Universidade Federal da Integração Latino-Americana
INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA E TERRITÓRIO (ILATIT)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO Em ENGENHARIA CIVIL (PPG ECI)

ESTUDIO Y APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ANÁLISIS NO LINEAL GEOMÉTRICO MODAL P-DELTA

LINEA DE INVESTIGACIÓN: **ESTRUCTURAS**

JEFFER ROUSSELL CORDOVA DE LA CRUZ

Foz do Iguaçu
2022

Universidade Federal da Integração Latino-Americana
INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE TECNOLOGIA, INFRAESTRUTURA E TERRITÓRIO (ILATIT)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO Em ENGENHARIA CIVIL (PPG ECI)

ESTUDIO Y APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ANÁLISIS NO LINEAL GEOMÉTRICO MODAL P-DELTA

LINEA DE INVESTIGACIÓN: **ESTRUCTURAS**

JEFFER ROUSSELL CORDOVA DE LA CRUZ

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Ivan Dario GOMEZ ARAUJO

Foz do Iguaçu

2022

JEFFER ROUSSELL CORDOVA DE LA CRUZ

ESTUDIO Y APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ANÁLISIS NO LINEAL GEOMÉTRICO MODAL P-DELTA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA), como parte integrante dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

BANCA EXAMINADORA

_____

Orientador: Prof. Dr. Ivan Dario GOMEZ ARAUJO
Universidade Federal da Integração Latino-Americana - UNILA

_____

Prof. Dr. Emerson FELIPE FELIX
Universidade de São Paulo - USP

_____

Prof. Dr. Jesus Daniel VILLALBA MORALES
Pontificia Universidad Javeriana

Foz do Iguaçu - PR, _____ de _____ de _____.

Catalogação elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação
Catalogação de Publicação na Fonte. UNILA - BIBLIOTECA LATINO-AMERICANA - PTI

C796e
Cordova de la Cruz, Jeffer Roussell.
Estudio y aplicación del método de análisis no lineal geométrico modal p-delta / Jeffer Roussell Cordova de la Cruz. - Foz do Iguaçu, 2023.
118 fls.: il.

Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Instituto Latino-Americano de Tecnologia, Infraestrutura e Território (ILATIT), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPG ECI).
Orientador: Ivan Dario Gomez Araujo.

1. Geometria espacial. 2. Análise modal. I. Araujo, Ivan Dario Gomez. II. Título.

CDU 514.12

Dedico este trabajo a mis padres, Vilma De La Cruz Hinostroza y Roberto Córdova Cavero, por su confianza y su apoyo incondicional, y a Lourdes Flores Bordais por la fortaleza y motivación para seguir siempre adelante.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco, en primer lugar, a Dios por todas las bendiciones concedidas y por guiar siempre mi camino y permitir la realización de este logro.

A mis padres, Vilma y Roberto, por sus enseñanzas, por todo su apoyo y por la confianza

A mis hermanos, Danny y Jhomar, quienes siempre han estado conmigo.

A Lourdes Flores Bordais, por su apoyo, por la fortaleza, por el cariño y por estar conmigo en todo momento, a pesar de las circunstancias difíciles que se presentaron en el camino, para seguir siempre adelante y ser mejor.

A mis buenos amigos Jhomelin y Franz, quienes me apoyaron mucho durante mi estadía en Brasil y con quienes compartí gratos momentos.

Agradezco a mis profesores del programa de Maestría, por los conocimientos impartidos en las aulas durante mi estadía en la Universidad, en especial agradezco a mi orientador Dr. Iván Darío GOMEZ ARAUJO, por su dedicación, paciencia y por haberme acompañado durante todo el proceso de mi investigación y de mi formación académica.

Finalmente Agradezco a la Universidade Federal da Integração Latino-Americana (UNILA) por la oportunidad de pertenecer al programa de la maestría, así como por el apoyo financiero de la Bolsa Institucional-PROBIU, edital N° 27/2021 - PRPPG

Aunque la naturaleza comienza con la razón y termina en la experiencia, es necesario que hagamos lo contrario, es decir, comenzar con la experiencia y, a partir de ahí, investigamos la razón.

Leonardo Da Vinci

DE LA CRUZ, J. C. *Estudio y aplicación del método de análisis no lineal geométrico modal p-delta*. 119p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2022.

RESUMEN

La no linealidad Geométrica que origina los efectos denominados de segundo orden, es un fenómeno que está presente en toda estructura que presenta deformación en sus elementos bajo un conjunto de cargas o incluso bajo su peso propio. Recientes trabajos han demostrado que existe una relación entre el periodo natural de vibración y los efectos globales de segundo orden, debido a que ambos dependen de las matrices de rigidez y de masa de la estructura, y es a partir de esta relación entre los parámetros dinámicos y los efectos no lineales que surge la metodología denominada Modal P-delta (Ferreira, 2020), como un método de análisis no lineal geométrico simplificado, que establece el cálculo de los modos de vibración de una estructura cargada y sus frecuencias correspondientes a partir de la interpolación de los modos de vibración de la estructura descargada y los modos de pandeo con carga crítica. En ese sentido, en el presente trabajo se aborda el estudio y la extensión de la aplicación de la metodología Modal P-delta a estructuras tridimensionales, para lo cual, en primer lugar, se desarrolla la corroboración de los resultados mediante su aplicación en modelos simples, correspondientes a una columna empotrada-libre y un pórtico plano, donde se determina que la metodología aproxima correctamente la respuesta no lineal geométrica de estructuras en dos dimensiones resultando incluso ser superior al método P-delta tradicional en términos de tiempo computacional, seguidamente, se desarrolla la extensión de sus formulaciones teniendo en cuenta la adición del eje de coordenadas “z”, con lo que se realiza su aplicación en dos modelos de pórticos regulares tridimensionales de distintos niveles, determinándose que la metodología deja de ser eficaz para el análisis de estructuras tridimensionales que presentan modos de vibración y de pandeo que no guardan relación entre sí, por ello, finalmente se propone la metodología denominada Modal P-delta modificado para realizar el análisis no lineal geométrico de estructuras tridimensionales a partir del análisis modal y de pandeo, y se realiza su aplicación en tres modelos de pórticos tridimensionales, considerando que uno de ellos es irregular tanto en planta como en altura y su primer modo de vibración es uno torsional, a pesar de ello, los resultados obtenidos han sido muy precisos en comparación con la metodología P-delta tradicional, permitiendo la construcción de curvas de equilibrio muy similares hasta cuando se alcanza la carga crítica, a excepción de los estados de carga con fuerzas verticales que no permitan una buena distribución de los esfuerzos internos, los cuales varían significativamente conforme la magnitud de la carga aplicada se acerque a la carga crítica,. De cualquier forma, la metodología propuesta ha demostrado ser muy eficaz, ofreciendo resultados muy precisos para el análisis de cualquier tipo estructuras porticadas tridimensionales bajo cargas que alcancen hasta el 50% de la carga crítica de Pandeo.

Palabras clave: No linealidad Geométrica, Análisis modal, Análisis de Pandeo, Efectos de segundo orden P-delta, Estructuras tridimensionales.

DE LA CRUZ, J. C. *Study and application of the modal p-delta geometric nonlinear analysis method*. 119p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2022.

ABSTRACT

Geometric non-linearity that originates the so-called second-order effects is a phenomenon that is present in any structure that presents deformation in its elements under a set of loads or even under its own weight. Recent works have shown that there is a relationship between the natural period of vibration and the second order global effects, since both depend on the stiffness and mass matrices of the structure, and it is from this relationship between the dynamic parameters and the non-linear effects that arise from the methodology called Modal P-delta (Ferreira, 2020), as a simplified geometric non-linear analysis method, which establishes the calculation of the vibration modes of a loaded structure and their corresponding frequencies from the interpolation of the vibration modes of the unloaded structure and the critically loaded buckling modes. In this sense, in the present work the study and extension of the application of the Modal P-delta methodology to three-dimensional structures is addressed, for which, first of all, the corroboration of the results is developed through their application in simple models. , corresponding to a free-embedded column and a flat frame, where it is determined that the methodology correctly approximates the geometric nonlinear response of two-dimensional structures, resulting in being even superior to the traditional P-delta method in terms of computational time, then it is develops the extension of its formulations taking into account the addition of the coordinate axis "z", with which its application is carried out in two models of regular three-dimensional frames of different levels, determining that the methodology is no longer effective for the analysis of structures three-dimensional structures that present modes of vibration and buckling that are not related to each other, therefore, fi Finally, the methodology called Modal P-delta modified is proposed to carry out the nonlinear geometric analysis of three-dimensional structures from the modal and buckling analysis, and its application is carried out in three models of three-dimensional frames, considering that one of them is irregular both in plan as in height and its first mode of vibration is a torsional one, despite this, the results obtained have been very precise in comparison with the traditional P-delta methodology, allowing the construction of very similar equilibrium curves even when it is reached. the critical load, with the exception of load states with vertical forces that do not allow a good distribution of internal forces, which vary significantly as the magnitude of the applied load approaches the critical load. In any case, the proposed methodology has proven to be very effective, offering very precise results for the analysis of any type of three-dimensional framed structures under loads that reach up to 50% of the critical Buckling load.

Key words: Geometric non-linearity, Modal analysis, Buckling analysis, P-delta second order effects, Three-dimensional structures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1**.** Momentos en la Base de un pilar (a) Análisis de Primer Orden (b) Análisis de segundo Orden 16
Figura 2.2. *Proceso P-Delta Iterativo en un Pilar* 17
Figura 2.3. Cargas ficticias en construcciones de varios niveles 17
Figura 2.4. a) Pórtico con cargas Verticales y Laterales b) Gráfico de Carga Lateral vs Desplazamiento 19
Figura 2.5. a) Barras diagonales fictícias b) Columnas Fictícias 20
Figura 2.6. Modelo simplificado de una estructura deformada 23
Figura 2.7. Sistema masa-resorte de un solo grado de libertad 24
Figura 3.1. a) Representación de las coordenadas de vibración en una viga b) Convención de Signos para fuerzas y momentos en una porción arbitraria del elemento. 26
Figura 3.2. Columna empotrada-libre con desplazamiento asociado 29
Figura 3.3 Relación entre la fuerza axial de compresión y la primera frecuencia natural para una columna empotrada-libre 31
Figura 3.4. Desplazamiento nodal correspondiente al primer modo de Vibración para diferentes pasos de carga axial 32
Figura 3.5 *Rutina del Análisis Modal P-delta* 40
Figura 4.1. Esquema de los modelos analizados a) Pilar empotrado-libre b) Pórtico Plano 42
Figura 4.2 Relación entre resultados del análisis Modal P-delta y P-delta iterativo 43
Figura 4.3 Error de los desplazamientos obtenidos en el análisis Modal p-delta para distinto número modos considerados 44
Figura 4.4. Estado de Carga 1 (Izquierda) y Estado de Carga 2 (Derecha) 46
Figura 4.5 Resultados del pórtico Estado de Carga 1 47
Figura 4.6 Resultados del pórtico Estado de Carga 2 47
Figura 4.7 Error de la metodología Modal P-delta para diferente número de modos usados en el análisis del pórtico plano - Estado de Carga 1 48
Figura 4.8 Error de la metodología Modal P-delta para diferente número de modos usados en el análisis del pórtico plano - Estado de Carga 2 48
Figura 5.1. Esquema de Pórtico Tridimensional (M-1) 55
Figura 5.2. Estado de cargas (C-1.1) aplicadas al Pórtico Tridimensional 56

Figura 5.3. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – Estado de Carga “C-1” 57
Figura 5.4. Respuesta en “y” - Modelo “M-1” – Estado de Carga “C-1” 58
Figura 5.5. Representación del MAC entre los modos de vibración y modos de Pandeo de la estructura (M-1) 61
Figura 5.6. Esquema de Pórtico Tridimensional (M-2) 62
Figura 5.7. Estado de Cargas (C-2.1) 63
Figura 5.8. Esquema del pórtico en el plano superior del modelo (M-2) bajo estado de carga (C-2.1) 63
Figura 5.9. Esquema del pórtico en el plano frontal del modelo (M-2) bajo estado de carga (C-2.1) 64
Figura 5.10. Desplazamiento en “x” (M-2) 65
Figura 5.11. Desplazamiento en “y” (M-2) 65
Figura 5.12. Representación del MAC entre los modos de vibración y modos de Pandeo de la estructura modelo “M-2” 67
Figura 6.1 *Rutina del Análisis Modal P-delta Modificado* 70
Figura 6.2. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – Estado de Carga “C-1.1” 72
Figura 6.3. Respuesta en “y” - Modelo M-1 – Estado de Carga “C-1.1” 72
Figura 6.4. Error en el sentido “x” 73
Figura 6.5. Error en el sentido “y” 73
Figura 6.6. Estados de carga para el modelo M-1 74
Figura 6.7. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – estado de carga C-1.2 75
Figura 6.8. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – estado de carga C-1.4 76
Figura 6.9. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – estado de carga C-1.5 76
Figura 6.10. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – estado de carga C-1.6 77
Figura 6.11. Respuesta en “y” - Modelo (M-1) -estado de carga C-1.3 77
Figura 6.12. Respuesta en “y” - Modelo (M-1) -estado de carga C-1.4 78
Figura 6.13. Respuesta en “y” - Modelo (M-1) -estado de carga C-1.5 78
Figura 6.14. Respuesta en “y” - Modelo (M-1) -estado de carga C-1.6 79
Figura 6.15. Error en “x” para el análisis del Modelo (M-1) bajo diferentes estados de carga 80
Figura 6.16. Error en “y” para el análisis del Modelo (M-1) bajo diferentes estados de carga 81
Figura 6.17. Respuesta en “x” - Modelo M-2 – Estado de Carga “C-2.1” 83
Figura 6.18. Respuesta en “y” - Modelo M-2 – Estado de Carga “C-2.1” 83

Figura 6.19. Error en el sentido “x” 84
Figura 6.20. Error en el sentido “y” 84
Figura 6.21. Estados de carga analizados para el modelo M-2 85
Figura 6.22. Respuesta en “x” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.2 87
Figura 6.23. Respuesta en “x” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.4 87
Figura 6.24. Respuesta en “x” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.5 88
Figura 6.25. Respuesta en “x” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.6 88
Figura 6.26. Respuesta en “y” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.3 89
Figura 6.27. Respuesta en “y” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.4 89
Figura 6.28. Respuesta en “y” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.5 90
Figura 6.29. Respuesta en “y” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.6 90
Figura 6.30. Error en “x” para el análisis del Modelo (M-2) bajo diferentes estados de carga 92
Figura 6.31. Error en “y” para el análisis del Modelo (M-2) bajo diferentes estados de carga 92
Figura 6.32. Esquema de Pórtico Tridimensional (M-3) 94
Figura 6.33. a) Esquema del modelo (M-3) en el plano (x-y) correspondiente al 2do nivel (h=5.00m) b) Esquema del modelo (M-3) en el plano (x-y) correspondiente al penúltimo nivel (h=33.00m) 95
Figura 6.34. a) Esquema del modelo (M-3) en el plano Frontal (x-z) b) Esquema del modelo (M-3) en el plano posterior derecho (y-z) 96
Figura 6.35. Estados de carga analizados para el modelo M-3 97
Figura 6.36. Respuesta en “x” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.1” 99
Figura 6.37. Respuesta en “x” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.2” 100
Figura 6.38. Respuesta en “x” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.3” 100
Figura 6.39. Respuesta en “x” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.4” 101
Figura 6.40. Respuesta en “y” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.1” 101
Figura 6.41. Respuesta en “y” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.2” 102
Figura 6.42. Respuesta en “y” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.3” 102
Figura 6.43. Respuesta en “y” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.4” 103
Figura 6.44. Error en “x” para el análisis del Modelo (M-3) bajo diferentes estados de carga 104
Figura 6.45. Error en “y” para el análisis del Modelo (M-3) bajo diferentes estados de carga 104

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Propiedades del Pilar 42
Tabla 2. Propiedades del Pórtico Plano 45
Tabla 3. Propiedades del Pórtico Plano 56
Tabla 4. Comparación de Modos del Modelo (M-1) bajo es estado de carga (C-1) 58
Tabla 5. Propiedades del Pórtico Tridimensional (M-2) 62
Tabla 6. Comparación de Modos del Modelo (M-2) bajo estado de carga (C-2.1)..... 66
Tabla 7. Participación de la carga estática y número de modos usados en el análisis.. 71
Tabla 8. Participación de la carga estática y número de modos correspondientes 75
Tabla 9. Participación de la carga estática y número de modos correspondientes 82
Tabla 10. Participación de la carga estática y número de modos correspondientes 86
Tabla 11. Propiedades del Pórtico Tridimensional (M-3) 96
Tabla 12. Participación de la carga estática y número de modos correspondientes 99

SUMARIO

1 INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICATIVA:.....9
1.1 OBJETIVOS 12
1.1.1 Objetivo General: 12
1.1.2 Objetivos Específicos: 13
1.2 PRESENTACIÓN DE LA DISERTACIÓN: 13
2 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA: 15
2.1 EFECTOS GLOBALES DE SEGUNDA ORDEN EN ESTRUCTURAS. 15
2.1.1 No Linealidad Geométrica. 15
2.2 METODOS PARA LA EVALUACIÓN DE LOS EFECTOS GLOBALES DE SEGUNDA ORDEN.....16
2.2.1 Métodos Iterativos. 16
2.2.2 Métodos Directos 20
2.2.3 Métodos Simplificados.....20
3 FUNDAMENTOS Y DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA MODAL P-DELTA.....26
3.1 Efecto de la Carga Axial en los Modos de Vibración y Frecuencias...26
3.2 Relación entre los Modos de Pandeo y los Modos de Vibración en una Columna Empotrada-libre. 32
3.3 Análisis modal y análisis de pandeo lineal de una estructura.....33
3.3.1 Método de Elementos Finitos: 34
3.3.2 Análisis Lineal de Pandeo: 34
3.3.3 Análisis Modal: 35
3.4 Desplazamiento Estático a Partir de los Modos de Vibración y Frecuencias. 37
3.5 Análisis Modal P-delta. 38
4 APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA MODAL P-DELTA:.....41

4.1 Consideraciones Generales. 41
4.2 PILAR ENGASTADO – LIBRE: 42
4.3 PÓRTICO PLANO: 44
5 METODOLOGÍA MODAL P-DELTA EN ESTRUCTURAS DE 3 DIMENSIONES: 50
5.1 Consideraciones para el Análisis De Estructuras en 3 Dimensiones. 50
5.1.1 Matriz de rigidez elástica 3D. 50
5.1.2 Matriz de masa 3D. 51
5.1.3 Matriz de rigidez geométrica 3D. 51
5.1.4 Matriz de transformación 3D. 52
5.2 Aplicación de la Metodología Modal P-delta en 3 Dimensiones. 55
6 METODOLOGÍA MODAL P-DELTA MODIFICADO: 69
6.1 Descripción de la Metodología: 69
6.2 Aplicación de la Metodología Modal P-delta Modificado: 71
6.2.1 Modelo (M-1): 71
6.2.2 Modelo (M-2): 82
6.2.3 Modelo (M-3): 94
7 CONSIDERACIONES FINALES: 108
7.1 CONCLUSIONES: 108
7.2 SUGERENCIAS PARA NUEVAS PESQUISAS 109
8 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS: 110

1 INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICATIVA:

A lo largo del tiempo y hasta la actualidad, la mayoría de los códigos y normas alrededor del mundo, se han regido principalmente por los análisis lineales o de primer orden, considerando que los materiales y elementos estructurales, tienen un comportamiento elástico y presentan rigidez constante. Si bien es cierto este análisis facilita mucho el proceso de cálculo y proporciona una aproximación aceptable a las características reales de la mayoría de las estructuras, hoy en día es sabido que las suposiciones de dichos análisis son en realidad incorrectas y no representan el verdadero comportamiento de las estructuras frente a las solicitaciones impuestas.

Es por ello por lo que surgen los análisis no lineales como alternativa para predecir el comportamiento de una estructura que sea lo más cercano al comportamiento real bajo la acción de determinadas cargas, esto es debido a que, en estos análisis se toman en consideración la no linealidad física del material y los efectos de segunda orden surgidos de la no linealidad geométrica de sus elementos. Sin embargo, estos métodos exigen el desarrollo de cálculos más complejos lo que se traduce en mayores costos computacionales.

Los efectos obtenidos del análisis de la estructura en su configuración geométrica inicial son llamados efectos de primera orden, sin embargo, al realizar el análisis cuando la estructura tiene una configuración deformada, producto de las solicitaciones a las que está sometida, se determinará la aparición de nuevos esfuerzos los cuales son conocidos como efectos de segundo orden (P-Delta) (ABNT NBR 6118:2014) que surgen por el efecto de la no linealidad geométrica y se tornan importantes en estructuras de gran esbeltez y gran altura.

Últimamente el crecimiento poblacional y la reducción de los espacios han ocasionado que las ciudades sufran un fenómeno de verticalización de sus estructuras reemplazando las construcciones de un solo nivel o pocos niveles por otras de varios con la finalidad de aprovechar en lo más posible el espacio aéreo de una determinada área, esto es apreciable a simple vista por la cantidad de edificios altos con más de 20 niveles que se encuentran en el entorno de las principales urbes alrededor del mundo.

Así mismo el uso de materiales de gran resistencia como el acero estructural o incluso el concreto, que gracias al avance de la tecnología ahora es posible su fabricación con altas resistencias que superan los 50 MPa, en comparación de hace unas décadas, en la

que su resistencia habitual era de alrededor de 15 MPa a 20 MPa (MONCAYO, 2011), ha ocasionado considerables cambios en los diseños estructurales, pues mayores resistencias volvieron factibles los diseños de elementos estructurales con menor sección y/o mayor esbeltez. Sin embargo, el hecho de construir elementos esbeltos conlleva a que las estructuras tiendan a soportar mayores esfuerzos laterales, sobre todo bajo la acción de cargas dinámicas como el viento, sismos u otros, que, en combinación con los esfuerzos verticales, producirán un incremento de esfuerzos produciendo el efecto denominado P-Delta o efecto de segundo orden.

Aunque los efectos de segundo orden son generalmente despreciados, debido a que en ciertas ocasiones estos resultan en incrementos de esfuerzos relativamente pequeños que no comprometen la estabilidad estructural, existen casos en los que despreciar estos efectos y/o no estimarlos correctamente podría resultar en diseños de estructuras erróneos que presenten un alto riesgo de colapso.

Es por ello por lo que se han desarrollado diferentes métodos para la estimación de los efectos de segundo orden (P-delta), de los que se destacan: el método de Factor de amplificación, métodos directos, métodos iterativos y el método de los miembros con propiedades negativas (GAIOTTI & STAFFORD, 1989).

El método de Factor de Amplificación o también llamado método simplificado consiste en la aplicación por un factor a los momentos y/o desplazamientos obtenidos en los análisis de primer orden para así estimar los momentos y desplazamientos que surgen por el efecto de segundo orden, esta metodología es de rápida aplicación y cuenta con una aceptable aproximación y fue adoptado por la norma brasilera ABNT NBR 6118:2014, donde además se presenta un parámetro de inestabilidad “α”, que es usado para determinar la susceptibilidad de la estructura a estos efectos, es decir, determina si se hace necesario o no un análisis completo de efectos de segunda orden.

Los métodos iterativos son métodos más exactos, y consisten básicamente en repetir continuamente los análisis de primer orden en las estructuras una vez estas se encuentran deformadas, satisfaciendo en todo momento el equilibrio de esfuerzos, así el procedimiento se realiza hasta que los resultados de esfuerzos y deformaciones resultantes converjan en cantidades con diferencias mínimas en cada iteración. Gaiotti y Stafford (1989) describen dos procedimientos para el desarrollo de estos métodos, el primero consiste en transformar por etapas el esfuerzo originado por las cargas horizontales y la excentricidad, en fuerzas laterales equivalentes que se incrementan a las

fuerzas laterales actuantes en la estructura, el segundo corresponde en determinar la deformada en el análisis de primer orden para después ser tomada como un nuevo cuerpo y ser cargado hasta obtener una nueva deformación y repetir el proceso. Este método es un método exacto, pues permite determinar con mucha precisión los esfuerzos y desplazamientos debido a los efectos de segundo orden, sin embargo, su aplicación y desarrollo pueden llegar a ser muy complejos, sobre todo en edificios altos de varios niveles, lo que generaría que se den incrementos tanto en tiempos de procesamiento como en los costos computacionales.

Los métodos directos por otra parte, son aquellos en los que se considera un ajuste a la estructura para obtener resultados que ya contemplan el efecto de segundo orden, por lo cual dentro de estos se puede considerar a los propuestos por: Nixon et al. (1975), que sugiere la adición de barras diagonales y al propuesto por Rutenberg (1981) que consiste en la adición de columnas ficticias laterales, de igual forma recientemente se han propuesto metodologías directas basadas en parámetros dinámicos para determinar efectos de segunda orden. Esas metodologías aprovechan la relación existente entre frecuencias naturales y la rigidez de la estructura. Así podemos referenciar estudios como el de Statler et al. (2011), quien hizo uso del periodo fundamental de vibración para predecir la amplificación de esfuerzos debido a los efectos de segundo orden en estructuras usando un modelo estructural simplificado de un sistema de un grado de libertad, considerando a estructura como un sistema rígido. Reis et al. (2016), usa un procedimiento similar a Statler, sin embargo, el modelo de la estructura es definido como una columna arriostrada flexible. En ese estudio es propuesto la evaluación de un factor de amplificación "x_t" que aproxima los efectos de segundo orden a partir de los momentos de primer orden, aplicado a estructuras porticadas regulares de concreto armado. Más tarde Leitão (2018) complementaria su estudio extendiendo el uso del parámetro "x_t" a estructuras con irregularidad en planta y en altura, obteniendo resultados aceptables.

Las metodologías anteriores basadas en la frecuencia natural de la estructura muestran facilidad para estimar los factores de amplificación debido a los efectos de segundo orden, ya que los factores de amplificación dependen solo de la frecuencia natural y por lo tanto requiere solo un análisis modal. Sin embargo, estas metodologías se basan en aproximaciones que se utilizan para realizar una verificación rápida de la susceptibilidad de una estructura a los efectos de segundo orden y son comúnmente utilizados en normas

o códigos para el diseño de concreto armado durante las etapas preliminares del diseño. Por lo tanto, estos factores de amplificación solo son válidos para un tipo particular de estructura (por ejemplo, pórticos restringidos) y están limitado para valores pequeños de amplificación, menores a 1.3. Además, estos métodos no pueden determinar la curva de la trayectoria de equilibrio antes de la carga de pandeo.

Recientemente, Ferreira (2020), propuso una metodología simplificada y aproximada para realizar el análisis no lineal geométrico denominado Modal P-delta, aprovechando la relación entre los parámetros dinámicos y los efectos de segundo orden, así como la interpolación entre los modos de inestabilidad de pandeo y los modos de vibración de la estructura, y de su propiedad de ortogonalidad, para estimar las frecuencias naturales y las formas de vibrar de la estructura cargada. La metodología propuesta proporciona la trayectoria de equilibrio previa al pandeo NL, que, a diferencia de otras metodologías propuestas no solo da una indicación de la susceptibilidad a los efectos de segundo orden o la definición de un factor de amplificación, así mismo se demuestra que computacionalmente es más rápida que el método tradicional P-delta, obteniendo una reducción de tiempo del 50%. Aunque el método obtuvo resultados óptimos en comparación con metodología tradicional P-delta, esta metodología fue desarrollada y probada solo en modelos de columnas con varios grados de libertad y en pórticos planos (Estructuras en dos dimensiones), ambos considerando la aplicación de cargas estáticas.

En ese contexto, en el presente trabajo se extiende el uso de la metodología propuesta por Ferreira (2020), para su aplicación en el análisis no lineal geométrico de estructuras tridimensionales.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo General:

Extender la metodología Modal P-Delta, basada en el análisis modal y análisis de pandeo, para su aplicación en el análisis de estructuras tridimensionales considerando el efecto de la no linealidad geométrica.

1.1.2 Objetivos Específicos:

El presente estudio se desenvolverá de acuerdo con los siguientes objetivos específicos:

- Corroborar la metodología Modal P-delta propuesta por Ferreira (2020) para estimar los efectos de segundo orden, mediante su desarrollo y/o aplicación en distintos modelos estructurales y a partir de ello buscar su optimización para obtener mejores resultados.

- Desarrollar y extender las formulaciones de la metodología Modal P-delta para su aplicación al análisis de estructuras tridimensionales.

- Corroborar los resultados obtenidos con los métodos tradicionales y verificar su eficiencia en términos de aproximación y costo computacional.

1.2 PRESENTACIÓN DE LA DISERTACIÓN:

El presente trabajo está dividido en seis capítulos, organizados de la siguiente manera:

El capítulo 1, presenta la introducción del tema abordado, así mismo se expone la justificación y los objetivos propuestos para la presente investigación.

El capítulo 2, presenta la revisión bibliográfica de las investigaciones desarrolladas existentes relacionadas al tema de la no linealidad geométrica y su evaluación.

El capítulo 3, presenta la metodología Modal P-delta propuesta por Ferreira (2020), donde se especifican las bases teóricas y formulaciones que sustentan el método, presentando la relación que existe entre los modos de vibración y los modos de pandeo a partir de los cuales se determinan los desplazamientos de la estructura considerando el efecto de la no linealidad geométrica de sus elementos.

El capítulo 4, Se describe la aplicación de la metodología Modal P-delta, en dos modelos correspondientes a un pilar empotrado-libre, sujeto a una carga lateral y una carga axial crítica y a un pórtico plano, sujeto a dos estados de carga correspondientes a cargas puntuales y distribuidas.

El capítulo 5, Se presenta la extensión de las formulaciones de la metodología "Modal P-delta" para su aplicación en el análisis de estructuras tridimensionales, así mismo se realiza su aplicación a dos modelos correspondientes a pórticos tridimensionales regulares de distintos niveles, se realiza también la comparación de los resultados con aquellos obtenidos mediante la metodología tradicional p-delta iterativo y finalmente se evalúan los errores existentes.

El capítulo 6, Se presenta la metodología denominada "Modal P-delta Modificado" que se basa en el Modal P-delta, donde se describe su desarrollo, sus formulaciones y la rutina de cálculo, así mismo, se realiza su aplicación en tres modelos de pórticos tridimensionales con diferentes características, se realiza también la comparación de los resultados obtenidos mediante la metodología propuesta y la metodología tradicional p-delta iterativo, finalmente se evalúan los errores existentes y se realiza un comentario para cada estado de carga analizado.

2 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA:

2.1 EFECTOS GLOBALES DE SEGUNDA ORDEN EN ESTRUCTURAS.

Los efectos globales de segunda orden son los esfuerzos adicionales que surgen por la acción conjunta de las cargas horizontales y verticales que soporta una estructura, después de que esta ha experimentado una deformación inicial de sus elementos por la apliación de tales cargas. (ABNT NBR 6118:2014).

Los efectos de primer orden son aquellos esfuerzos obtenidos del análisis de equilibrio realizado a una estructura con su configuración inicial no deformada, mientras que los efectos de segundo orden son aquellos esfuerzos que surgen del análisis de equilibrio realizado a la estructura en su estado deformado.

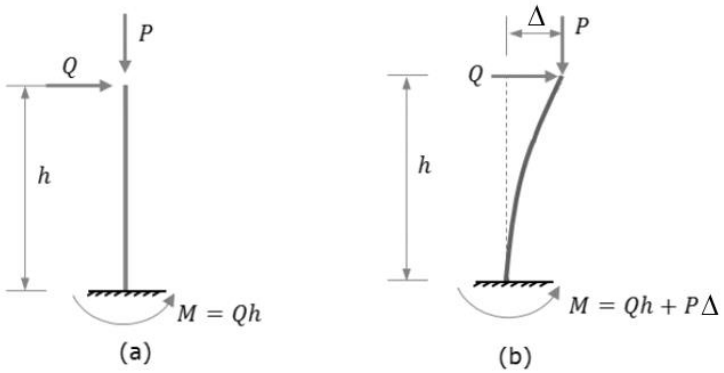
Los efectos de segundo orden siempre van a estar presentes en las estructuras puesto que todo cuerpo bajo la acción de una carga siempre va a experimentar deformaciones en mayor o menor grado dependiendo de la magnitud de la carga y de su rigidez. Muchas veces estas deformaciones van a resultar pequeñas, provocando que los nuevos esfuerzos originados sean despreciables, sin embargo, ciertas veces estas deformaciones serán considerables, sobre todo cuando se traten de estructuras esbeltas, ocasionando que los esfuerzos originados sean significativos y deban ser considerados en los análisis y/o diseños.

2.1.1 No Linealidad Geométrica.

La no linealidad Geométrica (NLG) considera el equilibrio estático de la estructura en una configuración deformada, dando lugar a un incremento de esfuerzos (PINTO, 1997), este efecto está estrechamente relacionado con la esbeltez de la estructura, puesto que estructuras más altas tenderán a soportar esfuerzos laterales mayores.

Para poder explicar con más claridad el concepto, se presenta la *Figura 2.1* (a) donde se muestra un pilar empotrado en la base, con una carga horizontal y vertical en el extremo superior, al usar las ecuaciones de equilibrio, se determina que el momento en la base (M) será el producto únicamente de la fuerza Horizontal (Q) y la altura (h) a la que fue aplicada.

Figura 2.1**.** Momentos en la Base de un pilar (a) Análisis de Primer Orden (b) Análisis de segundo Orden



Fuente: Adaptado de Reis (2016)

Así mismo tendremos que la fuerza Horizontal (Q) hará que el pilar se desplace una distancia horizontal (Δ) en el punto de aplicación, originando la configuración deformada que se muestra en la Fig. 3.2 (b). Ahora volviendo a usar las ecuaciones de equilibrio determinaremos que el Nuevo momento en la Base (M) será el producto de la fuerza Horizontal (Q) por la altura (h) más el momento generado por la fuerza vertical (P) por el desplazamiento (Δ).

Delo anterior se determinó la existencia de un incremento de momentos, que se puede traducir como un incremento de esfuerzos, sin la necesidad del incremento de fuerzas, sino debido solamente a la fuerza horizontal.

Al incremento originado, descrito anteriormente, se le conoce como efecto P-delta (P-Δ) o efecto de segundo orden, por lo tanto, el estudio de la no linealidad geométrica puede ser realizado mediante el análisis de segundo orden en las estructuras. (WIGHT; MACGREGOR, 2012).

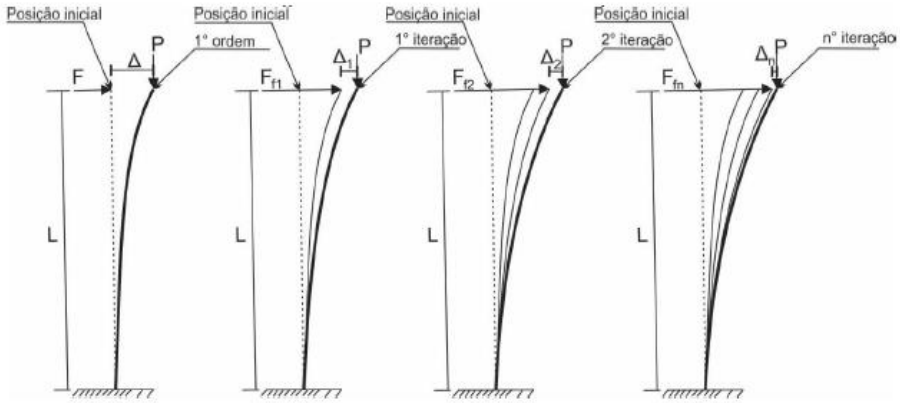
2.2 METODOS PARA LA EVALUACIÓN DE LOS EFECTOS GLOBALES DE SEGUNDA ORDEN

2.2.1 Métodos Iterativos.

El método P-Δ iterativo, también conocido como método de la carga ficticia, consiste en realizar consecutivamente análisis de primer orden, iniciando en la configuración de inicial y continuando en cada configuración deformada resultantes,

hasta llegar a que la variación de esfuerzos sea casi nula. En la Figura 2.2 se puede apreciar el procedimiento aplicado a un pilar empotrado en la base.

Figura 2.2. *Proceso P-Delta Iterativo en un Pilar*

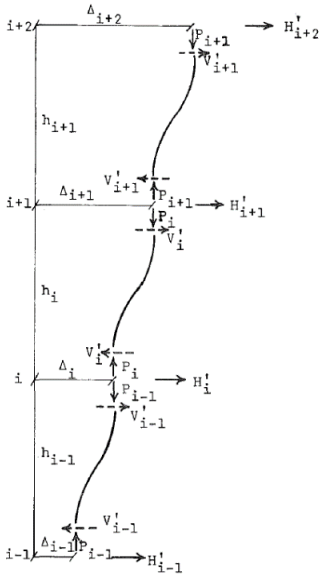


Fuente: (FERREIRA 2020)

Donde Δ es el desplazamiento debido a la fuerzo Horizontal, Δ_1, Δ_2, y Δ_n son desplazamientos debido a las fuerzas ficticias F_1, F_2 y F_n respectivamente

Gaiotti y Smith (1898) extienden la metodología para estructuras de varios niveles, como se esquematiza a continuación:

Figura 2.3. *Cargas ficticias en construcciones de varios niveles*



Fuente: (GAIOTTI & STAFFORD, 1989)

Donde el incremento de la carga de corte lateral en el nivel “i”, equivalente a la excentricidad y a la carga vertical en ese nivel es dado por:

$$V_i' = \frac{\sum P_i}{h_i}(\Delta_{i+1} - \Delta_i) \qquad (2.1)$$

Donde:

- $\sum P_i$ = la suma de la carga axial en el nivel "i"
- h_i = la altura del entrepiso
- $(\Delta_{i+1} - \Delta_i)$ = el desplazamiento entre niveles "i+1" e "i" respecto a la vertical

El valor inicial de los desplazamientos Δ es obtenido a partir de un análisis de primer orden de la estructura con las cargas horizontales actuantes. El incremento de la carga de corte obtenido con la ecuación anterior, produce momentos que corresponden al efecto P-delta al final del nivel "i", por tanto, el incremento en la fuerza lateral equivalente que será agregada al nivel "i", es igual a la diferencia de fuerzas cortantes y se expresa por:

$$H_i' = V_{i-1}' - V_i' \qquad (2.2)$$

Entonces el valor de H_i' es incrementado a la carga lateral actuante y la estructura vuelve a ser analizada, repitiéndose el proceso hasta que los resultados no cambien significativamente respecto a la iteración anterior. Normalmente, dos o tres iteraciones son suficientes para determinar con gran precisión los desplazamientos y esfuerzos de segundo orden, Si los resultados no convergen después de cinco iteraciones, se dice que la estructura puede ser inestable (GAIOTTI & STAFFORD, 1989).

Otro método iterativo es el presentado en Mcguire et al. (2000), donde se detalla el procedimiento para el desarrollo de un análisis elástico de segundo orden, en relación al método de la matriz de rigidez, usada comúnmente en el análisis lineal de estructuras, cuya formulación general se detalla a continuación:

$$[K_e]\{\Delta\} = \{P\} \qquad (2.3)$$

Donde:

- $[K_e]$ = Matriz de Rigidez elástica
- $\{\Delta\}$ = Vector de desplazamientos nodales
- $\{P\}$ = Vector de Fuerzas Generalizadas

La metodología básicamente consiste en desarrollar reiteradamente la formulación matricial anterior, teniendo en cuenta la variación de la matriz de rigidez

Global, que, al considerar los efectos de segundo orden, esta tendrá ahora dos componentes, uno elástico lineal y otro que estará en función de las cargas y/o desplazamientos que serán representados por la Matriz de Rigidez elástica y Geométrica respectivamente, por lo tanto, la nueva relación matricial se torna de la siguiente manera:

$$[K_t]\{d\Delta\} = \{dP\} \qquad (2.4)$$

Donde:

- $\{d\Delta\}$ = Vector de desplazamientos nodales incrementales
- $\{dP\}$ = Vector de los incrementos de Fuerzas Generalizadas
- $[K_t]$ = Matriz de Rigidez tangente o global de la estructura, expresada por:

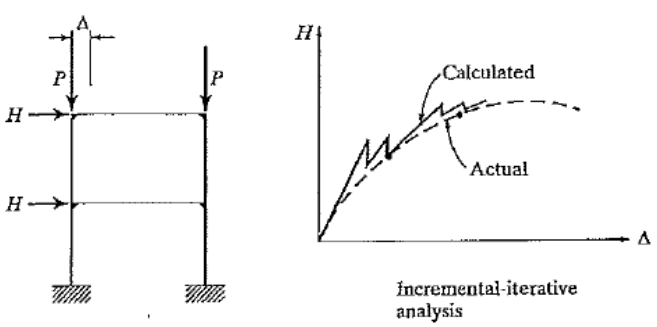
$$[K_t] = [K_e] + [K_g] \qquad (2.5)$$

Donde:

- $[K_g]$ = Matriz de Rigidez geométrica de la estructura. (Representa el cambio de la rigidez que resulta de la deformación y desplazamiento de la estructura).

Para el inicio del proceso iterativo se parte del estado inicial no deformado donde la matriz global de rigidez de la estructura corresponde a la matriz de rigidez elástica. Así mismo la respuesta total de desplazamiento de la estructura será determinada por la suma de los desplazamientos parciales obtenidos para cada incremento de fuerza, teniendo en cuenta que los resultados serán más satisfactorios, mientras mayor sea la discretización de los elementos y los incrementos de carga.

Figura 2.4. a) Pórtico con cargas Verticales y Laterales b) Gráfico de Carga Lateral vs Desplazamiento



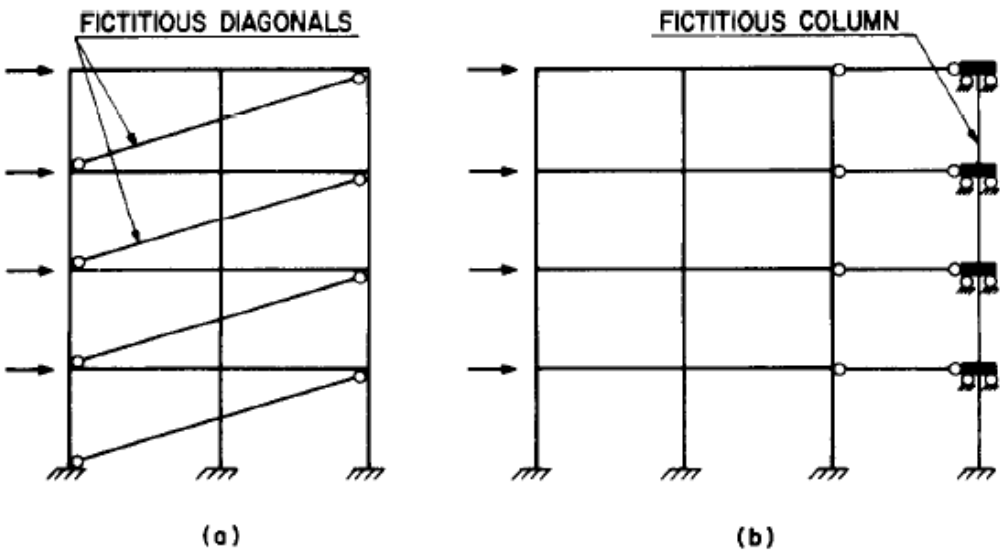
Fuente: (Mcguire, 2000)

2.2.2 Métodos Directos

Estos métodos surgen como una propuesta de análisis, en los trabajos presentados por Nixon et al. (1975), donde se sugiere la adición de un contravente en forma de barras diagonales ficticias en cada nivel, estos otorgarán flexibilidad a la estructura y simularán una matriz de rigidez que incluyan los efectos de segundo orden.

Adicionalmente Rutenberg (1981) propone otra metodología que consiste en la adición de columnas ficticias laterales, con la característica que van a poseer inercia negativa, así, la matriz de rigidez resultante considerará los efectos de segunda orden.

Figura 2.5. a) Barras diagonales fictícias b) Columnas Fictícias



Fuente: (RUTENBERG, 1981)

2.2.3 Métodos Simplificados

Los métodos simplificados, son referidos a aquellos que permiten estimar los efectos de segundo orden a partir de un análisis de primer orden, mediante el uso y la aplicación de factores de amplificación y parámetros para verificar la susceptibilidad de la estructura a ser afectado significativamente por dichos efectos.

Para tal fin, Beck e König (1967), fueron los que plantearon inicialmente la evaluación de un factor “α”, que basado en una aproximación de la rigidez de la estructura, que consistía en generalizar la edificación como un único pilar empotrado

en la base y libre en el extremo, servía como indicador de estabilidad Global, pues así se pudo determinar la necesidad o no de considerar estos efectos en los diseños, puesto que mayormente para estructuras no esbeltas, el efecto es mínimo y puede despreciarse, por ello más tarde, este factor fue adoptada por la norma ABNT NBR 6118:2014, que establece la siguiente ecuación generalizada.

$$\alpha = H_{tot}\sqrt{\frac{N_k}{E_{cs}I_c}} \qquad (2.6)$$

Donde, H_{tot}, es la altura total de la estructura, N_k es un valor característico que representa las cargas actuantes, que será igual a la suma de todas las cargas verticales y $E_{cs}I_c$ representa la suma de la rigidez de todas las columnas en la dirección considerada.

La norma, establece además que el valor resultante "α", deberá ser comparado con el valor de "α_1", que es calculado con las expresiones de las Eq. 2.7 y 2.8, obteniéndose finalmente que: Si $\alpha < \alpha_1$ entonces se podrá despreciar los efectos de segundo orden, mientras que si $\alpha > \alpha_1$, entonces estos efectos deberán ser considerados.

$$\alpha_1 = 0.2 + 0.1n, para\ n \leq 3 \qquad (2.7)$$

$$\alpha_1 = 0.6, para\ n \geq 4 \qquad (2.8)$$

Donde, n es el número de pisos totales de la estructura.

Adicionalmente en 1991, Franco e Vasconcelos (1991), presentaron el parámetro Simplificado "γ_z" que es utilización para estimar los momentos de segundo orden a partir de los obtenidos en el análisis de primer orden, como un factor de amplificación, partiendo con la consideración que el momento flector de segundo orden de la estructura corresponderá a la suma de los momentos obtenidos en un análisis de primer orden más la suma de todos los momentos generados por la deformación lateral, por tanto, se tiene que:

$$M_2 = M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3 + \cdots + \Delta M_n \qquad (2.9)$$

Después se asumió que los términos de la Sumatoria, pueden ser representados por una progresión geométrica con razón ≤1, Pudiéndose reescribir la Eq. (*2.9*) de la siguiente manera:

$$r_2 = \frac{\Delta M_2}{M_1} = \frac{\Delta M_3}{M_2} = \cdots = \frac{\Delta M_n}{\Delta M_{n-1}} \qquad (2.10)$$

$$M_2 = (1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}) * M_1 \qquad (2.11)$$

Teniendo en cuenta que el límite de la suma presentada cuando "n" tiende a infinito se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}) = \frac{1}{1-r} \qquad (2.12)$$

Por lo tanto, reemplazando la expresión, en la Eq. (*2.11*). Se tiene una relación entre los Momentos considerando el efecto P-delta y los momentos de primer orden.

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_2}{M_1}} \qquad (2.13)$$

Esta relación también es presentada por La norma **ABNT NBR 6118:2014**, de manera generalizada mediante la siguiente expresión:

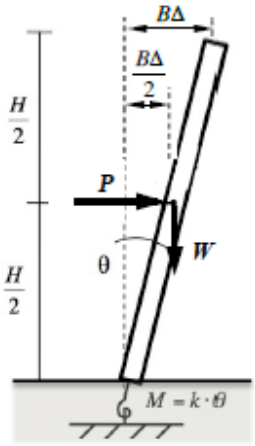
$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M}{M1}} \qquad (2.14)$$

Donde, ΔM es la suma de los productos de todas las fuerzas verticales actuantes en la estructura por los desplazamientos horizontales de sus respectivos puntos de aplicación y M1 es el momento de volteo, expresado por la suma de los momentos de las fuerzas horizontales con las alturas en sus respectivos puntos de aplicación.

Otra metodología simplificada es la basada en el uso del periodo natural de vibración para estimar los efectos de segundo orden P-Δ, puesto que ambos términos dependen de la masa y la rigidez de la estructura.

Es así que autores como Statler et al. (2011), presenta la aplicación de un factor de amplificación "B", calculado a partir de un modelo como el mostrado en la Figura *2.6* donde se considera una fuerza lateral aplicada en el centro de Masas que coincide con el centroide del cuerpo.

Figura 2.6. Modelo simplificado de una estructura deformada



Fuente: (STATLER, 2011)

A partir de la cual se establece el Momento total, (Incluyendo los efectos de segundo orden, como:

$$M = P\frac{H}{2} + W\frac{B\Delta}{2} \qquad (2.15)$$

Definiendo la rigidez angular "k", como:

$$k = \frac{M}{\theta} \quad y\ ademas, \tan\theta = \frac{B\Delta}{H} \approx \theta \qquad (2.16)$$

Sustituyendo ambas expresiones en la Eq. (*2.15*) se tiene que:

$$M = P\frac{H}{2} + W\frac{HM}{2k} \rightarrow M\left(1 - \frac{WH}{2k}\right) = P\frac{H}{2} = M_1 \qquad (2.17)$$

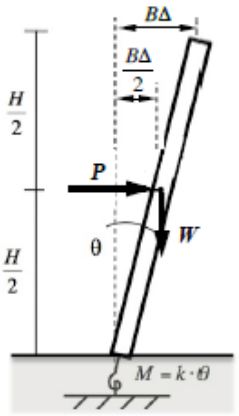
Por lo tanto, reescribiendo la Ecuación anterior se tiene:

$$B = \frac{M}{M_1} = \frac{1}{1 - \frac{WH}{2k}} \qquad (2.18)$$

Para relacionar el periodo natural, se modela como una estructura de solo un grado de libertad Figura *2.7*, despreciando el amortiguamiento, para el cual, mediante el equilibrio dinámico se obtiene:

$$\frac{mH^2}{3}\ddot{\theta} + k\theta = 0 \qquad (2.19)$$

Figura 2.7. Sistema masa-resorte de un solo grado de libertad



Fuente: (STATLER, 2011)

Siendo el periodo fundamental del sistema:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mH^2}{3k}} \qquad (2.20)$$

O en términos de Peso $(m = W/g)$:

$$T = \sqrt{\frac{WH^2}{3gk}} \qquad (2.21)$$

Para considerar los efectos de segundo orden P-Δ, se reduce la Rigidez del sistema dividendo: "k" entre el factor "B" antes descrito, obteniéndose:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{BWH^2}{3gk}} \qquad (2.22)$$

Finalmente relacionando las ecuaciones anteriores, se obtiene, el Factor B, el cual representa un coeficiente de mayoración que incluye los efectos de segundo orden.

$$B = 1 + \frac{3gT^2}{8\pi^2 H} \qquad (2.23)$$

Donde:

- $B = M/M_1$ = Factor que relaciona el momento total (considerando los efectos1er y 2do orden) y el momento de 1er orden.

- T = Periodo fundamental de vibración
- H = Altura de la estructura
- g = Gravedad

Así mismo Reis et al. (2016), propone y evalúa el uso de un Factor de Amplificación (X_T), que al ser multiplicado por los momentos flectores, obtenidos en un análisis de primer orden, den como respuesta una aproximación de los momentos flectores de segundo orden, dicha formulación fue desarrollado teniendo como base el principio de D'alembert y el método de Rayleigh, siendo aplicado a 122 modelos de pórticos espaciales regulares de concreto armado con diferentes niveles y considerando los elementos como barras flexibles.

$$X_T = 1 + \frac{1}{\frac{H\pi^2}{gT^2}\left(2 + \frac{4}{n}\right) - 1} \qquad (2.24)$$

Donde:

- $X_T = M_2/M_1$ = Factor de Amplificación
- T = Periodo Natural de vibración
- H = Altura Total de la estructura
- n = Número total de Niveles
- g = Gravedad

Más tarde Leitão (2018), partiendo de lo anterior, realiza la extensión del uso del parámetro "X_T", propuesto por Reis et al. (2016), aplicándolo a estructuras que presentan irregularidad en plana y en altura, concluyendo que el parámetro planteado ofrece una buena aproximación de los momentos flectores que incluyen los efectos de segundo orden, sobre todo para aquellas estructuras que presentan periodos altos.

3 FUNDAMENTOS Y DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA MODAL P-DELTA.

En este capítulo se describen las bases teóricas de la metodología propuesta por Ferreira (2020), presentada como alternativa para realizar el análisis no lineal geométrico, que, a partir de la relación que existe entre la no linealidad geométrica, el análisis modal y el fenómeno de pandeo, permite determinar la curva fuerza – deformación de una estructura hasta llegar al pandeo.

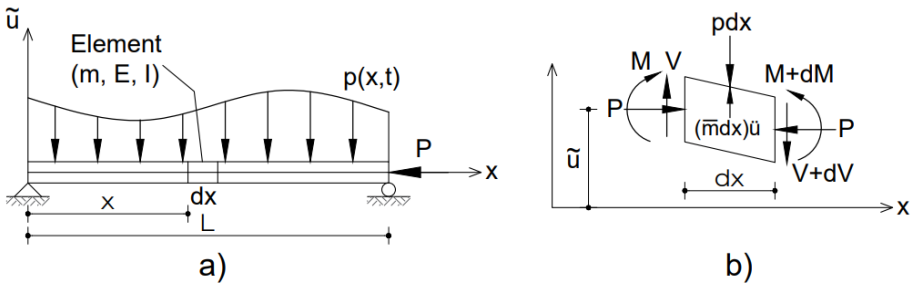
En primer lugar, se describe el efecto que tiene la fuerza axial en los modos de vibración y sus respectivas frecuencias, con esto, se establece una relación entre los modos de pandeo y los modos de vibración de una estructura que se encuentra bajo la acción de carga crítica. A partir de lo cual se propone que los modos de vibración y las frecuencias naturales de una estructura cargada pueden ser definidos mediante la interpolación de los modos de vibración de la estructura, correspondientes a un estado sin cargas y otro con carga crítica.

3.1 Efecto de la Carga Axial en los Modos de Vibración y Frecuencias

En este punto, se muestra como los modos de vibración y las frecuencias son alterados cuando la carga interna es incrementada en un modelo viga de Euler-Bernoulli, como la mostrada en la *Figura 3.1*, Donde se determina que la ecuación que gobierna el movimiento es definida por:

$$p(x,t) = EIu(x,t)^{iv} + Pu(x,t)^{ii} + \overline{m}\ddot{u}(x,t) \qquad (3.1)$$

Figura 3.1. a) Representación de las coordenadas de vibración en una viga b) Convención de Signos para fuerzas y momentos en una porción arbitraria del elemento.



Fuente: Adaptado de Paz e Kim, (2019)

A partir de la ecuación anterior, pueden ser descritas las características dinámicas de vibración libre fijando las condiciones de contorno, en este caso p(x, t)=0, Obteniendo:

$$EIu(x,t)^{iv} + Pu(x,t)^{ii} + \overline{m}\ddot{u}(x,t) = 0 \qquad (3.2)$$

La solución de la ecuación anterior fue presentada por Shaker y Center (1975), aplicando el principio de separación de variables, considerando que la solución puede ser expresada por el producto de dos funciones independientes que dependen de la posición (x) y del tiempo (t).

$$u(x,t) = \Phi(x)f(t) \qquad (3.3)$$

Despejando la función independiente de "x":

$$\frac{u(x,t)}{f(t)} = \Phi(x) \qquad (3.4)$$

Derivando la Eq. (*3.4*) respecto de x, tenemos que:

$$\frac{u(x,t)''}{f(t)} = \Phi(x)'' \qquad (3.5)$$

$$\frac{u(x,t)^{iv}}{f(t)} = \Phi(x)^{iv} \qquad (3.6)$$

Remplazando en la Eq. (*3.2*), tenemos:

$$EIf(t)\Phi(x)^{iv} + Pf(t)\Phi(x)'' + \overline{m}\Phi(x)\ddot{f}(t) = 0 \qquad (3.7)$$

Despejando los términos en función del tiempo (t) y de desplazamiento (x), tenemos:

$$\frac{EI\Phi(x)^{iv} + P\Phi(x)''}{\overline{m}\Phi(x)} = -\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} \qquad (3.8)$$

Igualando la Eq. (*3.8*) a un valor constante de w^2, obtenemos dos ecuaciones independientes expresadas por:

$$\Phi(x)^{iv} + \frac{P}{EI}\Phi(x)'' - \frac{w^2\,\overline{m}}{EI}\Phi(x) = 0 \qquad (3.9)$$

$$w^2 f(t) + \ddot{f}(t) = 0 \qquad (3.10)$$

La solución de la Eq. (*3.9*) resulta en los valores correspondientes a los modos de vibración para una determinada frecuencia natural "w", y la solución de la Eq. (*3.10*) nos permite obtener el comportamiento del tiempo para cada frecuencia natural.

Considerando que:

$$\Phi(x) = Ce^{Dx} \qquad (3.11)$$

La solución de la Eq. (*3.9*) puede ser reescrita como:

$$D^4 + D^2\frac{P}{EI} - \frac{w^2\overline{m}}{EI} = 0 \qquad (3.12)$$

Siendo las raíces expresadas por:

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + \beta^4}}\,;\ \lambda_3 = -\lambda_1, \qquad (3.13)$$

$$i\lambda_2 = \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + \beta^4}}\,;\ \ \lambda_4 = -i\lambda_2, \qquad (3.14)$$

Donde:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \qquad (3.15)$$

$$\beta^4 = \frac{w^2\overline{m}}{EI} \qquad (3.16)$$

Por lo tanto, la solución general de la función $\Phi(x)$, resulta:

$$\Phi(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_3e^{-\lambda_1 x} + C_2e^{i\lambda_2 x} + C_4e^{-i\lambda_2 x} \qquad (3.17)$$

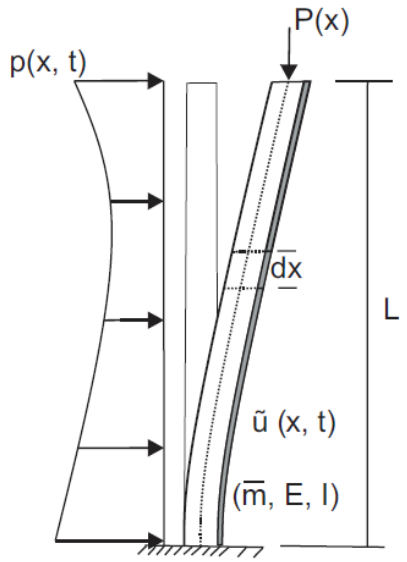
O expresada por funciones trigonométricas e hiperbólicas resulta:

$$\Phi(x) = A\cos h(\lambda_1 x) + Bsenh(\lambda_1 x) + D\cos(\lambda_2 x) + Esen(\lambda_2 x) \qquad (3.18)$$

Donde A, B, D y E son constantes de integración y son determinadas por las condiciones de contorno de la viga.

Así mismo, a partir de la Eq. (*3.18*), es posible obtener una solución específica para una columna como la mostrada en la *Figura 3.2*.

Figura 3.2. Columna empotrada-libre con desplazamiento asociado



Fuente: (Ferreira, 2020)

Para la cual se tienen las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \text{ ó } \Phi(0) = 0, \\ u'(0,t) = 0 \text{ ó } \Phi'(0) = 0, \\ \mathrm{M}(L,t) = \dfrac{-EI\,\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} = 0 \text{ ó } \Phi''^{(L)} = 0, \\ \mathrm{V}(L,\mathrm{t}) = -\mathrm{EI}\left[\dfrac{\partial^3 u(L,t)}{\partial x^3} - \dfrac{P}{EI}\dfrac{\partial u(L,\mathrm{t})}{\partial x}\right] = 0 \text{ ó } \Phi'''(L) + k^2\Phi'(L) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Por lo tanto, la ecuación característica es obtenida y expresada por:

$$\begin{aligned} &\left(-2\lambda_1 k^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2{}^3 - \lambda_1{}^3\lambda_2\right) senh(\lambda_1 L) sen(\lambda_2 L) \\ &\quad + \left(\lambda_2{}^2 k^2 + 2\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2\right. \\ &\quad \left. - \lambda_1{}^2 k^2\right) \cosh(\lambda_1 L)\cos(\lambda_2 L) + \lambda_2{}^4 + \lambda_1{}^2 k^2 \\ &\quad + \lambda_1{}^4 - \lambda_2{}^2 k^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

A partir de la cual es posible determinar analíticamente las frecuencias naturales de la columna considerando la carga axial en el elemento.

La ecuación, puede ser reescrita como función de una sola variable considerando, despejando las ecuaciones (*3.13*) y (*3.14*) en función de β^4:

$$\beta^4 = k^2{\lambda_1}^2 + {\lambda_1}^4 \qquad (3.21)$$

$$\beta^4 = -k^2{\lambda_2}^2 + {\lambda_2}^4 \qquad (3.22)$$

Operando, y despejando k^2, obtenemos:

$$k^2 = \frac{{\lambda_2}^4 - {\lambda_1}^4}{{\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2} \qquad (3.23)$$

A partir de la cual, es posible determinar la siguiente relación:

$$\lambda_2 = \sqrt{k^2 + {\lambda_1}^2}. \qquad (3.24)$$

Remplazando lo anterior en la Eq. (*3.20*) obtenemos:

$$\begin{aligned}(-k^2\lambda_1)senh(L\lambda_1)sen\left(L\sqrt{k^2+{\lambda_1}^2}\right)\sqrt{k^2+{\lambda_1}^2} \\ + \cosh(L\lambda_1)\cos\left(L\sqrt{k^2+{\lambda_1}^2}\right)\left(k^4 \\ + 2k^2{\lambda_1}^2 + 2{\lambda_1}^4\right) + 2{\lambda_1}^2\left(k^2+{\lambda_1}^2\right) = 0\end{aligned} \qquad (3.25)$$

Donde las raíces resultantes representan las frecuencias naturales de la columna bajo una carga axial, las cuales son expresadas por:

$$w = \sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}\beta^4} = \sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}(k^2{\lambda_1}^2 + {\lambda_1}^4)} \qquad (3.26)$$

Así mismo es posible determinar los modos de vibración de la estructura:

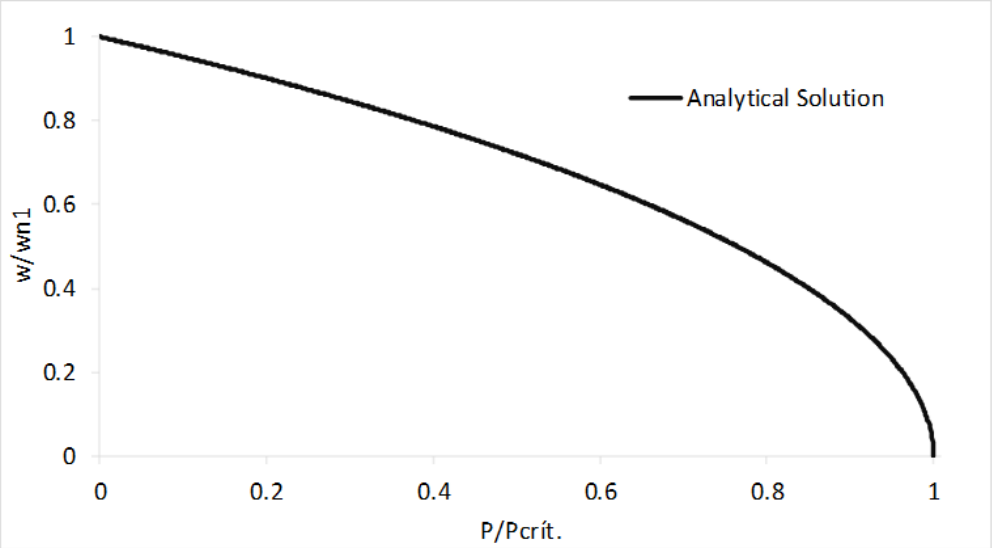
$$\Phi(x) = [\cos\mathrm{h}(\lambda_1 x) - \cos(\lambda_2 x)] + B\left[senh(\lambda_1 x) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}sen(\lambda_2 x)\right] \qquad (3.27)$$

Donde la constante B, es expresada por:

$$B = \frac{-{\lambda_2}^2 cos(\lambda_2 L) - {\lambda_1}^2\cos\mathrm{h}(\lambda_1 L)}{\lambda_1\lambda_2 sen(\lambda_2 L) + {\lambda_1}^2 senh(\lambda_1 L)} \qquad (3.28)$$

Las Eqs. (*3.26*) y (*3.27*) son usadas para analizar el efecto que tiene el esfuerzo axial en las frecuencias naturales y los modos de vibración de una viga. Para mostrar dicho efecto se presenta la *Figura 3.3*, donde se ha normalizado los valores de los ejes horizontal y vertical con la fuerza crítica "Pcrit" y la primera frecuencia natural "wn1" respectivamente. Mediante este gráfico es posible notar que la frecuencia varia decrecientemente conforme la fuerza "P" se incrementa, llegando a ser 0 cuando la carga "P" alcanza el valor de la carga crítica "Pcrit".

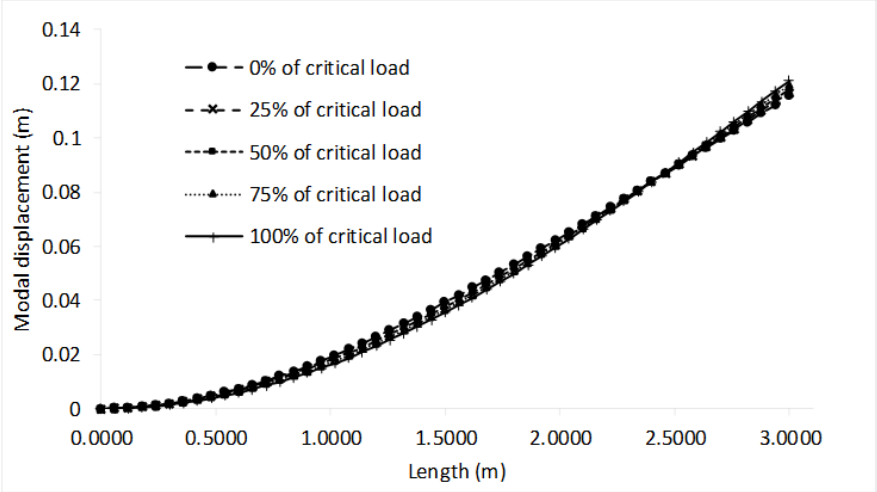
Figura 3.3 Relación entre la fuerza axial de compresión y la primera frecuencia natural para una columna empotrada-libre



Fuente: (Adaptado de Ferreira, 2020)

De la misma forma, se presenta la *Figura 3.4*, donde se muestra los desplazamientos nodales a lo largo de la longitud de la columna, correspondiente al primer modo de vibración, normalizado a la matriz de masa, para cinco valores de carga axial, partiendo desde la condición de vibración libre cuando P=0, hasta la carga critica cuando P=Pcrit. De esto es posible notar que existe cambios en los modos de vibración cuando la carga axial varía.

Figura 3.4. Desplazamiento nodal correspondiente al primer modo de Vibración para diferentes pasos de carga axial



Fuente: (Adaptado de Ferreira, 2020)

3.2 Relación entre los Modos de Pandeo y los Modos de Vibración en una Columna Empotrada-libre.

A continuación, se analiza y compara el primer modo de vibración para la carga crítica de pandeo y el primer modo de pandeo, calculada para una columna como la mostrada en la Fig. 3.2.

Teniendo la ecuación diferencial de la deflexión dado por:

$$\frac{p}{EI}\delta = u(x)'' + \frac{p}{EI}u(x) \qquad (3.29)$$

Cuya solución es:

$$u(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{p}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{p}{EI}}x\right) + \delta \qquad (3.30)$$

Donde, C_1 y C_2 son constantes de integración y δ es el desplazamiento en el extremo superior de la columna, considerando las condiciones de contorno, la deflexión puede ser rescrita como:

$$u(x) = \delta\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)\right] \qquad (3.31)$$

Para satisfacer la condición $u(L) = \delta$, es necesario que:

$$\delta \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) = 0 \qquad (3.32)$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos las cargas críticas de Pandeo:

$$P_{cri} = \frac{\mathrm{n}^2\pi^2 EI}{4L^2} \qquad (3.33)$$

Por lo tanto, si consideramos $P = P_{cri}$, el primero modo de pandeo (n=1), en la Eq. (*3.31*), obtenemos:

$$u(x) = \delta\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\right] \qquad (3.34)$$

Así mismo, con la Eq (*3.27*), el primer modo de vibración será hallado cuando la columna se encuentre bajo la acción de la primera carga crítica de pandeo, siendo que para $P = P_{cri}$, el valor de β^4 es "0", debido a que la primera frecuencia natural es "0", con lo cual el valor de la raíz λ_1, en la Eq. (*3.13*) también resulta ser "0"

Sustituyendo la Eq. (*3.15*) y considerando la Eq. (*3.24*) se obtiene que:

$$k = \lambda_2 = \frac{\pi}{2L} \qquad (3.35)$$

Ahora sustituye en al Eq. (*3.27*) obtenemos:

$$\Phi(x) = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\right] \qquad (3.36)$$

Por lo tanto, si comparamos el primer modo de Pandeo expresado por la Eq. 2.26 con el primero modo de vibración para la carga crítica Eq. 2.28, se aprecia que ambas ecuaciones son linealmente dependientes, esto nos permite concluir que, en el caso mostrado, ambos modos son equivalentes.

3.3 Análisis modal y análisis de pandeo lineal de una estructura.

En esta sección, las metodologías y análisis descritos en los apartados 3.1 y 3.2, son presentados con mayor detalle y de manera más general para su aplicación en cualquier estructura espacial reticular.

3.3.1 Método de Elementos Finitos:

La ecuación de equilibrio de fuerzas en un elemento en condición deformada es dada por la siguiente relación:

$$\left[[K_e] + \left[K_g\right]\right]\{\delta_e\} = \{F_e\} \qquad (3.37)$$

Donde:

$[K_e]$ es la matriz de rigidez elástica, expresada por:

$$[K_e] = \int_0^L [B_e]^T [D][B_e]\, dx \qquad (3.38)$$

$\left[K_g\right]$ es la matriz de rigidez geométrica, expresada por:

$$\left[K_g\right] = \int_0^L P_\alpha [N'_e]\,[N'_e]\; dx \qquad (3.39)$$

Donde $[B_e]$ representa la matriz que contiene las derivadas de las funciones de forma $[N_e]$ y $[D]$ describe la matriz constitutiva del material.

$\{F_e\}$ es el vector de cargas nodales del elemento, expresada por:

$$\{F_e\} = \{F_n\} + \left\{F_{neq}\right\} \qquad (3.40)$$

Donde $\{F_n\}$ representa el vector con las cargas aplicadas en los nodos del elemento y $\left\{F_{neq}\right\}$ el vector con las fuerzas nodales equivales debido a las fuerzas que actúan a lo largo del elemento.

Finalmente, $\{\delta_e\}$ es el vector de desplazamientos nodales.

3.3.2 Análisis Lineal de Pandeo:

En un problema de pandeo, las fuerzas axiales internas son las que causan que la suma de matriz de rigidez elástica y la matriz de rigidez geométrica sea singular, esto problema es expresado por:

$$\left[[K_e] + \alpha_n\left[K_g\right]\right]\{\phi_{pn}\} = 0. \qquad (3.41)$$

Dicha ecuación puede ser formulada como un problema de vectores y autovalores, donde α_n representa los valores propios o factores de amplificación, y ϕ_{pn} representa los modos de pandeo. Es necesario definir una carga $\{F_e\}$ para estimar la matriz geométrica que depende de los esfuerzos axiales internos, así mismo, la definición de la carga crítica será dimensionada por los factores de amplificación dados por α_n.

3.3.3 Análisis Modal:

El análisis modal nos permite obtener la respuesta de la estructura mediante los modos de vibración y las frecuencias, en este sentido, a continuación, se describen las expresiones que definen los parámetros dinámicos teniendo en cuenta la inclusión de la matriz geométrica y despreciando el amortiguamiento, teniendo así la siguiente ecuación que define el movimiento:

$$[M_e]\{\ddot{\delta}_e(t)\} + \Big[[K_e] + \big[K_g\big]\Big]\{\delta_e(t)\} = \{F_e(t)\} \qquad (3.42)$$

Donde $\{F_e(t)\}$ es el vector de fuerzas nodales de la estructura, $[M_e]$ es la matriz de masa de la estructura definida por:

$$[M_e] = -\left(\int_0^L \rho[N_e]^T[N_e]dx\right) \qquad (3.43)$$

Y finalmente. $\{\delta_e(t)\}$ es el vector que contiene los desplazamientos nodales.

Para el estudio de la vibración libre de una estructura, es necesario que $\{F_e(t)\} = 0$ y es asumido que el vector de desplazamientos nodales es expresado por:

$$\{\delta_e(t)\} = \{A\}\sin(\omega t + \phi) \qquad (3.44)$$

Por lo tanto, la Eq. (*3.42*) es reescrita como:

$$\big([K_e] + \big[K_g\big] - \omega_{pn}^2[M_e]\big)\{\phi_{pn}\} = 0 \qquad (3.45)$$

Esta ecuación representa a un sistema homogéneo de ecuaciones que pueden ser representadas como un problema de vectores y autovalores. Siendo ω_{pn} un valor

escalar con las frecuencias naturales y ϕ_{pn} los modos de vibración de la estructura. De la ecuación también se desprende que si las frecuencias naturales son iguales a cero $(\omega_{pn}^2 = 0)$, entonces la ecuación anterior corresponderá al modo de pandeo para una carga crítica, es decir cuando $(\alpha_n = 1)$.

El análisis modal puede también ser desarrollado cuando la estructura está totalmente descargada, en ese caso no existen esfuerzos axiales en el elemento y por lo tanto la matriz de rigidez geométrica es "0", entonces tenemos:

$$([K_e] - \omega_n^2[M_e])\{\phi_n\} = 0 \qquad (3.46)$$

Donde, ϕ_n y ω_n son los modos de vibración y las frecuencias naturales de la estructura respectivamente. Se puede apreciar que los modos de vibración varían entre los modos de vibración de la estructura sin cargas $\{\phi_n\}$, y los modos de vibración de la estructura bajo la aplicación de carga crítica $\{\phi_{np}\}$.

A partir de lo anteriormente descrito, la metodología Modal P-delta (Ferreira, 2020) plantea aproximar los modos de vibración de la estructura bajo una carga $(\widetilde{\phi_{pn}})$, mediante una interpolación simple de los modos descritos, expresado por:

$$\{\widetilde{\phi_{pn}}\} \approx \left(1 - \frac{\Delta}{\alpha_n}\right)\{\phi_n\} + \frac{\Delta}{\alpha_n}\{\phi_{pn}\} \qquad (3.47)$$

Donde Δ, es un parámetro que indica la magnitud de la fuerza interna y varía entre 0 y 1. Siendo cero un valor que corresponde a una estructura sin cargas y uno un valor que corresponde a una estructura con carga igual a la carga crítica.

Asumiendo ahora un cálculo de los modos de vibración en diferentes pasos de carga, el parámetro Δ puede ser definido de la siguiente manera:

$$\Delta = \frac{k}{nstep} \qquad (3.48)$$

Donde, "k" es el número del paso de carga y "$nstep$" es el número total de pasos de carga.

De lo Eq. (3.47) se observa que, si el factor de amplificación obtenido en el análisis de pandeo α_n es igual al factor Δ, el modo de vibración corresponderá al modo de pandeo $\{\phi_{pn}\}$, por otro lado, si $\Delta = 0$, el modo de vibración de la estructura corresponderá al modo de vibración de la estructura sin cargas $\{\phi_n\}$.

Finalmente, si ambos modos ϕ_{pn} y ϕ_n son normalizados a matriz de masa, $\{\phi\}^T[M_e]\{\phi\} = 1$, y haciendo uso de la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración, la frecuencia natural de la estructura cargada $\widetilde{\omega_{pn}}$, puede ser aproximada por:

$$\widetilde{\omega_{pn}} \approx \sqrt{\{\widetilde{\phi_{pn}}\}^T \left[[K_e] + \Delta[K_g]\right]\{\widetilde{\phi_{pn}}\}} \qquad (3.49)$$

De la misma forma, si $\Delta = 0$, la frecuencia aproximada $\widetilde{\omega_{pn}}$ será igual a la frecuencia natural de la estructura sin cargas, mientras que si $\Delta = \alpha_n$ la estructura estará siendo sometida a la carga crítica.

3.4 Desplazamiento Estático a Partir de los Modos de Vibración y Frecuencias.

Considerando la ecuación dinámica de movimiento, los desplazamientos estáticos pueden ser calculados en función de las frecuencias y modos de vibración de la siguiente manera:

$$[M][\phi]\{\ddot{q}\} + [K_T][\phi]\{q\} = \{F_e\} \qquad (3.50)$$

Donde los desplazamientos pueden ser definidos como una combinación lineal de los desplazamientos modales, expresado por:

$$\{u\} = [\phi]\{q\} \qquad (3.51)$$

Si, a la Eq. (*3.50*) se le multiplica por el factor $[\phi]^T$, y teniendo en cuenta que los modos son normalizados a la matriz de masa, se obtiene un sistema de ecuaciones desacopladas para cada modo de vibración, además para determinar los desplazamientos estáticos, será necesario que el vector de aceleración $\{\ddot{q}\}$ sea igual a "0", obteniendo así la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} w^2{}_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & w^2{}_n \end{bmatrix} \{q\} = [\phi]^T \{F_e\} \qquad (3.52)$$

O expresadas en forma lineal:

$$q_1 = \frac{\{\phi_1\}^T \{F_e\}}{w^2{}_1} \qquad (3.53)$$

$$q_2 = \frac{\{\phi_2\}^T \{F_e\}}{w^2{}_2} \qquad (3.54)$$

$$q_n = \frac{\{\phi_n\}^T \{F_e\}}{w^2{}_n} \qquad (3.55)$$

Finalmente sustituyendo las Eq. (*3.53*), (*3.54*) y (*3.55*) en la Eq. (*3.51*), se puede obtener la Eq. (*3.56*) que permitirá determinar el desplazamiento estático a partir de los modos y frecuencias naturales.

$$\{u\} = \{\phi_1\} \frac{\{\phi_1\}^T \{F_e\}}{w^2{}_1} + \{\phi_2\} \frac{\{\phi_2\}^T \{F_e\}}{w^2{}_2} + \cdots + \{\phi_n\} \frac{\{\phi_n\}^T \{F_e\}}{w^2{}_n} \qquad (3.56)$$

Considerando la contribución de "n" modos de vibración, la formulación para el cálculo del desplazamiento estático se puede expresar de forma general como:

$$\{u\} = \sum_{i=1}^{n} \{\phi_i\} \frac{\{\phi_i\}^T \{F_e\}}{w^2{}_i} \qquad (3.57)$$

La ecuación anterior es la que será usada para el cálculo de los desplazamientos que incluirán los efectos de segundo orden NL a partir de las frecuencias naturales $\widetilde{\omega_{pn}}$ y la matriz de modos de vibración $\{\widetilde{\phi_{pn}}\}$ descritos y calculados anteriormente.

3.5 Análisis Modal P-delta.

De lo mostrado en los puntos anteriores, se puede decir que es posible aproximar los modos de vibración y las frecuencias de una estructura cargada mediante la interpolación de modos vibración de la estructura sin cargas y la estructura bajo carga axial crítica, así mismo es posible calcular los desplazamientos de la estructura para un determinado nivel de carga usando los modos de vibración y las frecuencias asociadas, teniendo en consideración que estos desplazamientos consideran los efectos de la no

linealidad geométrica de la estructura, y es a partir de estos conceptos que Ferreira (2020) ha propuesto la metodología Modal P-delta, que usa el análisis modal y de pandeo para desarrollar un análisis no Lineal Geométrico permitiendo obtener la curva de equilibrio del comportamiento de la estructura hasta que el pandeo ocurra.

En el desarrollo del presente trabajo se han realizado ciertas modificaciones a lo planteado inicialmente por Ferreira (2020), lo que ha permitido obtener una mejora en cuanto a la precisión de los resultados y a los tiempos de procesamiento, consiguiendo así una optimización a la metodología. A continuación, en la en la Figura 3.5 se describe la rutina de análisis del método Modal P-delta, la cual está dividida en dos fases, la primera corresponde a una fase de precálculo donde son calculados algunos parámetros como las matrices de rigidez elástica y geométrica, y la segunda corresponde a la fase del cálculo propiamente dicho, donde los desplazamientos que toman en cuenta los efectos no lineales de segundo orden son hallados para cada caso de carga.

Adicionalmente se debe de tener en cuenta que en la rutina se ha incrementado la identificación de los modos longitudinales, los cuales corresponden a aquellos que presentan amplitudes muy pequeñas y no aportan al desplazamiento en el sentido analizado, por tal razón estos modos son eliminados al momento de realizar la interpolación, de la misma forma para poder realizar de manera correcta dicha interpolación, se requiere que tanto los modos de vibración y de pandeo estén en la misma dirección, lo cual se ha obtenido a partir de calcular el error cuadrático de los modos, siendo la dirección correcta cuando el error cuadrático sea el mínimo.

Figura 3.5 *Rutina del Análisis Modal P-delta*

- Definir el número de pasos de carga, *nstep*.
- Definir el número de modos de vibración y de pandeo a usar, *nmod*.
- Definir la matriz de rigidez elástica global de la estructura $[K_e]$ considerando las condiciones de contorno.
- Definir el vector de las cargas nodales $\{F_e\}$, considerando las condiciones de contorno.
- Calcular los desplazamientos para el primer paso de carga $\Delta\{F_{e1}\} = \frac{\{F_e\}}{nstep}$, $\{\delta T(:,1)\} = [K_e]^{-1}\Delta\{F_{e1}\}$.
- Definir la matriz de masa Global de la estructura, considerando las condiciones de contorno $[M_e]$.
- Desarrollar el análisis modal para calcular los modos de vibración de la estructura sin cargas $[\phi_n]$.
- Identificar y eliminar los modos de vibración longitudinales, los cuales serán aquellos con amplitudes pequeñas en el sentido del desplazamiento.
- Calcular la matriz de rigidez geométrica $[K_g]$ para el vector de carga $\{F_e\}$.
- Desarrollar el análisis de pandeo para calcular los modos de pandeo $[\phi_{pn}]$ y los factores de amplificación $\{\alpha_n\}$
- Identificar y eliminar los modos de pandeo longitudinales, los cuales serán aquellos con amplitudes pequeñas en el sentido del desplazamiento.
- For k=2:nstep
- Definir el vector de desplazamiento $\{\Delta\delta 1\} = \{0\}$.
- Calcular la matriz de rigidez total aproximada.

  $[K_T] = [K_e] + (k/nstep)[K_g]$

  For j=1:*nmod*
  - Calcular el modo de vibración para la estructura cargada

    $$\{\widetilde{\phi_{pn}}\} = \left(1 - \frac{(k/nstep)}{\alpha(j)}\right)\{\phi_n(:,j)\} + \frac{(k/nstep)}{\alpha(j)}\{\phi_p(:,j)\}$$

  - Calcular la frecuencia natural para la estructura cargada.

    $$\widetilde{\omega_{pn}} = \sqrt{\{\widetilde{\phi_{pn}}\}^T[K_T]\{\widetilde{\phi_{pn}}\}}$$

  - Definir el vector de fuerzas totales $\{F_T\}$ en cada paso de carga:

    $$\{F_T\} = \Delta\{F_{en}\} = \frac{k}{nstep}\{F_{en}\}$$

  - Calcular los desplazamientos.

    $$\{\Delta\delta 2\} = \{\widetilde{\phi_{pn}}\}\left(\frac{\{\widetilde{\phi_{pn}}\}^T\{F_T\}}{\widetilde{\omega_{pn}}^2}\right)$$

  End

  Calcular el desplazamiento total para cada paso de carga.

  $\{\delta T(:,i)\} = \{\Delta\delta i\}$

  End

Fuente: (Elaborado por el autor)

4 APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA MODAL P-DELTA:

Para llevar a cabo la aplicación de la metodología Modal P-delta y corroborar los resultados presentados por Ferreira (2020), se ha desarrollado dos modelos matemáticos correspondientes a un pilar empotrado-libre y a un pórtico plano de nueve niveles, cuyos esquemas se muestran en la *Figura 4.1* y se deberá tener en cuenta las siguientes consideraciones:

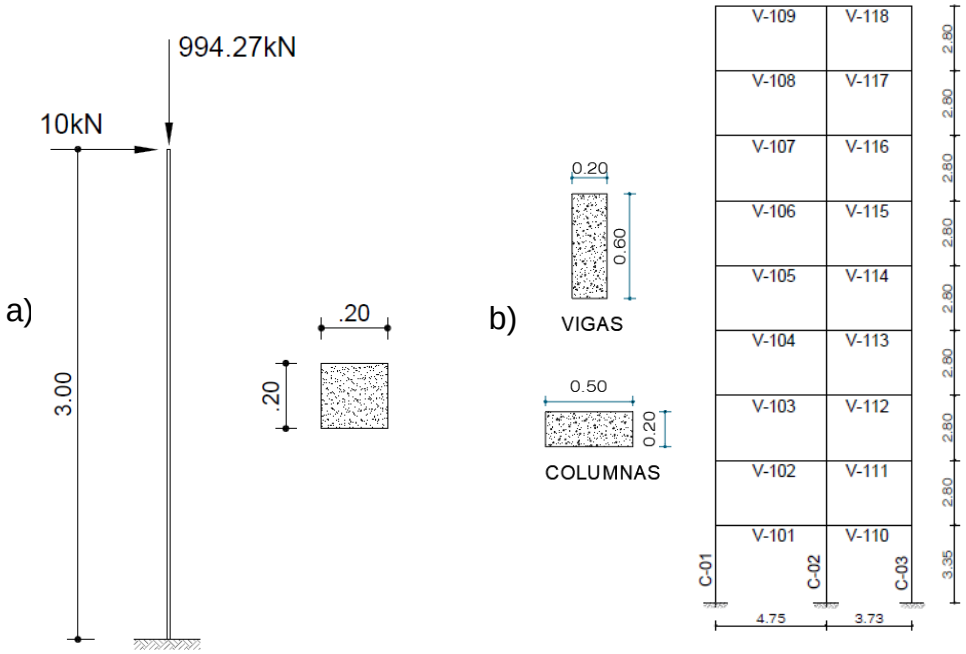
4.1 Consideraciones Generales.

- Se ha desarrollado una rutina de cálculo (programa) para realizar el análisis numérico de la metodología tradicional P-delta o P-delta iterativo presentado por Mcguire et al. (2000), que ha sido descrita en la sección 2.2.1, la cual representa un proceso numérico más riguroso en comparación de los otros métodos iterativos. Así mismo, los resultados obtenidos con esta rutina desarrollada han sido corroborados de manera fehaciente con el software comercial SAP2000 v23.02.0., por tal razón esta metodología ha sido usada como referencia para realizar la comparación, tanto en resultados y tiempos de cálculo, de la metodología de estudio Modal P-delta.

- Puesto que se han consignado los tiempos de cálculo para verificar la eficacia de la metodología estudiada, es importante mencionar que todos los análisis desarrollados en este trabajo de investigación han sido llevados a cabo en un computador con las siguientes características: procesador: AMD Ryzen 7 1700 Eight-Core Processor 3.00Ghz, Memoria instalada (RAM): 16.0GB.

- La metodología Modal P-delta aplicada en los modelos matemáticos en el presente capítulo, corresponde a la descrita en el capítulo 3, la cual presenta ciertas modificaciones respecto a la metodología inicialmente propuesta por Ferreira (2020) y cuya rutina de cálculo se presenta en la *Figura 3.5*.

Figura 4.1. Esquema de los modelos analizados a) Pilar empotrado-libre b) Pórtico Plano



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

4.2 PILAR ENGASTADO – LIBRE:

Se inicia el desarrollo de la Metodología Modal P-delta analizando su aplicación en un modelo simple, el cual corresponde a un pilar empotrado-libre cuyas características se especifican en la Tabla 1, para tal fin se ha considerado la aplicación de una carga lateral de 10kN y una carga axial de 994.27kN en su extremo superior, correspondiendo esta última a la carga crítica de pandeo para el elemento (Eq. (*3.33*), para n=1), tal como se muestra en la *Figura 4.1 a).* y cuyas características se muestran en la Tabla *1*.

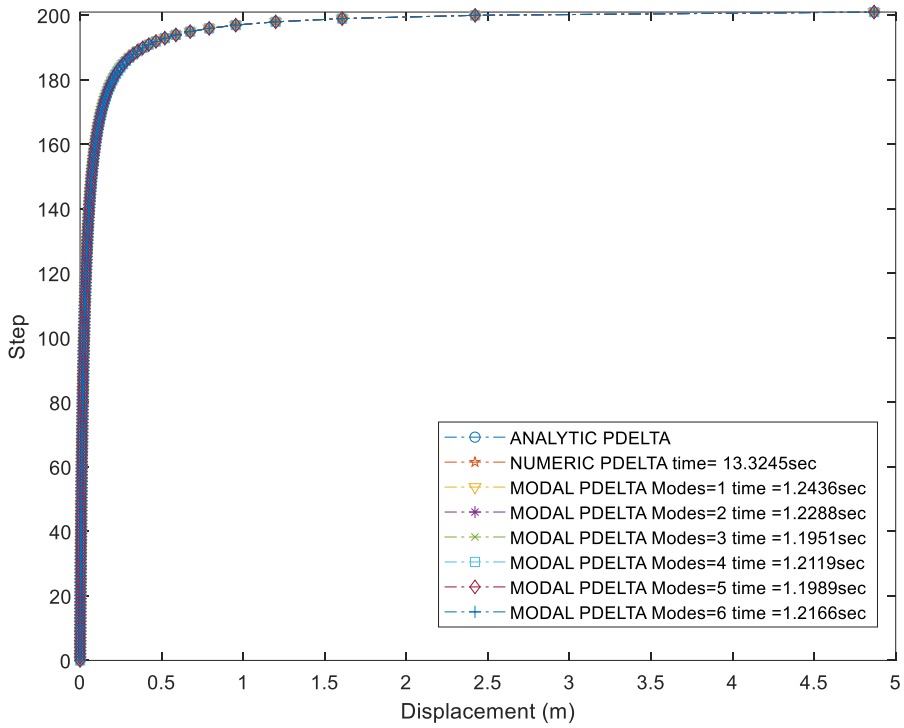
Tabla 1. Propiedades del Pilar

Longitud	3.00	m
Sección	0.20x0.20	m
Área transversal	0.04	m^2
Inercia (I)	0.000133	m^2
Peso específico ρ	2500	kg/m^2
Módulo de Elasticidad	$2.72E^{+10}$	N/m^2

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Para efectuar los cálculos respectivos usando la metodología de elementos finitos, se ha discretizado el pilar en 20 segmentos y se ha establecido 200 pasos de carga (nstep=200). Así mimo se ha efectuado el análisis Modal P-delta reiteradas veces, variando en cada ocasión el número de modos de vibración y de pandeo, obteniéndose así diferentes resultados para cada caso, los cuales han sido comparados con los obtenidos usando el método tradicional P-delta iterativo. Los resultados obtenidos se muestran en la *Figura 4.2*, donde se detallan los valores de desplazamiento en el extremo superior del pilar y se muestran también los tiempos de procesamiento que conlleva cada análisis desarrollado.

Figura 4.2 Relación entre resultados del análisis Modal P-delta y P-delta iterativo

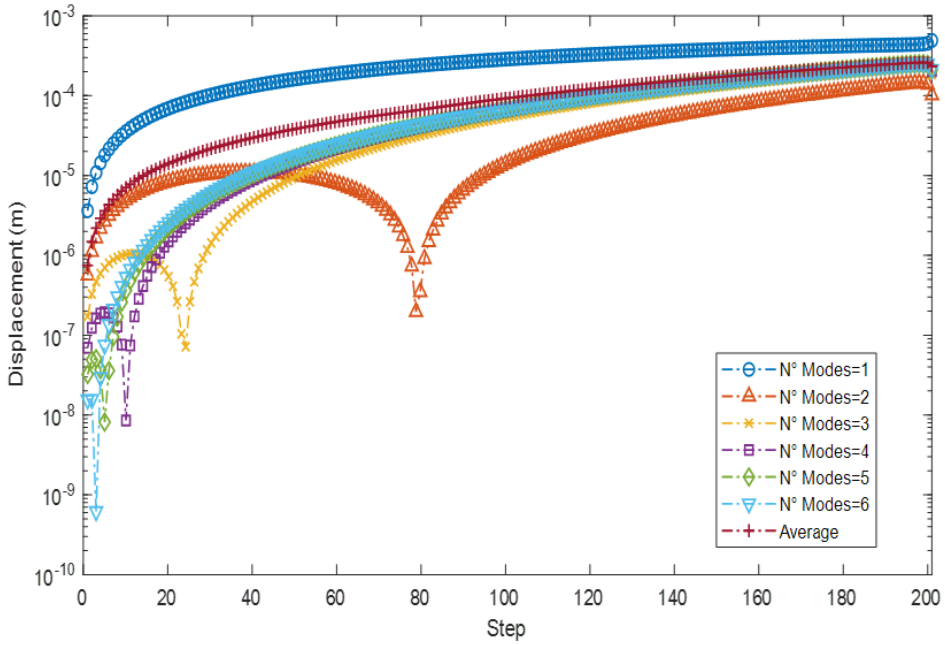


Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

De la figura anterior, a primera impresión se puede apreciar que los resultados obtenidos analíticamente y numéricamente (P-delta tradicional) concuerdan con la metodología Modal P-delta, incluso para cada caso donde se varía el número de modos usado en el análisis. Así mismo, se aprecia que el tiempo que toma el proceso del análisis Modal P-delta representa en promedio un 9% del tiempo que toma el proceso del método tradicional, en otras palabras, se podría decir que la metodología modal P-delta resulta ser aproximadamente 10 veces más rápida que la metodología tradicional.

Sin embargo, a pesar de la aparente precisión que presenta la metodología modal p-delta, existen pequeñas variaciones entre los valores de desplazamiento obtenidos cuando son comparados con los resultados del método tradicional y analítico, los cuales representan un error y son mostrados en las *Figura 4.3* (con escala logarítmica en el eje "y"), de donde se puede observar que para ciertos pasos de carga (nstep) el error disminuye dependiendo de la cantidad de modos usados en el análisis.

Figura 4.3 Error de los desplazamientos obtenidos en el análisis Modal p-delta para distinto número modos considerados



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

De lo anterior es posible observar que la metodología Modal P-delta ofrece resultados muy precisos y similares a los obtenidos con el método numérico (P-delta tradicional), y con la metodología analítica, mostrado un error máximo del orden de 1 x 10^{-3}m, los cuales tienden a ser constantes conforme se incrementa el número de modos en el análisis.

4.3 PÓRTICO PLANO:

A continuación, se desarrolla la aplicación de la metodología Modal P-delta a un pórtico plano que posee las características que se especifican en la Tabla 2, y cuyo esquema se muestra en la *Figura 4.1 (b)*.

Tabla 2. Propiedades del Pórtico Plano

	Columna 1	**Columna 2**	**Columna 3**	**Vigas 101-109**	**Vigas 110-118**
Longitud (m)	25.75	25.75	25.75	4.75	3.73
Sección (m)	0.20x0.50	0.20x0.50	0.20x0.50	0.20x0.60	0.20x0.60
Área transversal (m^2)	0.1	0.1	0.1	0.12	0.12
Inercia (m^4)	0.00208	0.00208	0.00208	0.0036	0.0036
Peso específico ρ (kg/m^3)	2500	2500	2500	2500	2500
Módulo de Elasticidad (N/m^2)	$2.72E^{+10}$	$2.72E^{+10}$	$2.72E^{+10}$	$2.72E^{+10}$	$2.72E^{+10}$

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

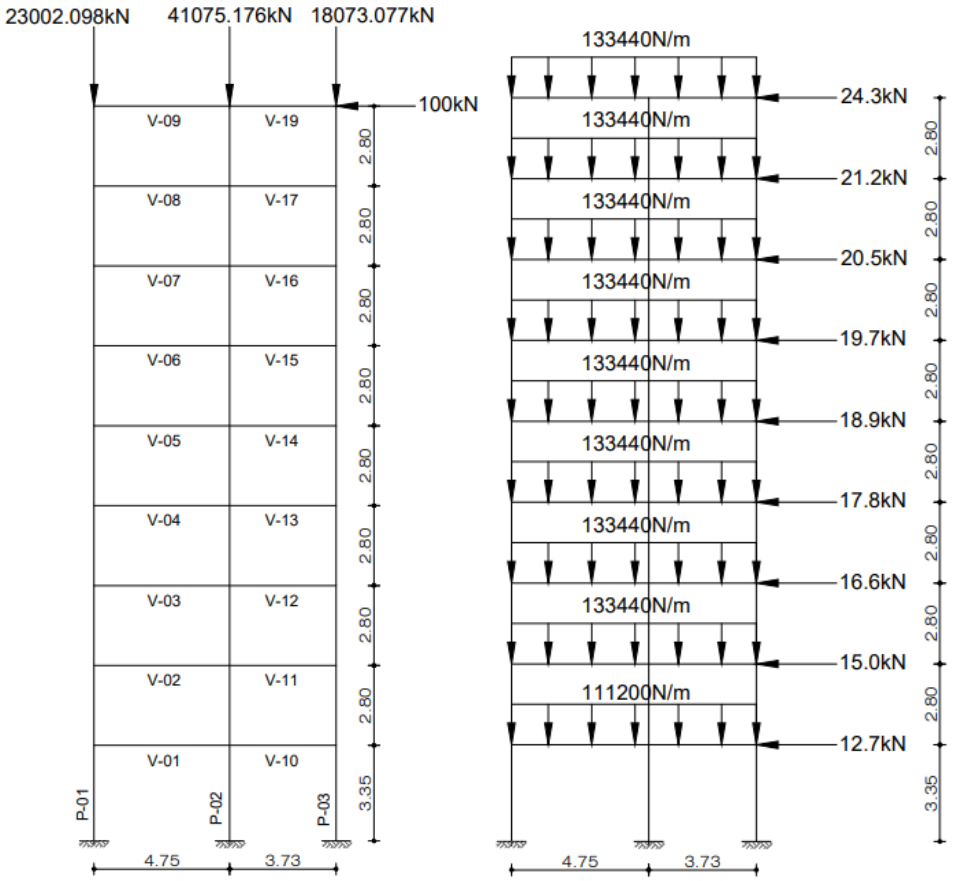
Para efectuar los análisis respectivos usando la metodología de elementos finitos, se ha discretizado los elementos del modelo en 1 segmento y se ha establecido 200 pasos de carga (nstep=200).

Así mismo, para el desarrollo de la metodología Modal P-delta se han considerado dos estados de carga, el primero corresponde a cargas puntales verticales en los nodos superiores y una carga horizontal de 100kN en el nodo superior derecho, como se muestra en la *Figura 4.4 (Izquierda)*, y el segundo corresponde a cargas distribuidas de 111200 N/m en el segundo nivel y de 33440N/m en los niveles restantes, así mismo se han considerado cargas puntuales en todos los nodos laterales, tal como se muestra en la *Figura 4.4 (Derecha)*.

En ambos casos, las cargas han sido amplificadas hasta casi alcanzar la carga crítica haciendo uso del factor de amplificación (α_n) que se obtuvo del análisis de pandeo, los cuales resultaron tener un valor de 1 para el primer paso de carga y de 10.5 para el segundo.

La carga la curva de equilibrio fue construida para ambos casos, calculando los desplazamientos en el extremo superior de la columna P-03, tanto con la metodología del P-delta tradicional y la metodología en estudio Modal P-delta, para esta última, se han realizado varios análisis variando el número de modos de vibración y de pandeo desde 1 hasta 6.

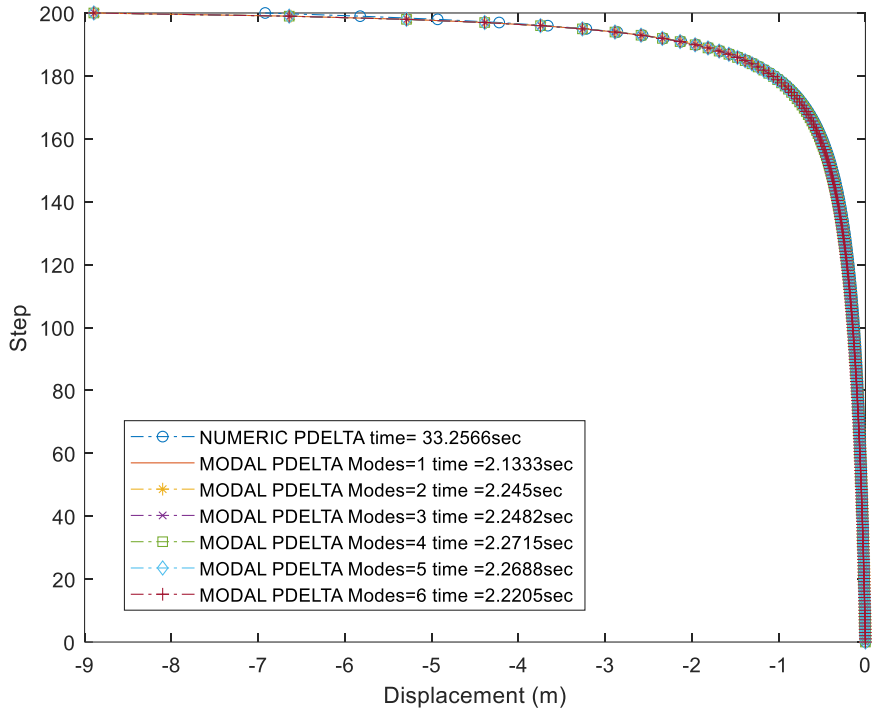
Figura 4.4. Estado de Carga 1 (Izquierda) y Estado de Carga 2 (Derecha)



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

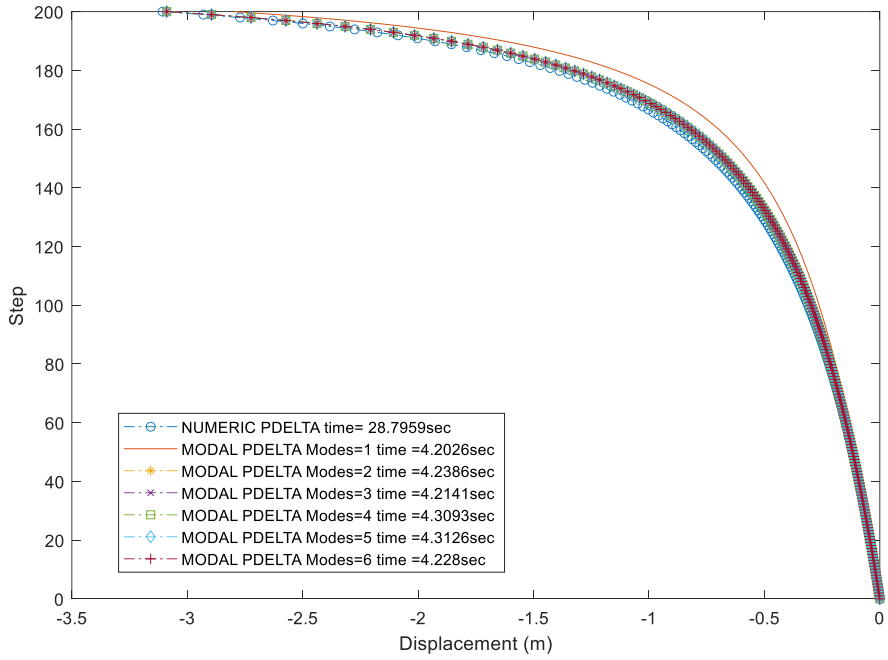
Los resultados de ambos análisis son mostrados en las *Figura 4.5* y *Figura 4.6* donde se puede apreciar que las diferencias entre los valores de desplazamiento obtenidos con ambas metodologías son mínimas, de igual forma es posible notar, a partir de los tiempos consignados, la considerable reducción de tiempo computacional de la metodología Modal P-delta frente a la metodología tradicional, los cuales resultan ser aproximadamente el 7% (para el caso 1) y el 14% (para el caso 2) del tiempo que conllevan los análisis desarrollados con el método P-delta tradicional.

Figura 4.5 Resultados del pórtico Estado de Carga 1



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 4.6 Resultados del pórtico Estado de Carga 2

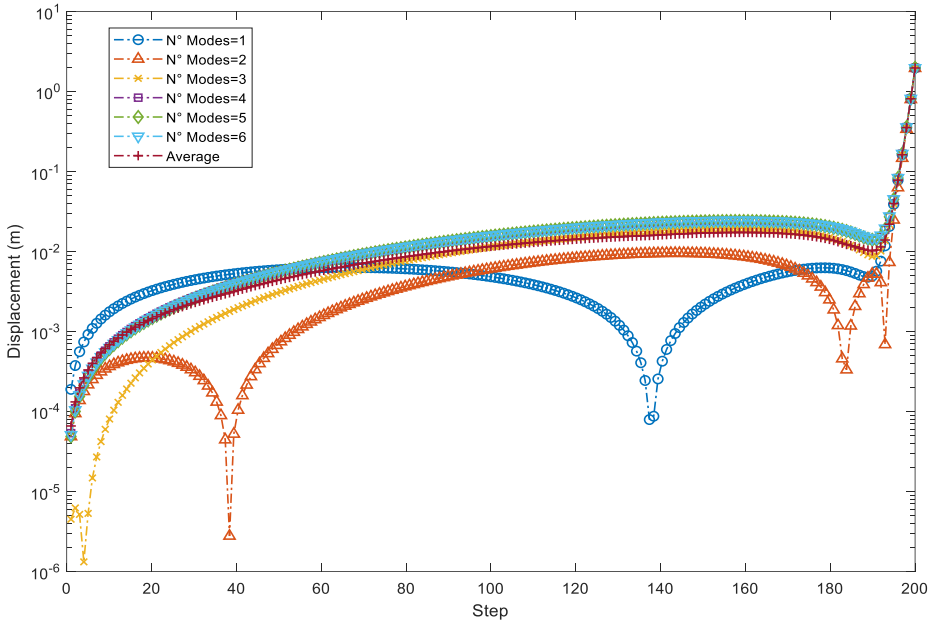


Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

A continuación, se presentan las *Figura 4.7* y *Figura 4.8*, donde se muestra el error de la metodología Modal P-delta, teniendo en cuenta el diferente número de modos usados en el análisis del modelo, para los estados de carga 1 y 2 respectivamente, dicho error es

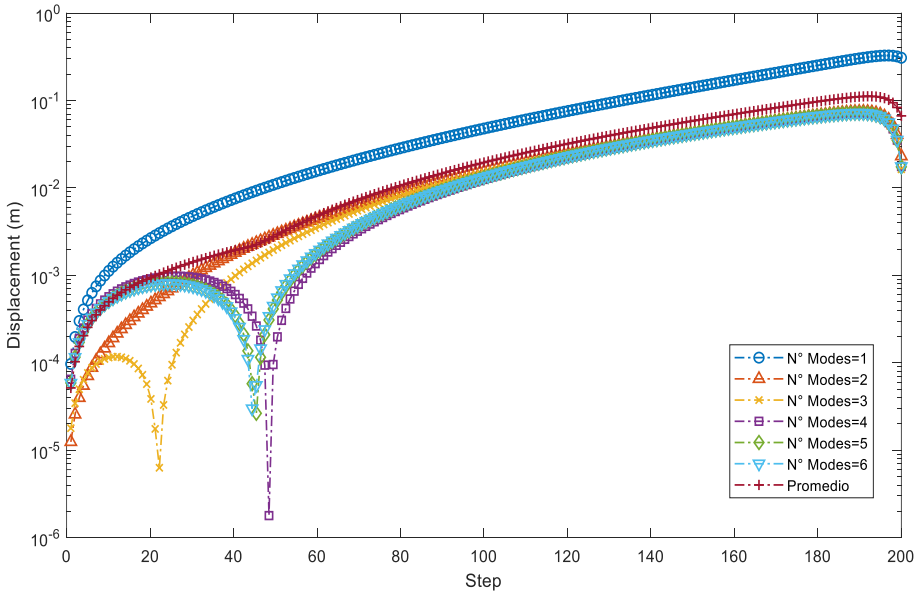
expresado en términos de desplazamiento, los cuales se muestran en escala logarítmica debido a estos corresponden a valores muy pequeños, siendo el máximo error relativo de 0.02447m para el estado de carga 1, y de 0.071864m para el estado de carga 2, en los pasos de carga cercanos al crítico.

Figura 4.7 Error de la metodología Modal P-delta para diferente número de modos usados en el análisis del pórtico plano - Estado de Carga 1



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 4.8 Error de la metodología Modal P-delta para diferente número de modos usados en el análisis del pórtico plano - Estado de Carga 2



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

A partir de las figuras, es posible observar que el error resultante de la aplicación de la metodología tiende a converger a un mismo valor conforme se incrementa el número de modos usados en el análisis, es decir el error se vuelve constante. Para los ejemplos desarrollados, estado de carga 1 y estado de carga 2, esto ocurre a partir de usar 4 modos y 5 modos respectivamente.

De cualquier forma, el error en ambos estados de carga, para el modelo del pórtico plano analizado, se encuentra en el orden de $1 \times 10^{-2}\ m$, en los pasos de carga cercanos a la carga crítica, el cual no representa un error considerable y se debe principalmente a que la metodología hace uso solamente de una interpolación lineal para realizar la aproximación de los modos de vibración de la estructura cargada.

Finalmente, de los resultados obtenidos en el análisis del pilar y el pórtico plano con la metodología Modal P-delta, se observa que los tiempos de cálculo que esta exige son muy pequeños en comparación a los tiempos de cálculo que exige la metodología tradicional, esto es debido principalmente a que, a diferencia del método tradicional P-delta, que requiere el cálculo de la inversa de la matriz global de rigidez para calcular los desplazamientos en cada estado de carga, el método propuesto, solo requiere de un cálculo único de los modos de vibración y de pandeo, a partir de los cuales, mediante su interpolación se realiza el cálculo de los modos de vibración de la estructura cargada y los desplazamientos en cada paso de carga atreves de un procedimiento que corresponde a una simple multiplicación y suma de vectores, Así mismo se verifica que conforme se aumente el número de modos usados, el error resultante tiende a converger a un mismo valor constante.

Por lo tanto, a partir de lo descrito, se corrobora que los resultados obtenidos, con las modificaciones realizadas a la metodología Modal P-delta inicialmente propuesta, son aceptables y en comparación a aquellos mostrados por Ferreira (2020), estos han resultado ser mejores en cuanto a precisión y en cuanto a tiempos de procesamiento. Por tal razón, los resultados obtenidos en la presente investigación, han sido empleados para el desarrollo y publicación del artículo de mi coautoría denominado: “Modal P-delta – simplified geometric nonlinear method by using modal and buckling analysis” (FERREIRA ET AL. 2022), donde se aborda de manera resumida la metodología Modal P-delta descrita en la presente investigación y se comentan los resultados con mayor detalle.

5 METODOLOGÍA MODAL P-DELTA EN ESTRUCTURAS DE 3 DIMENSIONES:

En este capítulo se aborda la aplicación de la metodología Modal P-delta a estructuras de tres dimensiones, para lo cual se ha de tener en cuenta que las formulaciones de la metodología, descritas en la sección 3, han de ser extendidas teniendo en cuenta la adición del eje de coordenadas "z". Sin embargo, para tal fin es necesario tener en cuenta las siguientes consideraciones, así como las consideraciones del capítulo precedente:

5.1 Consideraciones para el Análisis De Estructuras en 3 Dimensiones.

La principal diferencia que presenta el análisis de estructuras en 3D dimensiones frente a estructuras de 2D, es el incremento de los grados de libertad que posee cada nodo, que corresponde a la adición de dos rotaciones y un desplazamiento. Por tal motivo a continuación, se detallan la extensión de las principales matrices que se usan en la metodología Modal P-delta.

5.1.1 Matriz de rigidez elástica 3D.

La Matriz de Rigidez Elástica $[K_e]$ de una estructura con 6 grados de libertad por nodo, corresponde a la siguiente matriz (WEAVER, 1980).

$$[K_e] = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
\end{bmatrix}$$

Donde:

- G es el módulo de corte del material y esta expresado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad (5.1)$$

Donde, μ es el módulo de Poisson del material.

- I_y y I_z, son los momentos de inercia de la sección con respecto al eje "y" y "z"
- I_x, es el momento de inercia de la sección con respecto al eje "x", también considerado como una constante de torsión y no corresponde al momento polar de inercia $(J = I_y + I_z)$ salvo se trate de un miembro circular cilíndrico. Para una sección rectangular, dicha constante puede ser aproximada por la siguiente expresión (YOUNG & BUDYNAS, 2002):

$$I_x = ab^3\left(\frac{1}{3} - 0.21\frac{b}{a}\left(1 - \frac{b^4}{12a^4}\right)\right) \qquad (5.2)$$

Donde, a es la altura de la sección y b es la base.

5.1.2 Matriz de masa 3D.

La Matriz de masa $[M_e]$ de una barra tridimensional:

$$[M_e] = \frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix}
140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\
0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{140I_x}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70I_x}{A} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\
0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\
70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\
0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{70I_x}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140I_x}{A} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\
0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2
\end{bmatrix}$$

Donde:

- ρ es el peso específico del material.

5.1.3 Matriz de rigidez geométrica 3D.

La Matriz de Rigidez Geométrica $[K_g]$ de una barra tridimensional, de acuerdo a Mcguire et al. (2000), es la que se presenta a continuación:

$$[K_g] = \frac{P}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 \\ 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{30} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 \\ 0 & \frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}$$

Donde:

- P es la fuerza axial dentro del elemento.

5.1.4 Matriz de transformación 3D.

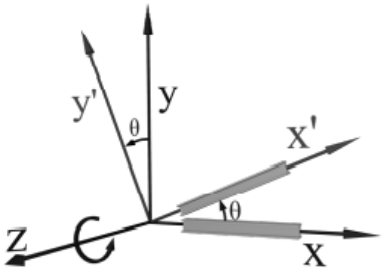
Para generalizar las matrices anteriormente mostradas: $([K_e];\ [M_e]\ y\ [K_g])$, y poder transformarlas de coordenadas locales a coordenadas globales, para así ser ensambladas y operadas, es necesario contar con la matriz de transformación que depende de las matrices de rotación para los 3 ejes de coordenadas x -y -z.

5.1.4.1 Rotación en "z".

Cuando los ejes "x" y "y" giran alrededor del eje fijo "z", de acuerdo con Beaufait (1971), la matriz de rotación esta expresado por:

$$[R_z] = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

Donde θ, es el ángulo alrededor del eje "z".



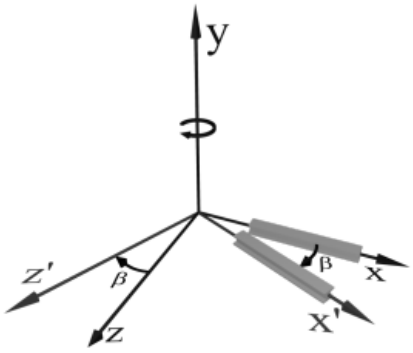
Fuente: (PARREIRAS, 2019)

5.1.4.2 Rotación en "y".

Cuando los ejes "x" y "z" giran alrededor del eje fijo "y", de acuerdo con Beaufait (1971), la matriz de rotación esta expresado por:

$$[R_y] = \begin{bmatrix} cos\beta & 0 & sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\beta & 0 & cos\beta \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Donde β, es el ángulo al rededor del eje "y".



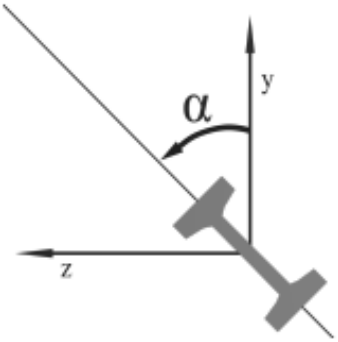
Fuente: (PARREIRAS, 2019)

5.1.4.3 Rotación en "x".

Cuando el elemento al redor de su mismo eje "x", de acuerdo con Beaufait (1971), la matriz de rotación esta expresado por:

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & sin\alpha \\ 0 & -sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Donde α, es el ángulo alrededor del eje "x".



Fuente: (PARREIRAS, 2019)

De acuerdo con Beaufait (1971), la matriz de rotación general corresponderá a la multiplicación de las matrices de rotación antes descritas$[R_z]\left[R_y\right][R_x]$, por lo tanto, la matriz será:

$$[R_1] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \dfrac{-C_xC_ycos\alpha - C_zsin\alpha}{C_{xz}} & C_{xz}cos\alpha & \dfrac{-C_yC_zcos\alpha - C_zsin\alpha}{C_{xz}} \\ \dfrac{C_xC_ysin\alpha - C_zcos\alpha}{C_{xz}} & -C_{xz}sin\alpha & \dfrac{C_yC_zsin\alpha - C_zcos\alpha}{C_{xz}} \end{bmatrix}$$

Donde:

- $C_x; C_y$ y C_z, son los cosenos directores expresados por:

$$C_x = \frac{x_2 - x_1}{L};\ C_x = \frac{y_2 - y_1}{L}\ \ y\ \ C_x = \frac{z_2 - z_1}{L} \qquad (5.6)$$

- L, es la longitud del elemento expresado por:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (5.7)$$

- C_{xz}, es un factor expresado por es expresado por:

$$C_{xz} = \sqrt{{C_x}^2 + {C_z}^2} \qquad (5.8)$$

De lo anterior, se puede notar que la matriz de rotación $[R_1]$, es posible solamente cuando $C_{xz} \neq 0$, es decir, cuando $C_x\ y\ \ C_z \neq 0$, esta última condición no se cumple cuando el elemento se encuentra sobre el eje “y” global, por lo tanto, en

este caso, de acuerdo con Beafait (1971), la matriz de rotación corresponderá al producto de las rotaciones en “z” y en “x”, $[R_z][R_x]$, obteniendo la siguiente matriz:

$$[R_2] = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y\, cos\alpha & 0 & sin\alpha \\ C_y\, sin\alpha & 0 & cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (5.9)$$

Por lo tanto, La matriz de transformación para un elemento con 6 grados de libertad DOF, de acuerdo con Beaufait (1971), será expresada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} [R] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [R] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [R] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [R] \end{bmatrix} \qquad (5.10)$$

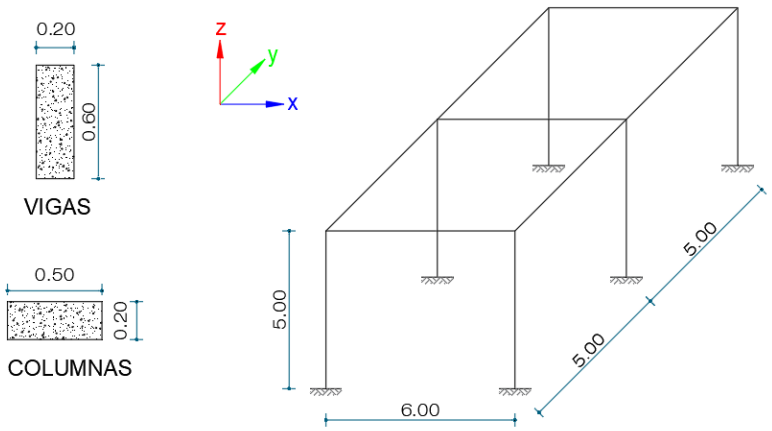
Donde $[R]$ puede ser $[R_1]$ o $[R_2]$, dependiendo de la dirección del elemento y el valor de sus cosenos directores.

Finalmente, haciendo uso de la matriz $[T]$, se realizará la transformación de coordenadas locales a coordenadas globales de las matrices de rigidez, de masa y de rigidez geométrica de los elementos que componen la estructura tridimensional, para poder ser operados y aplicados en la metodología Modal P-delta.

5.2 Aplicación de la Metodología Modal P-delta en 3 Dimensiones.

En este capítulo se extiende la aplicación de la metodología Modal P-delta a un pórtico tridimensional, a partir de las formulaciones presentadas en el apartado anterior, para lo cual se ha desarrollado un modelo matemático (M-1) de un pórtico en el espacio, que posee las características que se especifican en la Tabla 4 y cuyo esquema se muestra en la *Figura 5.1*.

Figura 5.1. Esquema de Pórtico Tridimensional (M-1)



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Tabla 3. Propiedades del Pórtico Plano

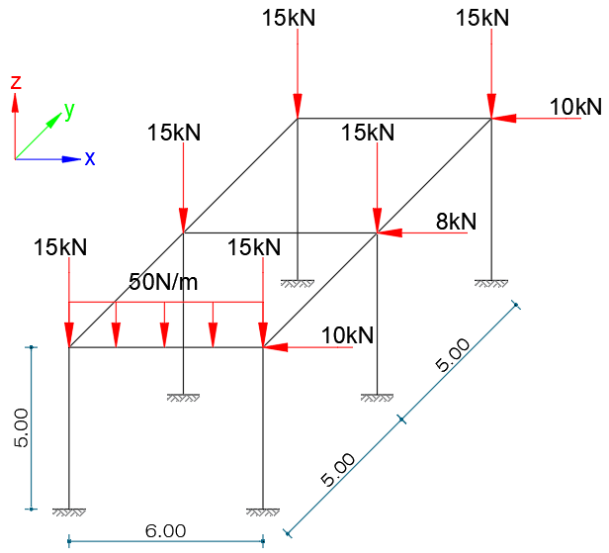
	Columnas	**Vigas en "x"**	**Vigas en "y"**
Longitud (m)	5.00	6.00	5.00
Sección (m)	0.20x0.50	0.20x0.60	0.20x0.60
Área transversal (m^2)	0.1	0.12	0.12
Inercia en "z" - Iz (m^4)	0.00208	0.0036	0.0036
Inercia en "y" - Iy (m^4)	0.0003333	0.0004	0.0004
Inercia en "x" - Ix (m^4)	$9.9805e^{-4}$	0.0013	0.013
Módulo de Poisson μ	0.2	0.2	0.2
Módulo de Corte G	$1.1333E^{+10}$	$1.1333\ E^{+10}$	$1.1333\ E^{+10}$
Peso específico ρ (kg/m^3)	2500	2500	2500
Módulo de Elasticidad (N/m^2)	$2.72E^{+10}$	$2.72E^{+10}$	$2.72E^{+10}$

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Para el desarrollo de la metodología Modal P-delta se han considerado las cargas mostradas en la *Figura 5.2*, las cuales ha sido amplificadas, hasta casi alcanzar la carga crítica, por un factor de 53 (α_n), que se obtuvo en el análisis de pandeo previamente realizado.

Así mismo, para efectuar los análisis respectivos usando la metodología de elementos finitos, se ha discretizado los elementos del modelo tridimensional, en 1 segmento y se ha establecido 200 pasos de carga (nstep=200).

Figura 5.2. Estado de cargas (C-1.1) aplicadas al Pórtico Tridimensional

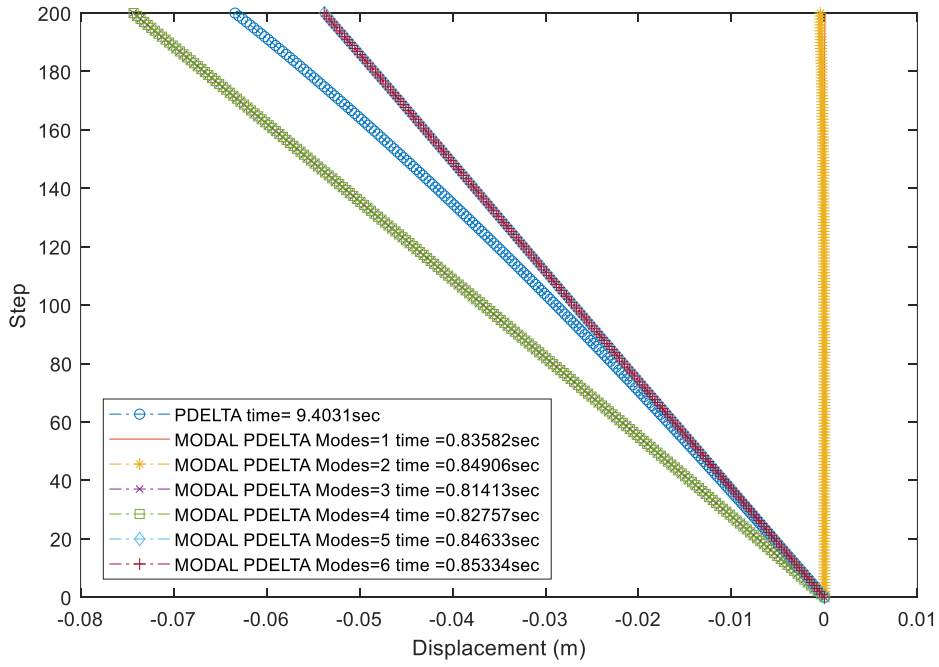


Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

En este caso, al tratarse de un pórtico tridimensional, se ha construido dos curvas de equilibrio, tanto en el sentido “x” como en el sentido “y”, consignando los desplazamientos calculados para cada paso de carga en el extremo superior de la columna central derecha del modelo (Nodo donde se aplica la carga horizontal de 8kN). Estas curvas han sido construidas aplicando la metodología P-delta Tradicional y la metodología en estudio Modal P-delta y al igual que en los análisis en 2D, este último análisis fue realizado reiteradas veces variando en cada ocasión el número de modos de vibración y de pandeo (de 1 a 6).

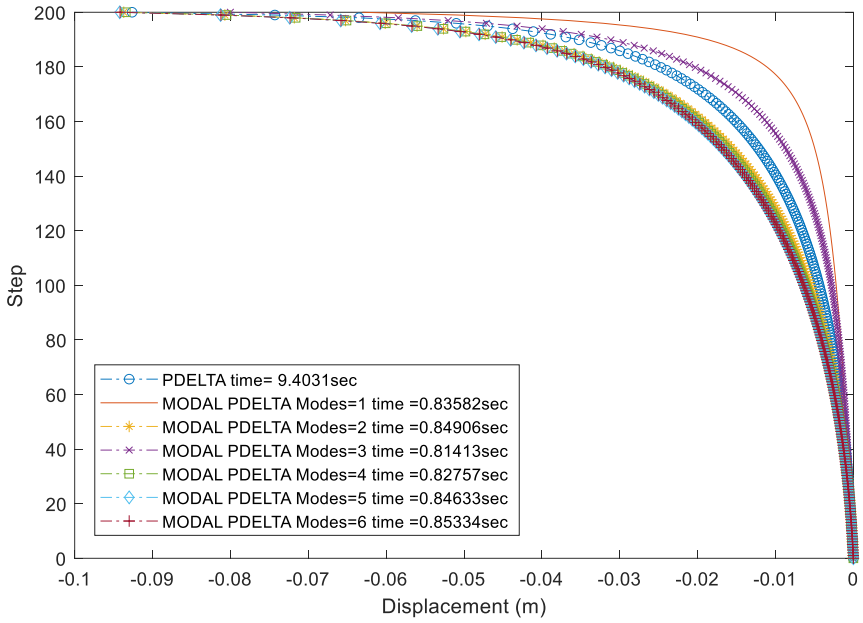
Los resultados del análisis son mostrados en la *Figura 5.3* y *Figura 5.4*, donde se puede apreciar que las curvas de equilibrio en ambas direcciones obtenidas con la metodología Modal P-delta, procuran seguir la trayectoria de la respuesta obtenida con la metodología P-delta tradicional, sin embargo, es apreciable que dichas curvas presentan un error apreciable respecto a la respuesta obtenida con la metodología tradicional P-delta, el cual no disminuye conforme se incrementa la cantidad de modos usados en el análisis, y al igual que en el análisis en 2 dimensiones a partir del uso de número de modos (5 modos para el ejemplo) en adelante el error se mantiene casi constante.

Figura 5.3. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – Estado de Carga “C-1”



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 5.4. Respuesta en “y” - Modelo “M-1” – Estado de Carga “C-1”

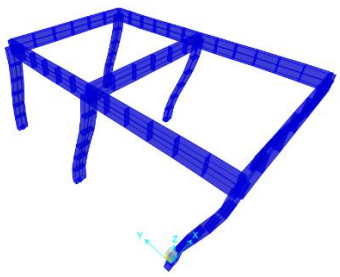
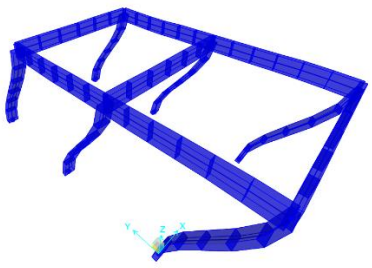


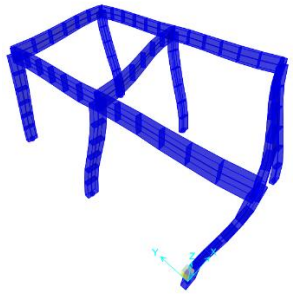
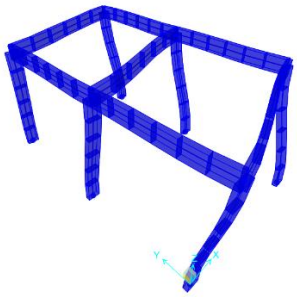
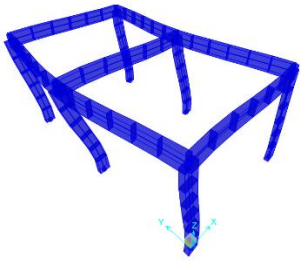
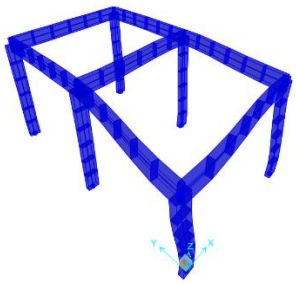
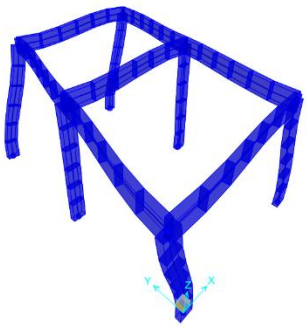
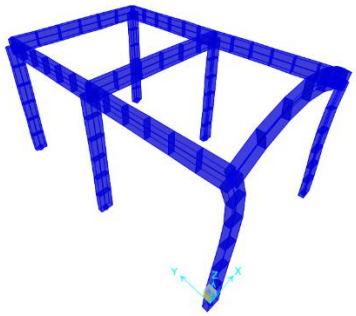
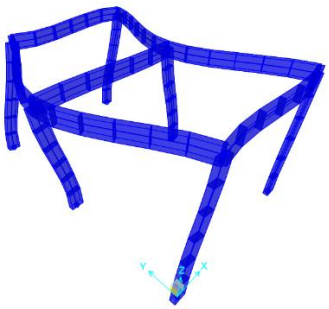
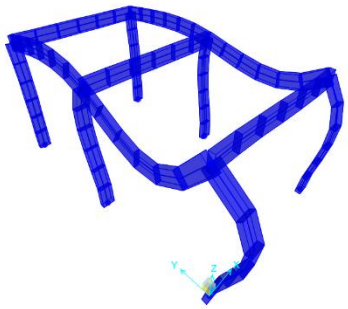
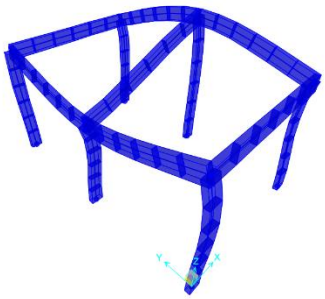
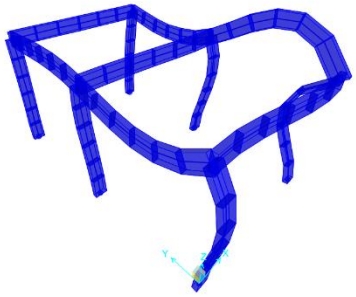
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Es importante mencionar que el modelo (M-1) ha sido sometido a un estado de cargas (C-1.1) horizontales en un solo sentido (eje “x”), por lo que se da por hecho que existirán desplazamiento en esa dirección, sin embargo, debido a que la estructura ha sido verticalmente cargada de forma asimétrica (por la carga distribuida), la estructura también presentará desplazamientos en el sentido “y”.

A causa de los resultados poco precisos obtenidos con la aplicación de la metodología Modal P-delta en estructuras tridimensionales, a continuación, se muestra la comparación realizada entre los modos de vibración y los modos de pandeo (Tabla 4), los cuales han sido calculados y graficados con el software comercial SAP2000 v23.02, con la finalidad de verificar la relación que guardan los modos, puesto que en la metodología se requiere su interpolación para determinar los modos de vibración de la estructura cargada.

Tabla 4. Comparación de Modos del Modelo (M-1) bajo es estado de carga (C-1)

N° DE MODO	MODO DE VIBRACIÓN	MODO DE PANDEO
1° modo		

2° modo		
3° modo		
4° modo		
5° modo		
6° modo		

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

De lo anterior, se puede apreciar que los modos de vibración y modos de pandeo guardan relación en la forma de vibrar solo hasta el 3° modo, los cuales corresponden a dos modos longitudinales en “x” y “y” (1° y 3° modo respectivamente) y a uno torsional (2° modo), y de ahí en adelante los modos difieren notablemente entre sí, por lo que la interpolación de los modos que exige la metodología no estaría resultando en una aproximación aceptable de los modos de vibración de la estructura cargada.

Es por ello, que, para corroborar lo antes mencionado, se ha desarrollado el procedimiento MAC (Modal Assurance Criterion), que es un indicador estadístico que determina el grado de consistencia entre dos modos, el cual proporciona una matriz con valores que varían de 0 a 1, donde un valor igual a uno indica que los modos comparados son totalmente consistentes, y un valor igual a cero indica que los modos no son consistentes.

Matemáticamente el procedimiento MAC es expresado de la siguiente manera (PASTOR ET AL, 2012):

$$\mathrm{MAC(r,q)} = \frac{\left|\{\varphi_A\}_r{}^T\{\varphi_X\}_q\right|^2}{\left(\{\varphi_A\}_r{}^T\{\varphi_A\}_r\right)\left(\{\varphi_X\}_q{}^T\{\varphi_X\}_q\right)} \qquad (5.11)$$

Donde $\{\varphi_A\}$ y $\{\varphi_X\}$ son los modos de vibración que se comparan.

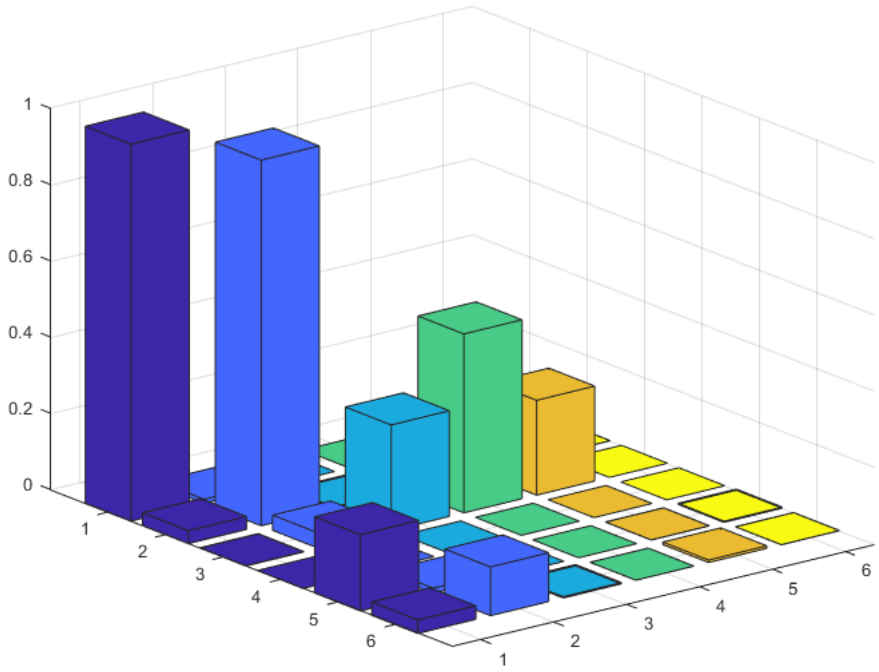
Para el presente caso analizado, se han comparado los modos de vibración libre con los modos de Pandeo de la estructura, con lo cual se obtuvo la siguiente matriz “MAC”:

$$\mathrm{MAC} = \begin{Bmatrix} 0.9888 & 0.0108 & 9.18E^{-09} & 1.55E^{-05} & 6.80E^{-06} & 0.0152 \\ 0.0336 & 0.9594 & 0.0032 & 0.0055 & 0.0025 & 0.0005 \\ 0.0008 & 0.0399 & 0.2772 & 0.4694 & 0.2489 & 1.22E^{-05} \\ 1.24E^{-09} & 2.22E^{-07} & 3.21E^{-05} & 3.90E^{-05} & 2.01E^{-05} & 3.86E^{-06} \\ 0.2002 & 0.0131 & 0.0002 & 1.89E^{-05} & 0.0005 & 0.0029 \\ 0.0354 & 0.1279 & 0.0034 & 0.0002 & 0.0066 & 0.0005 \end{Bmatrix}$$

De la matriz, se analizará los valores consignados en la diagonal de la matriz, ya que estos vana a representar la comparación de cada modo de vibración con su correspondiente modo de pandeo, con lo cual es posible observar que la relación que existe entre los modos (que son interpolados) se pierde completamente a partir del 3er modo, corroborando lo anteriormente descrito.

Para un mejor entendimiento de los valores, la Matriz MAC obtenida se ha representado gráficamente en la *Figura 5.5*:

Figura 5.5. Representación del MAC entre los modos de vibración y modos de Pandeo de la estructura (M-1)

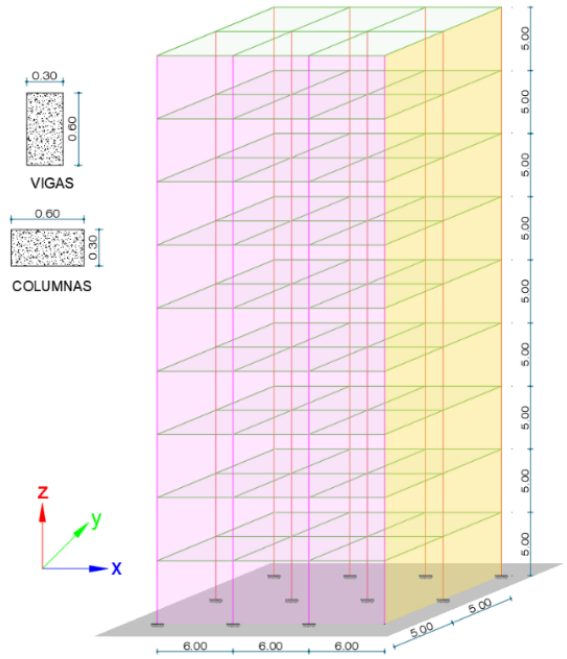


Fuente: (Elaborado por el autor)

De los resultados obtenidos en el MAC, se puede determinar que los modos de vibración 1 y 2 comparados con sus respectivos modos de Pandeo, presentan valores cercanos a la unidad, por lo que estos son consistentes y guardan una gran relación entre sí, el modo 3 sería muy poco consistente con cierta relación entre modos, y finalmente los modos 4, 5 y 6, son inconsistentes y no guardan elación entre sí, por presentar valores cercanos a cero.

A partir de lo anterior, es posible verificar que, debido a que la estructura posee modos fundamentales de vibración y de pandeo (modo 1 y 2) consistentes, los resultados obtenidos de las curvas de trayectoria guarden cierta semejanza y tienden a seguir la trayectoria de la respuesta obtenida con la metodología P-delta tradicional (sobre todo en el sentido “y”), por tal razón a continuación, se realiza la verificación y comprobación del desempeño de la metodología Modal P-delta en una estructura tridimensional más compleja, para lo cual se ha desarrollado el modelo (M-2), cuyo esquema se muestra en la *Figura 5.6* y cuyas propiedades se detallan en la Tabla 5.

Figura 5.6. Esquema de Pórtico Tridimensional (M-2)



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

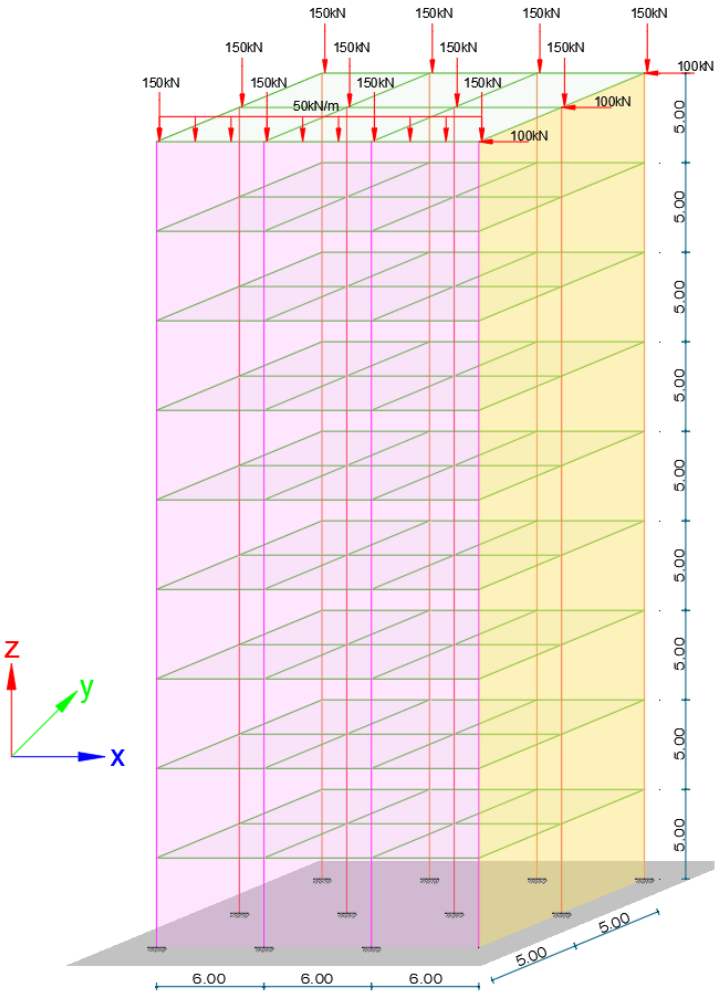
Tabla 5. Propiedades del Pórtico Tridimensional (M-2)

	Columnas	**Vigas en "x"**	**Vigas en "y"**
Longitud (m)	5.00	6.00	5.00
Sección (m)	0.30x0.60	0.30x0.60	0.30x0.60
Área transversal (m^2)	0.18	0.18	0.18
Inercia en "z" Iz (m^4)	0.0054	0.0054	0.0054
Inercia en "y" Iy (m^4)	0.00135	0.00135	0.00135
Inercia en "x" Ix (m^4)	0.003707	0.003707	0.003707
Módulo de Poisson μ	0.2	0.2	0.2
Módulo de Corte G	$1.1333\ E^{+10}$	$1.1333\ E^{+10}$	$1.1333\ E^{+10}$
Peso específico ρ (kg/m^3)	2500	2500	2500
Módulo de Elasticidad (N/m^2)	$2.72E^{+10}$	$2.72E^{+10}$	$2.72E^{+10}$

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

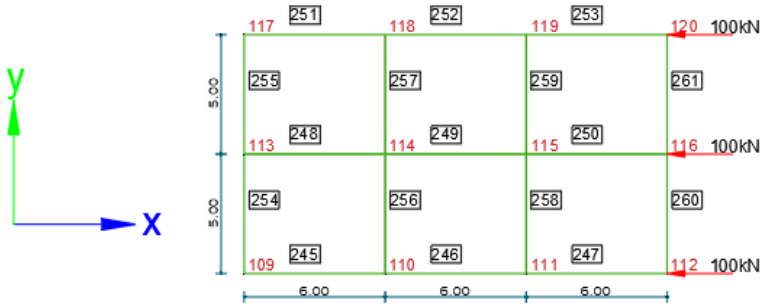
El modelo ha sido sometido al estado de cargas (C-2.1) mostrado en la *Figura 5.7*, la cual ha sido amplificada hasta casi alcanzar la carga crítica por un valor de 29.5

Figura 5.7. Estado de Cargas (C-2.1)



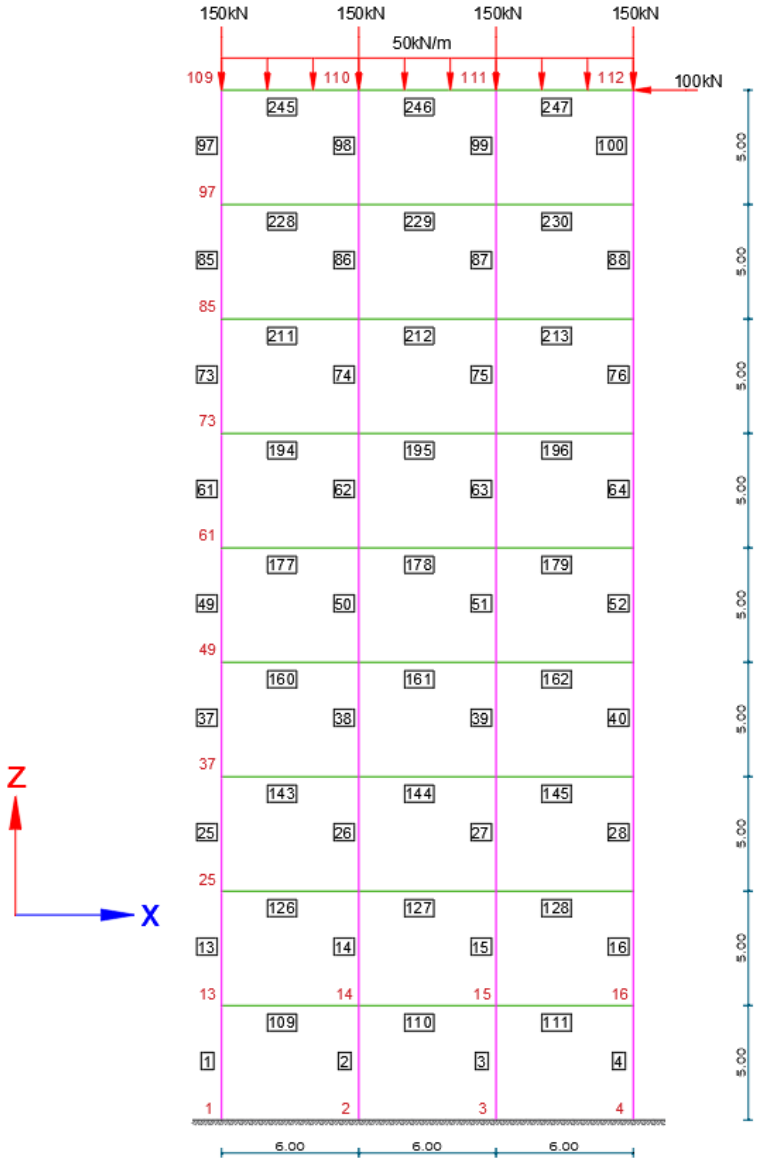
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 5.8. Esquema del pórtico en el plano superior del modelo (M-2) bajo estado de carga (C-2.1)



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 5.9. Esquema del pórtico en el plano frontal del modelo (M-2) bajo estado de carga (C-2.1)

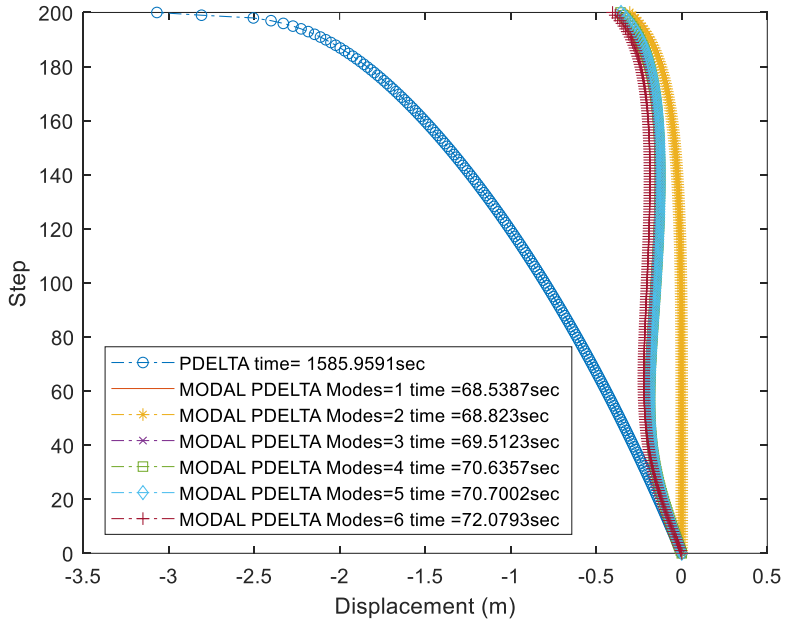


Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Para efectuar los análisis respectivos usando la metodología de elementos finitos, se ha discretizado los elementos del modelo, en 1 segmento y se ha establecido 200 pasos de carga (nstep=200) y al igual que en el modelo anterior se han construido dos curvas de equilibrio, tanto en el sentido "x" como en el sentido "y", consignando los desplazamientos calculados para cada paso de carga en el nodo 112, que corresponde al extremo superior de la columna frontal derecha del modelo (nodo donde se aplica la carga horizontal de 100kN en la *Figura 5.9*).

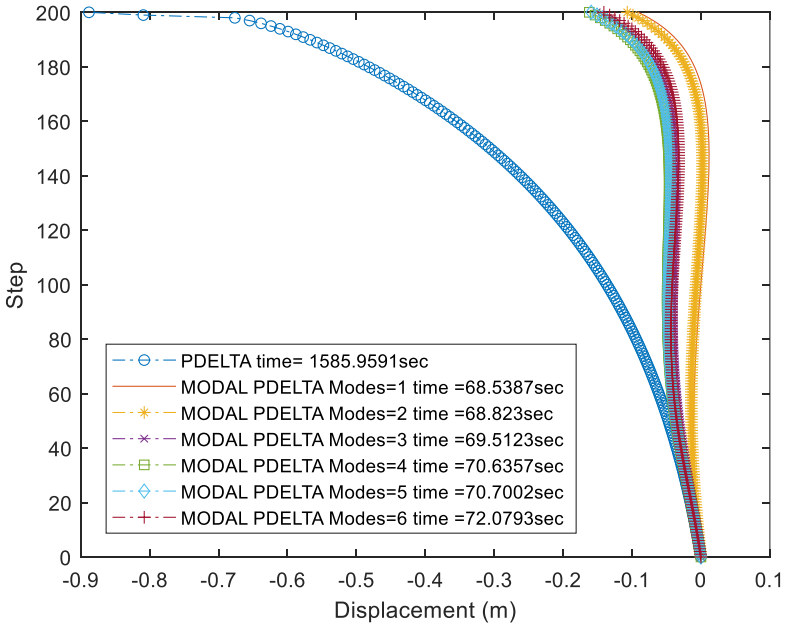
Los resultados del análisis son mostrados en la *Figura 5.10* y *Figura 5.11*, donde se puede apreciar que las curvas de equilibrio obtenidas con la metodología Modal P-delta ya no guardan relación con la respuesta obtenida con la metodología P-delta tradicional, el error es notable y este no decrece conforme se aumenta el número de modos usados en el análisis.

Figura 5.10. Desplazamiento en "x" (M-2)



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

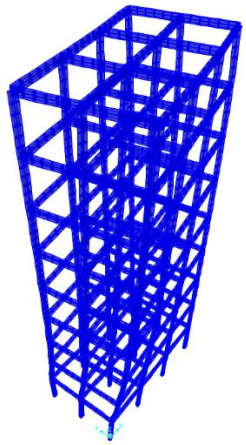
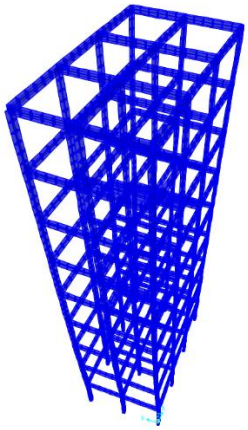
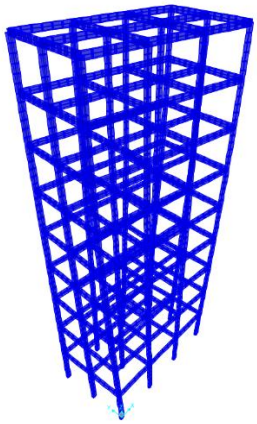
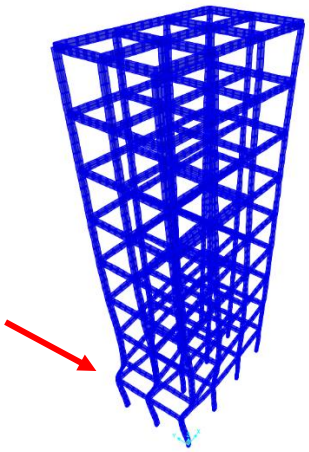
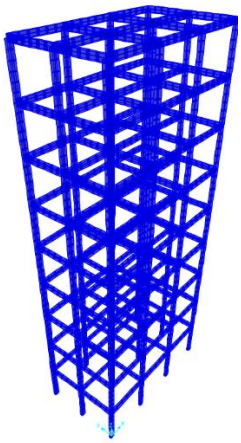
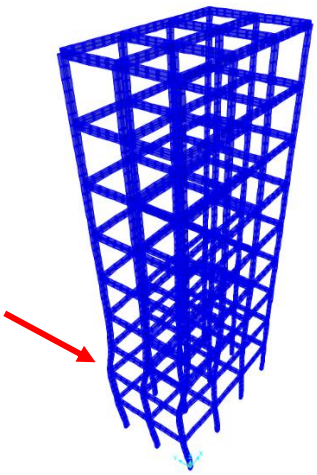
Figura 5.11. Desplazamiento en "y" (M-2)



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

A continuación, se ha desarrollado también la comparación de los primeros modos de vibración y de pandeo del modelo (M-2), los cuales han sido calculados y graficados con el software comercial SAP2000 v23.02 y se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Comparación de Modos del Modelo (M-2) bajo estado de carga (C-2.1)

N° DE MODO	MODO DE VIBRACIÓN	MODO DE PANDEO
1° modo	LONG. EN Y 	
2° modo	TORSIONAL 	
3° modo	LONG. EN X 	

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

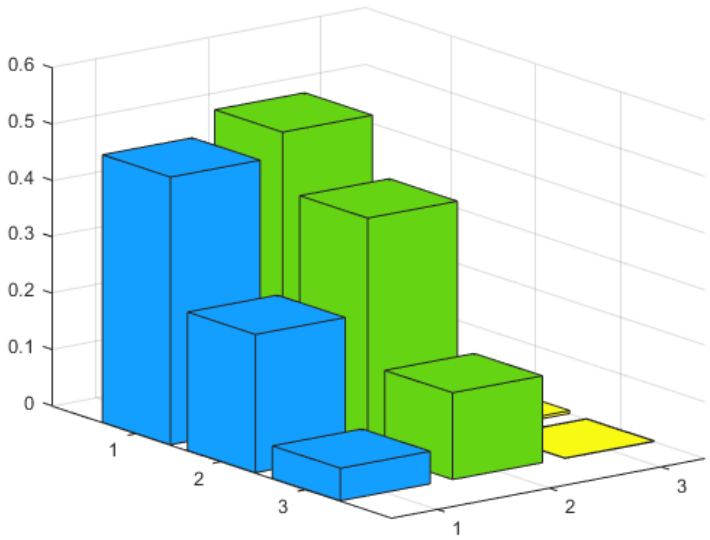
De la Tabla 6, se observa que los modos de vibración y de pandeo del modelo analizado (M-2) no guardan relación ente sí, esto es principalmente debido a la ocurrencia de pandeos locales en los elementos inferiores de la estructura, por lo tanto, la interpolación exigida en la metodología Modal P-delta ya no sería aplicable, puesto que los resultados obtenidos no serían buenas aproximaciones de los modos de vibración de la estructura cargada y en consecuencia de ello, las respuestas obtenidas con la metodología Modal P-delta difieren considerablemente de la respuesta obtenida con el método tradicional P-delta, tal como se aprecia en la *Figura 5.10* y *Figura 5.11*.

Al igual que en el análisis anterior, para este análisis se ha desarrollado también el procedimiento MAC (Modal Assurance Criterion), haciendo uso de la Eq. 5.11, para comparar los primeros modos de vibración y de pandeo de la estructura (modelo M-2), obteniendo la siguiente matriz "MAC":

$$\text{MAC} = \begin{Bmatrix} 0.4750 & 0.5174 & 0.0038 \\ 0.2455 & 0.4144 & 0.0050 \\ 0.0577 & 0.1541 & 7.257E^{-04} \end{Bmatrix}$$

La cual se ha representado gráficamente en la *Figura 5.12:*

Figura 5.12. Representación del MAC entre los modos de vibración y modos de Pandeo de la estructura modelo "M-2"



Fuente: (Elaborado por el autor)

De los resultados obtenidos en el MAC, se puede determinar que la comparación de los modos de vibración 1 y 2 con sus correspondientes modos de Pandeo presentan valores cercanos a la 0.5, por lo que serían modos poco consistentes entre sí, mientras que

la comparación del modo 3, que presenta valores cercanos a cero, indicaría que no existe una relación entre sí y que son inconsistentes. Por lo tanto, se corrobora lo inicialmente descrito a partir de lo mostrado en los gráficos de los modos de vibración y de pandeo.

De lo anterior, es posible decir que la metodología Modal P-delta, depende estrechamente de la relación existente entre los modos de vibración y modos de pandeo, por lo que no ofrece buenos resultados cuando se aplica a estructuras tridimensionales que bajo ciertos estados de carga poseen modos de vibración y de pandeo diferentes entre sí, por lo tanto se ha comprobado de manera fehaciente que la metodología Modal P-delta, propuesta por Ferreira (2020) y aquí extendida, no es aplicable al análisis de estructuras tridimensionales. Por tal razón en el presente trabajo de investigación se propone una metodología alternativa para el análisis no lineal geométrico de estructuras en tres dimensiones, denominada Modal P-delta modificado.

6 METODOLOGÍA MODAL P-DELTA MODIFICADO:

6.1 Descripción de la Metodología:

La metodología Modal P-delta modificado se basa en la metodología propuesta por Ferreira (2020), con la principal diferencia que en el proceso de cálculo se omite el uso de la (Eq. 3.47) que corresponde a la interpolación de los modos de vibración y de pandeo, debido a que dicha propuesta de aproximación no es eficaz en el análisis de estructuras tridimensionales, tal como se demostró en el capítulo precedente.

La metodología propone calcular los modos de vibración de la estructura cargada $\{\widetilde{\phi_{pn}}\}$ y sus frecuencias correspondientes ($\widetilde{\omega_{pn}}$), a partir de la Eq. 3.45, realizando una aproximación de la matriz de rigidez geométrica que será equivalente a una fracción de la matriz geométrica calculada para la carga crítica, tal como se muestra en la. Eq. 6.1

$$[K_g]_k = \Delta[K_g]_{pn} = \frac{k}{nstep}[K_g]_{pn} \qquad (6.1)$$

Donde:

- $[K_g]_k$ es la matriz de rigidez geométrica equivalente, para el paso de carga “k”
- $[K_g]_{pn}$ es la matriz geométrica para la carga crítica.

Por lo tanto, reemplazando en la Eq. 3.45, se obtiene:

$$\left([K_e] + [K_g]_k - \omega^2_{pn_k}[M_e]\right)\{\widetilde{\phi_{pn}}\}_k = 0 \qquad (6.2)$$

Dicha ecuación representa un problema de vectores y autovalores, con la que se calculará los modos de vibración aproximados de la estructura y sus frecuencias correspondientes para el paso de carga “k”.

Así mismo se propone limitar el procedimiento al cálculo de solo un cierto número modos y frecuencias en relación con el porcentaje de participación de las cargas estáticas, la cual según Wilson (2002), se define por:

$$r = \frac{\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\phi_n{}^T F_e}{\omega_n}\right)^2}{F_e{}^T u} \qquad (6.3)$$

Donde:

- r, es el porcentaje de participación de la carga estática

- ϕ_n, son los modos de vibración de la estructura
- F_e, es el vector de cargas nodales
- u, es el vector que contiene los desplazamientos estáticos para la carga crítica.

Finalmente, con los valores obtenidos de los modos de vibración y frecuencias se hace uso de la Eq. 3.57 y se calcula los desplazamientos de la estructura, los cuales consideran el efecto no lineal geométrico. A continuación, en la Figura 6.1 se muestra la nueva rutina de cálculo desarrollada para el análisis Modal P-delta modificado.

Figura 6.1 *Rutina del Análisis Modal P-delta Modificado*

- Definir el número de pasos de carga, *nstep*.
- Definir la matriz de rigidez elástica global de la estructura $[K_e]$ considerando las condiciones de contorno.
- Definir el vector de las cargas nodales $\{F_e\}$, considerando las condiciones de contorno.
- Calcular la matriz de rigidez geométrica $[K_g]$ para el vector de carga $\{F_e\}$
- Desarrollar el análisis de pandeo para calcular los factores de amplificación $\{\alpha_n\}$
- Realizar el análisis estático para la carga amplificada por el 1er factor de amplificación $\{\alpha_1\}$, $[K_e]\{\mu\} = \alpha_1.\{F_e\}$ y calcular el desplazamiento $\{\mu\}$ causado por las cargas nodales.
- Definir la matriz de masa Global de la estructura, considerando las condiciones de contorno $[M_e]$.
- Desarrollar el análisis modal para calcular los modos de vibración de la estructura sin cargas $[\phi_n]$.
- Calcular el vector que contiene las proporciones de participación de la carga estática $\{r\}$.

$$r = \frac{\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{{\phi_n}^T \alpha_1.F_e}{\omega_n}\right)^2}{\alpha_1.{F_e}^T u}$$

- Definir el porcentaje de participación de la carga estática $\{r\}$ e identificar el número de modos correspondiente $\{nmo\}$ a usar en el análisis.
- Calcular la matriz de rigidez geométrica $[K_g]$ para el vector de carga amplificado. $\alpha_1.\{F_e\}$
- Se define el vector de desplazamiento $(\Delta\delta(:,k) = \{0\})$
- For k=1:nstep
  - Calcular la matriz de rigidez total aproximada, para cada paso de carga
  - $[K_T]_k = [K_e] + (k/nstep)[K_g]$.
  - Calcular los primeros $\{nmo\}$ modos de vibración $\widetilde{\phi_{pn}}_k$ y frecuencias $\widetilde{\omega_{pn}}_k$ correspondientes, para cada paso de carga.
  - Definir el vector de fuerzas totales $\{F_T\}$ en cada paso de carga:

$$\{F_T\} = \Delta\,\alpha_1.\{F_e\} = \frac{k}{nstep}\alpha_1.\{F_e\}$$

  - For: j=1: *nmo*
  - Calcular los desplazamientos

$$\{\Delta\delta(:,k)\} = \{\Delta\delta(:,k)\} + \{\widetilde{\phi_{pn}}(:,j)\}\left(\frac{\{\widetilde{\phi_{pn}}(:,j)\}^T\{F_T\}}{(\widetilde{\omega_{pn}}(:,j))^2}\right)$$

  - End.
- Calcular los desplazamientos totales para los pasos de carga.

$$\{\delta T(:,k)\} = \{\Delta\delta(:,k)\}$$

- End.

Fuente: (Elaborado por el autor)

6.2 Aplicación de la Metodología Modal P-delta Modificado:

Para comprobar la eficacia y precisión de la metodología se va a realizar su aplicación en los modelos (M-1) y (M-2), desarrollados en el capítulo anterior (mostrados en la *Figura 5.1* y *Figura 5.6*), sometidos bajo los mismos estados de carga. (mostrados en la *Figura 5.2* y *Figura 5.7*).

6.2.1 Modelo (M-1):

Para los análisis desarrollados al modelo (M-1) de la *Figura 5.1* , se ha considerado los porcentajes de participación de la carga estática (r) mostrados en la Tabla 7, donde además se consigna el número de modos usados, los cuales han sido calculados con la Eq. 6.3 y corresponden a cada porcentaje de participación de la carga estática (r), que ha sido definida a partir de las cargas amplificadas hasta casi alcanzar la carga crítica por un factor α_n de 53.

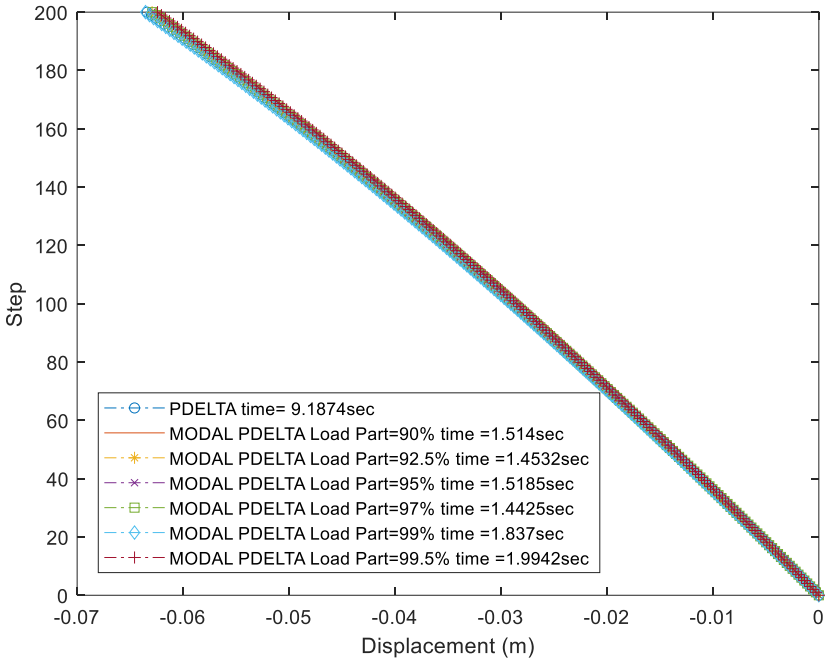
Tabla 7. Participación de la carga estática y número de modos usados en el análisis

#Analisis	% Participación (r)	# Modos (nmod)
01	90.00%	15
02	92.50%	15
03	95.00%	15
04	97.00%	15
05	99.00%	27
06	99.50%	30

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

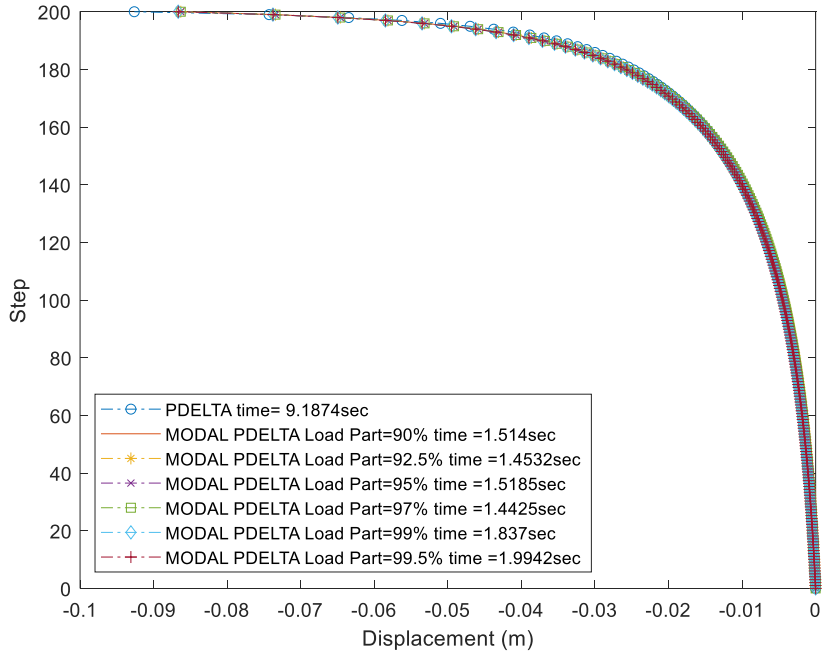
Los resultados obtenidos del análisis son mostrados en la *Figura 6.2* y *Figura 6.3*, que corresponden a las curvas de equilibrio obtenidos a partir del cálculo de los desplazamientos en el sentido “x” y “y”, teniendo en consideración que se ha mantenido el punto de control considerado en el análisis anterior, donde se puede apreciar que la metodología propuesta ofrece resultados muy semejantes a aquellos obtenidos con la metodología tradicional y los tiempos de cálculo requeridos son todavía menores y de pocos segundos. Sin embargo, al ser un método aproximado, se aprecia la existencia de un error que se encuentra en el orden de 10^{-3} en ambas direcciones, el cual ha sido calculado para cada dirección, en cada paso de carga y se muestran en la *Figura 6.2* y *Figura 6.3.*

Figura 6.2. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – Estado de Carga “C-1.1”



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

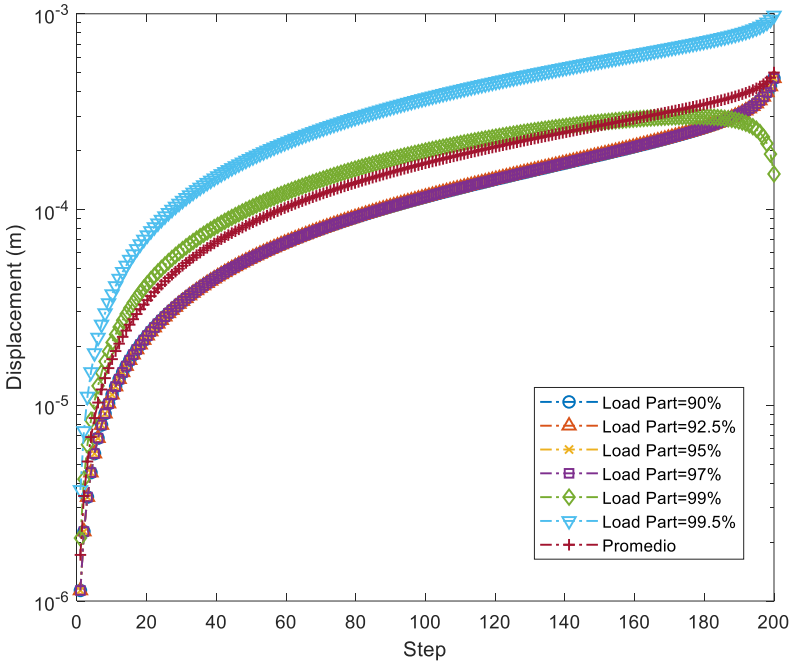
Figura 6.3. Respuesta en “y” - Modelo M-1 – Estado de Carga “C-1.1”



Fuente: (Elaborado por el autor)

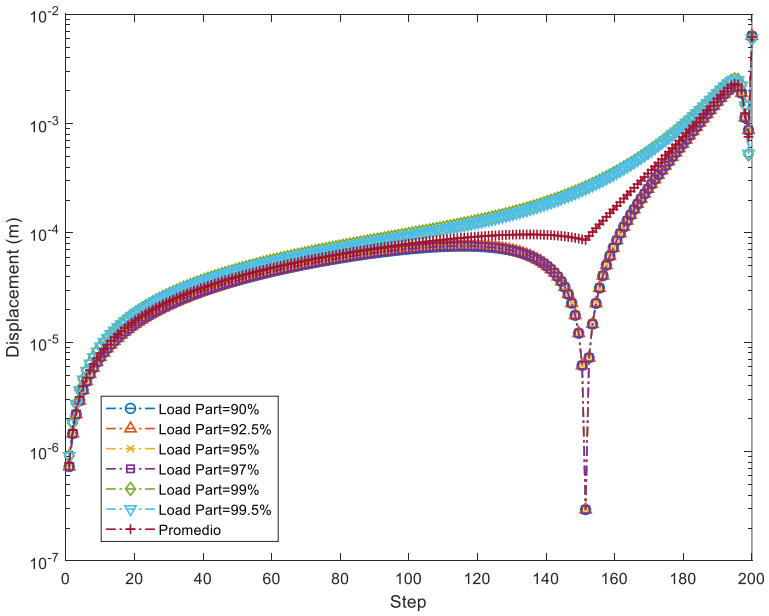
Los errores máximos consignados en el último paso de carga (Figura 6.4 y Figura 6.5) son de 0.0025 y 0.0043m para la dirección “x” y dirección “y” respectivamente.

Figura 6.4. Error en el sentido “x”



Fuente: (Elaborado por el autor)

Figura 6.5. Error en el sentido “y”

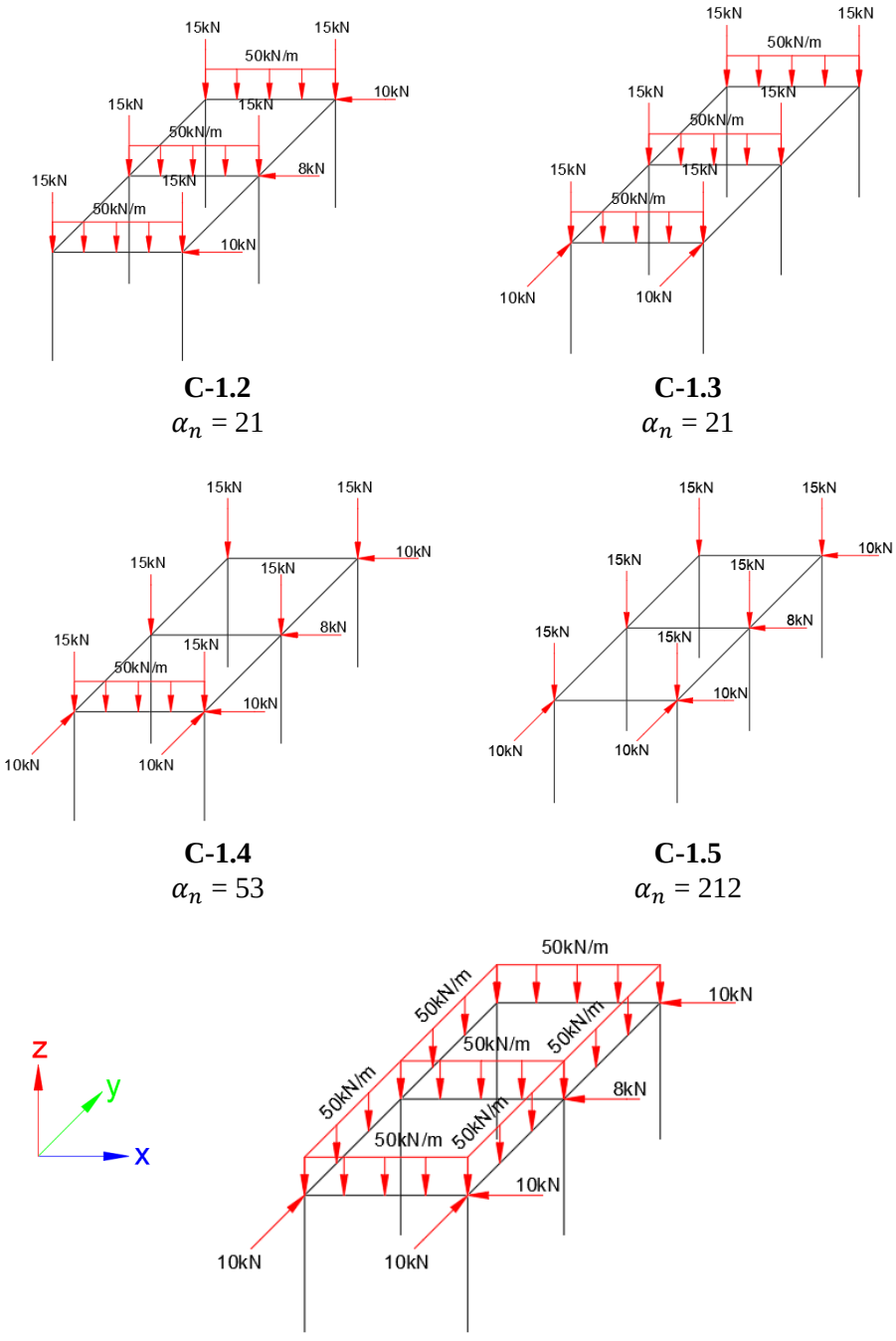


Fuente: (Elaborado por el autor)

Adicionalmente, para verificar la eficacia de la metodología propuesta, se ha realizado su aplicación, en el modelo (M-1) sometido a los estados de carga mostrados en

la *Figura 6.6*, donde se indican los respectivos factores de amplificación obtenidos en el análisis de pandeo y usados para alcanzar la carga crítica.

Figura 6.6. Estados de carga para el modelo M-1



C-1.2
α_n = 21

C-1.3
α_n = 21

C-1.4
α_n = 53

C-1.5
α_n = 212

C-1.6
α_n = 11

Fuente: (Elaborado por el autor)

De la misma manera se han realizado 6 análisis para cada estado de carga, tomando en cuenta los porcentajes de participación de la carga estática y la cantidad de modos

correspondientes (nmod), que han sido determinados a partir de la participación de la carga estática calculadas con la Eq. 6.3, y son mostrados en la Tabla 8.

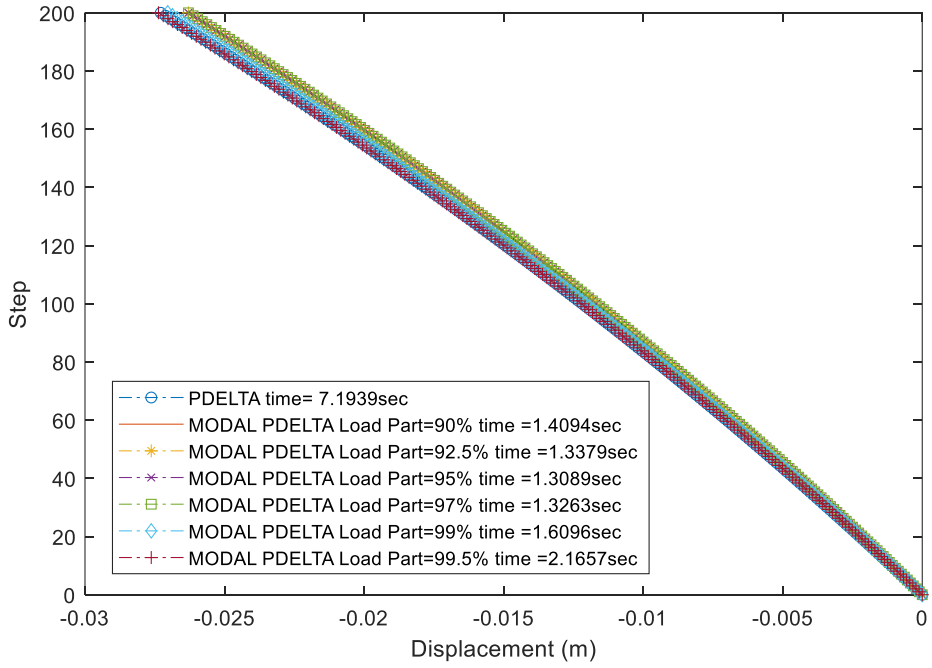
Tabla 8. Participación de la carga estática y número de modos correspondientes

Estado de Carga		**C-1.2**	**C-1.3**	**C-1.4**	**C-1.5**	**C-1.6**
# Análisis	**Participación (r)**	**# Modos (nmod)**	**# Modos (nmod)**	**# Modos (nmod)**	**# Modos (nmod)**	**# Modos (nmod)**
01	90.00%	11	11	15	3	16
02	92.50%	11	11	15	3	16
03	95.00%	11	11	15	5	16
04	97.00%	11	11	15	9	22
05	99.00%	22	22	26	22	22
06	99.50%	32	30	27	26	26

Fuente: (Elaborado por el autor)

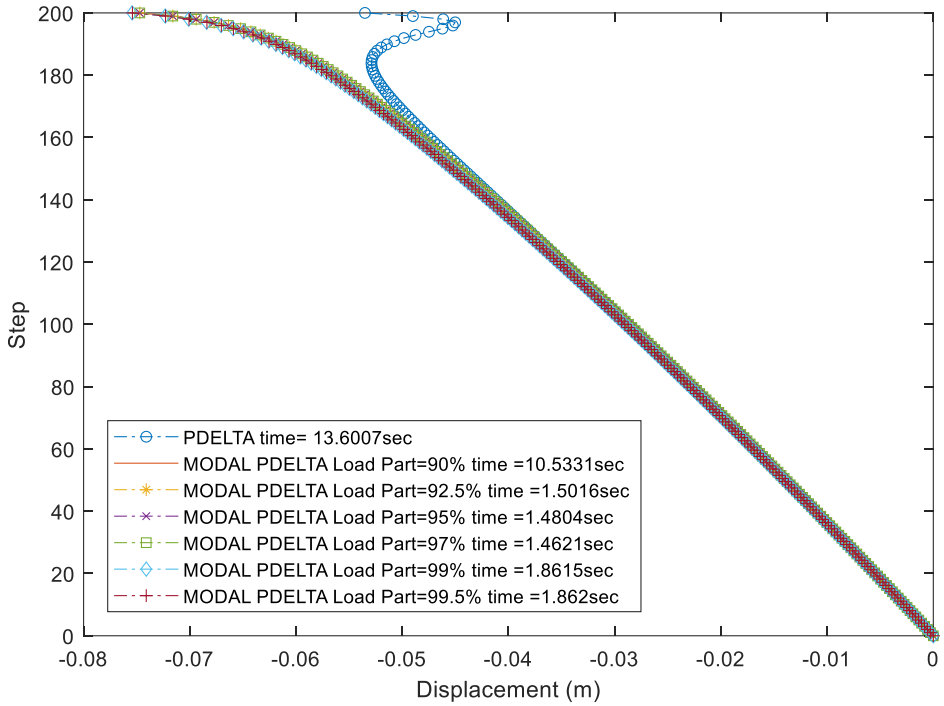
Los resultados de los análisis se muestran desde la Figura 6.7 hasta la Figura 6.14, donde se muestra los desplazamientos en “x” y en “y”, sin embargo, se ha tener en cuenta que para los estados de carga C-1.2 y C-1.3, donde las cargas verticales son simétricas y las cargas horizontales se aplican en un solo sentido, solo se construirá la curva de equilibrio en el sentido de la fuerza puesto que en el otro sentido la respuesta es prácticamente cero (0).

Figura 6.7. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – estado de carga C-1.2



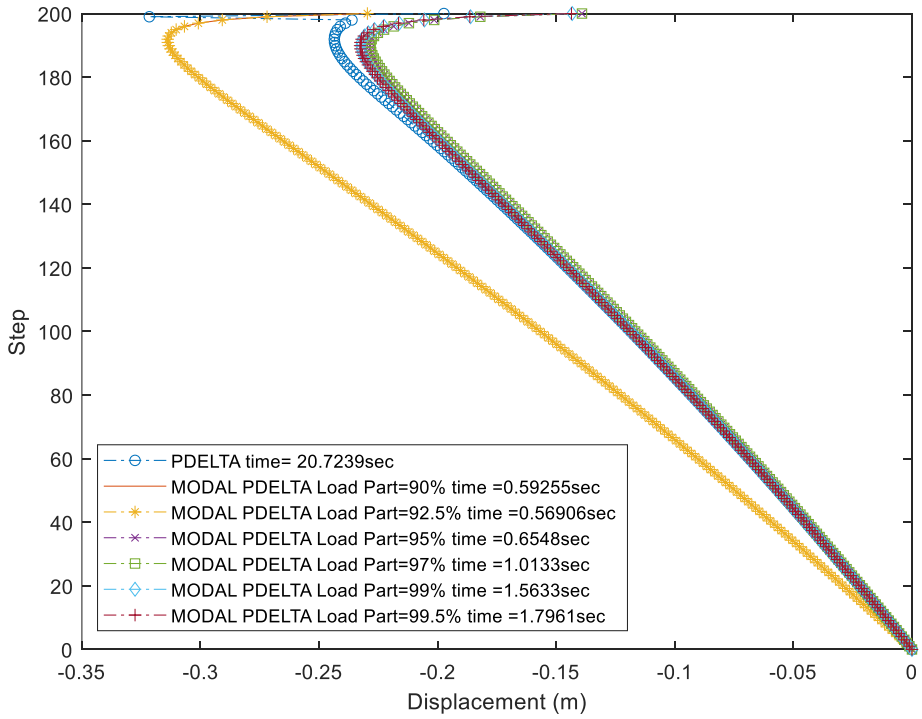
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Figura 6.8. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – estado de carga C-1.4



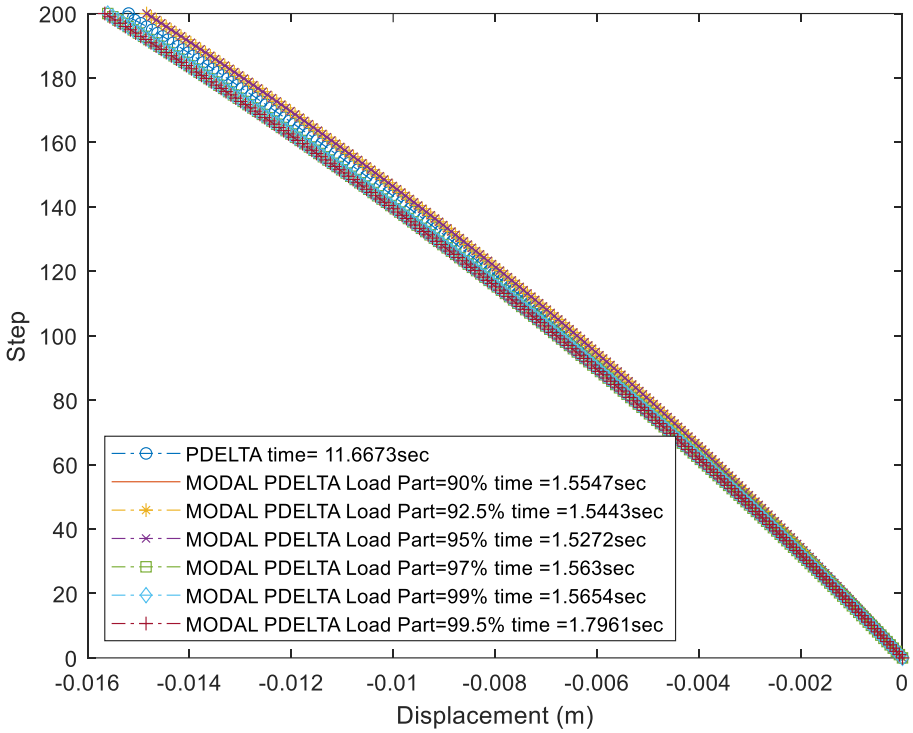
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Figura 6.9. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – estado de carga C-1.5



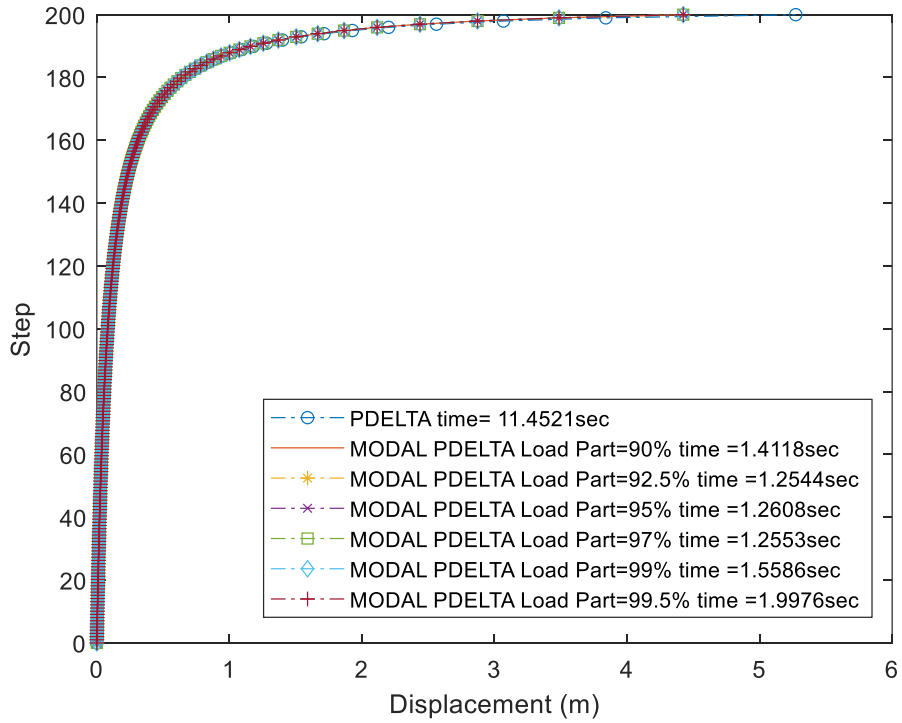
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Figura 6.10. Respuesta en “x” - Modelo M-1 – estado de carga C-1.6



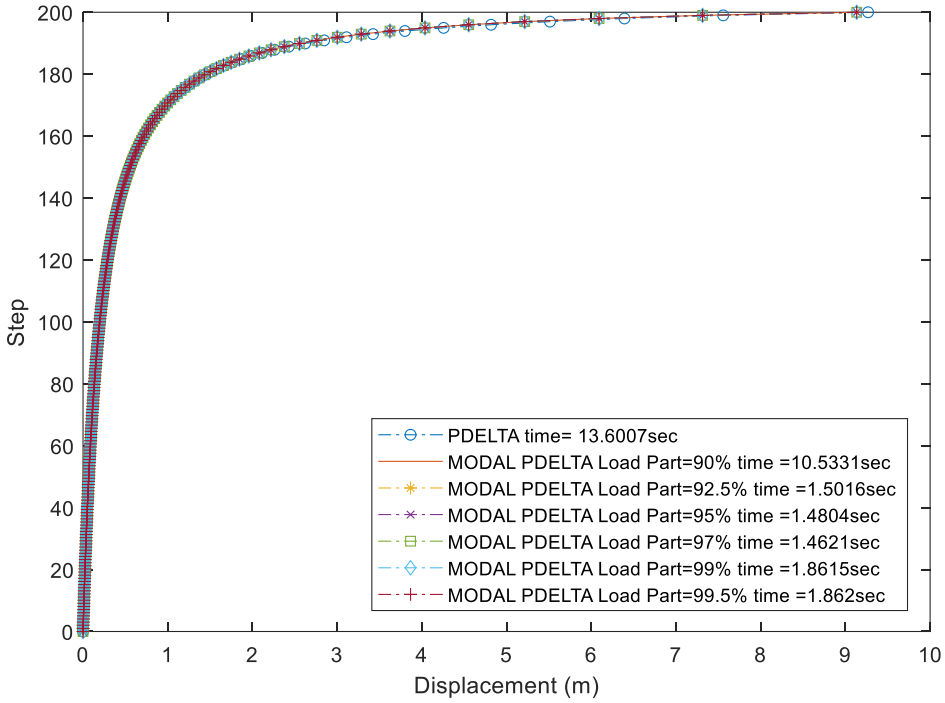
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Figura 6.11. Respuesta en “y” - Modelo (M-1) -estado de carga C-1.3



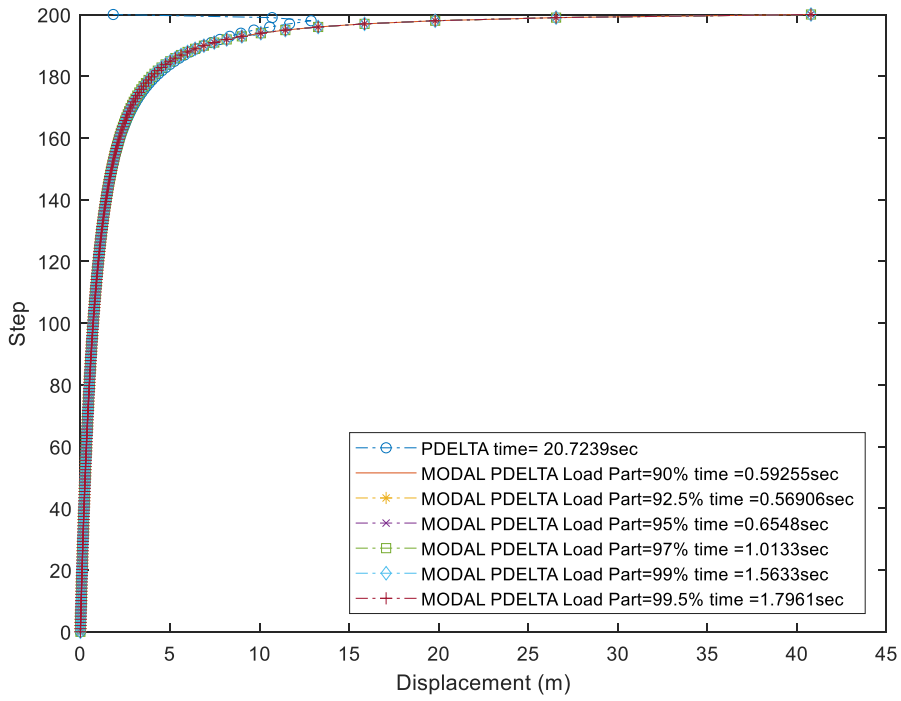
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Figura 6.12. Respuesta en “y” - Modelo (M-1) -estado de carga C-1.4



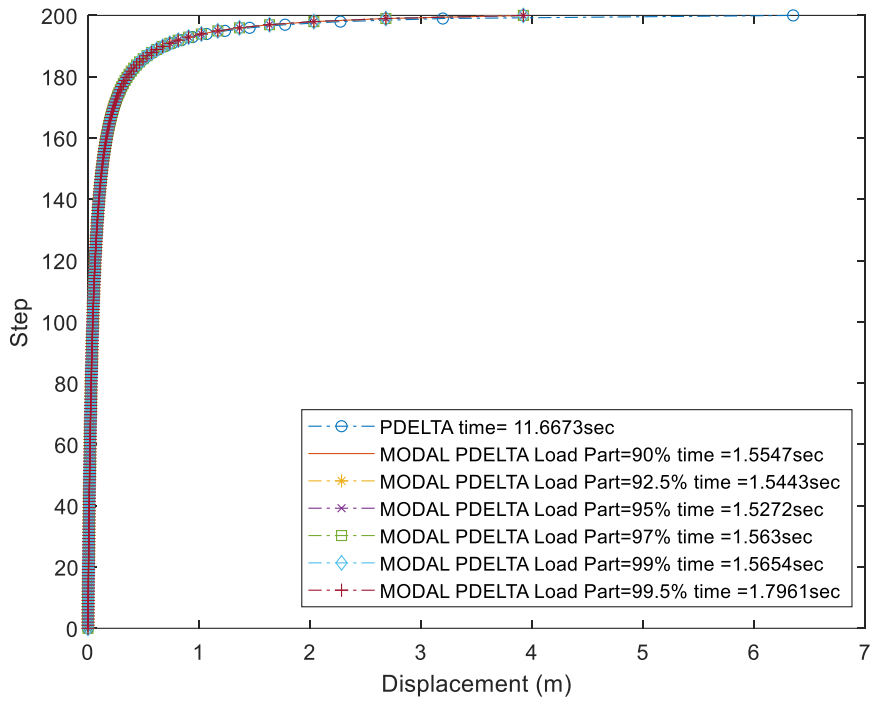
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Figura 6.13. Respuesta en “y” - Modelo (M-1) -estado de carga C-1.5



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Figura 6.14. Respuesta en “y” - Modelo (M-1) -estado de carga C-1.6



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

A partir de los resultados mostrados se puede verificar lo siguiente:

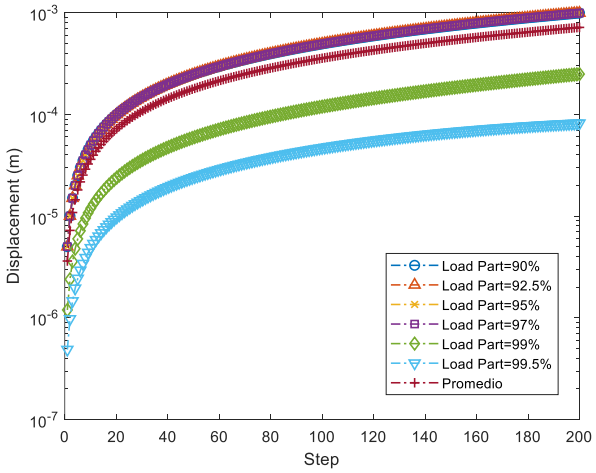
- Las respuestas obtenidas para los estados de carga (C-1.2 y C-1.3) donde la carga vertical es simétrica y presenta fuerzas horizontales únicamente en una dirección, han sido muy precisas y semejantes a los obtenidos con la metodología tradicional en los sentidos analizados.
- Para el estado de Carga C-1-4, donde se consideran cargas horizontales en ambos sentidos y carga vertical asimétrica en el eje x, se ha verificado que aproximadamente a partir del paso de carga 150, existe una bifurcación entre las respuestas obtenidas con la metodología propuesta y la metodología tradicional, este comportamiento es debido a que conforme se incrementan los valores de las cargas aplicadas, la fuerza distribuida (que vendría a ser una fuerza considerable en comparación a las demás cargas aplicadas), provocaría que la deformación de la estructura se oriente en el sentido “y”, ocurriendo su torsión, lo que ocasionaría que la columna central cuyo extremo corresponde al punto de control, experimente un giro, por lo que las coordenadas en “x” experimentarían un cambio de dirección y una redistribución de los esfuerzos internos, eso mismo ocasionaría que las

nuevas matrices rigidez geométricas calculadas resulten ser diferentes a las aproximaciones realizadas con la metodología.

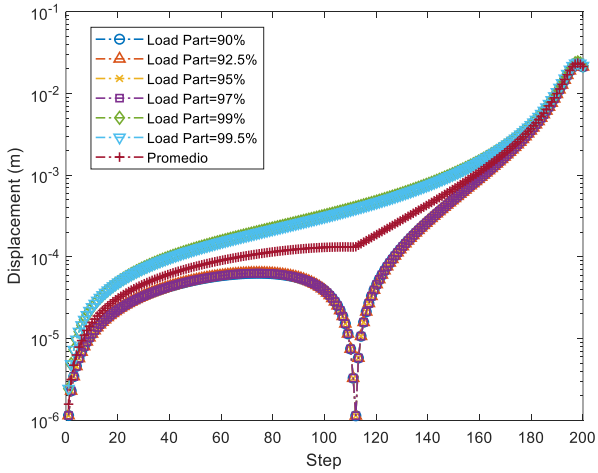
- Para el estado de Carga C-1-5, las respuestas obtenidas con la metodología tradicional no alcanzan a converger correctamente para valores de fuerza cercanos a la carga crítica, esto es debido a que la matriz calculada del sistema tiende a volverse singular ocasionando que las deformaciones de la estructura tiendan a crecer considerablemente. A diferencia de ello, la metodología propuesta no presenta tales limitaciones ya que esta consiste básicamente en realizar una disminución de la rigidez de la estructura proporcional a la magnitud de la carga aplicada. Sin embargo, a pesar de la no convergencia se puede verificar que las curvas obtenidas con ambas metodologías siguen la misma trayectoria de respuesta tanto para el sentido "x" como para el sentido "y".
- Para el caso de Carga C-1.6, donde se consignas cargas distribuidas en todas las vigas, las respuestas han sido muy semejantes a los obtenidos con la metodología tradicional en ambos sentidos, debido a que se realiza una mejor distribución de los esfuerzos en sus elementos lo cual ocasiona que la aproximación de la matriz de rigidez geométrica y por lo tanto también la matriz de rigidez global sean más exactas.

En la Figura 6.15 y Figura 6.16 se esquematiza el error expresado en desplazamientos, para cada paso de carga y para cada valor de "r" (participación de la carga estática) usado en el análisis

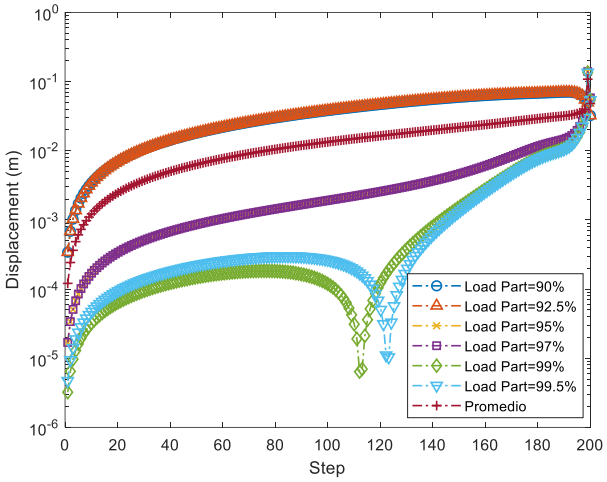
Figura 6.15. Error en "x" para el análisis del Modelo (M-1) bajo diferentes estados de carga



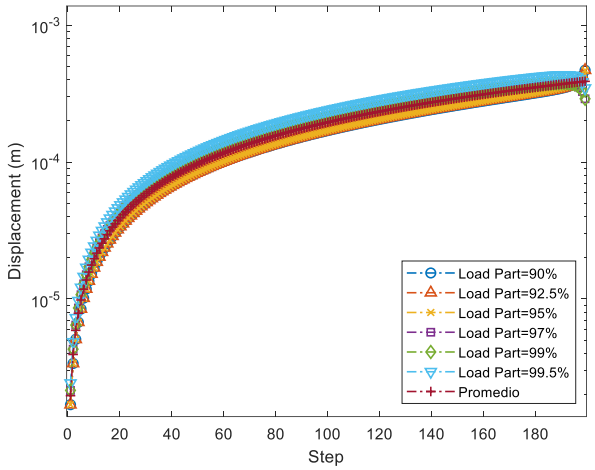
C-1.2



C-1.4



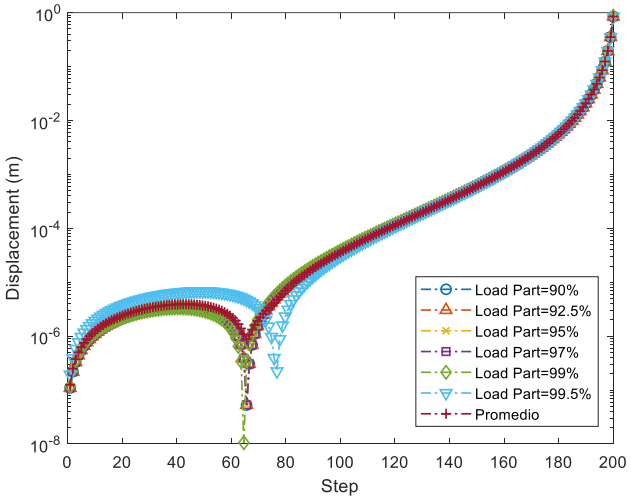
C-1.5



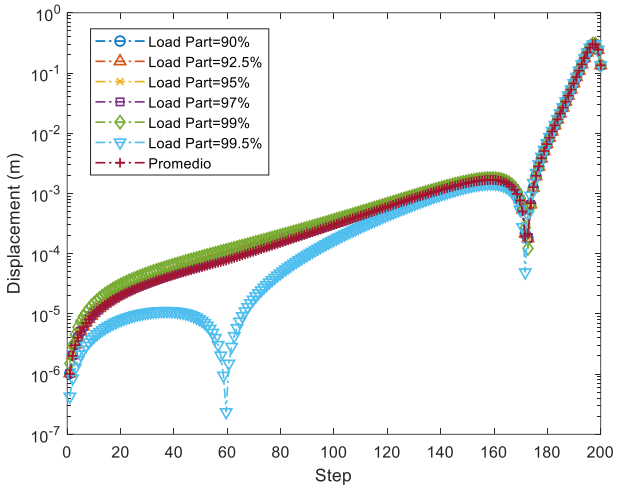
C-1.6

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

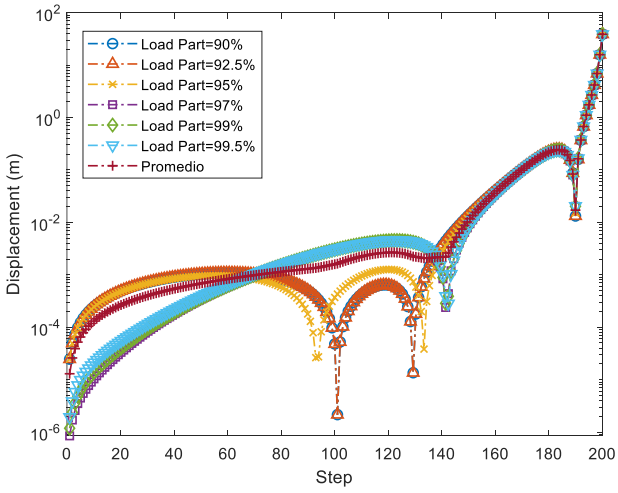
Figura 6.16. Error en “y” para el análisis del Modelo (M-1) bajo diferentes estados de carga



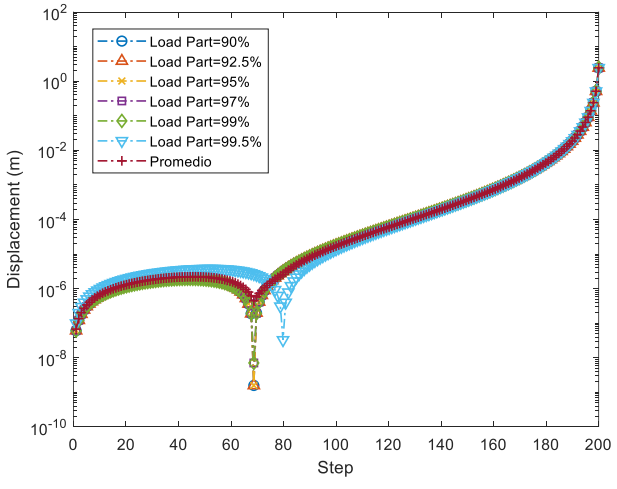
C-1.3



C-1.4



C-1.5



C-1.6

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

A partir de los gráficos de error mostrados, para el modelo (M-1) se ha podido verificar que:

- Para el modelo analizado, el error resultante en cada paso de carga analizado ha sido mayor cuando se ha considerado el análisis con los primeros modos (*nmo)* correspondientes a una participación de la carga estática (r) de 99.5%.
- El error máximo consignado en la dirección "x" para el último paso de carga se encuentra en el orden de $10e^{-2}$ aproximadamente y corresponde al estado de carga C-1.5, (considerando como último estado de carga al paso donde la metodología tradicional deja de converger)
- El error máximo consignado en la dirección "y" para el último paso de carga se encuentra en el orden de $1e^{0}$ aproximadamente y corresponde al estado de carga C-1.6.

6.2.2 Modelo (M-2):

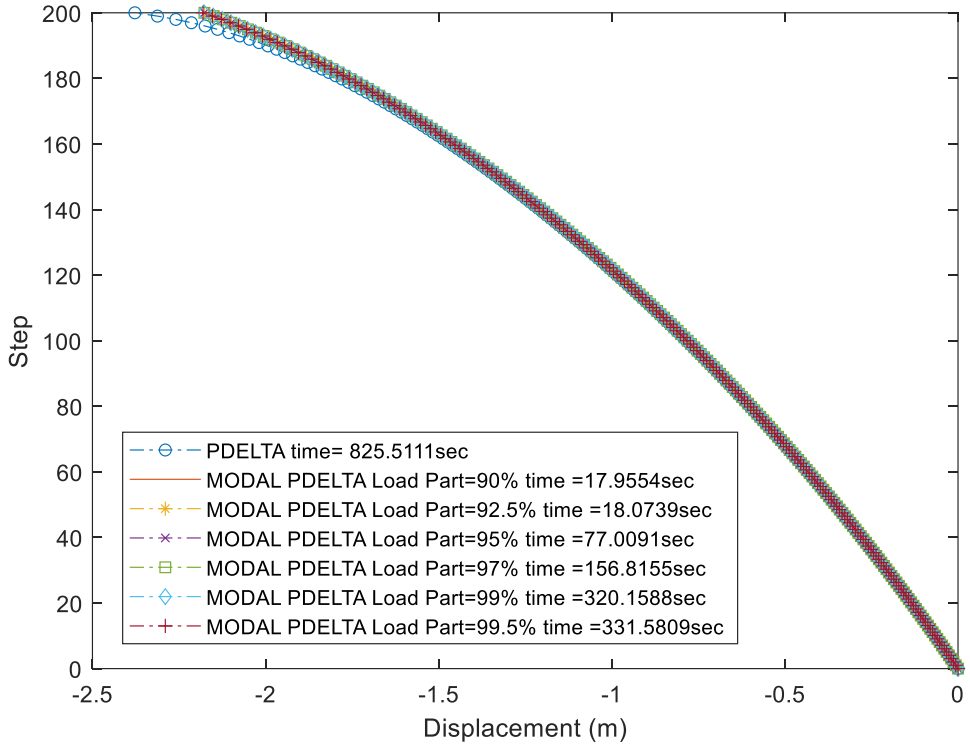
De igual forma que en el caso anterior, para el desarrollo del modelo M-2 mostrado en la *Figura 5.6* bajo el estado de cargas mostrado en la *Figura 5.7*, se va a tener en cuenta lo mostrado en la Tabla 9, donde se indica el número modos usados, lo cuales han sido determinados en función del porcentaje de participación de la carga estática (r) calculado mediante la Eq. 6.3 y teniendo en cuenta un factor de amplificación de cargas (α_n) igual a 29.5.

Tabla 9. Participación de la carga estática y número de modos correspondientes

#Analisis	% Participación (r)	# Modos (nmod)
01	90.00%	63
02	92.50%	63
03	95.00%	138
04	97.00%	234
05	99.00%	368
06	99.50%	496

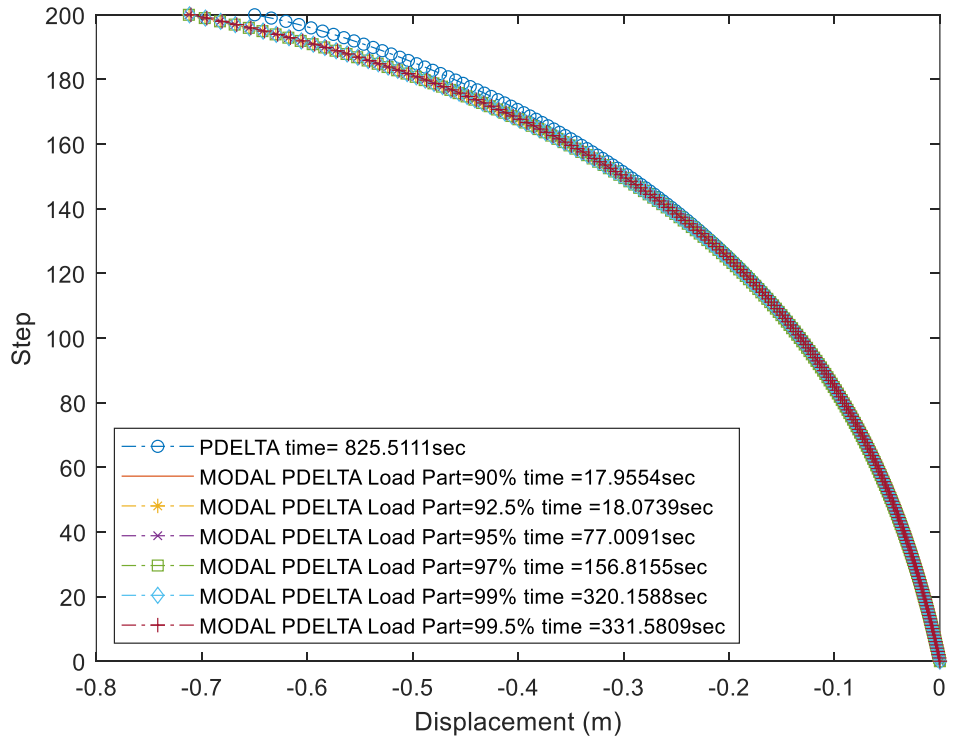
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Figura 6.17. Respuesta en “x” - Modelo M-2 – Estado de Carga “C-2.1”



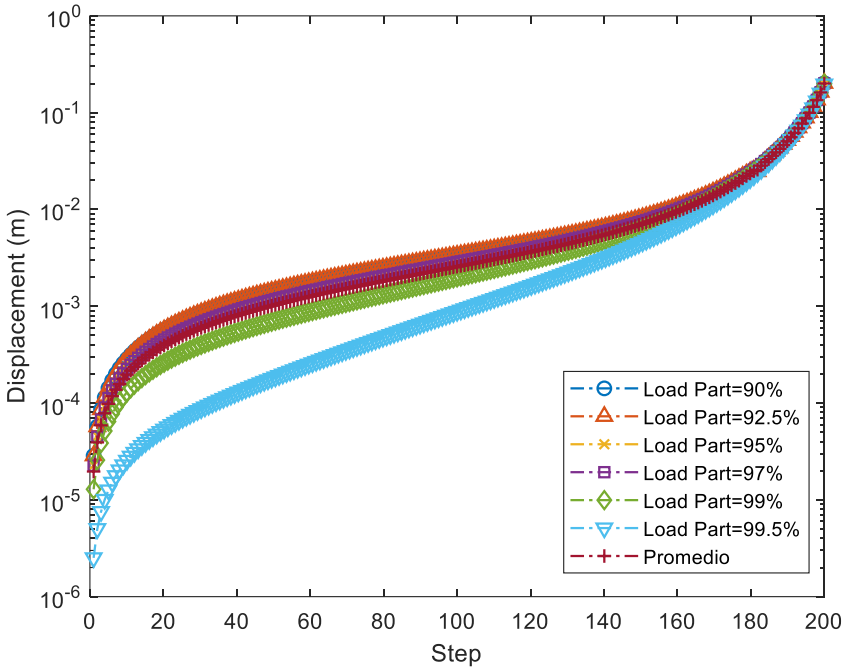
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Figura 6.18. Respuesta en “y” - Modelo M-2 – Estado de Carga “C-2.1”



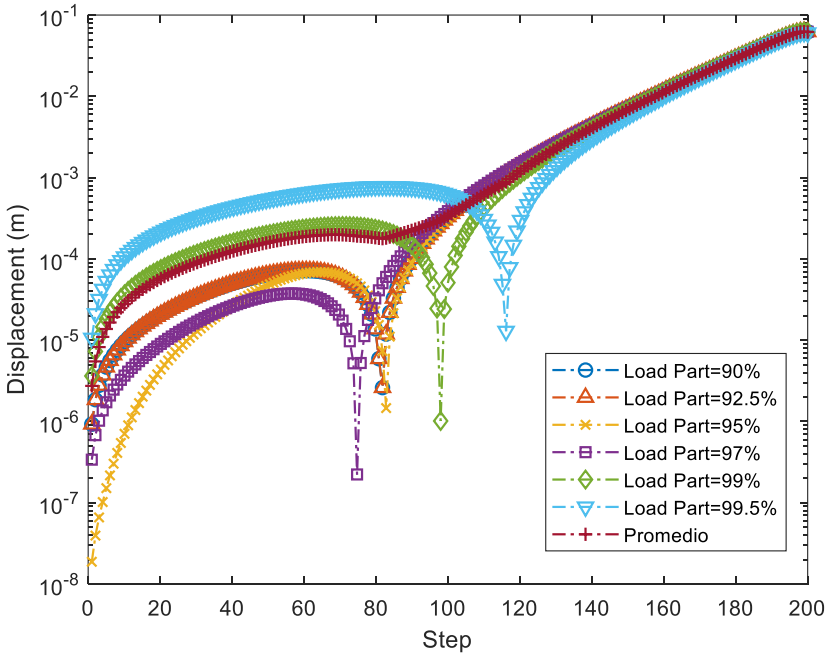
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Figura 6.19. Error en el sentido “x”



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

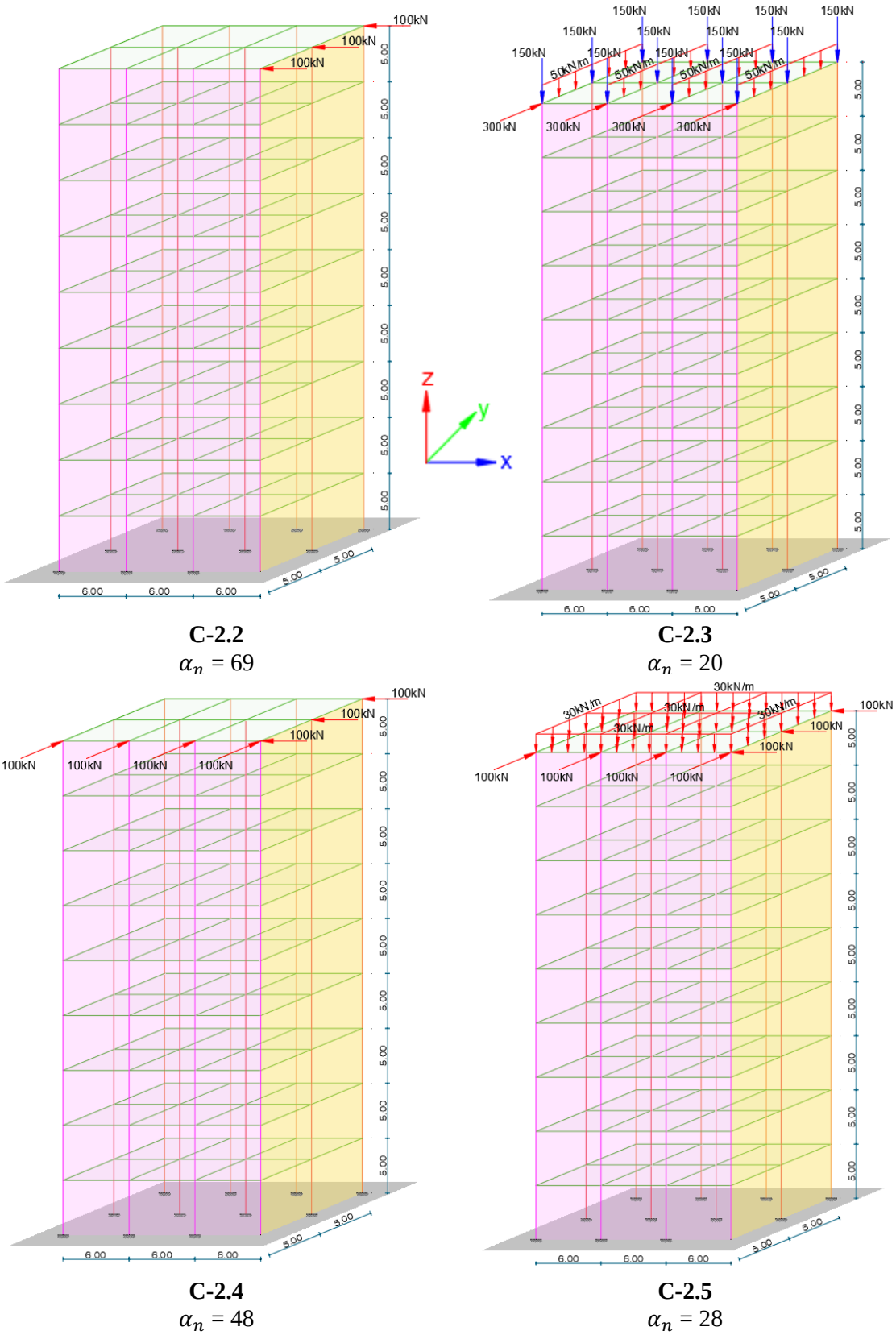
Figura 6.20. Error en el sentido “y”



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Adicionalmente, para el modelo M-2, se ha realizado la aplicación de la metodología propuesta, con los estados de carga mostrados en la *Figura 6.21* donde se indican los valores de amplificación de carga (α_n), para cada estado analizado.

Figura 6.21. Estados de carga analizados para el modelo M-2

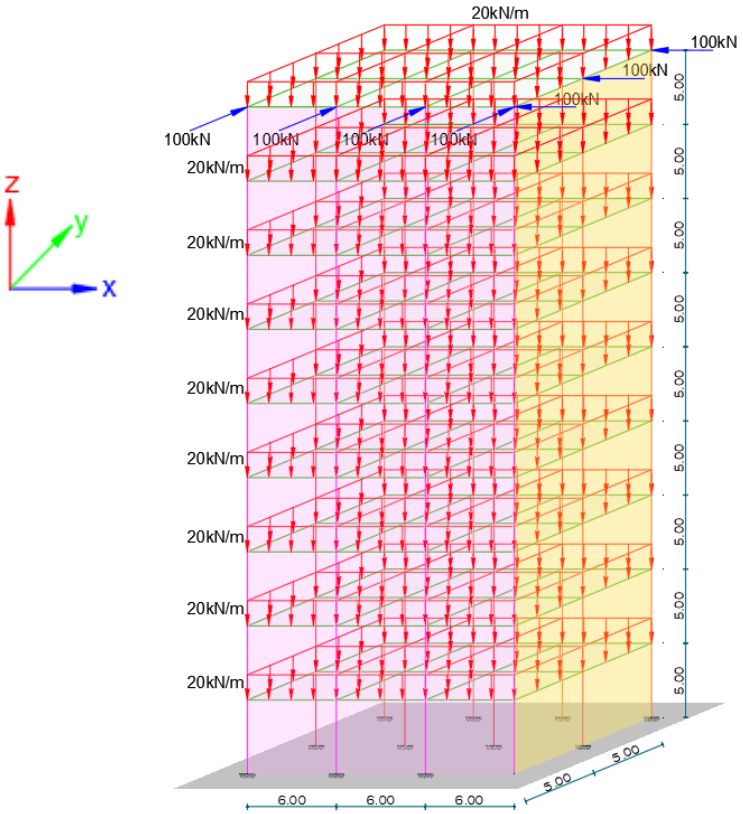


C-2.2
α_n = 69

C-2.3
α_n = 20

C-2.4
α_n = 48

C-2.5
α_n = 28



C-2.6

α_n = 21

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Así mismo, se tomarán en cuenta las participaciones de la carga estática y modos correspondientes mostrados en la Tabla 10

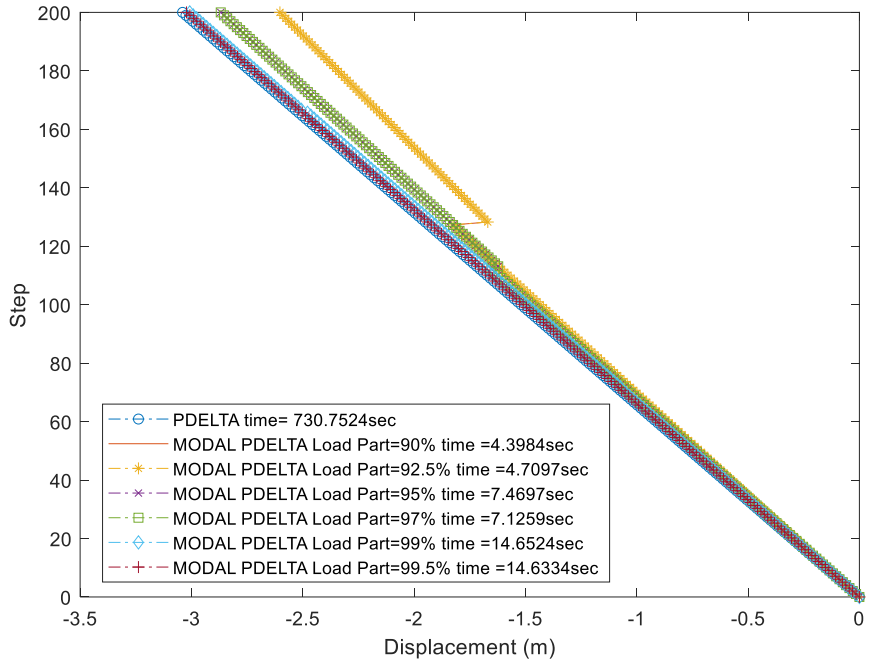
Tabla 10. Participación de la carga estática y número de modos correspondientes

Estado de Carga		**C-2.2**	**C-2.3**	**C-2.4**	**C-2.5**	**C-2.6**
# Análisis	**Participación (r)**	**# Modos (nmod)**	**# Modos (nmod)**	**# Modos (nmod)**	**# Modos (nmod)**	**# Modos (nmod)**
01	90.00%	6	4	4	36	49
02	92.50%	6	7	6	49	49
03	95.00%	14	11	7	49	49
04	97.00%	14	29	11	49	49
05	99.00%	39	49	23	194	63
06	99.50%	54	121	30	276	121

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

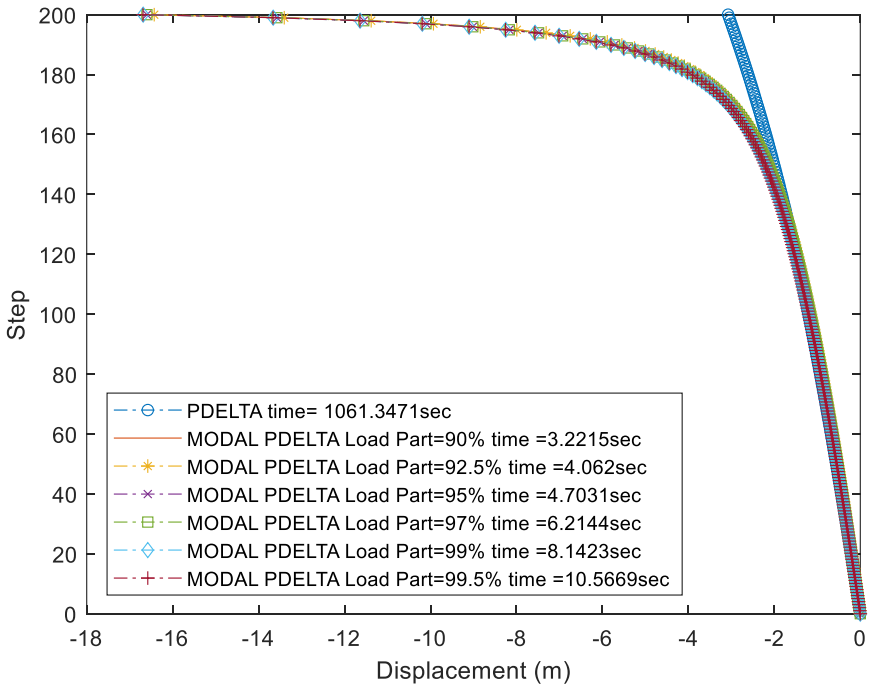
Las curvas de equilibrio en la dirección “x” y dirección “y” se muestran a continuación desde la *Figura 6.22* hasta la *Figura 6.29.*

Figura 6.22. Respuesta en “x” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.2



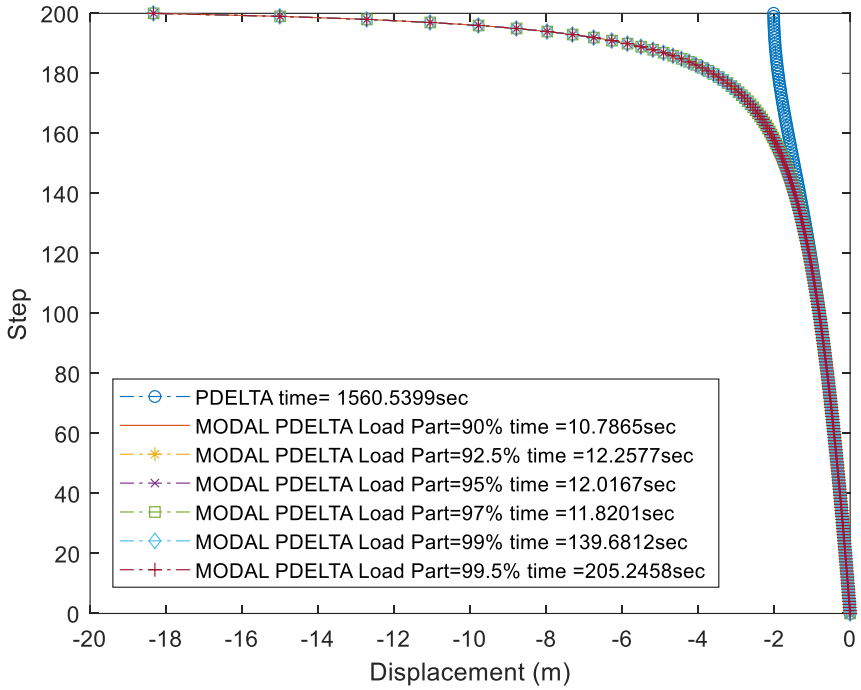
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Figura 6.23. Respuesta en “x” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.4



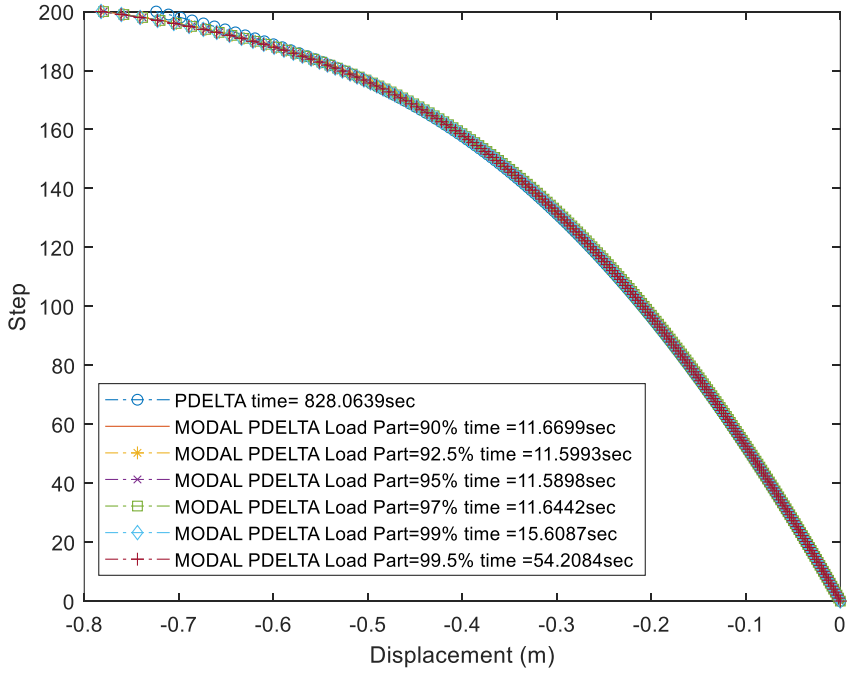
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.24. Respuesta en “x” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.5



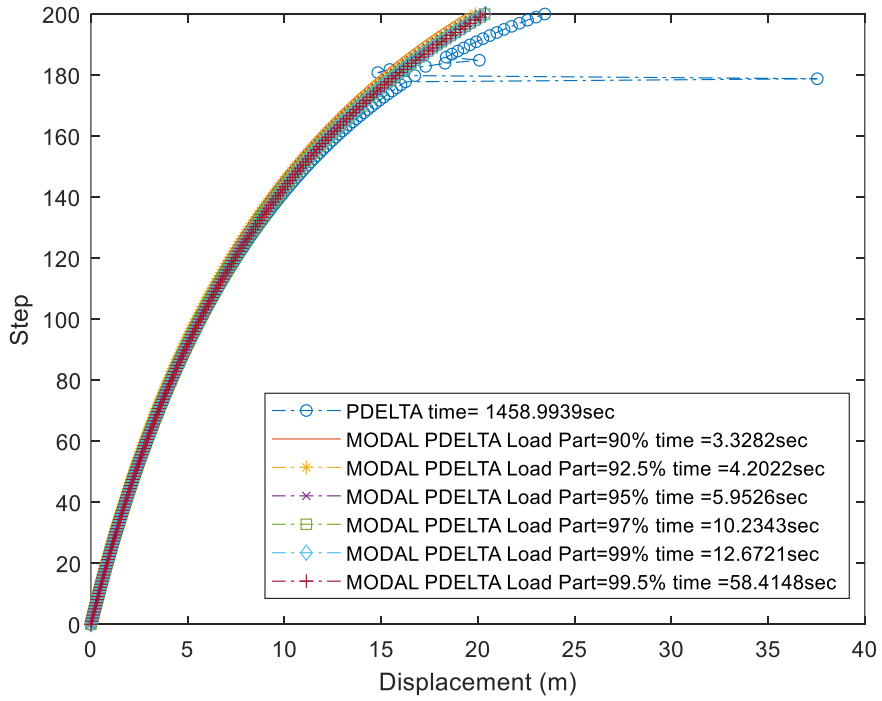
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.25. Respuesta en “x” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.6



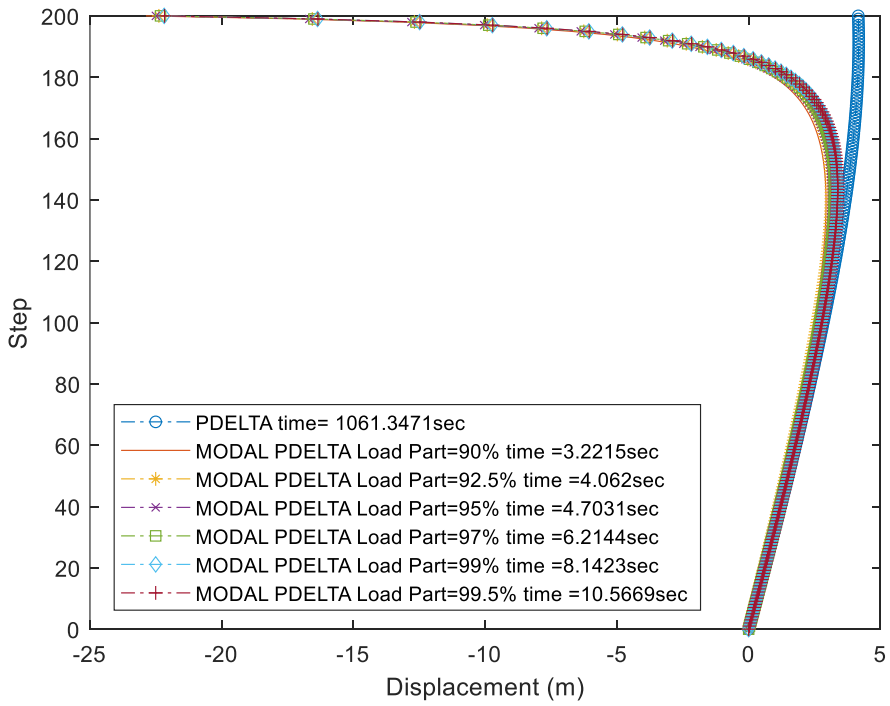
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.26. Respuesta en “y” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.3



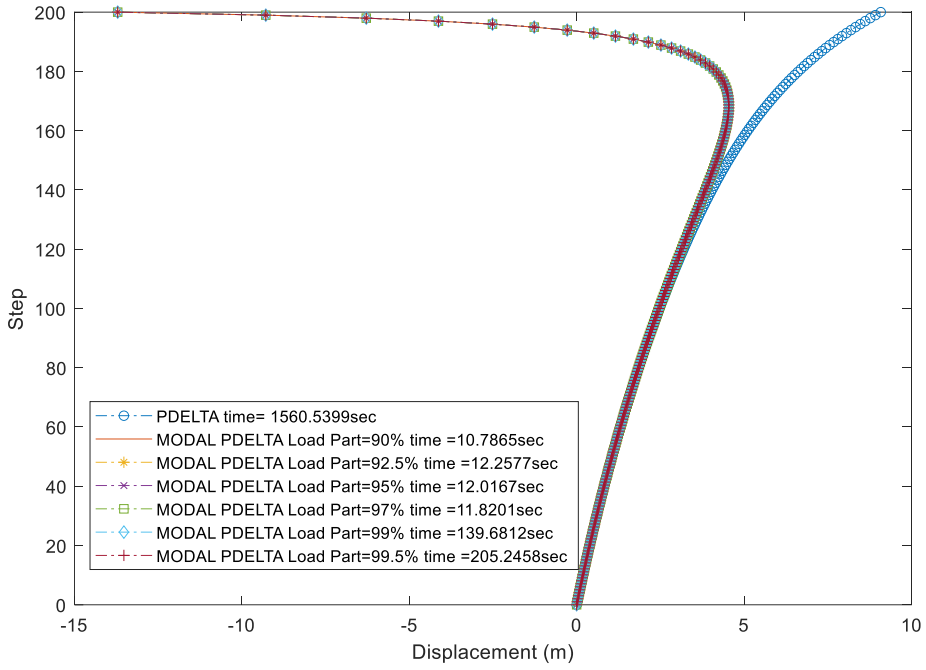
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.27. Respuesta en “y” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.4



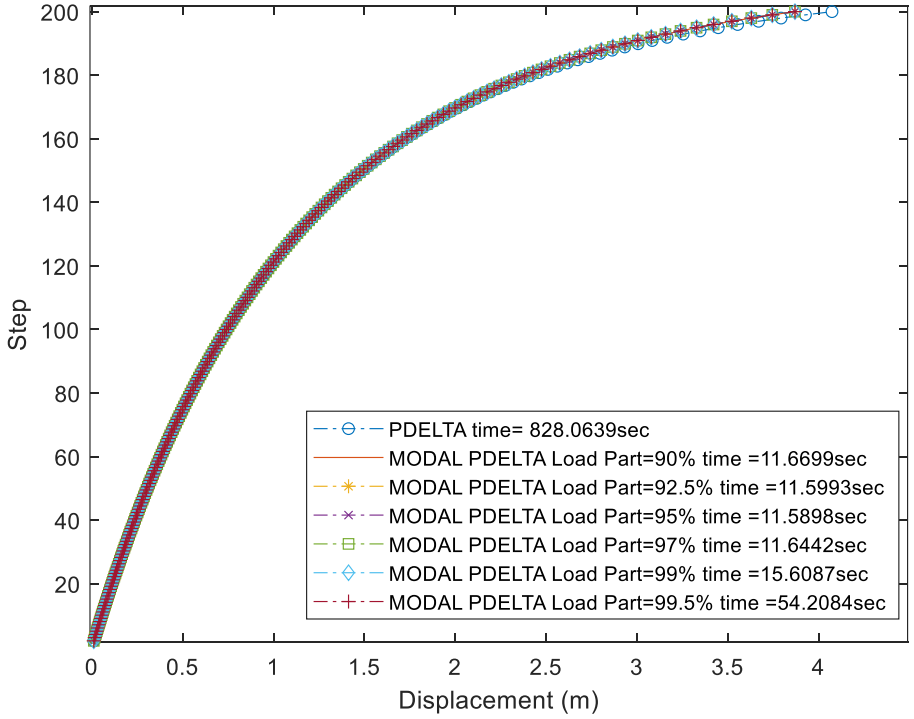
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.28. Respuesta en “y” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.5



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.29. Respuesta en “y” - Modelo M-2 – estado de carga C-2.6



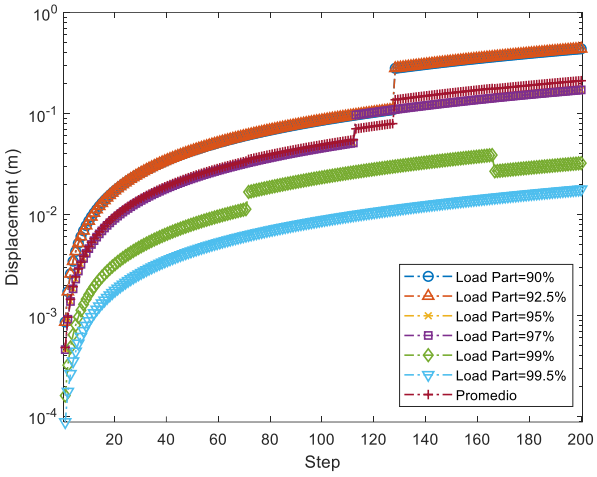
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

De los resultados mostrados, para el Modelo (M-2) se observa lo siguiente:

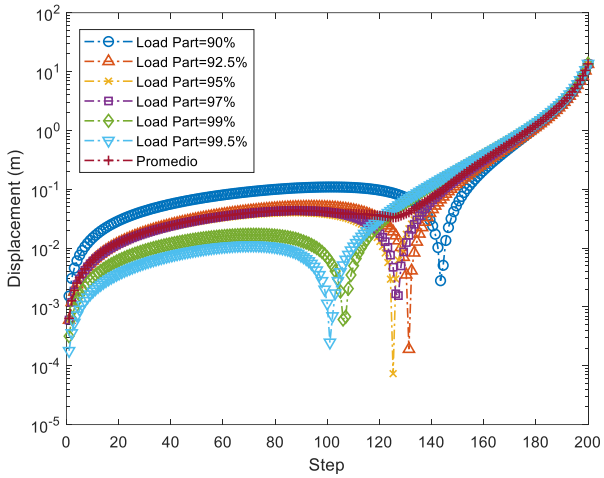
- Para el estado de carga C-2.1, las respuestas obtenidas en ambos sentidos son semejantes a las calculadas con la metodología tradicional, con un error que se incrementa en los últimos pasos de carga.
- Para el estado de carga C-2.2, donde se aplica solo cargas laterales en la dirección "x", se aprecia que la cantidad de modos usados en los primeros análisis, cuando la participación de la carga estática alcanza hasta el 99%, resultan ser insuficientes para hallar una respuesta que se asemeje a la respuesta obtenida con el método tradicional Modal P-delta, esto acontece principalmente debido a la ausencia de cargas verticales que no permitiría obtener una buena distribución de los esfuerzos dentro de los elementos de la estructura, por lo que, para obtener una buena aproximación se requiere usar una cantidad de modos que corresponda a una participación de al menos el 99.5% de la carga estática, lo cual no representaría un incremento de tiempo computacional significativo y seguiría siendo menor al tiempo computacional que toma la metodología tradicional P-delta.
- Para el estado de carga C-2.3, donde se aplica solo cargas laterales en la dirección "y", se aprecia que la metodología tradicional no converge para un intervalo de pasos de carga, donde la matriz de rigidez total de la estructura tiende a ser singular, originando que los desplazamientos calculados sean considerables.
- Para los estados de carga C-2.4 y C-2.5, donde se consideran la aplicación de las fuerzas horizontales en la parte superior de la estructura, tanto en el sentido "x" como en el sentido "y", se observa que aproximadamente a partir del paso de carga "130", se comienza a originar una variación en cuanto a los desplazamientos calculados (en ambas direcciones), con la metodología tradicional y metodología propuesta, sin embargo se han obtenido resultados similares para pasos de carga inferiores al 130.
- Para el caso de Carga C-2.6, donde se consignan cargas distribuidas en todas las vigas de todos los niveles de la estructura, se han obtenido respuestas que son muy semejantes a aquellas obtenidos con la metodología tradicional, en ambos sentidos "x" y "y".

A continuación, en la *Figura 6.30* y *Figura 6.31* se presentan los errores para cada análisis desarrollado para el modelo (M-2).

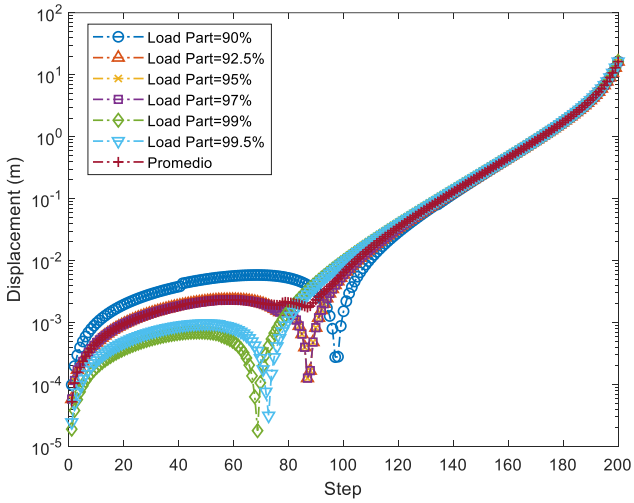
Figura 6.30. Error en “x” para el análisis del Modelo (M-2) bajo diferentes estados de carga



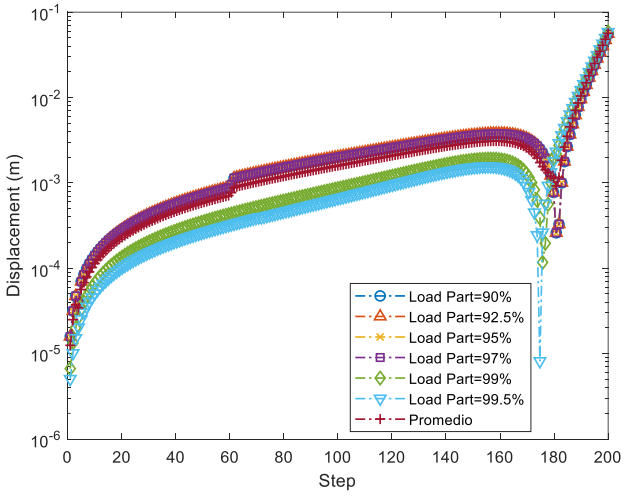
C-2.2



C-2.4



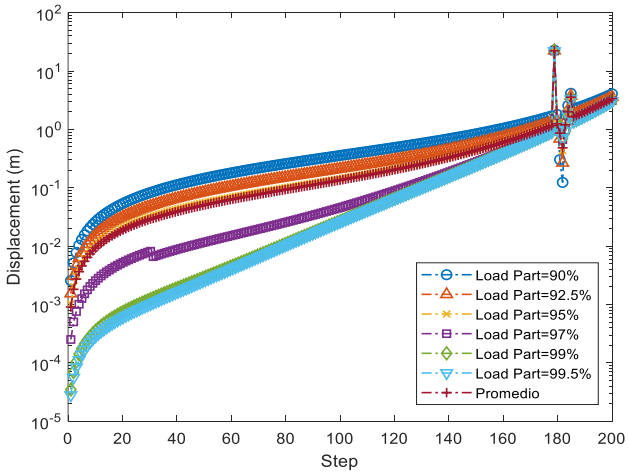
C-2.5



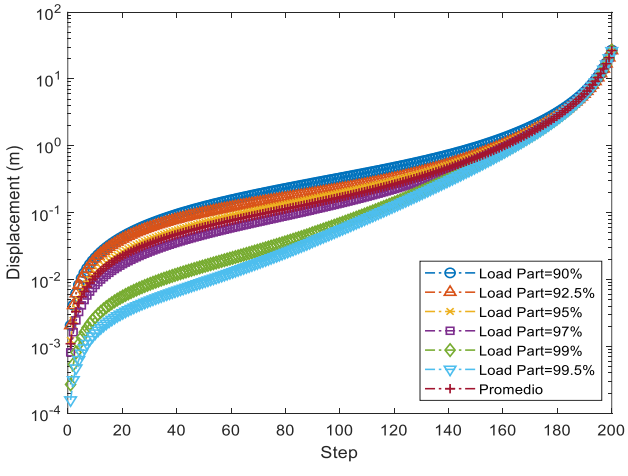
C-2.6

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

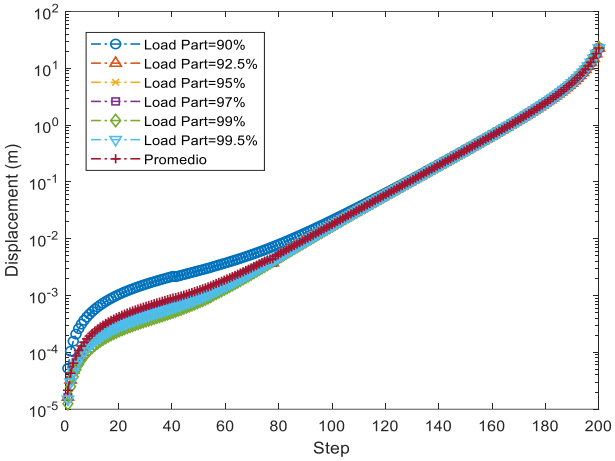
Figura 6.31. Error en “y” para el análisis del Modelo (M-2) bajo diferentes estados de carga



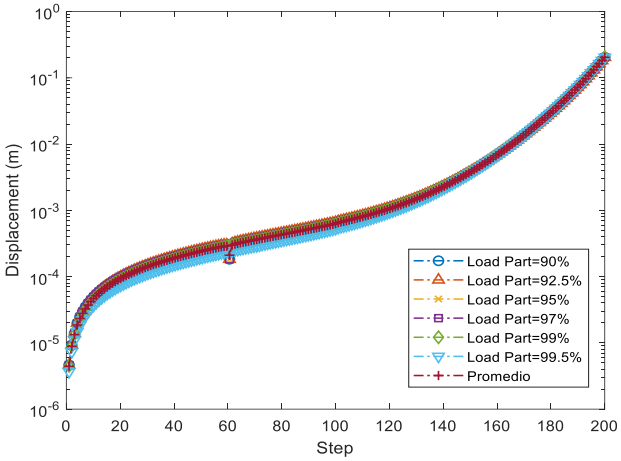
C-2.3



C-2.4



C-2.5



C-2.6

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

A partir de lo mostrado para el Modelo (M-2), se puede verificar que:

- Para el modelo analizado, el error resultante en cada caso de carga analizado ha sido menor cuando se ha considerado el análisis la cantidad de modos (*nmo)* correspondientes a una participación de la carga estática (r) de 99.5%.
- El error máximo consignado en la dirección “x” y dirección “y” para el último paso de carga, se encuentra en el orden de 10m aproximadamente y corresponde al estado de carga C-2.5 en ambos casos.
- Para el caso de carga C-2.3, se puede identificar los desplazamientos surgidos cuando la metodología tradicional usada como referencia, no converge, por lo que los desplazamientos tienden a crecer y decrecer, puesto que la matriz de rigidez tiende a ser cero.
- Los errores en todos los estados de carga, independientemente de la cantidad de modos usados en el análisis, tienden a poseer un valor similar en el último paso de carga (nstep=200).

6.2.3 Modelo (M-3):

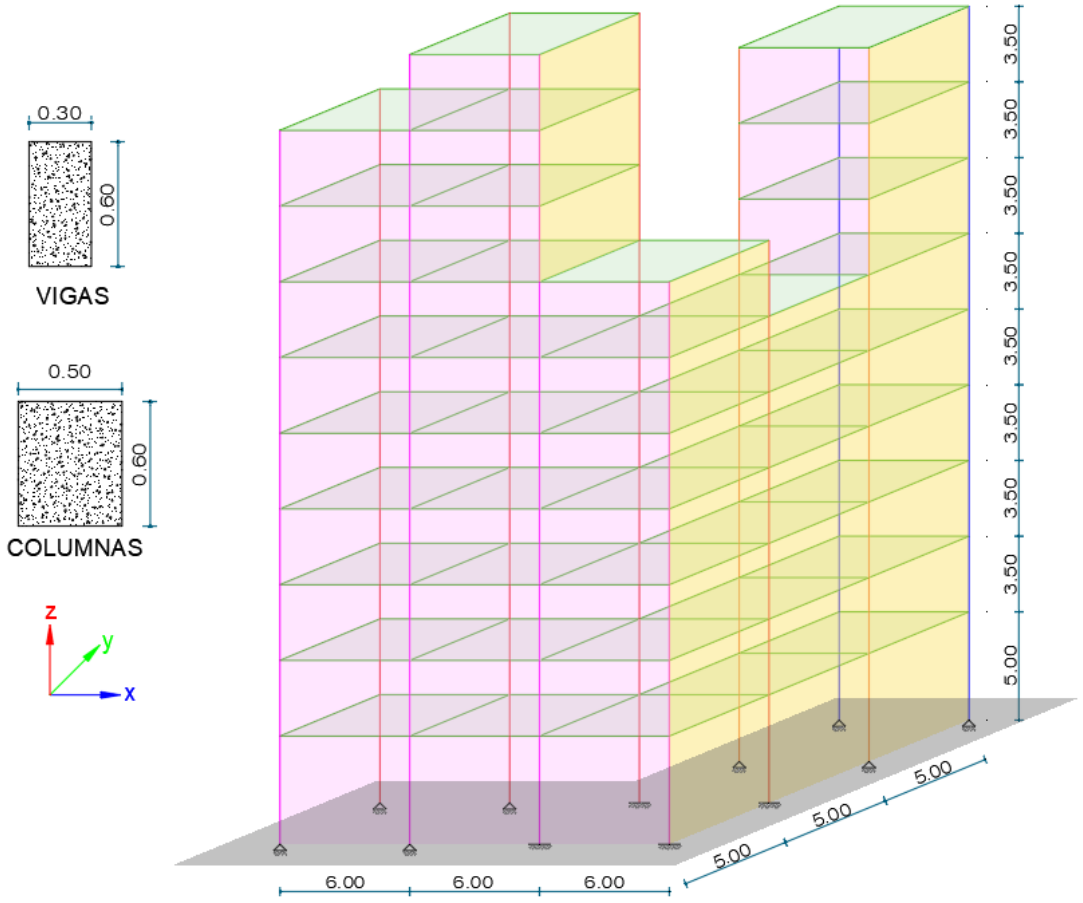
Finalmente, para el desarrollo de la metodología propuesta “Modal P-delta Modificado", se ha desarrollado un modelo (M-3) de un pórtico tridimensional irregular tanto en planta como en altura, cuyos esquemas se muestran en la *Figura 6.32*, *Figura 6.33*, *Figura 6.34*, y cuyas características se especifican en la Para la aplicación de la metodología del modelo M-3, se ha establecido los estados de carga mostrados en la

Figura 6.35, donde se especifican los respectivos factores de amplificación (α_n) para alcanzar a la carga crítica de pandeo, así mismo, las participaciones de la carga estática (r) calculados con la Eq. 6.3 y el número de modos correspondientes a usar en el análisis, son especificados en la Tabla 12.

Tabla 11.

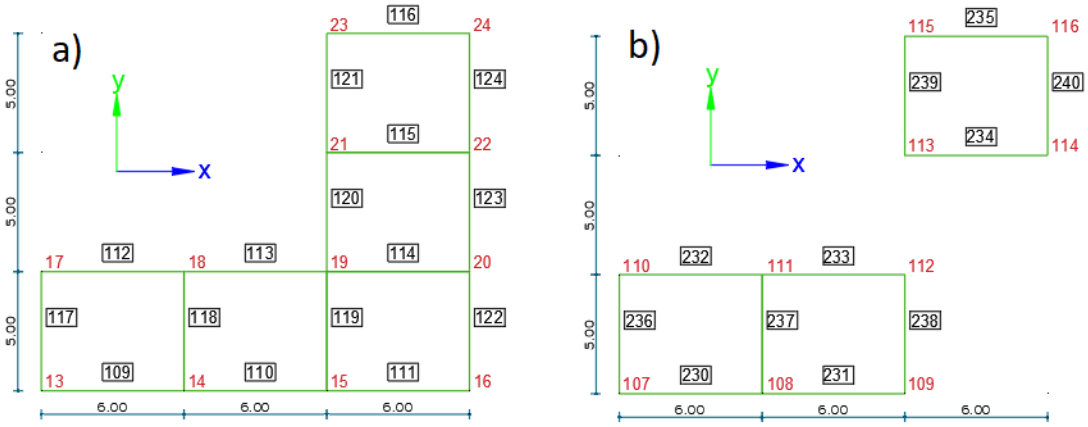
Es importante tener en cuenta que, en el presente modelo, a diferencia de los anteriores, se ha considerado con apoyos fijos y empotrados en la base, esta consideración es realizada con la finalidad de conseguir que el modo fundamental de vibración o modo con mayor frecuencia natural, resulte ser un modo torsional para poder de esta manera, verificar la eficiencia de la metodología propuesta cuando el modo fundamental no corresponde a uno traslacional, como en los ejemplos anteriores.

Figura 6.32. Esquema de Pórtico Tridimensional (M-3)



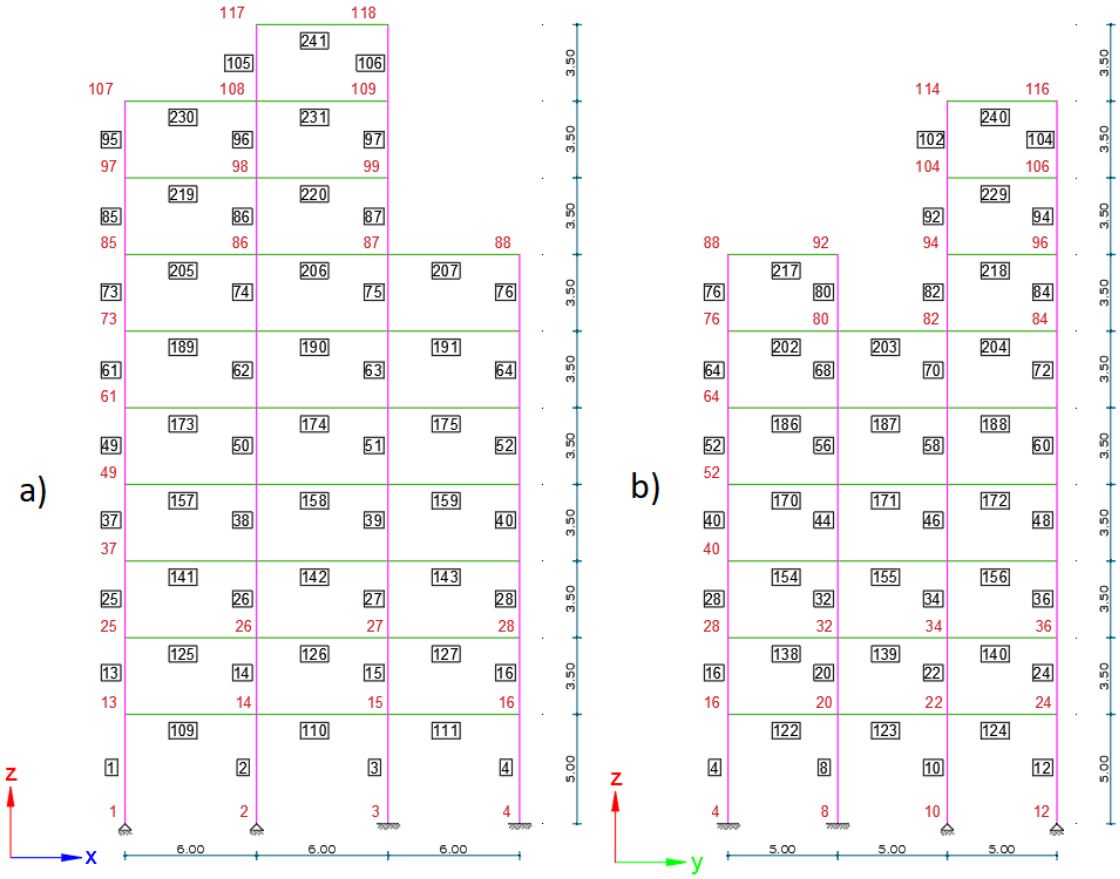
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.33. a) Esquema del modelo (M-3) en el plano (x-y) correspondiente al 2do nivel (h=5.00m) b) Esquema del modelo (M-3) en el plano (x-y) correspondiente al penúltimo nivel (h=33.00m)



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.34. a) Esquema del modelo (M-3) en el plano Frontal (x-z) b) Esquema del modelo (M-3) en el plano posterior derecho (y-z)



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

Para la aplicación de la metodología del modelo M-3, se ha establecido los estados de carga mostrados en la

Figura 6.35, donde se especifican los respectivos factores de amplificación (α_n) para alcanzar a la carga crítica de pandeo, así mismo, las participaciones de la carga estática (r) calculados con la Eq. 6.3 y el número de modos correspondientes a usar en el análisis, son especificados en la Tabla 12.

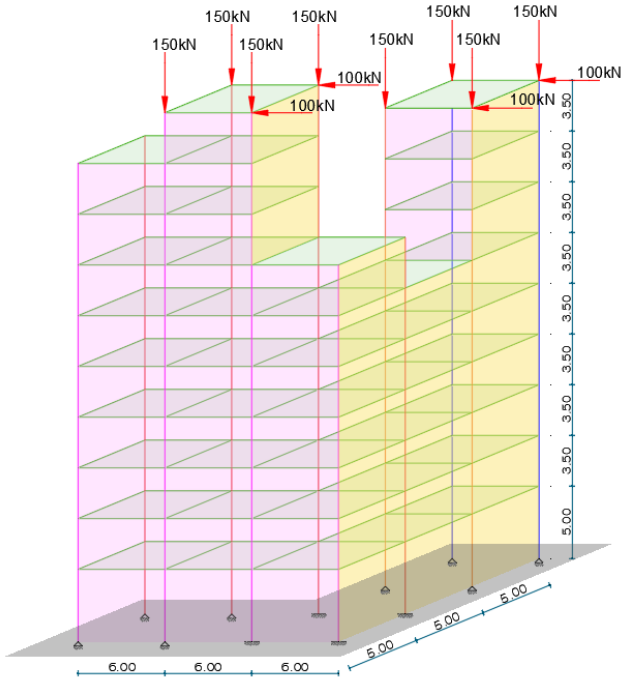
Tabla 11. Propiedades del Pórtico Tridimensional (M-3)

	Columnas	**Vigas en "x"**	**Vigas en "y"**
Longitud (m)	5.00 (1° nivel)	6.00	5.00

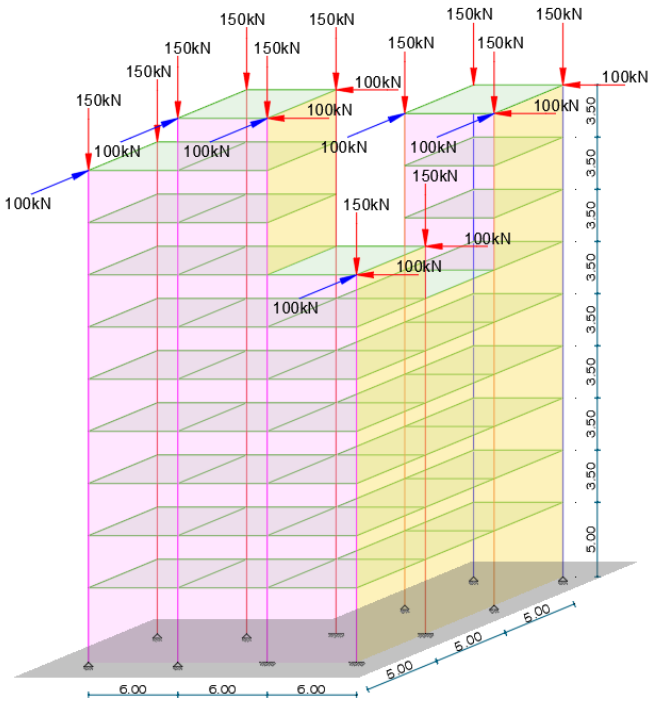
	3.50 (resto)		
Sección (m)	0.50x0.60	0.30x0.60	0.30x0.60
Área transversal (m2)	0.30	0.18	0.18
Inercia en "z" Iz (m^4)	0.009	0.0054	0.0054
Inercia en "y" Iy (m^4)	0.00625	0.00135	0.00135
Inercia en "x" Ix (m^4)	0.0124	0.0037	0.0037
Módulo de Poisson μ	0.2	0.2	0.2
Módulo de Corte G	1.1333 E^{+10}	1.1333 E^{+10}	1.1333 E^{+10}
Peso específico ρ (kg/m^3)	2500	2500	2500
Módulo de Elasticidad (N/m^2)	2.72E^{+10}	2.72E^{+10}	2.72E^{+10}

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

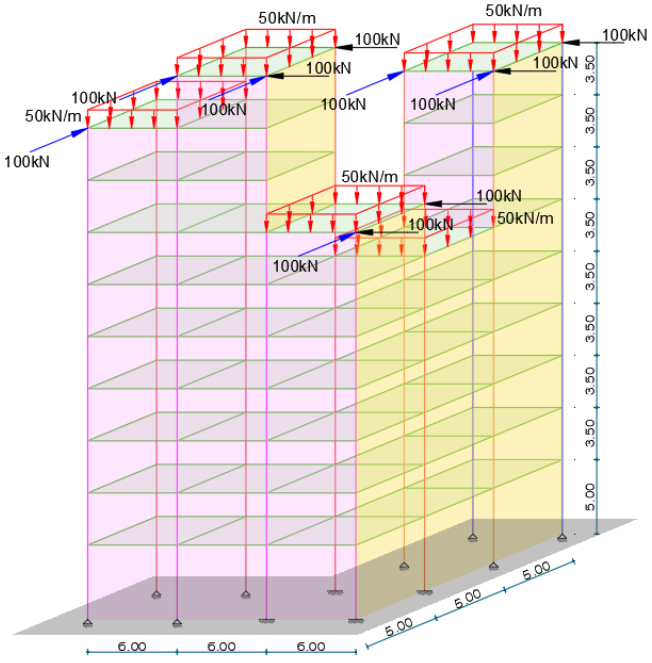
Figura 6.35. Estados de carga analizados para el modelo M-3



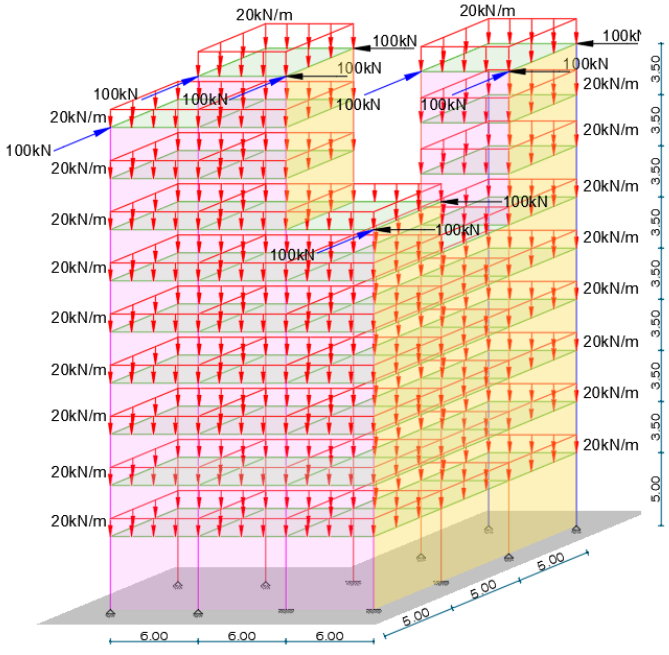
C-3.1
α_n = 68



C-3.2
α_n = 32



C-3.3
α_n =25



C-3.4
α_n = 10

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

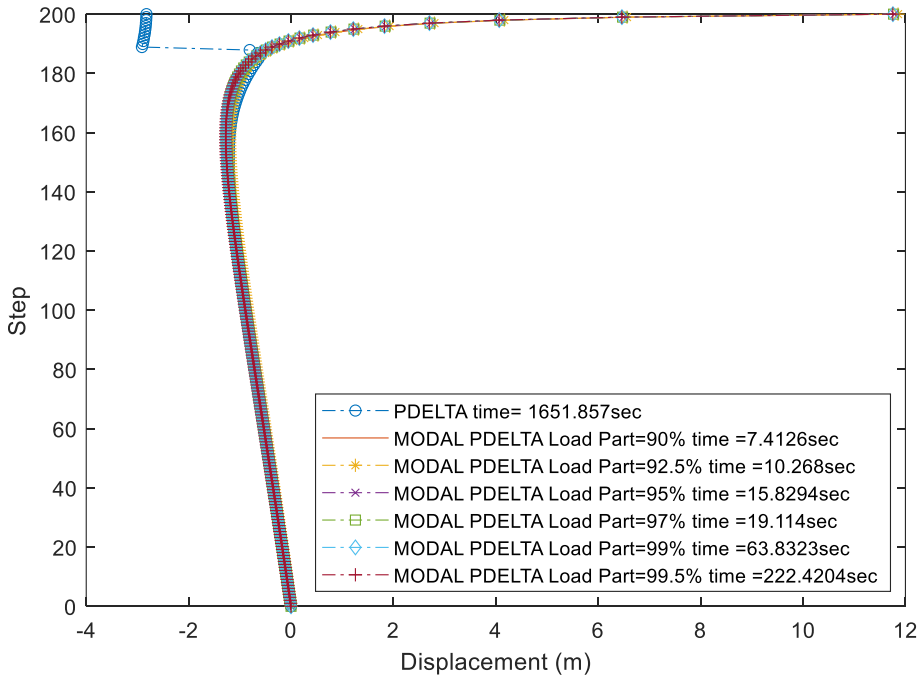
Tabla 12. Participación de la carga estática y número de modos correspondientes

Estado de Carga		**C-3.1**	**C-3.2**	**C-3.3**	**C-3.4**
# Análisis	**Participación (r)**	**# Modos (nmod)**	**# Modos (nmod)**	**# Modos (nmod)**	**# Modos (nmod)**
01	90.00%	17	7	41	50
02	92.50%	27	9	50	50
03	95.00%	41	17	58	50
04	97.00%	50	38	148	52
05	99.00%	144	60	238	74
06	99.50%	274	146	298	148

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

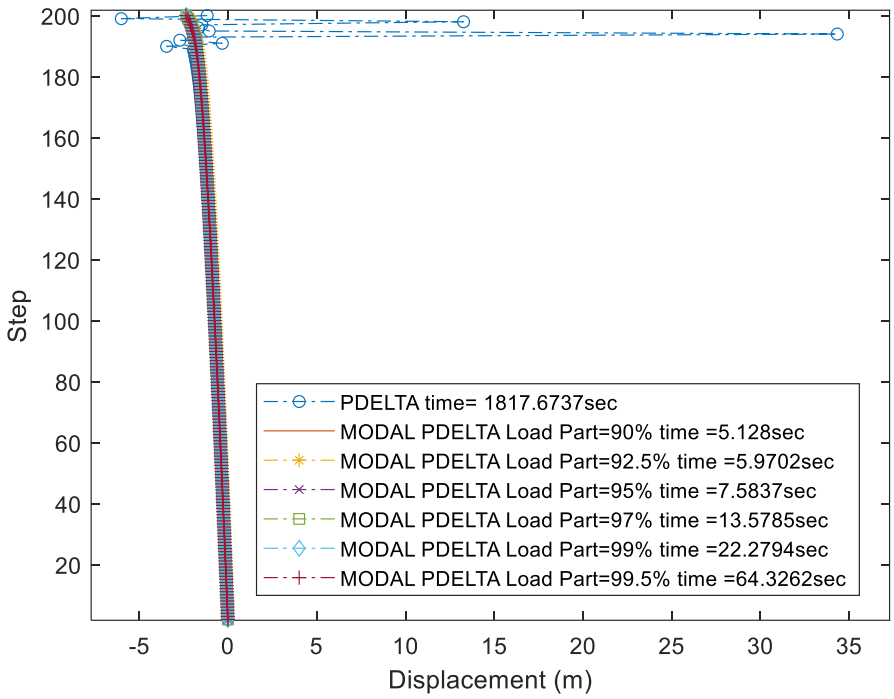
Los resultados de los análisis, expresados en curvas de equilibrio, se muestran desde la *Figura 6.36* hasta la *Figura 6.43*, tanto para el sentido "x" como en el "y", teniendo como punto de control al nodo 118, mostrado en la *Figura 6.34* (a).

Figura 6.36. Respuesta en "x" - Modelo M-3 – Estado de Carga "C-3.1"



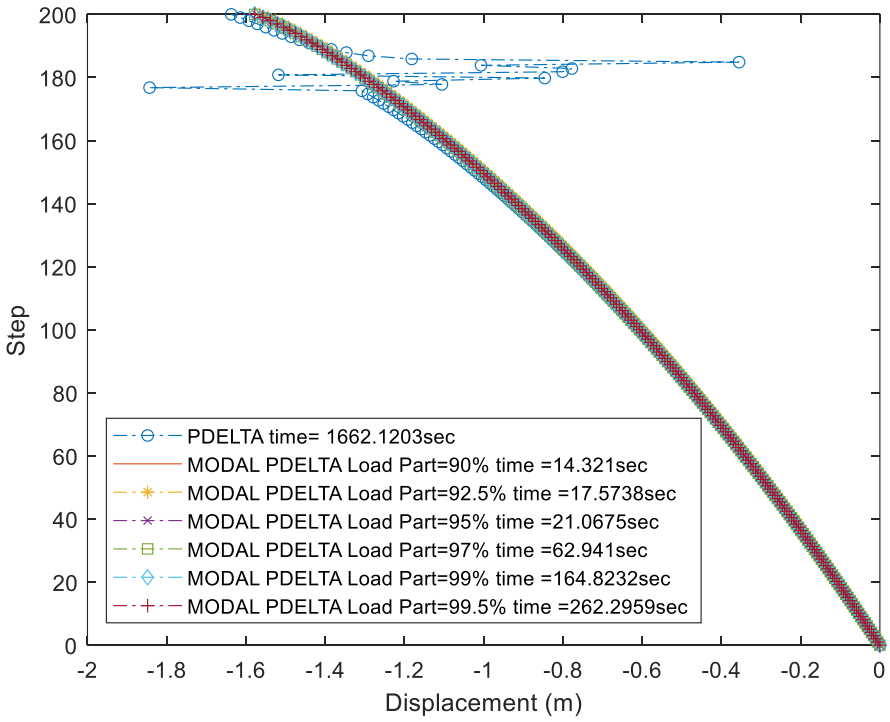
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.37. Respuesta en “x” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.2”



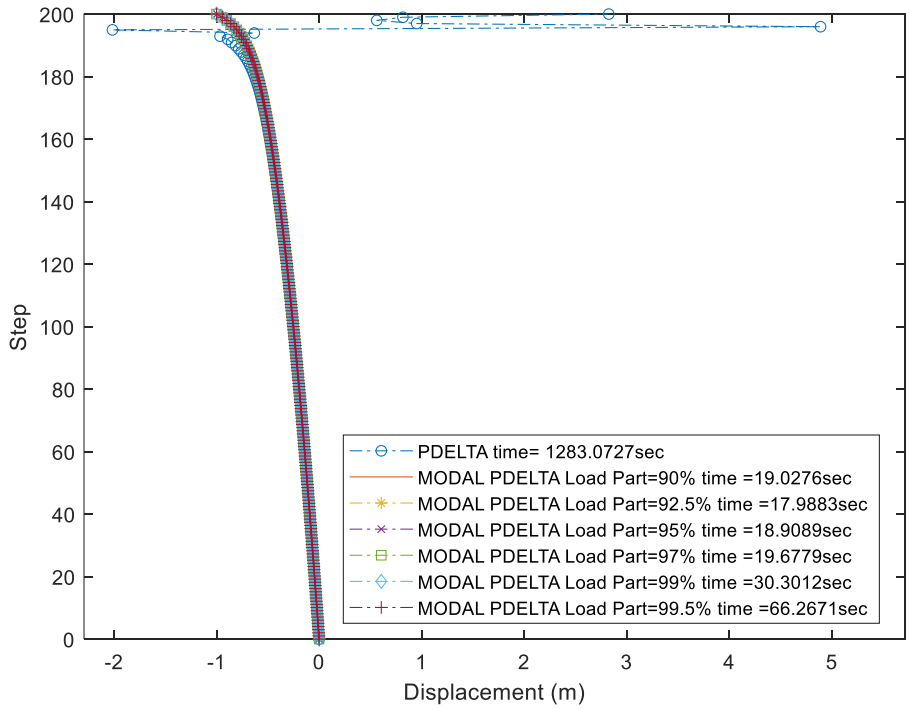
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.38. Respuesta en “x” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.3”



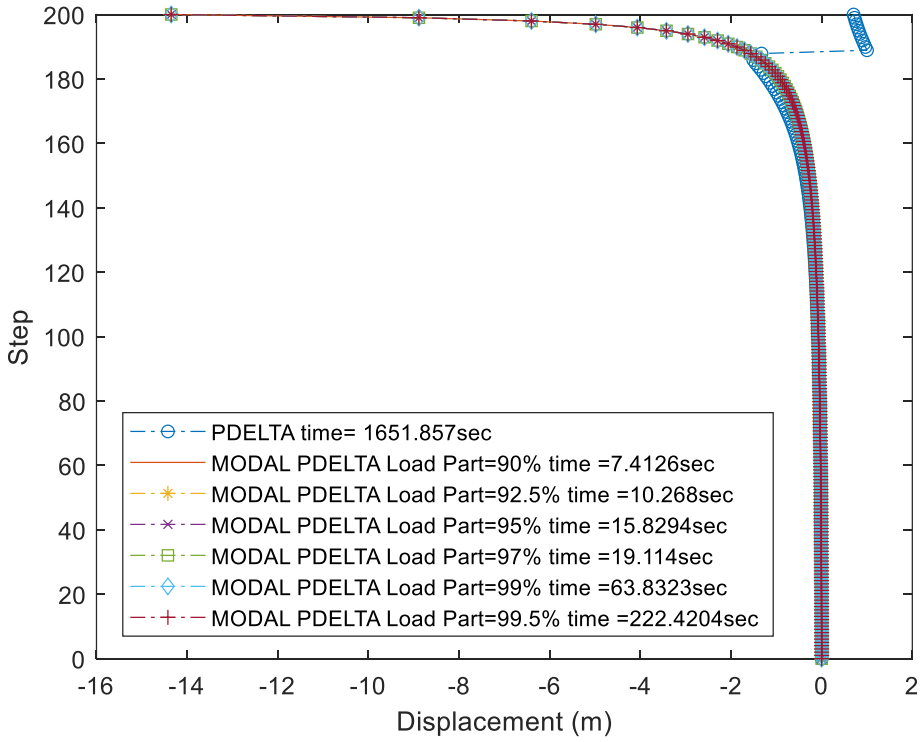
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.39. Respuesta en “x” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.4”



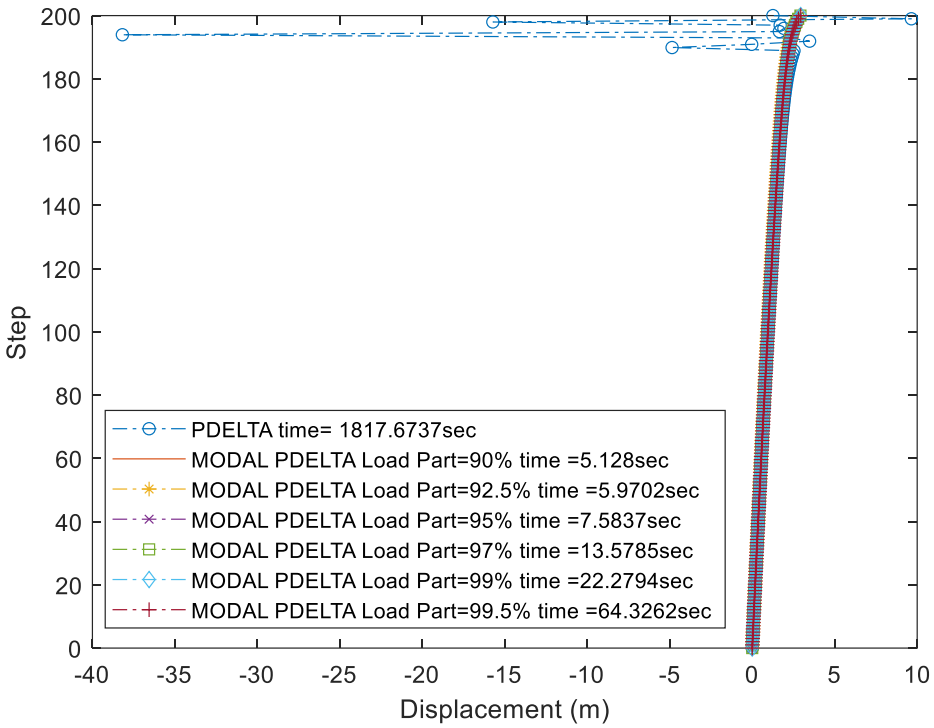
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.40. Respuesta en “y” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.1”



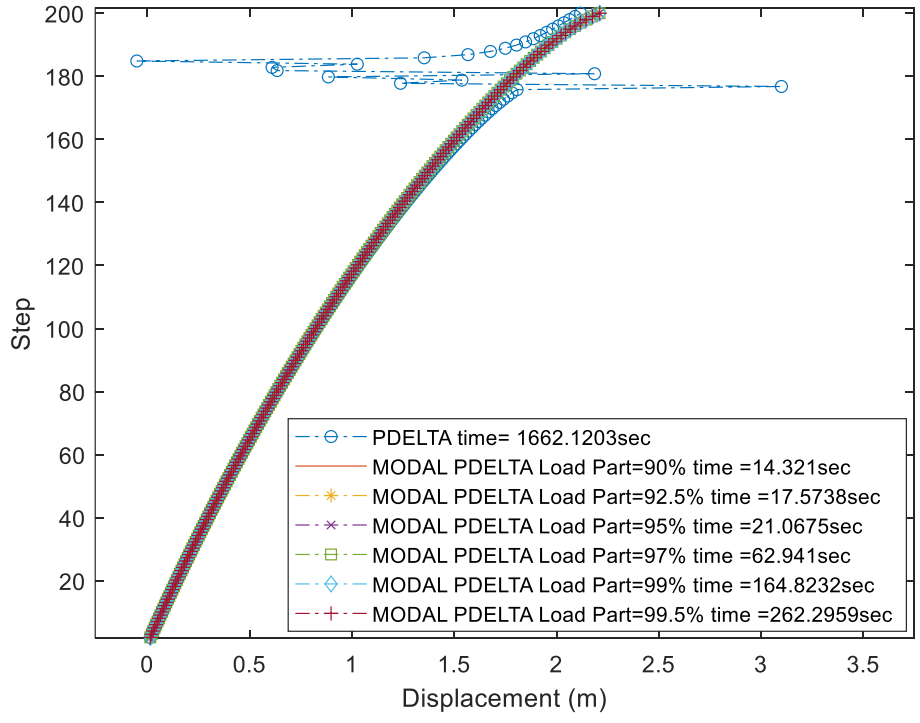
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.41. Respuesta en “y” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.2”



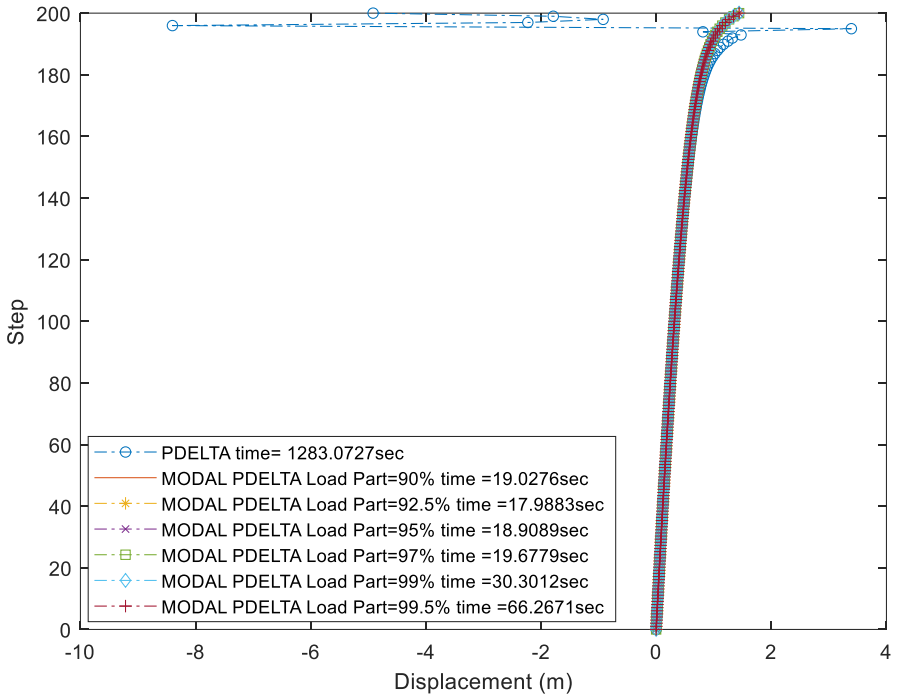
Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.42. Respuesta en “y” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.3”



Fuente: (Elaborado por el autor, 2022.)

Figura 6.43. Respuesta en “y” - Modelo M-3 – Estado de Carga “C-3.4”



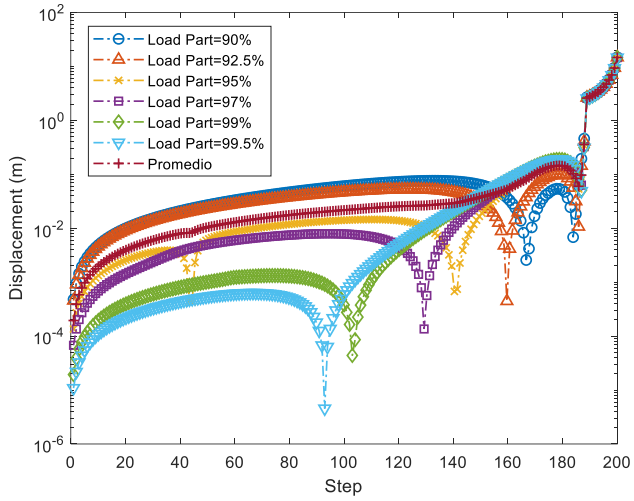
Fuente: (Elaborado por el autor)

De los resultados mostrados, para el Modelo (M-3) se observa lo siguiente:

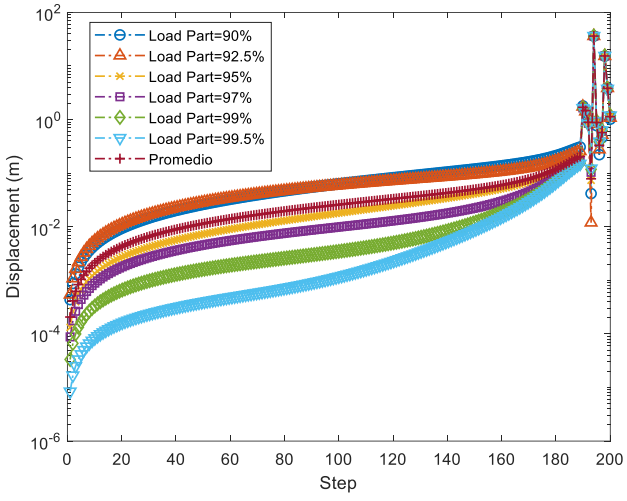
- Para todos los estados de carga analizados C-3.1, C-3.2, C-3.3 y C-3.4, se aprecia que la metodología tradicional no converge para un intervalo de pasos de carga, mientras que la metodología propuesta se extiende hasta el pandeo.
- Para todos los estados de carga analizados, se aprecia que para los pasos de carga inferiores a aquellos pasos donde la metodología tradicional no converge, las respuestas obtenidas con la metodología Modal P-delta modificado son similares y siguen la trayectoria de la curva de equilibrio.
- Para el caso de carga C-3.1, donde solo se considera la aplicación de cargas horizontales en un solo sentido, se obtendrá respuesta tanto en “x” como en “y”, debido a que la irregularidad del modelo (M-3) ocasionará que exista desplazamientos en dichos sentidos.

A partir de los resultados, se han calculado los errores para cada análisis desarrollado en cada estado de carga, los cuales se muestran en la *Figura 6.44* y *Figura 6.45*, y corresponden al error en la dirección “x” y dirección “y” respectivamente.

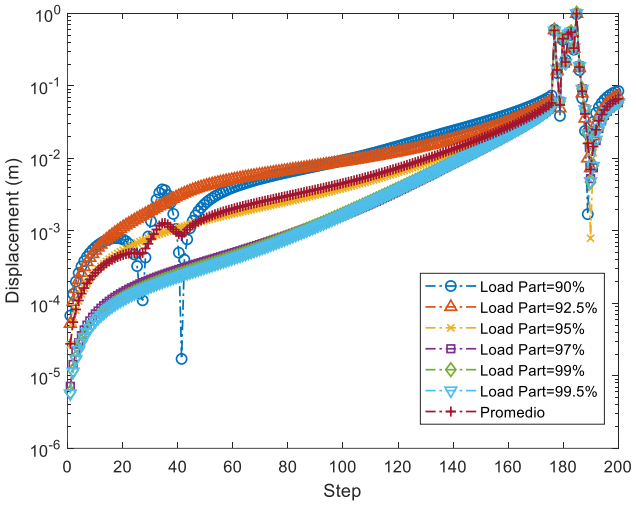
Figura 6.44. Error en “x” para el análisis del Modelo (M-3) bajo diferentes estados de carga



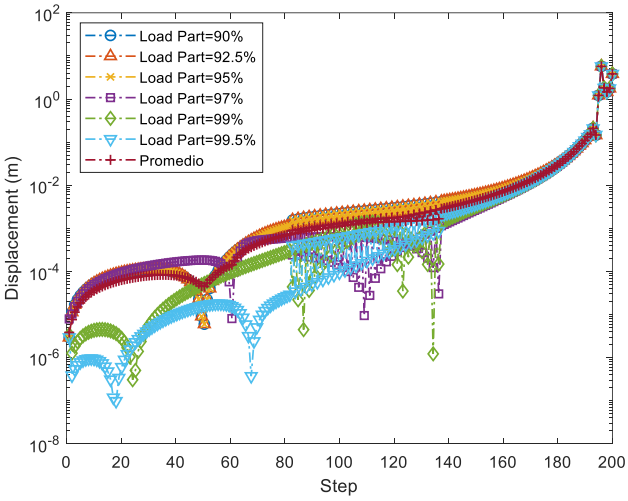
C-3.1



C-3.2



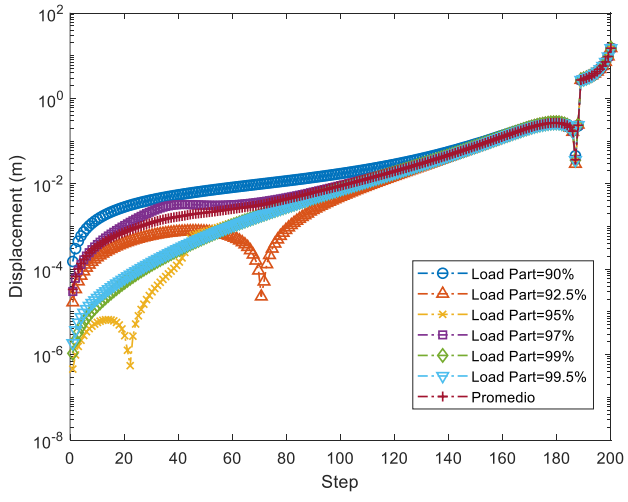
C-3.3



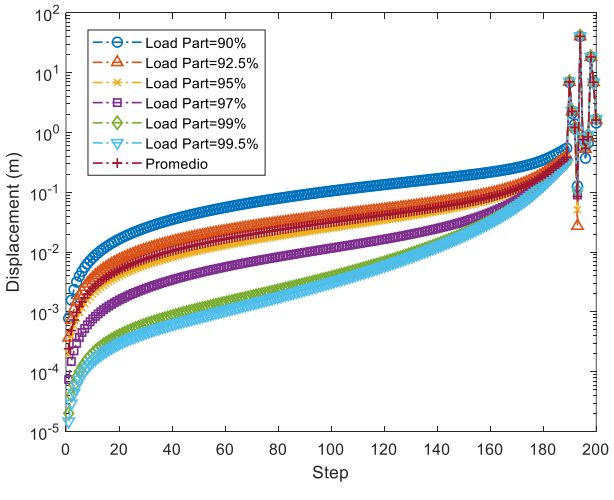
C-3.4

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

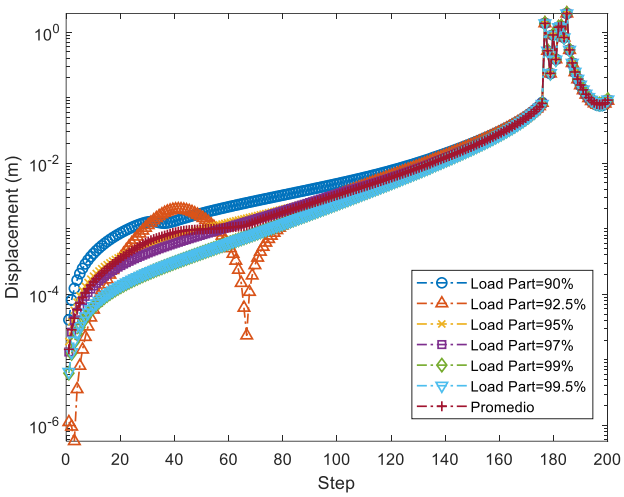
Figura 6.45. Error en “y” para el análisis del Modelo (M-3) bajo diferentes estados de carga



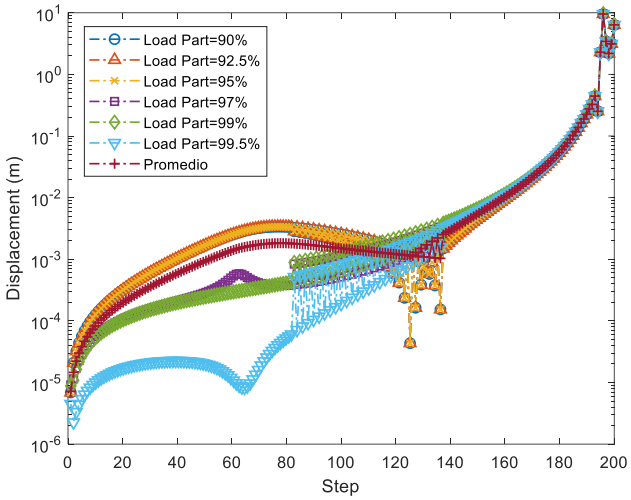
C-3.1



C-3.2



C-3.3



C-3.4

Fuente: (Elaborado por el autor, 2022)

A partir de los errores mostrados para el Modelo (M-3), se puede verificar que:

- Para el modelo analizado, el error resultante para cada estado de carga analizado ha sido menor cuando se ha considerado el análisis con los primeros modos (*nmo)* correspondientes a una participación de la carga estática (r) de 99.5%.
- El error máximo consignado en la dirección "x" y dirección "y" para el último paso de carga, se encuentra en el orden de $1e^{-1}$ aproximadamente y corresponde al estado de carga C-3.4 en ambos pasos.

De forma general para los tres modelos analizados (M-1, M-2 y M-3) se puede observar que:

- Existen estados de carga como el C-1.4, C-2.4 y C-2.5, donde se observa una diferencia considerable entre las respuestas obtenidas con ambas metodologías a partir de un cierto paso de carga, lo que se muestra como una bifurcación entre las curvas de equilibrio calculadas, esto es debido a que conforme se incrementan los valores de todas las cargas aplicadas a la estructura, llegaría un punto en el que se ocasionaría una redistribución de los esfuerzos internos en los elementos (transición de compresión a tensión), lo que causaría que las nuevas matrices de rigidez geométricas calculadas tiendan a cambiar de signo o tener un valor cercano a cero, ocasionado que ya no exista una disminución de la rigidez, más por el contrario un aumento de esta para ciertos pasos de carga, por lo que la

aproximación realizada con la metodología propuesta ya no sería eficaz a partir de dicho estado de carga.

- Existen estados de carga como el C-1.5, C-2.3, C-3.1, C-3.2, C-3.3 y C-3.4, donde la metodología tradicional no alcanza a converger correctamente para valores e intervalos de fuerza cercanos a la carga crítica, esto es debido a que, en la metodología tradicional, la matriz de rigidez del sistema calculada tendería a volverse singular ocasionando que las deformaciones de la estructura tiendan a crecer considerablemente. A diferencia de ello, la metodología propuesta no presenta tales limitaciones ya que esta propone básicamente realizar una disminución de la rigidez de la estructura proporcional a la magnitud de la carga aplicada, por lo que en ningún caso se presentaría tales divergencias. Sin embargo, a pesar de ello, se puede verificar que las curvas obtenidas con ambas metodologías siguen la misma trayectoria de respuesta tanto para el sentido "x" como para el sentido "y"-
- Para los estados de carga C-1.6, C-2.6 y C-3.4, donde se han considerado cargas distribuidas en todas las vigas (que vendría a ser una distribución más real de las cargas que podrían actuar en una estructura), las respuestas han sido muy semejantes a los obtenidos con la metodología tradicional tanto en sentido "x" como en el sentido "y", esto es debido a que dicha aplicación de cargas generaría una mejor distribución de los esfuerzos internos en todos sus elementos, permitiendo así que la aproximación de la matriz de rigidez geométrica propuesta sea más exacta y en consecuencia también los resultados.
- Para los estados de carga, donde los errores de las respuestas calculadas con la metodología propuesta son apreciables (sobre todo en los últimos pasos de carga), se observa que las deformaciones obtenidas tanto en el sentido "x" como en el sentido "y", llegan a superar los dos (C-2.4), cinco (C-1.4) e incluso diez metros (C-1.5), lo cual, en la práctica real resultaría algo ficticio (es mostrado con fines académicos) puesto que los materiales, como el concreto armado, nunca alcanzarían tales deformaciones sin antes fallar, así mismo, los códigos que rigen los diseños de estructuras alrededor del mundo, generalmente limitan estos desplazamientos laterales a valores muy pequeños. Por lo tanto, es factible el poder afirmar que la metodología propuesta, a pesar del error que presenta, puede

ser aplicada eficientemente en el análisis no lineal geométrico de estructuras bajo estados de carga reales que van a generar pequeñas deformaciones laterales.

- En general, a partir de todos los estados de carga analizados en el presente trabajo, se verificado fehacientemente que la metodología propuesta “Modal P-delta modificado”, puede ser usada eficazmente para el análisis no lineal geométrico de estructuras sometidas a cargas que representan hasta el 50% de la carga crítica de Pandeo. (0.5 α_1), lo cual vendría a ser una condición presente en muchas de las estructuras existentes en nuestro medio, por lo que la metodología propuesta podría ser empleada en el diseño de proyectos de estructuras compuestas por pórticos.

7 CONSIDERACIONES FINALES:

7.1 CONCLUSIONES:

En primer lugar, en el presente trabajo se realizó el estudio y la aplicación de la metodología denominada Modal P-delta, propuesta por Ferreira (2020), corroborándose la eficacia de la metodología como método de análisis no lineal geométrico en estructuras de dos dimensiones mediante el desarrollo de modelos estructurales correspondientes a un pilar empotrado libre y a un pórtico plano, a partir de lo cual han sido propuestas ciertas modificaciones tanto en el procedimiento como en las rutinas de cálculo inicialmente propuestas logrando una mejora considerable en cuanto a la precisión de los resultados y a la reducción de los tiempos computacionales inicialmente presentados por Ferreira (2020),

Una vez optimizada la metodología Modal P-delta, se realizó la extensión de sus formulaciones para su aplicación en el análisis de estructuras de tres dimensiones, para lo cual fueron desarrollados dos pórticos en el espacio en los que se realizó su aplicación, y a partir de los resultados obtenidos se determinó que la metodología Modal P-delta, no es capaz de aproximar correctamente la respuesta no lineal geométrica de una estructura tridimensional sometida a un conjunto de cargas, esto debido principalmente a que la metodología propuesta por Ferreira (2022), depende mucho de la relación que existe entre los modos de vibración y los modos de pandeo de una estructura, que para el caso de estructuras tridimensionales bajo ciertos estados de carga, estos no son consistentes y no guardan relación entre sí, por lo que la interpolación de modos exigida por la metodología Modal P-delta no daría una buena aproximación de los modos de vibración de la estructura cargada.

Sin embargo, como resultado del presente trabajo de investigación, se ha propuesto una metodología alternativa denominada Modal P-delta modificado, como método simplificado de análisis no lineal geométrico para su aplicación en estructuras de tres dimensiones, la cual ha sido verificada con la metodología p-delta tradicional mediante su aplicación en diferentes modelos de estructuras porticadas tridimensionales, cada una de ellas con diferentes características como: la cantidad de niveles, las secciones de sus elementos, los modos fundamentales e incluso considerando la irregularidad tanto en planta como en altura, las cuales han sido sometidas a diferentes estados de carga, con lo que se demostró en todos los casos, que la metodología ofrece resultados muy precisos cuando se analizan estructuras con cargas que alcanzan hasta el 50% de la carga crítica de pandeo, siendo que en la realidad es muy difícil que en el diseño de una estructura se supere tal porcentaje.

Así mismo, de los análisis desarrollados se observó que la metodología propuesta Modal P-delta modificado ha arrojado mejores aproximaciones cuando se han evaluado estructuras con cargas verticales en todos sus elementos y en las estructuras rígidas que presentan pequeños desplazamientos laterales, los cuales también corresponderían a características reales de las estructuras que se construyen en nuestro medio, por lo que se concluye que la metodología propuesta puede ser usada como análisis no lineal geométrico para el diseño de estructuras porticadas independientemente del material.

7.2 SUGERENCIAS PARA NUEVAS PESQUISAS

El presente trabajo investigación ha demostrado que es posible realizar un análisis no lineal geométrico mediante la aproximación de la matriz de rigidez global de una estructura a partir de la aproximación de la matriz de rigidez geométrica, sin embargo, es necesario continuar con su estudio para verificar la eficacia de la metodología frente al comportamiento de una estructura real, de esta manera se sugiere para el desarrollo de trabajos futuros, realizar la verificación de los resultados que se pueden obtener cuando se calcula la matriz con un proceso iterativo, el cual resultaría ser un procedimiento más exacto que podría permitir la mejora de la precisión de los resultados cuando se apliquen cargas de más del 50% de la carga crítica de pandeo, omitiendo la utilización de la inversa de la matriz de rigidez, que exige el método tradicional P-delta.

Así mismo, es necesario profundizar en el estudio de la metodología, para poder desarrollar su extensión a modelos de elementos finitos que permitan representar el comportamiento del material (concreto, acero, etc.), considerando la no linealidad física, así como su extensión usando modelos de elementos finitos en tres dimensiones.

Finalmente, es necesario el desarrollo de la aplicación de la metodología propuesta en modelos que consideren en su configuración estructural, diafragmas rígidos, semirrígidos, flexibles, muros estructurales, e incluso tomar en cuenta consideraciones como la interacción del suelo y la estructura, y verificar su eficacia.

8 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). **ABNT NBR 6118**: Projeto de estrutura de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

BEAUFAIT, Fred. **Computer Methods of Structural Analysis.** New Jersey: Pretince-Hall, 1971.

FERREIRA, Wagner. **Uso Da Análise Modal e De Flambagem Linear Como Método De Análise Não Linear Geométrica Rápida Em Estruturas De Concreto Armado.** 2020. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz de Iguaçu, 2020.

FERREIRA, Wagner; CORDOVA, Jeffer; GOMEZ, Iván; GARCÍA, Jesús. Modal P-delta – simplified geometric nonlinear method by using modal and buckling analysis. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, Brasil, 19 sept 2022. DOI: https://doi.org/10.1590/S1983-41952023000200009. Disponível em: https://www.scielo.br/j/riem/a/sk4TtsDtbpV38TvwwLRpDHd/?lang=en#

GAIOTTI Regina.; STAFFORD Smith. P-Delta Análysis of Building Structures. **J. Struct. Eng.**, v. 115, p. 755-770, Edmonton, 1989.

LEITÃO, Fabio. **Avaliação dos efeitos globais de segunda ordem em estruturas irregulares de concreto armado utilizando o período natural de vibração.** 2018. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

MCCGUIRE, William; GALLAGHER, R.; ZIEMIA, R. **Matrix Structural Analysis.** 2.ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2000. 480p.

MONCAYO, Winston. **Análise de segunda ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado.** 2011. Dissertação (mestrado) – Universidade São Paulo, São Carlos, 2016.

NIXON, Don.; BEAULIEU, Denis.; ADAMS, Peter. Simplified Second Order Frame Analysis. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 2, n. 4, p. 602-605, Edmonton, 26 ago 1975. DOI: https://doi.org/10.1139/l75-055. Disponível em: https://cdnsciencepub.com/doi/abs/10.1139/l75-055?journalCode=cjce Acesso em: 11 Junho 2020.

PARREIRAS, Emanuel. **Modeling and Simulation of 3D Frame Structures**. 2002. Dissertação (Bacharelado) – Universidade Federal de Juis de Fora, Juis de Fora, 2019.

PASTOR, Miroslav; BINDA, Michal; HARCARIK, Tomás. Modal Assurance Criterion. **Technical University of Košice, Faculty of Mechanical Engineering**, Košice, 2012. DOI: https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.551. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705812046140 Acesso em: 30 de outubro 2022.

PINTO, Rivelli. **Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado**.1997. Dissertação (mestrado) – Universidade São Paulo, São Carlos, 1997.

REIS, Daniel. **Avaliação Modal Como Método de Previsão da Suscetibilidade de Estruturas a Efeitos de Segunda Ordem.** 2016. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.

RUTENBERG, Avigdor. A direct P-delta analysis using standard plane frame computer programs. **Computers & Structures**, v. 14, p. 97-102, Haifa, 5 set 1980. DOI: https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90088-2. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0045794981900882 Acesso em: 11 Junho 2020.

SHAKER, F.J.; CENTER, L.R. Effect of Axial Load on Mode Shapes and Frequencias Beams. **National Aeronatics and Space Administration**. Cleveland, Ohio p. 32. 1975.

STATLER, D.E.; ZIEMIAN R.D; ROBERTSON L.E. The Natural Period as an Indicator of Second-Order Effects. **Proceedings of the Annual Stability Conference Structural Stability Research Council,** Pittsburgh, 10 mai. 2011 Disponível em: https://www.aisc.org/globalassets/continuing-education/ssrc-proceedings/2011/the-natural-period-as-an-indicator-of-second-order-effects.pdf Acesso em: 10 Junho 2020.

WEAVER, William & GERE, James. **Matrix Analysis of Framed Structures.** 3.ed. New York: Van Nostrand Reinhold., 1929.

WIGHT, James; MACGREGOR, James. **Reinforced Concrete**: Mechanics and Design. 6 ed. New Jersey: Pearson, 2012.

WILSON, Edward. **Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures.** 3.ed. California: Computes & Structures Inc., 2002.

YOUNG, Warren & BUDYNAS, Richard. **Roark's Formulas for Stress and Strain Matrix.** 7.ed. New York: McGraw-Hill., 2002.