INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE
CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA
MATEMÁTICA, GRAU LICENCIATURA

Alan Adriano Fuentes León

Sequências de Cauchy e a Completude dos Números Reais

Foz do Iguaçu – PR
Agosto de 2025

Alan Adriano Fuentes León

Sequências de Cauchy e a Completude dos Números Reais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Universidade Federal da Integração Latino-Americana
Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza
Matemática, grau Licenciatura

Orientadora: Profª. Drª. Adriana Flores de Almeida

Foz do Iguaçu – PR
Agosto de 2025

Folha de Aprovação

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza **Universidade Federal da Integração Latino-Americana** como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Banca Examinadora:

Foz do Iguaçu, 05 de agosto 2025.

gov.br Documento assinado digitalmente
ADRIANA FLORES DE ALMEIDA
Data: 11/08/2025 18:03:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Drª. Adriana Flores de Almeida - UNILA (Orientadora)

gov.br Documento assinado digitalmente
ELVIS MANUEL RODRIGUEZ TORREALBA
Data: 11/08/2025 21:29:54-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Elvis Manuel Rodriguez Torrealba - UNILA

gov.br Documento assinado digitalmente
JANAINA PEDROSO ZANCHETTA
Data: 12/08/2025 11:01:06-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Drª. Janaina Pedroso Zanchetta - UNESP

DEDICATÓRIA

Dedico este TCC a Deus, aos meus pais, pelo amor e apoio, à minha irmã Angélica, por fortalecer-me nos momentos difíceis.
À minha orientadora Adriana, aos amigos, àqueles que sempre acreditaram que os seus sonhos são possíveis.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que iluminaram nosso caminho, seja com palavras, gestos ou orações. O apoio recebido, por vezes silencioso, foi fundamental para que eu pudesse superar obstáculos, manter a motivação e continuar acreditando nos meus sonhos. Cada demonstração de carinho e incentivo, por menor que fosse, contribuiu para que eu alcançasse este importante objetivo.

Aos meus pais, pelo amor incondicional e incentivo constante, que são para mim exemplos de dedicação, honestidade e generosidade. Eles sempre estiveram ao meu lado em todos os momentos, celebrando minhas conquistas e me amparando nos momentos de dificuldade. Sua confiança em meu potencial me encorajou a persistir, mesmo diante das maiores adversidades.

À minha orientadora, pela paciência e dedicação que transformou dúvida em aprendizado, pela dedicação e confiança depositadas em meu trabalho e em minha trajetória acadêmica. Sua orientação precisa, suas palavras de encorajamento e sua disponibilidade para esclarecer dúvidas foram essenciais para meu desenvolvimento intelectual e pessoal. Serei eternamente grato pelo aprendizado compartilhado.

Aos amigos que estiveram ao meu lado, dividindo sonhos, desafios e conquistas ao longo da graduação. A convivência, as conversas, as risadas e o companheirismo tornaram o percurso acadêmico mais leve, mesmo diante das exigências e pressões da universidade. A amizade de vocês foi fonte de alegria, força e renovação nos momentos em que mais precisei.

Agradeço ainda à equipe técnica e administrativa da UNILA, que sempre esteve disposta a ajudar, garantindo o bom funcionamento das atividades acadêmicas e facilitando o acesso aos recursos necessários ao longo do curso.

Por fim, a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte desta caminhada, contribuindo de alguma forma para a minha formação e para a realização deste trabalho, deixo o meu sincero e profundo agradecimento. Este momento é resultado do esforço coletivo e da generosidade de todos que cruzaram meu caminho.

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) explora a propriedade fundamental de completude dos números reais, com especial atenção à sua relação intrínseca com as sequências de Cauchy. Para tal, fizemos um estudo sobre sequências de números reais, propriedades e exemplos. Posteriormente, definimos espaços métricos e sequências de Cauchy em espaços métricos e, finalmente, mostramos que o conjunto dos números reais é um espaço métrico completo. O TCC, baseado na obra de Elon Lages Lima [1] e [3] fundamentando os principais resultados na literatura clássica de Análise Real e Espaços Métricos, contribui para a compreensão didática e rigorosa desses conceitos, oferecendo uma perspectiva abrangente sobre sua importância para a fundamentação da matemática. O trabalho aborda as propriedades dos números reais como corpo ordenado e o Axioma do Supremo, que formaliza a completude ao “preencher os buracos” da reta numérica, distinguindo $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.

Palavras-chave: Completude dos Números Reais, Sequências de Cauchy, Análise Real, Espaço métrico, Axioma do Supremo.

RESUMEN

Este Trabajo de Fin de Curso (TFC) explora la propiedad fundamental de completitud de los números reales, con especial atención a su relación intrínseca con las secuencias de Cauchy. Para ello, hicimos un estudio sobre secuencias de números reales, propiedades y ejemplos. Posteriormente, definimos espacios métricos y secuencias de Cauchy en espacios métricos y, finalmente, mostramos que el conjunto de los números reales forma un espacio métrico completo. El TFC, basado en la obra de Elon Lages Lima [1] y [3], fundamentado en los principales resultados de la literatura clásica de Análisis Real y Espacios Métricos, contribuye a la comprensión didáctica y rigurosa de estos conceptos, ofreciendo una perspectiva amplia sobre su importancia para la fundamentación de las matemáticas. El trabajo aborda las propiedades de los números reales como cuerpo ordenado y el Axioma del Supremo, que formaliza la completitud al “llenar los huecos”de la recta numérica, diferenciando $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$.

Palabras clave: Completitud de los Números Reales, Sucesiones de Cauchy, Análisis Real, Espacio métrico, Axioma del Supremo.

ABSTRACT

This undergraduate thesis (UT) explores the fundamental completeness property of real numbers, with special attention to its intrinsic connection to Cauchy sequences. To this end, we conducted a study on real number sequences, properties, and examples. Subsequently, we defined metric spaces and Cauchy sequences in metric spaces, and finally we showed that the set of real numbers forms a complete metric space. The UT, based on the work of Elon Lages Lima [1] and [3], grounding the main results in the classical literature of Real Analysis and Metric Spaces, contributes to the didactic and rigorous understanding of these concepts, offering a comprehensive perspective on their importance for the foundation of mathematics. The work addresses the properties of real numbers as an ordered field and the Least Upper Bound Axiom, which formalizes completeness by "filling the gaps" in the number line, distinguishing $\mathbb{R}$ from $\mathbb{Q}$.

Keywords: Completeness of Real Numbers, Cauchy Sequences, Real Analysis, Metric Space, Supremum Axiom.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática, em sua essência, busca compreender estruturas, padrões e limites. Um de seus fundamentos modernos está ligado à análise real, que exige definições rigorosas para conceitos como convergência e completude. É nesse cenário que surgem as Sequências de Cauchy.

A Análise Real, pilar da matemática moderna, depende da compreensão rigorosa das propriedades fundamentais dos números reais, destacando-se entre elas a propriedade de completude. A importância desse conceito não se limita à Análise, mas se estende a toda a fundamentação da matemática, já que, como ressalta Eves [6], "a consistência de toda a matemática existente depende da consistência do sistema dos números reais."

Inspirados nas obras de Elon Lages Lima como: Análise Real vol.1 Funções de Uma Variável [1], Espaços Métricos [3] e orientações acadêmicas, este trabalho explora o conceito de completude dos números reais, com especial ênfase nas sequências de Cauchy. Assumimos desde o início que o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é um corpo ordenado, concentrando a discussão na demonstração de sua completude, baseada nas sequências de Cauchy e no Axioma do Supremo.

Nosso objetivo central é estudar as sequências de números reais e as propriedades das sequências de Cauchy, de modo a demonstrar que o conjunto dos números reais é um espaço métrico completo, estabelecendo assim um dos fundamentos essenciais para a Análise e outras áreas da matemática.

Segundo Howard Eves [6], a noção informal dos números reais utilizada na Análise era inicialmente insuficiente para sustentar uma matemática realmente rigorosa. Ele afirma:

> De fato, o sistema dos números reais tinha sido mais ou menos admitido sem maiores cuidados, como ainda se faz na maioria dos textos elementares de cálculo. [...] Weierstrass defendeu um programa no qual o próprio sistema dos números reais, antes de mais nada, fosse tornado rigoroso para que assim tudo que dele decorresse na análise inspirasse segurança. **De fato, pode-se afirmar hoje que, essencialmente, a consistência de toda a matemática existente depende da consistência do sistema dos números reais. Nisso reside a tremenda importância do sistema dos números reais para os fundamentos da matemática**.

O trabalho está dividido em quatro capítulos, acompanhando a linha dos grandes autores, como Lima [1, 2, 3], Figueiredo [4], Rudin [5] e Eves [6].

- No Capítulo 2, apresentamos os resultados preliminares que servem de base para o nosso estudo. Foram apresentados conceitos essenciais assumidos para $\mathbb{R}$, como o fato do conjunto dos números reais ser um corpo ordenado e apresentamos também o Axioma do Supremo que é essencial para a completude dos números reais.
- No Capítulo 3, estudamos as sequências de números reais, sua definição formal, exemplos, propriedades e noção de convergência. Estudamos neste capítulo também sequências de Cauchy no conjunto dos números reais.
- No Capítulo 4, primeiramente definimos espaços métricos e demos alguns exemplos, a seguir estudamos sequências de Cauchy em espaços métricos e por último, mostramos que o conjunto dos números reais é um espaço métrico completo.
- No Capítulo 5, fizemos as considerações finais com síntese dos resultados, sugestões para trabalhos futuros.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

2.1 $\mathbb{R}$ É UM CORPO

O conjunto dos números reais será indicado por $\mathbb{R}$. Neste capítulo, enunciaremos alguns resultados sobre os números reais que serão usados nos capítulos seguintes. Vamos enunciar o Axioma do Supremo, que é essencial para demonstrar que o conjunto dos números reais é Completo.

Definição 2.1. Estão definidas em $\mathbb{R}$ duas operações, chamadas **adição** e **multiplicação**, que cumprem certas condições, abaixo especificadas:

A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$ uma soma $x + y \in \mathbb{R}$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos um produto $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

Os axiomas de corpo que essas operações devem satisfazer são:

- **Associatividade:**

$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

- **Comutatividade:**

$$x + y = y + x,$$
$$x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- **Elemento neutro:** Existem em $\mathbb{R}$ dois elementos distintos, 0 e 1, tais que:

$$x + 0 = x,$$
$$x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- **Inverso:** Todo $x \in \mathbb{R}$ possui um inverso aditivo, $-x \in \mathbb{R}$, tal que:

$$x + (-x) = 0,$$
$$x \cdot x^{-1} = 1, \quad \text{se } x \neq 0.$$

- **Distributividade:**

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Importância: A estrutura de corpo fornece a base para operações algébricas bem definidas, essenciais para o estudo da Análise Matemática.

Observação 2.1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ chamaremos:

- **Adição:** A operação de soma de x e y é definida por

$$x + y = \text{soma de } x \text{ e } y.$$

- **Subtração:** A soma $x + (-y)$ é indicada por $x - y$ e chama-se *diferença* de x e y. Por definição:

$$x - y = x + (-y).$$

- **Multiplicação:** A operação de produto de x e y é definida por

$$x \cdot y = \text{produto de } x \text{ e } y.$$

- **Divisão:** Quando $y \neq 0$, o produto $x \cdot y^{-1}$ é representado por x/y e chama-se *quociente* de x por y. Por definição:

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}.$$

Temos as seguintes consequências:

1. $x \cdot 0 = 0$. Observe que:

$$x \cdot 0 + x = x \cdot 0 + x \cdot 1 = x \cdot (0 + 1) = x.$$

Subtraindo (x) de ambos os lados da igualdade temos:

$$x \cdot 0 + x - x = x - x \Rightarrow x \cdot 0 = 0.$$

2. $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0.$ ou $y = 0$. Note que para: $y \neq 0$, então existe $y^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $y \cdot y^{-1} = 1$. Multiplicando ambos os lados da igualdade por y^{-1}:

$$x \cdot y \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1} \Rightarrow x \cdot (y \cdot y^{-1}) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

3. Regras dos Sinais:

a) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

b) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Notar que em (a):

$$\begin{cases} x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot (-y + y) = x \cdot 0 = 0. \\ (-x) \cdot y + x \cdot y = y \cdot (-x + x) = y \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Implica:

$$x \cdot (-y) = -(x \cdot y).$$

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y).$$

Logo:

$$-(x \cdot y) = x \cdot (-y) = (-x) \cdot y$$

Observe que em (b):

$$(-x) \cdot (-y) + (-x \cdot y) = (-x) \cdot (-y) + (-x) \cdot (y) = (-x) \cdot (-y + y)$$

$$= (-x) \cdot 0 = 0$$

Portanto:

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

Lema 2.1.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x^2 = y^2 \implies x = y. \quad \text{ou} \quad x = -y.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} x^2 = y^2 &\iff x^2 - y^2 = 0. \\ &\iff (x + y) \cdot (x - y) = 0. \quad \text{(diferença de quadrados)} \end{aligned}$$

Pela propriedade dos números reais :

$$(x + y) \cdot (x - y) = 0 \implies x + y = 0. \quad \text{ou} \quad x - y = 0.$$

Portanto, temos duas possibilidades:

- Caso 1: $x + y = 0 \implies x = -y$.
- Caso 2: $x - y = 0 \implies x = y$.

□

Esta demonstração mostra que para quaisquer números reais x e y, se seus quadrados são iguais, então os números são iguais ou opostos. Este resultado é fundamental em diversas áreas da matemática, incluindo álgebra e análise real.

2.2 $\mathbb{R}$ É UM CORPO ORDENADO

Definimos o subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado "o conjunto dos números reais positivos", que cumpre as seguintes condições:

1. Se $x, y \in \mathbb{R}^+$, então $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.
2. Dado $x \in \mathbb{R}$, exatamente uma das seguintes alternativas ocorre: $x = 0$ ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

Se indicarmos $\mathbb{R}^-$ como o conjunto dos elementos $-x$ onde $x \in \mathbb{R}^+$, a condição 2. diz que:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-.$$

Os números $y \in \mathbb{R}^-$ são chamados de negativos.

Lema 2.2. Para todo $x \neq 0$, $x^2 > 0$.

Demonstração. Sabemos que:
Se $x \in \mathbb{R}^+$, então $x^2 = x \cdot x \in \mathbb{R}^+$. Se $x \in \mathbb{R}^-$, então $-x \in \mathbb{R}^+$, logo $(-x) \cdot (-x) = x^2 > 0$.
Escreve-se $y > x$ e diz-se que y é maior do que x se $y - x \in \mathbb{R}^+$.
Escreve-se $x < y$ e diz-se que x é menor do que y se $y - x \in \mathbb{R}^+$, isto é, $y = x + z$, onde z é positivo.

Valem as seguintes propriedades:

Q1) **Transitividade:**
Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x < y$ e $y < z$. Então x <z,

$$y - x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad z - y \in \mathbb{R}^+$$

ou também, respectivamente;

$$y - x > 0 \quad \text{e} \quad z - y > 0$$

Logo a soma desses números positivos também $\in \mathbb{R}^+$,

$$(y - x) + (z - y) = (z - x) \in \mathbb{R}^+$$

ou

$$(y - x) + (z - y) > 0 + 0 \quad \Rightarrow \quad z - x > 0,$$

Portanto, $x < z$.

Q2) **Tricotomia:** Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, vale:

$$x = y \quad \vee \quad x < y \quad \vee \quad x > y.$$

Note que: dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos, $y - x = 0$, ou $y - x \in \mathbb{R}^+$, ou $y - x \in \mathbb{R}^-$, logo,

$$x = y \quad \text{ou} \quad x < y \quad \text{ou} \quad x > y.$$

Q3) **Monotonicidade da Adição:** Se $x < y$, então para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z < y + z$.
De fato, se $x < y$, então $y - x \in \mathbb{R}^+$. Observe que:

$$y - x = (y + z) - (x + z).$$

Portanto, $(y + z) - (x + z). \in \mathbb{R}^+$ e, assim, $x + z < y + z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

Q4) **Monotonicidade da Multiplicação:** Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$.
Se $x < y$:

- Se $z > 0$, então $x \cdot z < y \cdot z$.
- Se $z < 0$, então $x \cdot z > y \cdot z$.

De fato, se $x < y$ e $z > 0$, temos $y - x \in \mathbb{R}^+$. Logo,

$$(y - x) \cdot z = y \cdot z - x \cdot z. \in \mathbb{R}^+$$

Portanto, $x \cdot z < y \cdot z$ (analogamente para $z < 0$).

Lema 2.3. Se $x < y$ e $x' < y'$, então $x + x' < y + y'$.

Demonstração. Se $x < y$ e $x' < y'$, então, por (Q3),

$$x + x' < y + x'.$$

e

$$x' + y < y' + y.$$

Por transitividade: $$x + x' < y' + y.$$ □

Lema 2.4. Se $0 < x < y$ e $0 < x' < y'$, então $x \cdot x' < y \cdot y'$.

Demonstração. Como $x < y$ e $x' < y'$, então por (Q4),

$$x \cdot x' < y \cdot x'.$$

e

$$x' \cdot y < y' \cdot y.$$

Assim, por transitividade: $$x \cdot x' < y \cdot y'.$$ □

Lema 2.5. Se $0 < x < y$, então $y^{-1} < x^{-1}$.

Demonstração. $x > 0$, logo $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 > 0$. Multiplicando a desigualdade $x < y$ por $x^{-1\cdot} \cdot y^{-1}, temos : y^{-1} = (x^{-1} \cdot y^{-1}) \cdot x < (x^{-1} \cdot y^{-1}) \cdot y = x^{-1}$.
Logo, $y^{-1} < x^{-1}$. □

Valor Absoluto

Definição 2.2. Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0. \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Note que: $|x| = \max\{x, -x\}$.

Lema 2.6. $-|x| \leq x \leq |x|. \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Demonstração. A desigualdade $x \leq |x|$ é imediata. Da mesma forma, $-x \leq |x|$, logo, $-|x| \leq x$.

Assim, $-|x| \leq x \leq |x|$. □

Lema 2.7. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x|^2 = x^2$.

Demonstração. Se $|x| = x$, então $|x|^2 = x^2$. ....(I)
Se $|x| = -x$, então $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$. ....(II)
por (I) e (II) temos que: Para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x|^2 = x^2$. □

Teorema 2.1. Se $x, y \in \mathbb{R}$, então:

Caso 1:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Caso 2:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

Demonstração. Caso 1: Desigualdade do triângulo. Da mesma forma, $-x \leq |x|$ e $-y \leq |y|$, então $-(x + y) \leq |x| + |y|$, ou seja, $x + y \geq -(|x| + |y|)$. Logo,

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

implica que $|x + y| = \max\{-(x + y), -(x + y)\} \leq |x| + |y|, assim : |x + y| \leq |x| + |y|$. □

Demonstração. Caso 2: Multiplicação de módulos.
Também observe que: $|x \cdot .y|^2 = (x \cdot y)^2 = x^2.y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2$. Como $|x \cdot y| \geq 0$ e $|x| \cdot |y| \geq 0$, resulta $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$. □

Teorema 2.2. Sejam $a, x, \delta \in \mathbb{R}$. Então, $|x - a| < \delta$ se, e somente se, $a - \delta < x < a + \delta$.

Demonstração. (Ida e volta ou condição suficiente e necessária ou forma direta ou recíproca)
($\Rightarrow$) Suponha que $|x - a| < \delta$. Pela definição de valor absoluto, isso equivale a:

$$-\delta < x - a < \delta.$$

Somando a aos três membros da desigualdade, obtemos:

$$a - \delta < x < a + \delta.$$

($\Leftarrow$) Suponha agora que $a - \delta < x < a + \delta$. Subtraindo a dos três membros, resulta:

$$-\delta < x - a < \delta \iff |x - a| < \delta.$$

Portanto, concluímos que:

$$|x - a| < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta.$$

Definição 2.3. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é **limitado superiormente** se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in A$, tem-se $x \leq M$. Qualquer tal M é chamado de **limitante superior** de A.

Definição 2.4. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é **limitado inferiormente** se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x$ para todo $x \in A$. Qualquer tal m é chamado de **limitante inferior** de A.

Definição 2.5. O **supremo** (ou menor limitante superior) de $A \subset \mathbb{R}$, denotado por $\sup A$, é um número real s tal que:

- $x \leq s$ para todo $x \in A$;
- Para todo $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in A$ tal que $s - \epsilon < x_0$.

Axioma 2.1 (Axioma do Supremo)**.** Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{R}$.

Definição 2.6. O **ínfimo** (ou maior limitante inferior) de A, denotado por $\inf A$, é um número real t tal que:

- $t \leq x$ para todo $x \in A$;
- Para todo $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 < t + \epsilon$.

Exemplo 2.1. Exemplo ilustrativo: Supremo em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

i) Se considerar o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$.

- O conjunto A é limitado superiormente em $\mathbb{Q}$. Por exemplo, $M = 2$ é um limitante superior.
- No entanto, não existe nenhum número racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q^2 = 2$. Logo, A não possui supremo em $\mathbb{Q}$.

ii) Por outro lado, ao considerar o mesmo conjunto dentro de $\mathbb{R}$, ou seja, $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$, o supremo de A é $\sqrt{2}$, pois $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Proposição 2.1. Desigualdade de Bernoulli: Para todo número real $x > -1$ e todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $P(n)$:

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Demonstração. (Indução)

- **Caso base:** $n = 1$. Temos $P(1) : (1 + x)^1 = 1 + x$, isto é,
  $P(1) : 1 + x \geq 1 + x$, que é verdadeira.

- **Suponha que:** $P(n)$ seja verdadeira para um certo $n \geq 1$, ou seja,

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Queremos mostrar que $P(n+1)$ também é válida, isto é,

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x.$$

Note que: $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$. E sendo $x \geq -1$, temos: $1 + x \geq 0$.

- **Usando a hipótese de indução** $P(n)$: $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$, segue que

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+n \cdot x) \cdot (1+x),$$

donde,

$$(1+n \cdot x) \cdot (1+x) = 1 + x + n \cdot x + n \cdot x^2 = 1 + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2.$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + n \cdot x^2, \quad \text{com } x^2 \geq 0.$$

Portanto, $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x$ é verdadeira. $\square$

3 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

As sequências são ferramentas centrais na análise real. São elas que permitem a definição rigorosa de limite, continuidade e, como veremos adiante, a própria noção de número real pode ser fundamentada via sequências especiais.

3.1 DEFINIÇÃO DE SEQUÊNCIA

Definição 3.1. Uma **sequência de números reais** é uma função:

$$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado de n-ésimo termo da sequência. Notações usuais: $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (x_n).

Observação 3.1. Conjunto dos termos e sequência não se deve confundir a sequência (x_n) com o conjunto dos seus termos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Por exemplo:

$$(1, 1, 1, \ldots) \neq \{1\}.$$

As sequências $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ e $(0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots)$ são diferentes, embora o conjunto dos termos seja o mesmo, $\{0, 1\}$.

Exemplo 3.1 (Sequência constante)**.** $x_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. para algum $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.2 (Sequência harmônica)**.** $x_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.3 (Sequência alternada)**.** $x_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.4 (Sequência geométrica)**.** $x_n = ar^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $a, r \in \mathbb{R}$.

3.2 LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA

Definição 3.2. Dizemos que um número real a é o **limite** da sequência (x_n) se:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

ou dizemos que a sequência (x_n) converge para $a \in \mathbb{R}$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, tem-se $|x_n - a| < \varepsilon$.
Onde:

- $\forall$ significa ”para todo”ou ”para qualquer”;
- $\exists$ significa ”existe”;

- : significa ”tal que”;
- $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

Em outras palavras, para valores grandes de n, os termos x_n se aproximam arbitrariamente de a:

$$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \quad \forall n > n_0.$$

Notação: $\lim x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ou ainda $x_n \longrightarrow a$ (quando $n \to \infty$).

Se $\lim x_n = a$ dizemos que a sequência é **convergente**. Caso contrário, é **divergente**.

Exemplo 3.5. A sequência (x_n), cujo termo geral $x_n = 1/n$ converge para 0.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, basta escolher $N > 1/\epsilon$. Se para todo $n > N$, temos $|x_n - 0| = |1/n| < \epsilon$. Portanto, $x_n \to 0$. Também se $x_n = \frac{1}{n}$. Então, $a = \lim x_n = 0$ ou, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. $\square$

Exemplo 3.6. A sequência (x_n), cujo n-ésimo termo é $x_n = (-1)^n$ não converge.

Demonstração. Se a (x_n) converge para L, dado $\epsilon = 1/2$, existiria N tal que $|x_n - L| < 1/2$ para $n > N$. Porém, para n par, $x_n = 1$, e para n ímpar, $x_n = -1$, de modo que pelo menos um desses termos estará a distância maior ou igual a 1 de L. Contradição. $\square$

Teorema 3.1 (Unicidade do limite)**.** Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Dado $b \neq a$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que os intervalos abertos $I = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $J = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ sejam disjuntos. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n \in I$. Então, para todo $n > n_0$, temos $x_n \notin J$. Logo, não é verdade que, $\lim x_n = b$ ou $\lim x_n \neq b$ e sim $\lim x_n = a$. $\square$

Definição 3.3. Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma **subsequência** é uma restrição de x a um subconjunto infinito $N' = \{n_1 < n_2 < \ldots\} \subset \mathbb{N}$. Denota-se:

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Teorema 3.2. Se $\lim x_n = a$ então toda subsequência de (x_n) converge para o limite a.

Demonstração. Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ a subsequência. Dado qualquer intervalo aberto I de centro a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n, com $n > n_0$, pertencem a I. Em particular, todos os termos x_{n_k}, com $n_k > n_0$, também pertencem a I. Logo $\lim x_{n_k} = a$. $\square$

Definição 3.4. Sequências limitadas. Dizemos que uma sequência (x_n) é:

- **Limitada superiormente** se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Limitada inferiormente** se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Limitada** se é limitada superior e inferiormente, ou seja, existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.7. Se $a < -1$, considere $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se N' é o conjunto dos números pares e N'' o conjunto dos ímpares, então:

- $(a^n)_{n\in N'}$ é limitada apenas inferiormente;
- $(a^n)_{n\in N''}$ é limitada apenas superiormente.

Teorema 3.3. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração. Seja $a = \lim x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[b, c]$, logo ela é limitada. □

Note que a recíproca não é válida, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.8. A sequência $(2, 0, 2, 0, \ldots)$, cujo n-ésimo termo é $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$, é limitada mas não converge pois possui duas subsequências constantes, $x_{2n-1} = 2$ e $x_{2n} = 0$, com limites distintos.

Exemplo 3.9. A sequência $(1, 2, 3, \ldots)$, com termo geral $x_n = n$, não converge porque não é limitada.

Definição 3.5. Sequências Monótonas. Uma sequência (x_n) chama-se *monótona* quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou então $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n. No primeiro caso, diz-se que (x_n) é *monótona não-decrescente* e, no segundo, que (x_n) é *monótona não-crescente*. Se, mais precisamente, tivermos $x_n < x_{n+1}$ (respectivamente $x_n > x_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos que a sequência é *crescente* (respectivamente, *decrescente*).

Teorema 3.4. Toda sequência monótona não decrescente (respectivamente não crescente) é limitada inferiormente (respectivamente superiormente) pelo seu primeiro termo.

Demonstração. Seja $(x_{n'})_{n'\in\mathbb{N}'}$ uma subsequência limitada da sequência monótona (digamos, não decrescente) (x_n). Temos $x_{n'} \leq c$ para todo $n' \in \mathbb{N}'$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $n' \in \mathbb{N}'$ tal que $n < n'$. Então:

$$x_n \leq x_{n'} \leq c.$$

□

Observação 3.2. Vimos que a recíproca do Teorema 3.3 não é válida, veremos no próximo Teorema que para que a limitação implique convergência, é necessário impor um requisito adicional: a monotonicidade. Esse acréscimo conduz ao próximo Teorema, que é um resultado mais restritivo, porém válido.

Teorema 3.5. Toda sequência monótona limitada é convergente.

Demonstração. Seja (x_n) monótona, digamos não decrescente, limitada. Escrevamos $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $a = \sup X$. Afirmamos que $a = \lim x_n$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, como (x_n) é não decrescente para $n > n_0$ tem-se $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$ e daí $\lim x_n = a$. □

Observação 3.3. Observamos que o Axioma do Supremo é essencial para demonstrar este Teorema. Pois o Axioma garante a existência do supremo do conjunto X.

Semelhantemente, se (x_n) é não-crescente, limitada então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores x_n.

Corolário 3.1 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Demonstração. Com efeito, basta mostrar que toda sequência (x_n) limitada possui uma subsequência monótona. Diremos que um termo x_n da sequência dada é destacado quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então a subsequência $(x_n)_{n \in D}$ será monótona não-crescente. Se, entretanto, D for finito, seja n_1 o maior de todos os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_2} > x_{n_1}$. Por sua vez, n_2 não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_3} > x_{n_2} > x_{n_1}$. Prosseguindo, obtemos uma subsequência crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$. □

Exemplo 3.10. Seja $0 < a < 1$. A sequência $(a, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$, formada pelas potências sucessivas de a, é decrescente, limitada pois, multiplicando $0 < a < 1$ por a^n, resulta $0 < a^{n+1} < a^n$. Afirmamos que $\lim_{n \to \infty} a^n = 0$. Com efeito, dado $0 < \varepsilon < 1$ segue-se que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(1/a)^{n_0} > 1/\varepsilon$, ou seja, $a^{n_0} < \varepsilon$. Segue-se que $\lim a^n = \inf\{a^n; n \in \mathbb{N}\} = 0$.

3.3 LIMITES E DESIGUALDADES

Teorema 3.6. Seja $a = \lim x_n$. Se $b < a$ então, para todo n suficientemente grande, tem-se $b < x_n$. Analogamente, se $a < b$ então $x_n < b$ para todo n suficientemente grande.

Demonstração. Tomando $\varepsilon = a - b$, temos $\varepsilon > 0$ e $b = a - \varepsilon$. Pela definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow b < x_n$. A outra afirmação se prova analogamente. □

Corolário 3.2. Seja $a = \lim x_n$. Se $a > 0$ então, para todo n suficientemente grande, tem-se $x_n > 0$. Analogamente, se $a < 0$ então $x_n < 0$ para todo n suficientemente grande.

Corolário 3.3. Sejam $a = \lim x_n$, $b = \lim y_n$. Se $x_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande, então $a \leq b$. Em particular, se $x_n \leq b$ para todo n suficientemente grande, então $\lim x_n \leq b$.

Demonstração. (por contradição) Com efeito, se fosse $b < a$ então tomaríamos $c \in \mathbb{R}$ tal que $b < c < a$ e teríamos, pelo Teorema 3.6, $y_n < c < x_n$ para todo n suficientemente grande, contradizendo a hipótese. □

Observação 3.4. Se fosse $x_n < y_n$ não se poderia concluir $a < b$. Basta tomar $x_n = 0$, $y_n = 1/n$.

Teorema 3.7 (Teorema do sanduíche)**.** Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande, então $\lim z_n = a$.

Demonstração. Demonstração: Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ e $n > n_2 \Rightarrow a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < z_n < y_n < a + \varepsilon$, e, portanto $z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, logo $\lim z_n = a$. □

3.4 OPERAÇÕES COM LIMITES

Teorema 3.8. Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) são uma sequência limitada (convergente ou não) então $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$.

Demonstração. Demonstração: Existe $c > 0$ tal que $|y_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon/c$. Então $n > n_0 \Rightarrow |x_n| \cdot |y_n| < (\varepsilon/c) \cdot c = \varepsilon$, logo $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$. □

Exemplo 3.11. Se $x_n = 1/n$ e $y_n = \sin(n)$ então (y_n) não converge mas, como $-1 \leq y_n \leq 1$, tem-se $\lim(x_n y_n) = \lim(\sin(n)/n) = 0$. Por outro lado, se $\lim x_n = 0$ mas y_n não é limitada, o produto $x_n y_n$ pode divergir (tome $x_n = 1/n$, $y_n = n^2$) ou convergir para um valor qualquer (tome $x_n = 1/n$, $y_n = c \cdot n$).
Notar que:

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \lim(x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n - a| = 0.$$

Teorema 3.9. Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$ então:

1) $\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

2) $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

3) $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, se $b \neq 0$.

Demonstração. 1.) Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon/2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$, logo,

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Portanto $\lim(x_n + y_n) = a + b$. Mesmo argumento para $x_n - y_n$. □

Notar que: analogamente para a demonstração de limite de uma subtração que é a subtração dos limites.

Demonstração. 2.) Temos $x_n \cdot y_n - a \cdot b = x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b = x_n \cdot (y_n - b) + (x_n - a) \cdot b$. Pelo Teorema 3.3, (x_n) é limitada. Além disso, $\lim(y_n - b) = \lim(x_n - a) = 0$. Segue-se do Teorema 3.8 que $\lim(x_n \cdot y_n - a \cdot b) = \lim[x_n \cdot (y_n - b)] + \lim[(x_n - a) \cdot b] = 0$, onde $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$. □

Demonstração. 3.) Vale $x_n/y_n - a/b = (x_n \cdot b - y_n \cdot a)/y_n \cdot b$. Como $\lim(x_n \cdot b - y_n \cdot a) = a \cdot b - b \cdot a = 0$, basta provar que $(1/y_n \cdot b)$ é uma sequência limitada para concluir que $\lim(x_n/y_n - a/b) = 0$ e, portanto, que $\lim(x_n/y_n) = a/b$. Ora, pondo $c = b^2/2$, temos $0 < c < b^2$. Como $\lim y_n \cdot b = b^2$, segue-se do Teorema 3.6 que, para todo n suficientemente grande, tem-se $c < y_n \cdot b$ e, portanto, $1/y_n \cdot b < 1/c$, completando a demonstração. □

Exemplo 3.12. Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim(x_{n+1}/x_n) = a < 1$ então $\lim x_n = 0$. Com efeito, tomemos $c \in \mathbb{R}$ com $a < c < 1$. Então $0 < x_{n+1}/x_n < c$ para todo n suficientemente grande. Segue-se que $0 < x_{n+1} < (x_{n+1}/x_n) \cdot x_n < c \cdot x_n$ e, logo, para n suficientemente grande, a sequência (x_n) é monótona e limitada. Seja $b = \lim x_n$. De $x_{n+1} < c \cdot x_n$ para todo n suficientemente grande resulta, fazendo $n \to \infty$, que $b \leq c \cdot b$, isto é, $(1 - c) \cdot b \leq 0$. Como $b \geq 0$ e $0 < c < 1$, concluímos que $b = 0$.

Exemplo 3.13. Dado $a > 0$, mostremos que a sequência dada por $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ tem limite igual a 1. Com efeito, trata-se de uma sequência monótona (decrescente se $a > 1$, crescente se $a < 1$), limitada, portanto existe $L = \lim_{n\to\infty} a^{1/n}$. Tem-se $L > 0$. Com efeito, se $0 < a < 1$ então $a^{1/n} > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ donde $L \geq a$. Se, porém, $a > 1$ então $a^{1/n} > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $L \geq 1$. Consideremos a subsequência $(a^{1/n(n+1)}) = (a^{1/2}, a^{1/6}, a^{1/12}, \ldots)$. Como $1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$, o Teorema 3.2 e o item 3 do Teorema 3.9 nos dão:

$$L = \lim a^{1/n(n+1)} = \lim \frac{a^{1/n}}{a^{1/(n+1)}} = \frac{L}{L} = 1.$$

Exemplo 3.14. Seja $0 < a < 1$. Considere a sequência de termo geral

$$x_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Essa sequência é crescente e limitada, pois:

$$x_n < \frac{1}{1 - a}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-a}-x_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1-a}=0,$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(1+a+\ldots+a^n)=\frac{1}{1-a}.$$

A igualdade acima permanece válida para $-1<a<1$, isto é, $|a|<1$, pois o argumento baseia-se no fato de que

$$\lim_{n\to\infty}a^n=0,$$

o que também ocorre quando $|a|<1$, já que

$$\lim_{n\to\infty}|a|^n=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}a^n=0.$$

3.5 LIMITES INFINITOS

Definição 3.6. Dada uma sequência (x_n), diz-se que "o limite de x_n é mais infinito" e escreve-se $\lim x_n=+\infty$, para significar que, dado arbitrariamente $A>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n>n_0$ implica $x_n>A$.
Analogamente, $\lim x_n=-\infty$ significa que para todo $A>0$, pode-se achar $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n>n_0$ implica $x_n<A$.

Observação 3.5. Deve-se enfatizar que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais e que se $\lim x_n=+\infty$ e $\lim y_n=-\infty$, então as sequências (x_n) e (y_n) não são convergentes.
Como $\lim x_n=+\infty\Leftrightarrow\lim(-x_n)=-\infty$, *limitaremos nossa observação seguinte, ao primeiro caso na próxima observação.*

Observação 3.6. Se $\lim x_n=+\infty$ então a sequência (x_n) não é limitada superiormente. A recíproca é falsa. A sequência dada por $x_n=n+(-1)^n$n é ilimitada superiormente porém não se tem $\lim x_n=+\infty$, pois $x_{2n-1}=0$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Mas se a (x_n) é não-decrescente então a (x_n) é ilimitada, pois $\Rightarrow\lim x_n=+\infty$.

Teorema 3.10. 1) Se $\lim x_n=+\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente então $\lim(x_n+y_n)=+\infty$.

2) Se $\lim x_n=+\infty$ e existe $c>0$ tal que $y_n>c$ para todo $n\in\mathbb{N}$ então $\lim(x_n\cdot y_n)=+\infty$.

3) Se $x_n>c>0$, $y_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e $\lim y_n=0$ então $\lim\dfrac{x_n}{y_n}=+\infty$.

4) Se (x_n) é limitada e $\lim y_n=+\infty$ então $\lim\dfrac{x_n}{y_n}=0$.

Demonstração. 1. Existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $y_n\geq c$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $A>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n>n_0\Rightarrow x_n>A-c$. Segue-se que $n>n_0\Rightarrow x_n+y_n>A-c+c=A$, logo $\lim(x_n+y_n)=+\infty$. □

Demonstração. 2. Dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A/c$. Logo $n > n_0 \Rightarrow x_n \cdot y_n > (A/c) \cdot c = A$, onde $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$. □

Demonstração. 3. Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n < c/A$. Então $n > n_0 \Rightarrow x_n/y_n > c/(c/A) = A$ e daí $\lim(x_n/y_n) = +\infty$. □

Demonstração. 4. Existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n > c/\varepsilon$. Então $n > n_0 \Rightarrow |x_n/y_n| < c/\varepsilon/c = \varepsilon$, logo $\lim(x_n/y_n) = 0$. □

Observação 3.7. As hipóteses feitas nas diversas partes do teorema anterior têm por objetivo evitar algumas das chamadas "expressões indeterminadas". No item (1.) procura-se evitar a expressão $+\infty$ e $-\infty$. De fato, se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$ nenhuma afirmação geral pode ser feita sobre $\lim(x_n + y_n)$. Este limite pode não existir (como no caso em que $x_n = n + (-1)^n$ e $y_n = -n$), pode ser igual a $+\infty$ (se $x_n = 2n$ e $y_n = -n$), pode ser $-\infty$ (tome $x_n = n$ e $y_n = -2n$) ou pode assumir um valor arbitrário $c \in \mathbb{R}$ (por exemplo, se $x_n = n + c$ e $y_n = -n$). Por causa deste comportamento inesperado, diz-se que $+\infty$ e $-\infty$ é uma expressão indeterminada.

Nos itens (2.), (3.) e (4.), as hipóteses feitas excluem os limites do tipo $0 \times \infty$ (também evitado no Teorema 3.8), $0/0$ e ∞/∞, respectivamente, os quais constituem expressões indeterminadas no sentido que acabamos de explicar. Outras expressões indeterminadas frequentemente encontradas são ∞^0, 1^∞ e 0^0.

3.6 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

O conceito de sequência de Cauchy é fundamental para a análise real moderna e para a compreensão da completude de $\mathbb{R}$. Sequências de Cauchy são aquelas cujos termos, a partir de certo momento, ficam arbitrariamente próximos entre si, independentemente de conhecermos seu limite.

Definição 3.7. Uma sequência (x_n) de números reais é chamada de **sequência de Cauchy** se:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ |x_n - x_m| < \varepsilon, \quad \text{para todo } m, n > N.$$

Exemplo 3.15. Considere $x_n = (-1)^n$. Esta sequência não é de Cauchy.

Demonstração. Basta tomar $\varepsilon = 1$. Para quaisquer N, existem $m = 2N+1$ e $n = 2N+2$, de modo que

$$|x_m - x_n| = |(-1)^{2N+1} - (-1)^{2N+2}| = |-1-1| = 2 > 1.$$

Portanto, não satisfaz a definição de sequência de Cauchy. □

Exemplo 3.16. Considere a sequência (x_n) definida por:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + 2/x_n}{2}$$

Esta sequência está em $\mathbb{Q}$ e é de Cauchy em $\mathbb{Q}$, mas não converge em $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Esta sequência é a aproximação sucessiva da raiz de 2. Pode-se mostrar que ela é de Cauchy, pois os termos se aproximam cada vez mais de $\sqrt{2}$, que não pertence a $\mathbb{Q}$. Assim, não converge em $\mathbb{Q}$, mas sim em $\mathbb{R}$. $\square$

4 COMPLETUDE DOS NÚMEROS REAIS

4.1 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS DE ESPAÇOS MÉTRICOS

Definição 4.1. Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado *distância de x a y*, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

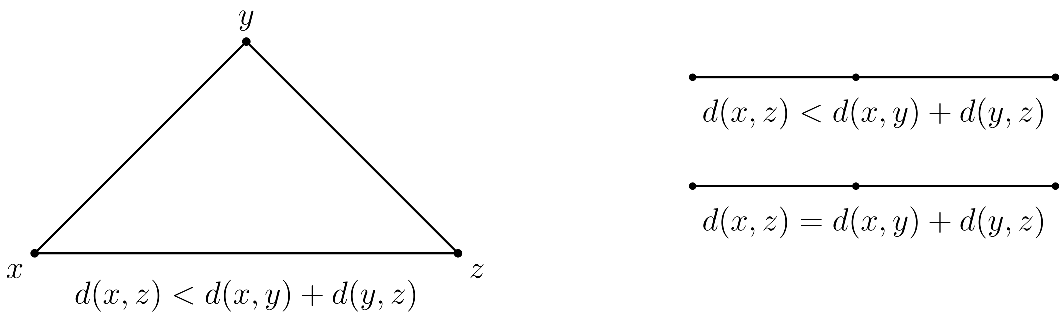
d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Os postulados d1) e d2) dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. O postulado d3) afirma que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica das variáveis x, y. A condição d4) chama-se *desigualdade do triângulo*; ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.



Definição 4.2. Um *espaço métrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M. Na maioria das vezes, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos simplesmente "o espaço métrico M", deixando subentendida qual a métrica d que está sendo considerada.

Daremos agora alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 4.1 (A métrica "zero-um")**.** Qualquer conjunto M pode tornar-se um espaço métrico de maneira muito simples. Basta definir a métrica $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ pondo $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. As condições d1) a d4) são facilmente verificadas. O espaço métrico que se obtém desta maneira é, naturalmente, bastante trivial, embora seja útil para contraexemplos.

Exemplo 4.2 (Subespaço; métrica induzida). Se (M, d) é um espaço métrico, todo subconjunto $S \subset M$ pode ser considerado, de modo natural, como espaço métrico: basta considerar a restrição de d a $S \times S$, ou seja, usar entre os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M. Quando isto é feito, S chama-se um *subespaço de* M e a métrica de S diz-se *induzida* pela de M.

Exemplo 4.3 (A reta Real). O conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$. As condições d1) a d4) resultam imediatamente das propriedades elementares do valor absoluto de números reais. Esta é a chamada "métrica usual" da reta. A menos que seja feita menção explícita em contrário, é a ela que nos referiremos sempre que considerarmos $\mathbb{R}$ como espaço métrico.

4.2 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY EM ESPAÇOS MÉTRICOS

Definição 4.3. Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

A fim de que uma sequência (x_n) seja de Cauchy, é necessário e suficiente que, para cada $\varepsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$. (Basta chamar de n o menor dos números m, n da definição anterior e por $m = n + p$.)

Intuitivamente, os termos de uma sequência de Cauchy vão se tornando cada vez mais próximos uns dos outros, à medida que cresce o índice n.

Ser de Cauchy é uma propriedade intrínseca da sequência; depende apenas dos seus termos, mas não da existência de outros pontos no espaço (em contraste com a propriedade de ser convergente). Assim, se $M \subset N$, uma sequência de pontos $x_n \in M$ é de Cauchy em M se, e somente se, é de Cauchy em N.

Quando os termos de uma sequência se aproximam de um ponto fixado, eles devem necessariamente aproximar-se uns dos outros.

Exemplo 4.4. Mostre que a sequência $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ é de Cauchy.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como a série $\sum 1/k^2$ converge, seu *resto da série* satisfaz:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Para quaisquer $m > n > N$, temos:

$$x_m - x_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2}.$$

Logo,

$$|x_m - x_n| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, concluímos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. □

Proposição 4.1. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Demonstração. Demonstração. Se $\lim x_n = a$ no espaço métrico M então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon/2$. Se tomarmos $m, n > n_0$ teremos:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, (x_n) é de Cauchy. □

Exemplo 4.5. Nem toda sequência de Cauchy é convergente. Para ver isto, tomemos uma sequência de números racionais (x_n) convergindo para um número irracional a. (Por exemplo, $x_1 = 1$, $x_2 = 1,4$, $x_3 = 1,41$, $x_4 = 1,414\ldots$, com $\lim x_n = \sqrt{2}$.) Sendo convergente em $\mathbb{R}$, segue-se da Proposição 4.1 que (x_n) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Mas evidentemente (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$.

Proposição 4.2. Toda sequência de Cauchy é limitada.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$. Logo o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}$ é limitado e tem diâmetro ≤ 1. Segue-se que

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_1, \ldots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots\}$$

é limitado. □

Exemplo 4.6. Nem toda sequência limitada é de Cauchy. O exemplo mais simples é dado por $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ na reta. Embora limitada, esta sequência não é de Cauchy pois $d(x_n, x_{n+1}) = 1$ para todo n.

Exemplo 4.7. A sequência de números reais $x_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ não é de Cauchy porque não é limitada (série harmônica).

Proposição 4.3. Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência).

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Afirmamos que $\lim x_n = a$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > p \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2$. Existe também $q \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$. Seja $n_0 = \max\{p, q\}$. Para todo $n > n_0$ existe $n_k > n_0$ e então

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo $\lim x_n = a$. □

A propriedade enunciada na Proposição 4.3 é evidentemente falsa para sequências arbitrárias. Ela indica que uma sequência de Cauchy só não converge num espaço M se "faltarem pontos no espaço".

Exemplo 4.8. Se uma sequência possui duas subsequências que convergem para limites distintos, então ela não é de Cauchy. Em particular, uma sequência que possui apenas um número finito de termos distintos só pode ser de Cauchy quando, a partir de uma certa ordem, ela se torna constante.

4.3 DEFINIÇÃO DE ESPAÇO MÉTRICO COMPLETO

Definição 4.4. Diz-se que o espaço métrico M é *completo* quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Exemplo 4.9. O espaço $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo. (revisar Exemplo 3.5.)

Exemplo 4.10. Todo espaço M com a métrica zero-um é completo, pois qualquer sequência de Cauchy em M é constante a partir de um certo índice e, portanto, convergente.

Exemplo 4.11. Nem todo espaço métrico discreto, porém, é completo, como se vê tomando $P = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$, onde $x_n = 1/n$ fornece uma sequência de Cauchy que não converge em P.

A proposição seguinte, devida a Cauchy, estabelece o exemplo mais importante de espaço métrico completo.

Proposição 4.4. A reta é um espaço métrico completo.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Pondo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, temos $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ e os conjuntos X_n são limitados. Seja $a_n = \inf X_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Então $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b = \sup X_1$. Pelo Teorema 3.5 , existe o número $a = \lim a_n$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Para provar isto, basta mostrar que a é limite de uma subsequência de (x_n), ou seja, que dados arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos obter $n > n_1$ tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Ora, sendo $a = \lim a_n$, existe $m > n_1$ tal que $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Como $a_m = \inf X_m$, existe $n > m$ (e, portanto, $n > n_1$) tal que $a_m \leq x_n < a + \varepsilon$, isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. $\square$

5 CONSIDERAÇÃOES FINAIS

O estudo das sequências de Cauchy e da completude dos números reais representa um marco fundamental na formação rigorosa da Análise Real. Conforme exposto por Djairo Guedes de Figueiredo [4], Elon Lages Lima [1] e Walter Rudin [5], a propriedade de completude é a característica essencial que distingue o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$.

A completude de $\mathbb{R}$ pode ser expressa de diversas formas equivalentes, sendo as mais comuns: toda sequência de Cauchy converge em $\mathbb{R}$ e todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ limitado superiormente admite supremo em $\mathbb{R}$ (Axioma do Supremo). No desenvolvimento clássico, a propriedade do supremo é utilizada de maneira decisiva para garantir que limites de sequências de Cauchy estejam, de fato, contidos em $\mathbb{R}$. Assim, para provar que $\mathbb{R}$ é completo, parte-se do axioma do supremo e demonstra-se que toda sequência de Cauchy converge para um elemento de $\mathbb{R}$, procedimento detalhado tanto em [1] quanto em [4].

Como mostra Rudin [5], é possível também construir rigorosamente o conjunto dos números reais a partir de $\mathbb{Q}$, identificando $\mathbb{R}$ como o conjunto das classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais. Por essa abordagem, $\mathbb{R}$ é, por construção, um espaço métrico completo, o que fundamenta de maneira axiomática e construtiva a completude do corpo dos reais.

Dessa forma, a propriedade do supremo não apenas fundamenta a demonstração de que $\mathbb{R}$ é completo, mas também evidencia o papel das sequências de Cauchy na consolidação da análise moderna. O estudo dos autores citados mostra que a teoria pode ser apresentada tanto por meio do axioma do supremo quanto via construção por sequências de Cauchy, e ambas as abordagens são equivalentes no contexto da análise matemática formal.

REFERÊNCIAS

[1] LIMA, Elon Lages. *Análise Real: Volume 1 – Funções de uma Variável*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 198 p.

[2] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise, volume 1*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 431 p. (Projeto Euclides). ISBN 978-85-244-0375-0.

[3] LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[4] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Análise I*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[5] RUDIN, Walter. *Princípios de Análise Matemática*. 3. ed. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1977. Tradução da 3rd ed. em inglês.

[6] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2008. p. 611.