Douglas Miguel Teixeira Machado

Uma introdução à Teoria de Ramsey

Foz do Iguaçu

2024

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA
Licenciatura em Matemática

Douglas Miguel Teixeira Machado

Uma introdução à Teoria de Ramsey

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cleilton Aparecido Canal

Foz do Iguaçu

2024

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Inclua aqui o pdf com a ficha catalográfica fornecida.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

DOUGLAS MIGUEL TEIXEIRA MACHADO

UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DE RAMSEY

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto Latino-Americano de e Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr Cleilton Aparecido Canal
UNILA

Prof. Dr Elvis Manuel Rodriguez Torrealba
UNILA

Prof. Dr Jerry Anderson Pinheiro
UNILA

Foz do Iguaçu, 24 de abril de 2024.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Resumo

Nesse trabalho vamos apresentar brevemente conceitos relacionados a Teoria de Ramsey, porém antes de abordarmos, iremos apresentar sobre o Princípio da Casa dos pombos um resultado importante que utilizaremos para provar os teoremas de Teoria de Ramsey. Noções sobre grafos, o que é um grafo, subgrafo, grafo completo, clique e colorações de arestas de um grafo. Por fim iremos apresentar resultados simples de Teoria de Ramsey, como o teorema de Ramsey finito, número de Ramsey, números de Ramsey conhecidos, limitantes dos números de Ramsey, teorema de Ramsey infinito, e por fim um resultado de Teoria aditiva de Ramsey chamado Lema de Schur, que é uma aplicação do teorema de Ramsey infinito.

Palavras-chaves: Combinatória; Teoria de Ramsey; Teoria dos Grafos; Coloração; Princípio da Casa dos Pombos.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Abstract

In this work we will briefly present concepts related to Ramsey Theory, but before we address it, we will present on the Pigeonhole Principle an important result to prove the theorems of Ramsey Theory. Notions about graphs, what is a graph, subgraph, complete graph, clique and edge colorings of a graph. Finally we will present simple results of Ramsey Theory, such as the finite Ramsey theorem, Ramsey number, known Ramsey numbers, limits of Ramsey numbers, infinite Ramsey theorem, and finally a result of additive Ramsey Theory called Schur's lemma, which is an application of the infinite Ramsey theorem.

Key words:Combinatorics; Ramsey theory; Theory of graphs; Coloring; Pigeon House Principle.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Resumen

En este trabajo presentaremos brevemente conceptos relacionados con la Teoría de Ramsey, pero antes de abordarlo presentaremos sobre el Principio de Casillero un resultado importante para demostrar los teoremas de la Teoría de Ramsey. Nociones sobre gráficas, qué es una gráfica, subgrafo, gráfica completa. , coloración de camarillas y bordes de un gráfico. Finalmente presentaremos resultados simples de la Teoría de Ramsey, como el teorema finito de Ramsey, el número de Ramsey, los números de Ramsey conocidos, los límites de los números de Ramsey, el teorema de Ramsey infinito y finalmente un resultado de la Teoría de Ramsey aditivo llamado lema de Schur, que es una aplicación de El teorema infinito de Ramsey.

Palabras clave:Combinatoria; Teoría de Ramsey; Teoría de Grafos; Colorante; Principio del palomar.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Sumário

1 Introdução **1**
2 Princípio da Casa dos Pombos **2**
3 Grafos **11**
4 Teoria de Ramsey **20**
Conclusão **33**

Referências **34**

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Dedico esta trabalho aos meus pais (Luzia e Ademir)

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela sua misericórdia sobre minha vida.

Agradeço ao meu professor/orientador Cleilton, pela paciência e persistência.

Agradeço a minha família pelo incondicional apoio em todos os momentos dessa jornada.

Agradeço aos meus queridos amigos: Eder, Mathias, Rayan, Isabelly, Lara, Ana K., Felipe, Ana, Vitória, Claúdio, Arthur, Carol. Agradeço pelo todo apoio durante essa jornada.

Agradeço aos meus pacientes professores da Unila: Jerry, Eralcilene, Victor, Rodrigo, Fábio, Adriana, Mariana, Patrícia, Guilherme, Maria Elizabete, Elhma e também aos professores que passaram por lá: Gustavo, Jessika, Marielli.

Agradeço aos meus alunos que indiretamente me incetivam a ser um bom professor.

Por último, mas não menos importante, agradeço aos membros da banca, por tirarem tempo para ler este texto e por serem responsáveis pela possibilidade de apresentação deste trabalho.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Senhor, dá-me a conhecer o meu fim e qual é a soma dos meus dias, para que eu reconheça a minha fragilidade. Salmos 39:4

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Lista de ilustrações

Figura 1 – Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Fonte:(O'CONNOR; ROBERTSON, 2024b) 10
Figura 2 – Um mapa da cidade com suas pontes (O'CONNOR; ROBERTSON, 2024e) 11
Figura 3 – As setes pontes e sua modelagem por grafos 11
Figura 4 – Uma grafo completo com 3 vértices. 12
Figura 5 – Uma grafo completo com 5 vértices à esquerda, e outro grafo completo com 6 vértices à direita. 13
Figura 6 – Leonhard Euler. Fonte (O'CONNOR; ROBERTSON, 2024c) 19
Figura 7 – Numeros de Ramsey. 26
Figura 8 – Frank Plumpton Ramsey 31
Figura 9 – Paul Erdös 32

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

1 Introdução

A Teoria de Ramsey, uma área fascinante da combinatória, busca compreender como existem certos padrões dentro de eventos aleatórios. Originada nos trabalhos de Frank P. Ramsey na década de 1930, essa teoria não apenas enriqueceu a matemática com seus profundos teoremas e conceitos, mas também se destaca pela simplicidade de sua abordagem. Este trabalho visa oferecer uma breve introdução a alguns conceitos da Teoria de Ramsey, como encontrar os números de Ramsey, e explicar por que é tão difícil determiná-los. O trabalho está estruturado da seguinte maneira:

Iniciamos com o Capítulo 2, onde abordamos o Princípio da Casa dos Pombos (PCP). Esta ferramenta é de fundamental importância para a demonstração dos teoremas na Teoria de Ramsey, porém também é muito útil para resolver outros problemas. Neste capítulo, apresentamos duas formas do PCP, além de alguns exemplos e resultados que utilizam esse princípio. Por fim, mostramos como pode ser aplicado em outras áreas.

No Capítulo 3, nosso foco será a teoria de grafos. Apresentaremos os principais conceitos e definições, que serão úteis no capítulo seguinte.

Por fim, no Capítulo 4, discutiremos a Teoria de Ramsey. O capítulo começa com um problema combinatório motivador: quantas pessoas são necessárias em uma festa para garantir que pelo menos três delas se conheçam ou três delas não se conheçam. Mostraremos como o problema pode ser modelado em termos de coloração das arestas de um grafo e como aplicar o PCP para encontrar uma solução. A generalização deste problema serve como uma introdução à Teoria de Ramsey. Como veremos, sobre o teorema de Ramsey garante que, dados $s, t > 2$, existe um número n tal que qualquer 2-coloração de um grafo completo K_n apresentará algum subgrafo monocromático K_s ou K_t entretanto, o teorema não específica o valor de n. O menor número n que satisfaz o teorema será chamado de número de Ramsey e denotado por R(s,t). Como observaremos, a determinação desses números é uma tarefa muito desafiadora e constitui uma área ativa de pesquisa na combinatória, assim se descobriram limitantes para os possíveis valores de n, apresentamos o limitante inferior dos números de Ramsey, e o limitante superior dos números de Ramsey, também comentamos sobre a recente melhora nesse limitante superior do número de Ramsey para $(4 - \epsilon)^k$, (SLOMAN, 2023), (CAMPOS *et al.*, 2023)[arxiv],(IMPA, 2023). Por fim, apresentaremos uma versão infinita do teorema e finalizamos com o Lema de Schur, o qual é um resultado da Teoria aditiva de Ramsey.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

2 Princípio da Casa dos Pombos

Uma ferramenta básica porém muito útil e fundamental para demostrar problemas envolvendo questões de existência, chamada de princípio da casa dos pombos ou também conhecida como princípio das gavetas de Dirichlet, nos é útil para o que vamos estudar nesse trabalho. Nesse capítulo vamos definir algumas formas do PCP, e mostrar alguns exemplos onde o PCP torna a resolução do problema simples. Este capítulo foi baseado principalmente nas seguintes referências (BOTLER *et al.*, 2021; MACIEL, 2020). Começamos com uma versão básica do seguinte resultado.

Teorema 2.1. Se $n + 1$ pombos são distribuídos em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter 2 ou mais pombos.

***Figura 1**: Distribuímos 10 pombos para 9 gaiolas.*

Demonstração. Como queremos distribuir $n + 1$ pombos em n casas, se cada casa tiver somente 1 pombo então teremos distribuído somente n pombos e portanto existe pelo menos 1 casa com 2 pombos. □

Exemplo 2.2. Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês.

Solução. Considere que as 13 pessoas são os pombos e os meses são as casas, então colocamos cada pessoa no mês que faz aniversário. Pelo PCP existem pelo menos dois pombos que estão na mesma casa, ou seja, pelo menos duas pessoas fazem aniversário no mesmo mês. ♢

Para o próximo exemplo vamos utilizar a seguinte notação: $[n] = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$, onde n é um inteiro positivo. Em particular, $[2n] = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, 2n\}$. Lembre-se também que dados dois inteiros a e b dizemos que são **relativamente primos** também chamados de **coprimos** se o único divisor comum de a e b é 1. Por exemplo, consideremos os números 2 e 3, note que o único número que divide ambos é 1, assim 2 e 3 são chamado de **relativamente primos**.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Exemplo 2.3. Qualquer subconjunto $A \subset [2n]$ de tamanho $n+1$ contém dois números relativamente primos.

Solução. Seja A um subconjunto de $[2n]$ onde A tem $n+1$ elementos. Separamos o conjunto $[2n]$ da seguinte forma: $\{1,2\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$. Note que dividimos $[2n]$ em n subconjuntos, os quais vamos considerar como sendo as casas. Chamando os elementos de A de pombos, quando distribuímos os $n+1$ elementos de A nos n subconjuntos $\{1,2\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$ de $[2n]$, segue do PCP que pelo menos dois elementos de A estão em um mesmo subconjunto, ou seja, são números consecutivos e, consequentemente, relativamente primos. ♢

Além disso, o PCP pode ser utilizado em combinação com outras ferramentas para resolver problemas que parecem complexos, mas que com o PCP temos uma solução elegante obtida como se fosse um passe de mágica, como nos próximos exemplos. Lembre-se que dizemos que dois números inteiros a e b possuem mesma paridade, se forem ambos pares ou ímpares, caso contrário dizemos que ambos tem paridades diferentes, por exemplo observe que 2 e 4 são ambos pares, assim dizemos que 2 e 4 tem a mesma paridade, do mesmo modo seja os números 2 e 5, note que 2 é par enquanto 5 é ímpar assim 2 e 5 tem paridade diferentes, do mesmo modo quando realizamos as operações entre esse números temos: $2 \times 5 = 10$ e $2 \times 4 = 8$, essa informação nos será útil para demostrar o seguinte exemplo.

Exemplo 2.4. Mostre que se n é ímpar e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é uma permutação do conjunto ordenado $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, então o produto $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_n - n)$ é par.

Solução. Como n é ímpar, então o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ possui $\dfrac{n+1}{2}$ números ímpares e $\dfrac{n-1}{2}$ números pares. Note que $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_n - n)$ é ímpar somente se cada fator $(\ a_k - k)$ for ímpar. Isto ocorre apenas quando a_k e k possuem paridades diferentes. Como $\dfrac{n+1}{2} > \dfrac{n-1}{2}$, segue do PCP que não é possível a permutação associar cada número ímpar a um número par, ou seja, deve existir k ímpar com a_k ímpar. Logo, $(a_k - k)$ é par e, portanto, $(a_1 - 1) \ldots (a_n - n)$ é par. ♢

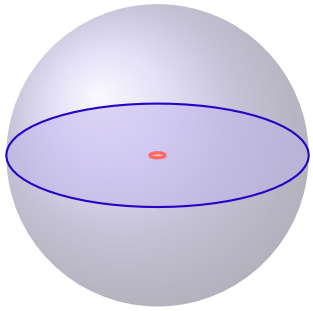
Para o próximo exemplo lembre-se que um hemisfério é uma das metades em que uma esfera foi dividida por um plano que passa pelo seu centro.

Exemplo 2.5. Dados 5 pontos em uma esfera, mostre que existe um hemisfério fechado (isto é, incluindo o equador) contendo pelo menos 4 pontos.

Solução. Dos 5 pontos dados na esfera, escolha dois pontos e considere o plano que passa por esses dois pontos e o centro da esfera. Com isso, dividimos nossa esfera em dois hemisférios. Agora que temos dois hemisférios e três pontos restantes, segue pelo PCP que algum dos

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

hemisférios deve conter pelo menos dois desses pontos, que eventualmente podem estar no equador. Com isso, algum dos hemisférios junto com o equador deve conter pelo menos 4 pontos.



♢

No que segue, vamos no lembrar de alguns conceitos de aritmética que nos serão úteis.

Definição 2.6. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$, dizemos que a *divide* b se existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$b = a \times q.$$

Neste caso, dizemos também que b é divisível por a.

Um resultado importante que iremos utilizar é o seguinte teorema, conhecido como **Algoritmo da Divisão** ou **Algoritmo da divisão de Euclides**.

Teorema 2.7 (Algoritmo da divisão de Euclides)**.** Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b > 0$. Então existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a = b \times q + r,$$

onde $0 \leq r < b$.

Segue do algoritmo da divisão que um número é divisível por n se, e somente se, deixa resto 0 na divisão por n. Por exemplo, ao aplicarmos o algoritmo da divisão com $a = 20$ e $b = 6$, temos

$$20 = 6 \times 3 + 2.$$

De modo análogo, para $a = 20$ e $b = 4$, temos

$$20 = 4 \times 5 + 0.$$

Note que o resto da divisão de 20 por 4 nos deixa resto 0, logo 20 é divisível por 4, enquanto que o resto da divisão de 20 por 6 é 3 e, assim, 20 não é divisível por 6.

Outra informação importante diz respeito que se dois números deixam mesmo o resto na divisão por n, então a diferença também é divisível por n. De fato, dados a e b inteiros,

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

suponhamos que $a = n \times q_1 + r_1$ e $b = n \times q_2 + r_2$. Então, $a - b = n(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$ e, portanto, se $r_1 = r_2$ obtemos que $a - b = n(q_1 - q_2)$, ou seja, n divide $a - b$.

Agora, estamos em condições de analisar o seguinte exemplo.

Exemplo 2.8. Dados doze inteiros quaisquer, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11.

Solução. A ideia para a resolução é mostrar que para qualquer sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ deve existir dois elementos que deixam o mesmo resto quando divididos por 11. Dada uma sequência com 12 elementos, fazendo a divisão por 11 de cada elemento, obtemos 12 restos. Mas pelo algoritmo da divisão, ao dividirmos um número por 11 temos apenas 11 possibilidades de restos. Segue pelo PCP que pelo menos dois números deixam o mesmo resto e, consequentemente, sua diferença é divisível por 11. ♢

Exemplo 2.9. Mostre que em qualquer coleção de n inteiros existe dois números cuja soma ou diferença é divisível por n.

Solução. Sejam $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ os possíveis restos da divisão por n. Se algum número deixa resto 1 e algum número deixa resto $n-1$, então sua soma é divisível por n. Caso não tenha algum número com resto 1 ou $n-1$, então restam apenas $n-1$ possibilidades de restos para os n números dados. Pelo PCP, pelo menos dois deles deixam o mesmo resto e, portanto, sua diferença é divisível por n. ♢

O PCP pode ser enunciado de outras formas, vamos agora generalizar o PCP, porém precisamos nos lembrar de uma definição, que nos será muito útil para essa generalização.

Definição 2.10. Definimos a **função menor inteiro** (ou piso) por:

$$\lfloor x \rfloor = \max \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\},$$

ou seja, $\lfloor x \rfloor$ é obtido como o maior inteiro menor do que ou igual a x.

Exemplo 2.11. Vamos exemplificar o cálculo do menor inteiro para alguns números reais. Por exemplo, sabemos que $\pi = 3,14....$ Assim, o maior inteiro menor ou igual a π é 3, de onde $\lfloor \pi \rfloor = 3$. De modo análogo, temos $\lfloor 1,21111 \rfloor = 1$ e $\lfloor \sqrt{17} \rfloor = 4$.

Agora podemos apresentar um caso mais geral do PCP.

Teorema 2.12. Se distribuímos n pombos em k casas, onde $k \leq n$, então ao menos uma das casas conterá, no mínimo, $\left\lfloor \dfrac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ pombos.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Demonstração. Suponha, por contradição, que dispusemos os n pombos nas k casas mas nenhuma delas ficou com pelo menos $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1$ pombos, então cada uma das k casas ficou com, no máximo, $\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$ pombos. Portanto, todas as casas juntas contêm, uma quantidade superior a, $k \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$ pombos. Mas, como

$$k \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \leq k \left(\frac{n-1}{k} \right) = n - 1 < n,$$

obtemos uma contradição. □

Exemplo 2.13. Em qualquer grupo de vinte pessoas, há ao menos três que nasceram num mesmo dia da semana.

Solução. Para resolver esse exemplo vamos usar a generalização do PCP. Para isso tome como casas os sete dias da semana e como pombos as 20 pessoas, então pelo PCP temos

$$\left\lfloor \frac{20-1}{7} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{19}{7} \right\rfloor + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Assim, ao menos três das pessoas terão nascido num mesmo dia da semana. ♢

No Exemplo 2.13 apresentamos para 20 pessoas, mas podemos generalizar que num grupo de 15 a 20 pessoas, há ao menos três que nasceram num mesmo dia da semana. A solução é a mesma do Exemplo 2.13.

Exemplo 2.14. Prove que todo conjunto de $2^n + 1$ vetores de $\mathbb{Z}^n$, ou seja, vetores da forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ com $a_i \in \mathbb{Z}$, contém um par de pontos distintos cuja média possui coordenadas inteiras.

Solução. Seja $A \subset \mathbb{Z}^n$ com $2^n + 1$ vetores. Para cada $v \in A$ temos que a primeira coordenada é par ou ímpar. Como são $2^n + 1$ vetores, pelo PCP temos,

$$\left\lfloor \frac{(2^n + 1) - 1}{2} \right\rfloor + 1 = 2^{n-1} + 1$$

vetores em que a primeira coordenada tem a mesma paridade. Defina $A_1 \subset A$ formado por esses $2^{n-1} + 1$ vetores. Para cada vetor em A_1 temos que a segunda coordenada é par ou ímpar. Como são $2^{n-1} + 1$ vetores, pelo PCP temos,

$$\left\lfloor \frac{(2^{n-1} + 1) - 1}{2} \right\rfloor + 1 = 2^{n-2} + 1$$

vetores em que a segunda coordenada tem a mesma paridade. Defina $A_2 \subset A_1$ formado por esses $2^{n-2} + 1$ vetores. Observe que os vetores de A_2 tem a primeira coordenada com a

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

mesma paridade de modo análogo a segunda coordenada tem a mesma paridade, porém as coordenadas primeiras e segunda são diferentes. Repetindo o processo n-vezes, obtemos

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n$$

em que A_k é formado por $2^{n-k} + 1$ vetores tais que as k primeiras coordenadas possuem a mesma paridade. Em particular, A_n possui 2 vetores em que todas as coordenadas possuem a mesma paridade, e portanto, a média desses vetores possui coordenada inteira. ♢

Lembre-se que falamos que o PCP tinha várias aplicação em outras áreas, os próximos dois exemplos são teoremas da área de análise que, podemos demostrar utilizando essa bela ferramenta. O primeiro é conhecido como **teorema de Erdős-Szekeres**.

Teorema 2.15. Qualquer sequência de $n^2 + 1$ reais distintos, sempre podemos encontrar uma subsequência crescente ou decrescente de $n + 1$ termos.

Demonstração. Seja $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n^2+1}\}$ o conjunto formado pelos $n^2 + 1$ termos de uma sequência dada, e suponha que a mesma não possua uma subsequência crescente com pelo menos $n + 1$ termos. Então, toda subsequência crescente que começa em um certo $x \in A$ tem no máximo n termos, definimos,

$$f : A \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

pondo $f(x)$ como sendo o tamanho da maior subsequência crescente da sequência dada, começando com x. Como A tem $n^2 + 1$ elementos, pelo PCP teremos pelo menos

$$\left\lfloor \frac{(n^2 + 1) - 1}{n} \right\rfloor + 1 = n + 1$$

elementos de A, $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$, com $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1}$ com $f(x_{i_j}) = f(x_{i_k})$. Se $x_{i_j} < x_{i_l}$ para certos $1 \leq j \leq l \leq n + 1$ teríamos $f(x_{i_j}) > f(x_{i_l})$, uma vez que poderíamos aumentar uma sequência crescente começando em x_{i_l} colocando x_{i_j} antes. Mas isso é absurdo, de maneira que

$$x_{i_1} > x_{i_2} > \ldots > x_{i_{n+1}}.$$

Assim, temos uma subsequência decrescente de $n + 1$ termos. □

Da mesma maneira que usamos PCP para demostrar esse teorema, mostremos nosso segundo exemplo que diz respeito a densidade do conjunto dos número racionais $\mathbb{Q}$ dentro dos reais $\mathbb{R}$ **conhecido como teorema de Dirichlet**. E esse resultado nos garante que que existe um número racional tão próximo de um número real quanto você queira.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Teorema 2.16 (Dirichlet)**.** Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n > 1$, um inteiro, existe um racional $\frac{p}{q}$, onde $1 < q < n$, tal que:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}.$$

Demonstração. Consideremos os $n+1$ números $0, \alpha - \lfloor\alpha\rfloor, 2\alpha - \lfloor 2\alpha\rfloor, ..., n\alpha - \lfloor n\alpha\rfloor$, que pertencem ao intervalo [0,1]. Assim dividimos o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos de comprimento $\frac{1}{n}$.

Como cada um dos $n+1$ números pertence ao intervalo $[0,1]$, podemos concluir pelo PCP que existem s e t, $0 < s < t < n$, tais que $s\alpha - \lfloor s\alpha\rfloor$ e $t\alpha - \lfloor t\alpha\rfloor$ pertencem ao mesmo subintervalo. Sejam $q = t - s$ e $p = \lfloor t\alpha\rfloor - \lfloor s\alpha\rfloor$. Assim temos,

$$|q\alpha - p| = |(t-s)\alpha - (\lfloor t\alpha\rfloor - \lfloor s\alpha\rfloor)| = |(\alpha t - \lfloor t\alpha\rfloor) - (\alpha s - \lfloor s\alpha\rfloor)| < \frac{1}{n}.$$

Como $s < t < n$ temos, $|\alpha q - p| < \frac{1}{n}$ dividindo ambos os lados por q, temos:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq},$$

e o resultado segue. □

Quem foi Dirichlet? (1805-1859)

A família de Lejeune Dirichlet veio da cidade belga de Richelet, onde morava o avô de Dirichlet. Isto explica a origem do seu nome, que vem de "Le jeune de Richelet", significando "Jovem de Richele". Seu pai era o agente dos correios de Düren, sua cidade natal, situada a meio caminho entre Aachen e Colônia. Mesmo antes de ingressar no Ginásio de Bonn, em 1817, aos 12 anos, ele desenvolveu uma paixão pela matemática e gastou seu dinheiro na compra de livros de matemática. Depois de dois anos no Ginásio de Bonn, seus pais decidiram que preferiam que ele frequentasse o Colégio Jesuíta de Colônia, e lá ele teve a sorte de ser ensinado por Ohm. Aos 16 anos, Dirichlet havia concluído suas qualificações escolares e estava pronto para entrar na universidade. No entanto, os padrões nas universidades alemãs não eram elevados nessa época, então Dirichlet decidiu estudar em Paris. Dirichlet partiu para a França levando consigo as "Disquisitiones Arithmeticae" de Gauss, uma obra que ele valorizava e mantinha constantemente consigo, como outros fariam com a Bíblia. Em Paris, em maio de 1822, Dirichlet logo contraiu varíola. Isso não o afastou por muito

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

tempo das aulas no Collège de France e na Faculté des Sciences, e logo ele pôde retornar às aulas. Teve como professores alguns dos principais matemáticos e pôde lucrar muito com a experiência de entrar em contato com Biot, Fourier, Francoeur, Hachette, Laplace, Lacroix, Legendre e Poisson. Em 1831, Dirichlet foi nomeado para a Academia de Berlim e um salário melhorado o colocou em posição de se casar, e ele se casou com Rebecca Mendelssohn, uma das duas irmãs do compositor Felix Mendelssohn. Dirichlet teve um amigo de longa data, Jacobi, que lecionou em Königsberg, e os dois exerceram considerável influência um sobre o outro em suas pesquisas em teoria dos números. Dirichlet tinha uma elevada carga docente na Universidade de Berlim, sendo também obrigado a lecionar no Colégio Militar, e em 1853 queixou-se numa carta ao seu aluno Kronecker que tinha treze palestras por semana para dar, além de muitas outras funções. Foi, portanto, um alívio quando, com a morte de Gauss em 1855, lhe foi oferecida a cátedra em Göttingen. Dirichlet não aceitou imediatamente a oferta de Göttingen, mas aproveitou-a para tentar obter melhores condições em Berlim. Ele solicitou ao Ministério da Cultura da Prússia que lhe fosse permitido encerrar as aulas no Colégio Militar. No entanto, ele não recebeu uma resposta rápida ao seu modesto pedido, então escreveu a Göttingen aceitando a oferta da cátedra de Gauss. Depois de ter aceitado a oferta de Göttingen, o Ministério da Cultura da Prússia tentou oferecer-lhe melhores condições e salários, mas isso chegou tarde demais. A vida mais tranquila em Göttingen parecia agradar a Dirichlet. Ele tinha mais tempo para pesquisa e alguns excelentes alunos de pesquisa. No entanto, infelizmente, ele não aproveitaria a nova vida por muito tempo. No verão de 1858, ele deu uma palestra em uma conferência em Montreux, mas enquanto estava na cidade suíça, sofreu um ataque cardíaco. Ele voltou para Göttingen com muita dificuldade e, embora gravemente doente, sentiu a tristeza adicional de que sua esposa morreu de derrame. Das suas contribuições, algumas são as mais famosas: em teoria dos números, ele descobriu que em qualquer progressão aritmética, com o primeiro termo coprimo à diferença, existem infinitos números primos. Na mecânica, ele investigou o equilíbrio dos sistemas e a teoria do potencial. Essas investigações começaram em 1839 com artigos que forneciam métodos para avaliar integrais múltiplas, e ele aplicou isso ao problema da atração gravitacional de um elipsóide em pontos internos e externos. Dirichlet também é conhecido por seus artigos sobre condições de convergência de séries trigonométricas e o uso das séries para representar funções arbitrárias. Gotthold Eisenstein, Leopold Kronecker e Rudolf Lipschitz foram seus alunos. Após a sua morte, os escritos de Dirichlet e outros resultados em teoria dos números foram recolhidos, editados e publicados por seu amigo e colega matemático Richard Dedekind sob o título "Vorlesungen über Zahlentheorie" (Aulas sobre Teoria dos Números). Ele foi sepultado no Bartholomäusfriedhof em Göttingen. Para mais informações, consulte (O'CONNOR; ROBERTSON, 2024b)

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Figura 1 – Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Fonte:(O'CONNOR; ROBERTSON, 2024b)

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

3 Grafos

Os grafos surgiram como uma ferramenta usada por Euler (1707-1783) em um problema que se originou na cidade de Königsberg na antiga Prússia, hoje conhecida como Kaliningrado na Rússia. A cidade era dividida pelo rio Pregel que continha duas grandes ilhas, as quais eram conectadas entre si por sete pontes. O problema, popularmente apresentado, consistia em encontrar um passeio que atravessasse todas as sete pontes uma única vez sem repetir nenhuma ponte. As pessoas tentavam, mas ninguém conseguia encontrar tal passeio, o que levantou a questão de se isso seria de fato possível (SOUZA, 2013). Leonhard Euler deu uma resposta negativa para esse problema e com isso estabeleceu as fundações para a teoria dos grafos, uma área importante da matemática. Vamos enunciar algumas definições retiradas da seguinte referência (BOTLER *et al.*, 2021) que nos serão úteis. Posteriormente quando formos falar sobre coloração de arestas e sua relação com Teoria de Ramsey, observe que neste trabalho vamos apresentar resultados considerando apenas grafos simples.

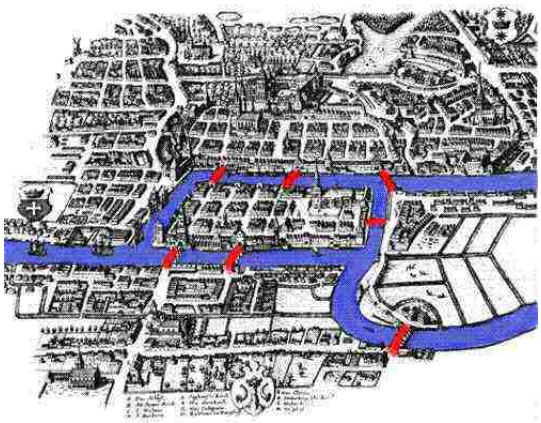


Figura 2 – Um mapa da cidade com suas pontes (O'CONNOR; ROBERTSON, 2024e)

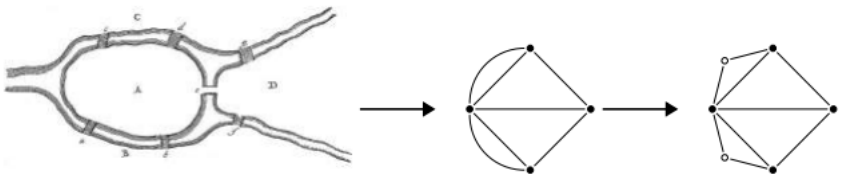
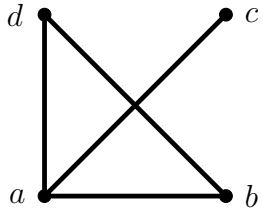


Figura 3 – As setes pontes e sua modelagem por grafos

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

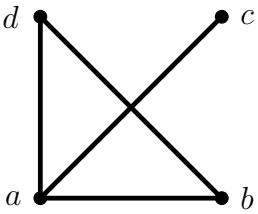
Definição 1. Um **grafo** G, é uma estrutura composta por um conjunto de **vértices** $V(G)$ e um conjunto $E(G)$ de pares não ordenados de vértices, chamado de conjunto de **arestas** de G, denotamos o grafo como um par ordenado constituído de vértices e arestas $G = (V; E)$.

Exemplo 3.1. Seja G um grafo em que o conjunto de vértices é $V = \{a, b, c, d\}$ e o conjunto de arestas é $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, d\}\}$. Uma forma geométrica e mais intuitiva de trabalhar com grafos é pensar nos vértices como pontos no plano e as arestas como linhas ligando os vértices. No nosso exemplo, podemos representar o grafo da seguinte forma.

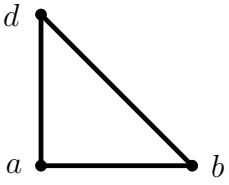


Definição 3.2. Um grafo H é um **subgrafo** de G se $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$.

Exemplo 3.3. Seja G o grafo do Exemplo 3.1 se escolhermos o conjunto de vértices $V = \{a, d, b\}$ e o conjunto de arestas $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, d\}\}$ temos que H é subgrafo de G pois $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$.



Grafo G



Subgrafo H de G

Definição 3.4. Seja G um grafo com n vértices, dizemos que tal grafo é **completo** quando todos seus pares vértices estão ligadas entre si por arestas. Quando temos um subgrafo H de G donde H tem todos seus pares de vértices ligados entre si por arestas dizemos que H é um subgrafo completo e chamamos tal grafo de **clique**, e denotamos por K_n.

Abaixo, ilustramos grafos completos com 3, 4, 5 vértices

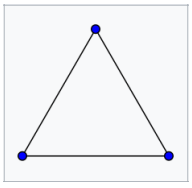


Figura 4 – Uma grafo completo com 3 vértices.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

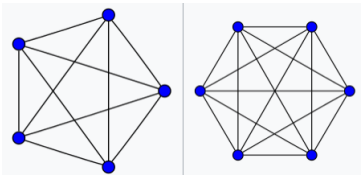
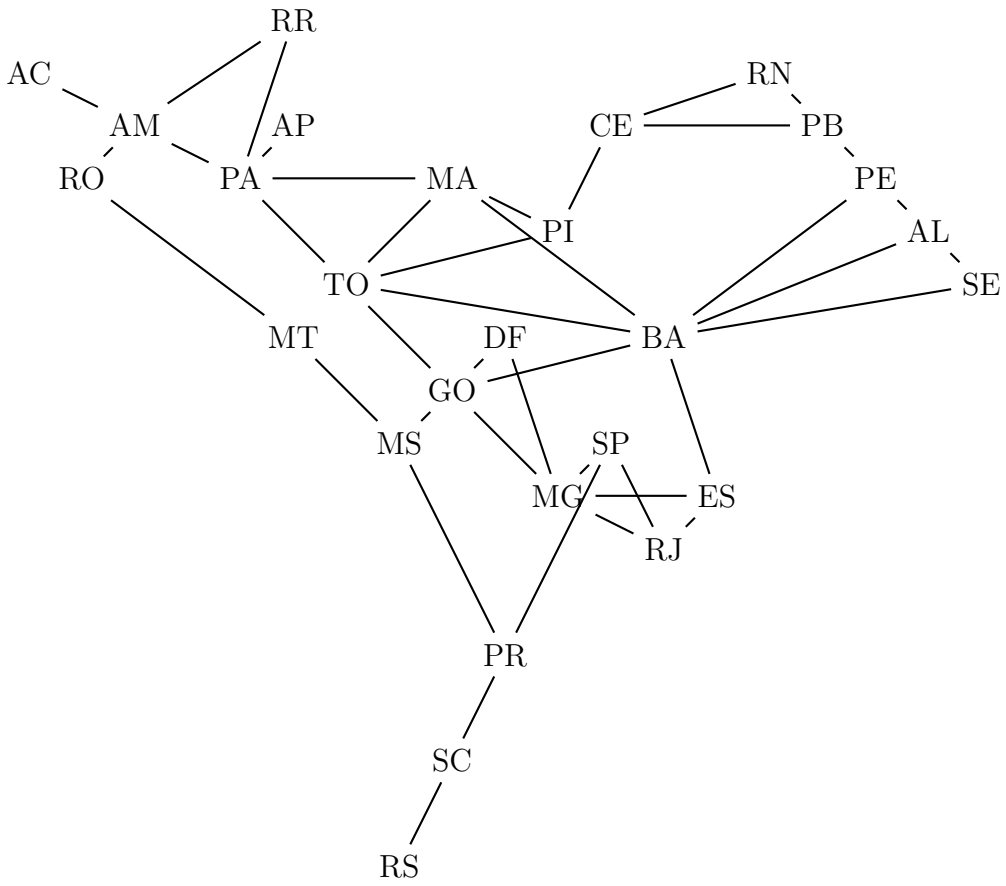


Figura 5 – Uma grafo completo com 5 vértices à esquerda, e outro grafo completo com 6 vértices à direita.

Podemos utilizar grafos para modelagem de problemas, assim poderemos ter uma visão macroscópica do todo, o que nos permite ter uma ideia geral do tipo de problema que estamos tentando resolver e como resolver ele.

Exemplo 3.5. Suponha que você que estudar quais estados brasileiros e quais fazem fronteiras entre si. Chamando o conjunto dos estados do Brasil de $V(G) = \{AC, AL, AP, AM, BA, CE, DF, ES, GO, MA, MT, MS, MG, PA, PB, PR, PE, PI, RJ, RN, RS, RO, RR, SC, SE, SP, TO\}$ e associando uma aresta entre dois estados que fazem fronteira, podemos modelar usando grafos.



Veja que por meio de grafos conseguimos simplificar o que queremos estudar.

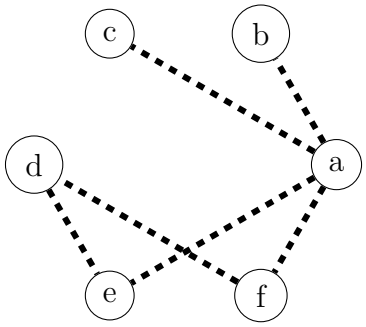
Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

No que segue, ao nos referirmos a uma aresta $\{a, b\}$ de um grafo, também podemos utilizar a notação ab, como uma forma de simplificar a notação.

Denotamos por $N_G(u)$ o conjunto dos **vértices adjacentes** (ou vizinhos) a u, ou seja,

$$N_G(u) = \{v \in V \mid uv \in E\}.$$

Exemplo 3.6. Vamos determinar os vértices adjacentes a do grafo G.



Grafo G

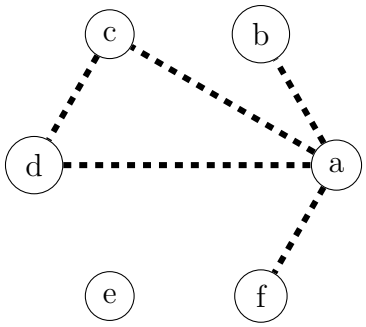
$$N_G(a) = \{b, c, e, f\}$$

Definição 3.7. Seja $G = (V; E)$ um grafo. Se $u \in V$, o **grau** de u denotado por $d_G(u)$, é o número de vértices adjacentes a u, ou equivalentemente, é o número de arestas que incidem em u.

Segue diretamente da definição que:

$$d_G(u) = \#N_G(u)$$

Exemplo 3.8. Vamos contar os graus dos vértices do grafo G dado na figura abaixo. Fixemos um vértice para fazermos a contagem. Por exemplo, para o vértice a, determinamos $N_G(a)$ e contamos quantos elementos possui.



Grafo G

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Com efeito, analisando o grafo temos:

$$d_G(a) = \#N_G(a) = \#\{b, c, d, f\} = 4.$$

De modo análogo, temos:

$$d_G(b) = \#N_G(b) = 1.$$

$$d_G(c) = \#N_G(c) = 2.$$

$$d_G(b) = \#N_G(d) = 2.$$

$$d_G(e) = \#N_G(e) = 0.$$

$$d_G(f) = \#N_G(f) = 1.$$

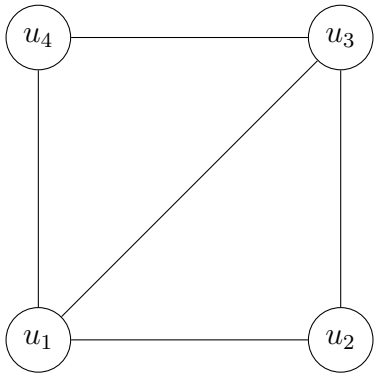
O próximo teorema que vamos enunciar, exibe uma relação entre o número de arestas de um grafo e o grau de cada vértice do grafo.

Teorema 3.9. Em um grafo $G = (V; E)$, a soma dos graus dos vértices é sempre igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{u \in V} d_G(u) = 2|E|.$$

Demonstração. Vamos usar contagem dupla. Assim basta observar que se $uv = \{u, v\}$ é uma aresta de G, então E é contada exatamente duas vezes no lado esquerdo da igualdade, uma vez na parcela $d_G(u)$ e outra vez na parcela $d_G(v)$. Portanto, o lado direito da igualdade tem que ser igual a $2|E|$, já que tal número também conta cada aresta exatamente duas vezes. □

Exemplo 3.10. Seja G grafo dado pela figura abaixo, vamos contar os grau de cada um dos seus vértices $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.



$$\sum d_G(u) = d_G(u_1) + d_G(u_2) + d_G(u_3) + d_G(u_4) = 3 + 2 + 3 + 2 = 10$$

agora olhando para a quantidade de arestas de tal grafo, vemos que $|E| = 5$

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Definição 2. Uma $k-$**coloração** das arestas de um grafo G, é uma função

$$\chi : E(G) \longrightarrow [k]$$

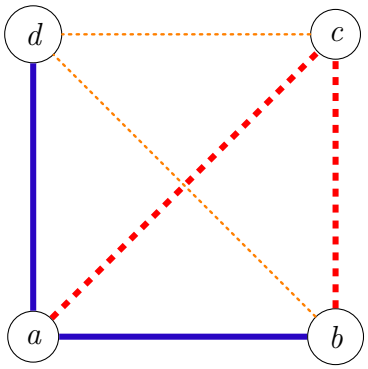
que associa uma cor para cada uma das arestas de G.

Exemplo 3.11. Vamos considerar o grafo G com conjunto de vértices $V(G) = \{a, b, c, d\}$ e conjunto de arestas $E(G) = \{ac, ad, ab, bc, dc, db\}$ colorir as arestas com as cores azul (linha contínua), vermelho (linha tracejada) e laranja (linha pontilhada). Assim temos que as arestas (observe a figura abaixo), tem as cores:

$$\{ad\} \text{ e } \{ab\} \mapsto \text{azul (contínua)}$$

$$\{dc\} \text{ e } \{db\} \mapsto \text{laranja (pontilhada)}$$

$$\{ac\} \text{ e } \{bc\} \mapsto \text{vermelha (tracejada)}$$



Exemplo 3.12. Mostre que todo grafo simples tem pelo menos dois vértices com graus iguais.

Solução. Seja G um grafo com n vértices. Como estamos considerando apenas grafos simples, ou seja, sem loops e no máximo uma aresta para cada par de vértices, então o grau máximo de cada vértice é $n - 1$. Se o grafo tiver dois ou mais vértices isolados, ou seja, com grau 0, acabou. Se o grafo tiver apenas um vértice isolado, então considerando o subgrafo de G obtido pela exclusão desse vértice, teremos um grafo com $n - 1$ vértices e no máximo $n - 2$ possibilidades para os graus. Segue do PCP que este subgrafo possui dois vértices com mesmo grau e, portanto, G também possui dois vértices com mesmo grau. Por fim, se não houver vértices isolados, então temos um grafo com n vértices e no máximo $n-1$ possibilidades para os graus. Novamente pelo PCP, segue que o grafo G possui dois vértices com o mesmo grau.

♢

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Quem foi Leonhard Euler? (1707-1783)

Leonhard Euler foi um matemático suíço que fez enormes contribuições para uma vasta gama de áreas da matemática e da física, incluindo geometria analítica, trigonometria, geometria, cálculo e teoria dos números. Quando criança, Euler foi enviado para estudar em Basileia, e durante esse tempo morou com sua avó materna. A escola era, aparentemente, bastante precária, e Euler não aprendeu matemática lá. No entanto, seu interesse pela matemática foi certamente despertado pelos ensinamentos de seu pai, e ele estudou textos de matemática por conta própria, além de ter aulas particulares. O pai de Euler queria que o filho o seguisse na carreira eclesiástica e o enviou para a Universidade de Basileia para se preparar para o ministério. Euler entrou na universidade em 1720, aos 14 anos, inicialmente para obter uma formação geral antes de prosseguir para estudos mais avançados. Em 1723, Euler concluiu seu mestrado em filosofia, tendo comparado e contrastado as ideias filosóficas de Descartes e Newton. Ele começou seus estudos em teologia no outono de 1723, seguindo os desejos de seu pai, mas, embora fosse um cristão devoto por toda a vida, não encontrou o mesmo entusiasmo pelo estudo da teologia, grego e hebraico que encontrou na matemática. Euler obteve o consentimento de seu pai para mudar para a matemática depois que Johann Bernoulli o persuadiu. O fato de o pai de Euler ter sido amigo de Johann Bernoulli durante a faculdade sem dúvida facilitou a persuasão. Em 5 de abril de 1727, Euler deixou Basileia para ir à Rússia. Ele viajou de barco pelo Reno, cruzou os estados alemães de carroça postal e, depois, de barco de Lübeck, chegando a São Petersburgo em 17 de maio de 1727. Ele ingressou na Academia de Ciências de São Petersburgo dois anos após sua fundação por Catarina I, esposa de Pedro, o Grande. A pedido de Daniel Bernoulli e Jakob Hermann, Euler foi nomeado para a divisão físico-matemática da Academia, em vez do cargo de fisiologia originalmente oferecido a ele. Em 1733, Euler foi nomeado para a cátedra sênior de matemática. A melhoria financeira resultante dessa nomeação permitiu que Euler se casasse, o que ele fez em 7 de janeiro de 1734, casando-se com Katharina Gsell, filha de um pintor do Ginásio de São Petersburgo. Katharina, assim como Euler, era de família suíça. Eles tiveram 13 filhos ao todo, embora apenas cinco tenham sobrevivido à infância. Euler afirmou que fez algumas de suas maiores descobertas matemáticas enquanto segurava um bebê nos braços com outras crianças brincando aos seus pés. Em 1740, Euler já tinha uma reputação elevada, tendo ganho o Grande Prêmio da Academia de Paris em 1738 e 1740. Em ambas as ocasiões, ele dividiu o primeiro prêmio com outros. A reputação de Euler o fez receber uma oferta para ir a Berlim, mas, inicialmente, ele preferiu permanecer em São Petersburgo. No entanto, a turbulência política na Rússia tornou a posição dos estrangeiros particularmente difícil e contribuiu para que Euler mudasse de ideia. Aceitando uma oferta melhorada, Euler, a convite de Frederico, o Grande, foi para Berlim, onde foi planejada uma Academia de Ciências para substituir

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

a Sociedade de Ciências. Ele deixou São Petersburgo em 19 de junho de 1741, chegando a Berlim em 25 de julho. Em 18 de setembro de 1783, Euler passou a primeira metade do dia de maneira normal. Deu aula de matemática para um dos netos, fez alguns cálculos com giz em duas lousas sobre o movimento de balões; em seguida, discutiu com Lexell e Fuss sobre o planeta recentemente descoberto, Urano. Por volta das cinco horas da tarde, ele sofreu uma hemorragia cerebral e disse apenas "Estou morrendo" antes de perder a consciência. Ele faleceu por volta das onze horas da noite. O trabalho de Euler em matemática é tão vasto que ele foi o escritor mais prolífico de todos os tempos na área. Ele fez grandes avanços no estudo da geometria analítica moderna e da trigonometria, sendo o primeiro a considerar seno e cosseno como funções, e não como cordas, como Ptolomeu havia feito. Ele fez contribuições decisivas e formativas à geometria, ao cálculo e à teoria dos números. Integrou o cálculo diferencial de Leibniz e o método de fluxões de Newton na análise matemática. Introduziu funções beta e gama e fatores integradores para equações diferenciais. Estudou mecânica do contínuo, teoria lunar com Clairaut, o problema dos três corpos, elasticidade, acústica, teoria ondulatória da luz, hidráulica e música. Lançou as bases da mecânica analítica, especialmente em sua "Teoria dos Movimentos de Corpos Rígidos" (1765). Poderíamos afirmar que a análise matemática começou com Euler. Em 1748, em "Introductio in analysin infinitorum", Euler tornou as ideias de Johann Bernoulli mais precisas na definição de uma função e afirmou que a análise matemática era o estudo das funções. (O'CONNOR; ROBERTSON, 2024c)

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Figura 6 – Leonhard Euler. Fonte (O'CONNOR; ROBERTSON, 2024c)

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

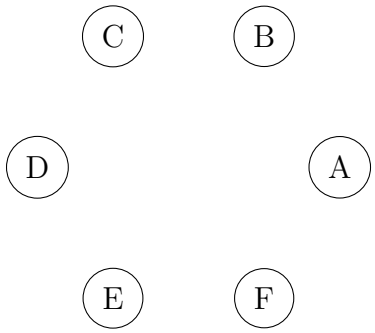
4 Teoria de Ramsey

A Teoria de Ramsey, nomeada em homenagem ao matemático britânico Frank P. Ramsey, foi desenvolvida no início do século XX. Essa teoria emergiu não apenas como um marco no campo da combinatória, mas também como um pilar fundamental para o entendimento de estruturas e padrões dentro de sistemas aparentemente caóticos. Em sua essência, a Teoria de Ramsey aborda uma questão fundamental: dentro de qualquer configuração grande e complexa, seja ela qual for, certas ordens ou padrões não apenas são possíveis, mas inevitáveis. Esta ideia, embora simples, tem implicações profundas, revelando como, sob condições específicas, a ordem emerge naturalmente do caos. Com a bagagem adquirida nos capítulos anteriores, podemos agora introduzir alguns conceitos básicos de Teoria de Ramsey. Este capítulo é baseado principalmente na seguinte referência (BOTLER *et al.*, 2021). Além da fonte previamente mencionada, foi consultada uma referência suplementar (MACIEL, 2020).

Começamos com o seguinte problema motivador:

Quantas pessoas precisamos convidar para uma festa de maneira que possamos garantir que pelo menos três se conheçam ou três se desconheçam?

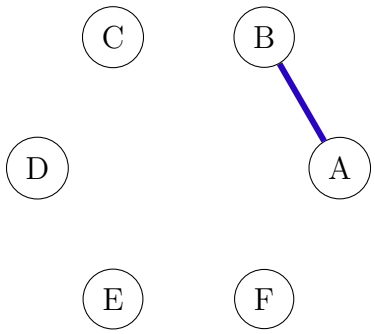
Vamos supor que a relação conhecer é simétrica, ou seja, se A conhece B, então B conhece A. Afirmamos que 6 pessoas é suficiente para resolver o problema. Para resolver esse problema vamos pensar em termos de grafos. Dados 6 pessoas, digamos Ana, Beatriz, Carlos, Douglas, Emanuel e Felipe, associamos cada pessoa a um vértice no plano:



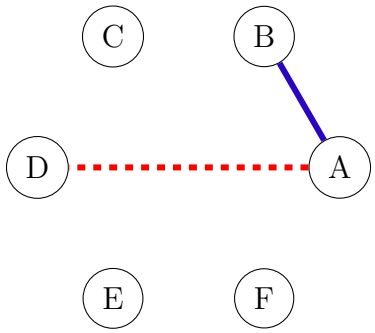
Se A e B se conhecem, ligamos os pontos A e B por um segmento de reta na cor azul

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

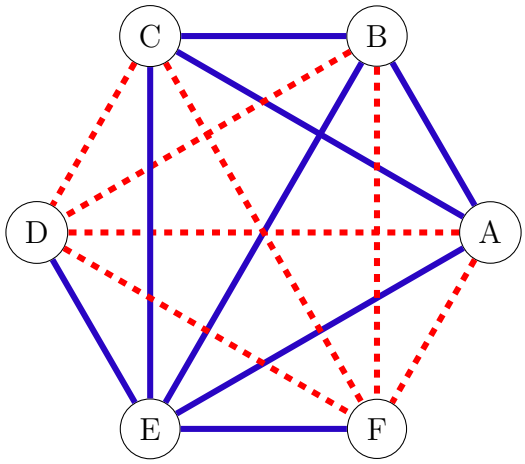
(utilizaremos a linha contínua para a cor azul) .



Agora, se A e D não se conhecem, ligamos os pontos A e D por um segmento de reta na cor vermelha (utilizaremos a linha tracejada para a cor vermelha).



Procedendo desta forma com todos os pares de pessoas obtemos uma figura como a seguinte:



Em termos de grafos, a figura acima é um grafo completo com 6 vértices K_6 junto com uma 2-coloração,

$$\chi : E(K_6) \to \{\text{azul, vermelho}\}.$$

Saber se 3 pessoas se conhecem é o mesmo que saber se o grafo acima possui um triângulo azul, ou seja, se existe um subgrafo K_3 monocromático na cor azul. De modo análogo, saber

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

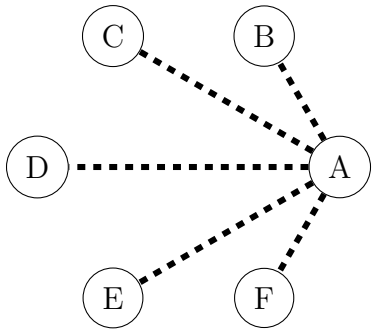
se tem 3 pessoas que se desconheçem é o mesmo que saber se o grafo acima possui um subgrafo K_3 monocromático na cor vermelha. Dado o grafo K_6 com uma 2-coloração, é fácil inspecionar e decidir se existe um triângulo azul ou um triângulo vermelho. Entretanto, para resolver o problema, precisamos provar que todas as possíveis 2-colorações de K_6 possuem ou um triângulo azul ou triângulo vermelho. Note que o número de arestas em K_6 é

$$\binom{6}{2} = 15$$

e, como cada aresta pode ser colorida com 2 cores, temos

$$2^{15} = 32768$$

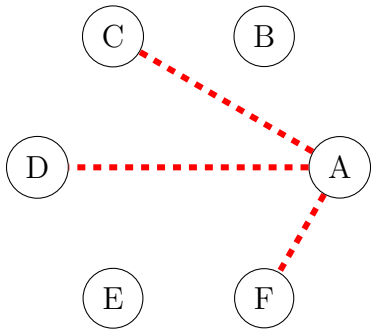
colorações para verificar. Com a ajuda de um computador, isso pode ser verificado em pouco tempo. Entretanto, vamos utilizar o PCP para apresentar uma prova simples do seguinte fato: toda 2-coloração $\chi : E(K_6) \to \{\text{azul, vermelho}\}$ possui um triângulo azul ou vermelho. Com efeito, fixe um vértice de K_6, digamos A, e considere as 5 arestas que são adjacentes a A:



Cada aresta é colorida em azul ou vermelho. Como temos 5 arestas e 2 cores, segue do PCP que pelo menos

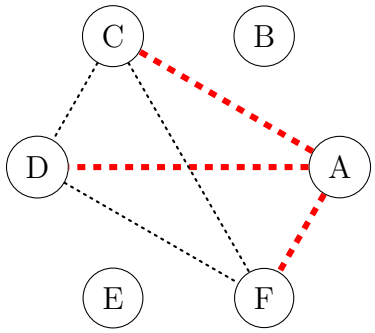
$$\left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 3$$

arestas recebem a mesma cor. Sem perda de generalidade, vamos supor que 3 arestas recebem a cor vermelha, digamos que seja assim:

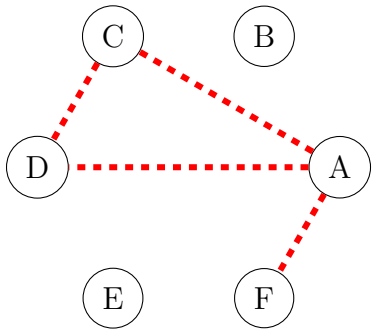


Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

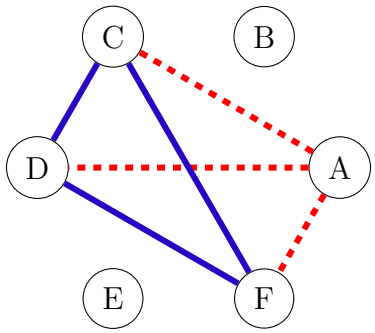
Agora, considere o triângulo formado pelos vértices C, D e F:



Se alguma das arestas do triângulo $\triangle CDF$ for vermelho, digamos CD, então obteremos um triângulo vermelho:



Caso contrário, todas as arestas do triângulo $\triangle CDF$, são azuis e obtemos um triângulo azul:



E, portanto, fica verificado que qualquer 2-coloração das arestas de K_6 possui um triângulo azul ou vermelho. ♢

Note que com K_6 conseguimos 3 pessoas que se conhecem ou 3 que não se conhecem. Esse problema é equivalente a se perguntar se um grafo completo com 6 vértices conseguimos um triângulo azul ou um triângulo vermelho. Assim naturalmente surge a seguinte pergunta: para quaisquer números inteiros $s, t \geq 2$, existe algum número inteiro $n \geq 2$ satisfazendo a condição de que, qualquer 2-coloração do grafo completo K_n possui uma clique K_s ou uma clique K_t monocromática? A resposta, fornecida pelo teorema de Ramsey, é afirmativa. Esse

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

resultado nos mostra que, independentemente de como as arestas de um grafo completo são coloridas, inevitavelmente surgirão padrões uniformes quando o número de vértices é suficientemente grande. O seguinte teorema é um caso particular onde $s = t$, porém considerando r cores. Note que, para $r = 2$ recaímos no problema apresentado acima. O seguinte teorema foi retirado de (BOTLER *et al.*, 2021).

Teorema 4.1 (Ramsey-Finito)**.** Para todo $k, r \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que vale o seguinte. Toda r-coloração das arestas do grafo completo K_n possui uma clique monocromática de K_k.

Demonstração. Vamos começar escolhendo um vértice de $A_0 = V(K_n)$; dessa vez vamos chama-lo de v_1, pelo PCP existe uma cor $c_1 \in [r]$ tal que v_1 é incidente a pelo menos em $\left\lfloor \frac{n-1}{r} \right\rfloor$ arestas da cor c_1. Seja

$$A_1 = \{u \in V(K_n) : \chi(v_1u) = c_1\}$$

o conjunto dos extremos diferentes de v_1 dessas arestas, então $|A_1| \geqslant \left\lfloor \frac{n-1}{r} \right\rfloor$. Agora escolha um vértice $v_2 \in |A_1|$ e repetimos o processo. Obtemos uma cor c_2 e um conjunto

$$A_2 = \{u \in A_1 : \chi(v_2u) = c_2\}$$

de tamanho pelo menos $\left\lfloor \frac{|A_1|-1}{r} \right\rfloor$. Repetindo o processo, obtemos uma sequência de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_t$, cores $c_1, c_2, \ldots, c_t \in [r]$ e conjuntos $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_t$ tais que.

$$v_i \in A_{i-1} \text{ e } \chi(v_iu) = c_i$$

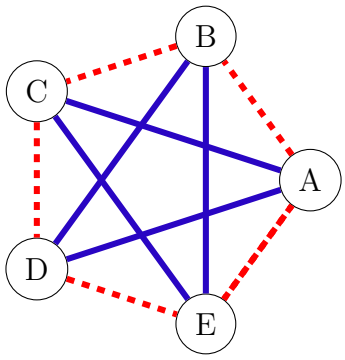
para todo $1 \leq i \leq t$ e todo $u \in A_i$. Em particular, $\chi(v_iv_j) = c_i$ para todo $1 \leq i < j \leq t$ Agora, se n é suficientemente grande, então podemos continuar esse processo até $t > r(k-1)$. Pelo PCP, há uma cor $c \in [r]$ que aparece pelo menos k vezes na sequência $(c_1, c_2, \ldots, c_t)$. Seja $A = \{v_i : c_i = c\}$, observe que $\chi(uv) = c$ para todo $u, v \in A$. Então A é uma clique monocromática de tamanho pelo menos k, como desejado. □

O Teorema de Ramsey garante que dado k vai existir n tal que qualquer 2-coloração de K_n possui um subgrafo K_k monocromático, porém não diz qual deve ser o tamanho de n. Mais para adiante, também mostraremos que dados s e t, então existe n tal que qualquer 2-coloração de K_n possui um subgrafo K_s ou K_t monocromático. Entretanto, não é apresentado o valor de n. Assim, surge o problema de determinar o menor n que satisfaz o teorema.

Definição 4.2. O **número de Ramsey** (denotado de $R(s, t)$) é o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que toda 2-coloração das arestas de K_n contém uma clique K_s monocromática ou uma clique K_t monocromática.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Como visto no problema da festa, para $n = 6$ garantimos que qualquer 2-coloração do grafo completo K_6 possui uma clique monocromática K_3. Em particular, isso mostra que $R(3,3) \leq 6$. Para provar que $R(3,3) = 6$, basta exibir uma 2-coloração de K_5 sem nenhuma clique monocromática K_3. Isto é apresentado abaixo:



Observe que a coloração de K_5 dada acima não possui qualquer triângulo azul ou vermelho. Assim temos que

$$R(3,3) = 6.$$

Outros números de Ramsey conhecidos são:

$$R(3,4) = 9$$
$$R(3,5) = 14$$
$$R(4,4) = 18.$$

Em geral, não são conhecidos os números exatos de Ramsey, mas é possível determinar limitantes para eles. Por exemplo, é conhecido que

$$43 \leq R(5,5) \leq 48 \; e \; 102 \leq R(6,6) \leq 165.$$

Achar os números de Ramsey, é uma tarefa bastante difícil, a esse respeito **Paul Erdös** nos conta uma anedota:

> *Extraterrestres dominam a Terra, mas prometem nos devolver a liberdade caso seja encontrado o valor exato de $R(5,5)$. Erdös evocaria um projeto coletivo e universal para resolver a questão pacificamente. Mas caso a condição seja sobre $R(6,6)$, uma guerra contra os invasores teria mais chances de êxito do que a tentativa diplomática. (BRUSAMARELLO; CARMELO, 2018)*

Sabemos do Teorema 4.1 que sempre existe $R(k,k)$, entretanto é muito difícil de encontrar tais valores. Em geral, para provar que $R(k,k) = n$, precisamos mostrar que $R(k,k) \leq n$

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

e $R(k,k) \geq n$. Observe que, para provar que $R(k,k) \geq n$, devemos verificar que qualquer 2-coloração de um grafo completo K_n possui um subgrafo monocromático K_k. Note que K_n possui $\binom{n}{2}$ arestas e, portanto, existem $2^{\binom{n}{2}}$ colorações possíveis. Por exemplo, para provar que $R(4,4) = 18$ temos

$$2^{\binom{18}{2}} = 2^{153},$$

colorações diferentes possíveis. Talvez possamos conseguir calcular com a tecnologia de hoje. Mas e se tentarmos calcular para $R(5,5)$? Nesse caso os computadores levariam bastante tempo. Vamos imaginar que queremos verificar que $R(5,5) \geq 50$. Isso nos daria $2^{\binom{50}{2}} = 2^{1225}$ maneiras distintas de colorir as arestas do grafo completo K_{50}. Assim, suponhamos que um super computador possa verificar 2^{1000} colorações por segundo, ou seja, ele levará 1 segundo para verificar se cada uma das 2^{1000} colorações possui ou não uma clique K_5 monocromático. Com uma regra de três simples, sendo x a quantidade de tempo que queremos achar, temos:

$$\frac{2^{1000}}{2^{1225}} = \frac{1}{x}$$

assim temos que $x = 2^{1225-1000} = 2^{225}$ segundos. Convertendo x para anos, temos que o tempo necessário será de $1,70 \times 10^{60}$ anos, o que é muito mais tempo do que a existência do sol. Como comparação, a idade do sol é $4,97 \times 10^{9}$ anos. Da mesma forma, para verificar que $R(6,6) \geq 100$, temos

$$2^{\binom{100}{2}} = 2^{4950}$$

possíveis colorações. Usando a mesma ideia do caso $R(5,5)$ acima, chegaremos que são necessários $x = 2^{4950-1000} = 2^{3950}$ segundos para a verificação, o que é muito mais tempo do que o caso $R(5,5) \geq 50$.

A título de conhecimento, existe um jornal onde periodicamente atualiza, a seguinte tabela foi retirado de(RADZISZOWSKI, 2011).

2.1. Values and bounds for $R(k, l)$, $k \leq 10$, $l \leq 15$

k \ l	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 42	47 50	53 59	60 68	67 77	74 87
4		18	25	36 41	49 61	59 84	73 115	92 149	102 191	128 238	138 291	147 349	158 417
5			43 48	58 87	80 143	101 216	133 316	149 442	183 633	203 848	233 1138	267 1461	275 1878
6				102 165	115 298	134 495	183 780	204 1171	262 1804	294 2566	347 3703	5033	401 6911
7					205 540	219 1031	252 1713	292 2826	405 4553	417 6954	511 10578	15263	22112
8						282 1870	329 3583	343 6090	457 10630	16944	817 27485	41525	873 63609
9							565 6588	581 12677	22325	38832	64864		
10								798 23556	45881	81123			1313

Figura 7 – Numeros de Ramsey.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Dado a essa dificuldade para achar os números de Ramsey, tem-se descoberto alguns limitantes para tais números, nos próximos teoremas vamos ver alguns limitantes superiores e inferiores. Abaixo vamos enunciar um teorema que será importante posteriormente.

Teorema 4.3. Para todo $s, t \geqslant 2$, vale que

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

Demonstração. Seja χ uma coloração de $E(K_n)$ com as cores azul e vermelha, em que $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ e seja v um vértice de K_n. Pelo PCP, existem pelo menos $R(s-1,t)$ arestas vermelhas, ou pelo menos $R(s,t-1)$ arestas azuis, incidentes a v. Suponha que existem pelo menos $R(s-1,t)$ arestas vermelhas incidentes a v e seja

$$N_V(v) = \{u \in V(K_n) : \chi(uv) \text{ é vermelho}\}$$

a vizinhança vermelha de v. Pela definição de $R(\ s-1,t)$, a coloração do subgrafo induzido por $N_V(v)$ contém uma cópia vermelha de K_{s-1} ou uma cópia azul de K_t. Portanto, se não temos cópia azul de K_t, v e uma cópia vermelha de K_{s-1} em $N_V(v)$ formam juntos uma cópia vermelha de K_s. Logo, temos uma cópia vermelha de K_s ou azul de K_t Similarmente, se existirem pelo menos $R(s,t-1)$ arestas azuis incidentes a v, então a vizinhança azul $N_A(v)$ contém uma cópia vermelha de K_s, ou uma cópia azul de K_{t-1}. Como v e uma cópia azul de K_{t-1} em $N_A(v)$ formam juntos um K_t azul. □

Lembre-se da **Relação de Stifel** que precisaremos usar para demostrar o limitante superior para os números de Ramsey.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Teorema 4.4. Para todo $s, t \geqslant 2$, vale que

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}.$$

Demonstração. Vamos provar o limitante superior apresentado por indução em $s+t$. Observe primeiramente que $R(s,1) = R(1,t) = 1$ de forma que o resultado vale quando $min\{s,t\} = 1$. Agora, se $min\{s,t\} \geqslant 2$ então, pelo Teorema 4.3 e pela hipótese de indução, temos:

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1},$$

onde o ultimo passo segue do Teorema 4.3 anterior e da relação de Stifel. □

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

O fato de haver um limitante superior para os números de Ramsey $R(s,t)$ como apresentado no teorema acima, implica que $R(s,t)$ existe e é finito.

No caso em que $s = t = k$, é possível provar que o limitante fica escrito da forma

$$R(k) \leq 4^k.$$

Porém Erdös e Szekeres melhoraram tal limitante, ficando

$$R(k,k) \leq \binom{2k-2}{k-1} \leq \frac{4^k}{\sqrt{k}}.$$

Depois de 88 anos sem melhoria desse limitante, **Campos, Griffiths, Morris e Sahasrabudhe (2023)** melhoraram o limitante para

$$R(k) \leq (4-\epsilon)^k.$$

Para mais informações confira (SLOMAN, 2023) e (IMPA, 2023) (CAMPOS *et al.*, 2023). O artigo citado ainda está no Arxiv. Da mesma forma que temos um limitante superior, também temos um limitante inferior, e sua demostração iniciou um campo novo em combinatória chamado de **Método Probabilístico**, porém seu estudo foge do escopo desse trabalho.

Vamos apenas enunciar e citar referências sobre onde encontrar sua demostração.

Teorema 4.5 (Erdös,1947)**.** Para todo $a \geq 2$ inteiro, temos

$$R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}.$$

As demostrações podem ser encontradas em (BOTLER *et al.*, 2021) (MACIEL, 2020) (JUNIOR, 2014).

Lembre-se que enunciamos o teorema de Ramsey na sua versão finita, mas há também a versão infinita que tem aplicações na área de Teoria aditiva de Ramsey. Para a demonstração, utilizaremos uma versão do PCP infinito: se distribuirmos infinitos pombos em um número finito de casas, então pelo menos uma casa deve conter infinitos pombos. De fato, se cada casa contivesse apenas um número finito de pombos, então teríamos disbuído apenas um número finito de pombos.

Para o próximo resultado, denotamos por $\binom{\mathbb{N}}{2}$ um grafo completo com infinitos vértices, ou seja, consideramos $\mathbb{N}$ como sendo o conjunto de vértices.

Teorema 4.6 (Ramsey-Infinito)**.** Toda k-coloração de $\binom{\mathbb{N}}{2}$ contém uma clique monocromática infinita.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Demonstração. Seja $A_0 = \mathbb{N}$ e $v_1 \in A_0$ um vértice arbitrário em A_0. Pelo PCP (Infinito), existe uma cor $c_1 \in [k]$ tal que v_1 é incidente em um número infinito de arestas da cor c_1. Seja

$$A_1 := \{u \in A_0 : \chi(v_1u) = c_1\}$$

o conjunto dos extremos diferentes de v_1 dessas arestas, então A_1 é infinito. Agora escolha um vértice $v_2 \in A_1$ e repita o processo. Obtemos uma cor c_2 e um conjunto infinito

$$A_2 := \{u \in A_1 : \chi(v_2u) = c_2\}.$$

Iterando, obtemos uma sequência infinita de vértices $v_1, v_2, \ldots$ cores $c_1, c_2, \ldots$ e conjuntos $\mathbb{N} = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ de modo que

$$v_i \in A_{i-1} \quad e \quad \chi(v_iu) = c_i$$

para todo $i \in \mathbb{N}$ e todo $u \in A_i$. Em particular, $\chi(v_iv_j) = c_i$ para todo $i < j$. Novamente, pelo PCP, existe uma cor $c \in [k]$ que aparece uma quantidade infinita de vezes na sequência $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ e, portanto, o conjunto $A = \{v_i : c_i = c\}$ é uma clique monocromática infinita. □

Finalizamos com o seguinte resultado interessante que decorre da versão infinita do teorema de Ramsey, tal resultado faz parte de uma área chamada de **Teoria aditiva de Ramsey** donde queremos saber sobre estruturas aditivas que podem ser encontradas em k-colorações

$$\chi : \mathbb{N} \to \{1, 2, 3, 4, \ldots, r\}$$

dos inteiros positivos. Um resultado simples porém muito poderoso é conhecido como **Lema de Schur, 1916**.

Teorema 4.7 (Lema de Schur, 1916)**.** Toda k-coloração dos inteiros positivos contém uma solução monocromática da equação $x + y = z$.

Demonstração. Dada uma r-coloração $\chi : \mathbb{N} \to \{1, 2, 3, \cdots, r\}$ dos inteiros positivos, definimos uma r-coloração do grafo completo infinito

$$\xi : \binom{\mathbb{N}}{2} \to \{1, 2, 3, 4, \ldots, r\}$$

dos pares de inteiros positivos tomando

$$\xi : (xy) := \chi(|x - y|)$$

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

para cada $x, y \in \mathbb{N}$. Pelo teorema de Ramsey, existe uma clique monocromática infinita A na coloração ξ. Seja a,b,c $\in$ A, com $a < b < c$, e observe que

$$\xi(ab) = \xi(bc) = \xi(ac) \implies \chi(b-a) = \chi(c-b) = \chi(c-a).$$

Tomando $x = b - a$, $y = c - b$ e $z = c - a$, vemos que $x + y = z$ como desejado. □

Quem foi Ramsey? (1903- 1930)

Frank Ramsey foi um matemático inglês muito importante por seu trabalho nos fundamentos da matemática e da filosofia, mas é mais conhecido por sua chamada teoria de Ramsey em combinatória. Os pais de Frank Ramsey eram Arthur Stanley Ramsey e Agnes Mary Wilson. Arthur Ramsey foi presidente do Magdalene College, em Cambridge, e professor de matemática lá. Ramsey ingressou no Winchester College em 1915 e de lá ganhou uma bolsa de estudos para o Trinity College, em Cambridge. Ele completou o ensino médio em Winchester em 1920 e ingressou no Trinity College, Cambridge, para estudar matemática. Em Cambridge, Ramsey tornou-se um estudioso sênior em 1921 e formou-se como Wrangler no Mathematical Tripos de 1923. Depois de se formar, Ramsey foi para Viena por um curto período, retornando a Cambridge, onde foi eleito membro do King's College, Cambridge, em 1924. Em 1925, Ramsey casou-se com Lettice C. Baker e tiveram duas filhas. Em 1926, foi nomeado professor universitário de matemática e mais tarde tornou-se Diretor de Estudos em Matemática no King's College. Foi uma carreira curta, pois, infelizmente, Ramsey morreu no início de 1930. Ramsey sofreu um ataque de icterícia e foi levado ao Guy's Hospital, em Londres, para uma operação, da qual ele morreu após a operação. No entanto, no curto período em que lecionou em Cambridge, ele já havia se estabelecido como um excelente palestrante. Seu artigo de matemática, "On a problem of formal logic" (Sobre um problema de lógica formal), foi publicado nos Proceedings of the London Mathematical Society em 1930. Este examina métodos para determinar a consistência de uma fórmula lógica e inclui alguns teoremas sobre combinatória que levaram ao estudo de uma área totalmente nova da matemática chamada Teoria de Ramsey. Em economia, Ramsey escreveu dois artigos: "Uma contribuição para a teoria da tributação" e "Uma teoria matemática da poupança". Porém, foi a filosofia o verdadeiro amor de Ramsey. Ele escreveu uma série de obras como "Universais" (1925), "Fatos e proposições" (1927), "Universais de direito e de fato" (1928), "Conhecimento" (1929), "Teorias" (1929) e "Proposições gerais e causalidade" (1929). Para mais informações, consulte (O'CONNOR; ROBERTSON, 2024a).

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Figura 8 – Frank Plumpton Ramsey

Quem foi Paul Erdös? (1913-1996)

Um grande resolvedor e proponente de problemas na teoria dos números e outras áreas, fundou o campo da matemática discreta. Paul Erdős veio de uma família judia. O pai de Paul, Lajos, e sua mãe, Anna, tiveram duas filhas, de três e cinco anos, que morreram de escarlatina poucos dias antes do nascimento de Paul. Isso naturalmente teve o efeito de tornar Lajos e Anna extremamente protetores com Paul. Ele seria apresentado à matemática por seus pais, ambos professores de matemática. Paul não tinha muito mais de um ano quando estourou a Primeira Guerra Mundial. O pai de Paul, Lajos, foi capturado pelo exército russo quando este atacou as tropas austro-húngaras. Ele passou seis anos em cativeiro na Sibéria. Anna, sua mãe, era excessivamente protetora após a perda de suas duas filhas, manteve Paul longe da escola durante grande parte de seus primeiros anos e lhe foi fornecido um tutor para ensiná-lo em casa. O ano de 1920 não foi de todo ruim para Paul, pois seu pai, Lajos, voltou da Sibéria para casa. Ele havia aprendido inglês para passar as longas horas no cativeiro, mas, como não tinha professor de inglês, não sabia pronunciar as palavras. Ele então começou a ensinar Paul a falar inglês, mas o estranho sotaque inglês que isso deu a Paul permaneceu uma de suas características ao longo de sua vida. Apesar das restrições à entrada de judeus nas universidades da Hungria, Erdős, como vencedor de um exame nacional, foi autorizado a ingressar em 1930. Ele estudou para o doutorado na Universidade Pázmány Péter em Budapeste. Recebeu um doutorado em 1934 e fez uma bolsa de pós-doutorado em Manchester, sendo essencialmente forçado a deixar a Hungria porque era judeu. Durante o mandato da bolsa, Erdős viajou muito pelo Reino Unido. Conheceu Hardy em Cambridge em 1934 e Ulam, também em Cambridge, em 1935. Sua amizade com Ulam se mostraria importante mais tarde, quando Erdős estava nos Estados Unidos. As contribuições que Erdős fez à matemática foram numerosas e amplas. Contudo, basicamente Erdős era um solucionador de problemas, não um

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

construtor de teorias. Os problemas que mais o atraíram foram problemas de combinatória, teoria dos grafos e teoria dos números. Ele não queria apenas resolver problemas, mas queria resolvê-los de forma elegante e elementar. Para Erdős, a prova tinha de fornecer uma visão sobre a razão pela qual o resultado era verdadeiro, e não apenas fornecer uma sequência complicada de passos que constituiria uma prova formal, mas que de alguma forma falhava em fornecer qualquer compreensão. Erdős morreu em 20 de setembro de 1996, em Varsóvia, Polônia. Para mais informações, consulte (O'CONNOR; ROBERTSON, 2024d).

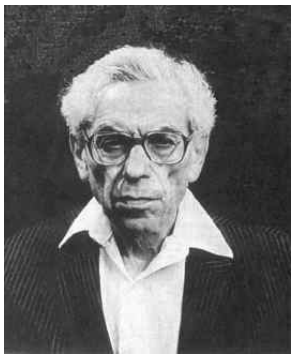


Figura 9 – Paul Erdös

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Conclusão

Este trabalho buscou explorar alguns conceitos da Teoria de Ramsey, utilizando uma metodologia que se baseou na análise de livros e artigos sobre o assunto. Vimos como podemos utilizar as noções da Teoria dos Grafos para modelar o problema da Teoria de Ramsey. Percebemos que os problemas combinatórios da teoria são relativamente fáceis de se enunciar e entender, entretanto a abordagem para resolver tais problemas exigem uma grande engenhosidade por parte do pesquisador. Por exemplo, mesmo com o auxilío de supercomputadores, não é possível calcular exatamente os números de Ramsey. Assim, esse trabalho nos mostra a importância de se continuar desenvolvendo a teoria de modo a obter os números de Ramsey.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

Referências

BOTLER, F.; COLLARES, M.; MARTINS, T.; MENDONçA, W.; MORRIS, R.; MOTA, G. *Combinatória*. 1. ed. [S.l.]: IMPA, 2021. 1-306 p. Citado 5 vezes nas páginas 2, 11, 20, 24 e 28.

BRUSAMARELLO, R.; CARMELO, E. L. M. Paul erdös, o mago. *Revista Matemática Universitária*, 2018. Citado na página 25.

CAMPOS, M.; GRIFFITHS, S.; MORRIS, R.; SAHASRABUDHE, J. *An exponential improvement for diagonal Ramsey*. 2023. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 28.

IMPA. *No IMPA, é descoberto maior avanço no Teorema de Ramsey*. 2023. <https://impa.br/noticias/maior-avanco-em-88-anos-no-limite-do-teorema-de-ramsey-e-descoberto-no-impa/>. Acesso em: 25 de março de 2024. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 28.

JUNIOR, P. C. S. Combinatória revisitada: Uma introdução à teoria de ramsey. p. 1–31, 2014. Citado na página 28.

MACIEL, J. Dirichlet e ramsey: uma bela combinação. p. 1–49, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 2, 20 e 28.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Frank Plumpton Ramsey*. 2024. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ramsey/>. Acesso em: 25 de março de 2024. Citado na página 30.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*. 2024. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dirichlet/>. Acesso em: 25 de março de 2024. Citado 3 vezes nas páginas xiii, 9 e 10.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Leonhard Euler*. 2024. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/>. Acesso em: 25 de março de 2024. Citado 3 vezes nas páginas xiii, 18 e 19.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Paul Erdős*. 2024. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Erdos/>. Acesso em: 25 de março de 2024. Citado na página 32.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. *Pontes de Königsberg*. 2024. Https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Konigsberg/. Citado 2 vezes nas páginas xiii e 11.

RADZISZOWSKI, S. Small ramsey numbers. *The Electronic Journal of Combinatorics*, v. 1000, 8 2011. ISSN 1077-8926. Citado na página 26.

SLOMAN, L. *A Very Big Small Leap Forward in Graph Theory*. 2023. <https://www.quantamagazine.org/after-nearly-a-century-a-new-limit-for-patterns-in-graphs-20230502/>. Acesso em: 25 de março de 2024. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 28.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31

SOUZA, I. C. Q. *O PROBLEMA DAS PONTES DE KÖNIGSBERG*. 2013. Acesso em: 12 de abril de 2024. Citado na página 11.

Versão Final Homologada
30/04/2024 10:31