



UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA
INSTITUTO LATINO AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Foz do Iguaçu-Paraná

2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO-AMERICANA
INSTITUTO LATINO AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Análise de Estabilidade em Potenciais Efetivos de Weyl e Aspectos de Lentes Gravitacionais

MONICA CRISTINA KALB

Orientador: Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Coimbra Araújo

Foz do Iguaçu-Paraná

2021

Monica Cristina Kalb

Análise de Estabilidade em Potenciais Efetivos de Weyl
e Aspectos de Lentes Gravitacionais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada da Universidade Federal da Integração Latino-Americana (PPGFISA-UNILA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de **Mestra em Física Aplicada**.

Orientador: Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Coimbra Araújo

Banca Examinadora

Prof. Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza (Orientador)

Universidade Federal do Paraná/PPGFISA-UNILA

Prof. Dr. Daniel Luiz Nedel (avaliador titular)

Universidade Federal da Integração Latino-Americana/PPGFISA-UNILA

Prof. Dr. Luís Antonio Cabral (avaliador titular)

Universidade Federal do Tocantins/PPGFISA-UNILA

Foz do Iguaçu-Paraná

2021

Catalogação elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação
Catalogação de Publicação na Fonte. UNILA - BIBLIOTECA LATINO-AMERICANA - PTI

K14

Kalb, Monica Cristina.

Análise de estabilidade em potenciais efetivos de Weyl e aspectos de lentes gravitacionais / Monica Cristina Kalb. - Foz do Iguaçu-PR, 2021.
66 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana. Instituto Latino Americano de Ciências da Vida e da Natureza. Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada. Foz do Iguaçu-PR, 2021.

Orientador: Abraão Jessé Capistrano de Souza.

Coorientador: Carlos Henrique Coimbra Araújo.

1. Relatividade Geral. 2. Métrica de Weyl. 3. Lentes Gravitacionais. I. Souza, Abraão Jessé Capistrano de. II. Araújo, Carlos Henrique Coimbra. III. Título.

CDU 530.12

Resumo

No presente trabalho, nós investigamos a dinâmica e a estabilidade de estrelas com órbitas axissimétricas em potenciais efetivos de Weyl. Para isso, utilizamos a métrica estacionária de Weyl, que possui um campo gravitacional com simetria cilíndrica, de modo que a altura h do cilindro seja muito menor que o raio r , aliado ao limite quase-newtoniano. Esse campo gravitacional quase-newtoniano possui uma intensidade mediana e é possível obtermos quando consideramos a não-linearidade das equações de Einstein em conjunto com a limitação de movimento lento na equação da geodésica. Neste trabalho também abordamos aspectos sobre lentes gravitacionais e o desvio da luz. Desenvolvemos primeiro o desvio da luz para a teoria newtoniana, a fim de termos um valor para comparação, em seguida, construímos o desvio da luz considerando a curvatura do espaço-tempo. Como consequência encontramos que o modelo de Weyl desenvolvido é mais simples quando comparado ao modelo de Einstein já consolidado.

Abstract

In the present work, we investigate the dynamics and stability of stars with axisymmetric orbits in Weyl potentials. Then, we use the Weyl stationary metric, which has a gravitational field with cylindrical symmetry, so that the height of the cylinder is much smaller than the radius r , together with the quasi-Newtonian limit. This quasi-Newtonian gravitational field has a intermediate intensity and it is possible to obtain it when we consider the nonlinearity of Einstein's equations in conjunction with the slow motion limit in the geodesic equation. In this work we also approach aspects about gravitational lenses and the deviation of light. We first develop the deviation of light for Newtonian theory, in order to have a value for comparison, then we construct the deviation of light considering the curvature of space-time. Finally, we find that the developed Weyl model is simpler when compared to the consolidated Einstein model.

“Aos meus pais,
Roberto e Deomira.”

*The greatest enemy of knowledge is not ignorance,
it is the illusion of knowledge.
Stephen Hawking.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer...

- Ao meu orientador, Abraão Jessé Capistrano de Souza, por todo apoio, paciência, incentivo e confiança depositada neste trabalho, assim como sua dedicação em transmitir seu valioso conhecimento. Sou muito grata em tê-lo como meu orientador.
- Ao meu co-orientador, Carlos Henrique Coimbra Araújo, pelas sugestões, atenção e tempo dedicado a este trabalho de pesquisa.
- Aos membros da banca examinadora, por aceitarem avaliar este trabalho e contribuir com seus ricos conhecimentos.
- Aos professores das disciplinas que cursei no PPGFISA: Marcelo, Luciano, Márcio, Eduardo, Daniel e Dáfni pela dedicação em transmitir o conhecimento.
- À secretaria Roberta Markellyn Manfrin Nami por sempre estar disposta a ajudar e de forma muito simpática.
- Aos meus pais, Roberto e Deomira, por sempre fazerem o possível e o impossível para eu estudar, pelo apoio incondicional, incentivo e amor, sem vocês essa dissertação não seria possível.
- Aos meus amigos e colegas da graduação e da pós, pelos grupos de estudos: Débora, Diego, Sandy e Hemerson. Em especial agradeço o Matheus e o Rafael por me incentivarem a entrar no mestrado, pela troca de aprendizado e também pelas caronas.
- À CAPES, pela bolsa de estudo que permitiu o desenvolvimento desta pesquisa e também à UNILA pela concessão de recurso financeiro possibilitando a participação na escola de astrofísica.

Sumário

Introdução	11
1 Fundamentos da Relatividade Geral	12
1.1 Newton e Gravitação Universal	12
1.2 Motivação de Einstein para a construção da Relatividade Geral	13
1.3 Elementos matemáticos da Relatividade Geral	15
1.4 Limite Quase-Newtoniano	19
2 Potenciais de Weyl	27
2.1 Cálculo dos Potenciais de Weyl	27
2.2 Aproximação de zero ordem	28
2.3 Aproximação de primeira ordem	29
2.4 Aproximação de segunda ordem	31
3 Lentes Gravitacionais	40
3.1 Ângulo de deflexão e formação de imagem	41
3.2 Equações Gerais da Geodésica	43
3.2.1 Redução das equações da geodésica para um disco fino	44
3.2.2 Geodésica nula e desvio da luz	46
3.3 Desvio da luz para $k_0 < 0$	50
3.4 Ângulo de Deflexão e Formação de Imagens	54
3.5 Análise dos Resultados Obtidos	55
3.5.1 Análise estatística	58
Considerações Finais	61

Introdução

No universo temos uma grande variedade de galáxias e poucas delas são aproximadamente esféricas. Dessa forma, é possível termos vários tipos de órbitas em um sistema estelar real. Assim, podemos nos perguntar: Para órbitas de estrelas individuais imersas em campos gravitacionais, que tipo de órbitas seriam possíveis em um potencial axissimétrico? Para responder essa pergunta podemos limitar a um problema bidimensional e explorar a conservação da componente z do momento angular de qualquer estrela e também podemos estudar a dinâmica sob a ótica de massa unitária para o momento angular e as funções da Lagrangeana e da Hamiltoniana. Além de termos situações com casos mais específicos ainda, definindo um potencial efetivo.

Nesse sentido, em nosso trabalho analisaremos a dinâmica e a estabilidade de estrelas com órbitas axissimétricas em potenciais efetivos de Weyl. Para isso, vamos utilizar a métrica estacionária de Weyl, na qual possui um campo gravitacional com simetria cilíndrica, de modo que a altura h do cilindro seja muito menor que o raio r . Para encontrarmos a solução das equações de Weyl utilizaremos a Relatividade Geral e o programa *Mathematica*. Em seguida, construiremos de fato o potencial efetivo utilizando o limite quase-newtoniano, partindo da premissa de campo fraco, estático e de baixas velocidades; esse limite possui um campo com intensidade intermediária, pois, carrega todos os efeitos de não-linearidade da Relatividade Geral apesar de não ser tão forte, mas também não é tão fraco quanto o da teoria newtoniana, visto que o limite está incompleto.

Neste trabalho também será abordado aspectos sobre lentes gravitacionais e o desvio da luz considerando novamente a métrica estacionária de Weyl. Inicialmente, vamos desenvolver o desvio da luz para a teoria newtoniana, a fim de termos um valor para comparação, em seguida, iremos construir o desvio da luz considerando a curvatura do espaço-tempo. Seguindo nessa linha de estudo também vamos determinar superficialmente o ângulo de deflexão e a formação

de imagens.

Desde a elaboração da Relatividade Geral, em 1915, o desvio da luz já era previsto teoricamente, porém, apenas em 1919 é que foi detectado através do eclipse solar em Sobral-CE. Proveniente do desvio da luz, temos as lentes gravitacionais. Elas são um dos objetos mais fascinantes do universo, pois são produzidas naturalmente e ocorrem quando um objeto bastante massivo distorce a trajetória da luz.

As lentes gravitacionais são muito importantes para a área da cosmologia e astrofísica porque atuam como um telescópio natural gigante possibilitando os pesquisadores de verem objetos mais distantes, descobrirem novos planetas, detectarem a presença de matéria escura, entre outros. Porém, para termos o efeito de lente gravitacional é necessário ter um alinhamento perfeito entre a fonte, lente e o observador. Assim, se trata de um fenômeno raro, devido a essa limitação a primeira lente gravitacional só veio a ser observada em 1979. A partir daí as descobertas não pararam mais.

Para o desenvolvimento dessa dissertação é necessário discutirmos temas como a Relatividade Geral, potenciais de Weyl e lentes gravitacionais, onde cada um desses assuntos compoem um capítulo deste trabalho. O Capítulo 1 intitulado *Fundamentos da Relatividade Geral* está dividido em quatro seções. Na seção 1.1 fazemos um resgate histórico da construção das teorias, desde Galileu até chegar em Einstein. Na seção 1.2 damos continuidade no resgate histórico, agora abordando a cerca da construção da Relatividade Geral. Em seguida, na seção 1.3 apresentamos os elementos matemáticos da Relatividade Geral, que é uma das bases desse trabalho. Por fim, na seção 1.4 fazemos o desenvolvimento do limite quase-newtoniano que aborda tanto a teoria newtoniana quanto a Relatividade Geral.

No Capítulo 2, *Potenciais de Weyl*, temos quatro seções. Na seção 2.1 começamos o desenvolvimento dos cálculos dos potenciais de Weyl, utilizando a métrica de mesmo nome, com simetria cilíndrica. Nas seções 2.2, 2.3 e 2.4 encontramos as soluções para as equações dos potenciais de Weyl com aproximação de zero ordem, primeira ordem e segunda ordem, respectivamente.

No Capítulo 3, denominado *Lentes Gravitacionais*, o último deste trabalho, está dividido em cinco seções, onde abordaremos aspectos sobre lentes gravitacionais. Na seção 3.1 vamos construir o ângulo de deflexão para uma lente esfericamente simétrica com um campo escalar minimamente acoplado como um exemplo para a seguir desenvolvermos para o caso de Weyl. Na seção 3.2 desenvolveremos as equações da geodésica para chegarmos até a equação do desvio da luz, mas primeiro, por questão de completeza reproduziremos o caso para o limite newtoniano,

para só depois mostrar a curvatura, que é abordada na seção 3.3. Já na seção 3.4 vamos abordar o ângulo de deflexão e a formação de imagens, na qual faremos o desenvolvimento matemático aplicado ao nosso problema. E por último, na seção 3.5, faremos uma análise estatística dos resultados obtidos, fazendo uma comparação do nosso modelo desenvolvido com o modelo já consolidado de Einstein. E por fim, no capítulo considerações finais mostraremos as conclusões deste trabalho, além de apresentarmos as perspectivas futuras para um estudo mais aprofundado sobre as lentes gravitacionais.

Capítulo 1

Fundamentos da Relatividade Geral

Albert Einstein foi o criador de duas teorias da relatividade que mudaram a nossa concepção de mundo. Sua primeira teoria, a Relatividade Especial ou Restrita foi publicada em 1905, onde aborda a invariância das leis físicas perante uma transformação entre referenciais inerciais e possui uma estrutura matemática mais acessível. Já a segunda teoria, denominada Relatividade Geral, foi publicada em 1915, generalizando os resultados da Relatividade Especial para referenciais acelerados e também passou a incluir a gravitação, ela possui uma matemática mais avançada, como a geometria diferencial e o cálculo tensorial. Neste capítulo veremos inicialmente uma rápida construção histórica e conceitual das teorias e por último a construção matemática da Relatividade Geral.

1.1 Newton e Gravitação Universal

Quando ouvimos falar em Relatividade o primeiro cientista que nos vem à mente é Albert Einstein. Porém, a primeira formulação do Princípio da Relatividade foi desenvolvida por Galileu Galilei [1]. Galileu se dedicou ao estudo do movimento dos corpos, utilizando-se de algumas premissas básicas presentes no cotidiano para compreender o movimento. Assim, ele postulou o Princípio da Relatividade Galileana: “Nenhum observador é capaz de distinguir entre o movimento absoluto e o repouso absoluto, desta forma, não existe movimento absoluto, apenas movimento relativo a um observador.” Portanto, qualquer lei física precisa ser elaborada

igualmente por todos os observadores [2].

Posteriormente, os trabalhos de Newton no século XVI deram uma base sólida à física, introduzindo conceitos quantitativos de aceleração, força e massa. Sua abordagem estava baseada na relatividade do movimento inercial, onde tanto o espaço quanto o tempo eram absolutos e infinitos. Suas ideias aos poucos foram ganhando notoriedade e também uma estrutura teórica estável [3], pois, no meio macroscópico e baixas velocidades, as ideias formuladas sobre o espaço e o tempo eram bem satisfatórias.

Tanto a mecânica newtoniana, quanto a transformação de Galileu e o Princípio da Relatividade galileana são plausíveis. Esse sistema continuou válido até o início do século XX, e impondo algumas restrições é utilizado até hoje. Porém, desde sua publicação e desenvolvimento de novas ideias houveram críticas a mecânica newtoniana, como a ideia de espaço absoluto, ação à distância, falha na teoria quando se trabalha com velocidades próximas a da luz e a discrepância dessa teoria com o eletromagnetismo [4, 5].

A incompatibilidade entre a Mecânica de Newton e o Eletromagnetismo foi a grande motivação para Einstein conceber uma nova teoria da Relatividade [3, 4]. Assim, em 1905, Einstein publica uma teoria que ficou conhecida como Relatividade Especial ou Restrita, na qual é composta de dois postulados [5]:

- Princípio da relatividade: “Não há um sistema inercial preferido, ou seja, as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais;”
- Princípio da constância da velocidade da luz: “A velocidade da luz no vácuo é invariante, possui o mesmo valor $c = 299792458m/s$, em todos os referenciais inerciais”.

Como consequências desses postulados surge a ideia de dilatação do tempo, a contração do espaço e a simultaneidade de eventos, além de que a velocidade da luz é um limite para as velocidades [4]. Embora, a teoria da Relatividade Especial de Einstein tenha abordado novos conceitos, ela só tratava de sistemas inerciais, consequentemente, deixando de fora a gravidade.

1.2 Motivação de Einstein para a construção da Relatividade Geral

Einstein ainda não estava completamente satisfeito com sua teoria, ele desejava de alguma forma incluir a gravidade à Relatividade Especial. Ele trabalhou arduamente, com várias tentativas e frustrações até enfim publicar sua teoria da Relatividade Geral em novembro de 1915 [6, 7]. Porém, a brilhante ideia que deu origem a sua teoria da gravitação surgiu ainda em 1907, enquanto preparava um artigo de revisão para o *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*¹ que foi descrita por ele mesmo como o “pensamento mais feliz da minha vida” [6, 8], que tratava-se do Princípio da Equivalência, em que mais tarde veio a ser um dos pilares da Relatividade Geral.

O Princípio da Equivalência nos diz que não é possível haver distinção entre um campo gravitacional e um sistema acelerado, devemos observar o mesmo fenômeno físico para ambos os casos. Ou seja, um corpo imerso em queda livre em um campo gravitacional constante é análogo para um objeto em um referencial inercial ausente de campo gravitacional [9], o Princípio da Equivalência também pode ser enunciado da seguinte forma: “a massa inercial é igual a massa gravitacional” [10].

Além disso, o Princípio da Equivalência nos permite escrever a Teoria da Relatividade Geral como uma teoria geométrica. O campo gravitacional passa a ser representado por uma métrica, as forças gravitacionais são descritas pelas derivadas de primeira ordem desta métrica e a curvatura é representada pelas derivadas de segunda ordem. Ademais, temos também as equações de campo de Einstein que nos fornece o entendimento de como a matéria e o campo gravitacional interagem entre si [7], que veremos mais a frente no Capítulo 1, Seção 1.3.

Em conjunto com o Princípio da Equivalência, temos também o Princípio da Covariância Generalizada, o Princípio da Correspondência e o Princípio de Acoplamento Mínimo formando os pilares da Relatividade Geral, que podemos resumir da seguinte forma [10]:

- Princípio da Covariância Geral: trata-se de um princípio físico, porém com consequências matemáticas, no qual afirma que as equações devem ter caráter tensorial;
- Princípio da Correspondência: afirma que a Relatividade Geral deve coincidir com a Relatividade Especial em situações de campo gravitacional nulo e coincidir com a Gravitação newtoniana no caso de campos muito fracos e velocidades muito menores que a da luz;
- Princípio de Acoplamento Mínimo: nos diz que ao fazer a transição da Relatividade Especial para a Relatividade Geral devemos fazer da maneira mais frugal possível, sem

¹Em tradução livre do alemão: “Anuário de Radioatividade e Eletrônica.”

utilizar termos desnecessários.

Junto com a publicação de sua teoria, Einstein propôs três testes clássicos [7]:

- A precessão do periélio de Mercúrio;
- A curvatura da luz próximo de campos gravitacionais e;
- O desvio para o vermelho devido a um campo gravitacional.

Os dois primeiros tratam-se de testes de um modelo geométrico da gravidade, enquanto o terceiro é um teste do Princípio da Equivalência. Em 1964, foi adicionado mais um teste por Irwin Shapiro [11], sobre o atraso de sinais ao passarem por um campo gravitacional.

1.3 Elementos matemáticos da Relatividade Geral

Nas seções anteriores vimos os aspectos histórico da construção da Relatividade Geral, agora abordaremos os aspectos matemáticos desta teoria. Para desenvolver as equações de campo, Einstein utilizou-se do formalismo tensorial. Esta linguagem matemática auxilia a sintetizar os conjuntos de equações e também a resolver os problemas de forma mais rápida, além de revelar a estrutura nas equações [12].

Adentrando no formalismo tensorial, temos que o tensor trata-se de um elemento matemático que apresenta M^n componentes situadas em cada ponto do espaço, no qual M é o número de dimensões espaciais e n indica a ordem do tensor [13]. Os tensores utilizados na Relatividade Geral possuem uma coordenada temporal e três coordenadas espaciais.

Um tensor de ordem 1 trata-se de um vetor, enquanto que um tensor de ordem 0 é um escalar [13]. Tensores de ordem n são resultados do produto de n vetores, assim tensores de ordem 2 são o produto de 2 vetores, eles podem ser contravariante, covariante ou misto [12].

Um tensor contravariante $A^{\alpha\beta}$ de ordem 2, se transforma como:

$$A^{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial X'^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial X'^\nu} A'^{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

Para o tensor covariante $A_{\alpha\beta}$, segue a seguinte transformação:

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\beta} A'_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Já o tensor misto A^α_β transforma-se como:

$$A^\alpha_\beta = \frac{\partial X^\alpha}{\partial X'^\mu} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\beta} A'^\mu_\nu. \quad (1.3)$$

Um tensor de ordem n superior, pode ser definido de modo semelhante aos tensores de ordem 2:

$$A^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial X'^\mu} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\beta} \frac{\partial X'^\lambda}{\partial X^\gamma} A'^\mu_{\nu\lambda}. \quad (1.4)$$

O tensor métrico, ou simplesmente métrica, nos fornece a distância entre dois pontos, é expresso por [14]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.5)$$

onde μ e ν variam de 1 a 4 ou de 0 a 3, para um espaço-tempo quadridimensional.

Quando tratamos de um sistema de coordenadas curvilíneas temos que a diferenciação de dA^γ não é um vetor, assim como a derivada parcial de $\partial A^\gamma / \partial X^\alpha$ não se trata de um tensor sob as transformações de coordenadas generalizadas, como podemos ver explicitamente abaixo [15].

Um dado vetor A_γ transforma-se como:

$$A_\gamma = \frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\gamma} A'_\alpha. \quad (1.6)$$

Diferenciando a equação acima, obtemos:

$$dA_\gamma = \frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\gamma} dA'_\alpha + A'_\alpha d\left(\frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\gamma}\right) = \frac{\partial X'^\alpha}{\partial X^\gamma} dA'_\alpha + A'_\alpha \frac{\partial^2 X'^\alpha}{\partial X^\gamma \partial X^\nu} dX^\nu, \quad (1.7)$$

que não se trata de uma transformação correta de um vetor, a não ser que consideremos que as transformações de $X^\gamma = f^\gamma(X')$ sejam funções lineares de X^γ (como é o caso das transformações de Lorentz no espaço-tempo plano).

Desse modo, temos que determinar uma derivada em um referencial curvilíneo para que a diferença entre dois vetores seja feita no mesmo ponto do espaço-tempo. Ou seja, precisamos levar um dos vetores até a posição do outro. Este transporte de vetores deve ser feita paralelamente a ele, a fim de que não altere o vetor quando formos para coordenadas cartesianas; tal ação é chamada de transporte paralelo [15].

O transporte paralelo realizado em um sistema de coordenadas curvilíneas causará alterações nas componentes do vetor. Logo, se um vetor em X^γ possui componentes A^γ , em $X^\gamma + dX^\gamma$ terá as componentes $A^\gamma + dA^\gamma$, assim o transporte paralelo infinitesimal de A^γ resultará em uma mudança neste vetor: δA^γ . Portanto, a diferença entre os dois vetores é dada por [14, 15]:

$$DA^\gamma = dA^\gamma - \delta A^\gamma, \quad (1.8)$$

admitindo que o termo δA^γ depende do deslocamento infinitesimal dX^γ e também de modo linear dos valores de A^γ em si, temos:

$$\delta A^\gamma = -\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma A^\alpha dX^\beta, \quad (1.9)$$

onde o termo $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ é chamado de coeficiente de conexão ou símbolo de Christoffel. Pois esta quantidade une o valor de um campo vetorial em uma determinada posição com o valor em outro ponto [14]. Sua forma explícita é resultante do sistema de coordenadas a ser escolhida, no referencial cartesiano $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0$, o que nos mostra que não é um tensor, pois se um tensor é nulo em um sistema de coordenadas, ele será nulo em todos os outros sistemas [15].

Reescrevendo a expressão da Eq.(1.8) em termos do símbolo de Christoffel da Eq.(1.9), obtemos:

$$DA^\gamma = \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma A^\alpha \right) dX^\beta, \quad (1.10)$$

que trata-se da derivada covariante, dado que é um vetor.

Na Relatividade Geral, os coeficientes da conexão podem ser escritos em função do tensor métrico e suas primeiras derivadas. Se DA^γ é um vetor contravariante, o vetor covariante correspondente será dado por [15]:

$$DA^\gamma = g_{\gamma\alpha} DA^\alpha = D(g_{\gamma\alpha} A^\alpha), \quad (1.11)$$

de modo que $Dg_{\gamma\alpha} = 0$ ou então $g_{\gamma\alpha;\lambda} = 0$.

Reescrevendo a Eq.(1.11) e fazendo uma troca cíclica dos índices γ , α e λ , temos:

$$\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial X^\lambda} - g_{\kappa\alpha} \Gamma_{\gamma\lambda}^\kappa - g_{\gamma\kappa} \Gamma_{\alpha\lambda}^\kappa = 0, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial g_{\gamma\lambda}}{\partial X^\alpha} - g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\gamma\alpha}^\kappa - g_{\gamma\kappa} \Gamma_{\lambda\alpha}^\kappa = 0, \quad (1.13)$$

$$-\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial X^\gamma} + g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\alpha\gamma}^\kappa + g_{\alpha\kappa} \Gamma_{\lambda\gamma}^\kappa = 0. \quad (1.14)$$

Realizando a soma das equações acima e multiplicando por $\frac{1}{2}$:

$$g_{\gamma\kappa} \Gamma_{\alpha\lambda}^\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial X^\lambda} + \frac{\partial g_{\gamma\lambda}}{\partial X^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial X^\gamma} \right). \quad (1.15)$$

E para finalizar, multiplicamos por $g^{\gamma\beta}$:

$$\Gamma_{\alpha\lambda}^\beta = \frac{1}{2} g^{\gamma\beta} \left(\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial X^\lambda} + \frac{\partial g_{\gamma\lambda}}{\partial X^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial X^\gamma} \right). \quad (1.16)$$

O transporte paralelo de um dado vetor, entre dois pontos em um espaço curvo depende da curva escolhida para ligar estes pontos. Porém, quando fazemos o transporte paralelo deste vetor ao longo da curva até retornar ao ponto inicial, temos que as componentes do vetor não são iguais [16]. Assim, através das falhas de sucessivos cálculos da derivada covariante que comutam ao serem aplicadas em um dado vetor, surge o termo $R^\alpha_{\beta\lambda\nu}$, chamado de tensor de curvatura, ou tensor de Riemann. E é através disto que podemos distinguir um espaço curvo de um espaço plano.

Para construir o tensor de Riemann o procedimento mais simples é construir um tensor exterior ao tensor métrico e suas primeiras e segundas derivadas, que nos fornece [17]:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\lambda\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\beta\lambda}}{\partial X^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\beta\nu}}{\partial X^\lambda} + \Gamma^\mu_{\beta\lambda} \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \Gamma^\mu_{\beta\nu} \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}. \quad (1.17)$$

O tensor de curvatura possui algumas propriedades [12, 18]:

- Possui as seguintes simetrias:

$$R^\alpha_{\beta\lambda\nu} = -R^\beta_{\alpha\lambda\nu}, \quad (1.18)$$

$$R^\alpha_{\beta\lambda\nu} = -R^\alpha_{\beta\nu\lambda}, \quad (1.19)$$

$$R^\alpha_{\beta\lambda\nu} = R^\lambda_{\nu\alpha\beta}, \quad (1.20)$$

$$R^\alpha_{\beta\lambda\nu} + R^\alpha_{\nu\beta\lambda} + R^\alpha_{\lambda\nu\beta} = 0. \quad (1.21)$$

- Satisfaz a identidade de Bianchi:

$$\nabla_\mu R^\alpha_{\beta\lambda\nu} + \nabla_\nu R^\alpha_{\beta\mu\lambda} + \nabla_\lambda R^\alpha_{\beta\nu\mu} = 0. \quad (1.22)$$

- O tensor de Ricci, no qual é formado pela contração do tensor de curvatura:

$$R_{\lambda\nu} = R^\alpha_{\alpha\lambda\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\lambda\nu}. \quad (1.23)$$

- A contração do tensor de Ricci nos fornece o escalar de curvatura:

$$R = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\nu}. \quad (1.24)$$

O tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ que descreve a curvatura do espaço-tempo é definido por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.25)$$

onde o segundo termo da equação, o tensor $R_{\mu\nu}$, é denominado tensor de Ricci, trata-se de um tensor de ordem 4, a forma mais geral de escrever a curvatura de um espaço qualquer de n -dimensões. Já o termo $g_{\mu\nu}$ é chamado de tensor métrico do espaço-tempo, ele faz o papel de campo nas equações de Einstein [13]. O campo representado pela métrica é redutível ao campo gravitacional da teoria de Newton, porém na Relatividade Geral, não há a ideia de “ação à distância” e o caráter geométrico é predominante [13, 19]. Tratando agora do último termo da equação, o R é o escalar de curvatura de Ricci, ele está relacionado tanto ao tensor de Ricci quanto ao tensor métrico.

As equações de campo de Einstein escritas de forma compacta é dada por:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.26)$$

no qual $\kappa = 8\pi G/c^4$ trata-se da constante gravitacional de Einstein; G é a constante da Gravitação Universal e possui o valor de $6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$, e c é a velocidade da luz no vácuo que possui o valor de aproximadamente $2,99 \cdot 10^8 m/s$.

E, de forma mais explícita temos [13]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

1.4 Limite Quase-Newtoniano

Na teoria newtoniana a gravidade é descrita como algo inato, inerente e essencial à matéria, onde um corpo atua sobre o outro a distância através do vácuo. É descrita pela lei da gravitação universal de Newton [?]: “A força gravitacional é proporcional à massa das partículas estudadas e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias que as separam”. Embora a teoria newtoniana explicasse vários fenômenos físicos de forma satisfatória, ela apresentava alguns problemas. Tratando-se da gravidade ela apenas descrevia os seus efeitos, mas não explicava o que era e nem a sua causa. A teoria da Relatividade Geral de Einstein surgiu como uma teoria de gravitação aperfeiçoando a gravitação newtoniana. A Relatividade Geral, como já

vimos, descreve o movimento de objetos, não em termos da ação de forças, como na Mecânica Newtoniana, mas em termos de trajetórias descritas sobre a superfície do espaço-tempo. Aqui a gravidade é entendida como uma geometria do espaço-tempo, onde este é curvado pela presença e movimento da massa. Desta forma, quando uma massa menor passa próximo de uma massa maior, ela é acelerada em direção à massa maior devido a curvatura do espaço-tempo [20], conforme podemos observar na Fig.(1.1).

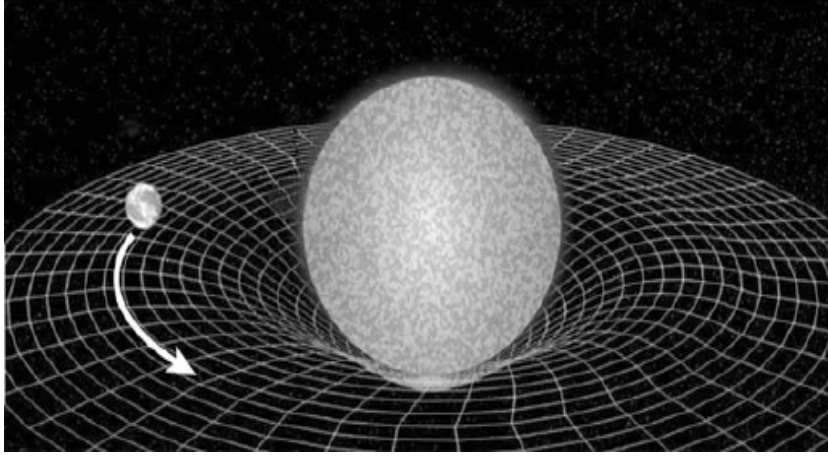


Figura 1.1: Deformação do espaço-tempo causada por um corpo massivo [20].

De acordo com a Física, toda teoria mais geral deve reproduzir a anterior, assim como a Mecânica Quântica se reduz à Mecânica Clássica no “limite de correspondência” de grandes sistemas, ou seja, o meio macroscópico, a Relatividade Geral se reduz à teoria newtoniana no “limite de correspondência” de gravidade fraca e baixas velocidades [21]. Desta forma, faremos a correspondência entre a Relatividade Geral e a teoria newtoniana:

Para campo fraco, temos que:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon \delta h_{\mu\nu} + \epsilon^2 (\delta h_{\mu\nu})^2 + \dots, \quad (1.28)$$

onde a ordem linear induz a um campo fraco e $\delta h_{(\mu\nu)}$ tal que $\epsilon \ll 1$ e $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski.

Para o movimento lento, temos que $\frac{v}{c} \ll 1$ tal que podemos definir por hipótese, na Eq.(1.28):

$$\epsilon = \frac{v}{c}. \quad (1.29)$$

Sabendo que $v^i = \frac{x}{t}$, podemos ter as seguintes relações:

$$\delta x^i \sim v^i \delta t, \quad (1.30)$$

$$\delta x^i \sim \frac{v^i}{c} c \delta t, \quad (1.31)$$

$$\delta x^i \sim \frac{v^i}{c} \delta x^4, \quad (1.32)$$

$$\delta x^i \sim \epsilon \delta x^4, \quad (1.33)$$

Queremos agora restaurar o tempo absoluto newtoniano, porque aqui não temos o espaço-tempo e sim, espaço e tempo, logo não temos tempo próprio. Assim, vamos utilizar a hipótese: $c^2 d\tau^2 = ds^2$, para nos aproximarmos do espaço newtoniano, no qual se trata de um espaço euclidiano, dessa forma, temos que:

$$c^2 d\tau^2 = \pm dx^2 \pm dy^2 \pm dz^2, \quad (1.34)$$

$$c^2 d\tau^2 = \pm \sum dx_i^2, \quad (1.35)$$

logo,

$$c^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = \pm \frac{(\sum dx_i^2)}{dt^2}, \quad (1.36)$$

o que dá diretamente

$$c^2 \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = v^2 \implies \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = \frac{v^2}{c^2} \implies \frac{d\tau}{dt} = \epsilon. \quad (1.37)$$

Invertendo a Eq. (1.37) podemos expandi-la em série de Taylor, assim:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\epsilon} \implies \frac{dt}{d\tau} = 1 + O(\epsilon) + O(\epsilon)^2 + \dots \quad (1.38)$$

Portanto,

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad (1.39)$$

ou seja, “restauração” do tempo newtoniano.

Utilizando agora a hipótese do movimento geodésico, onde usaremos: $\alpha = (4, i)$, $\beta = (4, j)$, $\gamma = (4, k)$. Temos que a geodésica

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}, \quad (1.40)$$

pode ser desenvolvida na sequência abaixo:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \frac{d^2 x^4}{d\tau^2} = \Gamma_{\beta\gamma}^i \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^4 \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}, \quad (1.41)$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \frac{d^2 x^4}{d\tau^2} = \Gamma_{4\gamma}^i \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \Gamma_{j\gamma}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^4 \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}, \quad (1.42)$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \frac{d^2 x^4}{d\tau^2} = \Gamma_{44}^i \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^4}{d\tau} + \Gamma_{4k}^i \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} + \Gamma_{j\gamma}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^4 \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}. \quad (1.43)$$

Ademais:

$$\Gamma_{44}^i = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_4 g_{m4} + \partial_4 g_{m4} - \partial^i g_{44}),$$

$$\Gamma_{44}^i = \frac{1}{2} g^{im} (\epsilon \partial_4 h_{m4} + \epsilon \partial_4 h_{m4} - \epsilon \partial^i h_{44}),$$

$$\Gamma_{44}^i = \frac{1}{2} (\eta^{im} + \epsilon \delta h^{im}) (2\epsilon \partial_4 h_{m4} - \epsilon \partial^i h_{44}),$$

em que usamos a ordem linear da Eq. (1.28). Assim, temos que podemos escrever Γ_{44}^i como:

$$\Gamma_{44}^i = \frac{1}{2} \epsilon \eta^{im} (2\partial_4 h_{m4} - \partial^i h_{44}) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \delta h^{im} (2\partial_4 h_{m4} - \delta_m h_{44}). \quad (1.44)$$

Utilizando a hipótese de que o campo é estático, $\partial_4 g_{\mu\nu} = 0$; $\partial_4 h_{m4} = 0$, notando que

$$\partial_4 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.45)$$

e mantendo a ordem linear em ϵ para o Γ_{44}^i :

$$\begin{aligned} \Gamma_{44}^i &\sim \frac{1}{2} \epsilon (2\partial_4 h_{m4} - \partial^i h_{44}), \\ \Gamma_{44}^i &\sim \frac{1}{2} \epsilon \partial^i h_{44}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Adotando por hipótese que $\tau = ct$ com o intuito de alcançar o tempo newtoniano, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} &\cong \Gamma_{44}^i \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^4}{d\tau} + \Gamma_{4k}^i \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} + \Gamma_{j\gamma}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}, \\ \frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} &\cong \frac{1}{2} \epsilon \partial^i h_{44} + \Gamma_{4k}^i \frac{v}{c^2} + \Gamma_{j4}^i \frac{v}{c^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{v}{c^2} \frac{v}{c^2}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Usando os resultados de $\Gamma_{4k}^i \frac{v}{c^2}$ e Γ_{jk}^i : $\Gamma_{4k}^i \sim \epsilon$ e $\Gamma_{jk}^i \sim \epsilon$, podemos escrever

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} \cong \frac{1}{2} \epsilon \partial^i h_{44} + \Gamma_{4k}^i \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{v} + \Gamma_{jk}^i \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{c^2}, \quad (1.48)$$

mantendo a expressão linear em ϵ obtemos:

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} \sim \frac{1}{2} \epsilon \partial^i h_{44}, \quad (1.49)$$

e assim,

$$\frac{dx^i}{dt^2} \sim \frac{c^2}{2} \epsilon \partial^i h_{44}. \quad (1.50)$$

Utilizando a Segunda Lei de Newton, podemos escrever:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \nabla^2 \phi = \rho, \quad (1.51)$$

e assim,

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \sim \frac{c^2}{2} \epsilon \partial^i h_{44}, \quad (1.52)$$

obtendo o limite newtoniano da Relatividade Geral.

Na Relatividade Geral temos que as equações de movimento são resultantes das equações de campo, porém, um dos requisitos para essa relação campo-movimento é a não-linearidade das equações de campo de Einstein, o que traz grande dificuldade, pois, para se encontrar as linhas-mundo da Relatividade Geral (ver Figura (1.2)) é necessário conhecer o campo gravitacional, mas para sabermos o campo precisamos conhecer o movimento. A não-linearidade das equações dificulta a obtenção das soluções para o problema de dois corpos, por exemplo, algo que poderia facilmente ser reduzido para um problema de um corpo na teoria newtoniana [22].

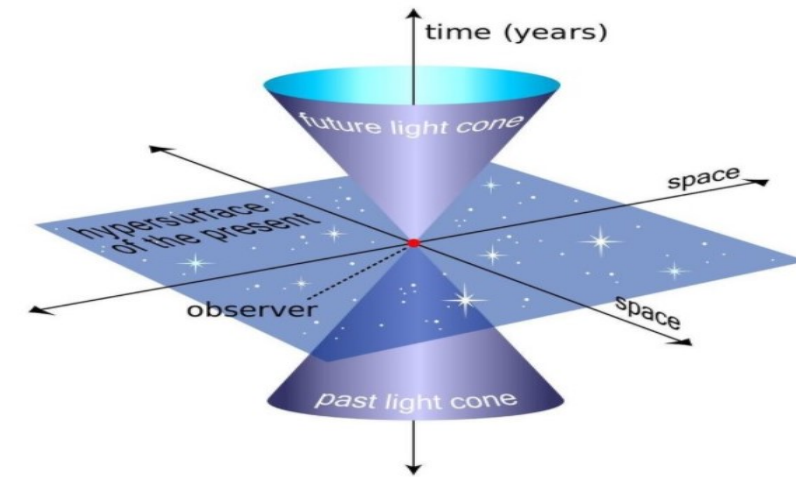


Figura 1.2: Representação de um cone de luz. A linha-mundo de um universo é dada pela trajetória de uma partícula no espaço-tempo quadridimensional. A trajetória das partículas estão confinadas no cone de luz e são chamadas de tipo-tempo, mas há também as trajetórias de luz que viajam sobre o cone e são chamadas de tipo-luz. Figura extraída da Ref. [23].

Uma forma de lidar com essa dificuldade é desenvolver métodos aproximativos adequados onde nos ajudam encontrar o campo e movimento de maneira aproximada. Uma aproximação bem conhecida é o limite newtoniano, conforme já foi trabalhado acima, onde se obtém as

equações de movimento de acordo com a mecânica newtoniana. Outra aproximação é a pós-newtoniana, que se trata de uma versão aproximada da Relatividade Geral, que assim como o limite newtoniano assume o campo gravitacional fraco e movimento lento da matéria, porém com ordens de aproximações maiores [22]. Há também o limite quase-newtoniano, no qual trabalharemos agora.

O limite quase-newtoniano possui características do limite newtoniano e um potencial que leva características da não-linearidade da Relatividade Geral. O campo da Relatividade Geral compreende desde os campos fracos que são observados na teoria newtoniana, até os campos fortes oriundos de quantidades relativísticas, assim, nesse intervalo é possível encontrar um campo com intensidade média: o campo quase-newtoniano [24].

Para reproduzir o limite quase-newtoniano, partiremos da premissa de campo fraco, estático e de baixas velocidades [25, 26].

Sabemos que a equação geral da geodésica é dada por:

$$\frac{d^2 u^m}{ds^2} + \Gamma_{lk}^m \frac{du^l}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0. \quad (1.53)$$

Tomando a equação acima e considerando uma geodésica do tipo tempo, tal que $x^\mu = x^\mu(\tau)$, teremos a seguinte equação da geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\gamma\nu}^\mu \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (1.54)$$

onde parametrizando em termos da coordenada $x^4 = -ct$, obtemos:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{44}^i \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^4}{d\tau} + \Gamma_{4k}^i \frac{dx^4}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} + \Gamma_{j\nu}^i \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \Gamma_{\gamma\nu}^4 \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (1.55)$$

no qual $i = 1, 2, 3$.

Fazendo $\tau = -ct$:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = -\frac{dx^i}{cdt} \implies \frac{dx^i}{dt} = -c \frac{dx^i}{d\tau}, \quad (1.56)$$

e também

$$\frac{d^2 x^1}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^i}{d(-ct)^2} \implies \frac{d^2 x^i}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 x^i}{d\tau^2}. \quad (1.57)$$

Utilizando a hipótese de campo fraco e baixa velocidade, temos que os três últimos termos serão desprezados, assim:

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} + \Gamma_{44}^i \frac{dx^4}{cdt} \frac{dx^4}{cdt} = 0. \quad (1.58)$$

Mas, como $x^4 = -ct \implies \frac{dx^4}{dt} = -c$, então:

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} = -\Gamma_{44}^i \frac{dx^4}{cdt} \frac{dx^4}{cdt}, \quad (1.59)$$

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} = -\Gamma_{44}^i. \quad (1.60)$$

Também, considerando a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ como uma primeira aproximação da métrica do espaço-tempo, e incorporando incrementos para resgatar a força de campo:

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + \epsilon \delta h_{\mu\nu} + \epsilon^2 (\delta h_{\mu\nu})^2 + \dots, \quad (1.61)$$

que pode ser comparada com a estrutura da Eq. (1.28) e levando em conta a condição de campo estacionário, teremos para Γ_{44}^i a seguinte expressão:

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} = -\Gamma_{44}^i, \quad (1.62)$$

$$\Gamma_{44}^i \simeq -\frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \delta h_{4i}}{\partial x^4} - \frac{\partial \delta h_{44}}{\partial x^i} \right), \quad (1.63)$$

$$\Gamma_{44}^i \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial \delta h_{44}}{\partial x^i}. \quad (1.64)$$

Substituindo a Eq.(1.64) na Eq.(1.60):

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \delta h_{44}}{\partial x^i}, \quad (1.65)$$

ou, então:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} (\delta h_{44}). \quad (1.66)$$

A equação da geodésica não se trata de um postulado, ela é proveniente das equações de Einstein, assim, devemos postular a equação de movimento quase-newtoniana com um potencial escalar definido por:

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi_{qn}}{\partial x^a}, \quad (1.67)$$

onde Φ_{qn} trata-se do potencial quase-newtoniano.

Comparando as Eq.(1.66) e Eq.(1.67), temos:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} (\delta h_{44}), \quad (1.68)$$

$$\partial \Phi = -\frac{c^2}{2} \partial (\delta h_{44}), \quad (1.69)$$

$$\int d\Phi = -\frac{c^2}{2} \int_0^{\delta h_{44}} d(\delta h'_{44}), \quad (1.70)$$

$$\Phi = -\frac{c^2}{2} \delta h_{44}, \quad (1.71)$$

no qual está sendo somado todas as contribuições da métrica $g_{\mu\nu}$ de 0 até δh_{44} .

Logo, obtemos a equação para o potencial quase-newtoniano:

$$\Phi_{qn} = -\frac{c^2}{2}(1 + g_{44}), \quad (1.72)$$

o termo g_{44} da Eq.(1.72) é originado das soluções exatas para as equações de campo de Einstein, no qual possui a contribuição de todos os termos da métrica estudada, ou seja, não há aproximação [22, 27].

Este potencial encontrado se trata de um potencial intermediário, porque a soma dos incrementos se dá apenas em uma componente da métrica, a g_{44} , que carrega todos os efeitos da não-linearidade, não sendo tão forte como o potencial da Relatividade Geral. Mas também não é tão fraco quanto o potencial newtoniano, já que o limite está incompleto. Além disso, se adotarmos a métrica de Schwarzschild com simetria esférica, com $g_{44} = -(1 - 2GM/c^2r)$ e substituindo na Eq.(1.72) obteremos o potencial newtoniano, ou seja, $\Phi \sim 1/r$ [24].

Capítulo 2

Potenciais de Weyl

2.1 Cálculo dos Potenciais de Weyl

Para o desenvolvimento dos cálculos dos potenciais de Weyl utilizaremos como referência o trabalho de Valada [25]. Aqui é utilizado a métrica estacionária de Weyl, onde considera-se um campo gravitacional com simetria cilíndrica, de modo que a altura h do cilindro seja muito menor que o raio r , assim, $h \ll r$. A métrica estacionária de Weyl é dada por:

$$ds^2 = e^{2(\lambda-\sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\varphi^2 + e^{2(\lambda-\sigma)} dz^2 - e^{2\sigma} dt^2, \quad (2.1)$$

onde $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$, $-\infty < t < \infty$ e sendo $\lambda = \lambda(r, z)$ e $\sigma = \sigma(r, z)$ os potenciais de Weyl. As funções λ e σ dependem apenas das variáveis r e z , devido a simetria.

E é possível obter as seguintes componentes não nulas do tensor de Ricci:

$$R_{1,1} = -\lambda_{,zz} + \sigma_{,zz} + \frac{\lambda_{,r} + \sigma_{,r} - 2r(\sigma_{,r})^2 - r\lambda_{,rr} + r\sigma_{,rr}}{r}, \quad (2.2)$$

$$R_{2,2} = e^{-2\lambda} r(\sigma_{,zz} + \sigma_{,r} + r\sigma_{,rr}), \quad (2.3)$$

$$R_{3,1} = \frac{\lambda_{,z}}{r} - 2\sigma_{,z}\sigma_{,r}, \quad (2.4)$$

$$R_{3,3} = -2(\sigma_{,z})^2 - \lambda_{,zz} + \sigma_{,zz} - \frac{\lambda_{,r}}{r} + \frac{\sigma_{,r}}{r} - \lambda_{,rr} + \sigma_{,rr}, \quad (2.5)$$

$$R_{4,4} = \frac{e^{-2\lambda+4\sigma}(r\sigma_{,zz} + \sigma_{,r} + r\sigma_{,rr})}{r}, \quad (2.6)$$

onde $\lambda_{,r}$, $\sigma_{,r}$, $\lambda_{,z}$ e $\sigma_{,z}$ são derivadas de primeira ordem e $\lambda_{,rr}$, $\sigma_{,rr}$, $\lambda_{,zz}$ e $\sigma_{,zz}$ são derivadas de segunda ordem.

Assumindo que as componentes acima são idênticas a zero devido as soluções para o vácuo, temos:

$$r(\sigma_{,zz} + \sigma_{,rr}) + \lambda_{,r} + \sigma_{,r} - 2r(\sigma_{,r})^2 - r\lambda_{,zz} - r\lambda_{,rr} = 0, \quad (2.7)$$

$$r^2(\sigma_{,zz} + \sigma_{,rr}) + r\sigma_{,r} = 0, \quad (2.8)$$

$$-2r\sigma_{,z}\sigma_{,r} + \lambda_{,z} = 0, \quad (2.9)$$

$$r(\sigma_{,zz} + \sigma_{,rr}) - 2r(\sigma_{,z})^2 - \lambda_{,r} + \sigma_{,r} - r\lambda_{,zz} - \lambda_{,rr} = 0, \quad (2.10)$$

$$r(\sigma_{,zz} + \sigma_{,rr}) + \sigma_{,r} = 0. \quad (2.11)$$

Substituindo a Eq.(2.7) da Eq.(2.10), e dividindo por 2, obtemos:

$$-\lambda_{,r} + r(\sigma_{,r})^2 - r(\sigma_{,z})^2 = 0. \quad (2.12)$$

Tomando a Eq.(2.8) e dividindo por r, temos:

$$\sigma_{,r} + r\sigma_{,zz} + r\sigma_{,rr} = 0. \quad (2.13)$$

Considerando a Eq.(2.9) e rearranjando os termos:

$$2r\sigma_{,z}\sigma_{,r} = \lambda_{,z}. \quad (2.14)$$

Como assumimos que a altura do cilindro é muito menor que o raio, ou seja, $h \ll r$, será utilizado a expansão em série de Taylor de ordem arbitrária, na qual:

$$\sigma(r, z) = \sigma(r, 0) + z \frac{\partial \sigma(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} + z^2 \frac{\partial^2 \sigma(r, z)}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots, \quad (2.15)$$

onde, consideraremos até a segunda ordem, visto que as equações de Weyl encontradas vão até a segunda ordem. Então:

$$\sigma(r, z) \approx A(r) + a(r)z + c(r)z^2. \quad (2.16)$$

2.2 Aproximação de zero ordem

Assumindo uma aproximação de zero ordem, teremos:

$$\sigma(r) = A(r). \quad (2.17)$$

Utilizando a Eq. (2.13) e fazendo uma redução de ordem, temos: $\sigma_{,r} = y$ e $\sigma_{,rr} = y_{,r}$. Então:

$$y + ry_{,r} = 0. \quad (2.18)$$

Resolvendo a equação acima por separação de variáveis:

$$-\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dr}{r} \quad (2.19)$$

$$y = \frac{C_1 z}{r}. \quad (2.20)$$

Logo:

$$\sigma_{,r} = \frac{C_1(z)}{r}, \quad (2.21)$$

onde $C_1(z)$ é uma constante de integração. Integrando em relação à r :

$$\sigma_{,r} = C_1(z) \ln(r) + C_2(z). \quad (2.22)$$

Podemos assumir que $C_1 = \frac{k_0}{2}$ e $C_2(z) = 0$, pois nas equações de campo temos apenas derivadas da função σ , resultando em:

$$\sigma(r) = \frac{k_0}{2} \ln(r), \quad (2.23)$$

com $k_0 \rightarrow \text{constante}$.

2.3 Aproximação de primeira ordem

Assumindo uma aproximação de primeira ordem, teremos:

$$\sigma(r, z) = A(r) + a(r)z. \quad (2.24)$$

Tomando a Eq. (2.13) e fazendo uma redução de ordem, obtemos:

$$\sigma_{,r} + r\sigma_{,rr} = 0. \quad (2.25)$$

Considerando: $\sigma_{,r} = y$ e $\sigma_{,rr} = y_{,r}$. Teremos:

$$y + ry_{,r} = 0. \quad (2.26)$$

Podemos resolver a equação acima por separação de variáveis:

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dr}{r}, \quad (2.27)$$

$$y = \frac{C_1 z}{r} \quad (2.28)$$

assim:

$$\sigma_{,r} = \frac{C_1(z)}{r}, \quad (2.29)$$

onde C_1 é uma constante de integração. Integrando esta equação em relação à r :

$$\int \frac{C_1(z)}{r} dr = C_1(z) \int \frac{1}{r} dr = C_1(z) \ln(r) + C_2(z), \quad (2.30)$$

$$\sigma(r) = C_1(z) \ln(r) + C_2(z). \quad (2.31)$$

Calculando a derivada da expressão acima em relação à z e comparando com a derivada da Eq. (2.24):

$$\frac{dC_1(z)}{dz} \ln(r) + \frac{dC_2(z)}{dz} = a(r) \quad (2.32)$$

$$\frac{dC_2(z)}{dz} = a(r) - \frac{dC_1(z)}{dz} \ln(r). \quad (2.33)$$

Podemos ver que:

$$C_2 = C_2(z) \implies \frac{dC_1(z)}{dz} = 0, a(r) = a_0 = \text{constante}.$$

Então, fazendo $C_1(z) = \frac{k_0}{2} = \text{constante}$, e integrando a Eq. (2.33), temos a solução:

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) + a_0 z + C_1. \quad (2.34)$$

Fazendo $C_1 = 0$, teremos:

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) + a_0 z. \quad (2.35)$$

2.4 Aproximação de segunda ordem

Para a aproximação de segunda ordem, teremos:

$$\sigma(r, z) = A(r) + a(r)z + c(r)z^2. \quad (2.36)$$

Utilizando a Eq. (2.13) e fazendo uma redução de ordem, temos: $\sigma_{,r} = y$ e $\sigma_{,rr} = y_{,r}$,

$$\sigma_{,zz} = \frac{d(C(r)z^2)}{dz} = \frac{d(2C(r)z)}{dz} = 2C(r) = \sigma_{,zz}. \quad (2.37)$$

Então:

$$y + ry_{,r} + 2rC(r) = 0. \quad (2.38)$$

Esta equação é linear, desta forma, podemos resolvê-la pela técnica do fator de integração. Dividindo a equação por r :

$$\sigma_{,r} = y = -\frac{1}{r} \int 2rC(r)dr + \frac{A_1(z)}{r}. \quad (2.39)$$

Após mais uma integração, teremos:

$$\sigma(r, z) = -\int \frac{1}{r'} \left(\int 2r'' C(r'') dr'' \right) dr' + \int \frac{A_1(z)}{r'} dr'. \quad (2.40)$$

Resolvendo a última integral da expressão acima, obtemos para $\sigma(r, z)$, a seguinte expressão:

$$\sigma(r, z) = -\int \frac{1}{r'} \left(\int 2r'' C(r'') dr'' \right) dr' + A_1(z) \ln(r) + A_2(z). \quad (2.41)$$

Aqui, escolheremos a forma de $C(r'')$ como uma função potência, pois buscamos funções analíticas no infinito, então:

$$C(r'') = \frac{C_0}{r''^n}, \quad (2.42)$$

onde $C_0 = \text{constante}$.

Substituindo na integral acima, obtemos:

$$\sigma(r, z) = -\int \frac{1}{r'} \left(\int 2r'' \frac{C_0}{r''^n} dr'' \right) dr' + A_1(z) \ln(r) + A_2(z) \quad (2.43)$$

$$\sigma(r, z) = \frac{-2C_0}{(2-n)^2} r^{2-n} + k(z) \ln(r) + A_2(z), n \neq 2, \quad (2.44)$$

$$\sigma(r, z) = k(z) \ln(r) + \frac{-2C_0}{(2-n)^2} r^{2-n} + A_2(z), n \neq 2, \quad (2.45)$$

Derivando a equação acima em relação à z , teremos:

$$\sigma_{,z} = k(z)_{,z} \ln(r) + A_2(z)_{,z}. \quad (2.46)$$

Derivando a Eq. (2.36), obtemos o seguinte resultado:

$$\sigma_{,z} = a(r) + 2C(r)z = a(r) + \frac{2C_0}{r^n}z. \quad (2.47)$$

Tomando as Eqs. (2.46) e (2.47) e isolando $A_2(z)_{,z}$, obtemos:

$$A_2(z)_{,z} = a(r) + \frac{2C_0}{r^n}z - k(z)_{,z} \ln(r). \quad (2.48)$$

$A_2(z)$ é uma função apenas de z , assim:

$$A_2 = A_2(z) \implies a(r) = a_0 = \text{constante},$$

tal que $k(z) = \frac{k_0}{2} = \text{constante}$, para $n = 0$.

Então:

$$A_2(z)_{,z} = a_0 + 2C_0z \implies A_2(z)_{,z} = a_0z + C_0z^2 + C_1. \quad (2.49)$$

Analisando as equações de campo (2.12) a (2.14), podemos perceber que sempre teremos as derivadas de $\sigma(r, z)$, desta forma, podemos considerar $C_1 = 0$. Assim, obtemos:

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) - \frac{C_0 r^2}{2} + a_0 z + C_0 z^2. \quad (2.50)$$

Agora que encontramos as funções de σ , temos como objetivo construir o potencial efetivo. O potencial quase-newtoniano é dado por:

$$\Phi_{qN} = -\frac{c^2}{2}(1 + g_{44}) = -\frac{c^2}{2}(1 - e^{2\sigma}). \quad (2.51)$$

Substituindo o valor de σ encontrado para zero ordem, obtemos o seguinte potencial:

$$\Phi_{qN} = -\frac{c^2}{2}(1 - e^{2\frac{k_0}{2} \ln(r)}) = -\frac{c^2}{2}(1 - r^{k_0}). \quad (2.52)$$

Como estamos trabalhando com órbitas de galáxias axissimétricas, podemos reduzir a análise para um problema bidimensional estudando a conservação da componente z do momento angular de qualquer estrela, onde toda a análise estará fundamentada no texto de Binney e Tremaine [28]. Portanto, assumindo que o potencial é simétrico em relação ao plano $z = 0$, $\Phi(R, z)$, temos que o movimento é dado pela Lagrangeana:

$$L = \frac{1}{2}[\dot{R}^2 + (R\dot{\phi}^2) + \dot{z}^2] - \Phi(R, z), \quad (2.53)$$

onde consideramos a massa da Lagrangeana, $m = 1$, em unidade geométrica, a fim de simplificar os cálculos.

O momento canônico é dado por:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.54)$$

Assim, temos que os momentos serão:

$$P_R = \dot{R}. \quad (2.55)$$

$$P_z = \dot{z}. \quad (2.56)$$

$$P_\phi = R^2 \dot{\phi}. \quad (2.57)$$

Utilizando as transformadas de Legendre, teremos que o Hamiltoniano será:

$$H = \sum \dot{q}_i p_i - L, \quad (2.58)$$

$$H = \sum \dot{q}_i p_i - \frac{1}{2} \left[p_R^2 + \frac{p_\phi^2}{R^2} + p_z^2 \right] - \Phi(R, z), \quad (2.59)$$

$$H = \frac{1}{2} \left(p_R^2 + \frac{p_\phi^2}{R^2} + p_z^2 \right) + \Phi(R, z). \quad (2.60)$$

Através das equações de Hamilton, podemos encontrar as equações de movimento:

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{P}_i, \quad (2.61)$$

$$\dot{P}_R = \ddot{R} = \frac{P_\phi^2}{R^3} - \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \quad (2.62)$$

$$\dot{P}_\phi = \frac{d}{dt}(R^2 \dot{\phi}) = 0, \quad (2.63)$$

$$\dot{P}_z = \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (2.64)$$

Substituindo P_ϕ na Eq. (2.62), temos a relação do momento angular:

$$P_\phi = R^2 \dot{\phi} \implies P_\phi^2 = R^4 \dot{\phi}^2, \quad (2.65)$$

então,

$$\dot{P}_R = \frac{R^4 \dot{\phi}^2}{R^3} = R \dot{\phi}^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \quad (2.66)$$

A primeira e a última das equações de movimento podem ser escritas como:

$$\ddot{R} - \frac{\partial \Phi_{ef}}{\partial R} \implies \ddot{R} = \frac{L_z^2}{R^3} - \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \quad (2.67)$$

pois,

$$\ddot{R} = -\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{(L_z)^2}{2R^2} \right) = -\frac{L_z^2}{2} \cdot (-2)R^{-3} = \frac{L_z^2}{R^3}, \quad (2.68)$$

e

$$\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{ef}}{\partial z}, \quad (2.69)$$

onde:

$$\Phi_{eff} = \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2}, \quad (2.70)$$

que trata-se do potencial efetivo.

O movimento tridimensional de uma estrela com potencial de simetria axial pode ser reduzido ao movimento bidimensional da estrela no plano (R,z). Assim, o Hamiltoniano será:

$$H_{eff} = \frac{1}{2}(p_R^2 + p_z^2) + \Phi_{ef}(R, z). \quad (2.71)$$

O valor numérico de H_{eff} é simplesmente a energia total (E) da órbita. A diferença $E - \Phi_{eff}$ é a energia cinética do movimento no plano (R,z) igual a $\frac{1}{2}(p_R^2 + p_z^2)$. Como a energia cinética não é negativa, a órbita é restrita à área no plano meridional que satisfaz a desigualdade $E \gg \Phi_{eff}$. A curva que delimita essa área é chamada de curva de velocidade zero. Então, o potencial efetivo será:

$$\Phi_{eff} = \frac{1}{2}v_0^2 \ln \left(R^2 + \frac{z^2}{q^2} \right) + \frac{L_z^2}{2R^2}. \quad (2.72)$$

Tomando a Eq. (2.72) e derivando-a em relação à R, obtemos:

$$\frac{d\Phi_{eff}}{dR} = 0 = \frac{1}{2}v_0^2 \frac{2R}{\left(R^2 + \frac{z^2}{q^2} \right)} - \frac{L_z^2}{R^3}. \quad (2.73)$$

Plotando a Eq. (2.73) obtemos o seguinte gráfico de contorno, conforme mostrado na Fig. (2.1):

O gráfico encontrado na Fig. (2.1) se assemelha a um potencial efetivo sofrido por uma estrela em uma galáxia esferoidal oblata, na qual possui uma velocidade circular constante v_0 . Além disso, o potencial efetivo sobe de forma muito abrupta próximo ao eixo z , como se o eixo de simetria fosse preservado por uma barreira centrífuga.

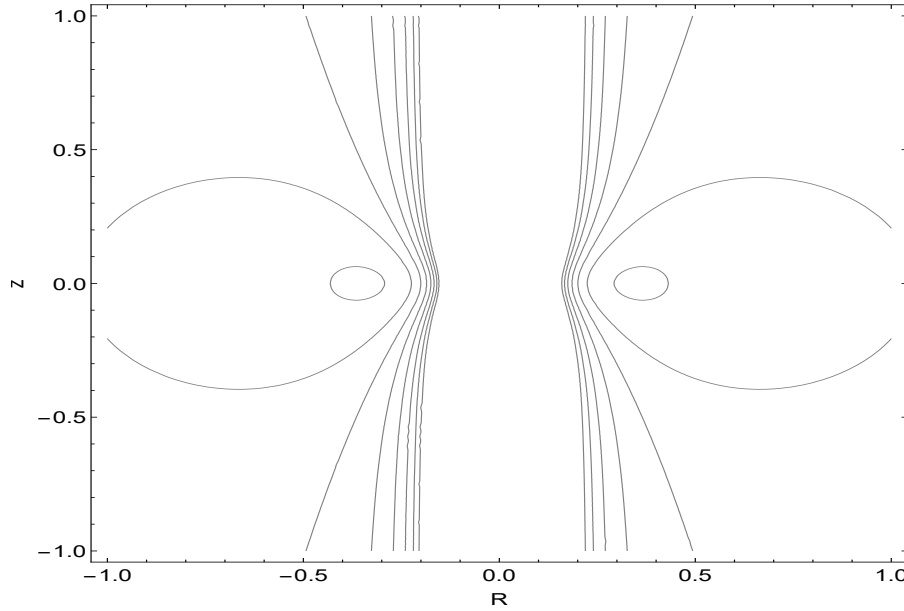


Figura 2.1: Gráfico de contorno do potencial efetivo da Eq. (2.73), onde $v_0 = 1$, $L_z = 0.2$ e $q = 0.9$.

Tomando a Eq. (2.72) novamente, porém, agora derivando em relação à z , obtemos:

$$\frac{d\Phi_{eff}}{dz} = 0 = \frac{1}{2}v_0^2 \frac{2z}{R^2 + \frac{z^2}{q^2}}. \quad (2.74)$$

Plotando a Eq. (2.74) obtemos o seguinte gráfico de contorno, conforme mostrado na Fig. (2.2):

A Fig. (2.2) mostra as órbitas de estrelas com a mesma energia e momento angular da Fig. (2.1), porém, elas parecem bem diferentes no espaço real, como consequência as estrelas nessas órbitas devem se mover através de regiões diferentes do espaço de fase.

Adaptando para o nosso problema, temos que o potencial efetivo será:

$$\Phi_{eff} = \Phi_N + \frac{L_z^2}{2R^2}. \quad (2.75)$$

Para o potencial efetivo de ordem zero, obtemos:

$$\Phi_{eff} = (1 - R^{k_0}) + \frac{L_z^2}{2R^2}. \quad (2.76)$$

Para o potencial efetivo de primeira ordem:

$$\Phi_{eff} = (1 - R^{k_0} e^{2a_0 z}) + \frac{L_z^2}{2R^2}. \quad (2.77)$$

Tomando a Eq. (2.76) e a Eq. (2.77) podemos plotar um gráfico de contorno para o potencial efetivo referente a cada ordem, como mostrado nas Figs.(2.3) e (2.4).

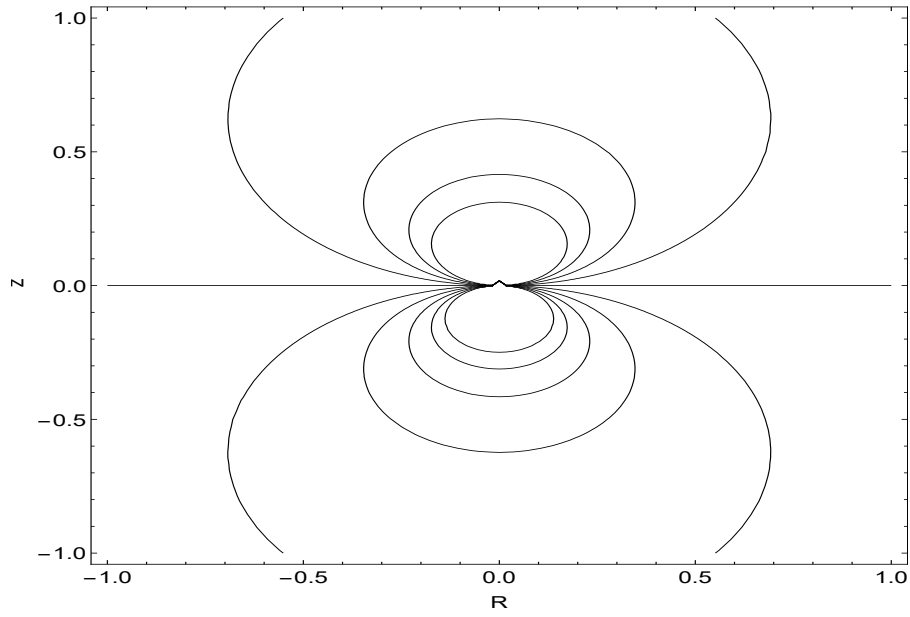


Figura 2.2: Gráfico de contorno do potencial efetivo da Eq. (2.74), onde $v_0 = 1$, $L_z = 0.2$ e $q = 0.9$.

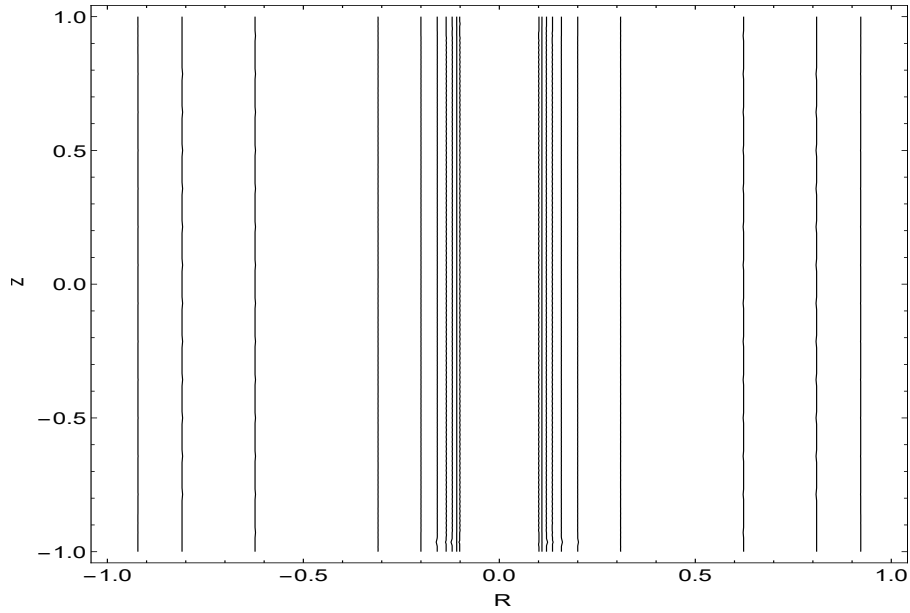


Figura 2.3: Gráfico de contorno do potencial efetivo da Eq. (2.76), onde $k_0 = 4$ e $L_z = 0.2$.

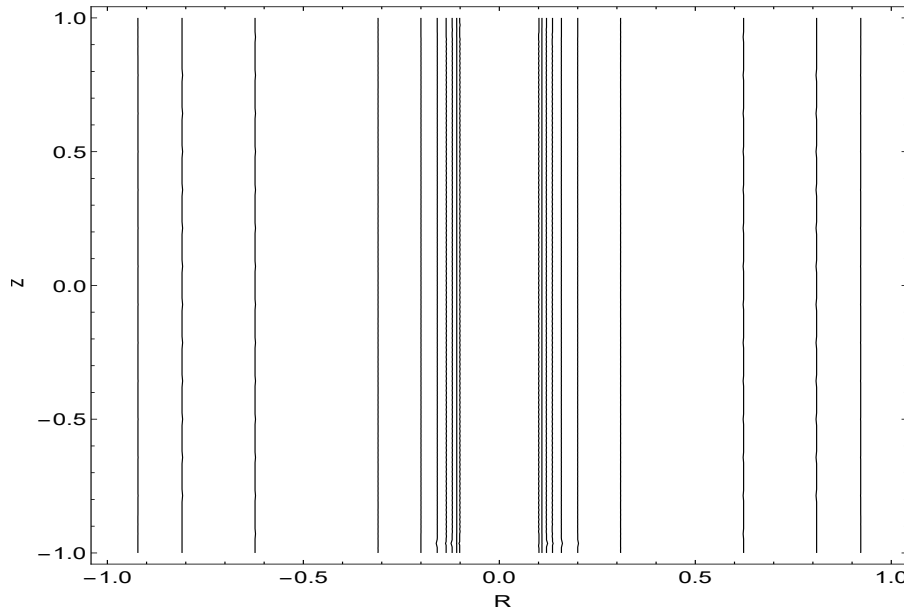


Figura 2.4: Gráfico de contorno do potencial efetivo da Eq. (2.77), onde $k_0 = 4$, $a_0 = 10^{-6}$ e $L_z^2 = 0,04$.

Para o potencial de ordem zero adotamos valores para k_0 de -4 a 4 e $L_z^2 = 0,04, 1$ e 10 . Para o potencial de primeira ordem adotamos os valores para k_0 de -4 a 4 , $a_0 = 10^{-4}$ e $a_0 = 10^{-6}$ e para $L_z^2 = 0,04, 1$ e 10 . Como definimos valores bem pequenos para a_0 , temos que o termo e^{2a_0z} fica muito próximo de 1 , fazendo com que a equação de primeira ordem recaia na ordem zero. Assim, teremos gráficos praticamente idênticos para essas duas ordens. Também podemos observar que para ambos os potenciais sempre teremos órbitas abertas, sendo incompatível com o sistema físico.

Para o potencial efetivo de segunda ordem, temos a expressão:

$$\Phi_{eff} = R^{k_0} e^{[-C_0 R^2 + 2(a_0 z + C_0 z^2)]} + \frac{L_z^2}{2R^2}. \quad (2.78)$$

E se obteve os seguintes gráficos de contorno, conforme mostrado nas Figs.(2.5) e (2.6).

Apenas para valores de $k_0 = 4$, $C_0 = 1$, $a_0 = 10^{-4}$ e $L_z^2 = 0,04$ e $k_0 = 0$, $C_0 = -1$, $a_0 = 10^{-4}$ e $L_z^2 = 0,04$ é que foi possível encontrar os gráficos de contorno do potencial efetivo com órbitas fechadas e estáveis, compatível com o sistema físico. Assim sendo, ambos os gráficos mostram um potencial bidimensional, pois temos no plano as coordenadas em z e R , além da simetria em Φ , então é como se obtivéssemos uma visão de cima para baixo desses potenciais efetivos, onde as linhas, são as linhas de potenciais efetivos em que as partículas estão presas e o centro dos gráficos é a região crítica, na qual representa o centro da galáxia. Vale ressaltar também que a

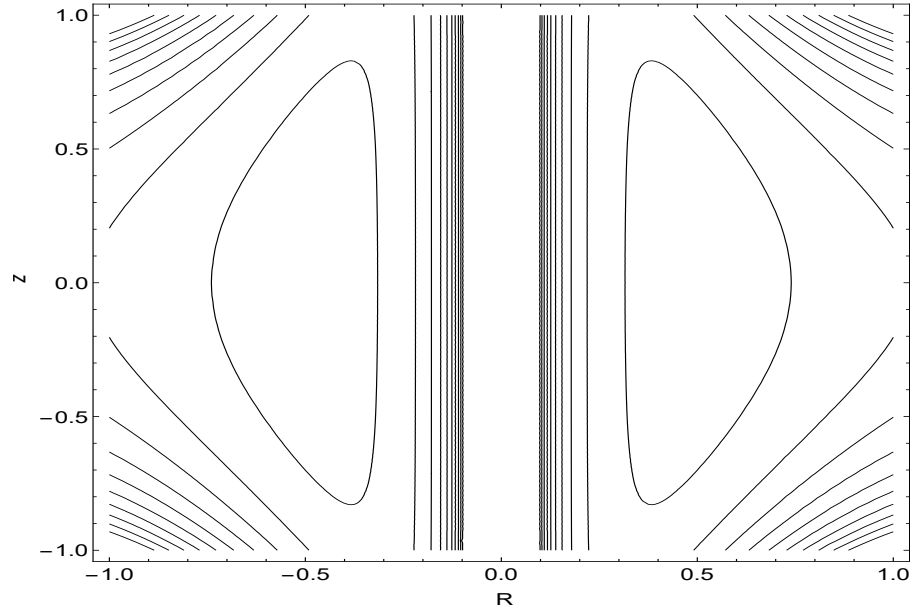


Figura 2.5: Gráfico de contorno do potencial efetivo da Eq. 2.78, onde $k_0 = 4$, $C_0 = 1$, $a_0 = 10^{-4}$ e $L_z^2 = 0,04$.

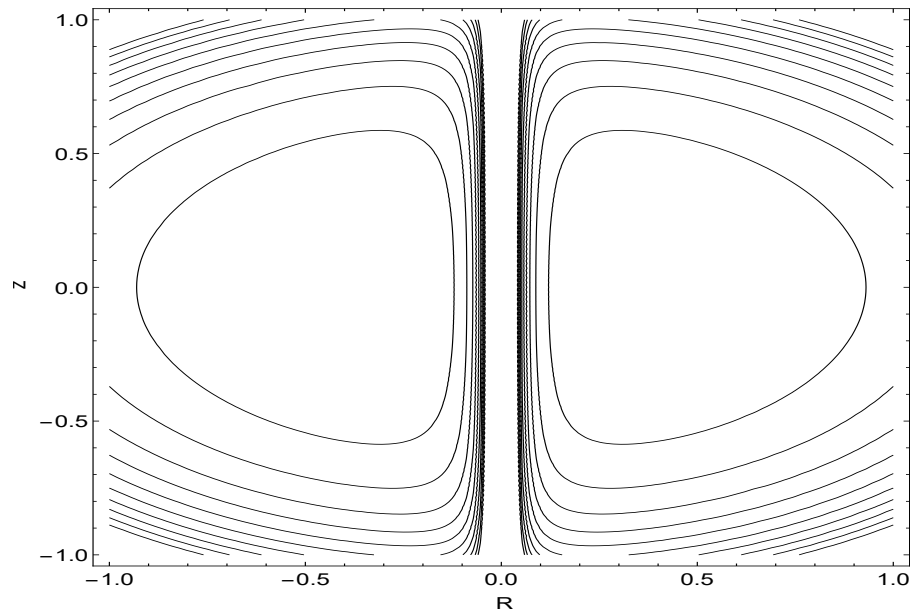


Figura 2.6: Gráfico de contorno do potencial efetivo da Eq. 2.78, onde $k_0 = 0$, $C_0 = -1$, $a_0 = 10^{-4}$ e $L_z^2 = 0,04$.

coordenada z não representa a altura.

Aqui nos gráficos o termo k_0 é quem irá definir a característica dos potenciais efetivos. Para valores diferentes de $k_0 = 4$ e $k_0 = 0$ só teremos órbitas abertas. Destes dois gráficos plotados podemos observar também que não são órbitas circulares, tratam-se de órbitas mais achatadas, elípticas, devido ao potencial quase-newtoniano. Além disso, quanto mais próximo de zero for o termo linear $2a_0z$ mais órbitas serão possíveis.

Podemos observar também que, se excluirmos o último termo da Eq. (2.78), ou seja, $\frac{L_z^2}{2R^2}$ e também zerarmos o termo linear $2a_0z$, teremos órbitas circulares, já que nos aproximaremos da equação para o círculo.

Capítulo 3

Lentes Gravitacionais

O fenômeno de lente gravitacional se dá pela deflexão dos raios de luz pelo campo gravitacional, é similar ao efeito que ocorre com a luz ao atravessar um meio material, ou seja, a gravidade atua como um lente. Para que esse fenômeno ocorra é necessário a presença de um observador, uma fonte de luz distante e também uma lente gravitacional posicionada entre esses objetos; a lente defletora pode ser uma galáxia, uma estrela ou até mesmo um planeta [29, 30]. Na verdade, qualquer massa pode ser uma lente gravitacional, até mesmo nosso bichinho de estimação, o problema é que só é possível detectar o efeito para massas e distâncias extremamente grandes.

O efeito de lente gravitacional possui a característica de ser acromático e também difere das lentes comuns, como as de óculos, pois não possui um foco bem definido, resultando em imagens distorcidas da fonte, ou então, produzindo múltiplas imagens, denominadas miragens gravitacionais. As lentes gravitacionais podem ser divididas em duas categorias: microlentes e macrolentes. As microlentes são observadas quando a massa e distância até a lente são pequenas, resultando em uma separação angular entre as imagens da ordem de microssegundos de arco, embora não seja possível detectar essas imagens, podemos captar o aumento do brilho. Já as macrolentes podem ser subdivididas em dois tipos: fracas e fortes. As macrolentes fracas acontecem quando o campo não é forte, causando uma distorção das imagens. Já as macrolentes fortes aparecem em intensos campos gravitacionais, como aglomerados de galáxia e resultam em imagens múltiplas [29, 30].

Mais do que uma consequência da Relatividade Geral, esse fenômeno é uma ferramenta

importante para as áreas de cosmologia e astrofísica, pois permite observar objetos extremamente distantes do universo, descobrir novos planetas, determinar a taxa de expansão do universo, detectar matéria escura e até mesmo explorar a estrutura do universo em grandes escalas [29].

3.1 Ângulo de deflexão e formação de imagem

Antes de fazermos o desenvolvimento para Weyl, vamos utilizar como exemplo o trabalho de Matos e Becerril [31] para encontrarmos o ângulo de deflexão. Em seu trabalho foi considerada uma lente gravitacional em virtude de uma lente esfericamente simétrica com um campo escalar minimamente acoplado. Assim, vamos considerar a seguinte métrica:

$$ds^2 = -(1 - 2m/r)dt^2 + e^{2k_s} \frac{dr^2}{(1 - 2m/r)} + r^2(e^{k_s}d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.1)$$

onde:

$$e^{2k_s} = \left(1 + \frac{m^2 \sin^2\theta}{r^2(1 - 2m/r)}\right)^{-\frac{1}{a^2}},$$

definindo:

$$\theta = \pi/2 : \sin^2(\pi/2) = 1 \implies e^{2k_s} = \left(1 + \frac{m^2}{r^2(1 - 2m/r)}\right)^{-\frac{1}{a^2}},$$

onde m é a massa.

Através da Eq. (3.1), temos que a equação do caminho para fótons é dada por:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + e^{-2k_s} \left(\frac{B^2}{r^2}\right) (1 - 2m/r) = e^{-2k_s} A^2, \quad (3.2)$$

onde:

$$A = (1 - 2m/r) \frac{dt}{ds}, \quad (3.3)$$

e

$$B = r^2 \frac{d\varphi}{ds}. \quad (3.4)$$

Tal que B pode ser reexpresso como:

$$B = \frac{Ar_0}{\sqrt{1 - 2m/r_0}}. \quad (3.5)$$

Tomando a Eq. (3.2) e substituindo na Eq. (3.5):

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + e^{-2k_s} \left(\frac{A^2 r_0^2}{(1-2m/r_0)r^2}\right) (1-2m/r) = e^{-2k_s} A^2. \quad (3.6)$$

Agora, substituindo a Eq. (3.3) na Eq. (3.6):

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + e^{-2k_s} \left[\frac{(1-2m/r)^2 r_0^2}{(1-2m/r_0)r^2}\right] (1-2m/r) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = e^{-2k_s} (1-2m/r)^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2. \quad (3.7)$$

Usando a regra da cadeia eliminamos ds , logo:

$$dr^2 + e^{-2k_s} \left[\frac{(1-2m/r)^2 r_0^2}{(1-2m/r_0)r^2}\right] (1-2m/r) dt^2 = e^{-2k_s} (1-2m/r)^2 dt^2. \quad (3.8)$$

Isolando dr^2 e colocando dt^2 em evidência:

$$dr^2 = \left[-e^{-2k_s} \frac{(1-2m/r)^2 r_0^2}{(1-2m/r_0)r^2} (1-2m/r) + e^{-2k_s} (1-2m/r)^2 \right] dt^2. \quad (3.9)$$

Colocando e^{-2k_s} em evidência:

$$dr^2 = \left[-\frac{(1-2m/r)^2 r_0^2}{(1-2m/r_0)r^2} (1-2m/r) + (1-2m/r)^2 \right] e^{-2k_s} dt^2. \quad (3.10)$$

Colocando $(1-2m/r)^2$ em evidência:

$$dr^2 = \left[\frac{r^2(1-2m/r_0 - r_0^2(1-2m/r))}{(1-2m/r_0)r^2} \right] (1-2m/r)^2 e^{-2k_s} dt^2. \quad (3.11)$$

Tirando a raiz quadrada e dividindo por r_0 , a equação acima ficará:

$$dr = \left[\frac{r^2}{r_0^2} (1-2m/r_0) - (1-2m/r) \right]^{\frac{1}{2}} \frac{r_0(1-2m/r)}{r\sqrt{1-2m/r}} (e^{-2k_s})^{\frac{1}{2}} dt \left(\frac{ds}{ds} \right). \quad (3.12)$$

Usando a definição de A e B na Eq. (3.12):

$$dr = \left[\frac{r^2}{r_0^2} (1-2m/r_0) - (1-2m/r) \right]^{\frac{1}{2}} \frac{B}{r} (e^{-2k_s})^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

Substituindo a Eq. (3.4) na Eq. (3.13):

$$dr = \left[\frac{r^2}{r_0^2} (1-2m/r_0) - (1-2m/r) \right]^{\frac{1}{2}} r (e^{-2k_s})^{\frac{1}{2}} d\varphi. \quad (3.14)$$

Isolando $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{dr}{r} \left[\frac{r^2}{r_0^2} (1-2m/r_0) - (1-2m/r) \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-k_s}. \quad (3.15)$$

Podemos notar que:

$$e^{k_s} = \left(1 + \frac{m^2}{r^2(1-2m/r)} \right)^{-\frac{1}{2a^2}}. \quad (3.16)$$

Após algumas manipulações, temos que:

$$e^{k_s} = \left[\frac{(1 - 2m/r)^2}{(1 - 2m/r_0)} \right]^{-\frac{1}{2a^2}}. \quad (3.17)$$

Substituindo a Eq. (3.17) na Eq. (3.15):

$$d\varphi = \frac{dr}{r} \left[\frac{r^2}{r_0^2} (1 - 2m/r_0) - (1 - 2m/r) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{(1 - m/r)^2}{(1 - 2m/r)} \right]^{-\frac{1}{2a^2}}. \quad (3.18)$$

Rearranjando os termos da equação, obtemos:

$$\varphi(r) = \frac{dr}{r} \left(\frac{(1 - m/r)^2}{(1 - 2m/r)} \right)^{-\frac{1}{2a^2}} \left[\frac{r^2}{r_0^2} (1 - \frac{2m}{r_0}) - (1 - \frac{2m}{r}) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.19)$$

3.2 Equações Gerais da Geodésica

Nesta seção e na seção 3.3 utilizaremos de base o trabalho de Valada [25], onde através das equações da geodésica chegaremos até a equação de desvio da luz. Iniciando o estudo, temos que a equação da geodésica é definida por:

$$\frac{d^2 u^n}{ds^2} + \Gamma_{lk}^n \frac{du^l}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0. \quad (3.20)$$

Através das componentes não-nulas da métrica de Weyl é possível construir as seguintes equações:

$$\Gamma_{11}^1 = \lambda_r - \sigma_r, \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{11}^1, \Gamma_{23}^2 = -\sigma_z, \Gamma_{44}^1 = e^{4\sigma-2\lambda} \sigma_r, \quad (3.21)$$

$$\Gamma_{11}^3 = \sigma_z - \lambda_z, \Gamma_{14}^4 = \sigma_r, \Gamma_{33}^1 = -\Gamma_{11}^1, \Gamma_{44}^3 = e^{4\sigma-2\lambda} \sigma_z, \quad (3.22)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1 - r\sigma_r}{r}, \Gamma_{22}^1 = e^{-2\lambda}(r^2\sigma_r - r), \Gamma_{33}^3 = -\Gamma_{11}^3, \quad (3.23)$$

$$\Gamma_{13}^1 = -\Gamma_{11}^3, \Gamma_{22}^3 = e^{-2\lambda}r^2\sigma_z, \Gamma_{34}^4 = \sigma_z, \quad (3.24)$$

onde os potenciais σ e λ são determinados pelas equações de Einstein conforme mostrado no Cap. 2.

Dos resultados de (3.21) a (3.24), é possível obter as seguintes equações:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + (\sigma_r - \lambda_r) \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + (2\lambda_z - 2\sigma_z) \frac{dr}{ds} \frac{dz}{ds} + e^{-2\lambda}(r^2\sigma_r - r) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + e^{4\sigma-2\lambda} \sigma_r \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - (\sigma_r - \lambda_r) \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = 0, \quad (3.25)$$

$$2r\sigma_z \frac{d\varphi}{ds} \frac{dz}{ds} - r \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2r\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} - 2 \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (3.26)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} + (\lambda_z - \sigma_z) \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 - (2\sigma_r - 2\lambda_r) \frac{dr}{ds} \frac{dz}{ds} + e^{-2\lambda} r^2 \sigma_z \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + e^{4\sigma - 2\lambda} \sigma_z \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + (\sigma_z - \lambda_z) \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = 0, \quad (3.27)$$

$$2\sigma_z \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} + \frac{d^2t}{ds^2} + 2\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0. \quad (3.28)$$

3.2.1 Redução das equações da geodésica para um disco fino

Tomando a Eq. (3.26), a Eq. (3.28) e também a expressão da métrica de Weyl, temos:

$$2r\sigma_z \frac{d\varphi}{ds} \frac{dz}{ds} - r \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2r\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} - 2 \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (3.29)$$

$$2\sigma_z \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} + \frac{d^2t}{ds^2} + 2\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0, \quad (3.30)$$

$$ds^2 = e^{2(\lambda - \sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\varphi^2 + e^{2(\lambda - \sigma)} dz^2 - e^{2\sigma} dt^2. \quad (3.31)$$

Fazendo $z \rightarrow 0$ nas últimas equações, temos:

$$\frac{d^2t}{ds^2} + 2\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0, \quad (3.32)$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \left(\frac{2}{r} - 2\sigma_r \right) \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad (3.33)$$

$$ds^2 = e^{2(\lambda - \sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\varphi^2 - e^{2\sigma} dt^2. \quad (3.34)$$

Podemos observar que:

$$\frac{d}{ds} \left(e^{2\sigma} \frac{dt}{ds} \right) = e^{2\sigma} \left(\frac{d^2t}{ds^2} + 2\sigma_r \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} \right) \implies e^{-2\sigma} \frac{d}{ds} \left(e^{2\sigma} \frac{dt}{ds} \right) = 0.$$

Assim, a Eq. (3.32) pode ser reescrita como:

$$e^{-2\sigma} \frac{d}{ds} \left(e^{2\sigma} \frac{dt}{ds} \right) = 0 \implies e^{2\sigma} \frac{dt}{ds} = k_1.$$

Isolando dt :

$$dt = k_1 e^{-2\sigma} ds, \quad (3.35)$$

com $k_1 = \text{constante}$.

Também podemos observar que:

$$\frac{d}{ds} \left(r^2 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi}{ds} \right) = r^2 e^{-2\sigma} \left(\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \left(\frac{2}{r} - 2\sigma_r \right) \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} \right) \Rightarrow \frac{e^{2\sigma}}{r^2} \frac{d}{ds} \left(r^2 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0.$$

Desta forma, a Eq. (3.33) pode ser reescrita como:

$$\frac{e^{2\sigma}}{r^2} \frac{d}{ds} \left(r^2 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \Rightarrow r^2 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi}{ds} = k_2.$$

Isolando ds :

$$ds = r^2 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi}{k_2}, \quad (3.36)$$

com $k_2 = \text{constante}$.

Substituindo os resultados das Eqs. (3.35) e (3.36) na Eq. (3.34), obtemos:

$$\left(r^2 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi}{k_2} \right)^2 = e^{2(\lambda-\sigma)} dr^2 + r^2 e^{-2\sigma} d\varphi^2 - e^{2\sigma} (k_1 e^{-2\sigma} ds)^2. \quad (3.37)$$

Rearranjando a equação, temos:

$$r^4 e^{-2\sigma} \frac{d\varphi^2}{k_2^2} = e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\varphi^2 - e^{2\sigma} \left(\frac{k_1^2}{k_2^2} e^{-6\sigma} r^4 d\varphi^2 \right), \quad (3.38)$$

$$\left(\frac{r^4 e^{-2\sigma}}{k_2^2} + \frac{r^4 k_1^2}{k_2^2} e^{-4\sigma} - r^2 \right) d\varphi^2 = e^{2\lambda} dr^2, \quad (3.39)$$

ou

$$\frac{dr^2}{d\varphi^2} = e^{-2\lambda} \left(\frac{r^4 e^{-2\sigma}}{k_2^2} + \frac{r^4 k_1^2}{k_2^2} e^{-4\sigma} - r^2 \right). \quad (3.40)$$

Chamando $\frac{1}{k_2} = \alpha = \text{constante}$ e $\frac{k_1}{k_2} = \beta = \text{constante}$ e substituindo na Eq. (3.40), obtemos:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = e^{-2\lambda} [r^4 e^{-2\sigma} (\alpha^2 + \beta^2 e^{-2\sigma}) - r^2]. \quad (3.41)$$

3.2.2 Geodésica nula e desvio da luz

Por questão de completeza vamos reproduzir o limite newtoniano para depois mostrar a curvatura. Sendo assim, vamos partir da ideia que a luz descreve uma geodésica de comprimento nulo, assim $ds = 0$. Isto é o mesmo que admitir nas Eqs. (3.35) e (3.36) que $k_1 \rightarrow \infty$ e, igualmente $k_2 \rightarrow \infty$. Logo, na Eq. (3.41) temos que $\alpha \rightarrow 0$ e β é indeterminado, fornecendo então:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = e^{-2\lambda}(r^4 e^{-4\sigma} \beta^2 - r^2). \quad (3.42)$$

No intuito de avaliar a indeterminação de β , construiremos uma equação independente de ds . Desta forma, faremos a razão entre as Eqs. (3.36) e (3.35), que nos fornece:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{e^{4\sigma}}{\beta}, \quad (3.43)$$

ou

$$\beta = \frac{e^{4\sigma}}{r^2 \frac{d\varphi}{dt}}. \quad (3.44)$$

Assim, β é uma constante finita, pois $\frac{1}{2}r^2 \frac{d\varphi}{dt}$ é a velocidade areolar no limite Newtoniano e $\sigma = 0$, no mesmo limite. Portanto, concluímos que a Eq. (3.42) é consistente ao problema do desvio da luz.

Dos casos explorados na solução para um disco fino, admitindo que $c_0 \ll 0$ e $a_0 = c_0 = 0$, as funções σ e λ possuem a seguinte forma:

$$\sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) \implies \sigma(r, z) = \frac{k_0}{2} \ln(r) + \psi, \quad (3.45)$$

$$\lambda(r, z) = \frac{k_0^2}{4} \ln(r). \quad (3.46)$$

onde ψ refere-se a constante C_1 , que havia sido ignorada na equação (2.50).

Desta forma, substituindo a Eq. (3.46) na Eq. (3.42), obtemos:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = e^{-2\left(\frac{k_0^2}{4} \ln(r)\right)} (r^4 e^{-4\left(\frac{k_0}{2} \ln(r) + \psi\right)} \beta^2 - r^2), \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^{\frac{1}{2}} k_0^2 [r^{2(2-k_0)} e^{-4\psi} \beta^2 - r^2], \quad (3.48)$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^{2-\frac{1}{2}k_0^2} (\beta^2 e^{-4\psi} r^{(2-2k_0)} - 1). \quad (3.49)$$

Agora, tomando a Eq. (3.34) e assumindo $ds = 0$, temos:

$$e^{2\lambda-4\sigma} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 e^{-4\sigma} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - 1 = 0. \quad (3.50)$$

ou

$$e^{-2\lambda-4\sigma} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = -r^2 e^{-4\sigma} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 1, \quad (3.51)$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = e^{4\sigma-2\lambda} - \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (3.52)$$

Com o resultado obtido na Eq. (3.43), podemos reescrever a Eq. (3.52):

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = e^{4\sigma-2\lambda} - \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} \frac{e^{8\sigma}}{\beta^2}, \quad (3.53)$$

ou também:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = e^{4\sigma-2\lambda} \left(1 - \frac{e^{4\sigma}}{\beta^2 r^2} \right). \quad (3.54)$$

Dividindo a Eq. (3.54) por $e^{8\sigma}$:

$$\left(\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{e^{4\sigma-2\lambda} \left[1 - \frac{e^{4\sigma}}{\beta^2 r^2} \right]}{e^{8\sigma}}. \quad (3.55)$$

Assim, substituindo as funções de σ e λ dadas pela Eq. (3.46) na Eq. (3.55), temos:

$$\left(\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{r^{2k_0} e^{4\psi} r^{-\frac{1}{2}k_0^2} \left[1 - \frac{r^{2k_0} e^{4\psi}}{\beta^2 r^2} \right]}{r^{4k_0} e^{8\psi}}. \quad (3.56)$$

Rearranjando os termos:

$$\left(\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} \right)^2 = r^{-\frac{1}{2}k_0^2} e^{-4\psi} \left(r^{-2k_0} - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2} - r^2 \right). \quad (3.57)$$

Assumindo k_0 nas Eqs. (3.49) e (3.57), obtemos:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \beta^2 e^{-4\psi} r^4 - r^2, \quad (3.58)$$

$$\left(\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} \right)^2 = e^{-4\psi} \left(1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^2} \right). \quad (3.59)$$

Podemos reescrever a Eq. (3.59) como:

$$\left(\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} \right) = e^{-2\psi} \sqrt{1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^2}}. \quad (3.60)$$

Com o intuito de resolver a equação diferencial da Eq. (3.58), realizaremos a troca de variáveis em que $r = \frac{1}{u}$, assim:

$$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2} \Rightarrow \left(\frac{dr}{du}\right)^2 = \left(-\frac{1}{u^2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{dr}{du}\right)^2 = \frac{1}{u^4}, \quad (3.61)$$

e

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2. \quad (3.62)$$

Podemos reescrever a Eq. (3.58) como:

$$\frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \beta^2 e^{-4\psi} \left(\frac{1}{u}\right)^4 - \left(\frac{1}{u}\right)^2. \quad (3.63)$$

ou então:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \beta^2 e^{-4\psi} - u^2. \quad (3.64)$$

Calculando a derivada da Eq. (3.64), com relação a φ , obtemos:

$$2 \frac{d^2u}{d\varphi^2} \frac{du}{d\varphi} = -2u \frac{du}{d\varphi}, \quad (3.65)$$

e assumindo que $\frac{du}{d\varphi} \neq 0$:

$$2 \frac{d^2u}{d\varphi^2} \frac{du}{d\varphi} = -2u \frac{du}{d\varphi}, \quad (3.66)$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0. \quad (3.67)$$

Na qual sua solução particular é:

$$u = C_1 \cos(\varphi) + C_2 \sin(\varphi), \quad (3.68)$$

ou então:

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos(\varphi) + C_2 \sin(\varphi). \quad (3.69)$$

Fazendo $r \rightarrow \infty$ e definindo que φ assume o valor de φ_∞ , onde $\varphi_\infty \ll 1$.

Assim, da Eq. (3.69), temos:

$$C_1 \cos(\varphi_\infty) + C_2 \sin(\varphi_\infty) = 0, \quad (3.70)$$

$$C_2 \tan(\varphi_\infty) = -C_1 \Rightarrow \tan(\varphi_\infty) = -\frac{C_1}{C_2}, \quad (3.71)$$

e partindo do argumento que $\varphi_\infty \ll 1$, é válido admitirmos que $\tan(\varphi_\infty) \approx (\varphi_\infty)$, assim:

$$\varphi_\infty = -\frac{C_1}{C_2}. \quad (3.72)$$

De acordo com Cattani [32], $\Delta = 2\varphi_\infty$, assim, a Eq. (3.72) fica:

$$\varphi_\infty = \frac{\Delta\varphi}{2} \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{2} = -\frac{C_1}{C_2}, \quad (3.73)$$

$$\Delta\varphi = -2\frac{C_1}{C_2}. \quad (3.74)$$

Considerando arbitrariamente que $C_1 = 1$, obtemos:

$$\Delta\varphi = -\frac{2}{C_2}. \quad (3.75)$$

Calculando agora a derivada da Eq. (3.69) em relação à t , temos:

$$-r^{-2} \frac{dr}{dt} = [-C_1 \sin(\varphi) + C_2 \cos(\varphi)] \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3.76)$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = [-C_1 \sin(\varphi) + C_2 \cos(\varphi)] \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3.77)$$

ou utilizando o resultado da Eq. (3.43):

$$\frac{dr}{dt} = [C_1 \sin(\varphi) - C_2 \cos(\varphi)] \left(\frac{e^{4\sigma}}{\beta} \right). \quad (3.78)$$

Assim, a Eq. (3.78) pode ser escrita novamente como:

$$\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\beta} [C_1 \sin(\varphi) - C_2 \cos(\varphi)], \quad (3.79)$$

ou substituindo o resultado da Eq. (3.60) na Eq. (3.79):

$$e^{-2\psi} \sqrt{1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^2}} = \frac{1}{\beta} [C_1 \sin(\varphi) - C_2 \cos(\varphi)]. \quad (3.80)$$

Adotando novamente que $C_1 = 1$ e $r \rightarrow \infty$, temos:

$$\beta e^{-2\psi} = \sin(\varphi_\infty) - C_2 \cos(\varphi_\infty). \quad (3.81)$$

Como $\varphi \ll 1$ podemos fazer a seguinte aproximação $\sin(\varphi_\infty) \approx 0$, $\cos(\varphi_\infty) \approx 1$, que nos fornece:

$$C_2 = -\beta e^{-2\psi}. \quad (3.82)$$

Tomando o resultado da Eq. (3.82) e substituindo na Eq. (3.75), temos a equação para o desvio da luz:

$$C_2 = -\frac{2}{\Delta\varphi} \Rightarrow -\frac{2}{\Delta\varphi} = -\beta e^{-2\psi}, \quad (3.83)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2e^{2\psi}}{\beta}. \quad (3.84)$$

Através da Mecânica Newtoniana, o desvio de um raio luminoso, proveniente de uma estrela distante, ao passar próximo ao campo gravitacional do Sol é dado por:

$$\Delta\varphi = \frac{2GM}{c^2 R_\odot}. \quad (3.85)$$

Comparando a Eq. (3.84) com a Eq. (3.85), temos que:

$$\frac{2e^{2\psi}}{\beta} = \frac{2GM}{c^2 R_\odot}, \quad (3.86)$$

e logo, obtemos:

$$\frac{e^{2\psi}}{\beta} = \frac{GM}{c^2 R_\odot}, \quad (3.87)$$

na qual $R_\odot$ representa o raio do Sol. Esse tipo de procedimento é muito comum no sentido de fazermos a correlação entre diferentes limites físicos. Nesse caso particular, fazendo a correlação obtemos exatamente o limite newtoniano.

3.3 Desvio da luz para $k_0 < 0$.

Desta forma, retomaremos as Eqs. (3.49) e (3.57), e definindo heurísticamente que $k_0 = -4$, no qual representa um espaço-tempo curvo, temos:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r^{-6}(\beta^2 e^{-4\psi} r^{10} - 1), \quad (3.88)$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \beta^2 e^{-4\psi} r^4 - \frac{1}{r^6}, \quad (3.89)$$

e

$$\left(\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt}\right)^2 = e^{-4\psi} \left(1 - e^{\frac{4\psi}{\beta^2}} r^{-2}\right), \quad (3.90)$$

$$\left(\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt}\right)^2 = e^{-4\psi} \left(1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^{10}}\right). \quad (3.91)$$

A Eq. (3.91) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} = e^{-2\psi} \sqrt{1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^{10}}}. \quad (3.92)$$

Iremos agora resolver a equação diferencial (3.89), para isso vamos novamente fazer a troca de variável $r = \frac{1}{u}$, onde obtemos:

$$\frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \beta^2 e^{-4\psi} \left(\frac{1}{u} \right)^4 - \left(\frac{1}{u} \right)^{-6}, \quad (3.93)$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \beta^2 e^{-4\psi} - u^{10}. \quad (3.94)$$

Calculando a derivada em respeito a φ e assumindo $\frac{du}{d\varphi} \neq 0$, temos:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = -5u^9. \quad (3.95)$$

A Eq. (3.95) será resolvida em duas partes. Primeiramente, desconsideraremos o termo $-5u^9$ e teremos uma solução que definiremos por $u^{(0)}$. Em seguida, buscaremos uma solução por meio da técnica de perturbação. Essa teoria obtém uma solução aproximada da equação diferencial, se admitirmos apenas os termos de maior ordem como solução.

Assim, encontramos que:

$$u^{(0)} = C_4 + C_3\varphi, \quad (3.96)$$

Portanto $u^{(1)}$, será solução de:

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} = -5(u^{(0)} + u^{(1)})^9, \quad (3.97)$$

no qual assumimos que $u^{(1)} \ll u^{(0)}$, fornece:

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} = -5(u^{(0)})^9, \quad (3.98)$$

ou então,

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\varphi^2} = -5(C_4 + C_3\varphi)^9. \quad (3.99)$$

Integrando a Eq. (3.99) duas vezes pela regra da substituição e assumindo que as constantes de integração são nulas, obtemos:

$$u^{(1)} = -\frac{1}{22C_3^2} (C_4 + C_3\varphi)^{11}. \quad (3.100)$$

Assim, $u^{(0)} + u^{(1)}$, é dado por:

$$u = C_4 + C_3\varphi - \frac{1}{22C_3^2}(C_4 + C_3\varphi)^{11}, \quad (3.101)$$

ou, em termos de r :

$$\frac{1}{r} = C_4 + C_3\varphi - \frac{1}{22C_3^2}(C_4 + C_3\varphi)^{11}. \quad (3.102)$$

Com $r \rightarrow \infty$ temos que $\varphi \rightarrow \varphi_\infty$, assim:

$$(C_4 + C_3\varphi_\infty) = \frac{1}{22C_3^2}(C_4 + C_3\varphi_\infty)^{11}, \quad (3.103)$$

$$22C_3^2 = (C_4 + C_3\varphi_\infty)^{10}. \quad (3.104)$$

Agora, calculando a derivada da Eq. (3.102) em relação a t , obtemos:

$$-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \left[C_3 - \frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi)^{10} \right] \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3.105)$$

ou

$$\frac{dr}{dt} = \left[\frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi)^{10} - C_3 \right] \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (3.106)$$

Por último, substituindo o resultado da Eq. (3.43) na Eq. (3.106), obtemos:

$$\frac{dr}{dt} = \left[\frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi)^{10} - C_3 \right] \left(\frac{e^{4\sigma}}{\beta} \right), \quad (3.107)$$

$$\frac{1}{e^{4\sigma}} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi)^{10} - C_3 \right]. \quad (3.108)$$

E utilizando a Eq. (3.92), temos:

$$e^{-2\psi} \sqrt{1 - \frac{e^{4\psi}}{\beta^2 r^{10}}} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi)^{10} - C_3 \right]. \quad (3.109)$$

Com $r \rightarrow \infty$ temos que $\varphi \rightarrow \varphi_\infty$, assim:

$$e^{-2\psi} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi_\infty)^{10} - C_3 \right], \quad (3.110)$$

$$e^{-2\psi} \beta = \frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi_\infty)^{10} - C_3. \quad (3.111)$$

Através das Eqs. (3.111) e (3.104), temos:

$$e^{-2\psi} \beta = 11C_3 - C_3, \quad (3.112)$$

$$C_3 = \frac{e^{-2\psi}\beta}{10} \quad (150)$$

Da Eq. (3.111):

$$(e^{-2\psi}\beta + C_3) = \frac{1}{2C_3}(C_4 + C_3\varphi_\infty)^{10}, \quad (3.113)$$

$$(e^{-2\psi}\beta + C_3)^{\frac{1}{10}} - \left(\frac{1}{2C_3}\right)^{\frac{1}{10}} C_4 = \left(\frac{1}{2C_3}\right)^{\frac{1}{10}} C_3\varphi_\infty, \quad (3.114)$$

$$\varphi_\infty = (e^{-2\psi}\beta + C_3)^{\frac{1}{10}}(2C_3)^{\frac{1}{10}}\frac{1}{C_3} - \frac{C_4}{C_3}, \quad (3.115)$$

$$\varphi_\infty = \frac{1}{C_3} \left[\left[2C_3(e^{-2\psi}\beta + C_3) \right]^{\frac{1}{10}} - C_4 \right], \quad (3.116)$$

ou, assumindo $\Delta\varphi = 2\varphi_\infty$ e expandindo o resultado de C_3 :

$$\Delta\varphi = \frac{20e^{2\psi}}{\beta} \left[\left[\frac{e^{-2\psi}\beta}{5} \left(\frac{11e^{-2\psi}\beta}{10} \right) \right]^{\frac{1}{10}} - C_4 \right], \quad (3.117)$$

$$\Delta\varphi = \frac{e^{2\psi}}{\beta} \left[20 \left(\frac{11}{50} \frac{1}{\left(\frac{e^{2\psi}}{\beta} \right)^2} \right)^{\frac{1}{10}} - 20C_4 \right]. \quad (3.118)$$

Agora, substituindo o resultado da Eq. (3.87) na Eq. (3.118), obtemos:

$$\Delta\varphi = \frac{GM}{c^2 R_\odot} \left[20 \left(\frac{11}{50} \frac{1}{\left(\frac{GM}{c^2 R_\odot} \right)^2} \right)^{\frac{1}{10}} - 20C_4 \right], \quad (3.119)$$

$$\Delta\varphi = 20 \left[\left(\frac{11}{50} \right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{GM}{c^2 R_\odot} \right)^{-\frac{1}{5}} - C_4 \right] \frac{GM}{c^2 R_\odot}. \quad (3.120)$$

e obtemos para o desvio da luz a seguinte equação:

$$\Delta\varphi = \omega_0 \frac{GM}{c^2 R_\odot}, \quad (3.121)$$

onde ω_0 é dado por:

$$\omega_0 = 20 \left[\left(\frac{11}{50} \right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{GM}{c^2 R_\odot} \right)^{-\frac{1}{5}} - C_4 \right]. \quad (3.122)$$

3.4 Ângulo de Deflexão e Formação de Imagens

Conforme mostrado no trabalho de Mattos e Becerril [31], temos que $\hat{\alpha}(r_0)$ é o ângulo total desviado e expandindo em potência de $\frac{m}{r_0}$ (limite do campo fraco), obtendo até a ordem $\frac{m^2}{r_0^2}$:

$$\hat{\alpha}(r_0) = 2|\varphi(r) - \varphi(\infty)|_{r=r_0} - \pi, \quad (3.123)$$

$$\hat{\alpha}(r_0) = \frac{4m}{r_0} + \frac{m^2}{r_0^2} \left(\frac{15\pi}{4} - 4 - \frac{\pi}{4a^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m^3}{r_0^3} \right). \quad (3.124)$$

Sabemos que:

$$R_{sm} \equiv Q_s/m = 1/a, \quad (3.125)$$

então:

$$\hat{\alpha}(r_0) = \frac{4m}{r_0} + \frac{m^2}{r_0^2} \left(\frac{15\pi}{4} - 4 - \frac{\pi}{4} R_{sm}^2 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m^3}{r_0^3} \right). \quad (3.126)$$

Usando a Eq. (3.123), teremos para o nosso trabalho:

$$\hat{\alpha}(r_0) = \Delta\varphi - \pi, \quad (3.127)$$

$$\hat{\alpha}(r_0) = 20 \left[\left(\frac{11}{50} \right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{GM}{c^2 r_0} \right)^{-\frac{1}{5}} - C_4 \right] \left(\frac{GM}{c^2 r_0} \right) - \pi. \quad (3.128)$$

Fazendo $\frac{MG}{c^2} = m$ e ignorando o termo $-\pi$:

$$\hat{\alpha}(r_0) = 20 \left[\left(\frac{11}{50} \right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{m}{r_0} \right)^{-\frac{1}{5}} - C_4 \right] \left(\frac{m}{r_0} \right). \quad (3.129)$$

Baseado no trabalho de Mattos e Becerril [31] e Makler [29], temos que β é a posição angular real da fonte e θ é a posição observada no céu, após sofrer uma deflexão $\hat{\alpha}$.

Da trigonometria sabemos que $\sin \theta = \frac{c \cdot o}{h}$, porém, como na geometria relevante para lentes os ângulos envolvidos são bem pequenos, da ordem de segundos de arco, assim, utilizar a seguinte aproximação é bem aceitável: $\sin x = x$.

Então teremos que:

$$\beta = \frac{r}{D_{os}} \Rightarrow r = \beta D_{os}, \quad (3.130)$$

$$\theta = \frac{r_0}{D_{ol}} \Rightarrow r_0 = \theta D_{ol}. \quad (3.131)$$

O r' é a distância física no plano da fonte a partir do ângulo θ :

$$\theta = \frac{r'}{D_{os}} \Rightarrow r' = \theta D_{os}. \quad (3.132)$$

$$r' - r = \theta D_{os} - \beta D_{os} \Rightarrow r' - r = (\theta - \beta) D_{os}. \quad (3.133)$$

A diferença entre r' e r é a distância associada a deflexão $\hat{\alpha}$, ou seja:

$$\alpha = \frac{D_{ls}}{D_{os}} \hat{\alpha}. \quad (3.134)$$

Aplicando a Eq. (3.134) na Eq. (3.123), temos:

$$\alpha(\theta) = \theta - \beta = \frac{D_{ls}}{D_{os}} \left[\frac{4m}{r_0} + \frac{m^2}{r_0^2} \left(\frac{15\pi}{4} - 4 - \frac{\pi R_{sm}^2}{4} \right) \right] + \dots \quad (3.135)$$

Sabemos que $r_0 = D_{ol}\theta$, então:

$$\alpha(\theta) = \theta - \beta = \frac{D_{ls}}{D_{os}} \left[\frac{4m}{D_{ol}\theta} + \frac{m^2}{D_{ol}^2\theta^2} \left(\frac{15\pi}{4} - 4 - \frac{\pi}{4} R_{sm} \right) \right] + \dots \quad (3.136)$$

Reproduzindo para o nosso problema, teremos:

$$\alpha(\theta) = \theta - \beta = \frac{D_{ls}}{D_{os}} 20 \left[\left(\frac{11}{50} \right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{m}{r_0} \right)^{-\frac{1}{5}} - C_4 \right] \frac{m}{r_0}. \quad (3.137)$$

Lembrando que $r_0 = D_{ol}\theta$, então obtemos:

$$\alpha(\theta) = \theta - \beta = \frac{D_{ls}}{D_{os}} 20 \left[\left(\frac{11}{50} \right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{m}{D_{ol}\theta} \right)^{-\frac{1}{5}} - C_4 \right] \frac{m}{D_{ol}\theta}. \quad (3.138)$$

Plotando a Eq. (3.138), obtemos o seguinte gráfico:

O gráfico encontrado na Fig. (3.1) mostra a posição da imagem formada devido a uma lente gravitacional no espaço-tempo. Aqui é mostrado o comportamento de α em função de θ para uma solução axialmente simétrica, ou seja, uma curva completa.

3.5 Análise dos Resultados Obtidos

Quando pensamos em estatística sempre nos vem a ideia de números, comparações de dados e medidas, previsões e etc, desta forma, podemos defini-la como uma coleção de artifícios matemáticos que torna possível organizar, manipular e analisar os dados que dispomos [33].

A estatística está muito presente na pesquisa científica, ela é utilizada desde a definição do tipo de experimento, na obtenção de dados, em testes de hipóteses e vai até a interpretação dos

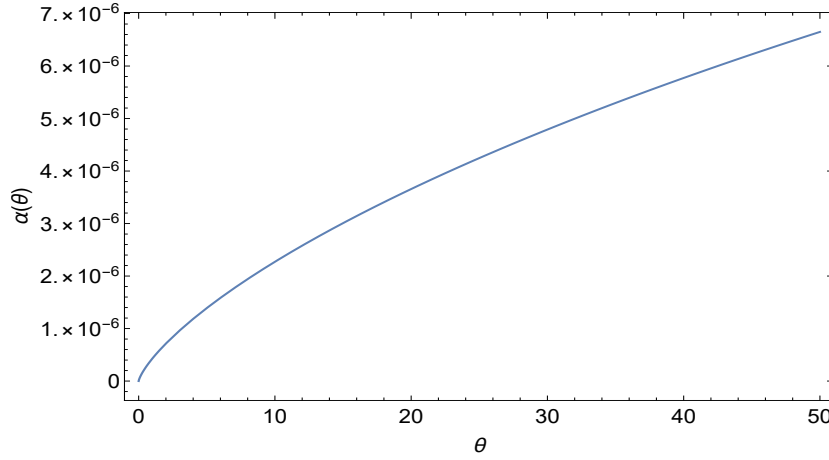


Figura 3.1: Ângulo de deflexão reduzido (em radianos) α em função da posição da imagem θ , onde $D_{ls}/D_{os} = 1/2$, $D_{ol} = 10^9$, $m = 1$ e $C_4 = 23/2$

dados obtidos, concedendo ao pesquisador testar várias hipóteses a partir dos dados obtidos [34], além de que, utilizar as técnicas estatísticas são importantes, pois nos fornece uma descrição mais precisa do fenômeno observado/estudado, dando mais credibilidade e confiança ao estudo.

Desta forma, utilizar o procedimento estatístico neste trabalho é de grande importância, pois, irá nos fornecer uma descrição mais precisa do objeto de estudo, além de impelir mais confiança e credibilidade ao resultado encontrado.

Usaremos como método estatístico o fitting, ou ajuste de curva. Geralmente, os experimentos geram vários dados que precisam ser analisados a fim de obter um modelo, para isso se faz necessário encontrar uma função matemática que ajusta os dados para que seja possível realizar simulações e/ou obter resultados confiáveis. Podemos dizer que o ajuste de curvas serve para obter uma função com boa aproximação e confiança nos dados [35]. Em nosso trabalho o fitting será utilizado para encontrar valores “confiáveis” para os parâmetros “ a ” e “ b ” da nossa equação para o desvio da luz de Weyl. Além disso, o ajuste de curvas será feito pelo Método dos Mínimos Quadrados.

O Método dos Mínimos Quadrados é muito utilizado na área da Física para ajustar parâmetros de dados experimentais [36]. Ele tem o objetivo de aproximar os conjuntos de dados experimentais por meio de um modelo matemático a fim de minimizar erros associados a esses dados, dando mais fidedignidade para a análise de tendências do experimento [37]. Ou seja, os dados experimentais estão sempre sujeitos a erros, assim, o Método dos Mínimos Quadrados avalia que

o melhor valor é aquele que faz a soma dos quadrados de erros mínima.

Outros conceitos que darão base a estatística deste trabalho é a média, a variância e o desvio padrão. A média aritmética, valor médio ou simplesmente média é uma das principais medidas de tendência central, que nos fornecem valores para exprimir a distribuição de dados como um todo. A média pode ser definida como o quociente obtido pela soma de todos os valores de um conjunto e o número total desses valores [38]. Matematicamente:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i. \quad (3.139)$$

A média, mesmo sendo um caráter importante nas medidas, não nos fornece todas as informações pertinentes sobre o conjunto de dados que está sendo estudado. Por isso, são utilizadas as medidas de dispersão, como a variância e o desvio padrão, que nos fornecem uma confiabilidade da média do conjunto de dados.

A variância trata-se de uma medida de dispersão muito utilizada que nos fornece a medida que um conjunto de dados se distancia do valor médio [39]. Matematicamente:

$$Var(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 - (\bar{X})^2. \quad (3.140)$$

Um ponto negativo da variância é de não possuir a mesma unidade das medidas, dificultando a comparação de seu valor com o conjunto de dados originais [39]. Para resolver este problema, é utilizado o desvio padrão.

O desvio padrão pode ser definido de forma simples como a raiz quadrada da variância, o que nos permite fazer uma comparação direta com os dados originais, já que este é expresso na mesma unidade [39]. Quanto maior o valor do desvio padrão, maior é a dispersão dos dados em relação ao valor médio [33]. Matematicamente, temos:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2 - (\bar{X})^2}. \quad (3.141)$$

Além dos procedimentos estatísticos citados acima estará presente na análise estatística deste trabalho o erro padrão, o teste de hipótese, a estatística t e o valor-p.

O erro padrão trata-se da precisão ou incerteza associada a medida de variação de uma média amostral como estimativa da média da população, ou seja, é uma medida de variabilidade relacionada a média da amostra [40].

O teste de hipótese é muito utilizado na pesquisa científica, ele tem como objetivo averiguar uma hipótese a respeito dos dados amostrais, sendo possível aceita-lá ou rejeita-lá, através da

teoria de probabilidades [39]. Dentro da hipótese estatística, há 2 tipos: a hipótese nula e a hipótese alternativa. A hipótese nula, dada por H_0 , trata-se da hipótese que será testada, ela representa uma igualdade. Já a hipótese alternativa, dada por H_1 , representa uma desigualdade [41].

A estatística t é um dos procedimentos que pode ser utilizado para testar a hipótese nula H_0 , a estatística t que possui distribuição t de Student é utilizada quando a hipótese nula é verdadeira [39].

O valor-p, probabilidade de significância ou nível descritivo nos fornece a apresentação dos resultados das análises estatísticas realizadas no conjunto de dados, estabelecendo um argumento íntegro para realizar as conclusões de um determinado estudo. Pois, o valor-p nos mostra a probabilidade de se obter um conjunto de dados conforme foi encontrado, levando em conta se as diferenças observadas são frutos do acaso ou fazem parte integral dos dados. Em resumo, o valor-p é definido segundo Victor e Paes [42] como: “menor nível de significância para o qual uma hipótese nula pode ser rejeitada”.

3.5.1 Análise estatística

Temos que para Einstein o desvio da luz é dado por:

$$\Delta\varphi_{Einstein}(r) = \frac{4}{r} \quad (3.142)$$

E para Weyl o desvio da luz é dado por:

$$\Delta\varphi_{Weyl}(r) = \frac{20 \left(\left(\frac{11}{50} \right)^{0.1} r^{1/5} - a \right)}{r} b. \quad (3.143)$$

Começamos encontrando 100 valores para o desvio da luz de Einstein. Em seguida, tomamos esses dados a fim de encontrar um modelo não-linear para o desvio da luz de Weyl e encontrar o parâmetros “a” e “b” da equação. Obtemos o seguinte modelo:

$$\frac{0.0523992 (75.3575 + 0.859493x^{1/5})}{x}. \quad (3.144)$$

E os respectivos parâmetros “a” e “b”: $a \rightarrow -75.3575$ $b \rightarrow 0.00261996$

Para o valor encontrado do parâmetro “a” temos um erro padrão associado de 7,71477, estatística t de -9,76796 e o valor-p: $3,85996 \cdot 10^{-16}$. Já para o parâmetro “b” encontramos o erro padrão no valor de 0,0002648, a estatística t 9,89412 e o valor-p de $2,05446 \cdot 10^{-16}$. Diante

disso podemos concluir que os valores encontrados para os parâmetros “ a ” e “ b ” são confiáveis para o nosso trabalho.

Para sabermos o comportamento de ambas as equações plotamos um gráfico na escala log-linear de ângulo versus distância, com as duas equações em conjunto, como podemos observar na Fig.(3.2) abaixo. Utilizamos essa escala em virtude do tamanho das quantidades envolvidas, pois, assim se torna melhor a visualização do comportamento dessas quantidades.

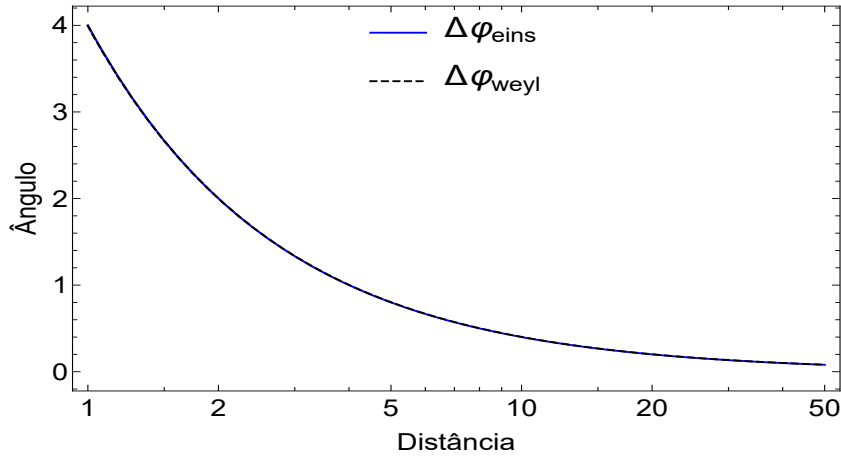


Figura 3.2: Gráfico do desvio da luz, onde a curva contínua trata-se do desvio da luz pela equação de Einstein e a curva tracejada representa o desvio da luz pela equação de Weyl.

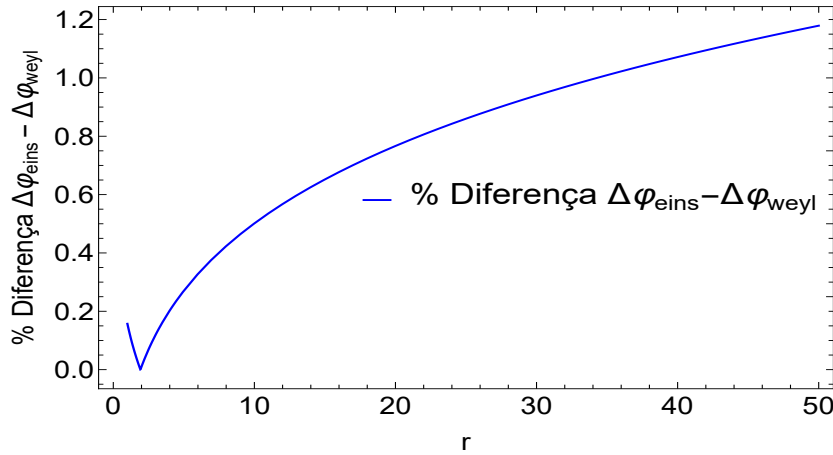


Figura 3.3: Gráfico comparativo das equações do desvio da luz de Einstein e Weyl.

Através da Fig.(3.2), não é possível distinguir os dois modelos. Mas não é isso que queremos, a nossa equação para o desvio da luz de Weyl precisa apresentar uma diferença da equação base do desvio da luz de Einstein. Então, plotamos um segundo gráfico da diferença entre as duas equações, com 50 valores para r , conforme podemos observar na Fig.(3.3) abaixo:

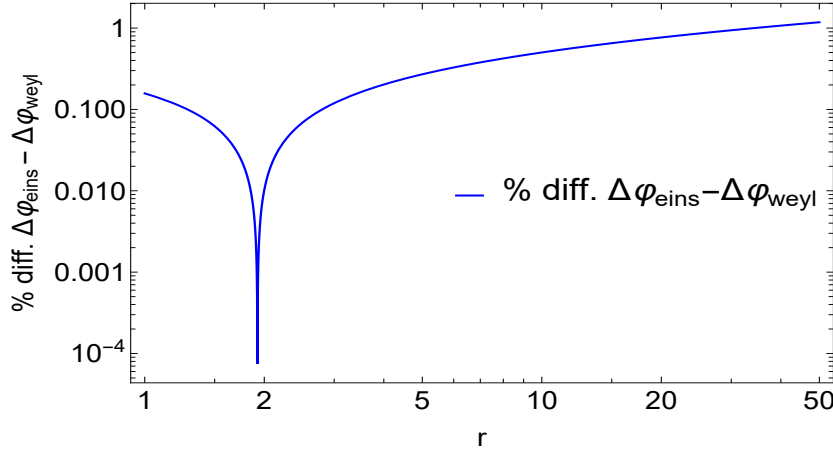


Figura 3.4: Gráfico logarítmico do comparativo das equações do desvio da luz de Einstein e Weyl.

Com o gráfico da Fig.(3.3) podemos notar que a diferença percentual possui uma oscilação próximo de zero e se torna maior com o aumento da escala, para valores grandes de r , por exemplo $r = 50$, temos que a diferença percentual chega a mais de 1% entre um modelo e outro. Para melhor avaliarmos essa diferença percentual, plotamos ainda um terceiro gráfico, mas agora na escala log-log, como podemos observar na Fig.(3.4).

No gráfico plotado na Fig.(3.4), vemos que de fato a diferença percentual entre os dois modelos em comparação não é muito grande, chegando até aproximadamente a 1,2%, tendo uma oscilação para raios bem curtos; essa oscilação se deve ao efeito de não-linearidade entre o modelo de Weyl e o modelo de Einstein. Como estamos trabalhando com grandezas de primeira ordem a diferença percentual deve ser pequena mesmo. Se caso aumentássemos o número de ordens, consequentemente a diferença entre os modelos seria maior, ou seja, quantos mais órbitas adicionarmos no modelo de Weyl, mais ele se afastará do modelo de Einstein.

Considerações Finais

Neste trabalho, discutimos o Limite Quase-Newtoniano e suas implicações, aliado com a métrica de Weyl. No Cap. 1 estudamos os aspectos históricos da Relatividade, desde a construção da teoria newtoniana, a construção da Relatividade Especial de Einstein, até finalmente chegar no resgate histórico da Relatividade Geral e seu desenvolvimento matemático. Além disso, também reproduzimos o Limite Quase-Newtoniano; partindo da condição de campo fraco, estático e de baixas velocidades, resultando num potencial intermediário.

No Cap. 2, temos o principal fenômeno abordado no presente trabalho. Utilizamos a métrica estacionária de Weyl, com simetria cilíndrica e o Limite Quase-Newtoniano para encontrarmos os potenciais efetivos de Weyl até soluções de segunda ordem. Plotamos gráficos de contorno para esses potenciais, sendo que para os potenciais efetivos de ordem zero e primeira ordem resultaram em gráficos idênticos, com órbitas abertas, ou seja, incompatível com o sistema físico; mas para o potencial efetivo de segunda ordem conseguimos encontrar um resultado satisfatório, tanto para $k_0 = 0$ e $k_0 = 4$, com órbitas fechadas e mais achatadas devido ao potencial quase-newtoniano. Sendo assim, vimos que o termo k_0 foi o responsável pelas características dos potenciais encontrados.

Outro tema abordado neste trabalho foi sobre lentes gravitacionais e o desvio da luz, também levando em consideração a métrica de Weyl, que consta no Cap. 3. Tivemos que tomar um certo cuidado para analisarmos a diferença dos modelos de Einstein e de Weyl em relação ao desvio entre o ângulo versus a distância. Por isso, plotamos outros dois gráficos, um levando em consideração a diferença percentual e o outro na escala log-log, assim ficou mais visível a diferença entre o modelo de referência (Einstein) e o modelo construído (Weyl).

Encontramos que a diferença entre os modelos é de cerca de 1,2%, um valor pequeno, mas existente, dentro do esperado do ponto de vista astronômico e, como temos que o modelo de

Einstein já é consolidado é ideal que a diferença percentual fique em torno desse valor. Para distâncias muito pequenas, a diferença é quase imperceptível, mas se torna maior quanto maior a distância em relação ao raio. Isto é interessante para a aplicação na astrofísica, visto que os sistemas astrofísicos são circulares, discoidais, irregulares, etc., então, com o modelo de Weyl podemos ter dentro de uma mesma teoria a adaptação para várias situações incomuns, enquanto que o modelo de Einstein nos limita a um sistema puramente circular, ou seja, simetria esférica. Como consequência temos que o modelo de Weyl desenvolvido é mais simples comparado ao modelo de Einstein e, ainda sobre certas circunstâncias são numericamente equivalentes.

A perspectiva futura é desenvolver um artigo sobre este tema e também nos aprofundarmos em problemas sobre lentes gravitacionais e quasares, fazendo um estudo mais completo e de ordens superiores para os potenciais efetivos de Weyl.

Referências Bibliográficas

- [1] E. F. Taylor e J. A. Wheeler, *Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity*, W.H. Freeman, New York (1992).
- [2] J. J. Callahan, *The Geometry of Spacetime: An Introduction to Special and General Relativity*, Springer, New York (1999).
- [3] J. L. Cindra, Revista Brasileira de Ensino de Física **vol.16**, 26-32 (1994).
- [4] R. Gazzinelli, *Teoria da Relatividade Especial*, Editora Blucher, São Paulo (2009).
- [5] R. Resnick, *Introdução à Relatividade Especial*, Editora Polígono, São Paulo (1971).
- [6] P. Crawford, *Einstein Entre Nós: A Recepção de Einstein em Portugal de 1905 a 1955*, Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra (2005).
- [7] O. F. Piattella, Cadernos de Astronomia **vol. 1**, 30-39 (2020).
- [8] A. Pais, *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, New York (2005).
- [9] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 1: Mecânica*, Editora Edgard Blücher, São Paulo (2002).
- [10] A. B. Henriques, *Teoria da Relatividade Geral Uma Introdução*, IST Press, Lisboa (2009).
- [11] I. I. Shapiro, Physical Review Letters **vol 13**, 789-791 (1964).
- [12] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, New York (1992).
- [13] D. Soares, Revista Brasileira de Ensino de Física **vol. 35**, 3302 (2013).

- [14] L. Ryder, *Introduction to General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (2009).
- [15] V. Sabbata e M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, World Scientific, Singapura (1985).
- [16] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [17] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Editora Wiley, New York (1972).
- [18] M. D. Maia, *Geometry of the Fundamental Interactions: On Riemann's Legacy to High Energy Physics and Cosmology*, Springer, Brasília (2011).
- [19] W. Rindler, *Relativity Special, General, and Cosmological*, Oxford University Press, New York (2006).
- [20] BERNARDES, Esmerindo. Examinando o Espaço-tempo de Einstein: Um Guia do Educador. Instituto de Física de São Carlos - IFSC USP. 2010. Disponível em: <http://www.ifsc.usp.br/~FCM0101/guia.pdf>. Acesso em: 28 maio de 2021.
- [21] C. W. Misner, K.S. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco (1973).
- [22] G.R.G Barrocas, *Curvas de rotação de galáxias LSB em aproximação quase-newtoniana da Teoria da Relatividade Geral*, **Universidade Federal da Integração Latino-Americana** (2018).
- [23] SIEGEL, Ethan. É por isso que o tempo precisa ser uma dimensão. Disponível em: <https://sprace.org.br/index.php/e-por-isso-que-o-tempo-precisa-ser-uma-dimensao/>. Acesso em: 04 junho de 2021.
- [24] A. J. C. Souza, *A matéria escura como efeito não-linear da gravitação*, **Universidade de Brasília** (2006).
- [25] R. S. Valada, *Soluções Exatas da Métrica de Weyl para Aproximação de Segunda Ordem de um Disco Fino e Testes Clássicos da RG*, **Universidade Federal do Rio Grande do Sul** (2013).

- [26] L. Infeld e J. Plebanski, Motion Relativity **Physical Monographs**, Pergamon Press (1960).
- [27] P. T. Z. Seidel, *Aplicações da aproximação quase-newtoniana da Relatividade Geral a problemas em astrofísica.*, **Universidade Federal da Integração Latino-Americana** (2018).
- [28] J. Binney e S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, New Jersey (2008).
- [29] M. Makler, *Ciência Hoje* **vol. 44**, 28-33 (2009).
- [30] J. A. S. Lima e R. C. Santos, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **vol. 41**, 1-17 (2019).
- [31] T. Matos e R. Becerril, *Classical and Quantum Gravity* **vol. 18**, 2015-2024 (2001).
- [32] M. Cattani, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **vol. 20**, 27-37 (1998).
- [33] S. R. Muniz, *Introdução à Análise Estatística de Medidas*; Licenciatura em Ciências - USP/Univesp. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/169799/mod_resource/content/0/Introducao_Estatistica_plc0016_14.pdf. Acesso em: 08 abril 2021.
- [34] S. A. Ignácio, *Importância da Estatística para o Processo de Conhecimento e Tomada de Decisão*, IPARDES, Curitiba (2010).
- [35] R. N. Almeida, *O Método dos Mínimos Quadrados: Estudo e Aplicações para o Ensino Médio*, **Universidade Estadual do Norte Fluminense** (2015).
- [36] O. Helene, *Método dos Mínimos Quadrados: Com Formalismo Matricial*, Livraria da Física, São Paulo (2006).
- [37] J. C. V. Cunha, *O Método dos Mínimos Quadrados: uma proposta ao Ensino Médio para o ajuste por retas*, **Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro** (2014).
- [38] P. R. M. Azevedo, *Introdução à Estatística*, EDUFRN, Natal (2016).
- [39] C. F. B. Piana, A. A. Machado e L. P. R. Selau, *Estatística Básica: Versão Preliminar*, Pelotas (2009).

-
- [40] A. T. Paes , Educ Contin Saúde **vol. 6**, 107-8 (2008).
- [41] J. S. Fonseca e G. A. Martins, *Curso de Estatística*, Atlas, São Paulo (2011).
- [42] E. S. Victor e A. T. Paes , Educ Contin Saúde **vol. 8**, 109-10 (2010).