



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE  
TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA E  
TERRITÓRIO (ILATIT)**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO Em  
ENGENHARIA CIVIL (PPG ECI)**

**USO DA ANÁLISE MODAL E DE FLAMBAGEM COMO MÉTODO DE ANÁLISE NÃO  
LINEAR GEOMÉTRICA EM ESTRUTURAS.**

**WAGNER DE ALMEIDA FERREIRA**

Foz do Iguaçu - PR  
2020



**INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE  
TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA E  
TERRITÓRIO (ILATIT)**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO Em  
ENGENHARIA CIVIL (PPG ECI)**

**USO DA ANÁLISE MODAL E DE FLAMBAGEM COMO MÉTODO DE ANÁLISE NÃO  
LINEAR GEOMÉTRICA EM ESTRUTURAS.**

**WAGNER DE ALMEIDA FERREIRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Ivan Dario Gomez Araujo

Coorientador: Prof. Dr. Jesús A. G. Sánchez

Foz do Iguaçu - PR  
2020

WAGNER DE ALMEIDA FERREIRA

**USO DA ANÁLISE MODAL E DE FLAMBAGEM COMO MÉTODO DE ANÁLISE NÃO  
LINEAR GEOMÉTRICA EM ESTRUTURAS.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Ivan Dario Gomez Araujo  
Universidade Federal da Integração Latino-Americana – UNILA

---

Prof. Dr. Aref Kalilo Lima Kzam  
Universidade Federal da Integração Latino-Americana – UNILA

---

Prof. Dr. Paulo Cesar Gonçalves  
Universidade Federal de Itajubá – UNIFEI

Foz do Iguaçu - PR, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_.

Catálogo elaborado pela Biblioteca Latino-Americana  
Catálogo de Publicação na Fonte. UNILA - BIBLIOTECA LATINO-AMERICANA

F383u

Ferreira, Wagner de Almeida.

Uso da análise modal e de flambagem como método de análise não linear geométrica em estruturas / Wagner de Almeida Ferreira. - Foz do Iguaçu, 2020.

89 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Integração Latino-Americana. Instituto Interdisciplinar de Tecnologia e Infraestrutura. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Ivan Dario Gomez Araujo.

1. Vigas de concreto - testes. 2. Estabilidade estrutural - concreto. 3. Estruturas de concreto - análise P-delta modal. I. Araujo, Ivan Dario Gomez, Orient. III. Título.

CDU: 620.11

Dedico este trabalho a minha mãe, Regina Maria de Almeida Lopes, por sempre acreditar em mim.

Aos meus irmãos, Alex de Almeida Ferreira, Renato de Almeida Ferreira e em especial a memória do meu amado, querido e dócil irmão **Rodrigo de Almeida Ferreira**.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, primeiramente a Deus pela vida a mim concedida, pelas inúmeras bençãos, proteções, sabedoria e determinação.

Aos meus familiares, principalmente minha mãe Sra. Regina e meu padrasto Sr. Aguinaldo por todo apoio, incentivo e confiança fora e dentro da faculdade.

Aos meus irmãos Alex, Agliane, Deisy, Kassio, Renato e Rodrigo. Aos meus avós Nerio de Almeida Genelhú e Jarcira Soares de Assis.

Agradeço também a minha amada namorada Franciele que vivenciou comigo diariamente essa jornada, obrigado pelo carinho, apoio, incentivo e paciência.

Quero ainda agradecer àqueles que acredito serem responsáveis por semear a centelha da boa formação acadêmica, todos os professores que participaram da minha trajetória, em especial ao orientador Doutor Ivan Dario Gomez Araujo, não só pela determinação em transmitir e ampliar conhecimento acima de tudo, mas sobretudo pela sua amizade demonstrada ao longo deste trabalho. Ao coorientador professor Doutor Jesús A. G. Sánchez por suas contribuições em minha jornada acadêmica. Aos professores da banca pelas orientações.

Aos meus amigos, incluindo aquelas famílias que conquistei ao longo da vida, que estiveram ao meu lado durante toda a formação acadêmica, obrigado pelo carinho, confiança e apoio nas infindáveis noites.

Em especial aos meus amigos Fernando e família Davies, Carlos Brant, Heliton, Henrique e Marcelo pelo incentivo e companheirismo ao longo desses anos de mestrado.

E enfim, a Universidade Federal da Integração Latino-Americana pela oportunidade acadêmica, bem como o apoio financeiro relacionado a bolsa de estudo do Programa de Demanda Social de Pós-Graduação da UNILA, Mestrado em Engenharia Civil (PPGECI), edital 08/2018 – PRPPG.

*Saibam, portanto, que o SENHOR, o seu Deus, é Deus; ele é o Deus fiel, que mantém a aliança e a bondade por mil gerações daqueles que o amam e obedecem aos seus mandamentos. **Deuteronômio 7:9 Nova Versão Internacional – NVI***

FERREIRA, W. de A. **Uso da análise modal e de flambagem como método de análise não linear geométrica em estruturas**. 2020. 89 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2020.

## RESUMO

Trabalhos recentes mostram que existe uma relação entre; período natural de vibração e os efeitos globais de segunda ordem nos pórticos de concreto armado. Essa relação ocorre porque ambos dependem essencialmente das matrizes de rigidez e de massa da estrutura. Dessa forma, é proposto neste trabalho um método que aproveita a relação que existe entre os parâmetros dinâmicos e os efeitos não-lineares. A metodologia estabelece uma relação entre os modos de instabilidade na flambagem com os modos de vibração da estrutura. Especificamente, é realizada uma interpolação dos modos de vibração entre o estado sem carga axial e o estado com carga axial crítica aproveitando a propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração para definir uma metodologia, denominada aqui como análise **P-delta modal**. Esse método permite obter o comportamento da curva força-deslocamento até a ocorrência da flambagem, o que representa um avanço com relação às técnicas apresentadas nos trabalhos anteriores, onde simplesmente são definidos fatores de amplificação como um indicativo para determinar a significância dos efeitos de segunda ordem. A metodologia proposta aproxima-se integralmente a resultados obtidos com métodos tradicionais como P-delta. Exemplos foram realizados em um pilar e em um pórtico plano sem descontinuidades geométricas e de massas, com várias configurações de carga. Encontrou-se que o método proposto consegue reduzir o tempo computacional a aproximadamente 50%, quando comparado com o método P-delta tradicional.

**Palavras-chave:** Não linearidade geométrica. Análise modal. Estabilidade estrutural. Estruturas de concreto. P-delta.

FERREIRA, W. de A. **Use of modal and buckling analysis as a method of nonlinear geometric analysis in structures**. 2020. 89 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2020.

### ABSTRACT

Recent works shows that there is a relationship between; natural vibration period and the global second-order effects in reinforced concrete frames. This relationship occurs because both depend essentially in the structure's stiffness and mass matrices. Thus, a method is proposed in this work that takes advantage of the relationship that exists between dynamic parameters and non-linear effects. The methodology establishes a relationship between the buckling instability modes and the structure's vibration modes. Specifically, an interpolation of the vibration modes is carried out between the state without axial load and the state with critical axial load, taking advantage of the orthogonality property of the vibration modes to define a methodology, called here as **modal P-delta** analysis. This method allows obtaining the complete behavior of the force-displacement curve until occurrence of the buckling, which represents an advance in relation to the techniques presented in previous works, where amplification factors are simply defined as an indicator to determine the significance of the second order effects. The proposed methodology fully approximates the results obtained with traditional methods such as P-delta. Examples were carried out in a free-fixed and in a flat porch without geometric and mass discontinuities, frame with various load configurations. It was found that the proposed method could reduce computational time to almost 50%, when compared to the traditional P-delta method.

**Key words:** Geometric non-linearity. Modal analysis. Structural stability. Concrete structures. P-delta.

FERREIRA, W. de A. **Uso del análisis modal y de pandeo como método de análisis geométrico no lineal en estructuras**. 2020. 89 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2020.

## RESUMEN

El trabajo reciente muestra que existe una relación entre; el período natural de vibración y los efectos globales de segundo orden en los marcos de hormigón armado. Esta relación se produce porque ambos dependen esencialmente de la rigidez de la estructura y las matrices de masa. Por lo tanto, en este trabajo se propone un método que aprovecha la relación que existe entre los parámetros dinámicos y los efectos no lineales. La metodología establece una relación entre los modos de inestabilidad de pandeo y los modos de vibración de la estructura. Específicamente, se lleva a cabo una interpolación de los modos de vibración entre el estado sin carga axial y el estado con carga axial crítica, aprovechando la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración para definir una metodología, llamada aquí como análisis **modal P-delta**. Este método permite obtener el comportamiento de la curva de fuerza-desplazamiento hasta el pandeo, lo que representa un avance en relación con las técnicas presentadas en los trabajos anteriores, donde los factores de amplificación se definen simplemente como un indicador para determinar la importancia de los efectos de segundo orden. La metodología propuesta se aproxima completamente a los resultados obtenidos con métodos tradicionales como P-delta. Los ejemplos se llevaron a cabo en un pilar y en pórtico si discontinuidades geométricas y de la masa, con varias configuraciones de carga. Se encontró que el método propuesto puede reducir el tiempo computacional a casi al 50%, cuando comparado con el tiempo gasto en el método P-delta tradicional.

**Palabras clave:** No linealidad geométrica. Análisis modal. Estabilidad estructural. Estructuras de hormigón. P-delta.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Propriedades do pilar .....	58
Tabela 2 Comparação entre a solução analítica e a solução aproximada para a 1°, 2° e “n” frequências naturais com discretização (sem carga).....	61
Tabela 3 Comparação entre a solução analítica e a solução aproximada para a 1°, 2° e “n” frequências naturais com discretização (com carga) .....	62
Tabela 4 Propriedades do pórtico .....	74

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: (a) Análise linear geométrica; (b) Análise não linear geométrica .....	18
Figura 2: Processo P-delta iterativo - pilar .....	19
Figura 3: Processo P-delta iterativo – Vários andares de um elemento (edifício) genérico .....	20
Figura 4: (a) Pórtico com diagonais fictícias ; (b) Pórtico com colunas fictícias. ....	21
Figura 5: Representação de momento de primeira ordem no engaste e no meio do pilar engastado-livre. ....	25
Figura 6: (a) Representação das coordenadas para vibração em viga uniforme; (b) Convenção de sinais para forças e momento sob a carga axial constante, agindo num elemento arbitrário. ....	26
Figura 7: Barra engastada-livre com associação do deslocamento $ux, t$ . ....	32
Figura 8: Organização de um Programa de Elemento Finito. ....	41
Figura 9: Elemento do tipo viga-barra genérico “g” de uma estrutura reticulada plana em sua configuração original e deformada com representação dos sistemas de eixos local e global. ....	45
Figura 10: Barra engastada-livre com associação do deslocamento $ux, t$ . ....	58
Figura 11: $\lambda_1$ sem carga.....	59
Figura 12: $\lambda_1$ com carga .....	60
Figura 13: Erro da Solução analítica e Solução numérica aproximada. Frequência natural sem carga.....	62
Figura 14: Erro da Solução analítica e Solução numérica aproximada. Frequência natural com carga de 182N .....	63
Figura 15: Relação entre a carga axial de compressão e a primeira frequência natural para um pilar engastado-livre, analítico e numérico .....	63
Figura 16: Relação entre a carga axial de compressão e a segunda frequência natural para um pilar, analítico e numérico .....	66
Figura 17: Comparação entre o 1° modo de vibração analítico e numérico. (Com carga de 182 N).....	67
Figura 18: Modos de vibrações. (Com carga de 182 N).....	67
Figura 19: 1° Modo de vibração. (Variando a carga).....	68
Figura 20: Relação entre tradicional P-delta e P-delta modal variando a quantidade de modos utilizados – elemento engastado-livre.....	72
Figura 21: Relação entre tradicional P-delta iterativo e P-Delta modal com variação da quantidade de modos utilizados – elemento engastado-livre .....	72
Figura 22: Modelo 01 - Pórtico. ....	74
Figura 23: Relação entre análise tradicional P-delta iterativo e P-Delta modal – Pórtico 01 .....	75
Figura 24: Erro em relação a quantidade de modos utilizados na análise P-delta modal – modelo 01 de pórtico .....	76

Figura 25: Modelo 02 – Pórtico .....	77
Figura 26: Relação entre análise tradicional P-delta iterativo e P-delta modal – modelo 02 de pórtico .....	78
Figura 27: Erro em relação a quantidade de modos utilizados na análise P-delta modal – Pórtico 02 .....	79

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>IV</b>
<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>V</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>9</b>
1.1 APRESENTAÇÃO DO TEMA .....	9
1.2 JUSTIFICATIVA .....	11
1.3 OBJETIVO GERAL .....	12
1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	12
1.5 APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	13
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>15</b>
2.1 NÃO LINEARIDADE FÍSICA E NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA .....	15
2.2 AVALIAÇÃO DOS EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM .....	18
2.2.1 Métodos iterativos .....	18
2.2.2 Métodos diretos .....	21
2.2.3 Método simplificado da ABNT NBR 6118:2014 .....	22
2.3 ANÁLISE DINÂMICA EM UMA VIGA INCLUÍDO O EFEITO DA CARGA AXIAL NO ELEMENTO .....	26
2.4 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO EM VIBRAÇÃO LIVRE .....	28
2.4.1 Frequência Natural de Vibração .....	34
2.4.2 Modos de Vibração .....	35
2.4.3 Ortogonalidade dos Modos de Vibração - Normalizados à Massa .....	35
2.5 ANÁLISE DE FLAMBAGEM EM UM PILAR CURTO .....	40
2.6 SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO EM VIBRAÇÃO LIVRE .....	41
2.6.1 Método dos Resíduos Ponderados – Solução Aproximada .....	42
2.6.2 Método de Galerkin .....	42

2.6.3	Elemento de Viga-barra.....	45
2.7	ANÁLISE MODAL E ANÁLISE DE FLAMBAGEM .....	50
2.7.1	Ortogonalidade dos Modos de Vibração - Normalizados à Massa .....	52
2.7.2	Deslocamento em Função de Frequência Natural e Modo de Vibração 54	
2.8	ANÁLISE P-DELTA ITERATIVO .....	56
<b>3</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>58</b>
3.1	PILAR.....	58
3.1.1	Gráfico do $\lambda_1$ .....	59
3.1.2	Comparação entre a solução analítica e solução numérica .....	60
3.1.3	Gráfico de carga versus frequências .....	63
3.1.4	Modo de vibração .....	66
3.2	ANÁLISE P-DELTA UTILIZANDO ANÁLISE MODAL E DE FLAMBAGEM	69
3.2.1	Análise tradicional P-delta iterativo e Análise P-delta modal - Pilar....	71
3.3	PÓRTICO.....	74
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>80</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>83</b>
	<b>ANEXO A – EXEMPLO DIDÁTICO P-DELTA ITERATIVO.....</b>	<b>87</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 APRESENTAÇÃO DO TEMA

A verticalização das cidades em razão da intensificação da densidade demográfica e a expansão da malha urbana, provoca a busca por estruturas mais altas e esbeltas, logo mais suscetíveis aos efeitos de segunda ordem. Além disso, o desenvolvimento de softwares avançados de cálculo estrutural e a execução de concretos com resistência à compressão acima de 50MPa, tem gerado as condições com as quais os engenheiros lidam com estruturas mais altas (MONCAYO, 2011).

Essas estruturas mais altas são sujeitas a maiores valores de cargas horizontais, por ação do vento e terremotos, e a combinação dessas cargas com cargas verticais, quando avaliadas numa condição deformada, provocam acréscimos de momentos, devido ao efeito chamado de não linearidade geométrica (LEITÃO, 2018).

Quando a estrutura é avaliada em sua configuração deformada, há interação entre as forças existentes e os deslocamentos, originando a denominada não linearidade geométrica, o que ocasiona o surgimento de esforços adicionais chamados de efeitos de segunda ordem. Já os efeitos de primeira ordem são aqueles obtidos com a análise do equilíbrio da estrutura estudada em sua configuração geométrica inicial (indeformada) (BUENO e LORIGGIO, 2016).

Uma vez que os esforços verticais agem simultaneamente com as ações horizontais em estruturas deslocáveis pode gerar efeitos importantes e não desejáveis, tornando inviável a sua utilização e comprometendo a estabilidade das mesmas (OLIVEIRA, 2009).

Na elaboração de projetos no campo da Engenharia Civil, observa-se que o concreto armado é o material mais comum e mais tradicional nas estruturas, embora não seja a única opção. Essas estruturas possuem um comportamento não-linear oriundo da própria natureza do material. Por isso para se avaliar de maneira criteriosa a estabilidade em estruturas de concreto armado é necessário considerar e analisar os efeitos da não linearidade física do material e geométrica dos elementos que compõe a estrutura, o que resulta em uma tarefa complexa e com certo esforço computacional (PINTO, 1997).

Por isso, foram criados meios para facilitar e avaliar os efeitos de segunda ordem. Assim como os métodos aproximados para avaliar ou não a necessidade de consideração dos efeitos globais de segunda ordem demonstrados na ABNT NBR 6118:2014. Primeiramente é apresentado o parâmetro de instabilidade  $\alpha$ , utilizado para a verificação da possibilidade de recusa da consideração dos esforços globais de segunda ordem. Em seguida o parâmetro  $\gamma_z$ , com a finalidade de apresentar um coeficiente avaliativo sobre a importância dos esforços globais de segunda ordem em estruturas com no mínimo quatro andares.

Segundo Feitosa e Alves (2015), dentre os fatores que mais influenciam nas pesquisas, quanto à estabilidade global de um prédio, têm-se a rigidez lateral e o peso próprio atuante na estrutura. Outros trabalhos, como o Statler et al. (2011), estudaram a relação que poderia existir quando se analisa a estabilidade global em estruturas metálicas utilizando o seu período natural de vibração. Análise essa que se torna possível devido ao fato de as propriedades dinâmicas fundamentais também dependerem da massa e da rigidez da estrutura.

Já Reis et al. (2018) demonstraram um método de avaliação que se baseia na definição de um parâmetro simples, chamado de  $\chi_T$ , para avaliar a estabilidade da estrutura por meio do período natural de vibração. Os autores levaram em consideração os efeitos globais de segunda ordem, fundamentando-se na amplificação dos momentos de primeira ordem em estruturas de concreto armado.

Contudo, as análises desenvolvidas por Reis et al. (2018) utilizam-se do parâmetro  $\chi_T$  apenas em estruturas com geometrias simples, que apresentam simetria em seu plano. Reis et al. (2018) desconsideraram nas suas análises os modos superiores de vibração.

Recentemente, Leitão (2018) estudou a utilização do parâmetro  $\chi_T$  em estruturas de concreto armado, com diferentes padrões de configurações estruturais, no plano e ao longo de sua altura, complementando a pesquisa de Reis et al. (2018). Foram desenvolvidas e verificadas hipóteses da influência dos diferentes modos de vibração da estrutura no comportamento do parâmetro  $\chi_T$ .

Leitão (2018) realizou apenas análises numéricas, para consideração da não linearidade geométrica (NLG), devido o processo P-delta. Análises que obtiveram a relação  $M_2/M_1$ , ou seja, relação entre momentos finais, considerando os efeitos de segunda ordem, e os momentos de primeira ordem em cada pilar, assim como o valor do parâmetro  $\chi_T$ . Nessas análises foram constatadas que há influência dos modos de

vibração superiores no valor da amplificação de momentos devido aos efeitos de segunda ordem. Por outro lado, também considerou, como um fator de participação, uma massa modal na direção analisada.

Embora as metodologias apresentadas por Reis et al. (2018) e Leitão (2018) sejam positivas na predição da instabilidade, existe um aspecto no qual se deve dar uma atenção detalhada. Especificamente, notou-se que nestas técnicas, a amplificação é realizada através de um parâmetro que depende da relação da soma do peso de todos os pavimentos e do peso total da estrutura. Assim quando os esforços são elevados, aparecem mudanças nas frequências naturais da estrutura, permitindo identificar os pontos de instabilidade e não sendo possível determinar a curva completa de carga-deslocamento.

Portanto, para obter uma metodologia alternativa, que seja computacionalmente mais barata que os métodos tradicionais (P-delta iterativo), neste trabalho é proposto um método que aproveita a relação que existe entre os parâmetros dinâmicos e os efeitos não-lineares. A metodologia estabelece uma relação entre os modos de instabilidade na flambagem com os modos de vibração da estrutura. Especificamente, é realizada uma interpolação dos modos de vibração entre o estado sem carga axial e o estado com carga axial crítica. Consequentemente, aproveita-se a propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração para definir uma metodologia, denominada aqui como análise P-delta modal. Este método permite obter o comportamento da curva força-deslocamento até a flambagem, o que representa um avanço com relação às técnicas apresentadas nos trabalhos de Reis et al. (2018) e Leitão et al. (2019) onde o fator de amplificação simplesmente funciona como um indicador de susceptibilidade da estrutura aos efeitos de segunda ordem.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Dada à verticalização das estruturas de concreto armado, estas possuem elevadas esbeltezes e tendem a apresentar grandes deslocamentos, podendo apresentar problemas de estabilidade. Por isso, são necessários estudos capazes de avaliar a segurança e os problemas relacionados à estabilidade das estruturas e seus elementos constituintes.

Dentre os problemas de estabilidade, podem-se destacar os efeitos de segunda ordem, que são provocados pelos esforços verticais, agindo simultaneamente com as ações horizontais em estruturas deslocáveis em sua configuração deformada.

Procedimentos considerados mais refinados para a avaliação dos efeitos de segunda ordem, como as metodologias P-delta iterativas (Gaiotti e Smith (1989), Chen e Lui (1991), Singh e Singh (1992) e Borst *et al.* (2012)), as técnicas não lineares completas (Coda, *et al.*, (2004) e Greco, *et al.*, (2006)), ou inclusive métodos que utilizam a matriz de rigidez geométrica da estrutura (Banki (1999)), podem exigir um longo tempo computacional.

Uma das formas para solucionar essa dificuldade é propor um método que aproveita a relação que existe entre os parâmetros dinâmicos e os efeitos não lineares. Dentre as diversas formas para contornar este problema, pode-se destacar o método simplificado apresentado na ABNT NBR 6118:2014 (2014) de verificação da estabilidade estrutural, através do parâmetro  $\gamma_z$ . Contudo, mesmo com a simplificação encontrada nesse método, os cálculos destes parâmetros possuem certa complexidade e demandam cuidado em sua aplicação.

Além disso, quando é realizada a análise modal de uma estrutura, com base em um modelo matemático que descreva seu comportamento dinâmico, para a obtenção das frequências naturais de vibração e suas formas modais, há uma indicação do comportamento global da estrutura devido aos esforços laterais (LEITÃO, 2018).

Conseqüentemente, a indicação de uma metodologia que permita obter o comportamento da curva força-deslocamento até a flambagem, representa um avanço no desenvolvimento técnico e científico para a análise estrutural.

### 1.3 OBJETIVO GERAL

O objetivo desta pesquisa é estudar a dependência entre as características dinâmicas (frequências naturais e modos de vibração) e os esforços solicitantes nas estruturas, assim como propor uma nova metodologia, baseada na análise modal e de flambagem que possa permitir obter o comportamento da curva força-deslocamento.

### 1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

O presente estudo se desenvolverá conforme os seguintes objetivos específicos:

- 1) Analisar a relação das características dinâmicas (frequências naturais e modos de vibração) com a carga axial existente em um modelo estrutural simples como um pilar.
- 2) Propor uma metodologia utilizando informação modal (frequências naturais e modos de vibração) para o cálculo da curva força deslocamento que represente o comportamento não linear geométrico da estrutura.
- 3) Aplicar a metodologia proposta em uma estrutura isolada do tipo pilar e comparar com método tradicional (P-delta iterativo).
- 4) Aplicar a metodologia proposta em uma estrutura de pórtico, mas modificando os carregamentos externos, para comparar com o método tradicional (P-delta iterativo).

## 1.5 APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

O trabalho é dividido em cinco capítulos. Organizados com a finalidade de contribuir nos aspectos do uso da análise modal como método que possa permitir obter o comportamento da curva força-deslocamento até a flambagem.

O capítulo II, apresenta uma fundamentação teórica com base nas referências bibliográficas em relação a análise de segunda ordem e análise dinâmica. Através da solução analítica para equação de movimento em vibração livre se obtêm a equação de frequência natural de vibração considerando a carga axial no elemento tipo pilar e seus modos. Para tanto, apresenta-se o princípio de ortogonalidade e como normalizar os modos à massa. Por fim, demonstra-se a solução numérica para equação de movimento em vibração livre. Destaca-se neste capítulo o desenvolvimento analítico para obtenção de frequência natural de vibração em um elemento tipo pilar e seus modos, o que não se encontra nas literaturas.

O capítulo III, apresenta os resultados parciais analíticos e numéricos dos estudos. E ainda demonstra as propriedades do elemento escolhido para a modelagem. Assim, como a comparação entre solução analítica e a solução numérica, gráfico de carga versus frequências, modos de vibração, análise P-delta e análise P-Delta modal no elemento do tipo pilar e em um elemento do tipo pórtico – modificando os carregamentos externos.

O capítulo IV, descreve as considerações finais obtidas após a simulação dos modelos.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Quando os esforços solicitantes ou os deslocamentos de um elemento estrutural ultrapassam certos limites, os resultados obtidos com o equilíbrio na configuração deformada podem diferir muito dos resultados obtidos com a configuração geométrica inicial (indeformada).

Na análise de primeira ordem, os esforços são aqueles obtidos com a análise do equilíbrio da estrutura em sua configuração geométrica inicial (indeformada). Quando o cálculo considera a estrutura deformada na formulação de suas equações de equilíbrio, ocasiona o surgimento de esforços adicionais chamados de efeitos de segunda ordem (CARMO, 1995).

Os esforços de cargas axiais, agindo simultaneamente com as ações de cargas laterais em estruturas deslocáveis, podem gerar efeitos importantes e indesejáveis. Isso pode ocasionar consequências simples como patologias em elementos não estruturais, até comprometer a estabilidade global das estruturas e até ocasionar a inutilização das mesmas (OLIVEIRA, 2009).

Normalmente, uma das formas para uma verificação mais rigorosa da estabilidade, leva em consideração os efeitos da não linearidade física do material e geométrica dos elementos que compõe a estrutura (PINTO, 1997).

Para entender os efeitos de segunda ordem, é necessário explorar conceitos básicos da análise não linear de estruturas, como a não linearidade física e não linearidade geométrica.

### 2.1 NÃO LINEARIDADE FÍSICA E NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Neste item serão abordadas, de forma sucinta, definições relacionadas a não linearidade física e geométrica. Vale lembrar que a não linearidade geométrica será desenvolvida com maior detalhe em itens posteriores, com a inclusão dos conceitos de métodos iterativos, como P-delta iterativo.

Na análise da não linearidade física (NLF) é considerado o comportamento do material após seu regime elástico, sendo este influenciado por efeitos como a fissuração, fluência e escoamento da armadura (PINTO, 1997).

Uma das formas, normalmente utilizadas na análise dos esforços globais de segunda ordem, para considerar a NLF em estruturas de concreto, é através de um fator de redução da rigidez dos elementos estruturais, para estruturas consideradas

de nós móveis e com no mínimo quatro andares, como consta das recomendações da ABNT NBR 6118:2014: a Eq. (2.1) representa a rigidez secante do concreto para vigas com armadura inferior diferente da superior:

$$(EI)_{sec} = 0,4E_{ci}I_c, \quad (2.1)$$

Já a Eq. (2.2) representa a rigidez secante do concreto para vigas com armadura inferior igual a superior:

$$(EI)_{sec} = 0,5E_{ci}I_c. \quad (2.2)$$

A rigidez secante do concreto para pilares é dada por:

$$(EI)_{sec} = 0,8E_{ci}I_c. \quad (2.3)$$

sendo que  $I_c$  é o momento de inércia da seção total de concreto, incluindo, quando for o caso, as mesas colaborantes da seção transversal e  $E_{ci}$  representa o módulo de elasticidade secante inicial do concreto, dado em MegaPascal ( $MPa$ ), calculado por:

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{fck}, \quad (2.4)$$

para valores de  $fck$  variando de 20  $MPa$  a 50  $MPa$  e

$$E_{ci} = 21500 \alpha_E \left( \frac{fck}{10} + 1,25 \right)^{1/3}, \quad (2.5)$$

para valores de  $fck$  variando de 55  $MPa$  a 90  $MPa$ .

Sendo que  $fck$  é igual à resistência característica à compressão do concreto, em ( $MPa$ ) e onde  $\alpha_E$  é dado de acordo com o tipo de agregado utilizado na composição do concreto:

$$\alpha_E = 1,2 \text{ para basalto e diabásico;}$$

$$\alpha_E = 1,0 \text{ para granito e gnaisse;}$$

$$\alpha_E = 0,9 \text{ para calcário;}$$

$$\alpha_E = 0,7 \text{ para arenito;}$$

A NBR 6118:2014, também demonstra que em função da ausência de resultados de ensaio do concreto o valor do módulo de deformação secante pode ser estimado pela expressão:

$$(E)_{sec} = \alpha_i E_{ci}, \quad (2.6)$$

sendo:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0. \quad (2.7)$$

Uma das formas, normalmente utilizadas na análise dos esforços globais de segunda ordem, para considerar a NLF em estruturas de concreto, é através de um fator de redução da rigidez dos elementos estruturais

Uma das formas, normalmente utilizadas na análise dos esforços globais de segunda ordem, para considerar a NLF em estruturas de concreto, é através de um fator de redução da rigidez dos elementos estruturais. Temos também tais considerações na norma americana ACI 318-14. Mas diferentemente da norma brasileira, os coeficientes redutores são utilizados diretamente no momento de inércia ( $I_g$ ) dos elementos estruturais, como apresentado a seguir: Sendo que a Eq. (2.8) é para vigas e Eq. (2.9) para pilares:

$$0,35I_g, \quad (2.8)$$

$$0,70I_g. \quad (2.9)$$

O módulo de elasticidade do concreto ( $E_c$ ) em  $MPa$ , segundo a ACI 318 (2014) pode ser obtido por meio da resistência do concreto à compressão ( $f_{c'}$ ):

$$E_c = 0,043ro^{1,5}\sqrt{f_{c'}}, \quad (2.10)$$

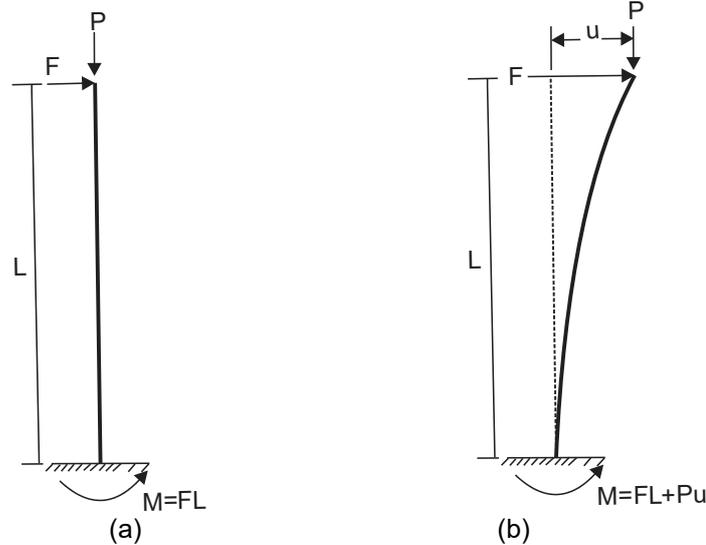
sendo que a massa específica do concreto ( $ro$ ) esteja entre  $1440 \text{ kg/m}^3$  e  $2560 \text{ kg/m}^3$ . E para concreto de massa específica normal temos:

$$E_c = 4700\sqrt{f_{c'}}. \quad (2.11)$$

Quando há forças horizontais e verticais em ação conjunta nas estruturas, elas se deslocam, gerando um acréscimo de momentos fletores devido à mudança em sua geometria. A análise que considera na sua formulação o equilíbrio da estrutura em uma configuração deformada, chama-se de não linearidade geométrica (NLG) (GIONGO, 2007).

Para demonstrar a diferença entre os esforços obtidos na análise linear geométrica e na análise não linear geométrica, temos a Figura 1:

Figura 1: (a) Análise linear geométrica; (b) Análise não linear geométrica



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

O momento no engaste é resultado unicamente da força horizontal - Figura 1-(a), aplicada a uma determinada altura, não tendo um acréscimo de momento devido a carga vertical ( $P$ ), uma vez que o equilíbrio é avaliado na posição inicial, indeformada. Porém, na Figura 1-(b) há um deslocamento horizontal ( $u$ ) devido à carga pontual ( $F$ ), no qual, essa nova posição da barra (deformada) gera um acréscimo de momento em razão da força vertical ( $P$ ) deslocada horizontalmente por uma distância ( $u$ ), conhecida como momento de segunda ordem, que se adiciona ao momento de primeira ordem, devido à atuação da carga horizontal ( $F$ ). Tendo assim um novo valor de momento dado por:

$$M = M_{1^{\circ}ordem} + \Delta M_{2^{\circ}ordem} = FL + Pu. \quad (2.12)$$

O acréscimo de momento proveniente do produto da carga vertical e deslocamento horizontal é conhecido como efeito P-delta e quando as estruturas submetidas a carregamentos não são suficientemente rígidas podem ser levadas a perda de estabilidade. Os esforços adicionais levando em consideração o equilíbrio da estrutura em sua configuração deformada são chamados de efeitos de segunda ordem (LEITÃO, 2018).

## 2.2 AVALIAÇÃO DOS EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM

Há três métodos para a consideração dos efeitos de segunda ordem conforme sua aplicação: métodos iterativos, métodos diretos e métodos simplificados.

### 2.2.1 Métodos iterativos

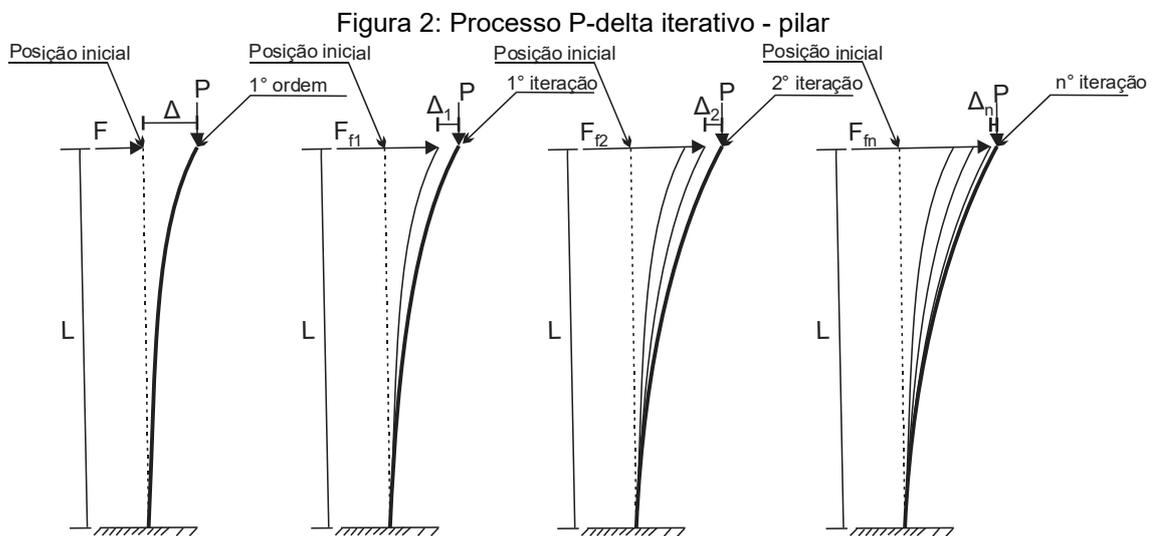
No método iterativo temos como exemplo a análise matricial, com a adaptação da matriz de rigidez  $K$ , com intuito de incluir os efeitos de segunda ordem.

Mcguire et al. (2000) demonstram que quando a estrutura está sujeita a grandes deslocamentos, a relação linear entre forças ( $f$ ) e deslocamentos ( $u$ ) não pode ser utilizada. Afim de considerar os efeitos de mudanças de posição, a rigidez total  $K$  deve ser a composição das parcelas de rigidez geométrica  $K_G$  e de rigidez elástica de primeira ordem  $K_E$ , como apresentado:

$$[K_G + K_E]\{u\} = \{f\}. \quad (2.13)$$

Analisando o equilíbrio da estrutura em sua configuração deformada, há modificações nos deslocamentos e esforços, alterando a rigidez da estrutura, sendo que a Eq. (2.13) exige processos iterativos devido a relação não linear.

Outro método iterativo é o da carga lateral fictícia, também chamado de processo P-delta iterativo, no qual após a análise de primeira ordem iniciam-se as iterações até que a estrutura esteja numa posição de equilíbrio. Neste procedimento o efeito P-delta é substituído por um efeito de primeira ordem equivalente, proveniente das cargas laterais fictícias (Ver Figura 2) (BUENO, 2009).



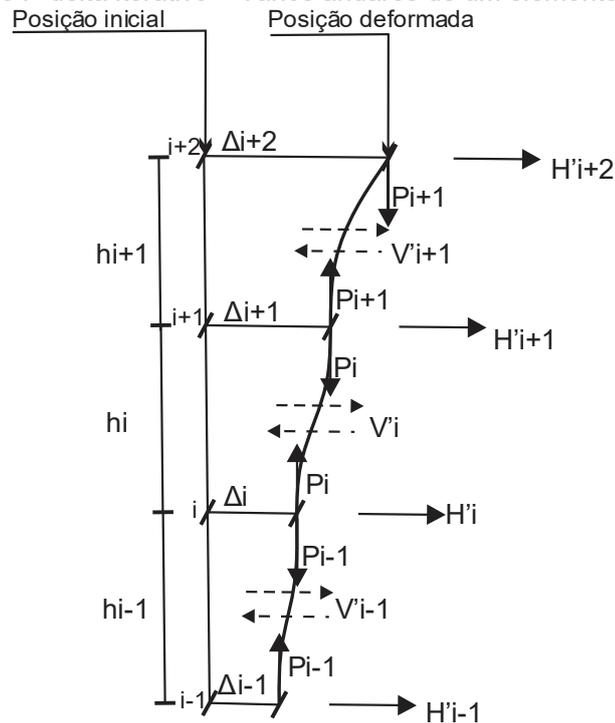
Fonte: Adaptado de Moncayo, 2011.

Onde,  $\Delta$  é o deslocamento horizontal devido à ação horizontal ( $F$ ) e  $\Delta_1, \Delta_2$  e  $\Delta_n$  são os deslocamentos horizontais devido às forças horizontais fictícias:  $F_{f1}, F_{f2}$  e  $F_{fn}$ . Nota-se que, se os resultados não convergirem após cinco iterações, a estrutura pode ser instável (ALBERT, 1980).

Para considerar os efeitos *P-delta* foram propostos métodos iterativos, como o apresentado no por Wood *et al.* (1976), os quais foram evoluindo como mostrado nos trabalhos de Gaiotti e Smith (1989), Chen e Lui (1991), Singh e Singh (1992) e Borst *et al.* (2012), entre outros.

Em específico Gaiotti e Smith (1989) estende o conceito da metodologia *P-delta* facilmente para um elemento (edifício) genérico de vários andares, como mostrado na Figura 3.

Figura 3: Processo *P-delta* iterativo – Vários andares de um elemento (edifício) genérico



Fonte: Adaptado de Gaiotti e Smith, 1989.

No método demonstrado por Gaiotti e Smith (1989), são consideradas algumas etapas, sendo primeiramente a aplicação de carregamento vertical, surgindo, em seguida, os esforços horizontais fictícios (cortante fictícia,  $V'$ , e a carga lateral fictícia,  $H'$ ). Os esforços cortantes fictícios são dados pela seguinte expressão:

$$V'_i = \frac{\sum P_i}{h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i), \quad (2.14)$$

onde  $\sum P_i$  é a soma das cargas axiais no andar (i),  $h_i$  é a altura do andar (i),  $\Delta_{i+1}$ ,  $\Delta_i$  são os deslocamentos dos piso i+1 e i, respectivamente.

Assim como a carga lateral fictícia  $H'$  de um andar (i) pode ser obtido subtraindo-se a cortante desse andar (i) do valor relativo ao andar inferior (i-1), ou seja:

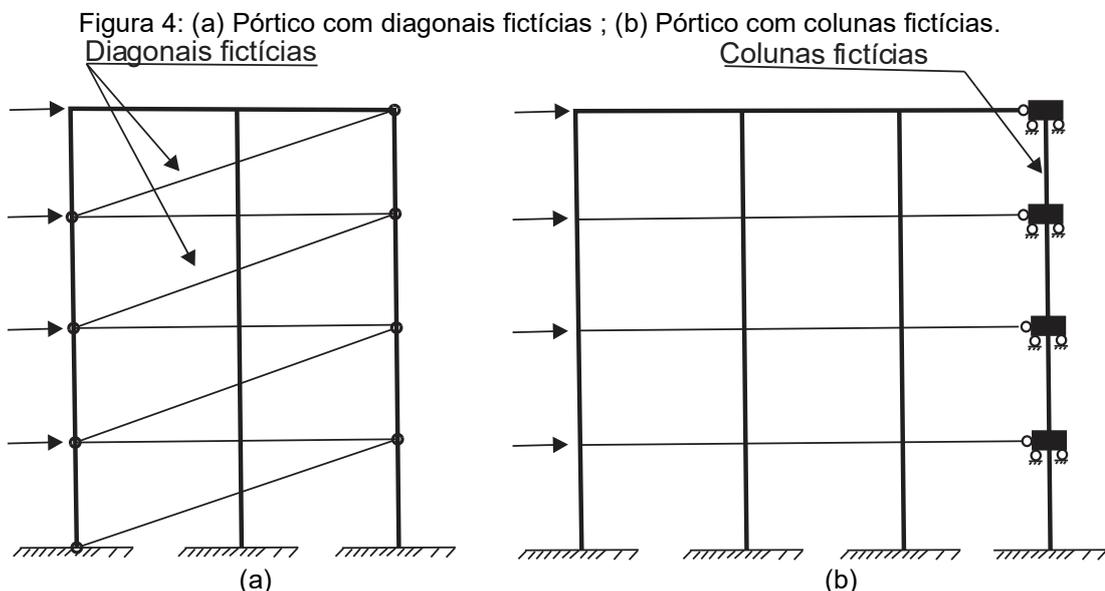
$$H'_i = (V'_{i-1} - V'_i). \quad (2.15)$$

Banki (1999) mostra a partir do desenvolvimento de estudos com a utilização do processo iterativo P-delta e a matriz de rigidez geométrica  $K_G$  em pórticos bidimensionais que os valores encontrados pelo processo iterativo P-delta são sempre menores que aqueles obtidos utilizando a matriz  $K_G$ , e este último converge melhor para a resposta em relação ao grau de discretização dos elementos da estrutura.

### 2.2.2 Métodos diretos

Além dos métodos iterativos, há também os métodos diretos apresentados em trabalhos como de Nixon *et al.* (1975) e Rutenberg (1981). Nixon *et al.* (1975) mostram um programa que não precisa de iterações, sendo apenas adicionado um pedaço de contraventamento em forma de barra diagonal fictícia por andar, como mostrado na Figura 4-a). Os elementos fictícios adicionados tornam a estrutura mais flexível, simulando a consideração da matriz de rigidez geométrica com a inclusão dos efeitos de segunda ordem na nova posição de equilíbrio da estrutura.

Rutenberg (1981) comenta que o procedimento proposto por Nixon *et al.* (1975) se limitava a estruturas relativamente baixas, devido as diagonais fictícias adicionadas afetar a deformação axial dos pilares, conduzindo a forças verticais não condizentes com a realidade, principalmente para estruturas altas. Sendo assim Rutenberg (1981) propôs a inclusão de colunas fictícias com inércia negativa na estrutura (Ver Figura 4-b)). Da mesma forma, adicionado os elementos fictícios é alterado a matriz de rigidez e o equilíbrio final considera os efeitos de segunda ordem.



Fonte: Adaptado de Rutenberg, 1981.

### 2.2.3 Método simplificado da ABNT NBR 6118:2014

De maneira geral, os métodos simplificados são aqueles que permitem por meio de análises simples, prever o comportamento da estrutura em relação aos efeitos globais de segunda ordem. A ABNT NBR 6118:2014 classifica a estrutura como de nós fixos ou de nós móveis. Uma estrutura de nós fixos é quando a mesma é submetida a forças horizontais que lhe ocasionem pequenos deslocamentos horizontais e, conseqüentemente os efeitos globais de segunda ordem são inferiores a 10% dos respectivos esforços obtidos de uma análise de primeira ordem.

Sendo, portanto, desnecessária sua consideração nos cálculos de esforços solicitantes se não representarem acréscimo superior a 10% em relação aos efeitos de primeira ordem (efeitos que surgem quando o equilíbrio da estrutura é estudado na configuração geométrica inicial). Já quando esses efeitos ultrapassam o limite de 10%, a estrutura é classificada como uma estrutura de nós móveis, sendo necessária a consideração desses efeitos nos cálculos estrutural.

As descrições apresentadas a seguir em relação às metodologias simplificadas são segundo a normativa brasileira de estruturas de concreto, NBR 6118:2014.

A normativa apresenta um parâmetro simples relacionado à instabilidade da estrutura como método da avaliação da necessidade de consideração dos efeitos globais de segunda ordem nos cálculos para estruturas de concreto armado, assim como definições dos parâmetros utilizados, como observado a seguir:

$$\alpha = H_{tot} \sqrt{\frac{N_k}{E_{cs}I_c}}, \quad (2.16)$$

onde  $H_{tot}$  é a altura total da estrutura,  $N_k$  é um valor característico que represente as cargas atuantes na estrutura obtido a partir da soma de todas as cargas verticais atuantes e  $E_{cs}I_c$  é a soma da rigidez de todos os pilares na direção considerada. No caso de estruturas de pórticos, de treliças ou mistas, ou com pilares de rigidez variável ao longo da altura, pode ser considerado o valor da expressão  $E_{cs}I_c$  de um pilar equivalente de seção constante.

Deve-se calcular  $I_c$ , considerando as seções brutas dos pilares e a rigidez do pilar equivalente, determinada como descrito abaixo:

Primeiramente: Calcular o deslocamento do topo da estrutura de contraventamento, sob a ação do carregamento horizontal na direção em que seja considerada.

Em seguida: Calcular a rigidez de um pilar equivalente de seção constante, engastado na base e livre no topo, de mesma altura  $H_{tot}$ , tal que, sob a ação do mesmo carregamento, sofra o mesmo deslocamento no topo.

Uma estrutura reticulada simétrica é classificada como de nós fixos quando seu coeficiente  $\alpha$  for menor que o valor de  $\alpha_1$ , onde ocorrendo tal fato os efeitos globais de segunda ordem podem ser desconsiderados. Contudo, caso  $\alpha$  for superior ao valor de  $\alpha_1$  a estrutura deverá ser submetida a uma análise de segunda ordem para consideração dos efeitos adicionais de segunda ordem nos seus elementos estruturais. A obtenção do valor de  $\alpha_1$  pode ser demonstrada no equacionamento abaixo:

$$\alpha_1 = 0,2 + 0,1n \text{ para } n \leq 3, \quad (2.17)$$

$$\alpha_1 = 0,6 \text{ para } n \geq 4, \quad (2.18)$$

sendo  $n$  é o número de níveis de pavimentos (andares) acima da fundação ou de um nível pouco deslocável do subsolo.

Quando houver apenas pórticos, sem pilares-paredes ou com associação com os mesmos, o valor de  $\alpha_1$  deverá ser reduzido para 0,5.

Contudo, vale lembrar que o método do parâmetro de instabilidade  $\alpha$  apenas demonstra uma metodologia de avaliação da necessidade da consideração dos esforços globais de segunda ordem, não apresentando nenhuma informação em relação à quantificação dos esforços adicionais provenientes dos efeitos já mencionados.

O critério simplificado de avaliação da importância dos esforços de segunda ordem é o coeficiente  $\gamma_z$ , que é obtido conforme a NBR 6118 (2014), item 15.5.3 para estruturas de no mínimo quatro andares. Ele é calculado a partir de uma análise linear de primeira ordem, para cada caso de carregamento, considerando os valores de fator de redução da rigidez dos elementos estruturais já mencionados anteriormente.

A norma considera, nós fixos a estrutura que apresente um coeficiente  $\gamma_z$  menor ou igual a 1,1. Estruturas de concreto armado com valores  $\gamma_z$  superiores a 1,20 é comum utilizar-se o processo P-delta, que consiste em uma análise não linear

geométrica. A ABNT NBR 6118:2014 apresenta o equacionamento do  $\gamma_z$  e definições dos seus parâmetros de cálculos, como sendo:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M}{M_1}} \quad (2.19)$$

onde  $\Delta M$  é a soma dos produtos de todas as forças verticais na estrutura, na combinação considerada e com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de primeira ordem e  $M_1$  é o momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada, com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura (ABNT NBR 6118:2014).

Caso seja constatado que a estrutura estudada pode ser considerada de nós fixos é necessária segundo a NBR 6118:2014, uma análise dos efeitos locais de segunda ordem. Tais efeitos em elementos isolados podem ser desconsiderados quando o parâmetro de esbeltez da estrutura designado por  $b_1$  for inferior ao parâmetro de esbeltez  $b_2$ , ( $b_1 < b_2$ ).

O valor de  $b_1$  é obtido conforme demonstrado a seguir:

$$b_1 = \frac{le}{i}, \quad (2.20)$$

sendo considerado o comprimento equivalente do pilar dado por  $le$  e o raio de giração da seção transversal pela incógnita  $i$ . Caso o elemento seja do tipo pilar engastado-livre, o valor de  $le$  é igual a  $2l$ , sendo  $l$  a distância entre a base e o topo do elemento. Já o raio de giração da seção transversal é calculado da seguinte maneira:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad (2.21)$$

onde  $I$  é a inércia do elemento e  $A$  a área da seção transversal do mesmo. Já o  $b_2$  é obtido da seguinte forma:

$$b_2 = \frac{25 + 12,5e_1/h}{\alpha_b}, \quad (2.22)$$

onde  $h$  é a altura da seção transversal no eixo considerado (dado em metros). O valor de  $b_2$  depende da excentricidade relativa de primeira ordem  $e_1/h$  na extremidade do pilar onde ocorre o momento de primeira ordem de maior valor absoluto.

A excentricidade mínima considerada é dada por:

$$e_{1,min} = 0,015 + 0,03h. \quad (2.23)$$

O valor de  $b_2$  deve ser entre 35 e 90 e o valor de  $\alpha_b$  para pilares engastados-livres deve ser obtido por:

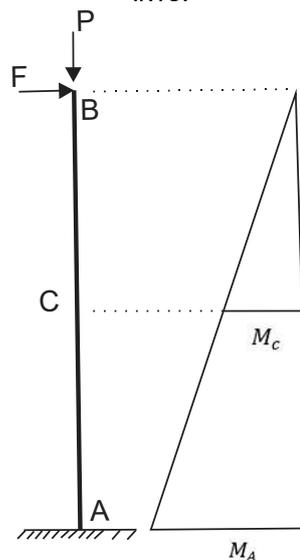
$$\alpha_b = 0,80 + 0,20 \frac{|M_c|}{|M_A|} \geq 0,85, \quad (2.24)$$

$$\alpha_b = 1 \text{ se } M_A = M_c = 0,0, \quad (2.25)$$

sendo que  $\alpha_b$  deve ser um valor entre 1,0 e 0,85,  $M_A$  correspondente ao momento de primeira ordem na base e  $M_c$  é o momento de primeira ordem no meio do elemento tipo pilar engastado-livre, em valores absolutos (Ver Figura 5).

Caso a largura e altura da seção transversal do elemento sejam diferentes, há necessidade dos cálculos para as duas direções e conseqüentemente a verificação de dispensa dos efeitos locais de segunda ordem em cada análise.

Figura 5: Representação de momento de primeira ordem no engaste e no meio do pilar engastado-livre.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

É necessária a consideração dos efeitos locais de segunda ordem, caso  $b_1$  for maior que o valor do  $b_2$ . Há muitos métodos para consideração de tais efeitos, como os apresentados na NBR 6118:2014. Para barras submetidas à flexo-compressão normal, o cálculo pode ser com o método geral ou métodos aproximados.

O método geral é obrigatório para valores de  $b_1$  maiores que 140. Já os métodos aproximados são empregados para pilares com  $b_1$  menores que 90, seção constante e armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo.

O método geral consiste na análise não-linear de segunda ordem com uma adequada discretização do elemento barra com consideração da relação momento-curvatura real em cada seção, e considerando a não linearidade geométrica de forma exata.

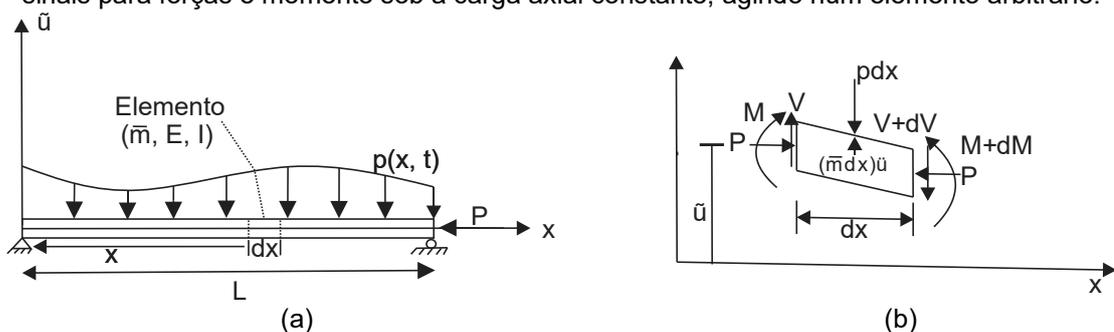
A normativa prevê que os esforços locais de segunda ordem podem ser determinados pelo método aproximado pilar padrão com curvatura aproximada e pilar padrão com rigidez  $K$  aproximada.

Caso a estrutura vier a ser considerada de nós móveis devem ser considerado os efeitos globais e locais de segunda ordem. Uma solução aproximada para determinação dos esforços globais de segunda ordem apresentada na normativa é na avaliação dos esforços finais (primeira ordem + segunda ordem) a partir da majoração adicional dos esforços horizontais da combinação considerada por  $0,95\gamma_z$ . Processo válido para  $\gamma_z \leq 1,3$ .

### 2.3 ANÁLISE DINÂMICA EM UMA VIGA INCLUÍDO O EFEITO DA CARGA AXIAL NO ELEMENTO

Para a obtenção de uma equação dinâmica de uma viga, incluindo o efeito da carga axial, conforme Paz e Kin (2019), foi considerada uma viga uniforme que vibra livremente sob a ação de uma carga axial constante  $P$ , conforme mostrado na Figura 6-a). Observe que  $\tilde{u}(x, t)$  é dado como deslocamento a qualquer ponto  $x$  ao longo do eixo neutro, o cisalhamento interno  $V + dV$ , o momento  $M$  e  $M + dM$ , e as forças inerciais  $(\bar{m}dx)\ddot{u}$  atuando sobre um elemento  $dx$  de comprimento como mostrados na Figura 6-b), sendo  $\bar{m} = \rho A$ , massa por unidade de comprimento e  $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ , derivada parcial utilizada para expressar aceleração.

Figura 6: (a) Representação das coordenadas para vibração em viga uniforme; (b) Convenção de sinais para forças e momento sob a carga axial constante, agindo num elemento arbitrário.



Fonte: Adaptado de Paz e Kin, 2019.

As derivadas parciais são utilizadas para expressar aceleração, variações de cisalhamento e momento, pois essas grandezas estão em funções de posição ( $x$ ) ao longo da viga e tempo ( $t$ ).

A soma de forças e momentos nestes elementos produz as seguintes equações de equilíbrio:

$$-p(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - P \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - V(x, t) = 0. \quad (2.27)$$

No modelo de viga é utilizado a teoria clássica de Euler-Bernoulli ou de flexão pura. Da teoria simples de flexão pura, a relação momento-curvatura para a convenção de sinais mostradas na Figura 6-b) é:

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.28)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade de Young e  $I$  é o momento de Inércia da área da seção transversal em relação ao eixo neutro através do centroide.

Associando as Eq. (2.28) e Eq. (2.27) temos a força de cisalhamento  $V(x, t)$  que pode ser expressa em termos de variância de deslocamento:

$$V(x, t) = -EI \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} - P \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (2.29)$$

Combinando e rearranjando a Eq. (2.26) com Eq. (2.29), é possível apresentá-la como equação do movimento em termos da variável de deslocamento:

$$p(x, t) = EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (2.30)$$

A Eq. (2.30) representa a equação diferencial parcial que descreve o movimento de um elemento de viga, e as Eq. (2.28) e Eq. (2.29) representam o momento e a distribuição de cisalhamento ao longo desde elemento.

Podendo ser escrita a Eq. (2.30) como:

$$p(x, t) = EIu'''' + Pu'' + \bar{m}\ddot{u}. \quad (2.31)$$

A Eq. (2.31)<sup>1</sup> representa a equação dinâmica para uma viga.

## 2.4 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO EM VIBRAÇÃO LIVRE

Tendo a equação diferencial que representa o movimento dinâmico de uma viga, pode-se considerar o sistema em vibração livre e não amortecido com as condições de contorno apropriadas. Sendo assim, o movimento em vibração livre  $p(x, t) = 0$  pode ser representado na equação do equilíbrio dinâmico da seguinte maneira:

$$u^{iv} + \frac{P}{EI}u'' + \frac{\bar{m}}{EI}\ddot{u} = 0. \quad (2.32)$$

A solução da Eq. (2.32) pode ser obtida pelo método de separação de variáveis. Este método é o método sistemático mais antigo e muito importante para resolver equações diferenciais parciais, tendo sido usado por D' Alembert, Daniel Bernoulli e Euler, em torno de 1750, em seus estudos sobre ondas e vibrações. A característica essencial é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que têm que ser resolvidas sujeitas a condições iniciais ou de contorno (BOYCE, 2010).

O método, conforme Shaker e Center (1975) consiste, em assumir que a solução pode ser expressa como o produto de uma função de posição  $\Phi(x)$  e uma função do tempo  $f(t)$ , como apresentado na Eq. (2.33), descrevendo o deslocamento de cada ponto da barra ao longo do tempo, como:

$$u(x, t) = \Phi(x)f(t). \quad (2.33)$$

O deslocamento pode ser descrito por meio de uma função de deslocamento independente do tempo, como apresentado:

$$\frac{u(x, t)}{f(t)} = \Phi(x). \quad (2.34)$$

A Eq. (2.32) associada a Eq. (2.33), é descrito na Eq. (2.35).

---

<sup>1</sup> Os índices romanos indicam derivadas em relação a "(x)" e o "trema" indica derivadas em relação ao "tempo".

$$EI f(t) \frac{\partial^4 \Phi(x)}{\partial x^4} + P f(t) \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} + \bar{m} \Phi(x) \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.35)$$

Está última pode ser escrita como apresentado na Eq. (2.36). Também é possível expressar como:

$$EI f(t) \Phi(x)^{iv} + P f(t) \Phi(x)'' + \bar{m} \Phi(x) f(\ddot{t}) = 0. \quad (2.36)$$

$$\frac{EI \Phi(x)^{iv} + P \Phi(x)''}{\bar{m} \Phi(x)} = -\frac{f(\ddot{t})}{f(t)}. \quad (2.37)$$

Observa-se pela Eq. (2.37) que o lado esquerdo é uma função apenas de  $x$  enquanto o lado direito é uma função apenas em relação ao tempo  $t$ , cada lado da equação deve ser igual ao mesmo valor constante. Designamos a constante como  $w^2$  que equivale separadamente à cada lado, o qual resulta nas duas equações diferenciais a seguir:

$$\Phi(x)^{iv} + \frac{P \Phi(x)''}{EI} - \frac{w^2 \bar{m} \Phi(x)}{EI} = 0, \quad (2.38)$$

$$w^2 f(t) + f(\ddot{t}) = 0. \quad (2.39)$$

Note que, em consequência, para soluções separáveis reduzimos o problema de resolver a equação diferencial parcial - Eq. (2.32) ao resolver as duas equações diferenciais originárias em Eq. (2.38) e (2.39). A Eq. (2.38) pode ser resolvida deixando a função de posição como:

$$\Phi(x) = C e^{Dx}. \quad (2.40)$$

A segunda e quarta derivada da Eq. (2.38) são dadas por:

$$\Phi(x)'' = C D^2 e^{Dx}, \quad (2.41)$$

$$\Phi(x)^{iv} = C D^4 e^{Dx}. \quad (2.42)$$

A substituição da Eq. (2.41) e Eq. (2.42) na Eq. (2.38) resulta em:

$$D^4 + D^2 \frac{P}{EI} - \frac{w^2 \bar{m}}{EI} = 0. \quad (2.43)$$

Podemos definir  $D^2 = F$  como:

$$F = -\frac{P}{2EI} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 + \frac{w^2 \bar{m}}{EI}}. \quad (2.44)$$

Logo as raízes da Eq. (2.44) são dadas por:

$$D_{1,3} = \pm \sqrt{-\frac{P}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 + \frac{w^2 \bar{m}}{EI}}}, \quad (2.45)$$

$$D_{2,4} = \pm i \sqrt{\frac{P}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 + \frac{w^2 \bar{m}}{EI}}}.$$

É particularmente conveniente adotar

$$k^2 = \frac{P}{EI'} \quad (2.46)$$

$$\beta^4 = \frac{w^2 \bar{m}}{EI}. \quad (2.47)$$

O uso dessas expressões permite que a Eq. (2.45) seja escrito como

$$D_n = \lambda_n = \pm \sqrt{-\frac{k^2}{2} \pm \sqrt{\frac{k^4}{4} + \beta^4}}. \quad (2.48)$$

As raízes da Eq. (2.43) são:

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + \beta^4}}; \quad \lambda_3 = -\lambda_1, \quad (2.49)$$

$$i\lambda_2 = \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + \beta^4}}; \quad \lambda_4 = -i\lambda_2. \quad (2.50)$$

A solução geral é dada pela superposição dessas quatro soluções possíveis,

$$\Phi(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{-\lambda_1 x} + C_2 e^{i\lambda_2 x} + C_4 e^{-i\lambda_2 x}, \quad (2.51)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são constantes de integração. As funções exponenciais em  $\Phi(x)$  podem ser reescritas Eq. (2.53) e Eq. (2.54) em formas de funções trigonométricas e hiperbólicas como

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x, \quad (2.52)$$

$$e^{\lambda_1 x} = \cosh(\lambda_1 x) \pm \sinh(\lambda_1 x), \quad (2.53)$$

$$e^{\lambda_2 x} = \cos(\lambda_2 x) \pm i \sin(\lambda_2 x). \quad (2.54)$$

Com a substituição dessas equações na Eq. (2.51) temos:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= C_1[\cosh(\lambda_1 x) + \sinh(\lambda_1 x)] + C_3[\cosh(\lambda_1 x) - \sinh(\lambda_1 x)] \\ &\quad + C_2[\cos(\lambda_2 x) + i \sin(\lambda_2 x)] + C_4[\cos(\lambda_2 x) - i \sin(\lambda_2 x)] \\ &= [(C_1 + C_3) \cosh(\lambda_1 x) + (C_1 - C_3) \sinh(\lambda_1 x)] \\ &\quad + [(C_2 + C_4) \cos(\lambda_2 x) + (C_2 i - C_4 i) \sin(\lambda_2 x)]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Podemos reescrever  $C_1 + C_3 = A$ ,  $C_1 - C_3 = B$ ,  $C_2 + C_4 = D$  e  $C_2 i - C_4 i = E$  tendo assim,

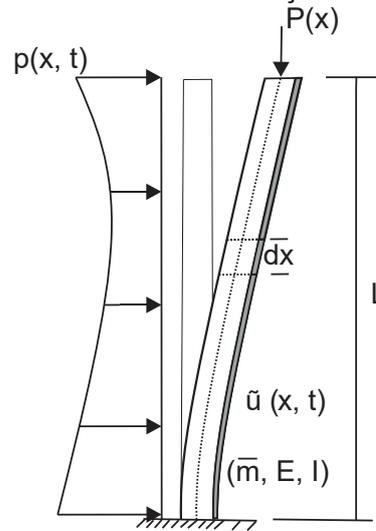
$$\Phi(x) = A \cosh(\lambda_1 x) + B \sinh(\lambda_1 x) + D \cos(\lambda_2 x) + E \sin(\lambda_2 x), \quad (2.56)$$

como mostrado por Shaker e Center (1975), onde A, B, D e E são novas constantes de integração. Considerando as condições de contorno nas extremidades da viga essas quatro constantes definem o modo de vibração livre.

Shaker e Center (1975) chegaram até o equacionamento da Eq. (2.56), mas a compreensão do efeito da carga axial sobre as frequências naturais da viga uniforme para as várias condições de contorno, obteve-se numericamente pelo método da Bissecção. Os autores não decorreram sobre o desenvolvimento analítico de obtenção do efeito de uma carga axial sobre os modos e frequências naturais de vibração além disso, a Eq. (2.56) dependia de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Logo houve necessidade de desenvolvimento para avaliar apenas em função de  $\lambda_1$ .

Considerando um pilar engastado na base (Figura 7), com uma massa distribuída ( $\bar{m}$ ) e rigidez ao longo da barra ( $EI$ ), sujeita a carregamento horizontal genérico  $p(x, t) = 0$ , ou seja, vibração livre e uma carga axial  $P$ , podemos ter a compreensão analítica do efeito da carga axial sobre as frequências e modos nesse caso.

Figura 7: Barra engastada-livre com associação do deslocamento  $\tilde{u}(x, t)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Deste modo, as condições de contorno para esse pilar são as seguintes:

$$\begin{cases} \tilde{u}(0, t) = 0 \text{ ou } \Phi(0) = 0 \\ \tilde{u}'(0, t) = 0 \text{ ou } \Phi'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

e

$$\begin{cases} M(L, t) = \frac{-EI \partial^2 \tilde{u}(L, t)}{\partial x^2} = 0 \text{ ou } \Phi''(L) = 0 \\ V(L, t) = -\frac{\partial^3 \tilde{u}(L, t)}{\partial x^3} - \frac{P}{EI} \frac{\partial \tilde{u}(L, t)}{\partial x} = 0 \text{ ou } \Phi'''(L) + k^2 \Phi'(L) = 0 \end{cases} \quad (2.58)$$

A primeira, segunda e terceira derivada da Eq. (2.56) são dadas por

$$\Phi'(x) = E\lambda_2 \cos(\lambda_2 x) - D\lambda_2 \sin(\lambda_2 x) + B\lambda_1 \cosh(\lambda_1 x) + A\lambda_1 \sinh(\lambda_1 x), \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \Phi''(x) = & -E\lambda_2^2 \sin(\lambda_2 x) - D\lambda_2^2 \cos(\lambda_2 x) + B\lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 x) \\ & + A\lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 x), \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \Phi'''(x) = & -E\lambda_2^3 \cos(\lambda_2 x) + D\lambda_2^3 \sin(\lambda_2 x) + B\lambda_1^3 \cosh(\lambda_1 x) \\ & + A\lambda_1^3 \sinh(\lambda_1 x). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Substituindo as condições de contorno do elemento estrutural é possível expressar a Eq. (2.56) e Eq. (2.59) como

$$A + D = 0, \quad (2.62)$$

$$E\lambda_2 + B\lambda_1 = 0, \quad (2.63)$$

$$D = -A, \quad (2.64)$$

$$E = \frac{-B\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (2.65)$$

Relacionando a Eq. (2.64) e Eq. (2.65) na Eq. (2.56) temos

$$\Phi(x) = A \cosh(\lambda_1 x) + B \sinh(\lambda_1 x) - A \cos(\lambda_2 x) - \frac{B\lambda_1}{\lambda_2} \sin(\lambda_2 x), \quad (2.66)$$

$$\Phi(x) = A[\cosh(\lambda_1 x) - \cos(\lambda_2 x)] + B \left[ \sinh(\lambda_1 x) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sin(\lambda_2 x) \right]. \quad (2.67)$$

Substituindo a Eq. (2.64) e Eq. (2.65) na segunda e terceira derivada da Eq. (2.56) com as condições de contorno do elemento estrutural temos

$$B\lambda_1\lambda_2 \sin(\lambda_2 L) + A\lambda_2^2 \cos(\lambda_2 L) + B\lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 L) + A\lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 L) = 0, \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} & [A(\lambda_2 \sin(\lambda_2 L) + \lambda_1 \sinh(\lambda_1 L)) - B(\lambda_1 \cos(\lambda_2 L) - \lambda_1 \cosh(\lambda_2 L))]k^2 \\ & - A(\lambda_2^3 \sin(\lambda_2 L) - \lambda_1^3 \sinh(\lambda_1 L)) \\ & + B(\lambda_1^3 \cosh(\lambda_1 L) - \lambda_1\lambda_2^2 \cos(\lambda_2 L)) = 0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Reorganizando as Equações com A e B em evidência conseguimos

$$A[\lambda_2^2 \cos(\lambda_2 L) + \lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 L)] + B[\lambda_1\lambda_2 \sin(\lambda_2 L) + \lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 L)] = 0, \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} & A[-\lambda_2^3 \sin(\lambda_2 L) + \lambda_1^3 \sinh(\lambda_1 L) + k^2\lambda_2 \sin(\lambda_2 L) + \lambda_1 \sinh(\lambda_1 L)] \\ & + B[\lambda_1^3 \cosh(\lambda_1 L) + \lambda_1\lambda_2^2 \cos(\lambda_2 L) + k^2(\lambda_1 \cos(\lambda_2 L) \\ & - \lambda_1 \cosh(\lambda_2 L))] = 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Para melhor compreensão e organização, podemos simplificar da seguinte maneira:

$$a_1 = \lambda_2^2 \cos(\lambda_2 L) + \lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 L), \quad (2.72)$$

$$b_1 = \lambda_1\lambda_2 \sin(\lambda_2 L) + \lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 L), \quad (2.73)$$

$$a_2 = -\lambda_2^3 \sin(\lambda_2 L) + \lambda_1^3 \sinh(\lambda_1 L) + k^2\lambda_2 \sin(\lambda_2 L) + \lambda_1 \sinh(\lambda_1 L), \quad (2.74)$$

$$b_2 = \lambda_1^3 \cosh(\lambda_1 L) + \lambda_1\lambda_2^2 \cos(\lambda_2 L) + k^2(\lambda_1 \cos(\lambda_2 L) - \lambda_1 \cosh(\lambda_2 L)). \quad (2.75)$$

Tendo então

$$A[a_1] + B[b_1] = 0, \quad (2.76)$$

$$A[a_2] + B[b_2] = 0. \quad (2.77)$$

Colocando a Eq. (2.70) e Eq. (2.71) na forma matricial e utilizando a simplificação demonstrada na Eq. (2.76) e (2.77), temos

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (2.78)$$

### 2.4.1 Frequência Natural de Vibração

A determinação das frequências naturais é fundamental para análise dinâmica. Portanto, nesta seção são desenvolvidos os equacionamentos a fim de obter uma equação característica apenas em função de  $\lambda_1$ , apresentando em seguida uma equação geral que descreve a frequência natural de vibração considerando a carga axial no elemento de forma analítica.

Relembrando as relações da Eq. (2.72), (2.73), (2.74) e (2.75) e calculando o determinante na Eq. (2.78) obtemos

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \lambda_2^4 + \lambda_1^5 + k^2 \lambda_1^3 - k^2 \lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_1^4 \lambda_2 \sinh(\lambda_1 L) \sen(\lambda_2 L) \\ & - k^2 \lambda_1^3 \cosh(\lambda_1 L) \cos(\lambda_2 L) + 2 \lambda_1^3 \lambda_2^2 \cosh(\lambda_1 L) \cos(\lambda_2 L) \\ & + \lambda_1^2 \lambda_2^3 \sinh(\lambda_1 L) \sen(\lambda_2 L) + k^2 \lambda_1 \lambda_2^2 \cosh(\lambda_1 L) \cos(\lambda_2 L) \\ & - 2k^2 \lambda_1^2 \lambda_2 \sinh(\lambda_1 L) \sen(\lambda_2 L) = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Dividindo Eq. (2.79) por  $\lambda_1$ , colocando  $\sinh(\lambda_1 L) \sen(\lambda_2 L)$  e  $\cosh(\lambda_1 L) \cos(\lambda_2 L)$  em evidencia temos

$$\begin{aligned} & (-2\lambda_1 k^2 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2^3 - \lambda_1^3 \lambda_2) \sinh(\lambda_1 L) \sen(\lambda_2 L) \\ & + (\lambda_2^2 k^2 + 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 k^2) \cosh(\lambda_1 L) \cos(\lambda_2 L) + \lambda_2^4 + \lambda_1^2 k^2 \\ & + \lambda_1^4 - \lambda_2^2 k^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Colocando a Eq. (2.49) e Eq. (2.50) em função de  $\beta^4$  temos respectivamente:

$$\beta^4 = k^2 \lambda_1^2 + \lambda_1^4, \quad (2.81)$$

$$\beta^4 = -k^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^4. \quad (2.82)$$

Dá subtração de funções obtemos

$$k^2 = \frac{\lambda_2^4 - \lambda_1^4}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}. \quad (2.83)$$

A raiz da Eq. (2.83) sendo real e positiva é

$$\lambda_2 = \sqrt{k^2 + \lambda_1^2}. \quad (2.84)$$

Substituindo a Eq. (2.84) na Eq. (2.80) temos a equação característica dada por

$$\begin{aligned} (-k^2\lambda_1)\sinh(L\lambda_1)\sin\left(L\sqrt{k^2 + \lambda_1^2}\right)\sqrt{k^2 + \lambda_1^2} \\ + \cosh(L\lambda_1)\cos\left(L\sqrt{k^2 + \lambda_1^2}\right)(k^4 + 2k^2\lambda_1^2 + 2\lambda_1^4) \\ + 2\lambda_1^2(k^2 + \lambda_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Relacionando a Eq. (2.47) com Eq. (2.81), para que fique em função de  $\lambda_1$ , temos a equação geral que descreve a frequência natural de vibração de uma viga considerando a carga interna do elemento de forma mais simplificada, sendo a mesma em função de  $EI$ ,  $\bar{m}$ ,  $k^2$  e  $\lambda_1$ , como:

$$w = \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}\beta^4 = \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}(k^2\lambda_1^2 + \lambda_1^4). \quad (2.86)$$

#### 2.4.2 Modos de Vibração

Em estudos relacionados à dinâmica de estruturas é fundamental a obtenção dos modos de vibração, portanto, nesta seção são desenvolvidos os equacionamentos a fim de obter uma equação geral que descreve os modos de vibrações de forma analítica.

“Os modos estão associados a estados de deflexão possíveis diante das condições de contorno.” (MORELATTO, 2000).

Dando um valor unitário  $A = 1$  na Eq. (2.78), obtemos;

$$B = \frac{-\lambda_2^2 \cos(\lambda_2 L) - \lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 L)}{\lambda_1 \lambda_2 \sin(\lambda_2 L) + \lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 L)}. \quad (2.87)$$

Substituindo  $A$  e  $B$  na Eq. (2.67) obtemos a equação dos modos de vibrações:

$$\Phi(x) = [\cosh(\lambda_1 x) - \cos(\lambda_2 x)] + B \left[ \sinh(\lambda_1 x) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sin(\lambda_2 x) \right]. \quad (2.88)$$

#### 2.4.3 Ortogonalidade dos Modos de Vibração - Normalizados à Massa

A equação descrita abaixo precisa ter seus modos normalizados à massa. Sendo assim, será necessário encontrar um fator de normalização para:

$$\Phi(x)^{iv} + \frac{P\Phi(x)''}{EI} - \frac{w^2\bar{m}\Phi(x)}{EI} = 0. \quad (2.89)$$

Tendo os modos  $i$  e  $g$  distintos, podemos representar a Eq. (2.89) como:

$$\Phi_i^{iv} + \frac{P\Phi_i''}{EI} - \frac{w_i^2\bar{m}\Phi_i}{EI} = 0, \quad (2.90)$$

$$\Phi_g^{iv} + \frac{P\Phi_g''}{EI} - \frac{w_g^2\bar{m}\Phi_g}{EI} = 0. \quad (2.91)$$

Podemos representar as equações sem modificar as propriedades matemáticas da seguinte forma:

$$\int_0^L \Phi_g \left( \Phi_i^{iv} + \frac{P\Phi_i''}{EI} - \frac{w_i^2\bar{m}\Phi_i}{EI} \right) dx = \Phi_g 0, \quad (2.92)$$

$$\int_0^L \Phi_i \left( \Phi_g^{iv} + \frac{P\Phi_g''}{EI} - \frac{w_g^2\bar{m}\Phi_g}{EI} \right) dx = \Phi_i 0. \quad (2.93)$$

Rearranjando, temos:

$$\int_0^L \Phi_g \Phi_i^{iv} dx + \int_0^L \frac{P\Phi_g \Phi_i''}{EI} dx = \int_0^L \frac{w_i^2\bar{m}\Phi_g \Phi_i}{EI} dx, \quad (2.94)$$

$$\int_0^L \Phi_i \Phi_g^{iv} dx + \int_0^L \frac{P\Phi_i \Phi_g''}{EI} dx = \int_0^L \frac{w_g^2\bar{m}\Phi_i \Phi_g}{EI} dx. \quad (2.95)$$

Lembrando que a propriedade de integral por parte é dada por:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (2.96)$$

Adotando para as integrais:

$$\int_0^L \Phi_g \Phi_i^{iv} dx:$$

$$\begin{cases} u = \Phi_g; & du = \Phi_g' dx \\ dv = \Phi_i^{iv} dx; & v = \Phi_i''' \end{cases} \quad (2.97)$$

$$(2.98)$$

$$\int_0^L \Phi_i \Phi_g^{iv} dx:$$

$$\begin{cases} u = \Phi_i; & du = \Phi_i' dx \\ dv = \Phi_g^{iv} dx; & v = \Phi_g''' \end{cases} \quad (2.99)$$

$$(2.100)$$

$$\int_0^L \frac{P\Phi_g \Phi_i''}{EI} dx:$$

$$\begin{cases} u = \frac{P}{EI} \Phi_g; & du = \frac{P}{EI} \Phi_g' dx \\ dv = \Phi_i'' dx; & v = \Phi_i' \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.101) \\ (2.102) \end{matrix}$$

$$\int_0^L \frac{P \Phi_i \Phi_g''}{EI} dx:$$

$$\begin{cases} u = \frac{P}{EI} \Phi_i; & du = \frac{P}{EI} \Phi_i' dx \\ dv = \Phi_g'' dx; & v = \Phi_g' \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.103) \\ (2.104) \end{matrix}$$

Aplicando integral por parte do lado esquerdo da igualdade das equações (2.94) e (2.95), obtemos:

$$\Phi_g \Phi_i''''|_0^L - \int_0^L \Phi_g' \Phi_i'''' dx + \frac{P}{EI} \Phi_g \Phi_i' \Big|_0^L - \int_0^L \frac{P}{EI} \Phi_i' \Phi_g' dx = \int_0^L \frac{w_i^2 \bar{m} \Phi_g \Phi_i}{EI} dx, \quad (2.105)$$

$$\Phi_i \Phi_g''''|_0^L - \int_0^L \Phi_i' \Phi_g'''' dx + \frac{P}{EI} \Phi_i \Phi_g' \Big|_0^L - \int_0^L \frac{P}{EI} \Phi_g' \Phi_i' dx = \int_0^L \frac{w_g^2 \bar{m} \Phi_i \Phi_g}{EI} dx. \quad (2.106)$$

Adotando em  $\int_0^L \Phi_g' \Phi_i'''' dx$ :

$$\begin{cases} u = \Phi_g'; & du = \Phi_g'' dx \\ dv = \Phi_i'''' dx; & v = \Phi_i''' \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.107) \\ (2.108) \end{matrix}$$

E  $\int_0^L \Phi_i' \Phi_g'''' dx$ :

$$\begin{cases} u = \Phi_i'; & du = \Phi_i'' dx \\ dv = \Phi_g'''' dx; & v = \Phi_g''' \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.109) \\ (2.110) \end{matrix}$$

Aplicando novamente integral por parte, mas agora em  $\int_0^L \Phi_g' \Phi_i'''' dx$  e  $\int_0^L \Phi_i' \Phi_g'''' dx$  das equações (2.105) e (2.106), obtemos

$$\begin{aligned} \Phi_g \Phi_i''''|_0^L - \Phi_g' \Phi_i''''|_0^L + \int_0^L \Phi_g'' \Phi_i'' dx + \frac{P}{EI} \Phi_g \Phi_i' \Big|_0^L - \int_0^L \frac{P}{EI} \Phi_i' \Phi_g' dx \\ = \int_0^L \frac{w_i^2 \bar{m} \Phi_g \Phi_i}{EI} dx, \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \Phi_i \Phi_g''''|_0^L - \Phi_i' \Phi_g''''|_0^L + \int_0^L \Phi_i'' \Phi_g'' dx + \frac{P}{EI} \Phi_i \Phi_g' \Big|_0^L - \int_0^L \frac{P}{EI} \Phi_g' \Phi_i' dx \\ = \int_0^L \frac{w_g^2 \bar{m} \Phi_i \Phi_g}{EI} dx. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Desenvolvendo a Eq. (2.111) e (2.112) temos

$$\begin{aligned}
& \Phi_g(L)\Phi_i'''(L) - \Phi_g(0)\Phi_i'''(0) - \Phi_g'(L)\Phi_i''(L) + \Phi_g'(0)\Phi_i''(0) + \int_0^L \Phi_g''\Phi_i'' dx \\
& + \frac{P}{EI}\Phi_g(L)\Phi_i'(L) - \frac{P}{EI}\Phi_g(0)\Phi_i'(0) - \int_0^L \frac{P}{EI}\Phi_i'\Phi_g' dx \\
& = \int_0^L \frac{w_i^2 \bar{m} \Phi_g \Phi_i}{EI} dx,
\end{aligned} \tag{2.113}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_i(L)\Phi_g'''(L) - \Phi_i(0)\Phi_g'''(0) - \Phi_i'(L)\Phi_g''(L) + \Phi_i'(0)\Phi_g''(0) + \int_0^L \Phi_i''\Phi_g'' dx \\
& + \frac{P}{EI}\Phi_i(L)\Phi_g'(L) - \frac{P}{EI}\Phi_i(0)\Phi_g'(0) - \int_0^L \frac{P}{EI}\Phi_g'\Phi_i' dx \\
& = \int_0^L \frac{w_g^2 \bar{m} \Phi_i \Phi_g}{EI} dx.
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Observando as condições de contorno apresentada nas equações (2.57) e (2.58):

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0 \text{ e } \Phi'(0) = 0 \\ \Phi''(L) = 0 \text{ e } \Phi'''(L) + k^2\Phi'(L) = 0 \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned}
& \Phi_g(L).\Phi_i'''(L) - 0.\Phi_i'''(0) - \Phi_g'(L).0 + 0.\Phi_i''(0) + \int_0^L \Phi_g''.\Phi_i'' dx \\
& + \frac{P}{EI}\Phi_g(L)\Phi_i'(L) - \frac{P}{EI}.0.\Phi_i'(0) - \int_0^L \frac{P}{EI}\Phi_i'\Phi_g' dx \\
& = \int_0^L \frac{w_i^2 \cdot \bar{m} \cdot \Phi_g \cdot \Phi_i}{E.I} dx,
\end{aligned} \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_i(L).\Phi_g'''(L) - 0.\Phi_g'''(0) - \Phi_i'(L).0 + 0.\Phi_g''(0) + \int_0^L \Phi_i''.\Phi_g'' dx \\
& + \frac{P}{EI}\Phi_i(L)\Phi_g'(L) - \frac{P}{EI}.0.\Phi_g'(0) - \int_0^L \frac{P}{EI}\Phi_g'\Phi_i' dx \\
& = \int_0^L \frac{w_g^2 \cdot \bar{m} \cdot \Phi_i \cdot \Phi_g}{E.I} dx.
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Eliminando os termos que vem acompanhados pela multiplicação por zero e reorganizando as equações, obtemos

$$\begin{aligned}
& \Phi_g(L).\Phi_i'''(L) + \frac{P}{EI}\Phi_g(L)\Phi_i'(L) + \int_0^L \Phi_g''.\Phi_i'' dx - \int_0^L \frac{P}{EI}\Phi_i'\Phi_g' dx \\
& = \int_0^L \frac{w_i^2 \cdot \bar{m} \cdot \Phi_g \cdot \Phi_i}{E.I} dx,
\end{aligned} \tag{2.117}$$

$$\begin{aligned} \Phi_i(L) \cdot \Phi_g'''(L) + \frac{P}{EI} \Phi_i(L) \Phi_g'(L) + \int_0^L \Phi_i'' \cdot \Phi_g'' dx - \int_0^L \frac{P}{EI} \Phi_g' \Phi_i' dx \\ = \int_0^L \frac{w_g^2 \cdot \bar{m} \cdot \Phi_i \cdot \Phi_g}{E \cdot I} dx. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Colocando alguns termos das equações em evidencia

$$\begin{aligned} \Phi_g(L) \cdot \left( \Phi_i'''(L) + \frac{P}{EI} \Phi_i'(L) \right) + \int_0^L \Phi_g'' \cdot \Phi_i'' dx - \int_0^L \frac{P}{EI} \Phi_i' \Phi_g' dx \\ = \int_0^L \frac{w_i^2 \cdot \bar{m} \cdot \Phi_g \cdot \Phi_i}{E \cdot I} dx, \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \Phi_i(L) \cdot \left( \Phi_g'''(L) + \frac{P}{EI} \Phi_g'(L) \right) + \int_0^L \Phi_i'' \cdot \Phi_g'' dx - \int_0^L \frac{P}{EI} \Phi_g' \Phi_i' dx \\ = \int_0^L \frac{w_g^2 \cdot \bar{m} \cdot \Phi_i \cdot \Phi_g}{E \cdot I} dx. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Recordando que em  $(x = L)$  temos  $\Phi''(L) = 0$  e  $\Phi'''(L) + k^2 \Phi'(L) = 0$  e que  $k^2 = \frac{P}{EI}$ :

$$\Phi_g(L) \cdot 0 + \int_0^L \Phi_g'' \cdot \Phi_i'' dx - \int_0^L \frac{P}{EI} \Phi_i' \Phi_g' dx = \int_0^L \frac{w_i^2 \cdot \bar{m} \cdot \Phi_g \cdot \Phi_i}{E \cdot I} dx, \quad (2.121)$$

$$\Phi_i(L) \cdot 0 + \int_0^L \Phi_i'' \cdot \Phi_g'' dx - \int_0^L \frac{P}{EI} \Phi_g' \Phi_i' dx = \int_0^L \frac{w_g^2 \cdot \bar{m} \cdot \Phi_i \cdot \Phi_g}{E \cdot I} dx. \quad (2.122)$$

Subtraindo a Eq. (2.121) da (2.122) temos

$$\begin{aligned} \int_0^L \Phi_g'' \cdot \Phi_i'' dx - \int_0^L \Phi_i'' \cdot \Phi_g'' dx - \int_0^L \frac{P}{EI} \Phi_i' \Phi_g' dx + \int_0^L \frac{P}{EI} \Phi_g' \Phi_i' dx \\ = \int_0^L \frac{w_i^2 \cdot \bar{m} \cdot \Phi_g \cdot \Phi_i}{E \cdot I} dx - \int_0^L \frac{w_g^2 \cdot \bar{m} \cdot \Phi_i \cdot \Phi_g}{E \cdot I} dx. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Observando que os termos do lado esquerdo da igualdade da Eq. (2.123) se anulam por serem iguais, podemos reescrever a equação como

$$(w_i^2 - w_g^2) \int_0^L \frac{\bar{m} \cdot \Phi_g \cdot \Phi_i}{E \cdot I} dx = 0. \quad (2.124)$$

Multiplicando  $EI$  por zero, temos a equação mais simplificada

$$(w_i^2 - w_g^2) \int_0^L \bar{m} \cdot \Phi_g \cdot \Phi_i dx = 0. \quad (2.125)$$

Para que a igualdade seja diferente de zero temos que  $w_i^2 \neq w_g^2$ , logo

$$\int_0^L \Phi_g \Phi_i \bar{m} dx = 0. \quad (2.126)$$

Se os modos são iguais a resultante da integral é uma constante

$$\int_0^L \Phi_i \Phi_i \bar{m} dx = c. \quad (2.127)$$

Para normalizar os modos à massa a necessidade de multiplica os modos por um fator  $\alpha$  em que a constante seja  $c = 1$ , tendo assim

$$\int_0^L \alpha \Phi_i \alpha \Phi_i \bar{m} dx = 1. \quad (2.128)$$

Portanto o fator  $\alpha$ , em relação à normalização dos modos à massa é dado por

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\int_0^L \Phi_i \Phi_i \bar{m} dx}}. \quad (2.129)$$

## 2.5 ANÁLISE DE FLAMBAGEM EM UM PILAR CURTO

Hibbler (2010) demonstra como analisar um elemento do tipo engastado-livre no que se refere à deflexão lateral:

$$\phi_p(x) = \delta \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) \right]. \quad (2.130)$$

Recordando que a carga crítica de Euler (casos perfeitos) do elemento engastado-livre ( $P_{crit}$ ) é dada por

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}, \quad (2.131)$$

tendo assim o modo de flambagem para o primeiro carregamento crítico dado por

$$\phi_p(x) = \delta \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{\pi^2}{4L^2}} x \right) \right], \quad (2.132)$$

isto é

$$\phi_p(x) = \delta \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2L} x \right) \right]. \quad (2.133)$$

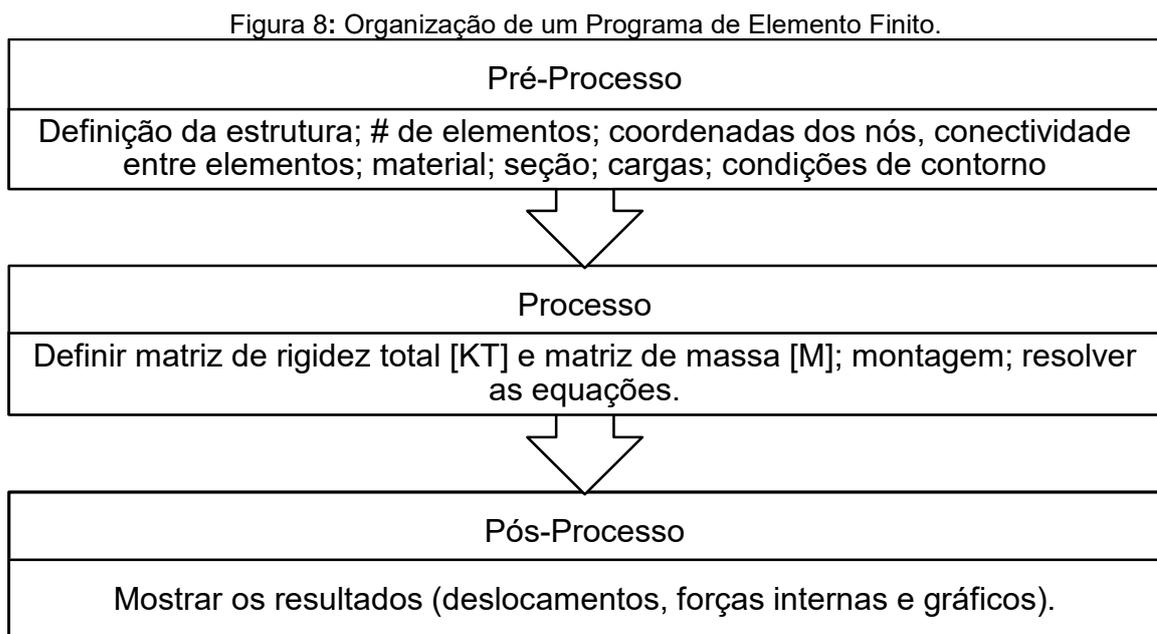
## 2.6 SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO EM VIBRAÇÃO LIVRE

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um artifício numérico de resolver equações diferenciais muito utilizados, resultando em programas computacionais naturalmente versáteis que podem ser úteis em praticamente todos os campos da análise de engenharia (AKIN, 2005).

O princípio do MEF é: dividir ou *discretizar* o sistema em vários elementos menores denominados elementos finitos (EFs); identificar os graus de liberdades (GLs) que descrevem seu comportamento; e depois escrever as equações que descrevem o comportamento de cada elemento e sua interação com os vizinhos (KIN e SANKAR, 2011).

Em geral, as soluções de problemas práticos de engenharia são muito complexas e não podem ser representadas com o uso de expressões simples, sendo necessária a solução aproximada com a utilização de um polinômio. Tal aproximação pode conter erros quando o tamanho de elemento for muito grande. Entretanto, à medida que o tamanho do elemento é reduzido, a solução aproximada convergirá para a solução exata, dadas certas condições de regularidades (PAZ e KIN, 2019).

O desenvolvimento de um programa de elementos finitos é representado na Figura 8.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Segundo Kim e Sankar (2011) há dois métodos de obtenção das equações de elementos finitos de um problema: o método de energia e método dos resíduos ponderados. O método de Galerkin é um dos métodos de resíduos ponderados e é adequado à maioria dos problemas.

### 2.6.1 Método dos Resíduos Ponderados – Solução Aproximada

O método dos resíduos ponderados busca encontrar uma solução aproximada  $\tilde{u}(x, t)$  para a Eq. (2.31). Como  $\tilde{u}(x, t)$  é uma aproximação da solução exata, ela não satisfará a equação diferencial na Eq. (2.31) e, em consequência, não será identicamente igual a zero. A função resultante é chamada então de resíduo e indicada por  $R(x)$ :

$$R(x) = EI\tilde{u}'''' + P\tilde{u}'' + \bar{m}\ddot{\tilde{u}} - P(x, t). \quad (2.134)$$

Sendo que, o erro ou o resíduo seja, o menor possível.

### 2.6.2 Método de Galerkin

A aplicação do método de Galerkin tratado nesta subseção assim como os conceitos do elemento viga-barra abordados na subseção seguinte é baseada em Kim (2011). Observando a Eq. (2.134), temos que a solução aproximada  $\tilde{u}(x, t)$  é representada como uma soma de várias funções chamadas funções de aproximações:

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{i=1}^N C_i \phi_i(x), \quad (2.135)$$

onde  $N$  é o número de termos utilizados,  $\phi_i(x)$  são as funções de aproximações conhecidas e  $C_i$  são coeficientes a serem determinados usando o método dos resíduos ponderados. As funções de aproximações e os coeficientes devem ser determinados de tal forma que  $\tilde{u}(x, t)$  satisfaça as condições de contorno essenciais do problema.

De acordo com Kim e Sankar (2011) no método de Galerkin as  $N$  funções peso,  $\phi_i(x)$ , são as mesmas que as  $N$  funções de aproximação. Assim sendo, temos:

$$\int_0^L R(x)\phi_i(x)dx = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.136)$$

Substituindo  $R(x)$  da Eq. (2.134), obtemos:

$$\int_0^L [EI\tilde{u}'v + P\tilde{u}'' + m\ddot{\tilde{u}} - P(x, t)]\phi_i(x)dx = 0, \quad (2.137)$$

ou

$$\int_0^L (EI\tilde{u}'v)\phi_i(x)dx + \int_0^L (P\tilde{u}'')\phi_i(x)dx + \int_0^L m\ddot{\tilde{u}}\phi_i(x)dx = \int_0^L P(x, t)\phi_i(x)dx. \quad (2.138)$$

Dividindo a Eq. (2.138) e resolvendo em quatro parcelas temos na primeira parcela a aplicação de Integral por partes, conforme ilustrado a seguir, para reduzir a ordem da diferenciação de  $\tilde{u}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^L (EI\tilde{u}'v)\phi_i(x)dx \\ = \left( EI \frac{\partial^3 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^3} \right) \phi_i(x) \Big|_0^L - \int_0^L \left( EI \frac{\partial^3 \tilde{u}(x, t)}{\partial x^3} \right) \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} dx = 0. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Novamente aplicando a Integral por partes temos:

$$EI \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^3} \phi_i(x) \Big|_0^L - EI \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \Big|_0^L + \int_0^L EI \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} dx = 0. \quad (2.140)$$

Observe que o termo no lado esquerdo da equação anterior tem o termo  $EI \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^3}$  e  $EI \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}$ . Por isso, relacionando a Eq. (2.140) com Eq. (2.28) e Eq. (2.29) temos:

$$-V(x, t) - P \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} \phi_i(x) \Big|_0^L + M(x, t) \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \Big|_0^L + \int_0^L EI \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} dx = 0. \quad (2.141)$$

Para reescrever a equação anterior em termos dos coeficientes desconhecidos  $C_i$ , é substituída a aproximação da Eq. (2.135). Em seguida utilizando as condições de contorno real dada na Eq. (2.57) e Eq. (2.58) obtém-se a primeira parcela da Eq. (2.138):

$$\begin{aligned} -[V(L)\phi_i(L) - V(0)\phi_i(0)] + \left[ M(L) \frac{\partial \phi_i(L)}{\partial x} - M(0) \frac{\partial \phi_i(0)}{\partial x} \right] \\ + \int_0^L EI \frac{\sum_{j=1}^N C_j \partial^2 \phi_j(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} dx - P \frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x} \phi_i(x) \Big|_0^L = 0. \end{aligned} \quad (2.142)$$

A segunda parcela da Eq. (2.138) é obtida com aplicação de integral por parte, para reduzir a ordem da diferenciação de  $\tilde{u}$ :

$$\int_0^L (Pu'') \phi_i(x) dx = P(x) \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial x} \phi_i(x) \Big|_0^L - \int_0^L P(x) \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial x} dx = 0. \quad (2.143)$$

A terceira parcela da Eq. (2.138) é obtida com aplicação de integral por parte, para reduzir a ordem da diferenciação de  $\tilde{u}$ :

$$\int_0^L m \ddot{\tilde{u}} \phi_i \phi_j(x) dx = 0. \quad (2.144)$$

A quarta parcela da Eq. (2.138) é dada por:

$$\int_0^L P(x,t) \phi_i(x) dx = 0. \quad (2.145)$$

Logo a Eq. (2.138) fica como:

$$\begin{aligned} & -[V(L)\phi_i(L) - V(0)\phi_i(0)] + \left[ M(L) \frac{\partial \phi_i(L)}{\partial x} - M(0) \frac{\partial \phi_i(0)}{\partial x} \right] \\ & + \int_0^L EI \frac{\sum_{j=1}^N C_j \partial^2 \phi_j(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} dx \\ & - \int_0^L P(x) \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial x} dx + \int_0^L m \ddot{\tilde{u}} \phi_i \phi_j(x) dx \\ & = \int_0^L P(x,t) \phi_i(x) dx. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Reorganizando:

$$\begin{aligned} & \int_0^L m \ddot{\tilde{u}} \phi_i \phi_j(x) dx + \int_0^L EI \frac{\sum_{j=1}^N C_j \partial^2 \phi_j(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} dx \\ & - \int_0^L P(x) \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\sum_{j=1}^N C_j \phi_j(x)}{\partial x} dx \\ & = \int_0^L P(x,t) \phi_i(x) dx + [V(L)\phi_i(L) - V(0)\phi_i(0)] \\ & - \left[ M(L) \frac{\partial \phi_i(L)}{\partial x} - M(0) \frac{\partial \phi_i(0)}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (2.147)$$

As  $N$  equações anteriores podem ser escritas na forma matricial:

$$[M]\{\ddot{u}\} + ([K_{eviga}] + [K_{gvinga}])\{u\} = \{f_{neq}\} + \{f_n\}. \quad (2.148)$$

Recordando que o vetor  $\{F_e\}$  é o vetor de forças nodais do elemento, igual a:

$$\{F_e\} = \{F_n\} + \{F_{neq}\} \quad (2.149)$$

Sendo  $\{F_n\}$  o vetor de forças diretamente aplicados nos nós do elemento e  $\{F_{neq}\}$  o vetor de forças nodais equivalentes das forças distribuídas ao longo do elemento.

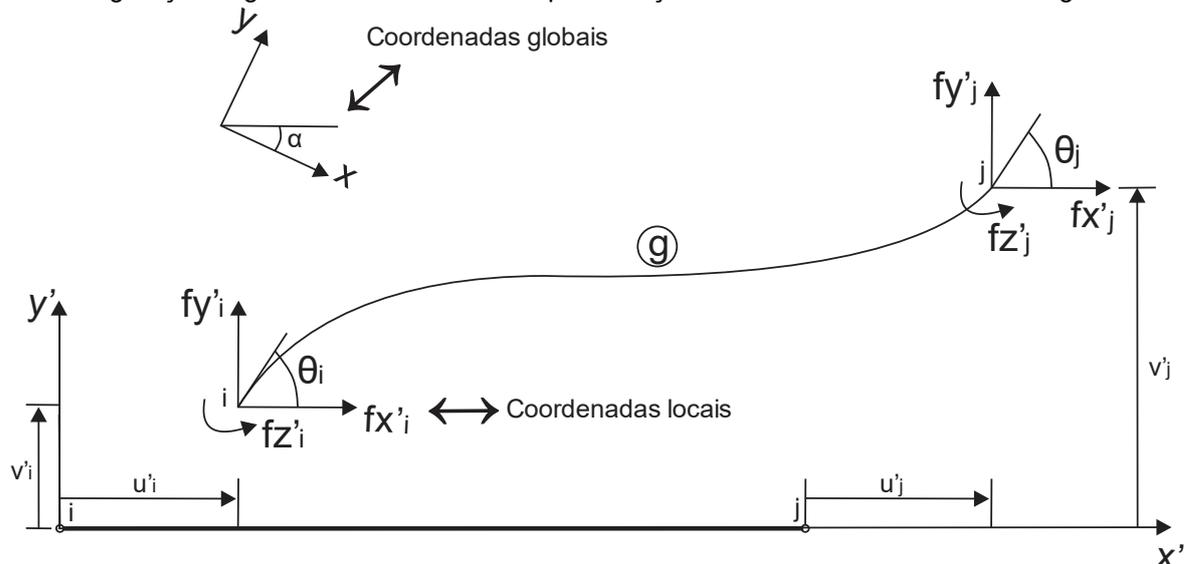
### 2.6.3 Elemento de Viga-barra

Um elemento plano, além de forças axiais, pode estar sujeito a esforços cortantes e momento fletor. Assim, um elemento plano combina a ação de uma barra de treliça (uniaxial) e de uma viga, denominada elemento do tipo viga-barra, isto é, às estruturas em que os nós estão ligados de forma rígidas.

Apresenta-se na Figura 9 um elemento do tipo viga-barra genérico de uma estrutura reticulada plana, assim como indicado os seus graus de liberdade, os deslocamentos e as rotações nos nós, os carregamentos, as forças e os momentos nos nós.

A cada nó ( $i$  e  $j$ ) do elemento “ $g$ ”, com comprimento  $L$ , secção transversal com área  $A$ , momento de inércia  $I$  e módulo de elasticidade  $E$ , associam-se três graus de liberdade (GL, ou DOF),  $u'$ ,  $v'$ , e  $\theta$ . Consequentemente, cada nó tem associadas duas componentes de forças e um momento:  $f_{x'}$ ,  $f_{y'}$  e  $f_{z'}$ .

Figura 9: Elemento do tipo viga-barra genérico “ $g$ ” de uma estrutura reticulada plana em sua configuração original e deformada com representação dos sistemas de eixos local e global.



Fonte: Adaptado de Dias-Teixeira *et al.*, 2010.

Observa-se na Figura 9 um caso genérico de um elemento “ $g$ ”, em que é necessário estabelecer todas as matrizes de rigidez em coordenadas coincidentes, globais. Para isso transformam-se os deslocamentos locais em globais, da seguinte maneira:

Tendo as forças e os deslocamentos como vetores, podemos encontrar a relação das forças  $\{\bar{f}\}$  em coordenadas locais com às forças  $\{f\}$  em coordenadas globais, assim como a relação entre os deslocamentos locais e globais, como mostrado por Kin e Sankar (2011):

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} f_{\bar{x}i} \\ f_{\bar{y}i} \\ f_{\bar{z}i} \\ f_{\bar{x}j} \\ f_{\bar{y}j} \\ f_{\bar{z}j} \end{Bmatrix}}_{\text{Local}} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{z1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{z2} \end{Bmatrix}}_{\text{Global}}$$

Matriz transformação  
 $\{\bar{f}\} = [T]\{f\}$

(2.150)

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix}}_{\text{Local}} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}}_{\text{Global}}$$

Matriz transformação  
 $\{\bar{q}\} = [T]\{q\}$

(2.151)

onde  $\{\bar{q}\}$  são os graus de liberdade do elemento em coordenadas locais e  $\{q\}$  em coordenadas globais. Nota-se que a matriz de transformação  $[T]$ , também denominada em alguns livros por matriz de rotação do elemento  $g$  é uma função dos cossenos diretores.

Para que se tenha o conhecimento da matriz de rigidez, matriz elástica e matriz de massa do elemento genérico é preciso recordar a relação da Eq. (2.147) e adotar as funções de aproximações conhecidas. Sendo assim, as funções de forma são dadas por polinômios de terceiro grau, no qual pode ser encontradas com maiores detalhes e deduções em Paz e Kin (2019):

$$\tilde{u}(x) = \phi_1(x)v'_i + \phi_2(x)\theta_i + \phi_3(x)v'_j + \phi_4(x)\theta_j, \quad (2.152)$$

$$\phi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, \quad (2.153)$$

$$\phi_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, \quad (2.154)$$

$$\phi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3, \quad (2.155)$$

$$\phi_4(x) = \frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}. \quad (2.156)$$

Para o sistema de coordenadas locais, a relação força-deslocamento estão relacionados pela matriz de rigidez de um elemento do tipo barra uniaxial, como pode-se observar em Dias-Teixeira et al. (2010):

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{\bar{x}i} \\ f_{\bar{x}j} \end{Bmatrix} \quad (2.157)$$

De outro modo, Kin e Sankar (2011) demonstra que a força transversal e o momento estão relacionados aos deslocamentos transversal e à rotação pela matriz de rigidez da flexão, da seguinte forma:

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{\bar{y}1} \\ f_{\bar{z}1} \\ f_{\bar{y}2} \\ f_{\bar{z}2} \end{Bmatrix} \quad (2.158)$$

Sendo o elemento plano como combinação dos elementos de treliça bidimensional (barra) e de viga. Combinando as Eqs. (2.157) e (2.158), obtemos uma relação entre os graus de liberdade e as forças no sistema de coordenadas locais:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 12a_2 & 6La_2 & 0 & -12a_2 & 6La_2 \\ 0 & 6La_2 & 4L^2a_2 & 0 & -6La_2 & 2L^2a_2 \\ -a_1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12a_2 & -6La_2 & 0 & 12a_2 & -6La_2 \\ 0 & 6La_2 & 2L^2a_2 & 0 & -6La_2 & 4L^2a_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{\bar{x}1} \\ f_{\bar{y}1} \\ f_{\bar{z}1} \\ f_{\bar{x}2} \\ f_{\bar{y}2} \\ f_{\bar{z}2} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} a_1 = \frac{AE}{L} \\ a_2 = \frac{EI}{L^3} \end{matrix} \quad (2.159)$$

onde  $\bar{k}$  é a matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas locais.

(2.159) não pode ser usada para a montagem porque diferentes elementos têm diferentes sistemas de coordenadas locais. Assim, a equação da matriz do elemento deve ser transformada para o sistema de coordenadas globais. Substituindo  $\{\bar{f}\}$  e  $\{\bar{q}\}$  da Eq. (2.150) e (2.151), temos

$$[\bar{k}][T]\{q\} = [T]\{f\}. \quad (2.160)$$

Multiplicando ambos os lados por  $[T]^{-1}$ , temos

$$[T]^{-1}[\bar{k}][T]\{q\} = \{f\}. \quad (2.161)$$

Para a matriz de transformação  $[T]^T = [T]^{-1}$ , podemos descrever a Eq. (2.161) como

$$[T]^T[\bar{k}][T]\{q\} = \{f\}, \quad (2.162)$$

ou

$$[k]\{q\} = \{f\}. \quad (2.163)$$

onde  $[T]^T[\bar{k}][T] = \{k\}$ , é a matriz de rigidez do elemento de um plano no sistema de coordenadas globais.

Ainda, tem-se que:  $\theta_x = \text{ArcCos}\left[\frac{xf-xi}{L}\right]$ ,  $\theta_y = \text{ArcCos}\left[\frac{yf-yi}{L}\right]$  e  $\theta_z = \text{ArcCos}\left[\frac{zf-zi}{L}\right]$ . Esses cossenos diretores podem ser calculados a partir do comprimento do elemento  $L$  e das coordenadas nodais, da seguinte forma:

$$L = \sqrt{(xf - xi)^2 + (yf - yi)^2 + (zf - zi)^2} \quad (2.164)$$

$$\cos \theta = l = \frac{xf - xi}{L} \quad ; \quad \text{sen } \theta = m = \frac{yf - yi}{L} \quad ; \quad n = \frac{zf - zi}{L} \quad (2.165)$$

Para a análise de frequências naturais e seus modos, há necessidade de conhecimento das matrizes do elemento estrutural, recordando a relação da Eq. (2.147) e com as funções de aproximações conhecidas Eq. (2.152), temos:

$$K_{ij} = EI \int_0^L \frac{\partial^2 \phi_j(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} dx = [K_{eviga}], \quad (2.166)$$

$$[K_{eviga}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (2.167)$$

$$[K_{gbarra}] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.168)$$

$$K_{gij} = - \int_0^L P(x) \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} dx = [K_{gviga}], \quad (2.169)$$

$$[K_{gviga}] = \begin{bmatrix} \frac{-6P}{5L} & \frac{-P}{10} & \frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} \\ \frac{-P}{10} & \frac{-2PL}{15} & \frac{P}{10} & \frac{PL}{30} \\ \frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} & \frac{-6P}{5L} & \frac{P}{10} \\ \frac{P}{10} & \frac{PL}{30} & \frac{-6P}{5L} & \frac{-2PL}{15} \end{bmatrix}. \quad (2.170)$$

onde,  $[K_{eviga}]$  é a matriz de rigidez elástica do elemento no sistema de coordenadas locais (viga),  $[K_{gbarra}]$  é a matriz de rigidez geométrica do elemento no sistema de coordenadas locais (barra) e  $[K_{gviga}]$  é a matriz de rigidez geométrica do elemento no sistema de coordenadas locais (viga).

Obtemos assim a matriz de rigidez total do pórtico em coordenadas locais  $[K_T]$  pela combinação dos elementos de treliça bidimensional (barra) e (viga):

$$[K_T] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 12a_2 - \frac{6P}{5L} & 6La_2 - \frac{P}{10} & 0 & -12a_2 + \frac{6P}{5L} & 6La_2 - \frac{P}{10} \\ 0 & 6La_2 + \frac{-P}{10} & 4L^2a_2 - \frac{2PL}{15} & 0 & -6La_2 + \frac{P}{10} & 2L^2a_2 + \frac{PL}{30} \\ -a_1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12a_2 + \frac{6P}{5L} & -6La_2 + \frac{P}{10} & 0 & 12a_2 - \frac{6P}{5L} & -6La_2 + \frac{P}{10} \\ 0 & 6La_2 - \frac{P}{10} & 2L^2a_2 + \frac{PL}{30} & 0 & -6La_2 + \frac{P}{10} & 4L^2a_2 - \frac{2PL}{15} \end{bmatrix}, \quad (2.171)$$

sendo

$$a_1 = \frac{AE}{L}, \quad (2.172)$$

$$a_2 = \frac{EI}{L^3}. \quad (2.173)$$

Em seguida há necessidade do conhecimento da matriz de massa, no qual recordando a relação da Eq. (2.147) e com as funções de aproximações conhecidas Eq. (2.152), temos:

$$M_{ij} = \int_0^L m \ddot{u} \phi_i \phi_j(x) dx = [M_1], \quad (2.174)$$

$$[M_1] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (2.175)$$

$$[M_2] = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \quad (2.176)$$

onde,  $[M_1]$  é a matriz de massa consistente no sistema de coordenadas locais (Viga) e  $[M_2]$  é a matriz de massa consistente no sistema de coordenadas locais (barra).

Obtendo  $[M]$  pela combinação de  $M_1$  com  $M_2$ :

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}a_3 & 0 & 0 & \frac{1}{6}a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 156a_4 & 22La_4 & 0 & 54a_4 & -13La_4 \\ 0 & 22La_4 & 4L^2a_4 & 0 & 13La_4 & -3L^2a_4 \\ \frac{1}{6}a_3 & 0 & 0 & \frac{1}{3}a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 54a_4 & 13La_4 & 0 & 156a_4 & -22La_4 \\ 0 & -13La_4 & -3L^2a_4 & 0 & -22La_4 & 4L^2a_4 \end{bmatrix}, \quad (2.177)$$

sendo

$$a_3 = \rho AL, \quad (2.178)$$

$$a_4 = \frac{\rho AL}{420}. \quad (2.179)$$

## 2.7 ANÁLISE MODAL E ANÁLISE DE FLAMBAGEM

Sendo a equação dinâmica, para o estudo de vibração livre não amortecida nomeada segundo Paz e Kin (2019) por

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K_T]\{u\} = \{f_n\}, \quad (2.180)$$

onde,  $[M]$  é a matriz de massa,  $[K_T]$  é a matriz de rigidez total,  $\{f_n\}$  é o vetor de forças externas,  $\{\ddot{u}\}$  é a aceleração e  $\{u\}$  é o vetor de deslocamentos físicos.

Podemos aplicar Laplace para obtenção das frequências e modos de vibração em função da matriz de massa, como segue:

$$[M]s^2\{u(s)\} + [K_T]\{u(s)\} = \{P(s)\}, \quad (2.181)$$

$$\{u(s)\}([M]s^2 + [K_T]) = \{P(s)\}, \quad (2.182)$$

$$\{u(s)\} = \frac{1}{([M]s^2 + [K_T])} \{P(s)\}, \quad (2.183)$$

$$\{u(s)\} = \{H(s)\}\{P(s)\}. \quad (2.184)$$

Logo:

$$\{H(s)\} = \frac{1}{([M]s^2 + [K_T])}. \quad (2.185)$$

Há duas propriedades para que  $\{H(s)\}$  seja singular. Primeiro que o determinante seja igual a zero e segundo o vetor seja um vetor não nulo.

Seja  $[K_T]$  uma matriz em  $M(n, n)$ . Um escalar  $\lambda_n$  é um autovalor de  $[K_T]$  se existir um vetor  $\{\phi_n\}$  (se  $\{\phi_n\}$  for não nulo). Os vetores que respeitam essa equação são chamados de autovetores, isto é, o vetor  $\{\phi_n\}$  é chamado de autovetor associado a  $\lambda_n$ :

$$[K_T]\{\phi_n\} = \lambda_n\{\phi_n\}, \quad (2.186)$$

$$[K_T]\{\phi_n\} - \lambda_n\{\phi_n\} = 0. \quad (2.187)$$

Rearranjando de forma mais conveniente temos:

$$([K_T] - \lambda_n[M])\{\phi_n\} = 0, \quad (2.188)$$

ou ainda

$$([M]^{-1}[K_T] - \lambda_n)\{\phi_n\} = 0. \quad (2.189)$$

Tendo a matriz de rigidez total do elemento estrutural (" $K_T$ ") e a matriz de massa (" $M$ ") e considerando as condições de contorno, há separação das matrizes de rigidez total do elemento finito e a matriz de massa total.

Para que se tenha uma solução dos autovalores é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja zero, ou seja,

$$\det([K_T] - \lambda_n[M]) = 0. \quad (2.190)$$

O que resulta em um polinômio de grau  $n$  em  $\lambda_n$ . As raízes do polinômio são os autovalores da matriz  $[K_T]$ , recordando que  $[K_T] = [K_e] - P[K_g]$ .

Para que se tenha uma solução dos autovetores basta substituir o valor dos autovalores na equação original. Os autovalores serão, então, associados aos autovetores encontrados:

$$([K_T] - \lambda_n[M])\{\phi_{pn}\} = 0, \quad (2.191)$$

$$\lambda_n = w_n^2. \quad (2.192)$$

Sendo assim os valores de  $\lambda_n = w_n^2$  são os resultados dos autovalores e os resultados de  $\{\phi_{pn}\}$  são os autovetores correspondentes, sendo os modos de vibrações com a contribuição do carregamento externo, em que  $w_n$  é a frequência natural de vibração da estrutura.

A análise modal sem carregamento é quando  $[K_T]$  é igual a  $[K_e]$ , isto é, sem a influência do carregamento, nesse caso as tensões axiais internas nos elementos não existem e a matriz geométrica é nula, dessa forma.

$$([K_e] - \lambda_n[M])\{\phi_n\} = 0. \quad (2.193)$$

Sendo assim os valores de  $\lambda_n = w_n^2$  são os resultados dos autovalores e os resultados de  $\{\phi_n\}$  são os autovetores correspondentes, sendo os modos de vibrações sem a contribuição do carregamento externo, em que  $w_n$  é a frequência natural de vibração da estrutura.

A análise de flambagem é geralmente usada para estimar a carga crítica (bifurcação) de estruturas "rígidas". Pode ser o primeiro passo na análise de uma estrutura descarregada ou pode ser executada após a estrutura ter sido pré-carregada - se a estrutura tiver sido pré-carregada, a carga de flambagem do estado pré-carregado será calculada. Em um problema de flambagem, procuramos as cargas para as quais a matriz de rigidez do modelo se torna singular, de modo que o problema é apresentado por Braga (2015),

$$([K_e] - \alpha[K_g])\{\phi_p\} = 0, \quad (2.194)$$

em que a determinação de  $\alpha$  fornece uma aproximação do carregamento crítico e consequentemente do modo crítico  $\{\phi_p\}$ , ou mesmo modos de flambagem.

### 2.7.1 Ortogonalidade dos Modos de Vibração - Normalizados à Massa

As propriedades de ortogonalidade de um sistema não amortecido de vários graus de liberdade podem ser manifestadas conforme apresentado por Paz e Kin

(2019), assim como demonstrado por Morrelatto (2000) que as formas modais de uma viga satisfazem a condição de ortogonalidade. Considerando o  $i$  – *esimo* e  $g$  – *esimo* modo do sistema, a Eq. (2.191) torna-se:

$$[K_T] - w_{ni}^2[M]\{\phi_i\} = 0, \quad (2.195)$$

$$[K_T] - w_{ng}^2[M]\{\phi_g\} = 0. \quad (2.196)$$

Pré-multiplicando a primeira equação por  $\{\phi_g\}^T$  e pós-multiplicamos a transposta da segunda por  $\{\phi_i\}$  obtendo assim

$$\{\phi_g\}^T ([K_T] - w_{ni}^2[M])\{\phi_i\} = 0, \quad (2.197)$$

$$\{\phi_i\}^T ([K_T] - w_{ng}^2[M])\{\phi_g\} = 0. \quad (2.198)$$

Rearranjando, temos:

$$\{\phi_g\}^T [K_T]\{\phi_i\} = w_{ni}^2\{\phi_g\}^T [M]\{\phi_i\}, \quad (2.199)$$

$$\{\phi_i\}^T [K_T]\{\phi_g\} = w_{ng}^2\{\phi_i\}^T [M]\{\phi_g\}. \quad (2.200)$$

Transpondo a Eq. (2.199) e lembrando que  $[k] = [k]^T$  e  $[M] = [M]^T$ , obtém-se:

$$\{\phi_i\}^T [K_T]\{\phi_g\} = w_{ni}^2\{\phi_i\}^T [M]\{\phi_g\}. \quad (2.201)$$

Subtraindo a Eq. (2.201) de (2.200):

$$0 = (w_{ni}^2 - w_{ng}^2)\{\phi_i\}^T [M]\{\phi_g\}. \quad (2.202)$$

Então para  $w_i \neq w_j$ , os modos ortogonais podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$0 = \{\phi_i\}^T [M]\{\phi_g\}. \quad (2.203)$$

Tendo os seguintes princípios

$$[\phi]^T [\phi] = [I], \quad (2.204)$$

$$[\phi]^T = [\phi]^{-1}. \quad (2.205)$$

Pode-se representar que:

$$\{\phi_i\}^T [M]\{\phi_i\} = c. \quad (2.206)$$

Normalizar a massa ao modo de vibração, em que  $c = 1$ , temos:

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = 1, \quad (2.207)$$

ou

$$[\phi_i]^T [M] [\phi_i] = [I]. \quad (2.208)$$

Deve-se multiplicar por um fator os modos de vibrações para que a igualdade se estabeleça:

$$\alpha_i \{\phi_i\}^T [M] \alpha_i \{\phi_i\} = 1, \quad (2.209)$$

$$\alpha_i^2 = \frac{1}{\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}}, \quad (2.210)$$

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}}}. \quad (2.211)$$

O modo normalizado a massa  $\{\bar{\phi}_i\}$  pode ser obtido como:

$$\{\bar{\phi}_i\} = \frac{\{\phi_i\}}{\sqrt{\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}}}. \quad (2.212)$$

Portanto se os modos fossem iguais e normalizados a massa teríamos que:

$$\{\phi_i\}^T [K_T] \{\phi_i\} = w_{ni}^2 \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\}. \quad (2.213)$$

Relacionando a Eq. (2.213) Com a Eq. (2.207) temos que:

$$\{\phi_i\}^T [K_T] \{\phi_i\} = w_{ni}^2, \quad (2.214)$$

ou

$$[\phi_i]^T [K_T] [\phi_i] = \begin{bmatrix} w_{n1}^2 & & \\ & w_{n2}^2 & \\ & & w_n^2 \end{bmatrix}, \quad (2.215)$$

$$\{\phi_i\}^T [K_T] \{\phi_i\} = [I]. \quad (2.216)$$

### 2.7.2 Deslocamento em Função de Frequência Natural e Modo de Vibração

Para encontrar o deslocamento em função de frequência natural de vibração e seus modos, foi necessário um devido desenvolvimento em que resultou no produto deste trabalho, conforme o seguinte:

$$\{u\} = [\phi] \{q\}. \quad (2.217)$$

Temos que

$$u_1 = \phi_{11}q_1 + \phi_{12}q_2 + \dots + \phi_{1n}q_n, \quad (2.218)$$

$$u_2 = \phi_{21}q_1 + \phi_{22}q_2 + \dots + \phi_{2n}q_n, \quad (2.219)$$

$$u_n = \phi_{n1}q_1 + \phi_{n2}q_2 + \dots + \phi_{nn}q_n. \quad (2.220)$$

De forma geral

$$\{u\} = \{\phi_1\}q_1 + \{\phi_2\}q_2 + \dots + \{\phi_n\}q_n. \quad (2.221)$$

Relacionando Eq. (2.180) com (2.217), obtemos

$$[M][\phi]\{\ddot{q}\} + [K_T][\phi]\{q\} = \{f_n\}. \quad (2.222)$$

Multiplicando todos os fatores por  $[\phi]^T$  temos:

$$[\phi]^T[M][\phi]\{\ddot{q}\} + [\phi]^T[K_T][\phi]\{q\} = [\phi]^T\{f_n\}. \quad (2.223)$$

Combinando a Eq. (2.223) com (2.214) e (2.216), obtemos

$$[I]\{\ddot{q}\} + w^2_{ni}\{q\} = [\phi]^T\{f_n\}. \quad (2.224)$$

Logo

$$\ddot{q}_1 + w^2_{n1}q_1 = \phi_{11}f_1(t) + \phi_{21}f_2(t) + \dots + \phi_{n1}f_n(t), \quad (2.225)$$

$$\ddot{q}_2 + w^2_{n2}q_2 = \phi_{12}f_1(t) + \phi_{22}f_2(t) + \dots + \phi_{n2}f_n(t), \quad (2.226)$$

$$\ddot{q}_n + w^2_{n2}q_n = \phi_{1n}f_1(t) + \phi_{2n}f_2(t) + \dots + \phi_{nn}f_n(t). \quad (2.227)$$

Rearranjando e tendo na análise estática que  $\ddot{q}_1 = 0$ ,  $\ddot{q}_2 = 0$  e  $\ddot{q}_n = 0$  obtemos:

$$q_1 = \frac{\{\phi_1\}^T\{f(t)\}}{w^2_{n1}} \quad (2.228)$$

$$q_2 = \frac{\{\phi_2\}^T\{f(t)\}}{w^2_{n2}} \quad (2.229)$$

$$q_n = \frac{\{\phi_n\}^T\{f(t)\}}{w^2_{nn}} \quad (2.230)$$

Relacionando as equações (2.228), (2.229) e (2.230) com a Eq. (2.217) temos um equacionamento capaz de calcular os deslocamentos a partir dos modos de vibrações e as frequências naturais de vibração:

$$u = \{\phi_1\} \frac{\{\phi_1\}^T \{f(t)\}}{w_{n1}^2} + \{\phi_2\} \frac{\{\phi_2\}^T \{f(t)\}}{w_{n2}^2} + \dots + \{\phi_n\} \frac{\{\phi_n\}^T \{f(t)\}}{w_{nn}^2} \quad (2.231)$$

Considerando a contribuição de “n” frequências é possível aproximar os deslocamentos a partir dos modos de vibrações e das frequências naturais de vibração, da seguinte maneira:

$$u \approx \sum_{i=1}^n \{\phi_i\} \frac{\{\phi_i\}^T \{f(t)\}}{w_{ni}^2} \quad (2.232)$$

## 2.8 ANÁLISE P-DELTA ITERATIVO

Neste capítulo será descrito a rotina básica utilizada no elemento finito deste trabalho para a análise P-delta iterativo, no qual, na verdade não se trata do tradicional P-delta iterativo descrito no item 2.2.1, mas sim de um processo numérico mais rigoroso, em que se realiza um processo iterativo. No qual o software CAD/TQS utiliza-se de uma análise iterativa semelhante, alguns conceitos podem ser acessados em um de seus artigos no site oficial do software, dado como “Módulo TQS para análise não linear geométrica de pórticos espaciais” em: (MEDEIROS, 2020).

No primeiro passo, são calculado os deslocamentos devido as cargas totais divididas pelo número de passos, ou seja,  $\{\delta T(:,1)\} = [K_T]^{-1} \Delta \{F_e\}$ , em que  $\Delta \{F_e\}$  expressa os deslocamentos para um primeiro delta de carga, sendo pré-determinado o número de passos de carga “nstep” e  $[K_T]$  inicialmente é definido como a matriz de rigidez global da estrutura a clássica matriz de rigidez elástica linear, considerando condições de contorno, ( $[K_T] = [K_e]$ ). Nos demais é calculada os deslocamentos, utilizando a matriz de rigidez total da estrutura, isto é,  $\{\Delta \delta 2\} = [K_T]^{-1} \{F_T\}$ , sendo  $[K_T]$  uma nova matriz de rigidez total dada por  $[K_T] = [K_T] + [K_g]$ , onde  $[K_g]$  é a matriz de rigidez geométrica que leva em consideração os esforços axiais nos elementos e  $\{F_T\}$  o novo vetor de forças nodais, igual a  $\{F_T\} = \Delta \{F_e\} + \{F_p\}$ , sendo  $\{F_p\}$  igual ao vetor de cargas nodais (cortante e momento) devido as forças internas axiais na condição deformada, para  $i=2:nstep$ , *erro* = 1 enquanto o erro > 1e-2.

Note que para cada passo de carga é feito uma iteração, até chegar num erro pré-determinado, isto é, até que o erro do deslocamento posterior esteja dentro do limite (erro > 1e-2).

Em seguida é calculado o deslocamento total no passo de carga,  $\{\delta T(:, i)\} = \{\delta T(:, i - 1)\} + \{\Delta\delta 2\}$ , ou seja, vai somando o deslocamento do passo posterior com o deslocamento do passo anterior.

A Rotina básica utilizada no elemento finito deste trabalho é dado em etapas para melhor compreensão, sendo elas:

1. Definir o número de passos de carga,  $nstep$ .
2. Definir a matriz de rigidez global da estrutura, considerando condições de contorno  $[K_T] = [K_e]$ .
3. Definir o vetor de cargas nodais globais, considerando condições de contorno  $\{F_e\}$ .
4. Calcular os deslocamentos para um primeiro delta de carga,  $\Delta\{F_e\} = \frac{\{F_e\}}{nstep}$ ,

$$\{\delta T(:, 1)\} = [K_T]^{-1} \Delta\{F_e\}.$$

5. For  $i=2:nstep$

$erro = 1$

while  $erro > 1e-2$

- Definir a matriz de rigidez geométrica  $[K_g]$  para os deslocamentos  $\Delta\delta 1$ .
- Definir o vetor de cargas nodais (cortante e momento) devido as forças internas axiais na condição deformada  $\{F_p\}$ .
- Novo vetor de forças nodais.
- $\{F_T\} = \Delta\{F_e\} + \{F_p\}$
- Nova matriz de rigidez total.
- $[K_T] = [K_T] + [K_g]$
- Calcular os deslocamentos.
- $\{\Delta\delta 2\} = [K_T]^{-1} \{F_T\}$
- $erro = \sum(\{\Delta\delta 1\} - \{\Delta\delta 2\})^2$
- $\{\Delta\delta 1\} = \{\Delta\delta 2\}$

End

Calcular o deslocamento total no passo de carga.

$$\{\delta T(:, i)\} = \{\delta T(:, i - 1)\} + \{\Delta\delta 2\}$$

End

### 3 RESULTADOS

#### 3.1 PILAR

Para a modelagem numérica e analítica, a fim de obter a relação das características dinâmicas (frequências naturais e modos de vibração) com a carga axial, assim como obter a compreensão de que quando a carga crítica é igual a carga axial, o modo de vibração na carga crítica é igual ao modo de flambagem, podendo ser estabelecido uma relação entre eles, escolheu-se um modelo estrutural mais simples como um pilar de concreto armado. Sendo o modelo dado por um pilar engastada na base, (Ver Figura 10) com propriedades apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 Propriedades do pilar

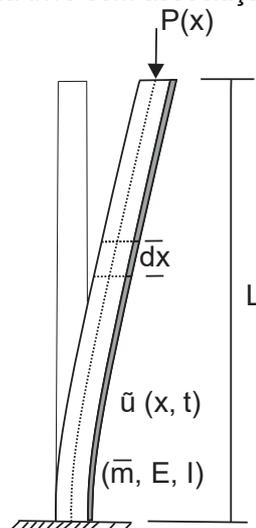
<b>Comprimento (L)</b>	<b>3</b>	<b>(m)</b>
<b><math>\bar{m} = \rho A</math></b>	100	(kg/m <sup>2</sup> )
<b>módulo de elasticidade (E)</b>	1,00E+07	(N/m <sup>2</sup> )
<b>Seção transversal</b>	0,04	(m <sup>2</sup> )
<b>Inércia (I)</b>	0,000133	(m <sup>4</sup> )

Fonte: O autor, 2019.

A incógnita representada por  $\bar{m}$  é igual à massa específica do concreto ( $\rho$ ) multiplicado pela área da seção transversal ( $A$ ) do elemento escolhido.

A massa específica do concreto utilizado seguiu recomendações da NBR 6118:2014 para concreto armado quando não for reconhecida a massa específica real, sendo de 2500Kg/m<sup>3</sup>.

Figura 10: Barra engastada-livre com associação do deslocamento  $\tilde{u}(x, t)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

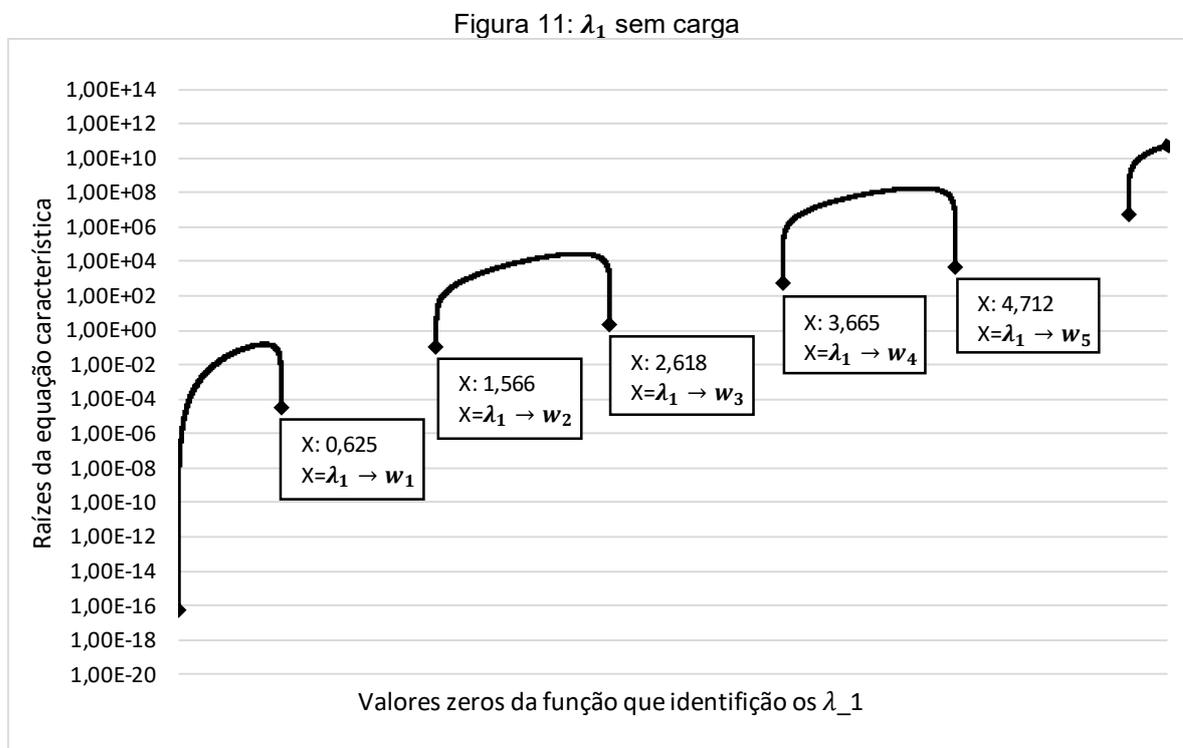
A seção transversal do elemento apresentado na Figura 10 é dado por 0,2m de comprimento por 0,2m de largura. E a inércia dada por:

$$I = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}^3}{12} \quad (3.1)$$

Recordando a Eq. (2.131) podemos obter a carga crítica de Euler (casos perfeitos) do elemento pilar estudado como de aproximadamente 365N.

### 3.1.1 Gráfico do $\lambda_1$

Com o objetivo de determinar as frequências naturais de vibração ( $w_n$ ) considerando a carga internamento no elemento em estudo e de forma analítica Eq. (2.86) há necessidade de conhecimento prévio dos valores de  $\lambda_1$ , tendo em vista que o equacionamento já indicado está em função do mesmo. Os valores de  $\lambda_1$  são obtidos a partir das raízes da Eq. (2.85). A Figura 11 apresenta a função da Eq. (2.85) em coordenadas logarítmicas no eixo ( $y$ ), onde se podem notar valores zeros da função que identificam os  $\lambda_1$  da estrutura sem adição de carga para as primeiras 5 frequências naturais no eixo ( $x$ ).

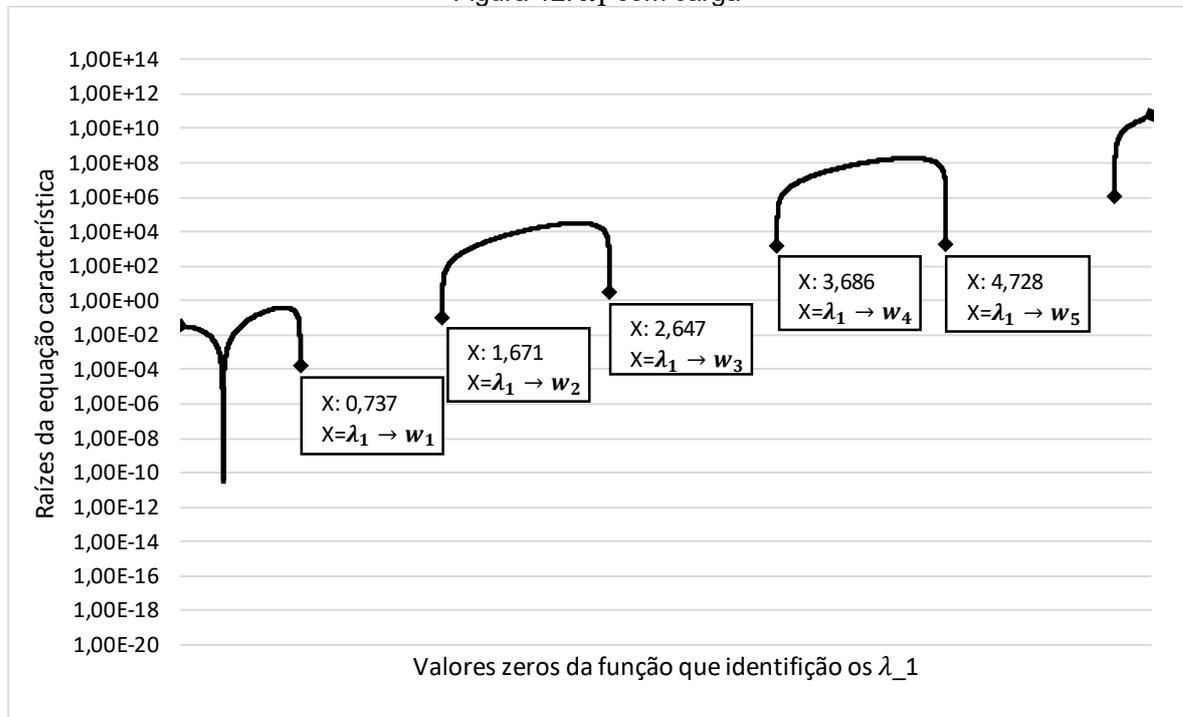


Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Sendo a carga crítica do elemento pilar estudado de 365N, a Figura 12 apresenta a função da Eq. (2.85) em coordenadas logarítmicas no eixo ( $y$ ), onde se podem notar valores zeros da função que identificam os valores de  $\lambda_1$  da estrutura

com adição de metade da carga crítica do pilar estudado, portanto, para o pilar estudado o valor da carga axial  $P$  é de 182N para as primeiras 5 frequências naturais no eixo ( $x$ ).

Figura 12:  $\lambda_1$  com carga



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Nota-se que é possível identificar os valores de  $\lambda_1$  de uma estrutura sem carga axial (Ver Figura 11) e com a adição de carga axial  $P$  (Ver Figura 12) com a Eq. (2.85). O processo de conhecimento prévio de  $\lambda_1$  se torna necessário tendo em vista que a Eq. (2.86) depende de  $\lambda_1$ , das propriedades do material ( $EI$  e  $\bar{m}$ ) que já foram dados na Tabela 1 e da carga axial  $P$ , lembrando que  $k^2 = \frac{P}{EI}$ .

### 3.1.2 Comparação entre a solução analítica e solução numérica

No exemplo a seguir mostra-se a comparação entre a solução analítica e a solução aproximada para a 1°, 2° e “n” frequências naturais utilizando-se a discretização do modelo de elementos finitos para a diminuição do erro. O objetivo é comprovar o modelo numérico em relação ao analítico, frente a obtenção das frequências naturais de vibrações, assim como fazer o estudo comportamental dinâmico das frequências naturais de vibrações em relação a carga axial no topo do elemento.

Sendo assim, considerando a Eq. (2.86), as propriedades apresentadas na Tabela 1 e os valores de  $\lambda_1$  mostrados na Figura 11 e Figura 12 foi possível obter as frequências naturais de vibração do pilar (Ver Figura 10) de forma analítica sem carga axial  $P$ , como apresentado na Tabela 2 e com adição da metade da carga crítica do elemento escolhido como mostrado na Tabela 3, sendo que a carga axial  $P$  é dada como de 182N. O valor das frequências naturais está dado por  $w_n$ , em que são demonstrados os valores da primeira até a quinta frequência natural de vibração,  $n = 1, 2, 3, 4$  e  $5$ .

Os resultados numéricos foram obtidos utilizando um modelo de elementos finitos. Observando o capítulo 2.6 que trata da solução numérica para equação de movimento em vibração livre, podemos trabalhar a solução numérica, onde é apresentado a Eq. (2.191) e a relação da Eq. (2.192).

Foi demonstrado no capítulo 2.6 que os valores de  $\lambda_n = w_n^2$ , são os resultados dos autovalores e os resultados de  $\{\phi_n\}$  são os autovetores correspondentes, em que  $w_n$  é a frequência natural de vibração da estrutura. Para a obtenção dos autovalores e autovetores há necessidade de conhecimento prévio da matriz de rigidez total  $[K_T]$  e a matriz de massa total  $[M]$  apresentadas no mesmo capítulo.

A solução analítica e aproximada para cada frequência natural na condição sem carregamento e com a utilização de diferentes números de elementos são comparadas na Tabela 2. A porcentagem de erro foi feita da solução aproximada (numérica) em relação a solução analítica. A discretização foi feita com três, cinco e vinte e cinco elementos. O método numérico mostrou uma frequência de 33hertz longitudinal, que não muda com o carregamento. Sendo a mesma desconsiderada.

Tabela 2 Comparação entre a solução analítica e a solução aproximada para a 1°, 2° e “n” frequências naturais com discretização (sem carga).

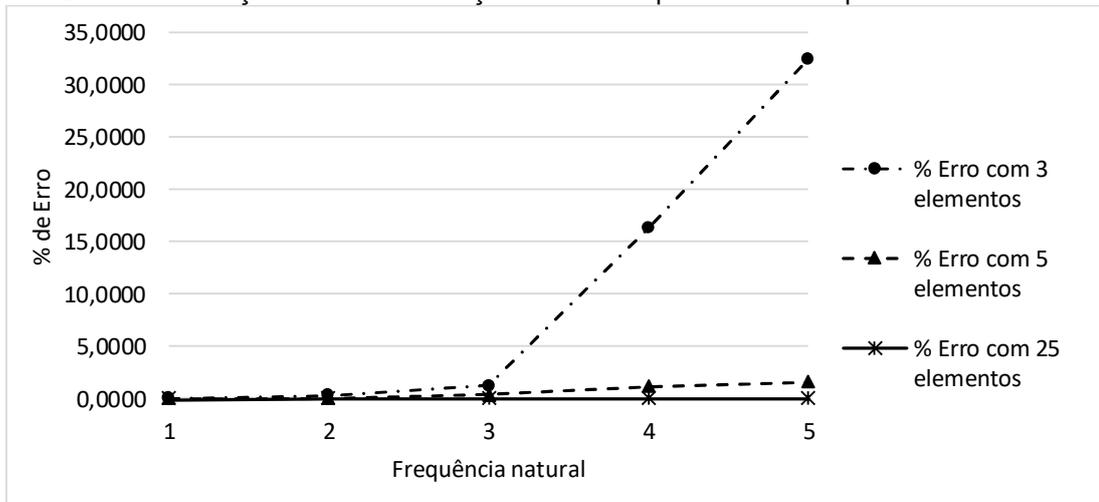
n	$\lambda_1$	$w_n$			$w_n$			
		Análítico (Hz)	Aprox. 3 elementos. (Hz)	% Erro	Aprox. 5 elementos. (Hz)	% Erro	Aprox. 25 elementos. (Hz)	% Erro
1	0,625	1,426519	1,4266	0,0101	1,4265	0,0014	1,4265	0,0000
2	1,566	8,939843	8,9692	0,3284	8,9443	0,0500	8,9398	0,0001
3	2,618	25,03182	25,3437	1,2460	25,1217	0,3592	25,0319	0,0007
4	3,665	49,05238	57,0731	16,3514	49,6276	1,1727	49,0536	0,0026
5	4,712	81,08709	107,4117	32,4647	82,3694	1,5815	81,0927	0,0070

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Pode-se observar que a primeira frequência ( $w_1$ ) obtida pelo modelo em elementos finitos é bem aproximada da obtida com a solução analítica. Tendo 3

elementos, o erro foi igual de 0,0101%. A partir da segunda frequência ( $w_2$ ) o modelo numérico apresenta erros maiores,  $w_2$  igual a 0,33284%,  $w_3$  igual a 1,2460%,  $w_4$  igual a 16,3514% e  $w_5$  igual a 32,4647%, sendo diminuído com uma discretização maior, ou seja, com 25 elementos o erro do modelo numérico em relação à solução obtida analiticamente é dada por  $w_1$  igual a 0,0000%,  $w_2$  igual a 0,0001%,  $w_3$  igual a 0,0007%,  $w_4$  igual a 0,0026% e  $w_5$  igual a 0,0070%, conforme se verifica na Tabela 2 e Figura 13.

Figura 13: Erro da Solução analítica e Solução numérica aproximada. Frequência natural sem carga



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Sendo o elemento submetido a metade da carga crítica, 182N, a solução analítica e aproximada com discretização dos elementos são comparadas na Tabela 3.

Tabela 3 Comparação entre a solução analítica e a solução aproximada para a 1°, 2° e “n” frequências naturais com discretização (com carga)

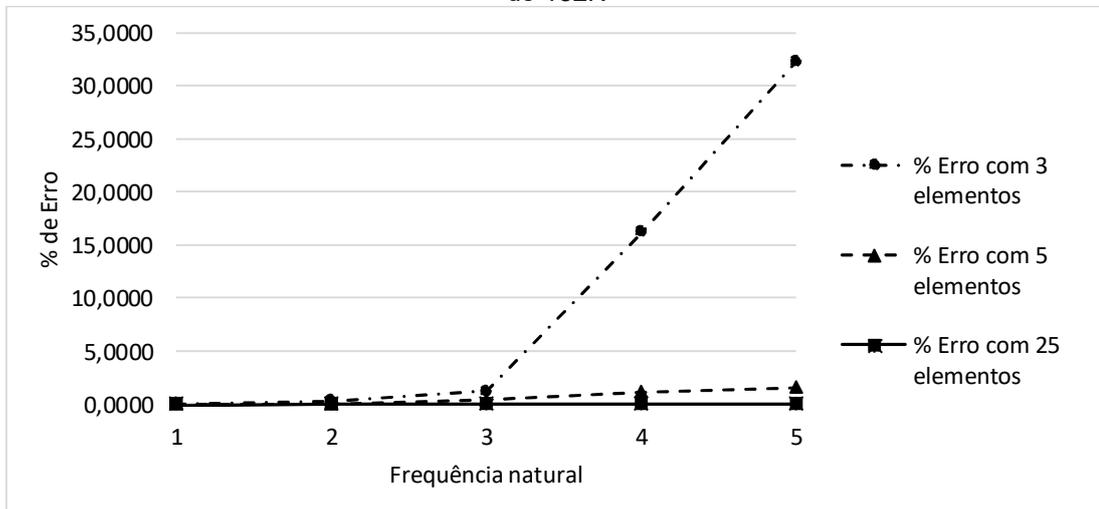
n	$\lambda_1$	$w_n$			$w_n$			
		Analítico. (Hz)	Aprox. 3 elementos. (Hz)	% Erro	Aprox. 5 elementos. (Hz)	% Erro	Aprox. 25 elementos. (Hz)	% Erro
1	0,737	1,71651	1,71680	0,0170	1,71655	0,0022	1,71651	0,0000
2	1,617	9,298253	9,32937	0,3346	9,30298	0,0509	9,29826	0,0001
3	2,647	25,3421	25,65635	1,2400	25,43274	0,3577	25,34227	0,0007
4	3,685	49,34605	57,35255	16,2252	49,92218	1,1675	49,34731	0,0026
5	4,728	81,37106	107,67510	32,3260	82,65189	1,5741	81,37673	0,0070

Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Observa-se que para a primeira frequência ( $w_1$ ) a solução obtida por meio do modelo de elementos finitos é bem aproximada da obtida com a solução analítica. A partir da segunda frequência ( $w_2$ ) o modelo numérico também apresenta erros

maiores. Da mesma forma que no caso anterior, este erro, diminuí com uma discretização maior, conforme se verifica na Tabela 3 e Figura 14.

Figura 14: Erro da Solução analítica e Solução numérica aproximada. Frequência natural com carga de 182N



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

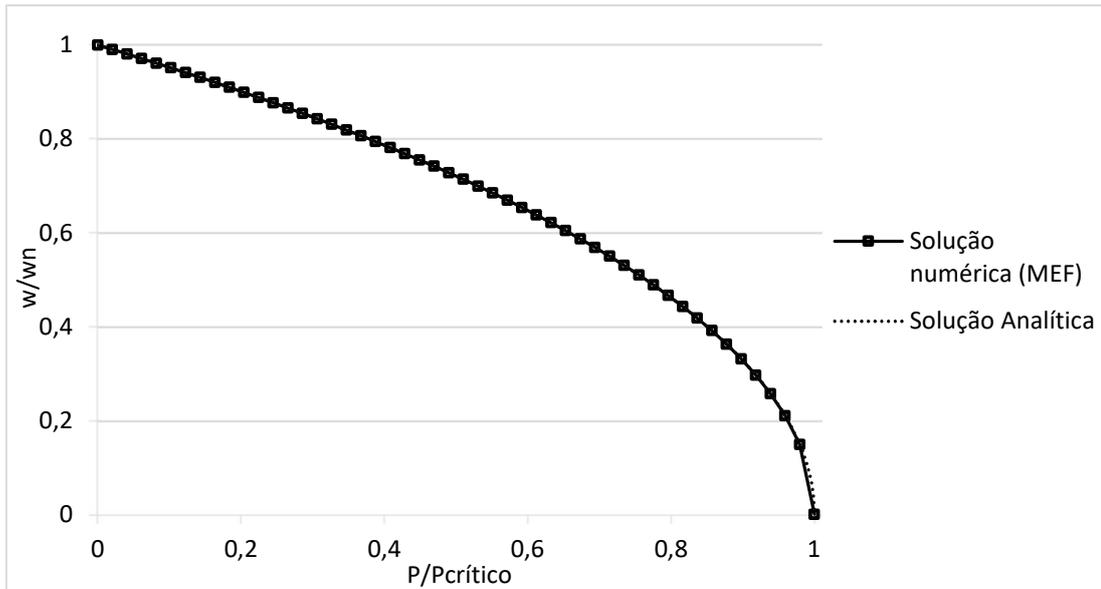
### 3.1.3 Gráfico de carga versus frequências

Para que fosse compreendido o comportamento da primeira frequência natural do pilar (Ver Figura 10) de forma analítica e numérica, para diferentes níveis de carga foi gerado o gráfico da Figura 15.

Analiticamente este gráfico (Ver Figura 15) foi obtido por meio da Eq. (2.86) das propriedades apresentadas na Tabela 1 e os valores de  $\lambda_1$  por meio da Eq. (2.85). Já numericamente o gráfico (Ver Figura 15) foi obtido a partir da matriz de rigidez total  $[K_T]$  da estrutura variando-se o valor de carga e obtendo a frequência natural para cada carga aplicada.

A expressão para a frequência natural carregado axialmente Eq. (2.86) mostra claramente que uma força axial reduz a frequência natural da estrutura. A Figura 15 mostra a variação da primeira frequência natural do pilar em função de diferentes níveis de carga. Nessa figura é notável que frequência natural de um pilar é diminuída por uma carga compressiva axial, tendo considerável mudança na primeira frequência. Há pouca mudança comparando analiticamente e numericamente.

Figura 15: Relação entre a carga axial de compressão e a primeira frequência natural para um pilar engastado-livre, analítico e numérico



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Em busca de uma formulação simplificada, foi encontrado como resultado desse trabalho, por meio da Figura 15, a Eq. (3.4), que a partir da primeira frequência de vibração do elemento ( $W_1$ ), da carga axial no topo e carga crítica do elemento estudado (Ver Eq. (2.131)) é possível à obtenção da frequência natural de vibração relacionada ao nível de carga  $P$ . A primeira frequência de vibração ( $W_1$ ) do elemento sem considerar a carga axial no topo do elemento é dada segundo Paz (1997) por:

$$W_n = (\alpha_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}L^4}}, \quad (3.2)$$

$$W_1 = \frac{1,875^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}. \quad (3.3)$$

Pode-se obter a partir dos resultados da Figura 15 uma aproximação dada por:

$$W_p = W_n \left(1 - \frac{P}{P_{crit}}\right)^{\frac{1}{a}}, \quad (3.4)$$

no qual para o pilar em estudo o valor de  $a$  é dado por 2,091.

Observa-se por meio da Figura 15 que quando a carga axial  $P$  é igual à carga crítica  $P_{crit}$  a frequência natural é igual a zero. Nas frequências superiores também existe uma diminuição, no entanto as mudanças são menores quando comparados com as mudanças da primeira frequência natural e não chegam a zero.

Com este conceito é possível demonstrar a comparação entre o modo de vibração na carga crítica ( $P_{crit}$ ) em relação ao modo de flambagem, para que se tenha

compreensão de que o modo de vibração na carga crítica ( $P_{crit}$ ) é igual ao modo de flambagem.

Para que seja comprovado de forma matemática que para o pilar o modo de vibração na carga crítica ( $P_{crit}$ ) é igual ao modo de flambagem, temos que utilizar conceitos vindos dos resultados (Ver Figura 15). Logo recordando que a frequência natural de vibração quando a carga crítica ( $P_{crit}$ ) é igual à carga axial  $P$  é igual a zero (Ver Figura 15), temos  $\beta^4 = 0$  da Eq. (2.47). Logo a Eq. (2.49) pode ser simplificada como

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4}}} = 0, \quad (3.5)$$

isto é,  $\lambda_1$  é igual a zero.

Relacionando a Eq. (2.46) com a Eq. (2.131) temos

$$k = \frac{\pi}{2L} \quad (3.6)$$

Com a Eq. (2.84) e com as condições até agora impostas, ou seja,  $\lambda_1 = 0$ , podemos simplifica-la como

$$\lambda_2 = k, \quad (3.7)$$

ou seja

$$\lambda_2 = \frac{\pi}{2L} \quad (3.8)$$

Recordando a equação que descreve os modos de vibrações incluindo o efeito da carga axial  $P$  (Ver Eq. (2.88)) e relacionando com a Eq. (3.8) podemos demonstrar que

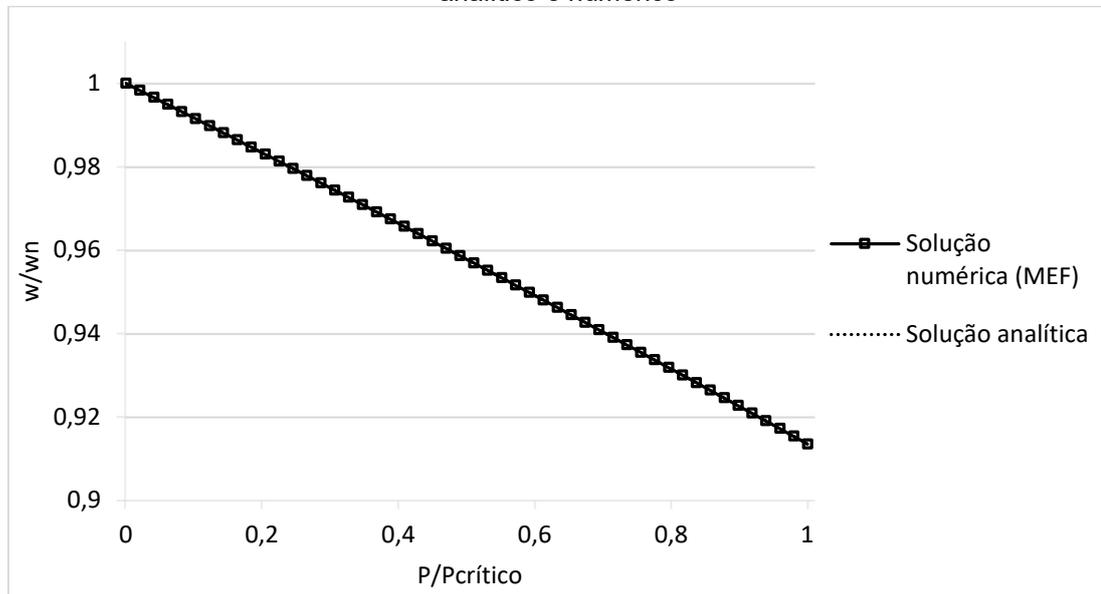
$$\Phi(x) = \delta \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2L} x \right) \right], \quad (3.9)$$

isto é, a Eq. (2.88) se torna igual a Eq. (2.133) ( $\phi_{pn}(x) = \phi_p(x)$ ) quando a carga crítica ( $P_{crit}$ ) é igual a carga axial  $P$ , sendo comprovado matematicamente que para o pilar o modo de vibração na carga crítica ( $P_{crit}$ ) é igual ao modo de flambagem.

Ao traçar o gráfico para a segunda frequência natural de vibração (Figura 16), observa-se que a segunda frequência natural é diminuída por uma carga compressiva

axial, contudo, tendo pouca mudança. Há pouca mudança comparando analiticamente e numericamente.

Figura 16: Relação entre a carga axial de compressão e a segunda frequência natural para um pilar, analítico e numérico



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Assim, medindo a frequência natural de uma coluna, é teoricamente possível calcular a carga axial. Note que há uma relação direta entre a vibração livre e a flambagem do pilar.

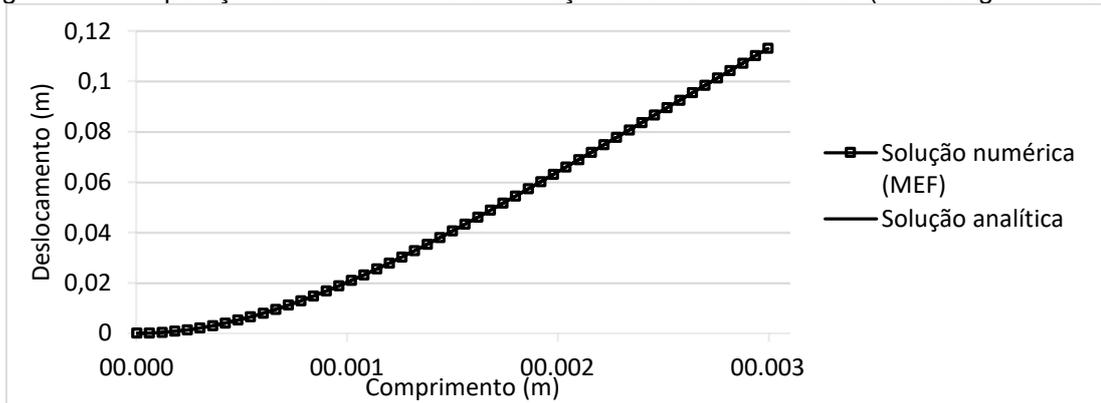
### 3.1.4 Modo de vibração

Para melhor compreensão da forma de vibração ao longo do comprimento do elemento tipo pilar (Ver Figura 10), submetido a uma carga axial  $P$  de 182N, fez-se uma representação do primeiro modo de vibração obtido analiticamente e numericamente. Os resultados obtidos podem ser observados na Figura 17.

Os modos de vibração de forma analítica foram obtidos por meio da Eq. (2.88), necessitando previamente da Eq. (2.84) e Eq. (2.46), assim como das propriedades apresentadas na Tabela 1 e os valores de  $\lambda_1$  mostrados na Figura 12. Já os modos de forma numérica foram obtidos pelos autovetores correspondentes da Eq. (2.191). Tanto os modos obtidos numericamente como analiticamente foram normalizados a massa pelos procedimentos descritos nas seções 2.4.3 e 2.7.1, respectivamente.

Observa-se que há pouca mudança comparando analiticamente e numericamente o primeiro modo de vibração do elemento tipo pilar submetido a metade da carga crítica do mesmo.

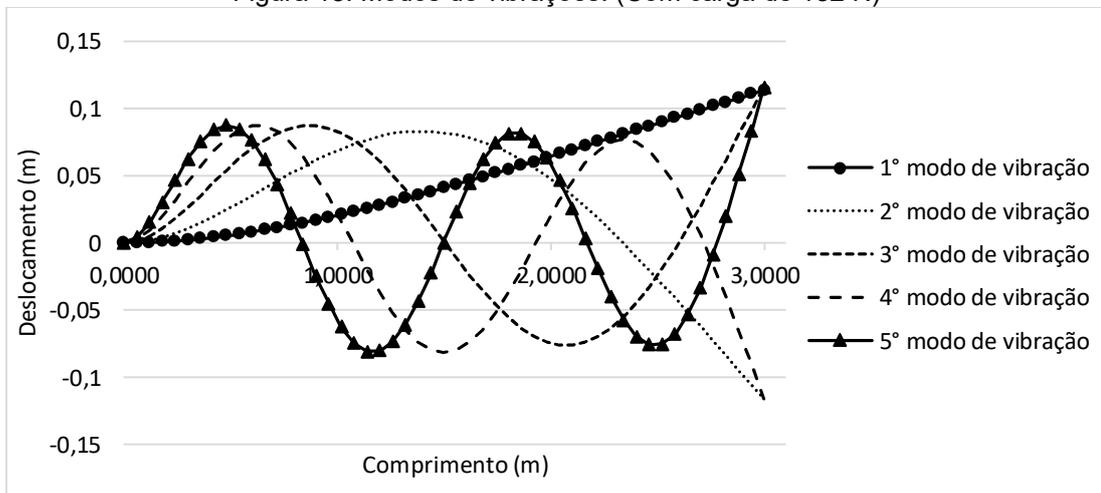
Figura 17: Comparação entre o 1° modo de vibração analítico e numérico. (Com carga de 182 N)



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Tendo em vista que há pouca mudança, com um erro inferior a 0,5% nas soluções dos modos de vibração obtidos de forma analítica ou numérica do elemento tipo pilar (Ver Figura 10), submetido à metade da carga crítica do mesmo, a Figura 18 ilustra os cinco primeiros modos de vibração em um único gráfico, obtidos de forma analítica. Observou-se no método numérico que havia um modo de vibração longitudinal correspondente a uma frequência de 33hertz, que não muda com o carregamento. Sendo o mesmo desconsiderado.

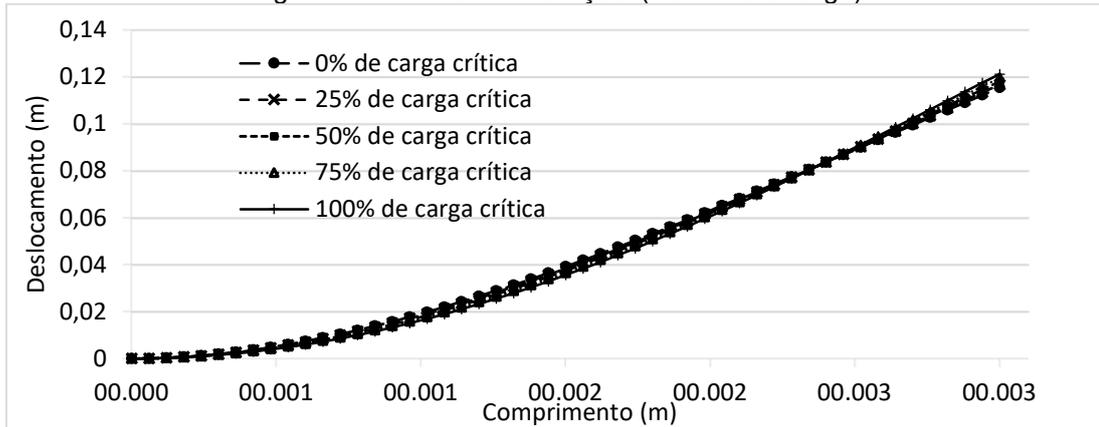
Figura 18: Modos de vibrações. (Com carga de 182 N)



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Com o intuito de explorar informações relacionadas ao comportamento do primeiro modo de vibração em função da modificação da carga axial  $P$  no topo do elemento tipo pilar (Ver Figura 10), a carga crítica de aproximadamente 365N foi dividida em cinco passos de carga, adotando para cada análise uma carga axial  $P$  diferente. Sendo os cinco passos de carga dados por: sem carga, com uma carga axial  $P$  de 91,38N, 182,77N, 274,16N e 365,54N, como apresentado na Figura 19.

Figura 19: 1° Modo de vibração. (Variando a carga)



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

É possível observar por meio da Figura 19 que a carga axial  $P$  em que o elemento tipo pilar está submetido modifica o primeiro modo de vibração da estrutura.

Com a comparação feita em que a Eq. (2.88) se torna igual a Eq. (2.133), isto é,  $(\phi_{pn}(x) = \phi_p(x))$  quando a carga crítica ( $P_{crit}$ ) é igual à carga axial  $P$ , sendo comprovado matematicamente que o modo de vibração na carga crítica ( $P_{crit}$ ) é igual ao modo de flambagem, ambos normalizados, é possível definir o modo de vibração para uma carga axial  $P$  a partir da interpolação do modo de vibração sem carga axial  $P$  e o modo de vibração na carga crítica  $P_{crit}$ :

$$\{\widetilde{\phi}_{pn}\} = \left(1 - \frac{P}{P_{crit}}\right)\{\phi_n\} + \frac{P}{P_{crit}}\{\phi_p\}. \quad (3.10)$$

Observa-se que os modos de vibração da estrutura variam entre os modos de vibração da estrutura descarregada  $\{\phi_n\}$  e os modos de vibração da estrutura quando submetida no carregamento crítico  $\{\phi_p\}$ . Dessa forma, é possível aproximar os modos de vibração da estrutura carregada  $\phi_{pn}$  a partir de uma simples interpolação linear entre  $\{\phi_n\}$  e  $\{\phi_p\}$  da seguinte forma.

Se a carga interna nos elementos é igual ao fator multiplicador de carga calculado da análise de flambagem,  $P = P_{crit}$ , o modo de vibração será o modo de flambagem,  $\phi_p$ , se a carga interna nos elementos é igual à zero  $P = 0$  o modo de vibração é igual aos modos de vibração da estrutura descarregada.

Se ambos os modos  $\phi_n$  e  $\phi_p$  são normalizados à massa, ou seja,  $\{\phi\}^T [M_e] \{\phi\} = 1$ , utilizando a propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração, a frequência natural da estrutura carregada  $\omega_{pn}$  pode ser estimada, como.

$$\tilde{\omega}_{pn} \approx \sqrt{\{\tilde{\phi}_{pn}\}^T [[K_e] + P[K_g]] \{\tilde{\phi}_{pn}\}} \quad (3.11)$$

### 3.2 ANÁLISE P-DELTA UTILIZANDO ANÁLISE MODAL E DE FLAMBAGEM

Primeiramente, através de um exemplo estrutural simples como uma viga engastada-livre, foi possível realizar uma descrição do efeito da carga axial sobre os modos de vibração e frequências naturais. Isto permitiu estabelecer uma relação exata entre o modo de flambagem e o modo de vibração na carga crítica da estrutura. Dessa maneira, com o conhecimento do comportamento vibratório sob cargas axiais de uma estrutura simples, uma generalização do problema foi realizada para uma estrutura reticulada qualquer. Mostra-se por meio das Eq. (3.10) e Eq. (3.11) que é possível definir os modos de vibração e frequências naturais através de uma interpolação de modos de vibração entre o estado sem carga axial e o estado com carga axial crítica e utilizando a propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração. Finalmente, baseado nos conceitos descritos deste trabalho, é proposto como resultado deste trabalho o método chamado como análise **P-delta modal**, o qual usa análise modal e de flambagem para realizar uma análise não linear geométrico equivalente ao método de análise P-delta iterativo.

Este método permite obter o comportamento da curva força-deslocamento até a flambagem.

No primeiro passo, é realizada a análise modal  $([K_e] - \lambda_n[M_e])\{\phi_n\} = 0$  para calcular os modos de vibração da estrutura descarregada  $\{\phi_n\}$ , em seguida calcula-se a matriz geométrica  $[K_g]$  para o carregamento  $\{F_e\}$ , sendo o mesmo o vetor de cargas nodais globais, considerando as condições de contorno. Além disso é realizada a análise de flambagem  $([K_e] - \alpha[K_g])\{\phi_p\} = 0$  para calcular os modos de flambagem  $\{\phi_p\}$  e os autovalores  $\{\alpha\}$ . Recordando que os modos de vibração da estrutura variam entre os modos de vibração da estrutura descarregada  $\{\phi_n\}$  e os modos de vibração da estrutura quando submetida no carregamento crítico  $\{\phi_p\}$ . Dessa forma, é possível aproximar os modos de vibração da estrutura carregada  $\phi_{pn}$  a partir de uma simples interpolação linear entre  $\{\phi_n\}$  e  $\{\phi_p\}$  já mostrada na Eq. (3.10). Nesta análise, além do número de passos de carga “nstep”, se defini inicialmente também o número de modos de vibrações a ser utilizados “nmod”. Em seguida é calculada a frequência natural para estrutura carregada com a Eq. (3.11), onde a matriz de rigidez total é dada por

$[K_T] = [K_e] + (k/nstep)[K_g]$ . Calcula-se então o novo vetor de forças nodais  $\{F_T\} = \Delta\{F_e\} + \{F_p\}$ , sendo  $\{F_p\}$  igual ao vetor de cargas nodais (cortante e momento) devido as forças internas axiais na deformada e em seguida o deslocamento, isto para  $k = 2:nstep$ , com erro=1, até enquanto erro>1e-2, dado por:

$$\{\Delta\delta_2\} = \{\Delta\delta_1\} + \{\widetilde{\phi}_{pn}\} \left( \frac{\{\widetilde{\phi}_{pn}\}^T \{F_T\}}{\widetilde{\omega}_{pn}^2} \right) \quad (3.12)$$

Logo, neste item será descrito a rotina básica utilizada no elemento finito da nova metodologia proposta neste trabalho, sendo o mesmo desenvolvido em etapas:

1. Definir o número de passos de carga, *nstep*.
2. Definir o número de modos de vibração a utilizar na análise, *nmod*.
3. Definir da matriz de rigidez global da estrutura  $[K_e]$ , considerando condições de contorno.
4. Definir o vetor de cargas nodais globais  $\{F_e\}$ , considerando condições de contorno.
5. Cálculo dos deslocamentos para um primeiro delta de carga,  $\Delta\{F_e\} = \frac{\{F_e\}}{nstep}$ ,  $\{\delta T(:,1)\} = [K_e]^{-1} \Delta\{F_e\}$ .
6. Definir da matriz de massa global da estrutura, considerando condições de contorno  $[M_e]$ .
7. Realizar a análise modal para calcular os modos de vibração da estrutura descarregada  $[\phi_n]$ .
8. Calcular a matriz geométrica  $[K_g]$  para o carregamento  $\{F_e\}$ .
9. Realizar a análise de flambagem para calcular os modos de flambagem  $[\phi_p]$  e os autovalores  $\{\alpha\}$ .
10. Vetor de deslocamentos inicial e final  $\{\Delta\delta_1\} = \{0\}, \{\Delta\delta_2\} = \{0\}$ .
11. Vetor de cargas nodais devido às forças internas  $\{F_p\} = \{0\}$ .
12. For  $k=2:nstep$   
erro = 1
  - Calcular a matriz de rigidez total.

$$[K_T] = [K_e] + (k/nstep)[K_g]$$

while erro>1e-2

For j=1:nmod

- Calcular o modo de vibração da estrutura carregada.

$$\{\widetilde{\phi}_{pn}\} = \left(1 - \frac{(k/nstep)}{\alpha(j)}\right)\{\phi_n(:,j)\} + \frac{(k/nstep)}{\alpha(j)}\{\phi_p(:,j)\}$$

- Calcular a frequência natural para estrutura carregada.

$$\widetilde{\omega}_{pn} = \sqrt{\{\widetilde{\phi}_{pn}\}^T [K_T] \{\widetilde{\phi}_{pn}\}}$$

- Novo vetor de forças nodais.

$$\{F_T\} = \Delta\{F_e\} + \{F_p\}$$

- Calculo dos deslocamentos.

$$\{\Delta\delta 2\} = \{\Delta\delta 2\} + \{\widetilde{\phi}_{pn}\} \left( \frac{\{\widetilde{\phi}_{pn}\}^T \{F_T\}}{\widetilde{\omega}_{pn}^2} \right)$$

End

- $erro = \sum(\Delta\delta 1 - \Delta\delta 2)^2$
- $\{\Delta\delta 1\} = \{\Delta\delta 2\}$
- Definir o vetor de cargas nodais devido as forças internas axiais  $\{F_p\}$

End

Cálculo do deslocamento total no passo de carga.

$$\{\delta T(:,i)\} = \{\delta T(:,i-1)\} + \{\Delta\delta 2\}$$

End

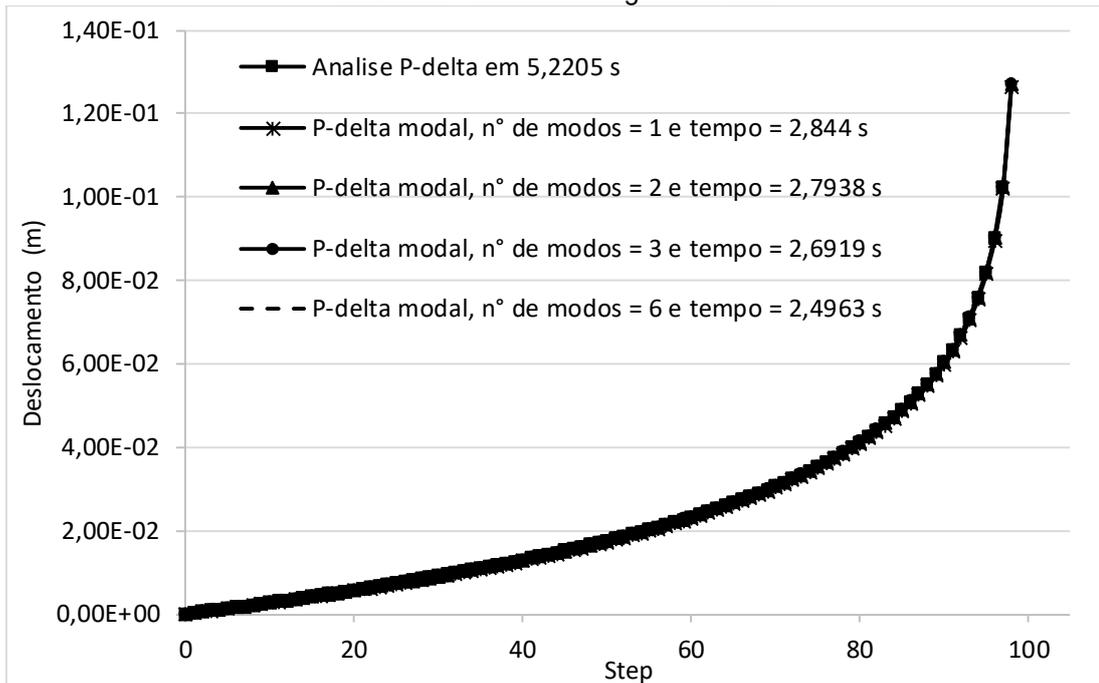
### 3.2.1 Análise tradicional P-delta iterativo e Análise P-delta modal - Pilar

O objetivo deste item é utilizar a metodologia **P-delta modal**, descrita anteriormente, para aplicá-la em um elemento do tipo engastado-livre e comparar os resultados obtidos do comportamento da curva força-deslocamento até a flambagem em relação ao método tradicional P-delta iterativo.

Sendo assim, um modelo de pilar de concreto armado engastada na base como demonstrado na Figura 10, mas com módulo de elasticidade “E” igual a 2,72e10 N/m<sup>2</sup>, número de passos de carga, nstep igual a 100, carga lateral de 10kN e carga crítica

de 994,27kN foi modelado numericamente, a fim de que fosse compreendido o comportamento do elemento analisando por meio da análise P-delta e análise P-delta Modal realizando uma mudança do número de modos de vibração utilizado na análise, onde foi gerado a Figura 20. Os deslocamentos foram extraídos no topo do elemento em questão.

Figura 20: Relação entre tradicional P-delta e P-delta modal variando a quantidade de modos utilizados – elemento engastado-livre

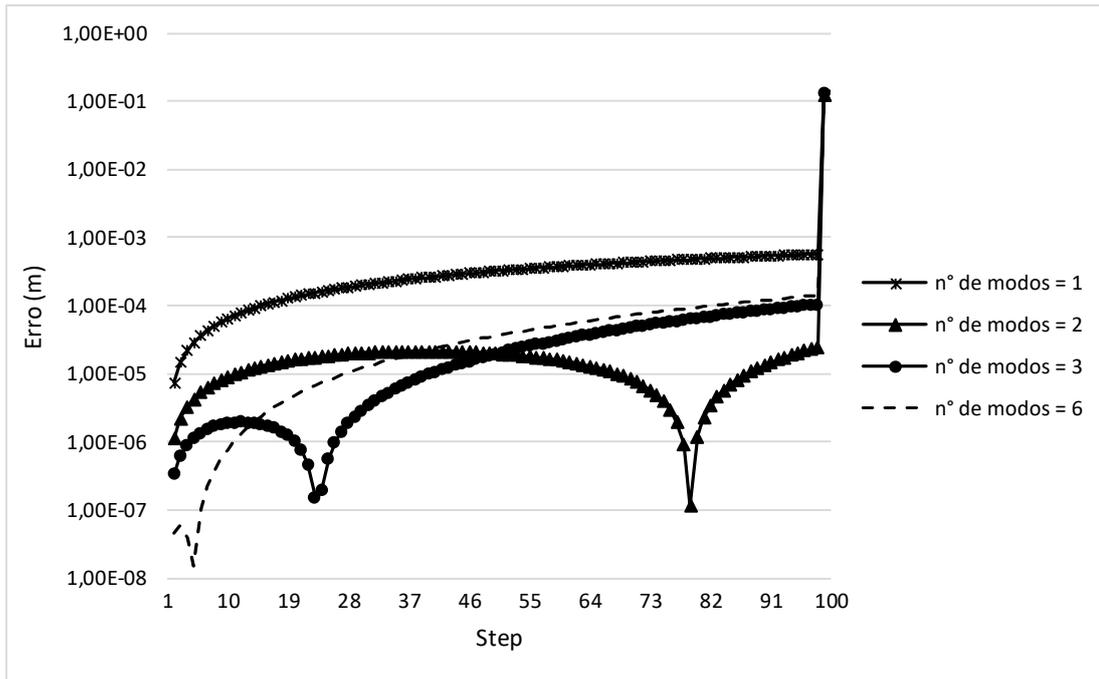


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Observa-se por meio da Figura 20 que o deslocamento próximo do último passo de carga (100) é aproximadamente de 12cm, ou seja, aproximadamente 4% do comprimento total do elemento estudado. Ao traçar o gráfico da análise P-delta e análise P-delta modal variando a quantidade de modos de vibrações utilizados, nota-se comparativamente que há pouca mudança entre as análises. A análise P-delta demonstrou um tempo computacional de processamento de aproximadamente duas vezes o tempo computacional de processamento de dados da análise P-delta modal. Todas as análises deste trabalho foram desenvolvidas em um notebook com processador Intel® Core™ i7-7500U CPU @ 2.70GHz, 2901 Mhz, 2 Núcleos, 4 Processadores Lógicos, memória física (RAM) 16 GB.

Com o intuito de analisar o erro da análise P-delta e análise P-delta modal para diferentes quantidades de modos de vibração utilizados, foi gerado a Figura 21.

Figura 21: Relação entre tradicional P-delta iterativo e P-Delta modal com variação da quantidade de modos utilizados – elemento engastado-livre



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A análise mostra que a utilização de dois modos de vibração ( $n^\circ$  de modos=2), apresenta um erro médio em torno de 0,001294m, sendo o menor erro médio em relação à utilização das outras quantidades de modos de vibrações, sendo:  $n^\circ$  de modos=1 com erro médio de 0,0015788m,  $n^\circ$  de modos=3 com erro médio de 0,0013116m,  $n^\circ$  de modos=6 com erro médio de 0,001329m.

Analisando o erro conforme o aumento de números de passos de carga, em relação a quantidade de modos de vibração utilizados, temos que do primeiro passo de carga até décimo segundo, 1° step – 12° step, o menor erro observado é com a utilização de seis modos de vibrações, chegando num erro de 0,000001654m no 12° step. A partir do décimo segundo passo de carga até o passo de  $n^\circ$  49, 13° step – 49° step, a utilização de três modos de vibrações foi que mostrou menor erro, sendo de 0,000000152m, no 22° passo de carga. Do passo de  $n^\circ$  49 em diante a utilização de dois modos de vibração que teve menor erro, tendo como o menor neste intervalo no 77° passo de carga, no valor de 0,000000938m.

De forma geral, nota-se que nos primeiros passos de carga, na medida em que aumenta os modos, há diminuição do erro, já quando há aumento dos passos de carga o aumento de número dos modos não é uma solução para diminuição do erro. Isto pode ser devido a interpolação linear adotada para os modos, Eq. (3.10), no qual ao adotar a mesma para os modos de vibrações superiores pode não se torna algo efetivo.

Observa-se por meio da metodologia P-delta modal que o tempo computacional é reduzido de forma considerável, tendo um pequeno erro em relação ao método tradicional P-delta iterativo. Logo, chegar em tal proposta significa um avanço com relação às técnicas usuais para obtenção do comportamento da curva força-deslocamento

### 3.3 PÓRTICO

Neste item, pretende-se mostrar a aplicabilidade da metodologia **P-delta modal**, anteriormente descrita, em um elemento do tipo pórtico, mas modificando os carregamentos externos. Assim como, comparar os resultados obtidos do comportamento da curva força-deslocamento até a flambagem em relação ao método tradicional P-delta iterativo em ambos os modelos.

Logo, para a modelagem numérica, escolheu-se um modelo de pórtico, mas modificando os carregamentos externos. Sendo o pórtico com o primeiro tipo de carregamento escolhido denominado como modelo 01 mostrado na Figura 22 e com propriedades apresentadas na Tabela 4.

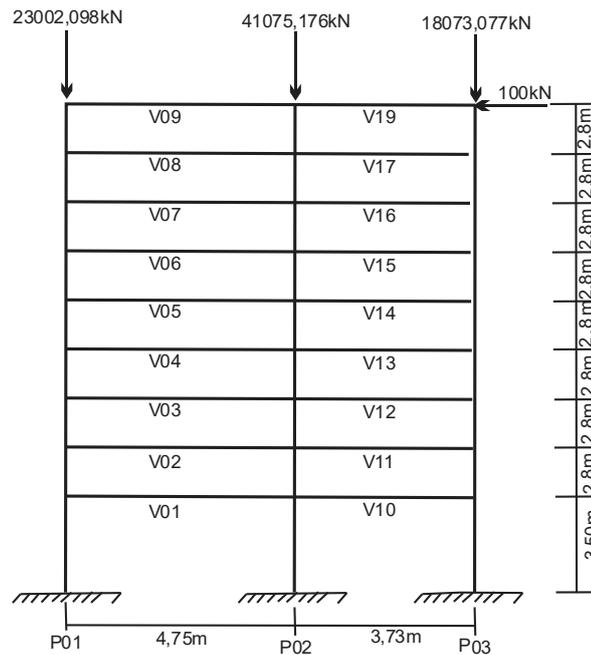
Tabela 4 Propriedades do pórtico

	<b>Pilar 01 - P01</b>	<b>Pilar 02 - P02</b>	<b>Pilar 03 - P03</b>	<b>Vigas ( V01 - V09)</b>	<b>Vigas (V10 - V19)</b>
<b>Comprimento - L (m)</b>	25,75	25,75	25,75	4,74	3,73
<b>módulo de elasticidade - E (N*m<sup>2</sup>)</b>	2,72E+10	2,72E+10	2,72E+10	2,72E+10	2,72E+10
<b>Seção (m<sup>2</sup>)</b>	0,1	0,1	0,1	0,12	0,12
<b>Inércia - I (m<sup>4</sup>)</b>	0,00208	0,00208	0,00208	0,00360	0,00360
<b><math>\bar{m} = \rho A</math> (kg/m<sup>2</sup>)</b>	250	250	250	300	300

Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Foi colocado no modelo 01 (Ver Figura 22), com propriedades apresentadas na Tabela 4, o número de passos de carga, nstep igual a 100, assim como a carga axial no topo do P01, P02 e P03 igual a 0,28, 0,50 e 0,22 da carga crítica de 8,215E+07N respectivamente. A carga lateral corresponde a 100kN.

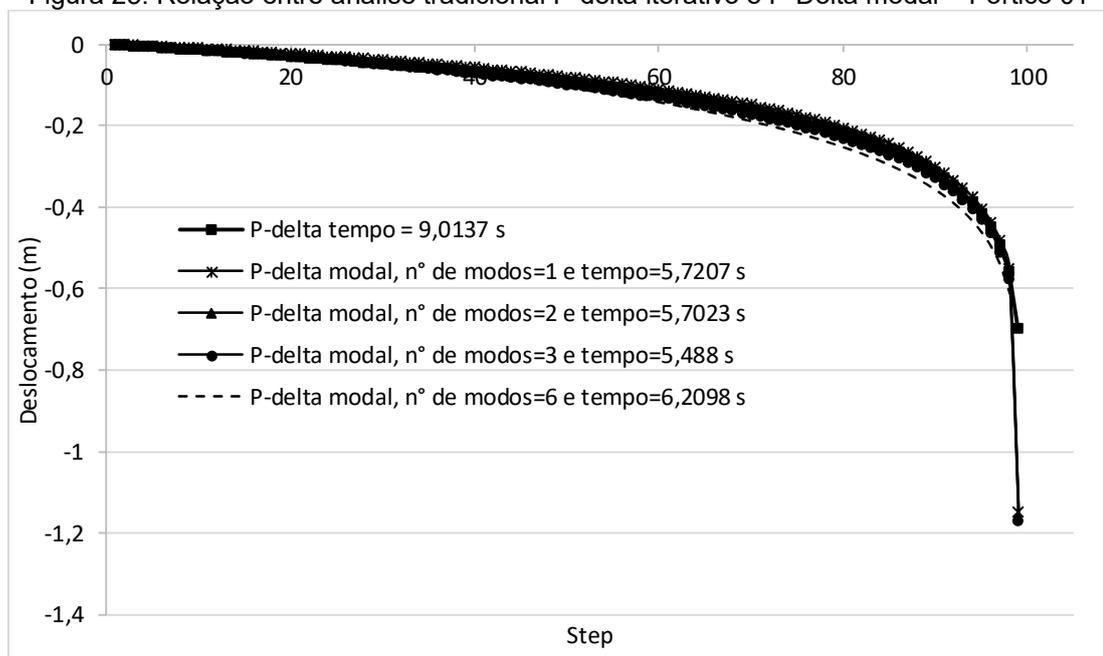
Figura 22: Modelo 01 - Pórtico.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

A Figura 23 foi apresentada a fim de ter uma compreensão do comportamento do modelo 01 analisando por meio da análise tradicional P-delta e P-delta modal, do qual foram extraídos os deslocamentos no topo do último nó do P03.

Figura 23: Relação entre análise tradicional P-delta iterativo e P-Delta modal – Pórtico 01



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

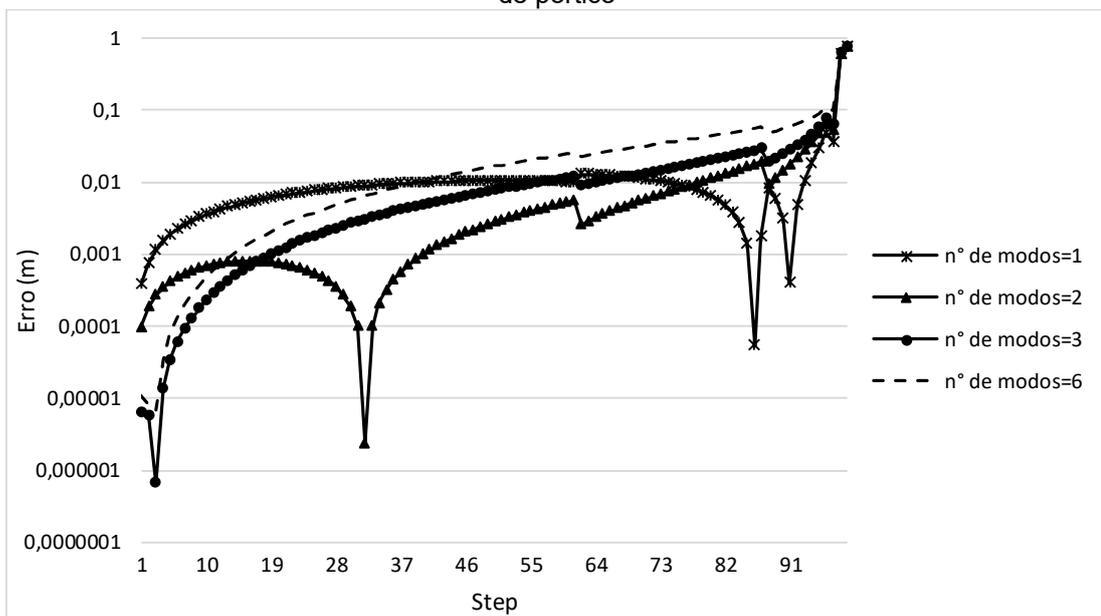
Os resultados da curva força-deslocamento demonstram que o deslocamento é aumentado conforme o aumento do número de passos de carga, sendo de aproximadamente 50cm no penúltimo nível de carga e 1,06m no último nível de carga,

ou seja, 1,94% e 4,11% do comprimento total do pórtico. Ao traçar o gráfico da análise P-delta em relação ao P-delta modal, observou-se comparativamente que há pouca mudança entre as análises.

Houve uma redução do tempo computacional da análise P-delta (9,0137s) em relação a análise P-delta modal (média 5,7802s). Uma curva do erro entre o P-delta e P-delta modal utilizando vários modos de vibrações do elemento em estudo pode ser observada na Figura 24.

Como se pode ver na Figura 24, o uso de dois modos de vibrações teve o menor erro em relação à média (0,006301m), mas até o 17° passo de carga (1° step – 17° step) a utilização de três modos de vibrações foi que teve menores erros, sendo de 0,0007717m no 17° passo de carga, mantendo-se como a utilização de dois modos como meio de menor erro até o 76° passo de carga, ou seja, 17° step – 76° step, com erro de 0,008388m no 76° step e em seguida um menor erro de 0,00899m no 77° passo de carga com a utilização de um modo de vibração. Sendo assim do 77° passo em diante a utilização de um modo foi o com menor erro, tendo dois picos de reduções do erro, sendo o primeiro de 0,008392m no 77° passo de carga até o menor erro desse intervalo de 0,00000529m no 86° passo de carga, aumentando seu erro até 0,00819m no 88° passo de carga e em seguida tendo o segundo pico de redução do erro, no 91° passo de carga, no valor de 0,0003978m, entre o intervalo do 88° passo de carga até o final.

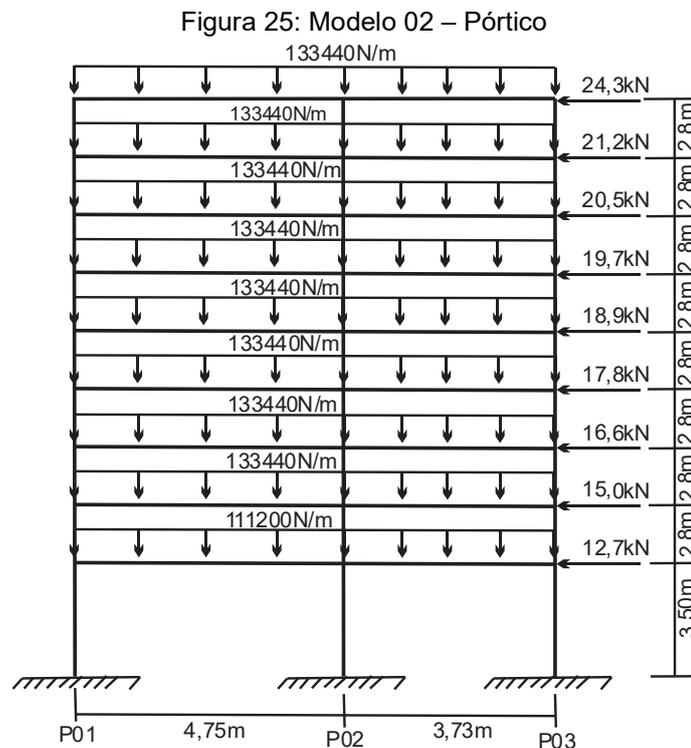
Figura 24: Erro em relação a quantidade de modos utilizados na análise P-delta modal – modelo 01 de pórtico



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Da mesma forma do caso anterior, o aumento de números de modos de vibração a ser utilizados, nos primeiros passos de carga é uma solução para diminuição do erro, já quando há aumento dos passos de carga, o aumento de número dos modos não se torna uma solução viável para diminuição do erro. Isto também acontece “provavelmente” devido à interpolação linear adotada para os modos, Eq. (3.10), no qual ao adotar a mesma para os modos de vibrações superiores pode não se torna algo efetivo.

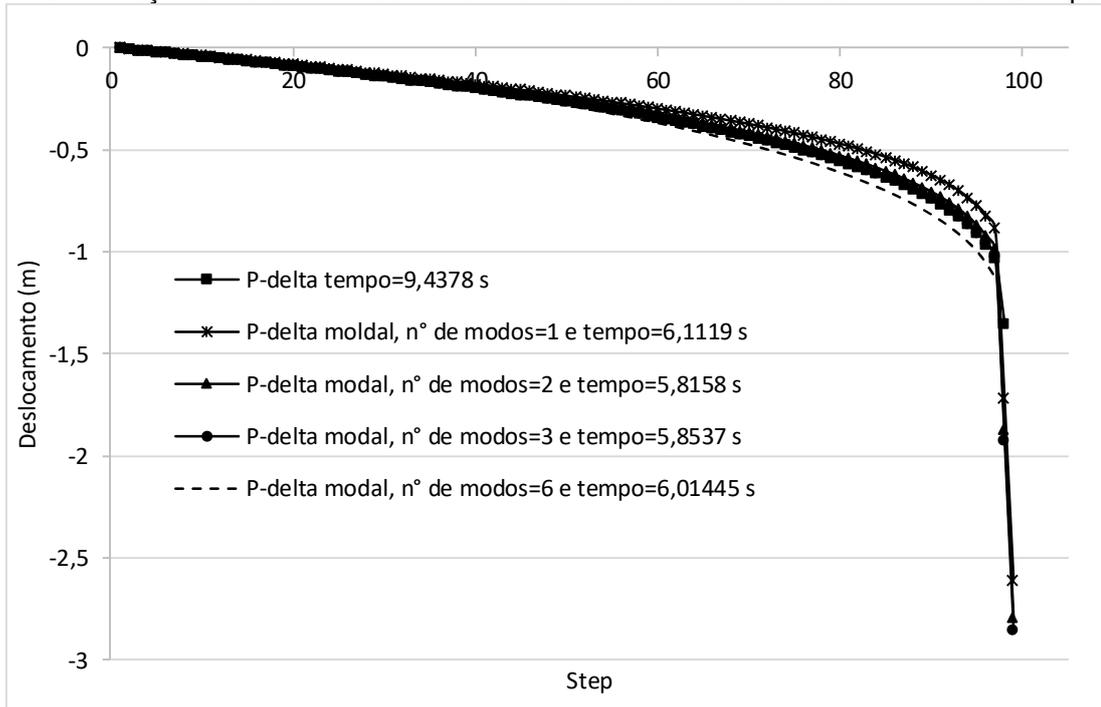
Para compreensão do efeito das cargas externas, o modelo 02 do pórtico (Figura 22) é modelado, com as propriedades apresentadas na Tabela 4, com o número de passos de carga,  $n_{step}$  igual a 100, mas com as cargas verticais e horizontais como apresentas na Figura 25, multiplicadas por um fator de 11,19.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Com o intuito de explorar informações relacionadas às mudanças das cargas externas e seus posicionamentos, foi gerada a Figura 26, do qual foram extraídos os deslocamentos no topo do último nó do P03, analisando por meio da análise tradicional P-delta e P-delta modal.

Figura 26: Relação entre análise tradicional P-delta iterativo e P-delta modal – modelo 02 de pórtico

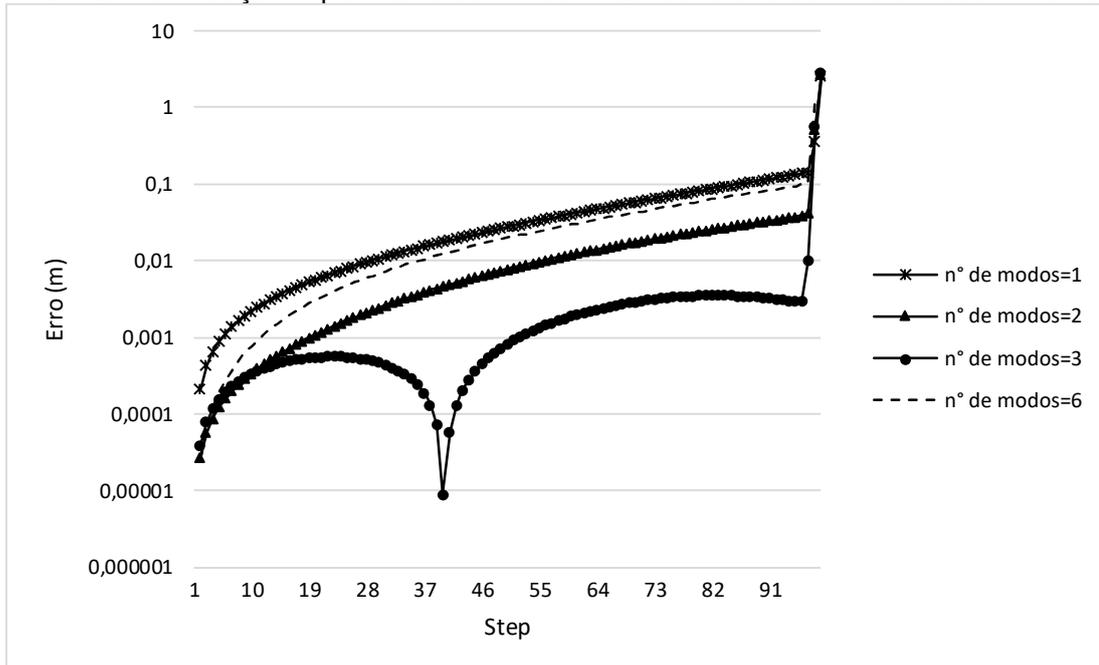


Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

Pode-se notar que o deslocamento é aumentado conforme o aumento do número de passos de carga, sendo de aproximadamente 1,3m nos últimos níveis de carga da análise P-delta, isto é, 5% do comprimento total do pórtico. Ao traçar o gráfico da análise tradicional P-delta em relação ao P-delta modal, observou-se comparativamente que há pouca mudança entre as análises.

Nota-se que houve uma redução do tempo computacional da análise P-delta (9,4378s) em relação a análise P-delta modal (média 5,9489s). No entanto, há um erro da análise P-delta em relação à variação da quantidade de modos de vibrações utilizados do elemento em estudo na análise P-delta modal, no qual pode ser observado na Figura 27.

Figura 27: Erro em relação a quantidade de modos utilizados na análise P-delta modal – Pórtico 02



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.

De forma geral, na utilização da quantidade de modos de vibrações, o erro para os primeiros passos de carga é aumentado conforme aumenta os passos de carga, no entanto a análise com a utilização de três modos de vibrações o erro é reduzido significativamente entre o 37° e 46° passo de carga.

A utilização de um modo de vibração teve um erro médio de 0,0409m, já com a utilização de dois modos de vibração o erro médio foi de 0,01167m com três de 0,001585m e com seis modos de vibração, de 0,02913m. Nota-se que a utilização de três modos de vibração teve o menor erro em relação à média, e logo em seguida a utilização de dois modos. Também é possível notar certo padrão na curva do erro, isso quando utilizado um, dois e seis modos de vibração.

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho apresentado visa o estudo da dependência entre as características dinâmicas (frequências naturais e modos de vibração) e as cargas existentes nas estruturas de um pilar. Isto permitiu estabelecer uma relação exata entre o modo de flambagem e o modo de vibração na carga crítica da estrutura. Dessa maneira, com o conhecimento do comportamento vibratório sob cargas axiais de uma estrutura simples, uma generalização do problema foi realizada para uma estrutura reticulada qualquer. Finalmente, baseado nos conceitos descritos deste trabalho, é proposto como resultado deste trabalho o método chamado como análise **P-delta modal**, o qual usa análise modal e de flambagem para realizar uma análise não linear geométrica equivalente ao método de análise P-delta iterativo.

Em relação ao estudo de carga versus frequências, verificou-se que a frequência natural de um pilar é diminuída por uma carga axial, tendo considerável mudança na primeira frequência natural de vibração e pouca mudança para a segunda frequência de vibração. Observou-se que houve pouca mudança nos resultados analíticos em relação aos numéricos. Essas análises permitiram a obtenção por meio dos gráficos de uma equação simplificada de aproximação para a frequência natural de vibração de um pilar considerando a carga interna no elemento.

Por meio de exemplos constatou-se que tanto a solução analítica quanto a numérica apresentam bons resultados em relação aos modos de vibração e frequências naturais de vibração. Verificou-se que o primeiro modo de vibração se diferencia quanto submetido a diferentes tipos de carga axial  $P$ .

As curvas força-deslocamento foram modeladas para um elemento do tipo engastado-livre e um pórtico, modificando os tipos de carregamentos externos. Isso permitiu a comprovação da metodologia proposta neste trabalho (**P-delta modal**), no qual se observou um erro pequeno, sendo o maior erro médio no modelo 02 de pórtico com a utilização de um modo de vibração, isto é, 4,09cm em relação ao P-delta iterativo. Notou-se também que houve redução no tempo computacional de 5,3305s do tradicional P-delta para um tempo médio utilizando um, dois, três e seis modos de vibração (P-delta modal), de 2,7165s no elemento pilar, de 9,0137s para 5,7302 no modelo 01 de pórtico e de 9,4378s para 5,9489s no modelo 02 de pórtico. Sendo assim, foi provado que o procedimento proposto supera os métodos tradicionais (P-delta iterativo).

Especificamente, a análise P-delta tradicional em um elemento do tipo engastado-livre demonstrou o dobro de tempo computacional em relação a metodologia proposta, P-delta modal, assim como o erro variando a quantidade de modos a ser utilizados foram insignificantes, ou seja, com a utilização de um modo o erro foi de 0,001578m, com dois modos de 0,00129m, com três modos de 0,00131m e com seis modos de 0,001329m.

Comparativamente a análise para o modelo 01 de pórtico do P-delta iterativo e P-Delta modal obtiveram equivalência, sendo o maior erro médio com a utilização de seis modos de vibração, isto é, 2,27cm em relação ao P-delta iterativo. Notou-se que nos primeiros passos de carga, à medida que aumentam os modos utilizados, há diminuição do erro, já quando há aumento dos passos de carga o aumento de número de modos utilizados não é uma solução para diminuição do erro.

Também foi analisado o modelo 02 de pórtico com cargas verticais distribuídas ao longo dos “pavimentos”, assim como cargas horizontais ao longo dos mesmos para obter informações relacionadas as mudanças das cargas externas e seus posicionamentos no elemento. O gráfico das análises P-delta em relação ao P-delta modal teve equivalência, sendo o maior erro com a utilização de um modo de vibração, 4,09cm, em relação ao P-delta iterativo. Observou-se um erro da análise P-delta e P-delta modal em função da quantidade de modos de vibrações utilizados na análise do elemento em estudo, no qual de forma geral, o erro para os primeiros passos de carga é aumentado conforme aumenta os passos de carga, no entanto a análise com o terceiro modo de vibração o erro é reduzido significativamente entre o 37° e 46° passo. O terceiro modo de vibração teve o menor erro em relação à média (0,001585m). Especialmente, a análise P-delta tradicional no modelo 02 demonstrou um tempo computacional de 9,4378s. Já a análise P-delta modal teve um tempo computacional para a utilização de um, dois, três e seis modos de vibração de 6,1119s, 5,8158s, 5,8537s e 6,01445s respectivamente.

É necessária com a continuidade dos estudos a busca de analisar a metodologia proposta (P-delta modal) em estruturas irregulares, com variação do número de pavimentos, onde os modos superiores podem ser de grande influência (maior contribuição), sendo distinto dos modelos apresentados que os primeiros modos de vibrações são que têm maior contribuição.

Assim como é necessário analisar a relação das características dinâmicas (frequências naturais e modos de vibração) com as cargas atuantes na estrutura em um modelo estrutural do tipo 3D.

## REFERÊNCIAS

- ABELL, M.; ONDREJ. CSI KNOWLEDGE BASE. **CSI COMPUTER E STRUCTURES**, 2019. Disponível em: <<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Types+of+P-Delta+analysis>>. Acesso em: 5 Março 2020.
- AKIN, J. E. **Finite Element Analysis with Error Estimators: An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students**. Amsterdam; Boston: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005. 512 p. ISBN 978-0-7506-6722-7.
- AL MASHARY, A.; CHEN, W. F. Elastic second-order analysis for frame design. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 15, n. 4, p. 303-322, December 1990.
- ALBERT, C. **Handbook of Steel Construction**. 3. ed. Willowdale, Ontário: Canadian Institute of Steel Construction, 1980. 4-21 p.
- AMELIA; NAPIER, J. CSI knowledge base. **CSI COMPUTER E STRUCTURES**, 2014. Disponível em: <<https://wiki.csiamerica.com/display/kb/P-Delta+effect>>. Acesso em: 5 Março 2020.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318-14: Building Code Requirements for Structural Concrete. **Texto de revisão em discussão pública (maio de 2014)**.
- ARAÚJO, J. M. D. **Curso de concreto armado**. 4. ed. Rio Grande: Dunas, 2014.
- ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos**. 2. ed. Campinas/SP: Editora da Unicamp, 2003. ISBN 978-85-268-0889-8.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **NBR 6118 - Projeto de estrutura de concreto - Procedimento**. 3. ed. Rio de Janeiro: maio, 2014. 238 p.
- AZEVEDO, A. F. F. L. C. **Análise tridimensional de estruturas metálicas incluindo os efeitos de segunda ordem**. Porto: 1993. p. 162. Dissertação (Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 1993.
- BANKI, A. L. **Estudo sobre a inclusão da não linearidade geométrica em projetos de edifícios**. Florianópolis: 1993. p. 376. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.
- BORST, R. et al. **Nonlinear finite element analysis of solids and structures**. 2. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012.
- BOYCE, W. E. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. 607 p.
- BRAGA, D. C. **Avaliação de métodos numéricos de análise linear de estabilidade para perfis de aço formados à frio**. São Paulo: 2015. p. 121.

Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

BUENO, J. R.; LORIGGIO, D. D. Analysis of second order effects: case study. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 9, n. 4, p. 494-501, ago. 2016. ISSN 1983-4195.

BUENO, M. M. E. **Avaliação dos parâmetros de instabilidade global em estruturas de concreto armado**. Brasília: 2009. p. 105. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Faculdade de tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2009.

CARMO, R. M. S. **Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado**. São Paulo: 1995. p. 135. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

CHEN, W. F.; LUI, E. Stability Design of Steel Frames. **CRC Press - Taylor & Francis Group**, Boca Raton, FL 33431, EUA, 1991. DOI: 10.1139/I94-019.

CHEN, W.-F. **Plasticity in reinforced concrete**. Reprint. Originally published: New York : McGraw-Hill,c1982: J. Ross Publishing, 2007.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 3541-3557, August 2004. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.005>.

FEITOSA, L. A.; ALVES, E. C. Estudo da estabilidade global de edifícios altos com lajes protendidas. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 15, Mar./Apr. 2015. ISSN 1983-4195.

FRANCO, M. **Problemas de estabilidade nos edifícios de concreto**. Reunião Anual do Ibracon: Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado. São Paulo: [s.n.]. 1985.

FRANCO, M.; VASCONCELOS, A. C. Practical assessment of second order effects in tall buildings. **Coloquium on the CEB-FIP MC90**, Rio de Janeiro, p. 307-323, 1991.

GIONGO, J. S. **Concreto armado: projeto estrutural de edifícios**. Escola de Engenharia de São Carlos - USP. São Carlos, p. 184. 2007.

GÓMEZ, I. D. **Análise modal operacional: método de identificação baseados em transmissibilidade**. São Carlos: 2015. p. 195. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

GRECO, M. et al. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, Durham, v. 42, n. 12, p. 1079-1086, August 2006. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2006.04.007>.

KIN, N.-H.; SANKAR, B. V. **Introdução à análise e ao projeto em elementos finitos**. Rio de Janeiro: LTC, 2011. ISBN 978-85-216-1788-4.

LEITÃO, F. F. **Avaliação dos efeitos globais de segunda ordem em estruturas irregulares de concreto armado utilizando o período natural de vibração.** Campinas/SP: 2018. p. 167. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2018.

LEITAO, F. F. et al. **Evaluation of the global second-Order effects on reinforced concrete structures using the natural period of vibration.** Anais do 59<sup>a</sup> Congresso Brasileiro do Concreto – CBC2017. Bento Gonçalves: [s.n.]. 2017.

MARIN, M. C.; DEBS, M. K. E. Contribution to assessing the stiffness reduction of structural elements in the global stability analysis of precast concrete multi-storey buildings. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v. 5, n. 3, p. 14, Junho 2012. ISSN 1983-4195.

MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **Matrix Structural Analysis.** 2. ed. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2000. 480 p. ISBN 0471129186,9780471129189.

MEDEIROS, S. P. TQS Docs. **TQS**, 2020. Disponível em: <<http://docs.tqs.com.br/Docs/Details?id=3332&language=pt-BR>>. Acesso em: 5 Março 2020.

MONCAYO, W. J. Z. **Análise de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado.** São Carlos: 2011. p. 191. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

MORELATTO, T. **Cálculo de modos vibratórios no modelo estrutural de Euler-Bernoulli com condições de contorno Não - Clássicas.** Porto Alegre: PPGMAP da UFRGS, 2000.

NAGLE, R. K. et al. **Equações diferenciais.** 8. ed. São Paulo: Pearson Education, 2012. 570 p.

NIXON, D.; BEAULIEU, D.; ADAMS, P. F. Simplified Second Order Frame Analysis. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 2, n. 4, p. 602-605, December 1975. <https://doi.org/10.1139/l75-055>.

OLIVEIRA, J. C. A. **AVALIAÇÃO DA RIGIDEZ DE PÓRTICOS TRIDIMENSIONAIS DE CONCRETO ARMADO.** Brasília: 2009. p. 135. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção) - Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

ONDREJ. CSI KNOWLEDGE BASE. **CSI COMPUTER E STRUCTURES**, 2019. Disponível em: <<https://wiki.csiamerica.com/display/tp/P-Delta+effect+for+a+cantilevered+column>>. Acesso em: 5 Março 2020.

PASSOS, V. M.; FEITOSA, L. A.; ALVES, E. C. A. A. M. S. Analysis of instability of tall buildings with prestressed and waffle slabs. **Rev. IBRACON Estrut. Mater.** [online], São Paulo, v. 9, n. 2, p. 244-262, Mar./Apr. 2016. ISSN 1983-4195.

PAZ, M.; KIN, Y. H. **Structural Dynamics: Theory and Computation.** 6. ed. [S.l.]: Springer, Cham, 2019. XVIII, 634 p. ISBN 978-3-319-94743-3.

- PINTO, R. S. **Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado**. São Carlos: 1997. p. 130. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.
- PINTO, R. S. **Análise não-linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado**. Universidade de São Paulo: 2002. p. 130. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.
- RAYLEIGH, J. W. S. L.. **Theory of Sound**. New York, NY: Dover Publications, v. 2, 1945.
- REIS, D. G. **A Avaliação Modal Como Método de Previsão da Suscetibilidade de Estruturas a Efeitos de Segunda Ordem**. Campinas: 2016. p. 132. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.
- REIS, D. G. et al. A simplified approach, based on the natural period of vibration, to consider second-order effects in reinforced concrete frames. **58º Congresso Brasileiro do Concreto**, Belo Horizonte/MG, 2016.
- REIS, D. G. et al. Simplified Approach Based on the Natural Period of vibration for considering second-order effects on reinforced concrete frames. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 18, n. 5, p. 20, 2018. DOI: 10.3233/SAV-2012-0711.
- RUTENBERG, A. A direct P-delta analysis using standard plane frame computer programs. **Computers & Structures**, v. 14, n. 1-2, p. 97-102, 1981. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90088-2](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90088-2).
- SHAKER, F. J.; CENTER, L. R. **EFFECT OF AXIAL LOAD ON MODE SHAPES AND FREQUENCIAS BEAMS**. National Aeronautics and Space Administration. Cleveland, Ohio, p. 32. 1975.
- SINGH, H.; SINGH, G. M. Non-linear analysis of frames. **Computers & structures**, v. 44, n. 6, p. 1377-1379, September 1992. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90379-E](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90379-E).
- STATLER, D. E.; ZIEMIAN, R. D.; ROBERTSON, L. E. The Natural Period as an Indicator of Second-Order Effects. **Proceedings of the Annual Stability Conference Structural Stability Research Council**, p. 136, 2011.
- TEIXEIRA-DIAS, F. et al. **Método dos elementos finitos: técnicas de simulação numérica em Engenharia**. Lisboa: ETEP, 2010. ISBN 978-9728480257.
- VASCONCELOS, A. C. Em que casos não se deve aplicar o processo simplificado do  $\gamma z$  para determinação dos efeitos de 2ª Ordem? **Artigo Biblioteca Digital TQS**, São Paulo, 2000. Disponível em: <<http://www.tqs.com.br/suporte-e-servicos/biblioteca-digital-tqs/89/175>>. Acesso em: 27 mar. 2019.

## ANEXO A – EXEMPLO DIDÁTICO P-DELTA ITERATIVO

Com o intuito de esclarecimento do método P-delta iterativo, temos o seguinte exemplo didático que foi adaptado de Moncayo (2011), utilizando-se de fundamentos apresentados por Gaiotti e Smith (1989): Um elemento engastado-livre de 2,8m de comprimento (L), carga horizontal (F) de 14kN e vertical (P) de 140kN, sendo desconsiderado os respectivos coeficientes de ponderação definidos nas normativas para os valores de cálculo das ações, módulo de elasticidade tangente inicial de 30672,46Mpa, seção transversal de 0,2m por 0,2m.

Com tais informações, busca-se calcular os momentos na base do elemento citado levando em conta os efeitos de segunda ordem pelo processo P-delta para um erro em torno de 0,01% do momento da iteração anterior.

Note que por se tratar de um elemento engastado-livre, o exemplo será trabalhado em etapas, seguindo o processo ilustrativo da Figura 2.

Em etapas, temos que:

I. Inércia da seção:

$$I = \frac{base * altura^3}{12} = \frac{0,2 * 0,2^3}{12} = 0,000133m^4. \quad (A. 1)$$

II. Deslocamento horizontal devido à ação da carga (F):

$$\Delta = \frac{F * L^3}{3 * (E * I)_{sec}}. \quad (A. 2)$$

De acordo com a NBR 6118:2014, para consideração da não linearidade física, temos que  $(EI)_{sec} = 0,8E_{ci}I_c$ , logo:

$$\Delta = \frac{14 * 2,80^3}{3 * (0,80 * 30672460 * 0,000133)} = 0,035785m. \quad (A. 3)$$

III. Momento na base do elemento engastado-livre:

$$M1 = F * L = 14 * 2,8 = 39,2kN.m \quad (A. 4)$$

$$M2 = M1 + P * \Delta = 39,2 + 140 * 0,035785 = 44,21kN.m \quad (A. 5)$$

IV. 1° força horizontal fictícia:

Há necessidade de encontrar um valor de força horizontal fictícia ( $F_f$ ) que gera o mesmo momento que  $(P * \Delta)$  na base do pilar, ou seja:

$$F_{f1} = \frac{P * \Delta}{L} = \frac{140 * 0,035785}{2,80} = 1,78923kN \quad (A. 6)$$

V. 1° iteração: Deslocamento horizontal devido à ação da carga fictícia ( $F_{f1}$ ):

$$\Delta_1 = \frac{F_{f1} * L^3}{3 * (0,8 * E_{ci} * I)} = \frac{1,78923 * 2,80^3}{3 * (0,80 * 30672460 * 0,000133)} = 0,00400167m \quad (A. 7)$$

VI. Momento na base do elemento engastado-livre:

$$M3 = M2 + P * \Delta_1 = 44,21 + 140 * 0,00400167 = 44,770kN.m \quad (A. 8)$$

VII. Erro:

$$\mathbf{Erro} = M3 - M2 = 0,560 = \mathbf{1,25\%} \quad (A. 9)$$

VIII. 2° força horizontal fictícia:

$$F_{f2} = \frac{P * \Delta_1}{L} = \frac{140 * 0,00400167}{2,80} = 0,2000083kN \quad (A. 10)$$

IX. 2° iteração: Deslocamento horizontal devido à ação da carga fictícia ( $F_{f2}$ ):

$$\Delta_2 = \frac{F_{f2} * L^3}{3 * (0,8 * E_{ci} * I)} = \frac{0,2000083 * 2,80^3}{3 * (0,80 * 30672460 * 0,000133)} = 0,00044749m \quad (A. 11)$$

X. Momento na base do elemento engastado-livre:

$$M4 = M3 + P * \Delta_2 = 44,770 + 140 * 0,00044749 = 44,833kN.m \quad (A. 12)$$

XI. Erro

$$\mathbf{Erro} = M4 - M3 = 0,063 = \mathbf{0,1397\%} \quad (A. 13)$$

XII. 3° força horizontal fictícia:

$$F_{f3} = \frac{P * \Delta_2}{L} = \frac{140 * 0,00044749}{2,80} = 0,0223746kN \quad (A. 14)$$

XIII. 3° iteração: Deslocamento horizontal devido à ação da carga fictícia ( $F_{f3}$ ):

$$\Delta_3 = \frac{F_{f3} * L^3}{3 * (0,8 * E_{ci} * I)} = \frac{0,0223746 * 2,80^3}{3 * (0,80 * 30672460 * 0,000133)} = 0,0000050042m \quad (\text{A. 15})$$

XIV. Momento na base do elemento engastado-livre:

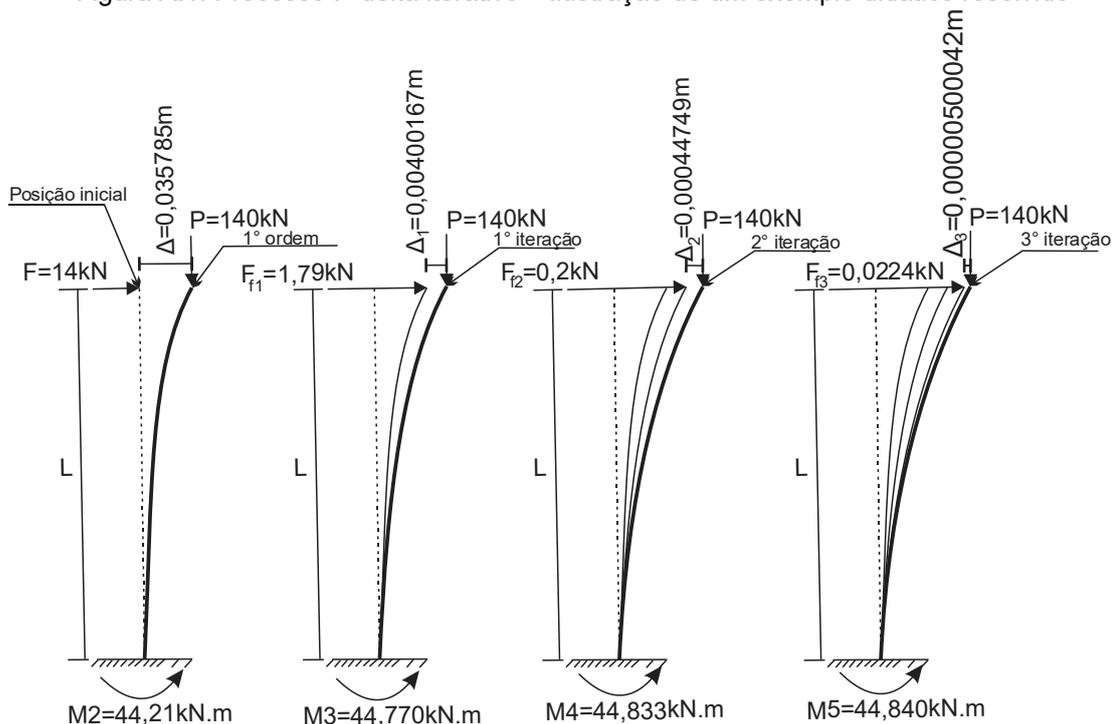
$$M5 = M4 + P * \Delta_3 = 44,833 + 140 * 0,0000050042 = 44,840kN.m \quad (\text{A. 16})$$

XV. Erro:

$$\text{Erro} = M5 - M4 = 0,007 = 0,01\% \therefore \text{OK!!!} - \text{Interrompe as iterações.} \quad (\text{A. 17})$$

Portanto, para o elemento em questão, temos o valor final do momento na base do pilar de  $M5 = 44,840kN.m$ , obtido pelo processo P-delta iterativo. Observe que com a restrição inicial para que o erro fosse em torno de 0,01% do momento da iteração anterior, na última iteração teve um erro de  $M5 - M4 = 0,007 = 0,01\%$ . A Figura A.1 ilustra o processo de forma didática.

Figura A.1: Processo P-delta iterativo – ilustração de um exemplo didático resolvido



Fonte: Elaborado pelo autor, 2020.