internas em cada rótula são, portanto, consideradas: as deformações plásticas generalizadas  $\{\Phi^P\}$ , o conjunto de variáveis de dano  $\{D\}$ , e de pré-dano  $\{\Omega\}$ .

**Figura 12**– Elemento de pórtico como combinação de viga elástica e rótulas inelásticas.



Além disso, define-se os valores acumulados de rotações plásticas  $\mathbf{P}$ , de momentos fletores  $\mathbf{B}$  e de taxa de liberação de energia  $\mathbf{g}$ . A relação dada em (48) expressa os mencionados conjuntos.

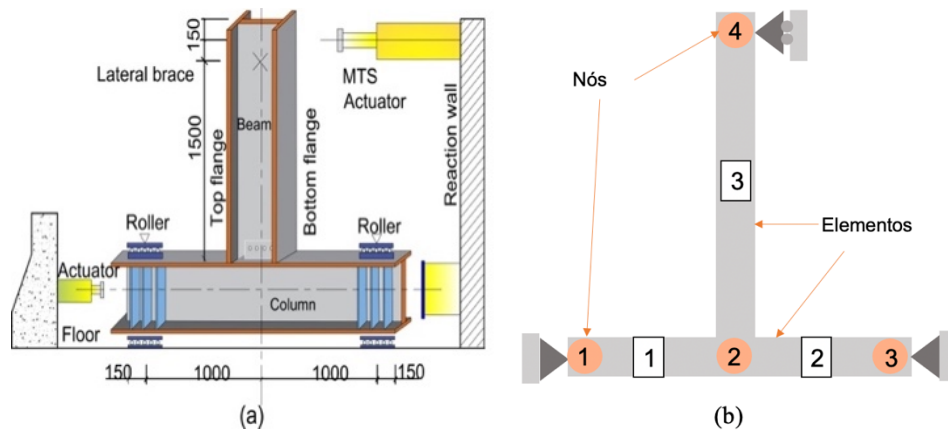
$$\{D\} = (d_i, d_j); \{\Omega\} = (\omega_i, \omega_j); \mathbf{P} = (p_i, p_j); \mathbf{B} = (b_i, b_j) \text{ e } \mathbf{g} = (g_i, g_j) \quad (48)$$

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÕES DA PARTE I

Considerando as leis constitutivas introduzidas, ou seja, a lei de pré-dano dada pela Equação 30 (item 5.1.4); a lei de dano apresentada pela Equação 41 (item 5.2.3); e as leis de elasticidade e plasticidade (Equações 46 e 47, respectivamente), bem como o conjunto dado em (48) e as equações de equilíbrio e cinemática (Equações 1 e 3, respectivamente, apresentadas no item geral 3.1), torna-se possível a definição de um elemento finito (EF) convencional que pode ser incluído na biblioteca de qualquer programa de análise estrutural não linear.

No presente trabalho, o software comercial ABAQUS® foi utilizado via a opção UEL (Manual de Usuário do ABAQUS, 2012). Esse elemento finito foi utilizado para simular os testes experimentais de Zhou, Wang et al. (2013). O conjunto experimental dos testes é apresentado na Figura 13a, enquanto que na Figura 13b mostra-se a malha de elementos finitos utilizadas para as simulações.

**Figura 13** - (a) Conjunto experimental dos testes de Zhou, Wang et al. e (b) Malha do EF.

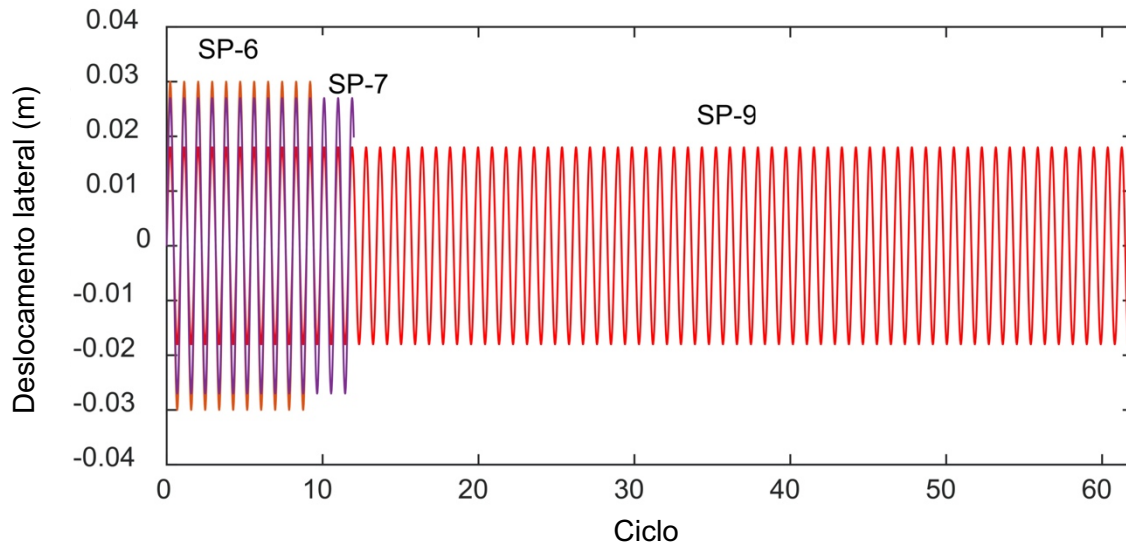


### 6.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS: TESTES DE FADIGA ESTACIONÁRIOS

A Figura 14 mostra o histórico de deslocamentos aplicados nos testes estacionários (amplitude de deslocamento constantes). Como pode ser observado na mesma imagem, dois desses testes (nomeados SP-6 e SP-7) são considerados como testes de ultra-baixo ciclo (ou seja, menos que 20 ciclos para fratura), enquanto que o outro teste restante (chamado de SP-9) se classifica como baixo ciclo (aproximadamente 62 ciclos para fratura).

É importante destacar que de acordo com os testes experimentais, assumiu-se para as simulações que nos elementos de coluna (elementos 1 e 2) não ocorria escoamento. Devido a essa suposição de condições de contorno, tanto as rotações plásticas quanto o aparecimento e a evolução do dano só ocorriam no nó 2 do elemento de viga.

**Figura 14** – Histórico de deslocamentos dos testes estacionários SP-6, SP-7 e SP-9.



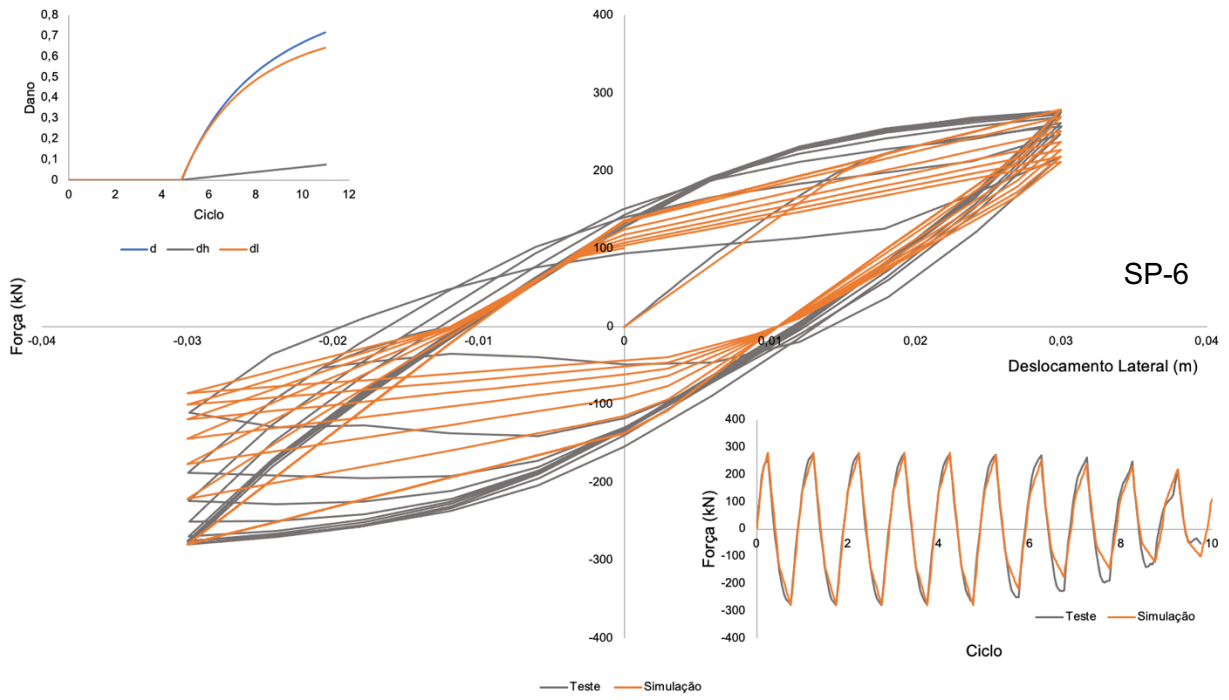
Os parâmetros  $M_{cr}$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $\Phi_{cr}^p$ , da fase de pré-dano foram calculados de acordo com a metodologia apresentada no item 5.1.5, e os parâmetros  $\alpha$ ,  $Q$  e  $r$  da fase de dano também foram obtidos por intermédio da metodologia apresentada no item 5.2.4 do presente trabalho. A Tabela 1 resume os valores encontrados. Os valores de  $M_y$  e  $C$  foram retirados do trabalho de Bai et al. (2016), onde  $M_y = 307kN.m$  e  $C = 16000kN$ .

**Tabela 1** - Parâmetros das fases de pré-dano e dano obtidos.

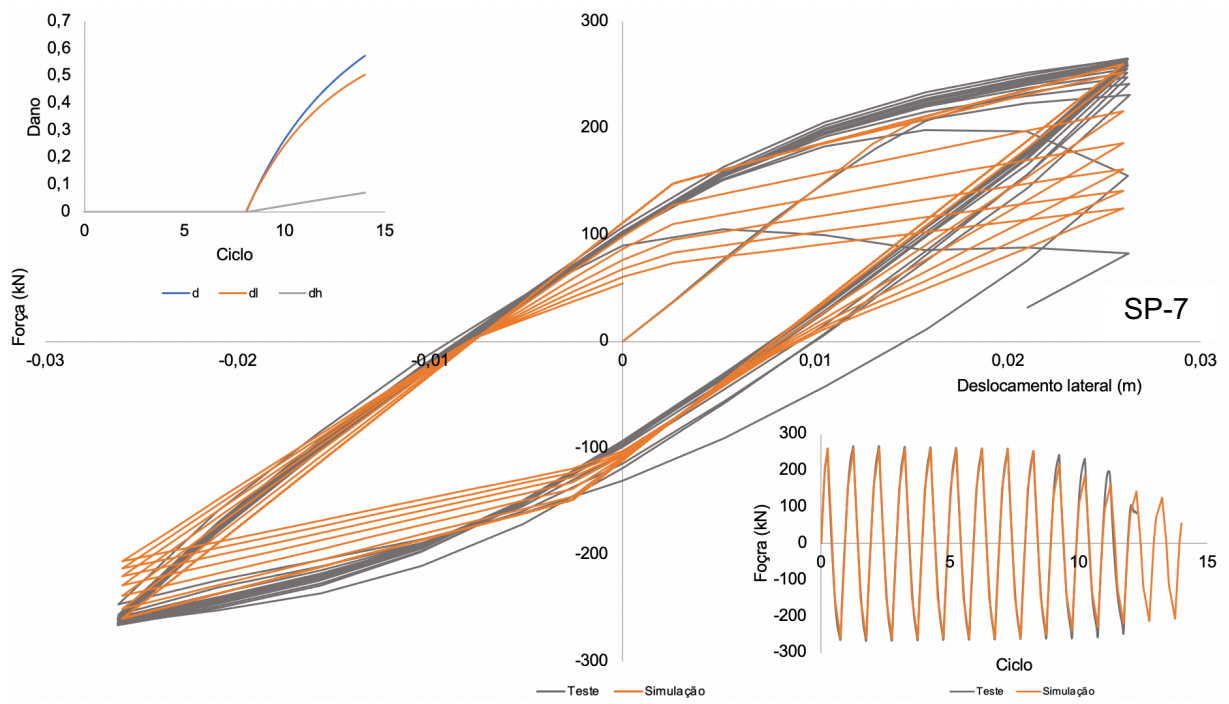
Parâmetro	Valor calculado	Parâmetro	Valor calculado
$M_{cr}$	1150kN.m	$\alpha$	0.45
$\gamma$	-24	$Q$	0.013455
$\beta$	-1.782699	$r$	-0.1
$\Phi_{cr}^p$	0.03264731		

As comparações entre as simulações e os testes experimentais são apresentados na Figura 15, mostrando a relação de força por deslocamento horizontal, força por ciclo e de dano por ciclo, sendo que nessa última, mostra-se os valores de cada parcela de dano separadamente ( $d_l$  e  $d_h$ ), bem como do dano total na rótula em análise ( $d_i$ ). A Figura 15a representa o teste SP-6; a15b o teste SP-7; e o 15c o teste SP-9.

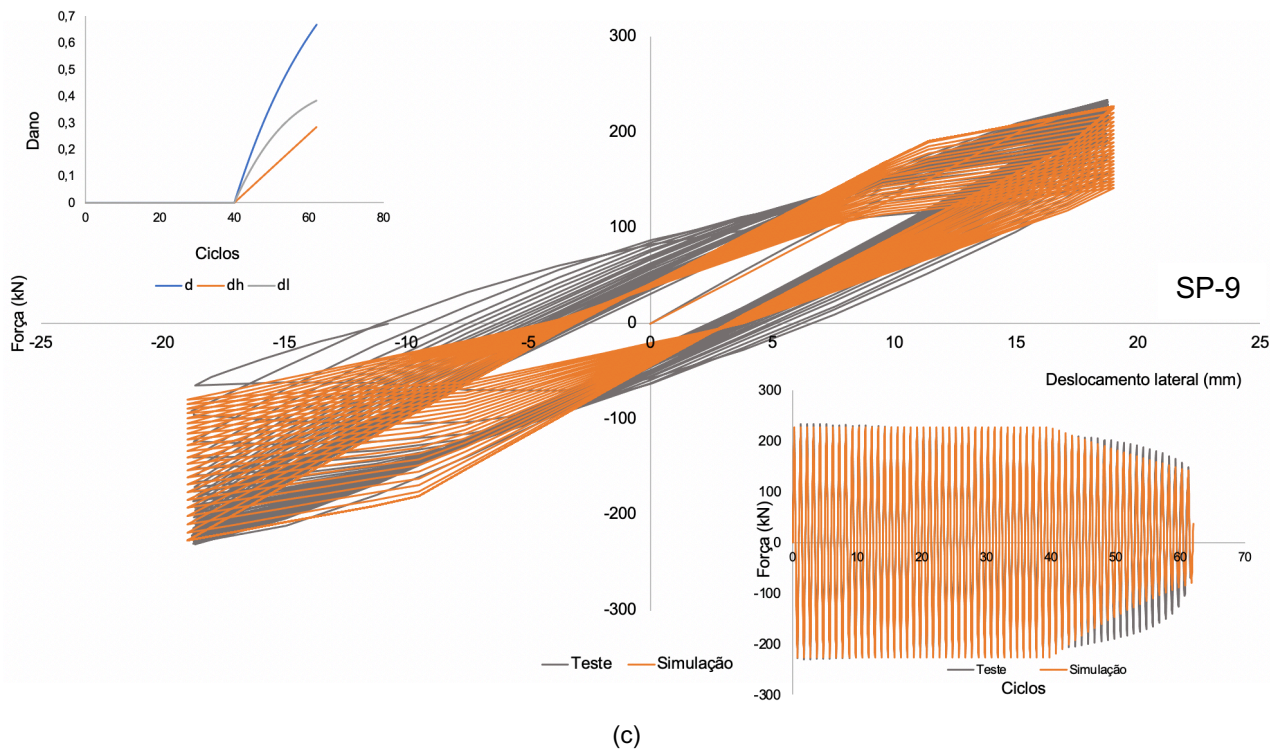
**Figura 15** – Resultados obtidos para (a) SP-6 (b) SP-7 e (c) SP-9.



(a)



(b)

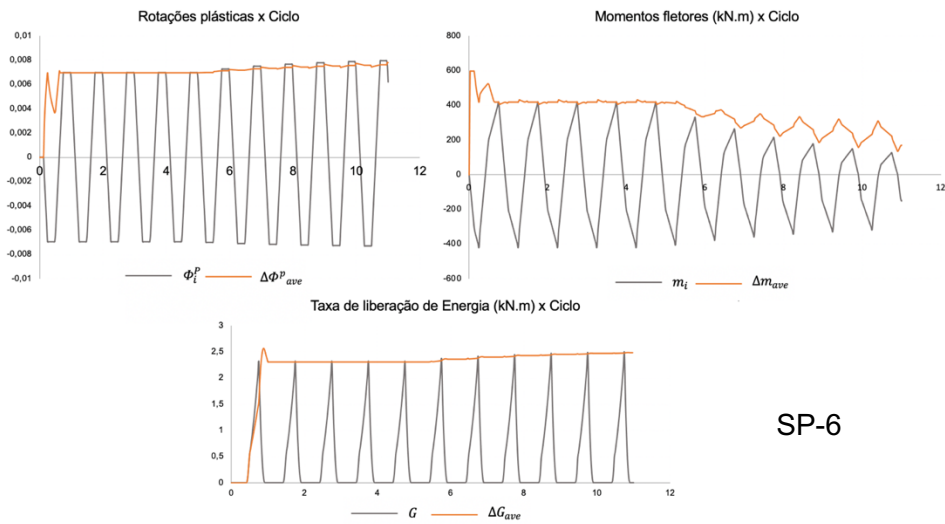


Assim, os números de ciclo crítico para iniciar a fratura de acordo com as simulações numéricas foram de  $N_{cr} = 4.825$ ,  $N_{cr} = 8.075$ ,  $N_{cr} = 39.9$ , para os testes SP-6, SP-7 e SP-9, respectivamente. Esses valores experimentais, para cada teste, na mesma sequência são de,  $N_{cr} \cong 5$ ,  $N_{cr} \cong 7.75$  e  $N_{cr} \cong 40$ . Tais resultados mostram que os valores dos parâmetros calculados pelas otimizações propostas são uma boa aproximação, uma vez que fornecem valores de início de fratura muito próximos aos reais.

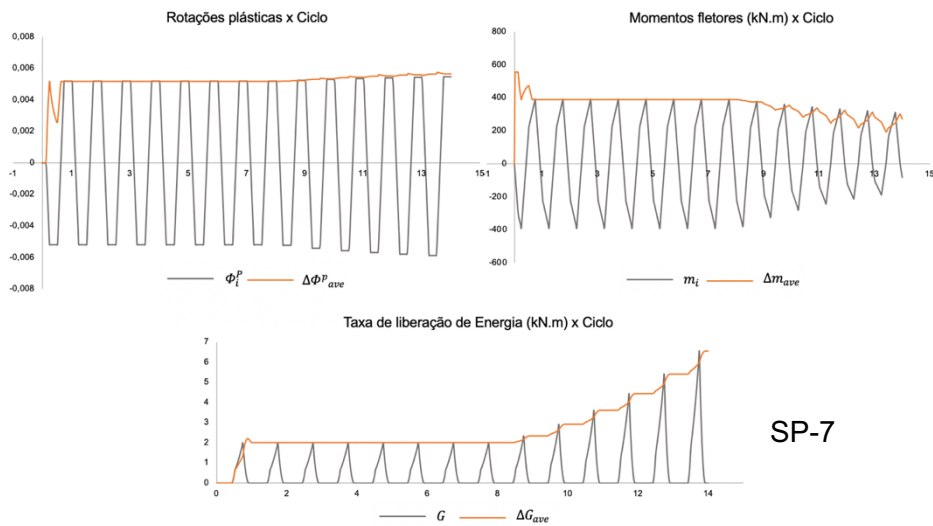
Uma vez identificado o início da fissuração, a evolução desse fenômeno pôde ser visto pela relação de dano por ciclo, sendo a penalização da rigidez mostrada pelo gráfico de força e deslocamento lateral, bem como no de força por ciclo. O teste SP-6, por exemplo, atinge um valor último de  $d_l = 0.643$  e  $d_h = 0.076$ , sendo o dano total então de  $d_i = 0.719$ ; o SP-7, onde a fratura ocorre do lado positivo, atinge um valor último de  $d_l = 0.505$  e  $d_h = 0.07$ , logo,  $d_i = 0.574$ ; por fim, no caso do teste SP-9, obteve-se  $d_l = 0.383$  e  $d_h = 0.284$ , com  $d_i = 0.666$ .

Com o propósito de validar os valores de amplitudes médias propostos no item 5.1.3 da metodologia do presente trabalho, na Figura 16 apresenta-se: as relações de rotações plásticas por ciclo, com a respectiva aproximação da amplitude média do valor acumulado de rotações (dada pela Equação 27); os momentos fletores por ciclo, com as amplitudes médias do valor acumulado dos momentos fletores (fornecida pela Equação 28); e, finalmente, a taxa de liberação de energia por ciclo, com a amplitude média acumulada dessa taxa (relação exposta pela Equação 39). Em 16a tem-se tais relações para o teste SP-6; em 16b, para SP-7; e 16c, para SP-9.

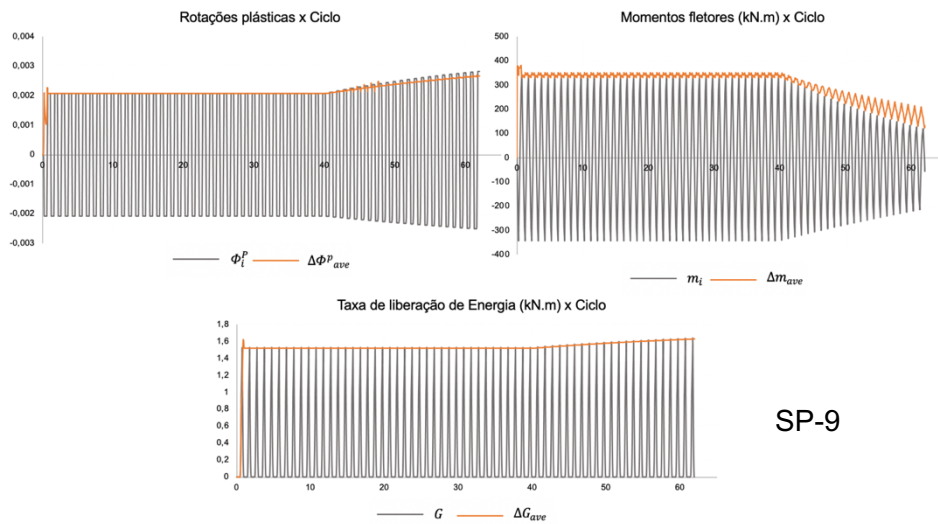
**Figura 16** – Resultados das amplitudes médias de rotações, momentos fletores e taxa de liberação de energia para (a) SP-6 (b) SP-7 e (c) SP-9.



(a)



(b)



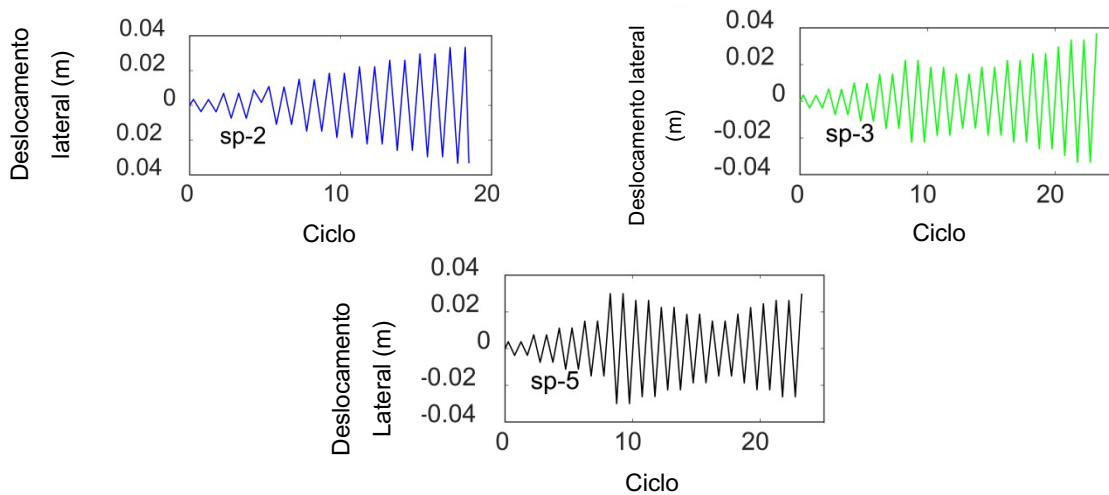
(c)

Nota-se que nos três casos as aproximações dos valores de amplitudes médias se aproximam ao valor calculado de rotações plásticas, momentos fletores e taxas de liberação de energia de forma rápida e eficaz, demonstrando que as relações propostas são coerentes e que o valor de  $\Delta N$  definido para cada caso fornece aproximações estáveis de amplitudes.

## 6.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS: TESTES DE FADIGA NÃO- ESTACIONÁRIOS

O histórico de deslocamentos aplicados nos casos não estacionários (amplitudes não constantes) são apresentados na Figura 17, sendo os testes denominados de SP-2, SP-3 e SP-5, onde o SP-3 corresponde ao teste com o maior valor de deslocamento dentre os testes analisados, e também é um teste onde a fratura aparece do lado positivo, similar ao SP-7 do caso estacionário.

**Figura 17** – Histórico de deslocamentos dos testes não estacionários SP-2, SP-3 e SP-5.

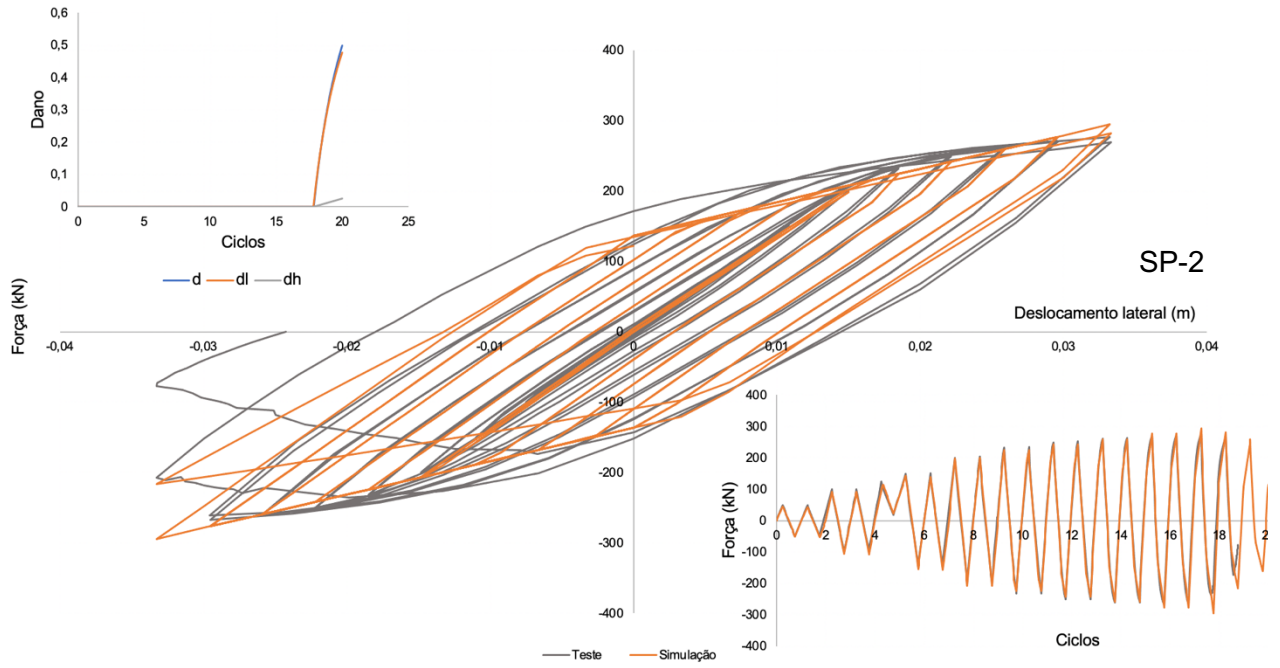


A Figura 18, portanto, mostra a relação de força por deslocamento horizontal, força por ciclo e de dano por ciclo para cada teste, sendo que, os valores dos parâmetros utilizados foram os mesmos aos apresentados pela Tabela 1, uma vez que para a otimização desses se considerou tais testes não estacionários.

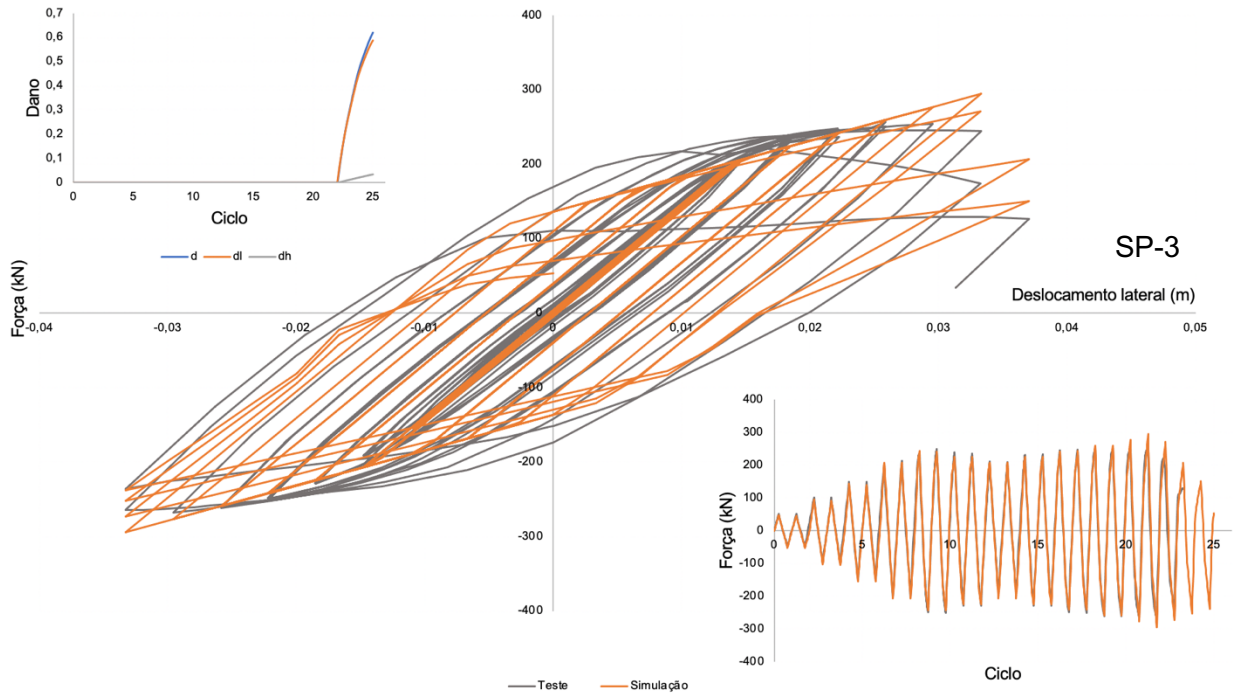
Os valores de ciclo identificados necessários para iniciação do processo de fissuração foram de  $N_{cr} = 17.85$ ,  $N_{cr} = 22.025$ ,  $N_{cr} = 20.85$ , para SP-2, SP-3 e SP-5, respectivamente. Os valores experimentais na mesma sequência de testes são de  $N_{cr} \cong 17$ ,  $N_{cr} \cong 21$  e  $N_{cr} \cong 19$ . Assim, percebe-se que os parâmetros calculados também se ajustaram de forma adequada para os casos não estacionários.

Os valores de dano último para o teste SP-2 foram de  $d_l = 0.477$  e  $d_h = 0.026$ , com dano total final de  $d_i = 0.499$ ; para SP-3 obteve-se  $d_l = 0.589$  e  $d_h = 0.035$ , com  $d_i = 0.621$ ; e, finalmente, para SP-5,  $d_l = 0.319$  e  $d_h = 0.053$ , totalizando  $d_i = 0.372$ .

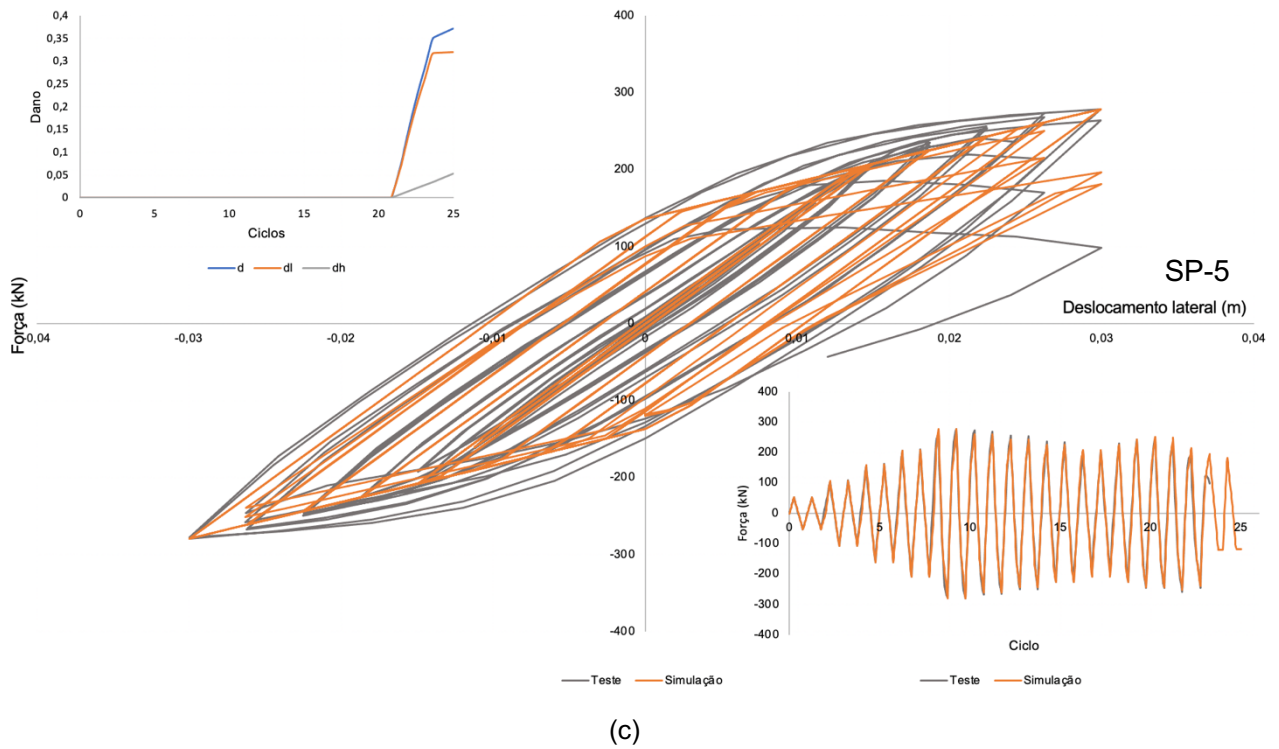
**Figura 18** – Resultados obtidos para (a) SP-2 (b) SP-3 e (c) SP-5.



(a)

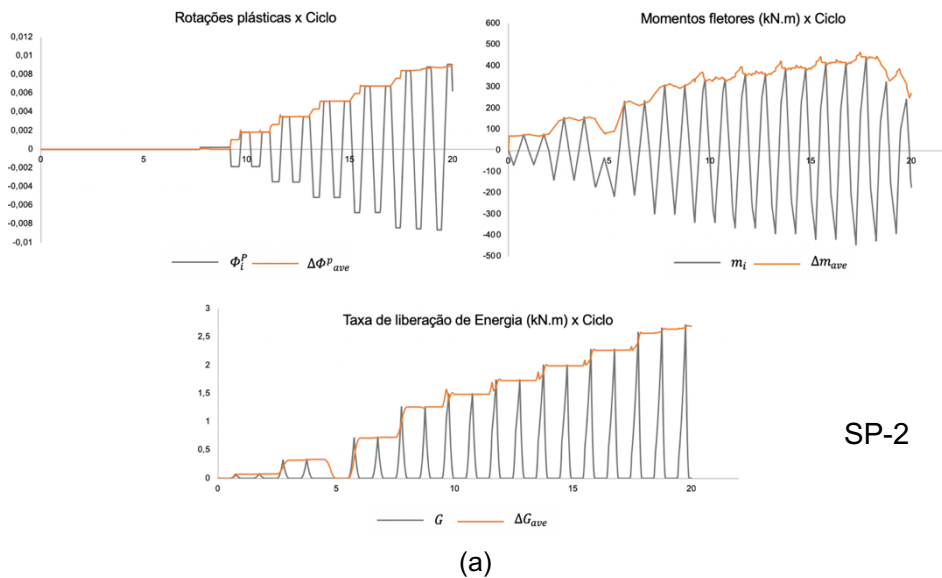


(b)



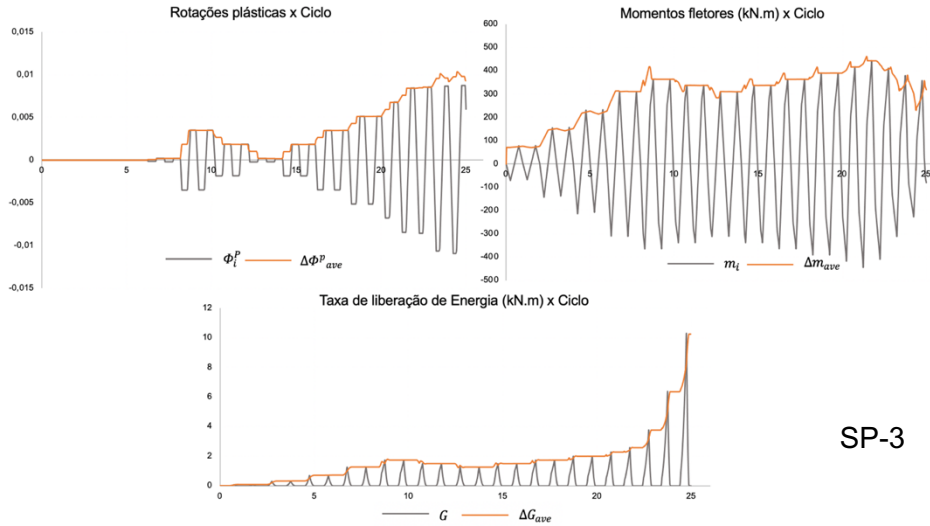
Na Figura 19a, 19b e 19c mostra-se, as relações de: rotações plásticas por ciclo contrastada com a aproximação da amplitude média do valor acumulado de rotações; momentos fletores por ciclo, com as amplitudes médias do valor acumulado dos momentos fletores; e, por fim, a taxa de liberação de energia por ciclo, com a amplitude média acumulada dessa taxa, para os testes, SP2-SP-3 e SP-5, respectivamente.

**Figura 19** – Resultados das amplitudes médias de rotações, momentos fletores e taxa de liberação de energia para (a) SP-2 (b) SP-3 e (c) SP-5.



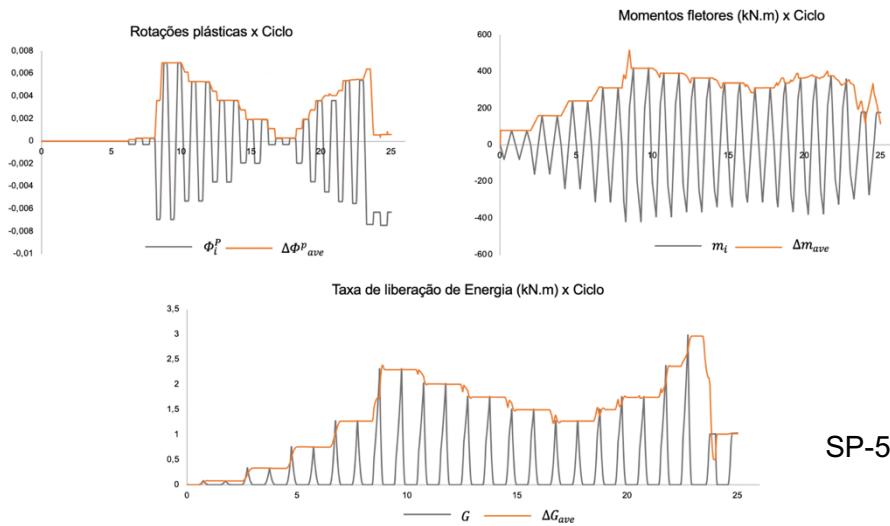
SP-2

(a)



SP-3

(b)



SP-5

(c)

Observando as Figuras 19a, 19b e 19c, pode-se concluir que o objetivo principal da introdução do conceito de amplitudes médias pôde ser alcançado. Os efeitos não estacionários são de fato traduzidos pelas relações que foram propostas, uma vez que os valores médios têm uma boa aproximação dos valores de rotações, momentos e taxas de liberações de energia em cada ciclo.

**PARTE II – MODELO ELASTOPLÁSTICO COM DANO BASEADO NA  
TERMODINÂMICA DE PÓRTICOS**

## 7 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA DA PARTE II

No presente tópico faz-se a conceituação de todas as considerações utilizadas para o desenvolvimento do modelo para análise de início e evolução de fissuração para pórticos de concreto armado. Primeiramente, mostra-se as formulações para análises de pórticos em diferentes cenários de acordo com o que Flórez-López, Marante e Picón (2015) postulam. Assim, uma vez que o novo modelo a ser proposto é baseado na Termodinâmica de Pórticos, posteriormente as formulações termodinâmicas desenvolvidas por Dahmer (2018) e Brant (2019) são detalhadas. O foco é mostrar que mesmo por caminhos diferentes, a obtenção das leis constitutivas é semelhante entre os autores. Todavia, o presente modelo, apesar de ter bases e conceitos similares, propõe uma das leis constitutivas que é distinta dentre as já apresentadas: uma lei de dano nova, formulada por intermédio do potencial de Gibbs.

### 7.1 ANÁLISE DE PÓRTICOS

#### 7.1.1 Análise de Pórticos Elásticos

Quando não há plasticidade envolvida, Flórez-López, Marante e Picón (2015) postulam a lei de elasticidade de cada elemento  $b$  (como mostrado na Figura 1, no item 3.1), sendo dada pela Equação 49, onde  $\{\Phi^0\}_b$  é o vetor de deformações iniciais (Vetor 5) e  $[F^0]$  é a matriz de flexibilidade inicial (Matriz 4).

$$\{\Phi\}_b = [F^0]\{M\}_b + \{\Phi^0\}_b \quad (49) \quad [F^0] = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI_b} & -\frac{L_b}{6EI_b} & 0 \\ -\frac{L_b}{6EI_b} & \frac{L_b}{3EI_b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{A_b E} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 4}$$

$$\{\Phi^0\}_b = \begin{bmatrix} \phi_i^0 \\ \phi_j^0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Vetor 5}$$

#### 7.1.2 Análise De Pórticos Elástoplásticos

Para Esmali e Ronagh (2012) a não linearidade dos elementos estruturais controlam o comportamento da estrutura. A fim de se obter uma análise não linear, em estruturas de concreto armado, a caracterização de cada membro pode ser realizada utilizando a plasticidade concentrada, a qual, ainda segundo os mesmos autores, faz o uso de rótulas plásticas em locais mais prováveis

que ocorram plasticidade.

Dessa forma, apresenta-se a seguir os modelos elastoplástico perfeito e com encruamento cinemático linear, respectivamente, onde ambos levam em conta o aparecimento de rotações plásticas localizadas em rótulas plásticas (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

### 7.1.2.1 Modelos Elastoplástico Perfeito

Na determinação dos esforços de uma estrutura por meio do modelo elastoplástico perfeito é preciso considerar o comportamento plástico do material dependendo do histórico de carregamento aplicado (MONT'ALVERNE et. al, 2012), sendo esse modelo o mais simples disponível para análise (HONG e LIU, 1999).

Para um elemento de pórtico submetido a deformações plásticas  $\{\Phi^p\}$  reescreve-se a lei de elasticidade conforme a Equação 50 (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015). Define-se, então, a função de escoamento (Equação 51), onde  $m$  é o momento em estudo e, novamente,  $M_y$  é o momento de escoamento, com sua respectiva lei de evolução, dada pela Equação 52.

$$\{\Phi - \Phi^p\}_b = [F^0]\{M\}_b \quad (50)$$

$$f(m) = |m| - M_y \leq 0 \quad (51) \quad \begin{cases} \dot{\phi}^p = 0 \text{ se } f(m) < 0 \text{ (rótula bloqueada)} \\ f(m) = 0 \text{ se } \dot{\phi}^p \neq 0 \text{ (rótula ativa)} \end{cases} \quad (52)$$

### 7.1.2.2 Modelos Elastoplástico com Encruamento Cinemático Linear

Em prol de refinar as teorias básicas de relações entre a microestrutura do material e o seu comportamento plástico, buscando, então, melhor interpretar o papel das tensões internas no encruamento (BATE e WILSON, 1986), leva-se em conta o efeito Bauschinger, o qual é inferido no decréscimo da tensão de escoamento do material devido ao carregamento até o limite plástico, descarregamento e novamente carregamento com cargas contrárias (ZHONGUA e HAICHENG, 1990), sendo importante mencionar, portanto, que tal fenômeno é um dos fatores ignorados em modelos que consideram deformações plásticas, como o modelo elastoplástico perfeito, por exemplo (ARMSTRONG e FREDERIC, 1966).

De acordo com Perry et. al (2006) a consideração do efeito Bauschinger permite incluir efeitos adicionais causadas pelas deformações plásticas, como a sua influência no módulo de elasticidade. Tal efeito é de extrema importância para ocorrências sísmicas, por exemplo.

Bem como no modelo elastoplástico perfeito, define-se para o modelo com encruamento cinemático linear uma função de escoamento (Equação 53) com sua respectiva lei de evolução (Equação 54), sendo que essa agora considera o termo de encruamento  $x$ , o qual, caso o encruamento seja uma função linear de da rotação plástica  $\Phi^p$ , tem-se o caso referente ao

encruamento cinemático linear, onde  $h$  é o termo de encruamento (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

$$f(m, x) = |m - x| - M_y \leq 0 \quad (53) \quad \begin{cases} \dot{\phi}^p = 0 \text{ se } f(m) < 0 \text{ (rótula bloqueada)} \\ f(m, x) = 0 \text{ se } \dot{\phi}^p \neq 0 \text{ (rótula ativa)} \end{cases} \quad (54)$$

$$x = h\Phi^p$$

### 7.1.3 Modelos Elastoplástico com Encruamento Cinemático Linear e Dano

A determinação das equações constitutivas para um elemento  $b$  é abordada nos parágrafos seguintes em concordância com que detalham Flórez-López, Marante e Picón (2015).

Primeiramente, a lei de elasticidade passa ter a forma mostrada na Equação 55 devido a hipótese de equivalência de deformações, onde  $[F(D)]$  é dada pela Matriz 5.

$$\{\Phi - \Phi^p\} = [F(D)]\{M\} \quad (55) \quad [F(D)] = \begin{bmatrix} \frac{L_b}{3EI(1-d_i)} & -\frac{L_b}{6EI} & 0 \\ -\frac{L_b}{6EI} & \frac{L_b}{3EI(1-d_j)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_b}{AE} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 5}$$

A função de escoamento é agora dada pela Equação 56 (onde o parâmetro  $k_0$  representa o momento plástico efetivo) e sua lei de evolução é semelhante a dada pela Equação 54.

$$f = \left| \frac{m}{1-d} - h\Phi^p \right| - k_0 \leq 0 \quad (56)$$

Por fim, ao aplicar o critério de Griffith na energia de deformação complementar de um elemento danificado (Equação 57) obtém-se a taxa de liberação de energia  $y$  (Equação 58), a qual pode ser escrita para cada rótula  $i$  e  $j$ .

$$W_b = \frac{1}{2}\{M\}_b^t \{\Phi - \Phi^p\}_b = \frac{1}{2}\{M\}_b^t [F(D)]_b \{M\}_b + \frac{1}{2}\{M\}_b^t \{\Phi^0\}_b \quad (57)$$

$$y = \frac{F^0 m^2}{2(1-d)^2} = \frac{1}{2} \frac{Lm^2}{3EI(1-d)^2} \quad (58)$$

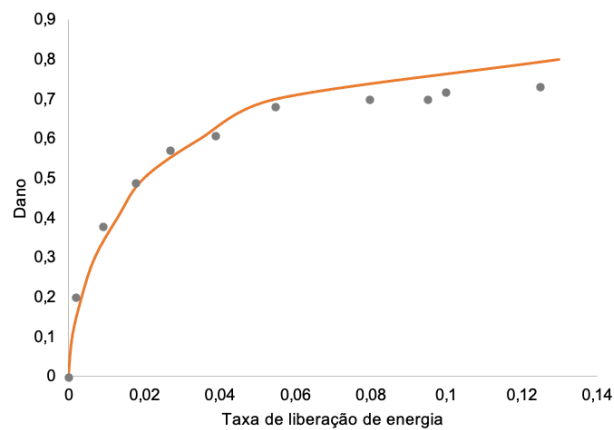
A resistência à fissuração é dada por  $R(d)$  (Equação 59), sendo tal relação determinada a partir de observações experimentais, possuindo um valor de resistência inicial (dado por  $R_0$ , quando  $d = 0$ ) e um termo de encruamento (dado por  $q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)}$ ) (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015). Assim, torna-se possível propor a lei de dano para cada rótula (Equação 60).

$$R(d) = R_0 + q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} \quad (59)$$

$$\begin{cases} \dot{d} = 0 \text{ se } y < R \\ y = R \text{ se } \dot{d} > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \dot{d} = 0 \text{ se } \frac{1}{2} \frac{Lm^2}{3EI(1-d)^2} - R_0 - q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} < 0 \\ \frac{1}{2} \frac{Lm^2}{3EI(1-d)^2} - R_0 - q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} = 0 \text{ se } \dot{d} > 0 \end{cases} \quad (60)$$

A Figura 20 demonstra a relação existente entre o dano  $d$  e a taxa de liberação de energia  $y$ , onde a curva demonstra a representação do equação de resistência à fissuração dada pela Equação 59, uma vez que pelo critério de Griffith, a taxa de liberação de energia deve ser igual ao valor da resistência (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

**Figura 20** – Taxa de liberação de energia como uma função do dano.

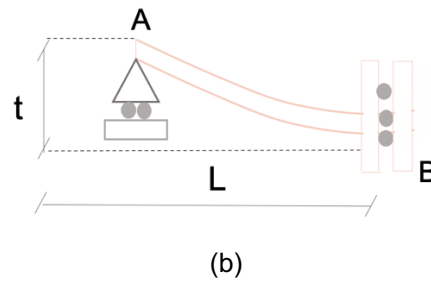


#### 7.1.4 Medida Experimental do Dano em uma Rótula Plástica

Seja a junção viga-coluna submetida à flexão representada pela Figura 21 (a) na qual é imposta deslocamento monossinais na coluna, e seja a representação mecânica do teste que se é ensaiado dado pela Figura 21 (b), onde um comportamento simétrico é assumido (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

**Figura 21** – (a) Junção viga-coluna; (b) Representação mecânica do teste.





A lei de elasticidade fornecida pela Equação 55 pode ser escrita para o elemento AB mostrado na Figura 21 (b) considerando o ponto B como ponto de análise para evolução do dano e plasticidade conforme mostra a Equação 61.

$$\Phi_2 - \Phi_2^p = -\frac{L}{6EI}m_1 + \frac{L}{3EI(1-d_2)}m_2 \quad (61)$$

As condições de equilíbrio e contorno são que em  $m_1$  o momento é zero ( $m_1 = 0$ ) e que em  $m_2$  o momento vale  $m_2 = \frac{PL}{2}$ . A relação cinemática é expressa pela Equação 62 e ao combiná-la com a Equação 61 agregando a informação das condições de equilíbrio obtém-se as Equações 63, 64, 65 e 66 (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

$$\Phi_2 = \frac{t}{L} \quad (62) \quad P = Z(d)(t - t_p), \text{ onde } d = d_2 \quad (63)$$

$$Z(d) = (1-d)Z_0 \quad (64) \quad Z_0 = \frac{6EI}{L^3} \quad (65) \quad t_p = \Phi_2^p L \quad (66)$$

Dessa forma, torna-se possível obter uma relação que permite quantificar o dano por intermédio de resultados experimentais, ou seja, o valor do dano que corresponde a força P que é alcançada antes de iniciar o descarregamento elástico, sendo expresso pelo seguinte (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015):

$$d = 1 - \frac{Z(d)}{Z_0} \quad (67)$$

#### 7.1.5 Cômputo dos Parâmetros de $R_0$ , $q$ , $h$ e $k_0$ pela Teoria do Dano Concentrado (TDC)

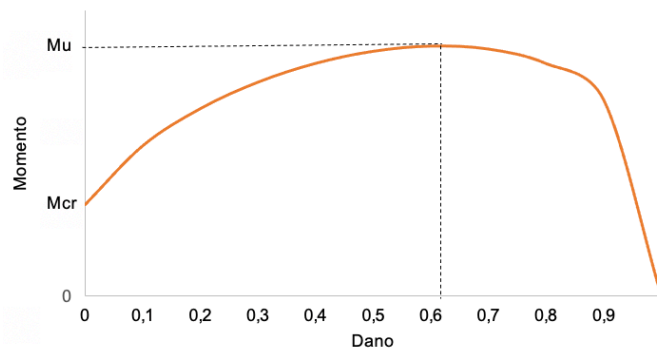
Os parâmetros  $R_0$  e  $q$  existentes na Equação 59 dependem das características do elemento em estudo. O critério de Griffith estabelece que durante a propagação do dano a taxa de liberação de energia deve ser igual ao valor da resistência, assim, tem-se a Equação 68, a qual permite relacionar momento e dano quando reescrita conforme a Equação 69 (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

$$\frac{F^0 m^2}{2(1-d)^2} = R_0 + q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} \quad (68)$$

$$m^2 = \frac{2(1-d)^2}{F^0} R_0 + \frac{2q}{F^0} (1-d) \ln(1-d) \quad (69)$$

A Figura 22 demonstra a relação existente entre os valores de momento e dano, observando-se, assim, que no valor do momento crítico o dano é zero e no valor do momento último o dano possui o valor de dano último dado por  $d_u$ .

**Figura 22** – Momento em função do dano.



Dessa maneira, de acordo com o que se consta na Equação 69, pode-se obter os valores dos parâmetros  $R_0$ ,  $q$  e também de  $d_u$  e de dano plástico  $d_p$  por meio das seguintes relações:

$$m = M_{cr} \Rightarrow d = 0; \quad (70)$$

$$m = M_u \Rightarrow d = d_u; \quad (71)$$

$$\frac{\partial m}{\partial d} = 0, \text{ com } m = M_u \Rightarrow d = d_u; \quad (72)$$

$$m = M_p \Rightarrow d = d_p \quad (73)$$

Onde  $M_{cr}$  e  $M_u$  são os valores de momento crítico e último, respectivamente, os quais podem ser determinados pelas relações clássicas das teorias de concreto armado, uma vez conhecida as propriedades da seção da estrutura em análise.

Logo no início da plasticidade, as rotações plásticas ainda são nulas e o valor de dano assume o valor de  $d_p$ , tornando possível, assim, a determinação do parâmetro  $k_0$ , conforme mostra a Equação 74 (FLÓREZ-LÓPEZ, MARANTE e PICÓN, 2015).

$$k_0 = \frac{M_p}{1 - d_p} \quad (74)$$

Já o parâmetro referente ao encruamento cinemático ( $h$ ) pode ser calculado uma vez conhecido o valor de rotação plástica última, de acordo com a Equação 75 (FLÓREZ-LÓPEZ,

MARANTE e PICÓN, 2015).

$$h = \frac{1}{\Phi_{pu}} \left( \frac{M_u}{1 - d_u} - \frac{M_p}{1 - d_p} \right) \quad (75)$$

### 7.3 TERMODINÂMICA DE PÓRTICOS

A ciência da termodinâmica, a qual iniciou fazendo relações entre calor, trabalho e as propriedades de sistemas em equilíbrio, evoluiu para um estudo mais abrangente sobre energia de diferentes tipos de sistemas e comportamentos, incluso o mecânico, estando esses em equilíbrio ou não (BASARAN e NIE, 2004)

Com a finalidade de demonstrar a representatividade de fenômenos físicos no comportamento mecânico de pórticos e vice-versa, faz-se necessário determinar as forças termodinâmicas associadas às variáveis internas do sistema em estudo, as quais, em termos gerais, se referem a forças extensoras do fenômeno analisado, como, por exemplo, a taxa de liberação de energia apresentada no item 7.1.3 do presente trabalho, que é considerada a força extensora da fissuração.

Na literatura existem propostas de formulações termodinâmicas que permitem avaliar e relacionar o desenvolvimento de forças motrizes em processos tanto físicos quanto químicos (BRANT, 2019; DAHMER, 2018). Tais propostas se estruturam na termodinâmica de sólidos apresentada por Lemaitre e Chaboche (1990) e por Proença (2000), buscando viabilizar as análises estruturais com os conceitos da mecânica de pórticos, redigindo as relações fornecidas por essa por meio de conceitos, relações e princípios que serão abordados na sequência do presente trabalho.

#### 7.3.1 Princípio das Potências Virtuais e Equação do Equilíbrio Dinâmico

Com o intuito de obter um esquema representativo das forças envolvidas no fenômeno de estudo, é conveniente imaginar movimentos virtuais ou fictícios e analisar o trabalho ou potência resultante. De forma geral, um deslocamento virtual do meio de um material em relação a um sistema de referência é definido a qualquer instante pela velocidade virtual do ponto material. A potência virtual de um sistema de forças num dado deslocamento virtual é, por definição, uma função linear contínua do valor escalar de  $\vec{U}$ , sendo igual ao trabalho realizado por unidade de tempo no fenômeno considerado ( $\hat{P} = \frac{\tau}{\Delta t}$ ) (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990).

Com o intuito de analisar a variação de energia total de um sistema devido ao trabalho mecânico realizado nesse sistema por meio de forças externas e/ou transferência de calor consideram-se, para dar generalidade ao estudo, as taxas de trabalho mecânico (potência) e de

transferência de calor (PROENÇA, 2000).

O princípio das potências virtuais afirma, então, que a soma da potência virtual das deformações virtuais ( $\hat{P}_{def}$ ) com a potência virtual das forças de inércia ( $\hat{P}_{ine}$ ) é igual a potência virtual das forças externas (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990).

$$\hat{P}_{ext} = \hat{P}_{ine} + \hat{P}_{def} \quad (76)$$

Com o objetivo de se obter a equação de equilíbrio dinâmico utilizada no modelo clássico, pode-se, primeiramente, escrever a potência virtual das forças externas, que é o produto da velocidade virtual pelas forças externas, e a potência virtual das forças de deformação, que é o produto entre a taxa de deformação pelas tensões generalizadas, onde o sub-índice  $b$  se refere ao elemento  $b$  do pórtico, conforme apresentam as equações 77 e 78, respectivamente (DAHMER, 2018).

$$\hat{P}_{ext} = \{\hat{U}\}^T \{F\} \quad (77) \quad \hat{P}_{def} = \sum_{b=1}^m \hat{P}_{def}^b \Rightarrow \hat{P}_{def}^b = \{\dot{\Phi}\}_b^T \{M\}_b \quad (78)$$

A potência virtual das forças de inércia é dada pelo produto entre a velocidade virtual pela matriz de massa e aceleração reais generalizadas, conforme mostra a Equação 79 (DAHMER, 2018).

$$\hat{P}_{ine} = \{\dot{U}\}^T [Mass]\{\ddot{U}\} \quad (79)$$

Substituindo as Equações 77, 78 e 79 na Equação 32, e utilizando a relação cinemática apresentada no item 3.1 do presente trabalho, obtém-se a Equação 80, que se refere a equação do equilíbrio dinâmico da estrutura, que possui equivalência a utilizada pelo modelo de Dano Concentrado, como apresentado pela Equação 3, também no item 3.1.

$$\sum_{b=1}^m [B]_b^T \{M\}_b + [Mass]\{\ddot{U}\} = \{F\} \quad (80)$$

### 7.3.2 Primeiro Princípio da Termodinâmica

De acordo com Proença (2000) o primeiro princípio da termodinâmica está relacionado com a conservação de energia do sistema e o mesmo autor a enuncia como a taxa de trabalho mecânico ou potência das cargas externas ( $P_{ext}^b$ ) mais a taxa de calor introduzida no sistema ( $Q_b$ ) sendo igual à taxa de energia cinética ( $\dot{K}_b$ ) mais a taxa de variação da energia interna ( $\dot{E}_b$ ), como se tem na Equação 81, escrita agora considerando um elemento de pórtico (DAHMER, 2018).

$$\dot{E}_b + \dot{K}_b = P_{ext}^b + Q_b \quad (81)$$

Sabe-se que a taxa de energia cinética é igual a potência das forças de inércia e, então, combinando essa relação com a Equação 81, obtém-se o primeiro princípio escrito em função da matriz da taxa de deformação, das tensões generalizadas e da taxa de calor.

$$\dot{E}_b = \{\dot{\Phi}\}_b^T \{M\}_b + Q_b \quad (82)$$

### 7.3.3 Segundo Princípio da Termodinâmica

Enquanto o primeiro princípio está interessado em descrever a conservação de energia, conforme previamente exposto, o segundo busca estudar como a energia é transferida entre sistemas (KELLY, 2018). Assim, para um elemento de pórtico, Dahmer (2018) escreve o segundo princípio de acordo com a Equação 83, onde se tem que a diferença entre a entropia do sistema ( $\dot{S}_b$ ) e a razão entre a taxa de calor ( $Q_b$ ) e o valor de temperatura absoluta ( $T_b$ ), e ao combiná-lo com o princípio das potências virtuais e o primeiro princípio da termodinâmica, a autora obtém uma relação expressa em função da energia interna (Equação 84), o qual, como se sabe, se refere a um potencial termodinâmico.

$$\dot{S}_b - \frac{Q_b}{T_b} \geq 0 \quad (83) \quad T_b \dot{S}_b + \{\dot{\Phi}\}_b^T \{M\}_b - \dot{E}_b \geq 0 \quad (84)$$

Uma das vantagens do método da termodinâmica consiste nos potenciais termodinâmicos que pode-se determinar (MAZARS e PIJAUDIER-CABOT, 1989). Esses potenciais são escolhidos de acordo com as necessidades de cada estudo em questão, ou seja, com aquilo que se busca descrever e observar ao longo da análise, assim, Dahmer (2018) e Brant (2019), por exemplo, propõem a utilização da Energia Livre de Gibbs, uma vez que seu intuito era descrever a tendência da reação de um metal com o seu ambiente, porém, vale ressaltar que tal escolha, apesar de ser voltada para o propósito exposto, não se limita a ele, permitindo, portanto, a análise mecânica da estrutura, como a avaliação da evolução de plasticidade, dano e taxa de liberação de energia, de acordo com o que será melhor abordado e detalhado no item 8.1 do presente trabalho.

Dessa forma, o potencial de Gibbs é uma função que depende das tensões generalizadas  $M$ , do valor da temperatura absoluta  $T$  e das variáveis internas  $V_\alpha$  (Equação 85), onde essas últimas, segundo Lemaitre e Chaboche (1990), são capazes de representar com precisão o fenômeno físico em avaliação. Para a análise de pórticos, essas variáveis podem ser a rotação plástica  $\Phi^p$  e a variável de dano  $d$ , por exemplo.

$$\dot{G}_b = (M, T, V_\alpha) \quad (85)$$

Dahmer (2018) e Brant (2019) ainda reescrevem a desigualdade apresentada na Equação 84 em função do potencial termodinâmico da Energia Livre de Gibbs (Equação 86) e ao derivar essa

relação, tem-se a Equação 87, que relaciona os princípios da termodinâmica com a Energia Livre de Gibbs e possibilita avaliar se o processo em estudo é termodinamicamente admissível ou não.

$$G_b = -E_b + T_b S_b + \{\Phi\}^T \{M\} \quad (86) \quad \dot{G}_b - \{\dot{M}\}^T \{\Phi\} - S_b \dot{T}_b \geq 0 \quad (87)$$

### 7.3.4 Leis de Estado

Uma vez definido o potencial termodinâmico, pode-se postular, a partir desse, as leis de estado (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990), as quais possibilitam relacionar as forças termodinâmicas associadas às variáveis internas. Para tal fim, então, primeiramente, deriva-se a Equação 85 em relação ao tempo e se obtém a Equação 88 (BRANT, 2019).

$$\dot{G}_b = \left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\}^T \{\dot{M}\}_b + \frac{\partial G_b}{\partial T_b} \dot{T}_b + \left\{ \frac{\partial G_b}{\partial V_\alpha} \right\}^T \{\dot{V}_\alpha\}_b \quad (88)$$

Combinando as Equações 87 e 88, tem-se a Equação 89.

$$\{\dot{M}\}_b \left( \left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\}^T - \{\Phi\}_b^T \right) + \dot{T}_b \left( \frac{\partial G_b}{\partial T_b} - S_b \right) + \left\{ \frac{\partial G_b}{\partial V_\alpha} \right\}^T \{\dot{V}_\alpha\}_b \geq 0 \quad (89)$$

Ao considerar um processo reversível, por exemplo, tem-se que a taxa de variação das variáveis internas assume o valor de zero ( $\{\dot{V}_\alpha\}_b = 0$ ) e que não há dissipação de energia, conforme mostra a Equação 90 (BRANT, 2019).

$$\{\dot{M}\}_b \left( \left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\}^T - \{\Phi\}_b^T \right) + \dot{T}_b \left( \frac{\partial G_b}{\partial T_b} - S_b \right) = 0 \quad (90)$$

Segundo Brant (2019), se o processo for isotérmico, a taxa de temperatura absoluta vale zero ( $\dot{T}_b = 0$ ) e então a primeira lei de estado é obtida (Equação 91), postulando que toda vez que o potencial de Gibbs seja derivado em relação as tensões generalizadas se tem como resultado os valores de deformações.

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\} = \{\Phi\}_b \quad (91)$$

De acordo com o mesmo autor, em um processo reversível, mas apenas com mudança de temperatura, se tem a seguinte relação (Equação 92).

$$\left( \frac{\partial G_b}{\partial T_b} \right) = S_b \quad (92)$$

Analogamente, Brant (2019) define que a relação dada pela derivada do potencial em

relação as variáveis internas podem ser escrita conforme a Equação 93, onde  $A_\alpha$  representa a força termodinâmica associada as variáveis internas  $V_\alpha$ , sendo, em termos gerais, a força extensora do fenômeno em questão.

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial V_\alpha} \right\} = \{A_\alpha\} \quad (93)$$

A equação de dissipação de energia assume a forma da Equação 94, demonstrando que essa dissipação deve acontecer em processos inelásticos (BRANT, 2019).

$$\{A_\alpha\} \{\dot{V}_\alpha\}_b \geq 0 \quad (94)$$

As leis de estado são assim definidas (Equações 91 a 93) permitindo a elaboração de formulações termodinâmicas, as quais serão apresentadas em sequência e servem de base para a elaboração do modelo proposto nesse trabalho.

### 7.3.5 Formulação Termodinâmica para Pórticos Elásticos

De acordo Brant (2019), o modelo elástico considera a proporcionalidade entre as tensões e deformações e o potencial para esse modelo é uma função  $G_b = G_b(\{M\})$  dado pela Equação 95.

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}_b^T [F^0] \{M\}_b + \{M\}_b^T \{\Phi^0\}_b \quad (95)$$

Pelo método do estado local, define-se não só o potencial termodinâmico, mas também as leis de estado em relação as variáveis internas, conforme detalhado anteriormente, e as leis, por sua vez, possibilitam obter as relações constitutivas da mecânica de pórticos detalhada no item 7.1. Por exemplo, ao se derivar o potencial dado pela Equação 95 em relação ao momento, obtém-se exatamente a lei de elasticidade apresentada pela Equação 49, conforme ilustra a Equação 96.

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\} = [F^0] \{M\}_b + \{\Phi^0\}_b = \{\Phi\}_b \quad (96)$$

Ressalta-se que as relações cinemáticas e de equilíbrio utilizadas são as mesmas às apresentadas no item de revisão bibliográfica geral do presente trabalho. Isso acontece uma vez que o intuito da termodinâmica de pórticos é a obtenção de tais relações constitutivas, sendo tal afirmação válida para qualquer formulação termodinâmica.

### 7.3.6 Formulação Termodinâmica para Pórticos Elastoplásticos

Segundo Dahmer (2018), para o modelo elastoplástico perfeito, o potencial termodinâmico é uma equação  $G_b = G_b(\{M\}, \Phi^p)$ , expressa por:

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}_b^T [F^0] \{M\}_b + \{M\}_b^t \{\Phi^p\}_b \quad (97)$$

Ao derivar a Equação 97 em relação ao momento, obtém-se a lei de elasticidade (Equação 98), a qual é equivalente à apresentada na Equação 50.

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\} = [F^0] \{M\}_b + \{\Phi^p\}_b = \{\Phi\}_b \quad (98)$$

Ainda segundo Dahmer (2018), derivando novamente a Equação 97, mas agora em relação a variável interna das deformações plásticas, tem-se a força termodinâmica relacionada: os momentos fletores, conforme mostra a Equação 99, observando então, que a função de escoamento depende apenas de  $\{M\}$ , como mostra a Equação 51 em conjunto com a lei de plasticidade (Equação 52).

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial \Phi^p} \right\} = \{A\} = \{M\} \quad (99)$$

Já para pórticos que consideram encruamento cinemático linear, o potencial proposto é dado pela Equação 100 (DAHMER, 2018), onde a Matriz 6 é a matriz de encruamento cinemático linear.

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}_b^T [F^0] \{M\}_b + \{M\}^T \{\Phi^p\}_b - \frac{1}{2} \{\Phi^p\}^T [H] \{\Phi^p\} \quad (100) \quad [H] = \begin{bmatrix} h_i & 0 & 0 \\ 0 & h_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 6}$$

Da mesma maneira que anteriormente, ao derivar a Equação 100 com relação ao momento e com relação às deformações plásticas, encontra-se, respectivamente, a lei de elasticidade (Equação 98) e a força termodinâmica associada às rotações plásticas (Equação 101) (DAHMER, 2018).

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial \Phi^p} \right\} = \{M\} - [H] \{\Phi^p\} = \{A^p\} \quad (101)$$

Tem-se então a função de escoamento (Equação 102) equivalente à da mecânica clássica (Equação 53), que pode ser determinada para cada rótula  $i$  e  $j$ .

$$f = |A^p| - M_y = |m - h\Phi^p| - M_y \leq 0 \quad (102)$$

### 7.3.7 Formulação Termodinâmica para Pórticos com Encruamento Cinemático e Dano

O potencial termodinâmico proposto para esse modelo é uma função  $G_b = G_b(\{M\}, \Phi^p, d)$ , definido pela Equação 103 (DAHMER, 2018).

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}^T [F(D)] \{M\} + \{M\}^T \{\Phi^p\} - \frac{1}{2} \{\Phi^p\}^T [H(D)] \{\Phi^p\} - I(D) \quad (103)$$

A matriz  $[H(D)]$  (Matriz 6) representa o encruamento cinemático da armadura que agora considera as variáveis de dano, enquanto o termo  $I(D)$  (Equação 60) refere-se à resistência a fissuração (BRANT, 2019).

$$[H(D)] = \begin{bmatrix} (1-d_i)h & 0 & 0 \\ 0 & (1-d_j)h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz 6}$$

$$I(D) = -\frac{1}{2}qln^2(1-d_i) - \frac{1}{2}qln^2(1-d_j) \quad (104)$$

Para obter a lei de elasticidade, a força termodinâmica relacionada à plasticidade e a relacionada à fissuração, deriva-se o potencial apresentado em relação aos momentos, em relação às deformações plásticas e em relação ao dano, respectivamente, conforme demonstram as Equações 105, 106 e 107 (DAHMER, 2018).

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\} = \{\Phi\} = [F(D)]\{M\} + \{\Phi^p\} \quad (105)$$

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial \Phi^p} \right\} = \{A^p\} = \{M\} - [H(D)]\{\Phi^p\} \quad (106)$$

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial d} \right\} = \{A^d\} = \begin{cases} \frac{Lm_i^2}{6EI(1-d_i)^2} - R(d) + \frac{1}{2}h(\Phi_i^p)^2 \\ \frac{Lm_j^2}{6EI(1-d_j)^2} - R(d) + \frac{1}{2}h(\Phi_j^p)^2 \end{cases} \quad (107)$$

A função de escoamento é dada então pela seguinte relação:

$$f^p = |A^p| - (1-d)k_0 \leq 0 \text{ ou } f^p = |m - (1-d)h\Phi^p| - (1-d)k_0 \leq 0 \quad (108)$$

Ressalta-se nesse ponto que a relação obtida na Equação 107 não é diretamente igual à apresentada pela Equação 60 (item 7.1.3), uma vez que se tem um termo extra de encruamento ( $\frac{1}{2}h\Phi^p$ ). Assim, para se ter equivalência com o modelo da mecânica clássica de pórticos, Dahmer (2018) propõe que a função de dano seja escrita como mostra a Equação 109, onde  $R(d)$  tem a forma da Equação 59.

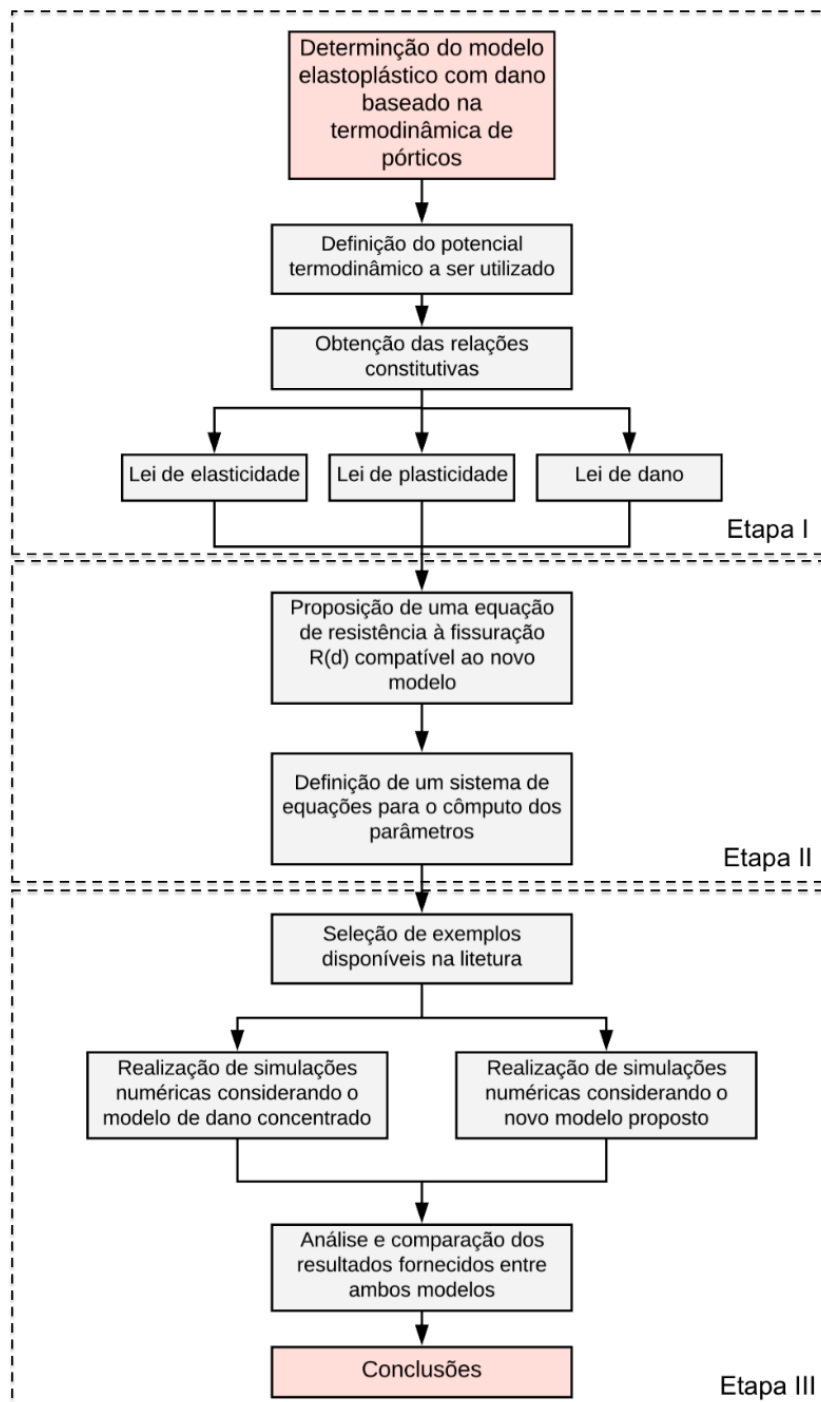
$$f^d = |A^d| - \frac{1}{2}h(\Phi^p)^2 \leq 0 \text{ ou } f^d = \left| \frac{Lm^2}{6EI(1-d)^2} - R(d) + \frac{1}{2}h(\Phi^p)^2 \right| - \frac{1}{2}h(\Phi^p)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow f^d = \left| \frac{Lm^2}{6EI(1-d)^2} - R_0 - q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} + \frac{1}{2}h(\Phi^p)^2 \right| - \frac{1}{2}h(\Phi^p)^2 \quad (109)$$

## 8 METODOLOGIA DA PARTE II

A metodologia do presente trabalho divide-se em três etapas: i) determinação do novo modelo; ii) definição da equação de resistência à fissuração e de relações para os parâmetros de cálculo; iii) escolha dos exemplos a serem utilizados e análise comparativa. Na Figura 23 sintetiza-se o processo metodológico adotado.

**Figura 23** – Fluxograma das etapas do trabalho.



## 8.1 MODELO ELASTOPLÁSTICO COM DANO BASEADO NA TERMODINÂMICA DE PÓRTICOS

Bem como as formulações termodinâmicas anteriormente apresentadas as equações cinemáticas e de equilíbrio a serem utilizadas são as mesmas que as apresentadas no item 3.1. Em sequência, ainda da mesma maneira que as prévias formulações, define-se um potencial termodinâmico para posterior derivação das relações constitutivas. O potencial proposto também é uma função  $G_b = G_b(\{M\}, \Phi^p, d)$  e é o mesmo utilizado para pórticos com encruamento cinemático e dano, conforme mostra-se abaixo.

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}^T [F(D)] \{M\} + \{M\}^T \{\Phi^p\} - \frac{1}{2} \{\Phi^p\}^T [H(D)] \{\Phi^p\} - I(D) \quad (110)$$

A matriz  $H(D)$  é a mesma que a apresentada pela Matriz 6 e se refere ao encruamento cinemático, enquanto que o termo  $I(D)$  referente a resistência a fissuração depende diretamente da equação de resistência a ser utilizada pelo novo modelo, sendo, então, determinado no seguinte item da presente metodologia.

Com o potencial estabelecido, mesmo que  $I(D)$  não possua uma forma concreta até então, ainda assim é possível escrever as leis constitutivas por intermédio do que se é estabelecido pelas leis de estado. Derivando a Equação 110 em relação aos momentos e às rotações plásticas se obtém, respectivamente, a lei de elasticidade e a lei de plasticidade, de acordo com as Equações 111 e 112.

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial M} \right\} = \{\Phi\} = [F(D)] \{M\} + \{\Phi^p\} \quad (111)$$

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial \Phi^p} \right\} = \{A^p\} = \{M\} - [H(D)] \{\Phi^p\} \quad (112)$$

A função de escoamento pode então ser determinada como se apresenta em sequência.

$$f^p = |A^p| - (1 - d)k_0 \leq 0 \text{ ou } f^p = |m - (1 - d)h\Phi^p| - (1 - d)k_0 \leq 0 \quad (113)$$

Em prol de se obter a lei de dano, deriva-se a Equação 110 em relação a variável interna de dano, obtendo-se a Equação 114, cuja lei de evolução é fornecida pela relação apresentada na Equação 115, salientando que  $A^d$  é a força motriz, ou seja, a força impulsionadora da fissuração.

$$\left\{ \frac{\partial G_b}{\partial d} \right\} = \{A^d\} = \begin{cases} \frac{Lm_i^2}{6EI(1 - d_i)^2} - \frac{dI(d)}{dd} + \frac{1}{2} h(\Phi_i^p)^2 \\ \frac{Lm_j^2}{6EI(1 - d_j)^2} - \frac{dI(d)}{dd} + \frac{1}{2} h(\Phi_j^p)^2 \end{cases} \quad (114)$$

$$\begin{cases} \dot{d} = 0 \text{ se } y < R \\ y = R \text{ se } \dot{d} > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \dot{d} = 0 \text{ se } \frac{1}{2} \frac{Lm^2}{3EI(1-d)^2} - \frac{dI(d)}{dd} + \frac{1}{2} h(\Phi^P)^2 < 0 \\ \frac{1}{2} \frac{Lm^2}{3EI(1-d)^2} - \frac{dI(d)}{dd} + \frac{1}{2} h(\Phi^P)^2 = 0 \text{ se } \dot{d} > 0 \end{cases} \quad (115)$$

Nesse ponto é essencial ressaltar que de acordo com o que foi detalhado na revisão bibliográfica do presente modelo, tem-se que, em linhas gerais, a ideia principal das formulações termodinâmicas é propor potenciais que sejam capazes de modelar e fornecer as relações constitutivas da mecânica clássica de pórticos. Pode-se notar, portanto, que a problemática emergente se refere ao fato de que na formulação apresentada no item 7.3.7, a lei de dano não apresenta correspondência de forma direta com o modelo clássico, sendo necessário reescrever essa lei de dano (Equação 109) para que, de fato, ambas relações sejam idênticas, fornecendo uma análise estrutural que coincida seja pelo caminho estruturado pela Teoria do Dano Concentrado ou pelo fornecido pela Termodinâmica de Pórticos.

Observa-se que a principal diferença entre os modelos se encontra no termo extra de encruamento ( $\frac{1}{2} h(\Phi^P)^2$ ) derivado do método da Termodinâmica de Pórticos. Propõe-se, dessa forma, avaliar quais possíveis diferenças ou semelhanças a consideração de tal termo adicional proveniente diretamente do potencial de Gibbs, apresentado pela Equação 110, pode causar em análises do comportamento mecânico das estruturas, buscando investigar a influência desse termo que agora compõe a lei de dano.

## 8.2 TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA E EQUAÇÃO DE RESISTÊNCIA À FISSURAÇÃO

Uma vez que a lei de dano não é equivalente à do modelo clássico, constata-se que a relação que define a taxa de liberação de energia deve ser definida de forma a exista concordância com o apresentado pela Equação 115, ou seja, a relação existente entre o dano  $d$  e a taxa de liberação de energia  $y$  apresentada no item 7.1.3 é distinta e passa a considerar a presença do termo de encruamento. Assim, a taxa de liberação de energia de um elemento estrutural em análise passa a ter a forma da Equação 116.

$$y_d = \frac{F^0 m^2}{2(1-d)^2} + \frac{1}{2} h(\Phi^P)^2 = \frac{Lm^2}{6EI(1-d)^2} + \frac{1}{2} h(\Phi^P)^2 \quad (116)$$

Por conseguinte, a equação de resistência à fissuração deve se adequar e representar de forma precisa a taxa de liberação de energia como uma função do dano, respeitando o critério de Griffith durante o processo de propagação do dano, onde, como já mencionado, os valores da taxa de liberação de energia são iguais aos valores de resistência fornecidos por uma função  $R(d)$ . Uma alternativa para a nova equação da resistência à fissuração que seja capaz de retratar apropriadamente essa relação assume a forma da Equação 117.

$$R(d) = \frac{R_0 e^{qd}}{(1-d)} \quad (117)$$

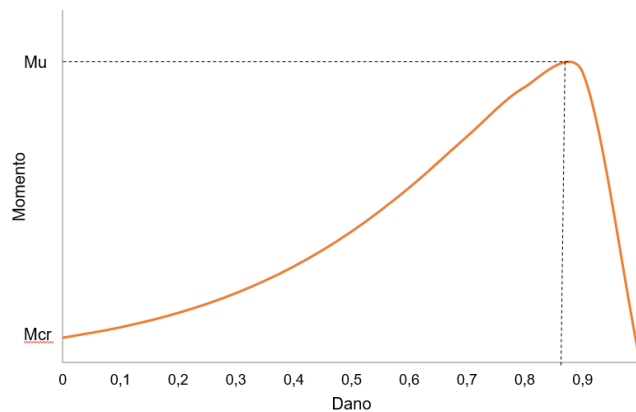
Por essa equação, tem-se que quando não há fissuração ( $d = 0$ ), a resistência possui um valor de resistência inicial  $R_0$ , enquanto que durante a evolução dessa ( $d > 0$ ) ocorre um incremento no valor de resistência.

Dessa forma, ao aplicar o critério de Griffith ( $y_d = R(d)$ ) tem-se uma relação direta entre momento e dano, expressa pela Equação 118.

$$m^2 = \frac{2R_0 e^{qd}}{F^0} (1-d) + \frac{1}{2} \frac{h(\Phi^p)^2 (1-d)^2}{F^0} \quad (118)$$

A Figura 24 demonstra tal relação, a qual, como pode-se perceber, é distinta da relação apresentada pela Figura 22 no item 7.1.3, mas, ainda assim, quando o momento vale o momento crítico, o dano assume o valor de zero, e quando vale o momento último, o dano possui o valor de dano último  $d_u$ .

**Figura 24** – Momento em função do dano para o novo modelo.



Assim sendo, o termo  $I(D)$  considerado no potencial de Gibbs adotado, pode agora ser determinado, integrando a Equação 117 e obtendo a Equação 119, onde  $Ei$  é uma função exponencial integral ( $Ei(x) = \int \frac{e^t}{t} dt$ ) e  $c$  é uma constante de integração.

$$I(D) = -R_0 e^q Ei(q(d-1)) + c \quad (119)$$

O potencial reescrito assume, então, a seguinte forma:

$$G_b = \frac{1}{2} \{M\}^T [F(D)] \{M\} + \{M\}^T \{\Phi^p\} - \frac{1}{2} \{\Phi^p\}^T [H(D)] \{\Phi^p\} + R_0 e^q Ei(q(d-1)) + c \quad (120)$$

Além disso, a lei de evolução do dano pode também ser reescrita conforme mostra-se:

$$\begin{cases} \dot{d} = 0 \text{ se } y_d < R \\ y_d = R \text{ se } \dot{d} > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \dot{d} = 0 \text{ se } \frac{1}{2} \frac{Lm^2}{3EI(1-d)^2} - \frac{R_0 e^{qd}}{(1-d)} + \frac{1}{2} h(\Phi^P)^2 < 0 \\ \frac{1}{2} \frac{Lm^2}{3EI(1-d)^2} - \frac{R_0 e^{qd}}{(1-d)} + \frac{1}{2} h(\Phi^P)^2 = 0 \text{ se } \dot{d} > 0 \end{cases} \quad (121)$$

### 8.3 CÔMPUTO DOS PARÂMETROS $R_0$ , $q$ , $h$ E $k_0$

Em virtude da contemplação da nova lei de dano, determina-se um sistema de equações que permita definir os valores dos parâmetros  $R_0$  e  $q$  presentes em  $R(d)$  e de  $h$  e  $k_0$  da função do escoamento.

Levando em conta que tanto o momento quanto as rotações plásticas podem ser considerados como funções que dependem do dano, ou seja,  $m(d)$  e  $\Phi^P(d)$ , respectivamente, deriva-se a lei de dano (LD) em relação a variável do dano e iguala-se a zero, em concordância com o que se é apresentado na Figura 24, e, também, deriva-se a lei de plasticidade (LP) em relação ao dano. Com ambas relações é possível isolar a relação que expressa a derivada do momento em relação ao dano, como mostra a Equação 122.

$$\frac{dm(d)}{dd} = \frac{R_0(1-d)(dq - q - 1)e^{qd} - ((1-d)^2\Phi^P(d)(h\Phi^P(d) - k_0)) - F^0m(d)^2}{((d-1)\Phi^P(d) - F^0m(d))(1-d)} \quad (122)$$

Define-se então um sistema de equações não lineares, conforme apresenta-se a seguir, que possibilitam a obtenção dos parâmetros  $R_0$ ,  $q$ ,  $h$  e  $k_0$  bem como dos valores de dano plástico  $d_p$  e dano último  $d_u$ , sistema que é resolvido por meio de uma solução numérica considerando o método dos mínimos quadrados com a finalidade de minimizar o erro no cálculo dos valores de tais parâmetros.

$$\text{LD: } m(d) = M_{cr} \Rightarrow d = 0 \text{ e } \Phi^P(d) = 0; \quad (123)$$

$$\text{LD: } m(d) = M_u \Rightarrow d = d_u \text{ e } \Phi^P(d) = \Phi_{pu}; \quad (124)$$

$$\text{LD: } m(d) = M_p \Rightarrow d = d_p \text{ e } \Phi^P(d) = 0; \quad (125)$$

$$\text{LP: } m(d) = M_u \Rightarrow d = d_u \text{ e } \Phi^P(d) = \Phi_{pu}; \quad (126)$$

$$\text{LP: } m(d) = M_p \Rightarrow d = d_p \text{ e } \Phi^P(d) = 0; \quad (127)$$

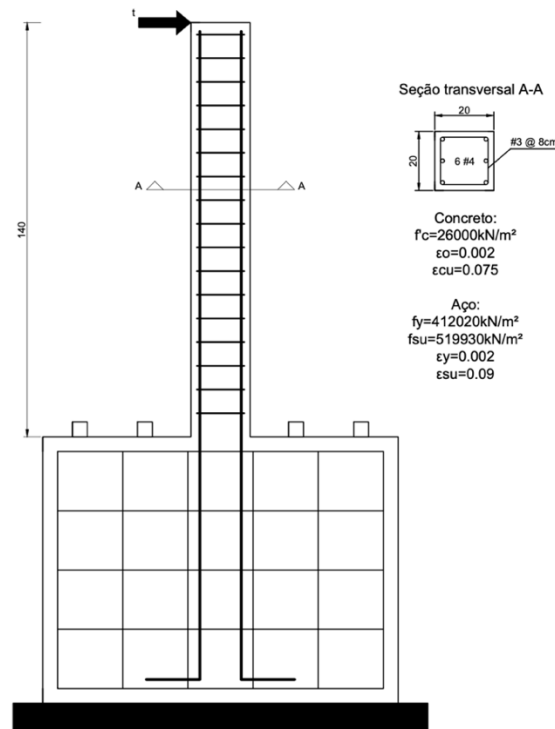
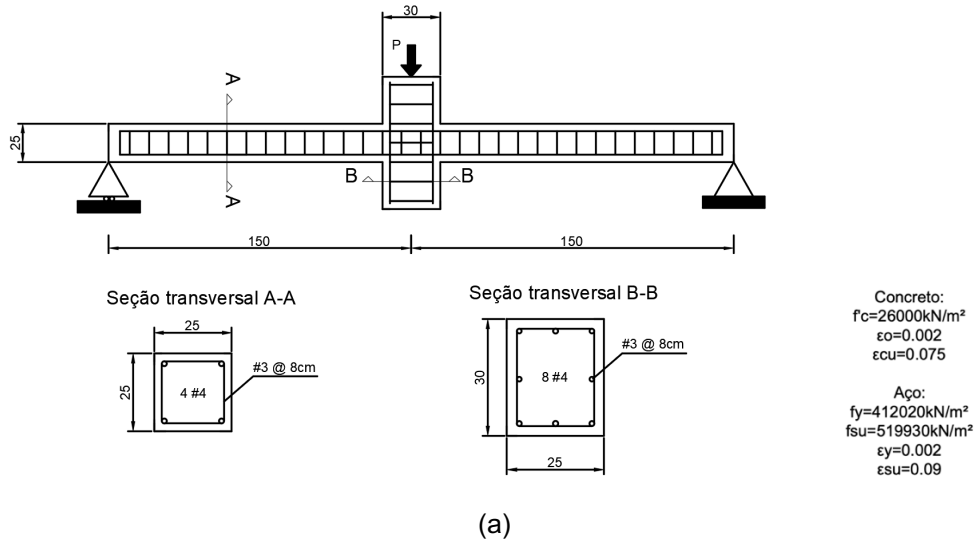
$$\frac{dm}{dd}, \text{ com } m(d) = M_u, d = d_u \text{ e } \Phi^P(d) = \Phi_{pu} \quad (128)$$

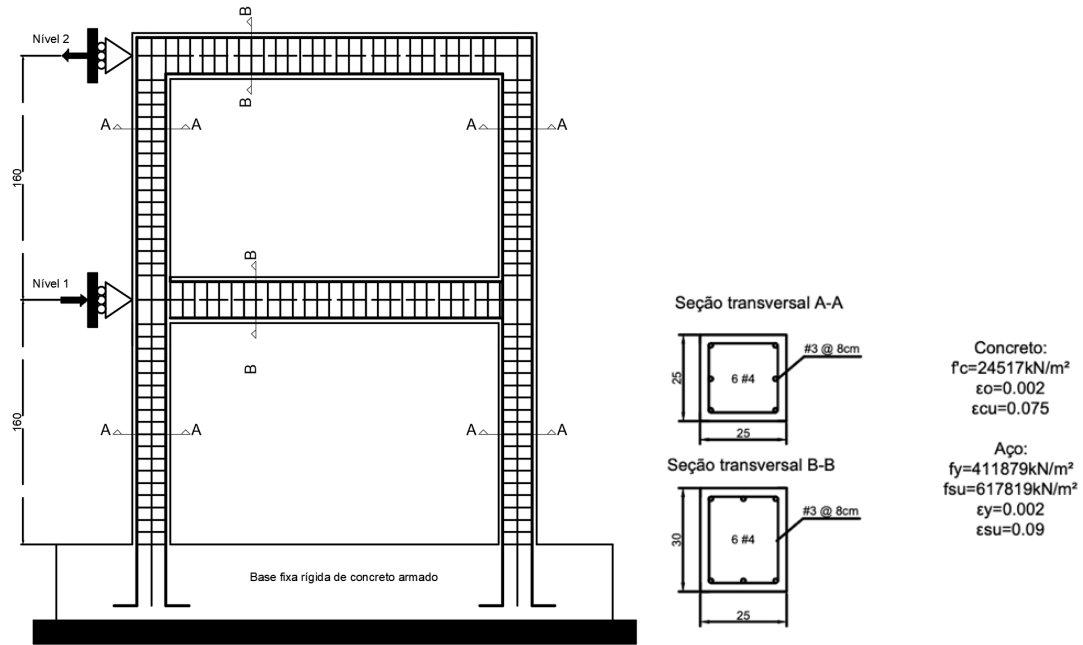
### 8.4 EXEMPLOS PARA ANÁLISE

Buscou-se na literatura exemplos de estruturas que fornecessem os resultados experimentais de ensaios monossinal, com o propósito de avaliar se o modelo é capaz de se aproximar à realidade física.

Dessa forma, na Figura 25a tem-se um esquema que representa uma junção viga-coluna submetida à flexão; na 25b uma coluna com base rígida fixa em concreto armado e na 10c um pórtico de dois níveis, sendo que tais exemplos foram retirados de Flórez-López, Marante e Picón (2015).

**Figura 25** – (a) Esquema que representa junção viga-coluna submetida à flexão; (b) Coluna com base rígida fixa e propriedades dos materiais; (c) Pórtico de dois níveis e suas propriedades.





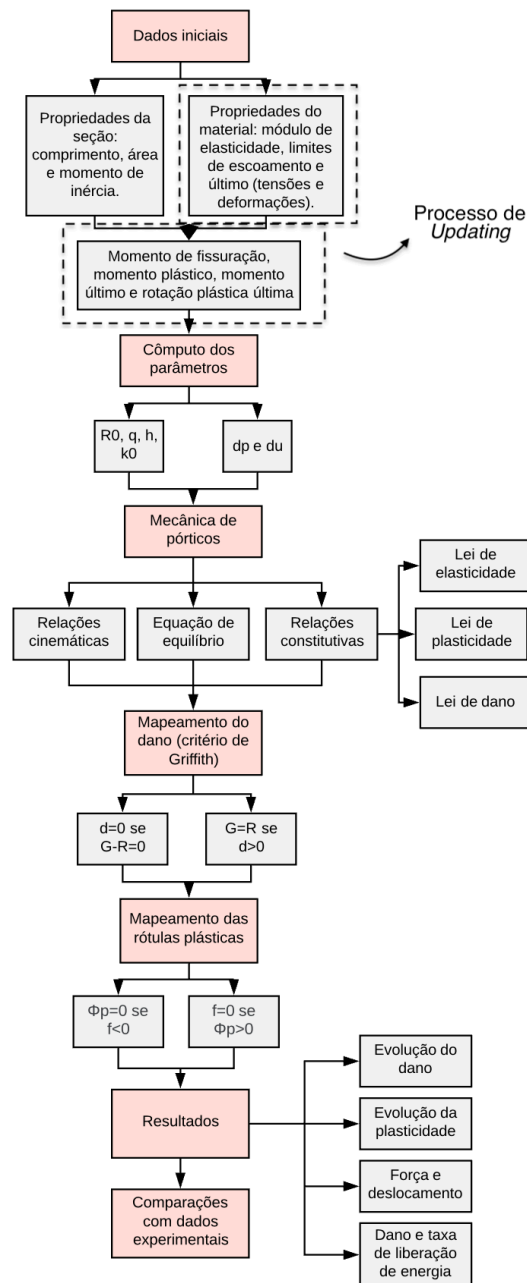
(c)

Fonte: Adaptado Flórez-López, Marante e Picón (2015)

## 8.5 ANÁLISE COMPARATIVA

As simulações numéricas são realizadas utilizando um programa de álgebra computacional, considerando, primeiramente o modelo elastoplástico com dano baseado na termodinâmica de pórticos e, posteriormente, considerando o modelo de dano concentrado, sendo que ambas simulações seguem o procedimento sintetizado na Figura 26.

**Figura 26** – Síntese do processo das simulações para ambos os modelos.



Para os valores iniciais de entrada referentes as propriedades dos materiais e consequente valores que descrevem o comportamento mecânico das estruturas quando submetido a carregamentos (momento crítico, plástico e último, bem como rotação plástica última) adotou-se o procedimento amplamente utilizado e conhecido como *Updating*, o qual, de acordo com Kim e Park (2004), requer que as correlações entre resultados experimentais e analíticos sejam satisfatórios e que sejam capazes de manter relevância física dos valores dos parâmetros que passaram por esse procedimento. De acordo com os mesmos autores, o processo é usualmente feito por tentativa e

erro, demandando um discernimento acurado para a determinação dos valores em questão, sendo selecionados com a finalidade de corrigir erros de modelagem e aprimorar a mesma, ajustando-a, assim, aos dados experimentais.

Agregado a isso, leva-se em conta que os modelos propostos precisam considerar a incerteza proveniente de várias fontes possíveis, onde a forma de *Updating* almeja reduzir tal incerteza, englobando técnicas de otimização para ajustar os parâmetros necessários de forma que o modelo a ser implementado coincida da melhor forma com as propriedades observadas (CHEN e EL-METWALLY, 2011).

Desse modo, uma vez conhecido tais resultados experimentais, torna-se possível sobrepor as informações provenientes das simulações realizadas e avaliar como tanto o modelo clássico quanto o novo que está sendo proposto se ajusta à tais dados.

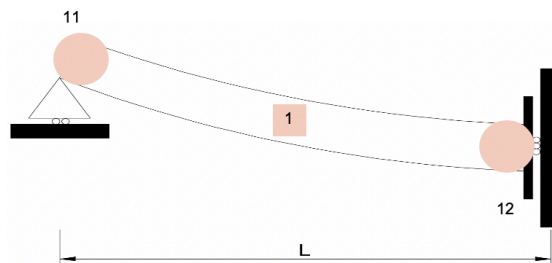
## 9 RESULTADOS E DISCUSSÕES DA PARTE II

Com o propósito da validação do modelo apresentado, extrai-se dados que viabilizam a análise do comportamento mecânico das estruturas apresentadas anteriormente, com base em todos os conceitos expostos e relações determinadas.

### 9.1 ANÁLISE DA JUNÇÃO VIGA-COLUNA SUBMETIDA À FLEXÃO

Como se trata de uma estrutura simétrica, a modelagem feita considerou apenas um elemento e dois nós, conforme mostra a Figura 27.

**Figura 27** – Esquema que representa modelagem da junção viga-coluna



Inserido os dados iniciais referentes às características da seção, por meio do processo de Updating definiu-se os demais valores de entrada para ambos os modelos em estudo: o modelo baseado na termodinâmica de pórticos (MTP) e o modelo baseado na teoria do dano concentrado (MDC), como pode ser contrastado na Tabela 2.

**Tabela 2** - Comparativo entre os valores de entrada utilizados para cada simulação.

Parâmetro	MDC	MTP
E (TN /m <sup>2</sup> )	1,904640000.10 <sup>7</sup>	2,342156760.10 <sup>7</sup>
Mcr (TN.m)	5,625	5,625
Mp (TN.m)	17,4975	20,4975
Mu (TN.m)	31,76	29,76
$\Phi_{pu}$	0,029	0,029

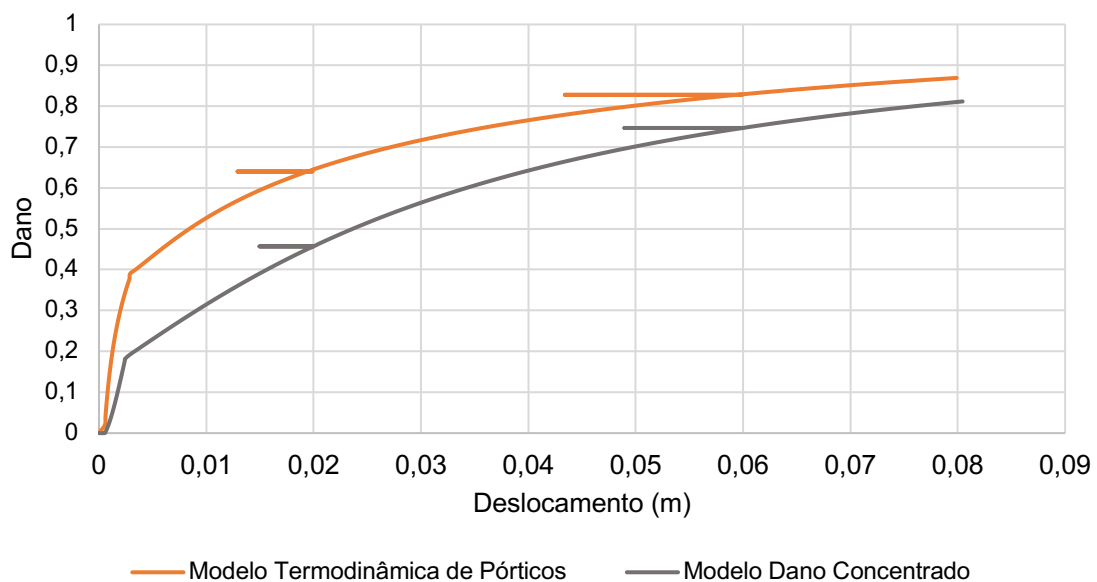
A Tabela 3 mostra os valores obtidos de cada parâmetro tanto para o MDC quanto para o MTP.

**Tabela 3** – Parâmetros de cálculo  $R_0$ ,  $q$ ,  $h$  e  $k_0$  de cada simulação bem como valores de dano plástico e último.

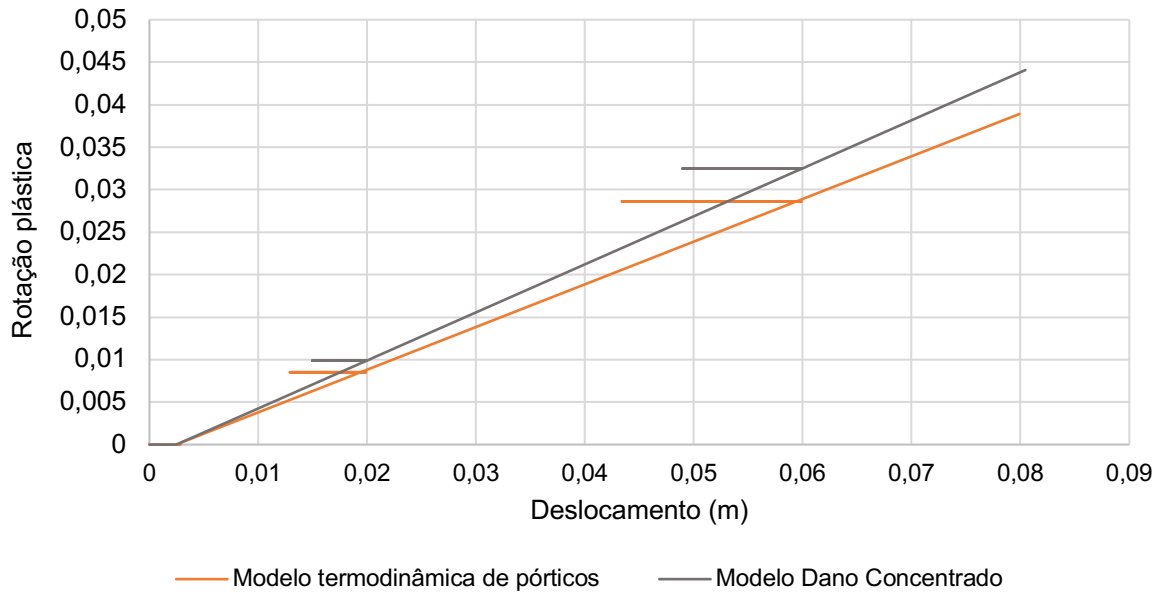
Parâmetro	MDC	MTP
$R_0$ (TN.m)	$0,1275831652 \cdot 10^{-2}$	$0,1037505278 \cdot 10^{-2}$
$q$	-0,1100880655	7,51214846444771
$h$ (TN.m)	2931,852662	4992,92225396563
$k_0$ (TN.m)	19,64081248	29,9379903045581
$d_p$	0,1091254492	0,315337637317892
$d_u$	0,6289429661	0,829683205471710

Ao incrementar o valor de deslocamento ( $w_2$ ) no nó 12, determina-se o fim do passo elástico com o aparecimento de dano no mesmo local, e em sequência, quando o limite de escoamento é atingindo, ocorre o surgimento da plasticidade. As Figuras 28 e 29 demonstram a evolução do dano e da plasticidade, respectivamente, de acordo o aumento do deslocamento para ambos os modelos em análise.

**Figura 28** – Gráfico de dano por deslocamento.



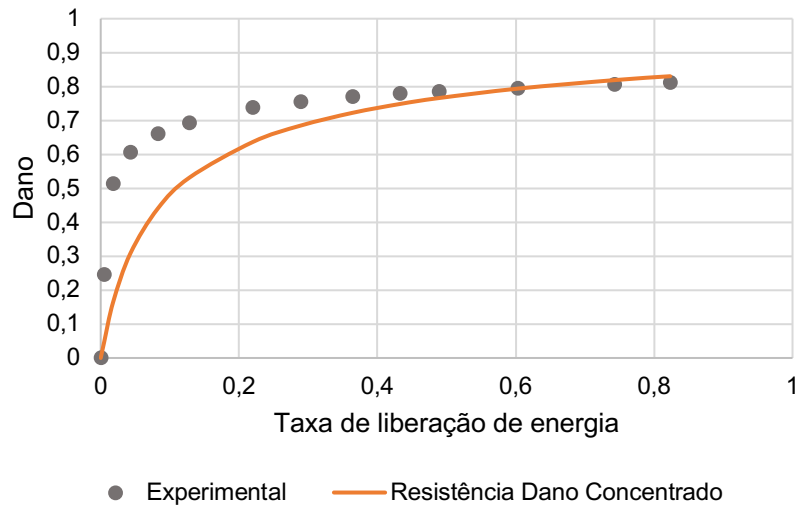
**Figura 29** – Gráfico das rotações plásticas por deslocamento.



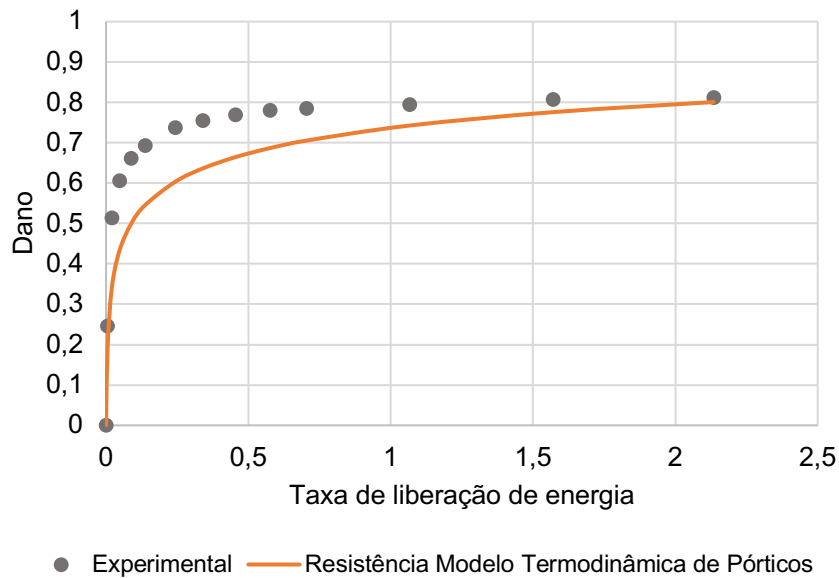
Os valores de dano no novo modelo assumem uma margem de variação distinta do modelo clássico, ou seja, enquanto que no clássico os valores de dano plástico geralmente variam entre 0,1-0,3 e os de dano último entre 0,6-0,65, nos valores por meio da termodinâmica de pórticos tem-se uma faixa entre 0,3-0,5 para dano plástico e 0,7-0,85 para o último.

Se estabelece, então, uma relação entre dano e taxa de liberação de energia, obtendo essa por intermédio dos dados experimentais e também calculando-a por meio da equação de resistência à fissuração, com a finalidade de comparar se a equação agora proposta se aproxima daquilo que se é obtido pelo ensaio realizado. Na Figura 30 (a) tem-se a relação que a Equação 59 é capaz de fornecer e para contrastar, na Figura 30 (b), se apresenta a relação dada pela nova função (Equação 117).

**Figura 30** – Gráfico de dano por taxa de liberação de energia para os modelos de (a) Dano Concentrado (b) Termodinâmica de Pórticos.



(a)

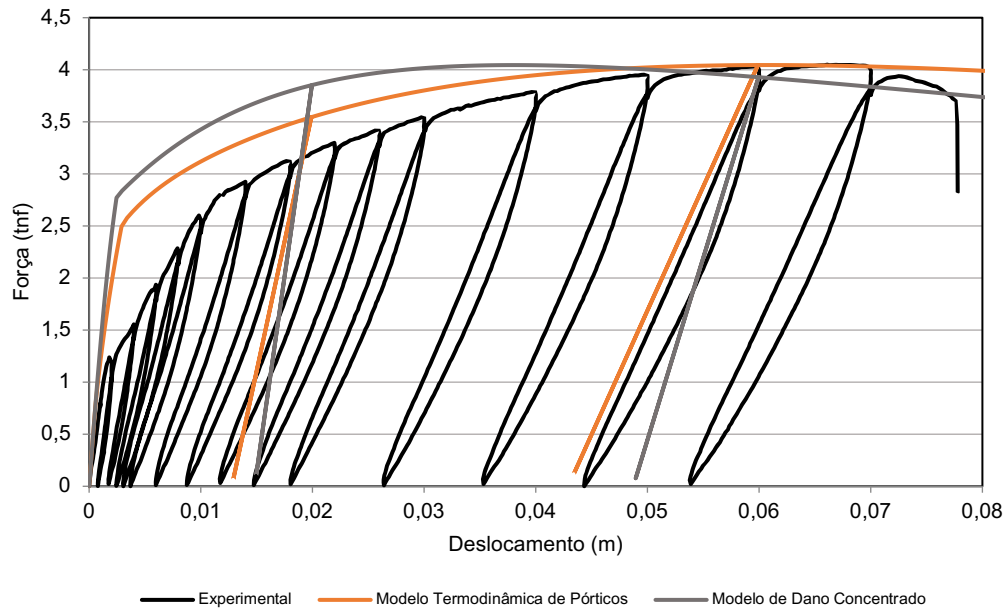


(b)

No novo modelo, nos valores de taxa liberação de energia é acrescido o termo extra de encruamento  $(\frac{1}{2}h(\Phi^P)^2)$ , sendo essa a razão pela qual os valores são superiores quando comparados ao modelo clássico. A equação de resistência utilizada fornece um ajuste adequado quando comparado aos valores experimentais.

Já na Figura 31 tem-se como ambos modelos descrevem o comportamento mecânico de acordo com o progresso do deslocamento, sendo capazes de retratar a perda de rigidez da estrutura, como pode ser observado ao longo de cada descarga elástica realizada, o que se torna possível devido a consideração da existência e evolução da própria variável de dano.

**Figura 31** – Gráfico de dano por taxa de liberação de energia.



## 9.2 ANÁLISE DA COLUNA DE BASE RÍGIDA

A Tabela 4 sintetiza novamente o processo de *Updating* aplicado para a determinação dos dados de entrada.

**Tabela 4-** Comparativo entre os valores de entrada utilizados para cada simulação.

Parâmetro	MDC	MTP
$E$ (kN/m <sup>2</sup> )	$8,250000002 \cdot 10^6$	$1,425000000 \cdot 10^7$
$M_{cr}$ (kN.m)	4,004	4,004
$M_p$ (kN.m)	24,220	24,220
$M_u$ (kN.m)	31,034	29,034
$\Phi_{pu}$	0,095	0,095

A Tabela 5 mostra os valores dos demais parâmetros.

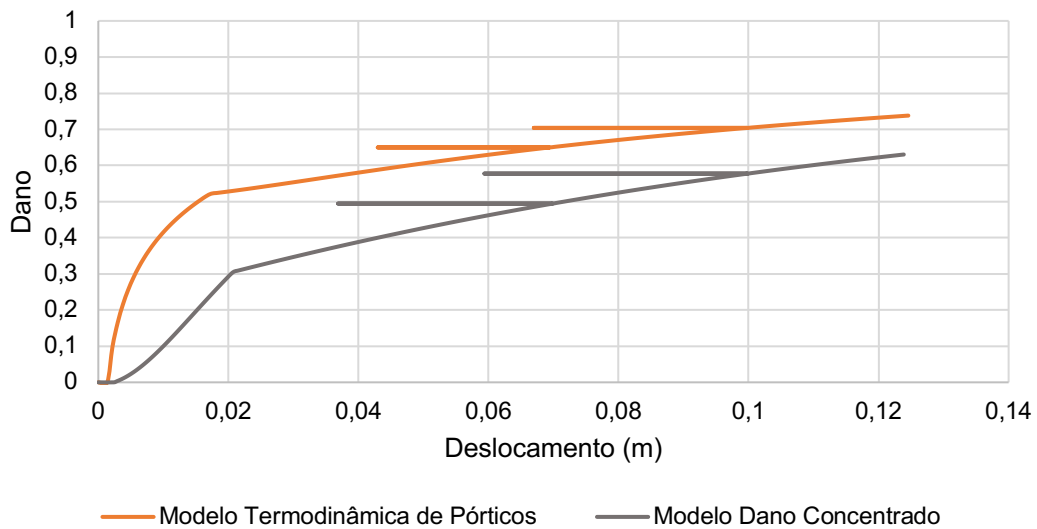
**Tabela 5** - Parâmetros de cálculo  $R_0$ ,  $q$ ,  $h$  e  $k_0$  de cada simulação bem como valores de dano plástico e último.

Parâmetro	MDC	MTP
$R_0$ (kN.m)	$0,3400730667 \cdot 10^{-2}$	$0,1968844070 \cdot 10^{-2}$
$q$	-0,4848134175	8,25951879104348
$h$ (kN.m)	791,5914315	965,404168577073
$k_0$ (kN.m)	34,88102210	49,8997247697324

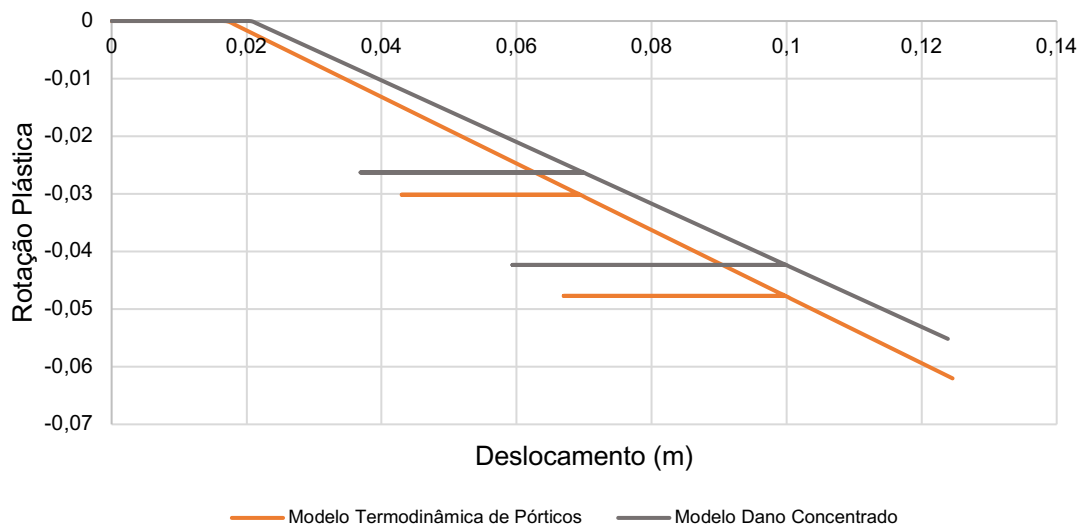
$d_p$	0,3056396133	0,514642116084725
$d_u$	0,6302071019	0,794969835129493

O incremento de deslocamento ( $u_2$ ) foi realizado e bem como no exemplo anterior, mapeou-se primeiramente o surgimento do primeiro valor de dano (na parte engastada) e após avaliou-se a evolução do mesmo juntamente com a evolução da plasticidade, como mostram as Figuras 32 e 33 respectivamente.

**Figura 32** – Gráfico de dano por deslocamento.



**Figura 33** – Gráfico das rotações plásticas por deslocamento.

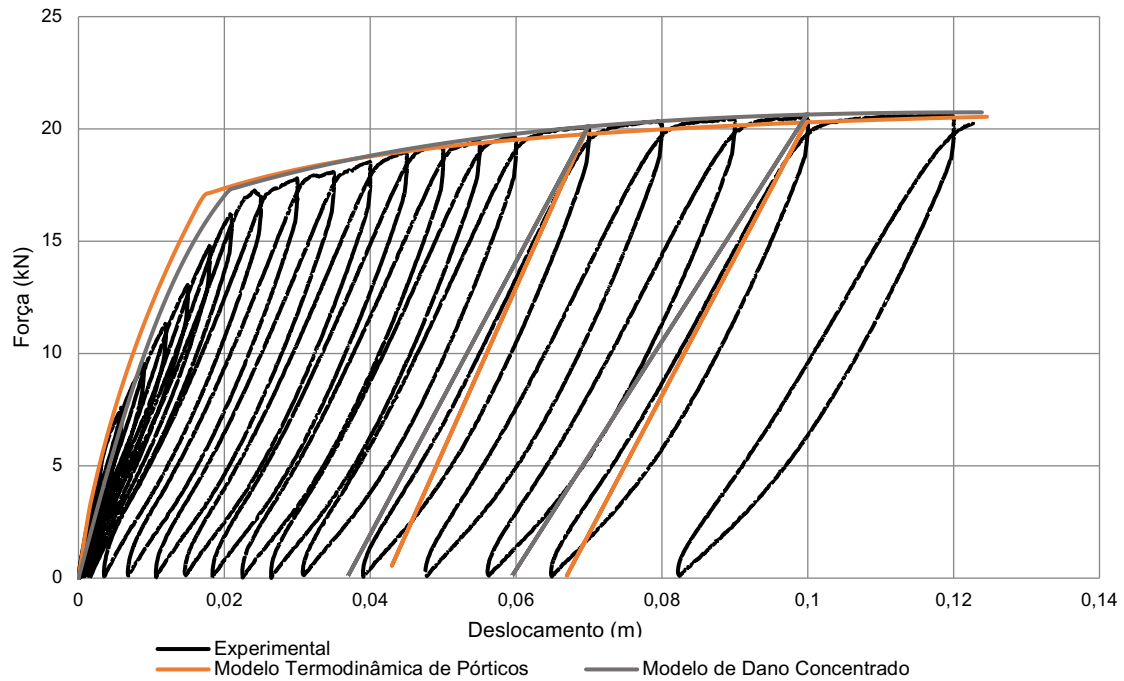


Mais uma vez pode-se notar que os valores de dano plástico e último são discrepantes ao se comparar ambos modelos de cálculo, sendo que no modelo proposto pelo método da

termodinâmica tais valores são superiores, como pode ser observado na Figura 32.

A relação força por deslocamento é apresentada pela Figura 34, mostrando, assim como no exemplo anterior, a degradação da rigidez que ocorre ao se incrementar o deslocamento, representando o efeito da fissuração que evolui ao longo desse processo.

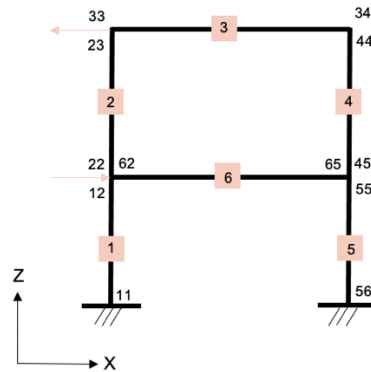
**Figura 34** – Gráfico de força por deslocamento.



### 9.3 ANÁLISE DO PÓRTICO DE DOIS NÍVEIS

Na análise relativa a esse exemplo, a simulação considerou que no primeiro nível a estrutura era empurrada (direção positiva do eixo x) e ao mesmo tempo puxada no segundo nível (direção negativa do mesmo eixo), conforme mostra o esquema representativo dos elementos e nós na Figura 35.

**Figura 35** – Representação da estrutura, com seus respectivos nós e elementos.



Os dados de entrada são justificados e comparados na Tabela 6, enquanto que na Tabela 7 tem-se os produtos obtidos para cada parâmetro.

**Tabela 6** - Comparativo entre os valores de entrada utilizados para cada simulação.

Parâmetro	MDC		MTP	
	Vigas	Pilares	Vigas	Pilares
$E$ (tn/m <sup>2</sup> )	$7,928888889 \cdot 10^6$	$4,586666667 \cdot 10^6$	$8,106666667 \cdot 10^6$	$8,540160001 \cdot 10^6$
$M_{cr}$ (kN.m)	25,316	15,2177	25,316	15,2177
$M_p$ (kN.m)	48,6192	39,44	58,6192	40,44
$M_u$ (kN.m)	75,005	72,6192	80,005	78,6192
$\Phi_{pu}$	0,275	0,336	0,275	0,336

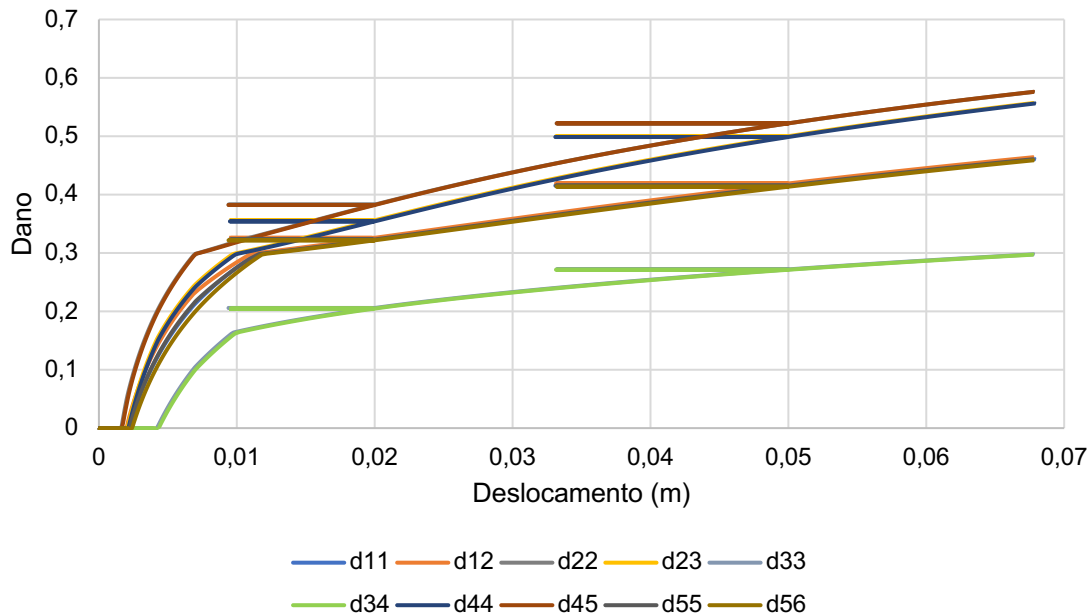
**Tabela 7**- Parâmetros de cálculo  $R_0$ ,  $q$ ,  $h$  e  $k_0$  de cada simulação bem como valores de dano plástico e último.

Parâmetro	MDC		MTP	
	Vigas	Pilares	Vigas	Pilares
$R_0$ (kN.m)	$0,574798077 \cdot 10^{-1}$	$0,2393575125 \cdot 10^{-1}$	$0,5621928560 \cdot 10^{-1}$	$0,2221375476 \cdot 10^{-1}$
$q$	-1,349676028	-1,472740264	6,82648145311432	7,74384657271205
$h$ (kN.m)	661,6001508	536,5416752	1386,79864478986	1349,45477249086
$k_0$ (kN.m)	56,18754316	43,88873470	83,5104012823473	57,6318879656320
$d_p$	0,1346978842	0,1013639313	0,29806685266177	0,29830615990794
$d_u$	0,6200193222	0,6276408546	0,80639148327918	0,84616226351614

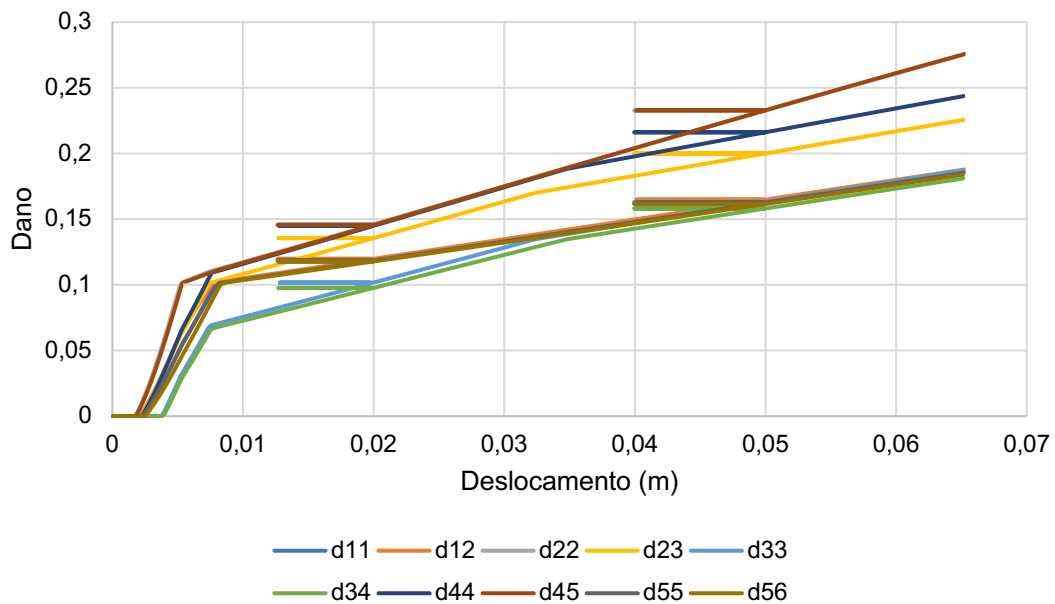
Na realização da simulação, considerou-se os deslocamentos  $u_2$  e  $u_3$  ocorrendo de maneira simultânea e o surgimento do dano se deu primeiramente nos elementos de pilares (os quais possuem rigidez inferior às vigas), sendo na seguinte sequência de aparecimento: rótula 22, 45, 12,

23, 44, 55, 11, 56, 33 e 34. A Figura 36 demonstra a evolução da variável de dano para cada rótula, tanto para o novo modelo quanto para o clássico.

**Figura 36** – Gráfico de dano por deslocamento para (a) Modelo Termodinâmica de Pórticos e (b) Modelo De dano concentrado.



(a)

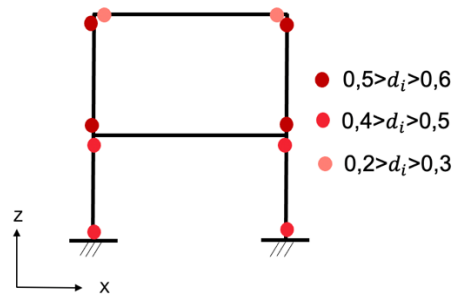


(b)

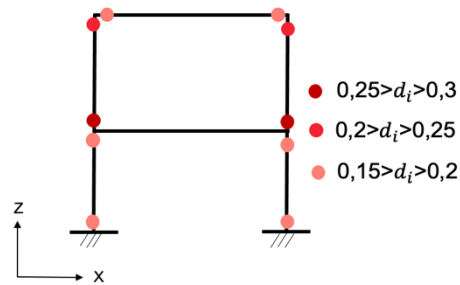
A fim de melhor ilustrar tais valores de evolução de dano, tem-se o mapa de danos da estrutura para cada caso, conforme pode ser visto na Figura 37. Nota-se que apesar de que os modelos possuem escalas diferentes de danificação, o surgimento e a evolução desse fenômeno

segue a mesma tendência, ou seja, as rótulas mais danificadas tendem em ser as mesmas em ambas simulações.

**Figura 37** – Mapa de danos para (a) Modelo Termodinâmica de Pórticos e (b) Modelo De dano concentrado.



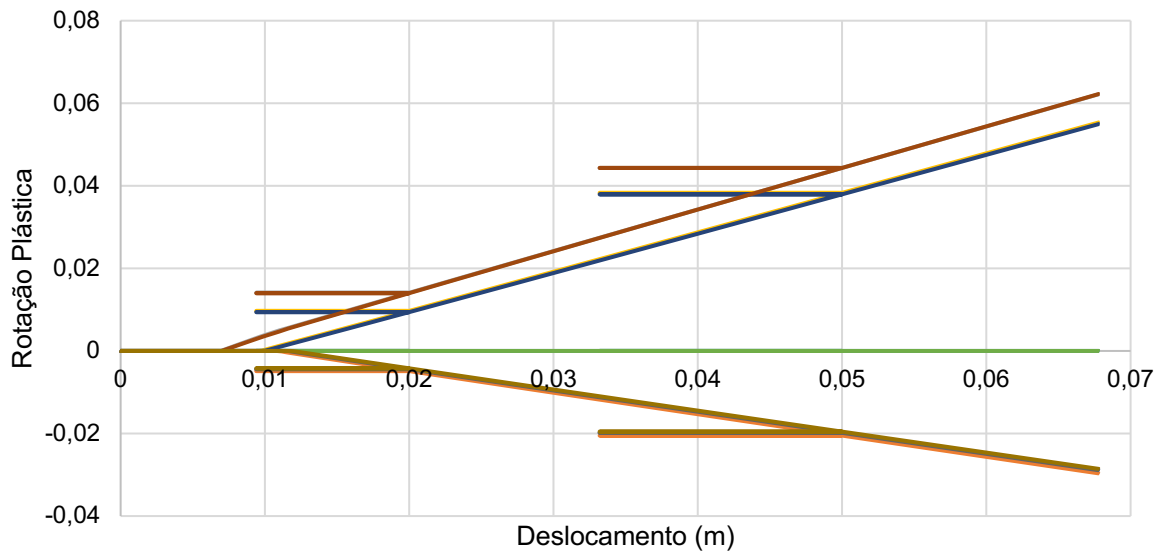
(a)



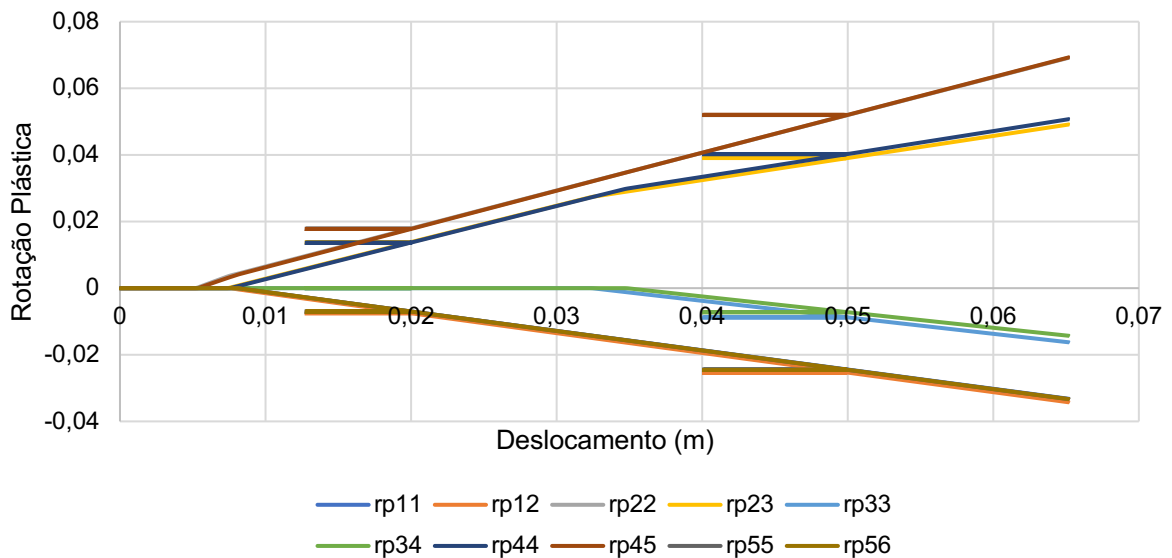
(b)

A ordem sequencial do aparecimento da plasticidade se deu no mesmo sentido que o aparecimento do dano, entretanto, diferentemente do modelo clássico, na simulação considerando o modelo novo a plasticidade nas rótulas 33 e 34 não foram ativadas até o valor de deslocamento considerado, assumindo, por essa razão, o valor de zero conforme pode ser visto na Figura 38 (a). A evolução do fenômeno da plasticidade pode então ser vista para os respectivos modelos.

**Figura 38** – Gráfico de dano por deslocamento para (a) Modelo Termodinâmica de Pórticos e (b) Modelo De dano concentrado.



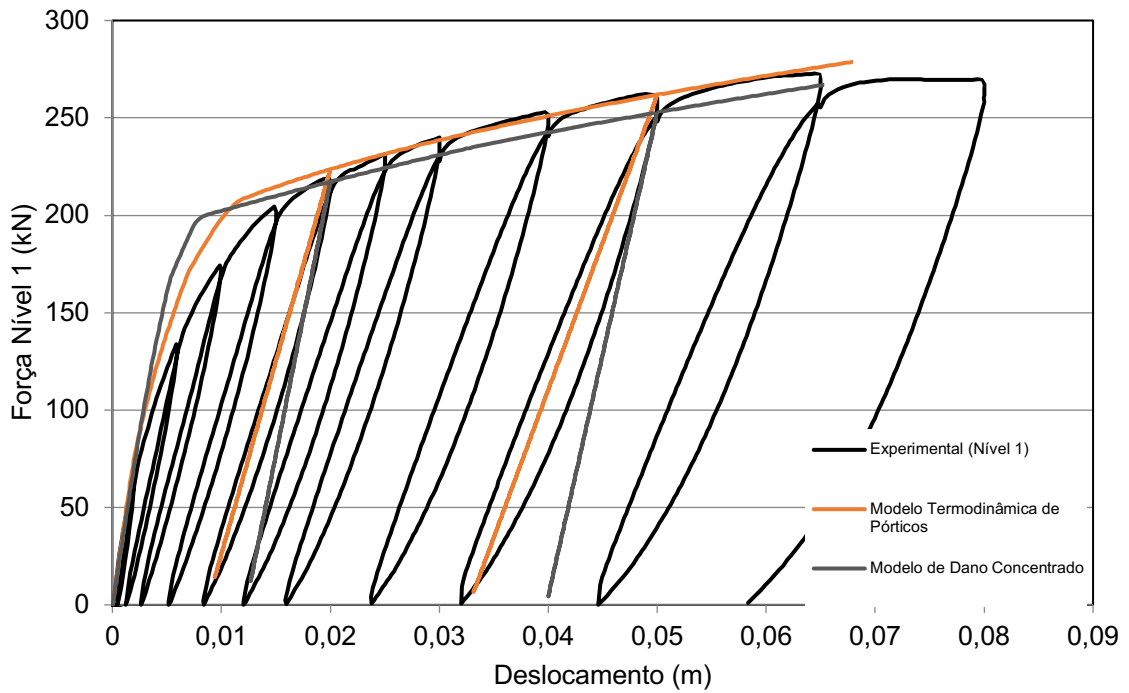
(a)



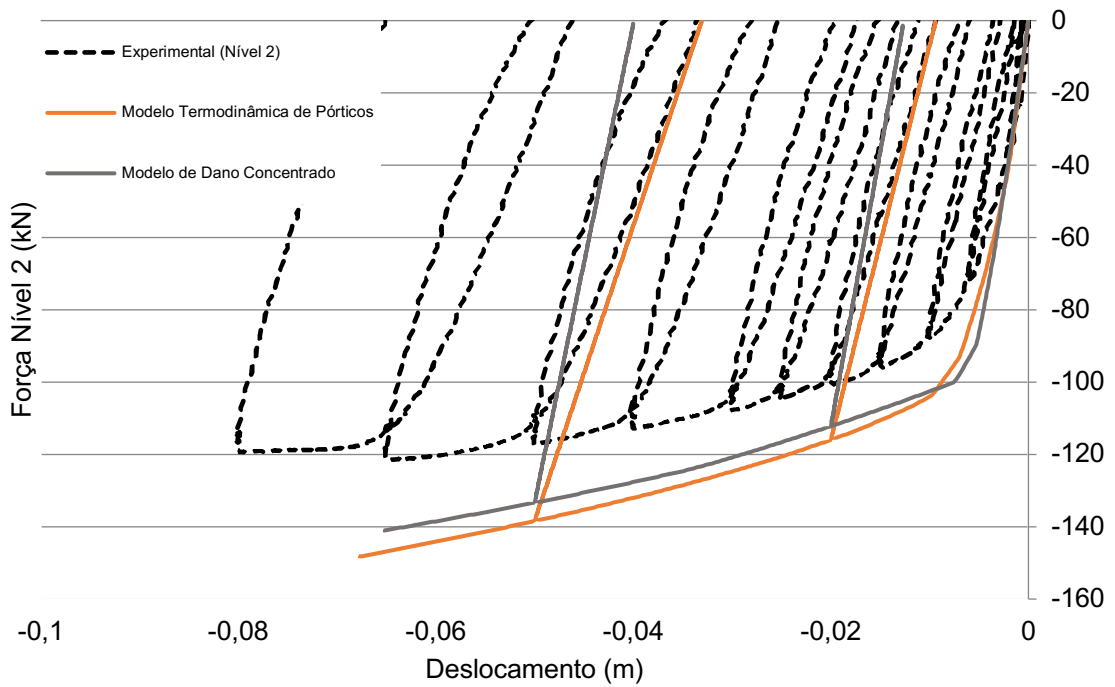
(b)

Para ambos os níveis foi possível estabelecer a relação entre força deslocamento, quantificando mais uma vez a perda de rigidez decorrente ao crescimento da fissuração na estrutura. Na Figura 30 (a) tem-se a relação para o nível 1 e na (b) para o nível 2.

**Figura 39** – Gráfico de força por deslocamento (a) Modelo novo e (b) Modelo clássico.



(a)



(b)

## 10 CONCLUSÕES

Referente ao modelo para pórticos de aço sujeitos a fadiga, apresentado na Parte I, tem-se que o estudo realizado apresenta uma nova perspectiva da mecânica do dano para prever a iniciação, fechamento e propagação de fissuras em pórticos de aço submetidos a ultra baixo, baixo e alto ciclo, seja sob circunstâncias estacionárias ou não estacionárias. De fato, as duas principais fases características do mecanismo de fadiga, de início e então de propagação de fissura, puderam ser descritas pela introdução da nova variável de pré-dano e pela lei de evolução do dano, respectivamente. Tais considerações viabilizam a análise do processo de deterioração da estrutura, quantificando a perda de rigidez e resistência.

Os valores acumulados de rotações plásticas, momentos fletores e de taxa de acumulação de energia traduziram os efeitos mais relevantes dos possíveis tipos de fadiga. Ademais, pela introdução do novo conceito de amplitudes médias, a generalização dos valores de amplitudes pôde ser realizada, o que permite que o estudo seja abrangente.

O modelo se demonstra como uma boa aproximação inicial para o propósito ao qual foi designado, todavia, mesmo que as implementações numéricas feitas demonstrem a inovação da variável de pré-dano, bem como sua importância para previsão da vida geral de fadiga em elementos submetidos a flexão, a fim de se obter uma validação com um nível de confiança maior, estudos e experimentos adicionais que somem ao conteúdo exposto seriam necessários para justificar a evolução da fissura proveniente do mecanismo da fadiga como um fenômeno predominante na prática da mecânica do dano.

Já no modelo para pórticos de concreto armado, apresentado na Parte II, foi possível estabelecer uma nova lei de dano proposta e estruturada por intermédio de considerações e leis fundamentadas na ciência da termodinâmica. A nova proposição, mesmo fundamentada por um caminho distinto do MDC, o qual é baseado no conceito de energia potencial complementar, possui considerações em comum com esse.

Todavia, o novo modelo exigiu algumas ponderações distintas do MDC, como a relação de taxa de liberação de energia ao longo da evolução do dano e conseqüentemente a função que descrevesse o vínculo existente entre ambas variáveis. Por intermédio das simulações, notou-se que a equação de resistência proposta para esse fim se demonstrou como uma alternativa satisfatória. Ademais, tal equação de resistência utilizada pelo MTP não só fez com que o potencial de Gibbs fosse reescrito como demandou relações que permitissem o cômputo dos parâmetros de cálculo existentes.

Para o processo final de validação da nova lei de dano do MTP, destaca-se que a principal diferença pertinente demonstrada nos resultados fornecidos entre ambos os modelos se encontra nos valores atingidos de dano plástico e último, uma vez que o MTP fornece uma faixa de valores superiores ao MDC: enquanto os valores típicos de dano plástico e último para o MDC variam entre

0,1-0,30 e 0,6-0,65 respectivamente, o MTP apresenta valores que variam de 0,3-0,5 para o dano plástico e de 0,7-0,85, aproximadamente, para o dano último.

Entretanto, pelas relações de força e deslocamento obtidas pode-se notar que essa diferença se dá justamente devido ao fato de que os modelos possuem descrições do comportamento da variável de dano que são distintas.

## REFERÊNCIAS

- ABAQUS 6.12 UEL: User Subroutine to Define an Element. Abaqus User Subroutines Reference Manual, 2012. Disponível em: <<http://130.149.89.49:2080/v6.12/books/sub/default.htm?startat=ch01s01asb28.html>>. Acesso em: 01 Maio 2020.
- AMORIM, David Leonardo Nascimento de Figueiredo. **On the lumped damage mechanics for nonlinear structural analyses: new developments and applications**. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo. São Carlos. 2016.
- ARMSTRONG, P. J.; FREDERIC, C. O. **A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger Effect**. Berkeley Nuclear Laboratories. [S.l.]. 1966.
- BAI, Y.; NARDI, D. C.; PICÓN, R. A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. **A new comprehensive model of damage for flexural subassemblies prone to fatigue**. No prelo.
- BAI, Y.; KURATA, M.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Macromodeling of Crack Damage in Steel Beams Subjected to Nonstationary Low Cycle Fatigue. **J. Struct. Eng**, 2016.
- BALLIO, G.; CASTIGLIONI, C. A. A unified approach for the design of steel structures under low and/or high cycle fatigue. **J. Construct. Steel Research**, v. 34, p. 75-101, 1995.
- BARROS, J. **Método dos elementos finitos aplicado a estruturas reticuladas**. [S.l.]. 2004.
- BASARAN, C.; NIE, S. An irreversible thermodynamics theory for damage mechanics of solids. **Internation Journal of Damage Mechanics**, v. 13, p. 120-379, 2004.
- BATE, P. S.; WILSON, D. V. Analysis of the Bauschinger Effect. **Acta metall**, v. 34, 1986.
- BAZÁN, J. A. V.; BECK, A. T.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Random fatigue of plane frames via lumped damage mechanics. **Engineering Structures**, v. 182, p. 301–315, 2019.
- BRANCO, R. C. J. D.; ANTUNES, F. V. Low-cycle fatigue behaviour of 34CrNiMo6 high strength steel. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v. 58, p. 28-34, 2012.
- BRANT, Carlos Alberto Caldeira. **Formulação Termodinâmica do Acoplamento Corrosão-fissuração em Estruturas de Concreto Armado**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana. Foz do Iguaçu. 2019.
- CHEN, W.-F.; EL-METWALLY, S. E.-D. **Understanding Structural Engineering**. New York: CRC Press, 2011.
- DAHMER, Renata Rauber. **Modelo para Análise de Estruturas Submetidas a Solicitações Químico-mecânicas**. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Civil de Infraestrutura) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana. Foz do Iguaçu. 2018.
- ERBERIK, A.; SUCUOGLU, H. Seismic energy dissipation in deteriorating systems through low-cycle fatigue. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 33, p. 49-67, 2004.
- ESLAMI, A.; RONAGH, H. Effect of Elaborate Plastic Hinge Definition on the Pushover Analysis of Reinforced Concrete Buildings. **The Structural Design of Tall and Special Buildings**, Agosto

2012.

- FLOREZ-LÓPEZ, J.; MARANTE, M. E.; PICÓN, R. **Fracture and Damage Mechanics for Structural Engineering of Frames: State-of-the-Art Industrial Applications**. [S.l.]: [s.n.], v. 1, 2015.
- FREED, A. D.; CHABOCHE, J. L. **Viscoplasticity: A Thermodynamic Formulation**. [S.l.]: [s.n.], 1989.
- GALAMBOS, T. V. **Structural Member and Frames**. Mineola: Dover Publications, Inc., 2016.
- GHRIB, F.; TINAWI, R. Nonlinear behavior of concrete dams using damage mechanics. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 121, p. 513-527, 1995.
- HAIFENG, L.; JIANGUO, N. Mechanical behavior of reinforced concrete subjected to impact loading. **Mechanics of Materials**, 2009.
- HAUPT, P. **Thermodynamics of Solids**. University of Kassel, Kassel.: [s.n.], 1993.
- HONG, H.-K.; LIU, C.-S. Internal symmetry in the constitutive model for perfect elastoplasticity. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 35, p. 447-466, 1999.
- KELLY, P. A. **Foundations of Continuum Mechanics: Mechanics Lecture Notes Part III**. Auckland. 2018.
- KIM, G.-H.; PARK, Y.-S. An improved updating parameter selection method and finite element model update using multiobjective optimisation technique, v. 18, p. 59-78, 2004.
- KIRAN, R.; KHANDELWAL, K. A micromechanical cyclic void growth model for ultra-low cycle fatigue. **International Journal of Fatigue**, v. 70, p. 24-37, 2015.
- KRAWINKLER, H.; ZOHREI, M. Cumulative damage in steel structures subjected to earthquake ground motions. **Computers & Structures**, v. 16, p. 531-541, 1983.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. **Mechanics of solid materials**. Nova York: Cambridge University Press, 1990.
- MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. Continuum Damage Theory - Application to concrete. **J. Eng. Mech.**, v. 115, p. 345-365, 1989.
- MCCABE, S. L.; HALL, J. Assessment of Seismic Structural Damage. **Journal of Structural Engineering**, v. 115, p. 2166-2183, 1989.
- MOLIN, D. C. C. V. **Fissuras em Estruturas de Concreto Armado: Análise das manifestações típicas e levantamento de casos ocorridos no estado do Rio Grande do Sul**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 1998.
- MONT'ALVERNE, A. M.; DEUS, E. P.; JUNIOR OLIVEIRA, S. C.; MOURA, A.S. Determination of the Reinforced Concrete Slabs Ultimate Load Using Finite Element Method and Mathematical Programming. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 9, p. 1-22, 2012.
- NAKASHIMA, M.; INOUE, K.; TADA, M. Classification of damage to steel buildings observed in the 1995 Hyogoken-Nanbu earthquake. **Engineering Structures**, Great Britain, v. 20, p. 271-281, 1997. ISSN S0141-0296(97)00019-9.
- NICHOLAS, T. Critical issues in high cycle fatigue. **International Journal of Fatigue**, v. 21, p. S221-S231, 1999.

- PARIS, P.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. **Journal of Basic Engineering**, p. 528-533, 1963.
- PERRY, J.; PERL, M.; SHNECK, R.; HAROUSH, S. The Influence of the Bauschinger Effect on the Yield Stress, Young's Modulus, and Poisson's Ratio of a Gun Barrel Steel. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 128, p. 128-179, 2006.
- PROENÇA, S. P. B. **Fundamentos da Termodinâmica dos Sólidos**. São Carlos. 2000.
- SALMON, C. G.; JOHNSON, J. E. **Steel Structures: design and behavior**. 4ª edição. ed. New York: HaperCollins College Publishers, 1996.
- SOARES, R. C.; MOHAMED, A.; VENTURINI, W. S.; LEMAIRE, M. Reliability analysis of non-linear reinforced concrete frames using the response surface method. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 75, p. 1-16, 2002.
- SOUSA, A. D. C. E.; NUSSBAUMER, A. Multiaxial ultra low cycle fatigue in welded high strength steel structural components. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 153, p. 473-482, 2019.
- VIEIRA, Thamirys Luyze. **Fissuras em concreto: estudos de caso em Florianópolis**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2017.
- YAZDANI, S.; SCHREYER, H. L. Combined plasticity and damage mechanics model for plain concrete. **J. Eng. Mech.**, v. 116, p. 1435-1450, 1990.
- ZHONGUA, L.; HAICHENG, G. Bauschinger Effect and Residual Phase Stresses in Two Ductile-Phase Steels: Part I. The Influence of Phase Stresses on the Bauschinger Effect. **Mettalurgical Transitions A**, v. 21A, Março 1990.
- ZHOU, H.; WANG, Y.; SHI, Y.; YANG, L. Extremely low cycle fatigue prediction of steel beam-to-column connection by using a micro-mechanics based fracture model. **International Journal of Fatigue**, v. 48, p. 90-100, October 2013.